Matemáticas

aplicadas a las Ciencias Sociales

1 BACHILLERATO

Carlos González
Jesús Llorente
Mª José Ruiz

EDITEX

Índice

Unidad 1 – Números reales

PÁGINA 7

cuestiones iniciales

1. Encuentra varios números que estén comprendidos entre:

a) $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$ b) 2,1 y 2,2 c) 2,01 y 2,1

2. Describe un procedimiento que calcule $\sqrt[3]{10}$ utilizando solamente las teclas de las operaciones elementales de tu calculadora.

3. Ordena de menor a mayor los siguientes números:

5,31; –4,21; 5,201; –4,201; 5,2101; –4,2101; 4,211; 4,201

4. Comprueba la siguiente igualdad elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$2\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{6}-\sqrt{2}$$

5. ¿Para qué valores de n y a se cumple $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$?

SOLUCIONES

---

1. Diremos que:

   a) Los números comprendidos entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$ son: 0,42; 0,46; 0,54; 0,57.

   b) Los números comprendidos entre 2,1 y 2,2 son: 2,11; 2,14; 2,18; 2,195.

   c) Los números comprendidos entre 2,01 y 2,1 son: 2,03; 2,045; 2,076; 2,098.

2. Utilizando la tecla del producto podemos conseguir aproximaciones sucesivas del valor. Así:

$$2 \times 2 \times 2 < \sqrt[3]{10} < 3 \times 3 \times 3$$
$$2{,}1 \times 2{,}1 \times 2{,}1 < \sqrt[3]{10} < 2{,}2 \times 2{,}2 \times 2{,}2$$
$$2{,}15 \times 2{,}15 \times 2{,}15 < \sqrt[3]{10} < 2{,}16 \times 2{,}16 \times 2{,}16$$
$$2{,}154 \times 2{,}154 \times 2{,}154 < \sqrt[3]{10} < 2{,}155 \times 2{,}155 \times 2{,}155$$
$$2{,}1544 \times 2{,}1544 \times 2{,}1544 < \sqrt[3]{10} < 2{,}1545 \times 2{,}1545 \times 2{,}1545$$

3. La ordenación queda: $-4{,}2101 < -4{,}21 < -4{,}201 < 4{,}201 < 4{,}211 < 5{,}201 < 5{,}2101 < 5{,}31$

4. Elevando al cuadrado ambos miembros obtenemos:

$$\left(2\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2 \;\Rightarrow\; 4\left(2-\sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{6}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 - 2\sqrt{12}$$
$$\Rightarrow\; 8-4\sqrt{3} = 8-4\sqrt{3} \qquad \text{Se verifica la igualdad}$$

5. n par y $a \in R^+$ ó n impar y $a \in R$

PÁGINA 23

ACTIVIDADES

■ Clasifica las siguientes tareas en problemas o ejercicios e intenta resolverlas:

1. **Sumas.** Considera la serie de números pares 2, 4, 6, 8, etc. ¿Cuánto vale la suma de los *m* primeros?

2. **El camello sediento.** El beduino Ali-kan desea transportar 100 bidones llenos de agua desde Kamal hasta Wadi, pueblos separados por 100 km de desierto. Para ello, dispone de un camello capaz de andar descargado indefinidamente, o, de cargar con un solo bidón, siempre y cuando beba una cantidad de agua igual a la que contiene el bidón cada vez que completa 100 km cargado.

   El beduino no dispone de más agua para el camello que la contenida en los bidones. ¿Cuántos de estos 100 bidones podrán llegar a Wadi?

SOLUCIONES

1. $2+4+6+8+...+2m=m(m+1)$

2. Resolvemos en los siguientes pasos:

   - Supongamos que el camello lleva un bidón hasta la mitad del camino, vuelve a Kamal, carga con otro bidón hasta el mismo punto y se bebe uno de los bidones transportados, quedándole otro. Repitiendo el proceso conseguirá llevar 50 bidones hasta la mitad del camino. De aquí repitiendo lo mismo hasta Wadi conseguirá que lleguen 25 bidones según la expresión:

   $$50 \text{ bidones} = 100 \times \frac{1^2}{2^2}$$

   - Si mejoramos la solución conseguiremos que lleguen más bidones, haciendo el camino en tres fases tras el 1.^{er} tercio, el camello habrá bebido 33,333… bidones y quedan 66,666… En el 2.^{do} tercio se bebe 22,222… y quedan 44,444… En Wadi se bebe 14,81… y quedan 29,629… bidones, es decir:

   $$100 \times \frac{8}{27} = 100 \times \frac{2^3}{3^3}$$

   - Avanzando por cuartos de camino se puede mejorar la solución, llegan:

   $$31,640 \cong 100 \times \frac{81}{256} = 100 \times \frac{3^4}{4^4} = 100 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

   - Siguiendo así sucesivamente se puede decir que en el mejor de los casos llegan:

   $$100 \times \left(\frac{99}{100}\right)^{100} \cong 100 \times \frac{1}{e}$$

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Ordena, de mayor a menor, los siguientes números: 0,4; 0; –0,3; 42; –2,3; –20; 428

2. Efectúa los siguientes cálculos haciendo uso de la jerarquía de las operaciones:

a) $7 - 2 \cdot (-4) + 3 - 5 \cdot (-2 + 7)$ b) $4 \cdot 2^2 - (-1)^3 + [3 - (5 - 3^2)]$ c) $(-3)^2 - 3^2 + 2 \cdot (-1)^3$

3. Efectúa las siguientes operaciones, dando el resultado lo más simplificado posible:

a) $\frac{3}{2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{5} - 2$ c) $\frac{3}{2} : \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$ e) $2 + 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}\right)$

b) $\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot 3 - 2 + \frac{1}{3}$ d) $\left(2 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{7}\right) : \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{4}\right)$ f) $1 - 1 : \left(1 - \frac{1}{2}\right)$

4. Efectúa, dejando el resultado en forma de potencia de exponente natural:

a) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^{-3}$ c) $\left(2 - \frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{-2}$ e) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 : \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$

b) $\left(\frac{3}{5}\right)^3 : \left(\frac{3}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2$ d) $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 : \left(\frac{2}{3}\right)^6\right]^0$ f) $\left(\frac{5}{6}\right)^8 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-5} : \left(\frac{6}{5}\right)^3$

5. ¿Qué tipo de decimal genera cada uno de los racionales siguientes?

a) $\frac{28}{126}$ b) $-\frac{36}{225}$ c) $\frac{73}{63}$ d) $\frac{42}{528}$ e) $\frac{2\,145}{2\,100}$

6. Expresa cada decimal en forma de fracción, opera y el resultado final conviértelo en número decimal:

a) $3,\overset{\frown}{1} + 5,\overset{\frown}{21} + 2,8$ b) $(5,\overset{\frown}{4} - 3,\overset{\frown}{42}) \cdot 2,7$ c) $6,1\overset{\frown}{4} : 3,\overset{\frown}{4} \cdot 2,44$ d) $12,5 + 3,7\overset{\frown}{8} : 1,4$

7. Clasifica los siguientes números en racionales e irracionales:

a) 232,25 b) 0,273454545... c) 0,0103333... d) 37,34 334 3334 33334... e) –3,141542653589...

8. Un agricultor recoge 120 000 kg de manzanas. Vende a un mayorista los $\frac{7}{8}$ de la cosecha. De lo que le sobra vende a pequeños comerciantes los $\frac{2}{5}$. Del resto están estropeados los $\frac{3}{7}$ que se lleva un ganadero para alimento del ganado. De lo que le queda vende 20 000 kg a una fábrica de zumo y los kilogramos restantes los utiliza para el consumo familiar. ¿Cuántos kg consume la familia?

9. Un alumno tarda en pasar un trabajo a ordenador 12 horas, un segundo alumno tarda en pasar el mismo trabajo 8 h. El primer alumno trabaja durante 4 h y deja el resto del trabajo al segundo. ¿Cuánto tiempo tardará este en finalizarlo?

10. Halla el menor conjunto numérico al que pertenecen los siguientes números:

3	4,23	$\sqrt{13}$	0	$-\frac{3}{7}$	$-\sqrt{64}$	$1,0\overset{\frown}{3}$	$-\frac{12}{3}$	$\sqrt[3]{-8}$	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{-1,3}{0,5}$

11. Representa en la recta real los siguientes números:

-3^2	$2\sqrt{3}$	$\frac{8}{5}$	$-\sqrt{8}$	$-\frac{4}{3}$	1,6	$0,\overset{\frown}{7}$	$\sqrt[3]{125}$	$-\frac{18}{\sqrt{9}}$	$4^{\frac{1}{2}}$

SOLUCIONES

1. La ordenación pedida es: $428 > 42 > 0,4 > 0 > -0,3 > -2,3 > -20$

2. Las soluciones quedan:

a) -7 b) 24 c) -2 d) 0

3. Las soluciones quedan:

a) $-\frac{3}{20}$ b) $-\frac{1}{6}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{5}{11}$ e) $\frac{23}{5}$ f) -1

4. Las soluciones quedan:

a) 3^6 b) 1 c) 1 d) 1 e) $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ f) $\left(\frac{5}{6}\right)^6$

5. En cada caso queda:

    a) Decimal periódico puro.
    b) Decimal finito.
    c) Decimal periódico puro.
    d) Decimal periódico mixto.
    e) Decimal periódico mixto.

6. La solución queda:

a) $3,\overset{\frown}{1}+5,2\overset{\frown}{1}+2,8=\frac{28}{9}+\frac{469}{90}+\frac{14}{5}=\frac{1001}{90}=11,1\overset{\frown}{2}$

b) $\left(5,\overset{\frown}{4}-3,4\overset{\frown}{2}\right)\cdot 2,7=\left(\frac{49}{9}-\frac{154}{45}\right)\cdot\frac{27}{10}=5,46$

c) $6,1\overset{\frown}{4}:3,\overset{\frown}{4}\cdot 2,44=\frac{553}{90}:\frac{31}{9}\cdot\frac{244}{100}=\frac{33733}{7750}=4,35264516129$

d) $12,\overset{\frown}{5}+3,7\overset{\frown}{8}:1,\overset{\frown}{4}=\frac{25}{2}+\frac{341}{90}:\frac{13}{9}=\frac{983}{65}=15,1230769231$

7. La clasificación queda:

- Racionales: a) b) c)
- Irracionales: d) e)

8. La solución queda:

Vende al mayorista $\frac{7}{8}\cdot 120\,000 = 105\,000\,\text{kg}$. Le quedan $15\,000\,\text{kg}$.

Vende a pequeños comerciantes $\frac{2}{5}\cdot 15\,000 = 6\,000\,\text{kg}$. Le quedan $9\,000\,\text{kg}$.

Se lleva el ganadero $\frac{3}{7}\cdot 9\,000 = 3\,857{,}14\,\text{kg}$. Le quedan $5142{,}86\,\text{kg}$, luego no puede dar la solución.

9. La solución queda:

El 1er alumno hace $\frac{4}{12}$ del trabajo, luego quedan por hacer $\frac{8}{12}$ del trabajo.

El 2do alumno tarda: $\frac{8}{12}:\frac{1}{8}=\frac{64}{12}=5,\widehat{3}\,\text{horas} = 5\,\text{h}\ 20\,\text{min}$ en terminar el trabajo.

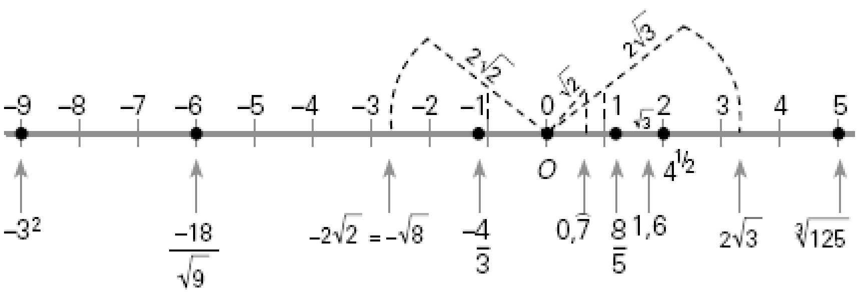
10. Quedan del siguiente modo:

$$3 \in \mathbb{N};\quad 4{,}23 \in \mathbb{Q};\quad \sqrt{13} \in \text{I};\quad 0 \in \mathbb{N};\quad -\frac{7}{3} \in \mathbb{Q};$$

$$-\sqrt{64} = -8 \in \mathbb{Z};\quad 1{,}0\widehat{3} \in \mathbb{Q};\quad -\frac{12}{3} = -4 \in \mathbb{Z};$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \in \mathbb{Z};\quad \frac{1}{\pi} \in \text{I};\quad -\frac{1{,}3}{0{,}5} \in \mathbb{Q}$$

11. Quedaría representado del siguiente modo:

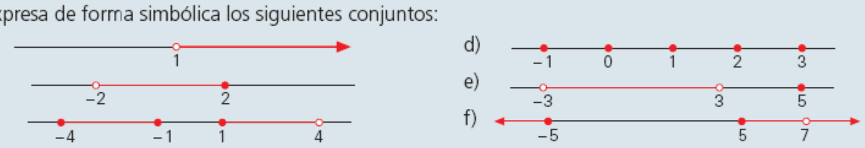


PÁGINA 27

12. Dibuja sobre la recta real los siguientes conjuntos:
   a) Los números reales mayores o iguales que 3.
   b) $B = \{b \in \mathbb{R} \mid b < 0 \text{ y } b > -7\}$
   c) $D = \{d \in \mathbb{Z} \mid d > 1 \text{ ó } d > -5\}$
   d) $(-1, 4] \cap (0, 3)$
   e) $E(5, 2)$
   f) $(-\infty, -5]$

13. Expresa de forma simbólica los siguientes conjuntos:

a) b) c) d) e) f)



14. Dado el número 1 724,157203... indica cuáles de las siguientes aproximaciones decimales del número anterior son redondeos. En los casos en que lo sean, anota la cota de error.

1 725	1 724,16	1 724,2	1 724,1	1 720	1 724,158	1 724,1572

15. Calcula, aproximadamente, el error absoluto y relativo que se comete al tomar $\frac{221}{71}$ como valor aproximado de π.

16. Calcula, aproximadamente, el error absoluto y relativo que se comete al redondear el número de oro Φ a centésimas.

17. Expresa en notación científica las siguientes cantidades, y determina el orden de magnitud:
   a) Distancia Tierra-Luna: 384 000 km
   b) Distancia Tierra-Sol: 150 000 000 km
   c) Virus de la gripe: 0,0000000022 m
   d) Radio del protón: 0,00000000005 m
   e) 623 cienmilésimas
   f) 0,035 millones

18. La capacidad de memoria de un ordenador se mide en:
   byte = 2^3 bits; k-byte = 2^{10} bytes; Megabyte = 2^{10} k-bytes; Gigabyte = 2^{10} Megabytes
   Expresa como potencia y en notación científica la capacidad de los siguientes ordenadores y disquetes en bytes y bits:
   a) Disco duro de 127 gigas b) Disquete de 1,44 megas c) Un CD-ROM de 650 megas

19. Calcula las siguientes raíces:
   a) $\sqrt{25a^2b^4}$ b) $\sqrt[3]{64a^6b^3}$ c) $\sqrt[4]{81a^8}$

20. Expresa en forma de potencia las raíces, o en forma de raíz las potencias:
   a) $\sqrt[3]{a}$ b) $\sqrt[4]{a^5}$ c) $\frac{1}{\sqrt{a^3}}$ d) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$ e) $2^{2/3}$ f) $5^{1/2}$ g) $3^{-3/2}$ h) $a^{-2/3}$

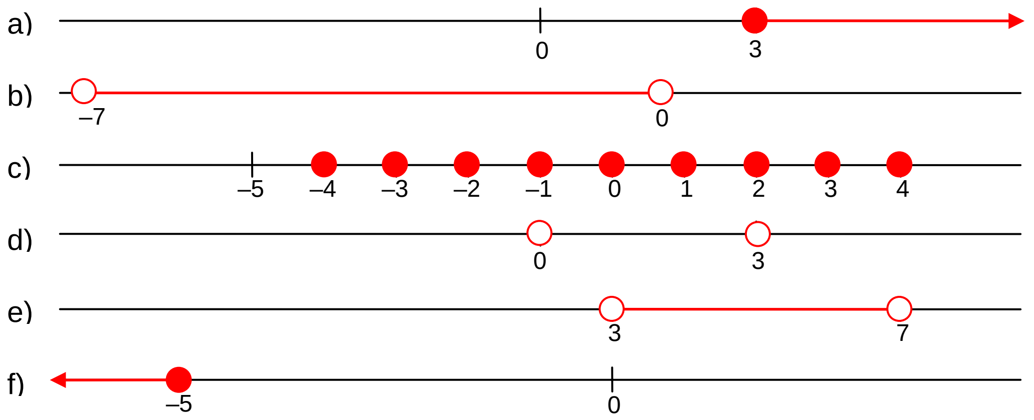
21. Pon bajo un único radical las siguientes expresiones:
   a) $\sqrt{\sqrt[3]{8}}$ b) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}$ d) $\left(\sqrt[3]{a^2b}\right)^5$ e) $\left(\sqrt{a^3\sqrt{b}}\right)^4$ f) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a^8}}$

22. Extrae todos los factores posibles de los radicales siguientes:
   a) $\sqrt{1\,000}$ b) $\sqrt[3]{8a^5}$ c) $\sqrt{16a^5b^7}$ d) $\sqrt{4a^2+4}$

23. Introduce los factores en el radical:
   a) $4\sqrt{2}$ b) $3\sqrt[4]{3^2}$ c) $3\sqrt[3]{a}$ d) $2ab\sqrt[3]{a^2}$ e) $a^2b^4\sqrt{2ab^3}$ f) $4a\sqrt[3]{a^2b}$

24. Efectúa, presentando el resultado en forma de raíz y en forma de potencia:
   a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}$ b) $\sqrt[5]{2a^4} : \sqrt[5]{2a^3}$ c) $\sqrt[6]{3^5} : \sqrt[6]{3^3}$ d) $\sqrt{a} \cdot a^2$ e) $a^{-1} \cdot \sqrt[3]{a}$ f) $a : \sqrt{a}$

12. Las representaciones quedarían:



13. Quedan del siguiente modo:

a) $(1, +\infty)$. No acotado.
b) $(-2,2]$. Acotado. Inf $= -2$. Máximo $= 2$.
c) $[-4,-1] \cup [1,4)$. Acotado. Mínimo $= -4$. Sup $= 4$.
d) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \in x \in 3\}$. Acotado. Mínimo $= -1$. Máximo $= 3$.
e) $(-3,3) \cup \{5\}$. Acotado. Inf $= -3$. Máximo $= 5$.
f) $(-\infty,5] \cup [5,+\infty) - \{7\}$. No acotado.

14. Para cada uno de los números queda:

1 725 no es redondeo.
1 724,16 es un redondeo a centésimas. Cota de error 0,005.
1 724,2 es un redondeo a décimas. Cota de error 0,05.
1 724,1 no es redondeo.
1 724,158 no es redondeo.
1 724,1572 es un redondeo a diezmilésimas. Cota de error 0,00005.

15. Realizamos el siguiente cálculo:

Consideramos como valor real $\pi = 3{,}141592$.

$$\text{Error absoluto}: \left| 3{,}141592 - \frac{221}{71} \right| = 0{,}028916...$$

$$\text{Error relativo}: \frac{\text{Error absoluto}}{\text{Valor real}} = \frac{0{,}028916}{3{,}141592} = 0{,}0092...$$

16. El número de oro es : $\Phi = 1,61803398...$

$\text{Redondeo a centésimas}: 1,62$
$\text{Error absoluto} = 0,00197...$
$\text{Error relativo} = 0,00121506...$

17. La notación científica queda:

a) $3,84 \times 10^5$. Orden de magnitud 10^5.
b) $1,5 \times 10^8$. Orden de magnitud 10^8.
c) $2,2 \times 10^{-9}$. Orden de magnitud 10^{-9}.
d) 5×10^{-11}. Orden de magnitud 10^{-10}.
e) $6,23 \times 10^{-3}$. Orden de magnitud 10^{-2}.
f) $3,5 \times 10^4$. Orden de magnitud 10^4.

18. La notación quedaría del siguiente modo:

a) 127×2^{30} Bytes $= 1,36 \times 10^{11}$ Bytes; 127×2^{33} Bits $= 1,09 \times 10^{12}$ Bits.
b) $1,44 \times 2^{20}$ Bytes $= 1,5 \times 10^6$ Bytes; $1,44 \times 2^{23}$ Bits $= 1,21 \times 10^7$ Bits.
c) 650×2^{20} Bytes $= 6,8 \times 10^8$ Bytes; 650×2^{23} Bits $= 5,45 \times 10^9$ Bits.

19. Las soluciones son:

a) $5ab^2$ b) $4a^2b$ c) $3a^2$

20. Las expresiones quedan:

a) $a^{1/3}$ b) $a^{5/4}$ c) $a^{-3/2}$ d) $a^{-2/3}$
e) $\sqrt[3]{4}$ f) $\sqrt{5}$ f) $\dfrac{1}{\sqrt{3^3}}$ h) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$

21. Las expresiones quedan:

a) $\sqrt[6]{8} = \sqrt{2}$ b) $\sqrt[8]{3^7}$ c) $\sqrt[12]{a}$
d) $\sqrt[3]{a^{10}b^5}$ e) $\sqrt[4]{a^{24}b^4} = a^6 b$ f) $\sqrt[12]{a^{11}}$

22. Las expresiones quedan:

a) $10\sqrt{10}$ b) $2a\sqrt[3]{a^2}$ c) $4a^2b^3\sqrt{ab}$ d) $2\sqrt{a^2+1}$

23. Los radicales quedan:

a) $\sqrt{32}$ b) $\sqrt[4]{3^6}=\sqrt{3^3}$ c) $\sqrt[3]{27a}$

d) $\sqrt[3]{8a^5b^3}$ e) $\sqrt{2a^5b^{11}}$ f) $\sqrt[3]{64a^5b}$

24. La solución queda:

a) $\sqrt[3]{2^3}=2$ b) $\sqrt[5]{a}=a^{1/5}$ c) $\sqrt[6]{3^2}=3^{1/3}$

d) $\sqrt{a^5}=a^{5/2}$ e) $\sqrt[3]{a^{-2}}=a^{-2/3}$ f) $\sqrt{a}=a^{1/2}$

PÁGINA 28

ACTIVIDADES FINALES

25. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $3\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \frac{4}{5}\sqrt{2}$ c) $2\sqrt[3]{16} - 5\sqrt[3]{54} + \frac{1}{5}\sqrt[3]{250}$ e) $\frac{4}{5}\sqrt{8} - \sqrt{50} + \frac{7}{2}\sqrt{18} - \frac{3}{4}\sqrt{98}$

b) $\frac{1}{3}\sqrt[4]{3} + \frac{1}{4}\sqrt[4]{3} - \frac{3}{2}\sqrt[4]{3}$ d) $6\sqrt[3]{x^7} + x^2\sqrt[3]{x} - 3x^2\sqrt[3]{27x}$ f) $5\sqrt{4x} - 3\sqrt{36x} + \sqrt{25x} - 6\sqrt{x}$

26. Reduce a índice común, y ordena de menor a mayor, las raíces de cada apartado:

a) $\sqrt{2}, \sqrt[5]{5}$ b) $\sqrt[3]{10}, \sqrt[5]{100}$ c) $\sqrt[4]{4}, \sqrt[6]{6}$ d) $\sqrt[4]{2}, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}$ e) $\sqrt[3]{2}, \sqrt[9]{3}, \sqrt{5}$ f) $\sqrt{3^{-1}}, \sqrt[4]{5^{-3}}$

27. Opera:

a) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{6}$ b) $\sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[5]{a^3} : \sqrt[10]{a}$ c) $\sqrt[8]{ab^3} \cdot \sqrt[6]{2a^2b^2}$ d) $\sqrt{2ab} : \sqrt[4]{8a^3b}$ f) $\sqrt{3\sqrt[3]{3^2}}$

28. Realiza las siguientes operaciones simplificando lo más posible los resultados:

a) $\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ c) $(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2}) - (2 + \sqrt{2})^2$ e) $(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})(\sqrt{2} - \sqrt{3})\sqrt{3}$

b) $(2\sqrt{7} + 3)^2 - 4\sqrt{7}(\sqrt{7} + 3)$ d) $(4\sqrt{18} - 2\sqrt{12} + \sqrt{32}) \cdot 2\sqrt{2}$ f) $(\sqrt{72} - \sqrt{20} - \sqrt{2})(\sqrt{2} + 2\sqrt{8} + 2\sqrt{5})$

29. Racionaliza las siguientes fracciones:

a) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$ c) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$ d) $\frac{3}{2\sqrt[4]{3}}$ e) $\frac{7}{\sqrt{7} \cdot \sqrt[3]{3}}$ f) $\frac{3}{2 + \sqrt{2}}$ g) $\frac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$ h) $\frac{\sqrt{7} + 1}{2\sqrt{7} + 5}$

30. Realiza las operaciones, racionalizando previamente:

a) $\frac{5}{\sqrt{2}}\sqrt{96} - \frac{3}{\sqrt{7}}\sqrt{189}$ c) $\frac{3 + 2\sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$ e) $\frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6} - 2}$

b) $\sqrt{\frac{5}{3}} - \sqrt{\frac{3}{5}}$ d) $\frac{2}{1 + \sqrt{3}} - \frac{2}{1 - \sqrt{3}}$ f) $\frac{2\sqrt{18} - 5\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

31. Efectúa y simplifica:

a) $\sqrt{4\sqrt{9\sqrt[3]{729}}}$ b) $\sqrt{14 + \sqrt{7 - \sqrt[4]{81}}}$ c) $(\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{16}) \cdot \sqrt[3]{4}$ d) $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5^5}}}}$ e) $\sqrt{\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}}$

32. Calcula, simplificando al máximo el valor de:

a) $\left(2\sqrt{45} + 5\sqrt{80} - \frac{3}{5}\sqrt{125}\right) \cdot \frac{4}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{4\sqrt{75}}{\sqrt{27}} - \frac{2}{\sqrt{8}} + \sqrt{8}$ c) $(\sqrt{7} - 2)^2 - (\sqrt{7} - 2)(\sqrt{7} + 2)$

33. Racionaliza, efectúa y simplifica la expresión:

a) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - (\sqrt{6} + 2)^2$ b) $\frac{2\sqrt{3} - 3}{2\sqrt{3} + 3} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$ c) $\left(\frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} - 2}\right)^2$

34. La naranja al pelarla pierde $\frac{1}{5}$ de su peso; la naranja pelada pierde al exprimirla para hacer zumo un 30% de su peso. ¿Cuántos kg de naranjas hemos de comprar para obtener 2 400 kg de zumo?

35. La cantidad de azúcar morena que se obtiene de la caña es $\frac{12}{19}$ de su peso. La cantidad de azúcar blanca que se obtiene de refinar el azúcar morena es $\frac{4}{3}$ de su peso. ¿Cuánta caña de azúcar se necesita para obtener 10 toneladas de azúcar blanca?

25. La solución queda:

a) $\frac{98}{15}\sqrt{2}$ c) $-10\sqrt[3]{2}$ e) $\frac{37}{20}\sqrt{2}$

b) $-\frac{11}{12}\sqrt[4]{3}$ d) $-2x^2\sqrt[3]{x}$ f) $-9\sqrt{x}$

26. La solución queda:

a) $\sqrt[10]{5^2} < \sqrt[10]{2^5}$ b) $\sqrt[15]{10^5} < \sqrt[15]{10^6}$

c) $\sqrt[12]{6^2} < \sqrt[12]{4^3}$ d) $\sqrt[12]{2^3} < \sqrt[12]{2^4} < \sqrt[12]{2^6}$

e) $\sqrt[18]{3^2} < \sqrt[18]{2^6} < \sqrt[18]{5^9}$ f) $\sqrt[4]{5^{-3}} < \sqrt[4]{3^{-2}}$

27. Tras operar obtenemos:

a) $\sqrt[12]{2^9 \cdot 3^3 \cdot 5^4}$ b) $a\sqrt[3]{a}$ c) $\sqrt[24]{2^4\, a^{11} b^{17}}$ d) $\sqrt[4]{\frac{b}{2a}}$ e) $\sqrt[6]{3^5}$

28. Quedan:

a) $\frac{9}{2} - 2\sqrt{2}$ b) 9 c) $-4-4\sqrt{2}$

d) $64-8\sqrt{6}$ e) $\sqrt{3}-3\sqrt{2}$ f) 30

29. Tras racionalizar se obtiene:

a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{2\sqrt[3]{5^2}}{5}$

d) $\frac{\sqrt[4]{3^3}}{2}$ e) $\frac{\sqrt[6]{7^3 \cdot 3^4}}{3}$ f) $\frac{6-3\sqrt{2}}{2}$

g) $2\sqrt{3}+3$ h) $3-\sqrt{7}$

30. La solución queda:

a) $11\sqrt{3}$ b) $\frac{2\sqrt{15}}{15}$ c) $\frac{34+23\sqrt{2}}{2}$

d) $2\sqrt{3}$ e) $\frac{4\sqrt{6}+9}{3}$ f) -4

31. Queda:

a) 6 b) 4 c) 6

d) $5\sqrt[16]{5^3}$ e) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

32. La solución queda:

a) 92 b) $\dfrac{40+9\sqrt{2}}{6}$ c) $9-4\sqrt{7}$

33. La solución queda:

a) $-2-\sqrt{6}$ b) $\dfrac{42-25\sqrt{3}}{6}$ c) $161+72\sqrt{5}$

34. La solución queda:

El zumo supone:

$$\frac{70}{100}\cdot\frac{4}{5}\cdot\text{Peso}=\frac{28}{50}\cdot P \;\Rightarrow\; \text{Por tanto, } \frac{28}{50}\cdot P=2\,400 \;\Rightarrow\; P=4\,285{,}7\text{ kg de naranjas.}$$

35. La solución queda:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Azúcar moreno }(AM)=\dfrac{12}{19}\text{caña }(C)\\ \text{Azúcar blanca }(AB)=\dfrac{4}{3}\,(AM)\end{array}\right\}\Rightarrow AB=\frac{12}{19}\cdot\frac{4}{3}\cdot C\;\Rightarrow 10\text{ T}=\frac{12}{19}\cdot\frac{4}{3}\cdot C\;\Rightarrow C=11{,}875\text{ T de caña.}$$

Unidad 2 – Polinomios. Fracciones algebraicas

PÁGINA 31

cuestiones iniciales

1. Calcula el cociente y el resto en cada una de las siguientes divisiones:

a) $(x^3 - 3x^2 + 4) : (x + 1)$ b) $(x^4 - x) : (x - 2)$

2. Calcula el valor de a para que el polinomio:

$$A(x) = x^3 + ax^2 - 7x - 2$$

dé como resto 5 al dividirlo por $x + 3$.

3. Descompón en factores los siguientes polinomios:

a) $A(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ b) $B(x) = x^4 - 16$

4. Efectúa y da el resultado en forma de fracción irreducible:

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$$

SOLUCIONES

1. Diremos que:

a) Resto 0; Cociente $x^2 - 4x + 4$

b) Resto 14; Cociente $x^3 + 2x^2 + 4x + 7$

2. Utilizando el teorema del resto:

$$\text{Resto} = A(-3) \Rightarrow 5 = (-3)^3 + a(-3)^2 - 7(-3) - 2 \Rightarrow a = \frac{13}{9}$$

3. La descomposición queda:

a) $x^3 - 5x^2 + 6x = x(x-2)(x-3)$

b) $x^4 - 16 = (x-2)(x+2)(x^2+4)$

4. Operando obtenemos:

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \frac{(x-1) \cdot x \cdot (x+1)}{x \cdot (x-1) \cdot (x+1)} = 1$$

PÁGINA 43

ACTIVIDADES

■ Con el fin de que te acostumbres a escribir los protocolos de resolución de los problemas, redacta los protocolos de los siguientes problemas:

1. **Decoración.** ¿Cómo colocarías 10 lámparas de pie en torno a un cuarto de estar cuadrado, de manera que haya el mismo número de lámparas junto a cada pared?
2. **Las calles del pueblo.** Todas las calles de un pueblo son rectas, sin que haya dos paralelas. Al emplear una farola en cada cruce, se colocan 66 farolas. ¿Cuántas calles tiene como mínimo el pueblo?
3. **Un criado sabio.** Un señor tenía sus mejores botellas de vino dispuestas en la cava de la manera indicada en la figura.

6	9	6
9		9
6	9	6

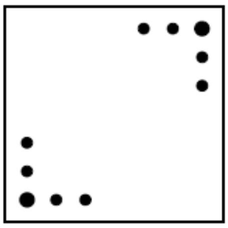
Desconfiaba de su criado y todas las noches, antes de acostarse, bajaba a la cava y las contaba, sumando el número de botellas que había en los tres compartimentos de cada uno de los cuatro lados. Si la suma era 21 botellas en los cuatro casos, descansaba feliz.

El criado, por su parte, sabedor de la estratagema y del bajo concepto que de él tenía el señor, decidió robarle botellas. ¡Y lo consiguió! Le robaba unas cuantas y redistribuía las restantes, de tal modo que ello no perturbase los sueños del amo.

¿Cuántas botellas, como máximo, pudo robar? ¿Cómo quedó la cava?

SOLUCIONES

1. Si cada punto representa una lámpara, la solución quedaría del siguiente modo:



2. La solución queda:

Si hay n calles el número máximo de cruces es: $C_{n,2} = \dfrac{n^2 - n}{2}$.

Luego si hay 66 farolas $\Rightarrow$ 66 cruces $\Rightarrow$ $\dfrac{n^2 - n}{2}$ $\Rightarrow$ $n^2 - n - 132 = 0$ $\Rightarrow$ $n = 12$ calles como mínimo tenía el pueblo.

3. Ésta es una de las disposiciones en que quedó la cava.
Como máximo se pudo robar:

$$60 - 42 = 18 \text{ botellas.}$$

La disposición de las 42 botellas en la cava admite muchas formas diferentes.

1		20
20		1

PÁGINA 46

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Encuentra el polinomio $A(x)$ que satisfaga la igualdad:

$$(x^2 - 3) \cdot A(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 6$$

2. Determina a y b de modo que sea cierta la siguiente igualdad:

$$(x^2 - 2x + 3) \cdot (ax + b) + 5 = x^3 - 4x^2 + 7x - 1$$

3. Dados los polinomios:

$$A(x) = -x^3 - 2x + 5; \quad B(x) = 2x^4 + x^3; \quad C(x) = 2x - 5$$

calcula:

a) $A(x) + B(x) - C(x)$
c) $A(x) - 2\,B(x)$
e) $[B(x)]^2$
b) $A(x) - [B(x) - C(x)]$
d) $B(x) \cdot C(x)$
f) $C(x) \cdot [B(x) + A(x)]$

4. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $(3 - 2x)^2$
c) $(2 + x)^3$
e) $(x - 3)^2 - (x + 3)^2$
b) $(5x - 2)(5x + 2)$
d) $\left(\frac{1}{2} + 4x\right)^2$
f) $(3x + 5)^2 - (3x - 5)(3x + 5)$

5. Determina el cociente y el resto de las divisiones:

a) $(3x^6 - 4x^5 + 7x^3 - 6x^2 + 2x - 3) : x^2$
b) $(x^5 - 7x^4 + 12x^3 - 5x^2 + 6x - 10) : (x + 5)$
c) $(3x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 6x + 3) : (x^2 + x + 1)$

6. Al dividir un polinomio $D(x)$ por $d(x) = 5x^2 + 3$, se obtiene como cociente $c(x) = x^2 - 2x + 1$ y como resto $r(x) = 3x + 4$. Halla el polinomio $D(x)$.

7. Si $D(x) = 5x^4 + 6x^3 - 3x^2 - 5x - 4$ es el dividendo; $c(x) = x^2 - 1$, el cociente y $r(x) = x - 2$ el resto de la división entre $D(x)$ y $d(x)$; halla el divisor $d(x)$.

8. Calcula el valor numérico de los siguientes polinomios, por los valores que se indican:

a) $x^3 - 12x^2 + 41x - 30$ para $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$
b) $x^4 + x^3 + 13x^2 - x - 12$ para $x = 1$, $x = -1$ y $x = 3$
c) $2x^3 - 6x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ para $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{1}{4}$

9. Efectúa las siguientes divisiones utilizando la regla de Ruffini:

a) $(x^4 - 3x^3 + 4x - 2) : (x - 1)$
b) $(2x^4 - 17) : (x + 2)$
c) $(x^5 - 32) : (x - 2)$

10. Calcula el valor de a para que las siguientes divisiones sean exactas:

a) $(3x^3 - 2x^2 + 5x + a) : (x + 1)$
b) $(-x^4 + 2x^3 - ax + 1) : (x - 2)$

11. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Dado el polinomio $P(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + 3$ calcula: $P(0)$, $P(1)$ y $P(-2)$.
b) Calcula el valor de k para que el polinomio $P(x) = 2x^3 - kx^2 + 6$ sea divisible por $x + 1$.
c) Calcula el valor de a para el cual el resto de la división $(x^4 - 4x^3 + ax) : (x + 2)$ es 2.
d) Calcula el resto de dividir el polinomio $B(x) = x^2 + 3x - 5$ por x.

SOLUCIONES

1. Quedan del siguiente modo:

- Mediante identidad de polinomios:

  $(x^2-3)(ax+b)=x^3+2x^2-3x-6$

  $ax^3+bx^2-3ax-3b=x^3+2x^2-3x-6$

Identificando coeficientes obtenemos:

  $a=1,\ b=2\ \Rightarrow$ el polinomio $\mathrm{A}(x)=x+2$

- Mediante división:

$$\mathrm{A}(x)=\frac{x^3+2x^2-3x-6}{x^2-3}=x+2$$

2. Operando y utilizando la identidad de polinomios obtenemos: $a=1$ y $b=-2$.

3. Quedarían:

a) $2x^4-4x+10$
b) $-2x^4-2x^3$
c) $-4x^4-3x^3-2x+5$
d) $4x^5-8x^4-5x^3$
e) $4x^8+4x^7+x^6$
f) $4x^5-10x^4-4x^2+20x-25$

4. Quedarían:

a) $9-12x+4x^2$
b) $25x^2-4$
c) $8+12x+6x^2+x^3$
d) $\frac{1}{4}+4x+16x^2$
e) $-12x$
f) $30x+50$

5. La solución en cada uno de los casos es:

a) Cociente: $3x^4-4x^3+7x-6$; Resto: $2x-3$.
b) Cociente: $x^4-12x^3+72x^2+355x+1781$; Resto: 8895.
c) Cociente: $3x^2+2x-3$; Resto: $6-5x$.

6. La solución puede expresarse como: $D(x)=d(x)\cdot c(x)+r(x)=5x^4-10x^3+8x^2-3x+7$.

7. La solución puede expresarse como: $d(x)=\dfrac{D(x)-r(x)}{c(x)}=5x^2+6x+2$.

8. La solución queda:

a) -30 ; 0 ; 12 b) 2 ; 2 ; 210 c) -5 ; $-\dfrac{5}{2}$; $-\dfrac{55}{32}$

9. La solución quedaría:

a) Cociente: x^3-2x^2-2x+2 ; Resto: 0.

b) Cociente: $2x^3-4x^2+8x-16$; Resto: 15.

c) Cociente: $x^4+2x^3+4x^2+8x+16$; Resto: 0.

10. El valor en cada caso es: a) $a=10$ b) $a=\dfrac{1}{2}$

11. Quedaría:

a) $P(0)=3$; $P(1)=3$; $P(-2)=3$

b) Debe verificarse que $P(-1)=0 \Rightarrow k=4$

c) Debe verificarse que $P(-2)=2 \Rightarrow a=23$

d) El resto de esta división es $B(0)=-5$

■ 12. Encuentra las raíces de cada uno de los polinomios siguientes:

a) $A(x) = x^3 - 4x$ b) $B(x) = 2x^4 - 32$ c) $C(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

■ 13. Descompón en factores los siguientes polinomios:

a) $A(x) = x^4 - 25x^2 + 144$
b) $B(x) = x^3 + 2x^2 + x$
c) $C(x) = x^3 - x^2 - x + 1$
d) $D(x) = 8x^3 + 2x^2 - 13x + 3$
e) $E(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3$
f) $F(x) = x^3 + 8x^2 + 16x$

■ 14. Dados los polinomios:

$A(x) = x(x + 1)^2 (x - 2)^2$ $B(x) = x^2 (x - 1) (x - 2)^2$ $C(x) = x^3(x + 1) (x + 2)^3$

halla el MCD y el mcm de los polinomios que se indican:

a) $A(x)$ y $B(x)$ b) $A(x)$ y $C(x)$ c) $A(x)$, $B(x)$ y $C(x)$

■ 15. Calcula el MCD y el mcm de los siguentes polinomios:

a) $A(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$; $B(x) = x^2 + x - 6$
b) $C(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 6$; $D(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$
c) $E(x) = 2x^3 - 2x^2 - 2x - 4$; $F(x) = -2x^2 - x + 10$

■ 16. Para los polinomios $A(x) = 3x^2 - 12$ y $B(x) = 2x^4 - 2x^3 - 4x^2$ comprueba:

$$\text{MCD}\,[A(x), B(x)] \cdot \text{mcm}\,[A(x), B(x)] = A(x) \cdot B(x)$$

■ 17. Obtén la fracción irreducible en cada una de las siguientes:

a) $\dfrac{5x^2 - 15x}{10x^3 + 15x^2}$
b) $\dfrac{2x - 4}{x^2 - 4x + 4}$
c) $\dfrac{6 - x - x^2}{x^2 + 2x - 8}$
d) $\dfrac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x^3 - 6x^2 + 2x + 12}$

■ 18. Halla el polinomio $P(x)$ para que se cumplan las siguientes equivalencias de fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{P(x)}{x^2 - x} = \dfrac{x + 1}{x}$
b) $\dfrac{x}{P(x)} = \dfrac{x^2 - 5x}{x^2 - 25}$
c) $\dfrac{x - 2}{x + 3} = \dfrac{P(x)}{x^2 - 9}$
d) $\dfrac{x + 4}{x^2} = \dfrac{x^2 - 16}{P(x)}$

■ 19. En cada caso, reduce a común denominador las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x + 1}{2x}, \quad \dfrac{5}{3x^2}$
b) $\dfrac{3x}{x - 1}, \quad \dfrac{x + 2}{x^2 - 1}, \quad \dfrac{x}{x + 1}$
c) $\dfrac{x + 1}{5x}, \quad \dfrac{x - 1}{x^2 + x}, \quad \dfrac{x}{3x + 3}$
d) $\dfrac{x}{2}, \quad \dfrac{3}{2x^2 - 50}, \quad \dfrac{2x}{x + 5}$

12. Las raíces son:

a) $0\ ;\ 2\ \text{y}\ -2$ b) $2\ \text{y}\ -2$ c) $2\ \text{y}\ -2$

13. Las descomposiciones pedidas son:

a) $A(x) = (x-3)(x+3)(x-4)(x+4)$

b) $B(x) = x(x+1)^2$

c) $C(x) = (x-1)^2(x+1)$

d) $D(x) = 8(x-1)\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)$

e) $E(x) = (x+1)(x^2+1)(x-3)$

f) $F(x) = x(x+4)^2$

14. La solución en cada uno de los casos queda:

a) $MCD\,[A(x), B(x)] = x(x-2)^2$

$mcm\,[A(x), B(x)] = x^2\,(x-2)^2\,(x+1)^2\,(x-1)$

b) $MCD\,[A(x), C(x)] = x(x+1)$

$mcm\,[A(x), C(x)] = x^3\,(x-2)^2\,(x+1)^2\,(x+2)^3$

c) $MCD\,[A(x), B(x), C(x)] = x$

$mcm\,[A(x), B(x), C(x)] = x^3\,(x-2)^2\,(x+1)^2\,(x+2)^3\,(x-1)$

15. En cada uno de los casos descomponemos los polinomios en factores y calculamos el MCD y el mcm.

a) $$\left.\begin{array}{l} A(x) = x\,(x-3)\,(x-2) \\ B(x) = (x+3)\,(x-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} MCD\,[A(x), B(x)] = (x-2) \\ mcm\,[A(x), B(x)] = x\,(x-3)\,(x-2)\,(x+3) \end{array}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} C(x) = (x-3)\,(x^2-x+2) \\ D(x) = (x-2)^2\,(x-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} MCD\,[C(x), D(x)] = 1 \\ mcm\,[C(x), D(x)] = C(x)\cdot D(x) \end{array}$$

c) $$\left.\begin{array}{l} E(x) = 2\,(x^2+x+1)\,(x-2) \\ F(x) = -2\,(x-2)\left(x+\frac{5}{2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} MCD\,[E(x), F(x)] = 2\,(x-2) \\ mcm\,[E(x), F(x)] = -2\,(x-2)\,(x^2+x+1)\left(x+\frac{5}{2}\right) \end{array}$$

16. Se comprueba fácilmente a partir de las descomposiciones factoriales de los polinomios:

$$\left.\begin{array}{l} A(x)=3(x-2)(x+2) \\ B(x)=2x^2(x+1)(x-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} MCD\,[A(x),B(x)]=(x-2) \\ mcm\,[A(x),B(x)]=6x^2\,(x+1)\,(x-2)\,(x+2) \end{array}$$

17. Queda en cada caso:

a) $\dfrac{5x^2-15x}{10x^3+15x^2}=\dfrac{5x\,(x-3)}{5x^2\,(2x+3)}=\dfrac{x-3}{2x^2+3x}$

b) $\dfrac{2x-4}{x^2-4x+4}=\dfrac{2\,(x-2)}{(x-2)^2}=\dfrac{2}{x-2}$

c) $\dfrac{6-x-x^2}{x^2+2x-8}=\dfrac{(x-2)\,(x+3)\,(-1)}{(x-2)\,(x+4)}=\dfrac{-x-3}{x+4}$

d) $\dfrac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-6x^2+2x+12}=\dfrac{(x-2)^2\,(x+3)}{(x-2)\,(x^2-4x-6)}=\dfrac{(x-2)\,(x+3)}{x^2-4x-6}=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4x-6}$

18. En cada uno de los casos queda:

a) $P(x)=x^2-1$ b) $P(x)=x+5$

c) $P(x)=x^2-5x+6$ d) $P(x)=x^3-4x^2$

19. En cada caso queda:

a) $\dfrac{3x^2+3x}{6x^2},\ \dfrac{10}{6x^2}$

b) $\dfrac{3x^2+3x}{x^2-1},\ \dfrac{x+2}{x^2-1},\ \dfrac{x^2-x}{x^2-1}$

c) $\dfrac{3x^2+6x+3}{15x^2+15x},\ \dfrac{15x-15}{15x^2+15x},\ \dfrac{5x^2}{15x^2+15x}$

d) $\dfrac{x^3-25x}{2x^2-50},\ \dfrac{3}{2x^2-50},\ \dfrac{4x^2-20x}{2x^2-50}$

ACTIVIDADES FINALES

20. Efectúa las siguientes operaciones y da el resultado en forma de fracción irreducible:

a) $\dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{3x^2}$

b) $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}$

c) $\dfrac{2x-1}{x^2-4} - \dfrac{2}{x+2}$

d) $\dfrac{5x}{x+3} + \dfrac{3}{x-2}$

21. Efectúa las siguientes operaciones y obtén en cada caso la fracción irreducible:

a) $\dfrac{x^2+x}{x^2+1} \cdot \dfrac{4x^2+4}{x^2-1}$

b) $\dfrac{2x-6}{x^2-1} \cdot \dfrac{5x+5}{4x-12}$

c) $\dfrac{x-1}{2x+6} : \dfrac{x^2-1}{-3x-9}$

d) $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2-x} : \dfrac{2x+6}{4x^2-8x+4}$

22. Realiza las operaciones combinadas siguientes dando el resultado en la forma más simplificada posible:

a) $\left(1+\dfrac{2}{x}\right) : \dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$

b) $\dfrac{x^2+4x}{x^2} : \dfrac{x^2-16}{x^2+2x+1} \cdot \dfrac{3x-12}{x^2-x}$

c) $\left(1-\dfrac{1}{x}\right) \cdot \dfrac{x}{x-1}$

d) $\left(x+\dfrac{x}{x-1}\right) : \left(x-\dfrac{x}{x-1}\right)$

e) $\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{x}\right) \cdot \dfrac{x^3+9x}{x-3}$

f) $\dfrac{x+1}{2x} \cdot \left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

23. Utilizando la identidad de polinomios resuelve las siguientes cuestiones:

a) Calcula *a* y *b* de forma que se verifique:

$$(x^2+x+1)\cdot(ax+b) = 2x^3+x^2+x-1$$

b) Calcula *A* y *B* de modo que se verifique la igualdad siguiente:

$$\frac{5x-4}{x^2-x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$$

24. Responde a las cuestiones:

a) Encuentra las raíces de los polinomios:

$$A(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 \qquad B(x) = x^3 + 4x^2 + 4x \qquad C(x) = x^3 + 9x$$

b) Encuentra el polinomio en cada uno de los casos siguientes:

i) Raíces 1, 2 y 3.

ii) Raíces 0 y 1 doble.

iii) Raíces 0 doble y –1 triple.

c) Halla un polinomio de primer grado sabiendo que su raíz es –2 y que toma el valor 5 para $x = 3$.

25. Comprueba si son o no ciertas las siguientes igualdades:

a) $(x^2+1)^2 - (x^2-1)^2 = 4x^2$

b) $\dfrac{x-1}{1-\dfrac{1}{x}} = x$

20. Queda en cada caso:

a) $\frac{9x+2}{3x^2}$ b) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ c) $\frac{3}{x^2-4}$ d) $\frac{5x^2-7x+9}{(x+3)(x-2)}$

21. Queda en cada caso:

a) $\frac{4x}{x-1}$ b) $\frac{5}{2x-2}$ c) $\frac{-3}{2x+2}$ d) $\frac{2(x+3)(x-1)}{x}$

22. Queda en cada caso:

a) 1 b) $\frac{3x+3}{x^2}$ c) 1

d) $\frac{x}{x-2}$ e) $\frac{x^3+3x^2+9x+27}{3}$ f) $\frac{1}{x-x^2}$

23. La solución queda:

a) Utilizando el principio de identidad de polinomios obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Para } x=0 \;\Rightarrow\; b=-1\\ \text{Para } x=1 \;\Rightarrow\; 3a+3b=3\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} b=-1\\ a=2\end{array}$$

b) La igualdad se comprueba del siguiente modo.

$$\frac{5x-4}{x^2-x-2}=\frac{A(x+1)+B(x-2)}{x^2-x-2} \Rightarrow A(x+1)+B(x-2)=5x-4$$

Utilizando el principio de identidad de polinomios obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Para } x=2 \;\Rightarrow\; 3A=6\\ \text{Para } x=-1 \;\Rightarrow\; -3B=-9\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A=2\\ B=3\end{array}$$

24. En cada caso queda:

a) Obtenemos las raíces de los polinomios a partir de su descomposición factorial:

$A(x)=(x+1)(x-2)(x^2+1) \Rightarrow$ Las raíces son $x=-1$ y $x=2$.
$B(x)=x(x+2)^2 \Rightarrow$ Las raíces son $x=0$ y $x=-2$.
$C(x)=x(x^2+9) \Rightarrow$ La raíz es $x=0$.

b) En cada uno de los tres casos:

i) El polinomio que tiene como raíces $x=1$, $x=2$ y $x=3$ es: $P(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)$.

ii) El polinomio que tiene como raíces $x=0$ y $x=1$ doble es: $P(x)=a\,x\,(x-1)^2$.

iii) El polinomio que tiene como raíces $x=0$ doble y $x=-1$ triple doble es de la forma siguiente: $P(x)=a\,x^2\,(x+1)^3$.

c) El polinomio es: $P(x)=x+2$.

25. En cada uno de los casos queda:

a) Operando obtenemos:

$$(x^2+1)^2-(x^2-1)^2=x^4+2x^2+1-(x^4-2x^2+1)=4x^2 \Rightarrow \text{Luego esta igualdad es cierta.}$$

b) Operando obtenemos:

$$\frac{x-1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{\frac{x-1}{x}}=x \Rightarrow \text{Luego esta igualdad es cierta.}$$

Unidad 3 – Ecuaciones y sistemas

PÁGINA 51

cuestiones iniciales

1. Halla los valores que, sustituidos por *x*, verifiquen las igualdades siguientes:

a) $(x - 2)^2 = x^2 - 5x + 5$ b) $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

2. ¿Qué dos números dan el mismo resultado cuando se suman que cuando se multiplican? ¿Y si consideramos tres números?

3. Los pueblos de Abejar, Buitrago y Cidones no están situados en línea recta. Para ir desde Abejar a Cidones, pasando por Buitrago, se recorren 24 km. En el camino de Buitrago a Abejar, pasando por Cidones, se cubren 32 km. Caminando desde Cidones a Buitrago, pasando por Abejar, se recorren 28 km. ¿Cuáles son los pueblos más cercanos?

SOLUCIONES

1. Operando obtenemos:

a) $x^2 - 4x + 4 = x^2 - 5x + 5 \Rightarrow x = 1$

Esta igualdad sólo se verifica para $x = 1$.

b) Esta igualdad se verifica para todos los valores de x.

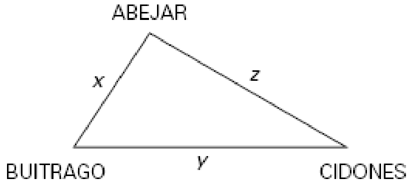
2. En cada uno de los casos:

- Son números *x*, *y* que verifican: $x + y = x \cdot y$. Es decir: $\dfrac{x}{x-1} = y$.

  Todos los números $x; \dfrac{x}{x-1}$ con $x \neq 1$ dan el mismo resultado al sumar y al multiplicar.

- En el caso de tres números, éstos quedarían de la forma: $x;\ y;\ \dfrac{x+y}{xy-1}$ con $x \cdot y \neq 1$ y se obtienen de forma análoga al caso anterior.

3. Consideremos el siguiente esquema:



Imponiendo las condiciones del problema:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 24 \\ y + z &= 32 \\ x + z &= 28 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &x = 10 \text{ km de Abejar a Buitrago} \\ &y = 14 \text{ km de Buitrago a Cidones} \\ &z = 18 \text{ km de Abejar a Cidones} \end{aligned}$$

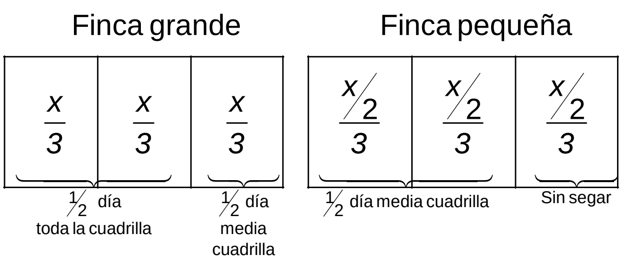
PÁGINA 65

ACTIVIDADES

1. **Vendimiadores.** Una cuadrilla de vendimiadores tenía que vendimiar dos fincas, una de doble superficie que la otra. Toda la cuadrilla estuvo vendimiando en la finca grande durante medio día. Por la tarde, la mitad de la cuadrilla vendimió en la finca pequeña y la otra mitad en la grande. Al finalizar el día sólo les quedó un poco que recoger en la finca pequeña, para lo cual fue necesario que trabajara un solo vendimiador el día siguiente. ¿Cuántas personas componían la cuadrilla?
2. **Primos.** Supongamos que X es cualquier número primo mayor que 3. Demuestra que X^2 da de resto 1 cuando se divide por 12.
3. **Tinta de imprenta.** Para numerar las páginas de un libro grande hacen falta 2 989 dígitos. ¿Cuántas páginas tiene el libro?
4. **Tres naipes.** Tres naipes de una baraja están colocados boca arriba en una fila horizontal. A la derecha del rey hay una o dos damas. A la izquierda de una dama, hay una o dos damas. A la izquierda de un corazón, hay una o dos picas. A la derecha de una pica, hay una o dos picas. ¿Puedes decir de qué cartas se trata?

SOLUCIONES

1. Podemos resolver el problema mediante ecuaciones pero es un camino muy complicado. Intentaremos representar la situación:



Superficie finca grande $= x$ Superficie finca pequeña $= x/2$

Las condiciones del problema nos muestran que si toda cuadrilla trabajó durante la mitad del día en la finca grande y sólo la mitad de la cuadrilla el otro medio día. Entonces la mitad de la cuadrilla vendimió la tercera parte de la finca grande en medio día, es decir, $x/3$. Luego en la finca pequeña durante medio día vendimiaron el equivalente a la finca grande, es decir, sería $x/3 = 2x/6$, luego quedó sin vendimiar $x/6$ de la finca pequeña que la vendimió 1 trabajador al día siguiente.

Si un trabajador vendimia $x/6$ en un día y se vendimiaron el campo grande $3x/3$ más el pequeño $\left(3x/6 - x/6\right)$ todos los trabajadores en 1 día, entonces el primer día se hicieron:

$$\frac{3x}{3}+\left(\frac{3x}{6}-\frac{3x}{6}\right)=\frac{6x}{6}+\frac{2x}{6}=\frac{8x}{6}=8\cdot\left(\frac{x}{6}\right)$$

Es decir, en la cuadrilla había 8 vendimiadores.

2. Hay que ver que $x^2 - 1 = \dot{12}$.

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \;\Rightarrow\; \text{Al ser } x \text{ primo} > 3 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x-1 = \dot{3} \quad \text{y} \quad x+1 = \dot{4} \\ \qquad\quad \text{o} \\ x-1 = \dot{4} \quad \text{y} \quad x+1 = \dot{3} \\ \qquad\quad \text{o} \\ x-1 = \dot{12} \\ \qquad\quad \text{o} \\ x+1 = \dot{12} \end{cases}$$

En cualquier caso, $x^2 - 1 = \dot{3} \cdot \dot{4} = \dot{12}$

3. Hacemos el siguiente diagrama:

Páginas numeradas	1 – 9	10 – 99	100 – 999	1 000 – 1 025
Dígitos usados	9	180	2 700	100
Total dígitos	9	180 + 9	180 + 9 + 2 700 = 2 889	2 889 + 100

En total hacen falta: 2 889 + 100 = 2 989 dígitos.
100 dígitos son 25 páginas, entonces hacen falta 999 + 25 = 1 024 páginas.
El libro tiene 1 024 páginas.

4. Por medio de ensayo y error dirigido se obtiene:

- Con la información referida a los Reyes (*R*) y las Damas (*D*) llegamos a que puede ser *RDD* o *DRD*.

- Con la información referida a los Corazones (*C*) y las Picas (*P*) llegamos a que puede ser *PCP* o *PPC*.

Juntando los resultados obtenidos llegamos a que la solución es: Rey de Picas – Dama de Picas – Dama de Corazones.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $1 - \frac{x+1}{6} = \frac{x}{2} + \frac{x-1}{6}$

b) $\frac{3x+2}{x+1} - \frac{3}{4} = 2$

c) $\frac{8}{x} - 1 = \frac{4}{x}$

d) $\frac{x}{6} - \frac{2x-1}{6} - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5} - \frac{x}{3}\right) = 0$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x(x+3) = 3(x-1)$

b) $x + 1 = \frac{6}{x}$

c) $(x+2)(x-2) = 2(x+5) + 21$

d) $\frac{9}{x} - \frac{x}{3} = 2$

e) $(x^2 - 5)(x^2 - 3) = -1$

f) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

g) $9x^4 + 5x^2 = 4$

h) $4x^4 - 65x^2 + 16 = 0$

i) $(x^2 - 16)(x^2 + 25) = 0$

j) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$

3. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Halla el valor de m en la ecuación $x^2 + mx - 24 = 0$ sabiendo que una de las raíces es 8.

b) Las raíces de la ecuación $x^2 + ax + b = 0$ son 2 y -3. Halla a y b.

c) Halla b en la ecuación $2x^2 + bx + 50 = 0$ para que las dos raíces de la ecuación sean iguales.

d) Dada la ecuación $x^2 + 6x = 0$, escribe una ecuación de segundo grado que tenga como soluciones las soluciones dobles de las de la ecuación dada.

4. Descompón 200 en dos partes de forma que la cuarta parte de la primera menos la quinta parte de la segunda de 32.

5. Encuentra un número de dos cifras sabiendo que estas suman 11 y que si invertimos el orden de las cifras el número obtenido excede en 45 al número dado.

6. La edad actual de Luis es el triple de la de su hija María. Halla las edades de ambos sabiendo que dentro de 16 años el padre tendrá doble edad que la hija.

7. En un parking hay 37 vehículos entre coches, motos y camiones de 6 ruedas. El número de motos excede en 3 al de coches y camiones juntos. Halla el número de vehículos de cada clase si en total suman 118 ruedas.

8. La diferencia de cuadrados de dos números pares consecutivos es 100. ¿Cuáles son esos números?

SOLUCIONES

1. Las soluciones son:

   a) $x=\frac{6}{5}$ b) $x=3$ c) $x=4$ d) $x=\frac{3}{5}$

2. Las soluciones son:

   a) $2x(x+3)=3(x-1) \;\Leftrightarrow\; 2x^2+3x+3=0$ No tiene soluciones reales.

   b) $x+1=\frac{6}{x} \;\Leftrightarrow\; x^2+x-6=0 \;\Rightarrow\; x_1=2;\ x_2=-3$

   c) $(x+2)(x-2)=2(x+5)+21 \;\Leftrightarrow\; x^2-2x-35=0 \;\Rightarrow\; x_1=7;\ x_2=-5$

   d) $\frac{9}{x}-\frac{x}{3}=2 \;\Leftrightarrow\; x^2+6x-27=0 \;\Rightarrow\; x_1=3;\ x_2=-9$

   e) $(x^2-5)(x^2-3)=-1 \;\Leftrightarrow\; x^4-8x^2+16=0 \;\Rightarrow\; x_1=2;\ x_2=-2$

   f) $x^4-13x^2+36=0 \;\Rightarrow\; x_1=2;\ x_2=-2;\ x_3=3;\ x_4=-3$

   g) $9x^4+5x^2=4 \;\Rightarrow\; x_1=\frac{2}{3};\ x_2=-\frac{2}{3}$

   h) $4x^4-65x^2+16=0 \;\Rightarrow\; x_1=4;\ x_2=-4;\ x_3=\frac{1}{2};\ x_4=-\frac{1}{2}$

   i) $(x^2-16)(x^2+25)=0 \;\Rightarrow\; x^2-16=0 \;\Rightarrow\; x_1=4;\ x_2=-4$

   j) $x^3+2x^2-5x-6=0 \;\Rightarrow\; (x-2)(x+1)(x+3)=0 \;\Rightarrow\; x_1=2;\ x_2=-1;\ x_3=-3$

3. Las soluciones quedan:

   a) Si una de las raíces de la ecuación es 8, ésta verificará la misma; es decir: $8^2+8m-24=0 \;\Rightarrow\; m=-5$.

   b) Si las raíces de la ecuación son 2 y -3, éstas deben verificar la ecuación, por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l} 4+2a+b=0 \\ 9-3a+b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a=1 \\ b=-6 \end{array}$$

c) Las dos raíces son iguales si el valor del discriminante es nulo, es decir:

$$b^2-4ac=0 \quad\Rightarrow\quad b^2-4\cdot 2\cdot 50=0 \quad\Rightarrow\quad b=\pm 20$$

d) La ecuación $x^2+6x=0$ tiene como soluciones $x_1=0$ y $x_2=-6$. La ecuación que tenga como soluciones las dobles de las anteriores, $x_1=0$ y $x_2=-12$, es: $x^2+12x=0$.

4. Las dos partes de *x* e *y* deben verificar:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=200\\ \frac{x}{4}-\frac{y}{5}&=32 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x&=160\\ y&=40 \end{aligned} \Rightarrow \text{Luego las dos partes son 160 y 40.}$$

5. Llamando *xy* al número de dos cifras e imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=11\\ (10y+x)-(10x+y)&=45 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x&=3\\ y&=8 \end{aligned} \Rightarrow \text{Por tanto el número buscado es 38.}$$

6. Llamando *x* a la edad de Luis e *y* a la edad de María. Se debe cumplir:

$$\left.\begin{aligned} x&=3y\\ x+16&=2(y+16) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x&=48\\ y&=16 \end{aligned} \Rightarrow \text{Luis tiene 48 años y María tiene 16 años.}$$

7. Llamando *x* al número de coches, *y* al número de motos y *z* al de camiones. Se tiene que cumplir:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=37\\ y&=3+x+z\\ 4x+2y+6z&=118 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &x=12 \text{ coches}\\ &y=20 \text{ motos}\\ &z=5 \text{ camiones} \end{aligned}$$

8. Sean los número pares consecutivos: $(2x+2)$ y $(2x)$. Se debe cumplir:

$$(2x+2)^2-(2x)^2=100 \quad\Rightarrow\quad x=12 \quad\Rightarrow\quad \text{Los números buscados son 26 y 24.}$$

PÁGINA 69

9. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{x^2-5}=2$

b) $\sqrt{x^2-5x+3}=2x-1$

c) $\sqrt{x^2+9}+x^2=21$

d) $3x-3\sqrt{x+3}=x+3$

e) $\sqrt{2x-1}-\sqrt{2x-4}=3$

f) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+6}=\dfrac{3}{\sqrt{x+3}}$

10. El dividendo de una división es 1 081. El cociente y el resto son iguales y el divisor es doble del cociente. Halla el divisor.

11. Los dos catetos de un triángulo rectángulo difieren en 5 unidades y la hipotenusa mide 25 cm. Calcula los catetos.

12. La suma de un número y su inverso es $\dfrac{34}{15}$; ¿cuánto vale el número?

13. El número de días que tiene un año tiene la propiedad de ser el único número que es suma de los cuadrados de tres números consecutivos. Además, es también suma de los cuadrados de los dos números consecutivos a los anteriores. Demuéstralo.

14. Resuelve los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{3} \\ 4y=x+3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-\dfrac{y-2}{2}=7 \\ \dfrac{3}{2}(x-2)+2y=-5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y=2(x+3) \\ x-5=3(2-y) \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2+y^2=160 \\ x-y=8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2-y^2=21 \\ x+y=3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x+y=7 \\ x\cdot y=-30 \end{cases}$

15. Halla las dimensiones del rectángulo de 60 cm² de área y cuya base es 7 cm más larga que su altura.

16. Marta quiere hacer el marco de un espejo con un listón de madera de 2 m, sin que le sobre ni le falte nada. Sabiendo que el espejo es rectangular y que tiene una superficie de 24 dm², ¿de qué longitud deben ser los trozos que ha de cortar?

17. La suma de las áreas de dos cuadrados es 3 250 m² y su diferencia 800 m². Calcula la medida de sus lados.

18. Dos albañiles hacen un trabajo en 3 horas. Uno de ellos lo haría en 4 horas. Calcula el tiempo que tardaría en hacerlo el otro solo.

19. Los estudiantes de 1º de Bachillerato están preparando una excursión. La agencia de viajes les da un presupuesto de 1 620 euros. En el último momento, dos estudiantes se ponen enfermos y, al no poder ir de excursión, el resto ha de pagar 4,80 euros más cada uno. ¿Cuántos estudiantes había en el curso?

20. En un multicine hay dos salas de proyección, una grande en la cual las entradas valen a 5 euros y otra pequeña en la cual el precio de las entradas es igual al 75% del precio de las mismas en la otra sala. Un día en que asistieron al multicine 280 personas se recaudaron 1 287,5 euros. ¿Cuántas personas estuvieron en cada sala?

9. Las soluciones quedan:

a) Elevando al cuadrado ambos miembros y operando obtenemos: $x^2-9=0$; así las soluciones quedarían: $x_1=3;\ x_2=-3$

b) Elevando al cuadrado ambos miembros y operando obtenemos: $3x^2+x-2=0$; así las soluciones quedarían: $x_1=-1;\ x_2=\frac{2}{3}$. La solución que verifica la ecuación dada es $x=\frac{2}{3}$.

c) Operando de forma análoga a los casos anteriores obtenemos:

$$x^4-43x^2+432=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=3\sqrt{3};\ x_2=-3\sqrt{3};\ x_3=4;\ x_4=-4$$

Las soluciones que verifican la ecuación dada son: $x_1=4;\ x_2=-4$

d) Operando de forma análoga a los casos anteriores obtenemos:

$$4x^2-21x-18=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=6;\ x_2=-\frac{3}{4} \quad \text{donde la solución buscada es}:\ x_1=6$$

e) Elevando al cuadrado ambos miembros y operando obtenemos: $-1=\sqrt{2x-4}$ y elevando de nuevo se obtiene $x=\frac{5}{2}$, sin embargo esta solución no verifica la ecuación inicial, por lo que se concluye que no existe solución.

f) Elevando al cuadrado y operando:

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{x+6}=\frac{3}{\sqrt{x+3}} \quad \Rightarrow \quad 3=x+3+\sqrt{(x+6)(x+3)} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+9x+18}=-x$$

Elevando al cuadrado se obtiene: $9x+18=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2$

10. Las condiciones del problema nos dan:

$$\begin{array}{r|l} 1081 & 2x \\ \cline{2-2} x & x \end{array}$$

De donde se extrae: $1081=2x^2+x$ cuyas soluciones son: $x_1=23;\ x_2=-23{,}5$.

El divisor de esta división es -47 ó 46.

11. El triángulo tiene por catetos x, $x-5$ y por hipotenusa 25, por lo tanto:

$$x^2+(x-5)^2=25^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-5x-300=0 \quad \Rightarrow \quad x=20\,\text{cm}$$

Un cateto mide 20 cm y el otro 15 cm.

12. Llamando x al número e imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

$$x+\frac{1}{x}=\frac{34}{15} \quad \Leftrightarrow \quad 15x^2-34x+15=0 \quad \Rightarrow \quad \text{Las soluciones son: } x_1=\frac{5}{3};\ x_2=\frac{3}{5}$$

13. La demostración queda:

$$(x-1)^2+x^2+(x+1)^2=365 \quad \Rightarrow \quad x=11 \quad \Rightarrow \quad \text{Los números son: } 10, 11 \text{ y } 12.$$

Los números consecutivos a éstos son: 13 y 14 y se cumple $13^2+14^2=365$.

14. La solución de los sistemas queda del siguiente modo:

a) $$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{3} \\ 4y=x+3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=5 \\ y=2 \end{array}$$

d) $$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=160 \\ x-y=8 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=-4;\ y=-12 \\ x=12;\ y=4 \end{array}$$

b) $$\left.\begin{array}{r} x-\dfrac{y-2}{2}=7 \\ \dfrac{3}{2}(x-2)+2y=-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=4 \\ y=-4 \end{array}$$

e) $$\left.\begin{array}{r} x^2-y^2=21 \\ x+y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=5 \\ y=-2 \end{array}$$

c) $$\left.\begin{array}{r} y=2(x+3) \\ x-5=3(2-y) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=-1 \\ y=4 \end{array}$$

f) $$\left.\begin{array}{r} x+y=7 \\ x\cdot y=-30 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=10;\ y=-3 \\ x=-3;\ y=10 \end{array}$$

15. Llamando x a la longitud de la altura, la base tendrá por longitud $(7+x)$. Conocida el área se verifica:

$$x(7+x)=60 \quad \Rightarrow \quad x=5\,\text{cm}$$

El rectángulo mide 5 cm de altura y 12 cm de base.

16. Llamando x a la longitud de la base e y a la altura e imponiendo las condiciones del problema obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+2y=20 \\ x\cdot y=24 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=6\text{ cm} \\ y=4\text{ cm} \end{array} \text{ o bien } \begin{array}{l} x=4\text{ cm} \\ y=6\text{ cm} \end{array}$$

17. Llamando *x* al área de un cuadrado e *y* al área del otro obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=3\,250 \\ x-y=800 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=2\,025 \text{ m}^2 \\ y=1\,225 \text{ m}^2 \end{array}$$

De donde el lado de un cuadrado mide 35 m y el del otro 45 m.

18. Llamando x al tiempo que tarda él solo en hacer el trabajo obtenemos:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{x}=\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x=12 \text{ horas tardaría él solo.}$$

19. Llamamos *x* al número de estudiantes del curso e *y* a la cantidad de dinero que paga cada uno. Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} x\cdot y=1\,620 \\ (x-2)(y+4{,}8)=1\,620 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=27 \text{ estudiantes} \\ y=60 \text{ euros paga cada uno} \end{array}\right.$$

20. Llamando x al número de personas que asistieron a la sala grande e y al número de personas de la sala pequeña; imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} 5x+3{,}75y=1287{,}5 \\ x+y=280 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=190 \text{ personas en la sala grande} \\ y=90 \text{ personas en la sala pequeña.} \end{array}$$

PÁGINA 70

ACTIVIDADES FINALES

■ 21. Utilizando el método de Gauss, resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 1 \\ x - z = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ 2x + y + 5z = 10 \\ x + y - 4z = -9 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + 4y - 8z = -8 \\ 4x + 8y - z = 76 \\ 8x - y - 4z = 110 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x + y + t = 6 \\ x - t = -1 \\ 3x + 2y + t = 11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3y - 2z = -1 \\ x + z = 2 \\ 2x + 5y = 8 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x + 4y - z = 3 \\ 6x - 6y + 2z = -16 \\ x - y + 2z = -6 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$

■ 22. La suma de las tres cifras de un número es 7. La cifra de las centenas es igual a la suma de la de las decenas más el doble de la de las unidades. Si se permutan entre sí las cifras de las centenas y la de las unidades, el número disminuye en 297 unidades. Calcula dicho número.

■ 23. Un hombre le dijo a su hijo: *cuando transcurra la tercera parte de los años que yo tengo, tú tendrás la mitad de mi edad actual. Sí*, contestó el hijo, *pero hace sólo 4 años, tu edad era 11 veces la mía*. ¿Cuál es la edad actual del hijo?

■ 24. Las tres cifras de un número suman 18. Si a ese número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, se obtiene 594; la cifra de las decenas es media aritmética entre las otras dos. Halla dicho número.

■ 25. Las edades de una familia formada por los padres y una hija suman 86 años. Halla la edad de cada uno de ellos sabiendo que la edad de la madre es triple de la edad de la hija, y las edades del padre y de la hija difieren en 26 años.

■ 26. Un país importa 22 400 vehículos entre motos, coches y todoterrenos, al precio de 4 800, 9 000 y 9 500 euros, respectivamente. Si el total de los vehículos importados cuesta 168,65 millones de euros, ¿cuántos vehículos de cada tipo importa este país si de coches importa el 60% de la suma de motos y todoterrenos?

■ 27. En un centro hay dos equipos de fútbol, A y B. Si del equipo A pasan tres personas al B, en ambos queda el mismo número. En cambio, si del B pasan 7 al A, queda en este un número que es el cuadrado de los de aquel. ¿Cuántos deportistas hay en cada equipo?

21. Las soluciones quedan:

a) $x=1;\ y=2$
b) $x=1;\ y=-2;\ z=2$
c) $x=-1;\ y=2;\ z=3$
d) $x=1;\ y=-2;\ z=3$
e) $x=16;\ y=2;\ z=4$
f) $x=-1;\ y=1;\ z=-2$
g) Sistema incompatible. No tiene solución.
h) $x=t-1;\ y=7-2t$. Sistema indeterminado.
i) $x=1;\ y=1;\ z=2$

22. Sea el número *xyz*.
De las siguientes condiciones del enunciado obtenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=7 \\ x=y+2z \\ xyz-zyx=297 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=7 \\ x-y-2z=0 \\ (100x+10y+z)-(100z+10y+x)=297 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema obtenemos: $x=4,\ y=2,\ z=1$

El número buscado es el 421.

23. Llamando *x* a la edad del padre e *y* a la edad del hijo obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} y+\dfrac{x}{3}=\dfrac{x}{2} \\ x-4=11\,(y-4) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x+6y=0 \\ x-11y=-40 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=48 \\ y=8 \end{array}$$

El padre tiene 48 años y el hijo 8 años.

24. Sea el número *xyz*.
Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=18 \\ (100x+10y+z)-(100z+10y+x)=594 \\ y=\dfrac{x+z}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=18 \\ x-z=6 \\ x-2y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=9 \\ y=6 \\ z=3 \end{array}$$

El número es el 963.

25. Llamamos *x* a la edad del padre, *y* a la edad de la madre y *z* a la edad de la hija. Obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=86 \\ y=3z \\ x-z=26 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=38 \\ y=36 \\ z=12 \end{array}$$

El padre tiene 38 años, la madre 36 años y la hija 12 años.

26. Llamamos *x* al número de motos que importa este país, *y* al de coches y *z* al de todoterrenos. Obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=22\,400 \\ 4\,800x+9\,900y+9\,500z=168,65\cdot 10^6 \\ y=\dfrac{60}{100}(x+z) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=8\,500 \text{ motos} \\ y=8\,400 \text{ coches} \\ z=5\,500 \text{ todoterrenos} \end{array}$$

27. En el equipo A hay *x* futbolistas y en el equipo B hay *y* futbolistas.

$$\left.\begin{array}{l} x-3=y+3 \\ x+7=(y-7)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=18 \text{ futbolistas en el equipo A} \\ y=12 \text{ futbolistas en el equipo B} \end{array}$$

PÁGINA 71

■ 28. Los 50 alumnos de 1.° de Bachillerato hacen una votación para determinar el destino de la excursión de fin de curso. Eligen entre Italia, Canarias y Holanda. El número de los que prefieren Italia duplica al de los que prefieren Canarias y los que prefieren Holanda constituyen la novena parte de la suma de los que prefieren los otros destinos. Halla el número de votos que obtuvo cada destino.

■ 29. En un trabajo actúan tres mecanógrafas y lo terminan en cuatro días. Si trabajase solamente la primera, lo terminaría en 12 días; si trabajase solamente la segunda, lo terminaría en 10 días. ¿En cuánto tiempo lo terminaría la tercera actuando sola?

■ 30. Dos capitales se diferencian en 567 euros. Se sabe que si se colocan a interés simple al mismo tanto por ciento, el primero durante 4 meses y el segundo durante 13 meses, ambos producen el mismo interés. Determina dichos capitales.

■ 31. Invirtiendo mil euros en acciones de tipo A y dos mil en acciones de tipo B, obtendríamos unos intereses totales (anuales) de 1 680 euros, y si invertimos dos mil en A y mil en B, obtenemos 1 560 euros. ¿Cuáles serían los intereses si se invirtieran 3 000 euros en A y 5 000 euros en B?

■ 32. Una empresa recoge papel usado para reciclar, que clasifica en tres tipos: bueno, medio y bajo. Ha realizado tres pruebas con diferentes mezclas: en la primera han obtenido 4 kg, habiéndose utilizado 2, 3 y 1 kilogramo de cada tipo, respectivamente; en la segunda, con 1, 2 y 3 kg se produce un total de 5 kg; y en la tercera 3 kg con 3, 1 y 2 kg. ¿Cuál es el rendimiento de cada tipo de papel?

■ 33. Un grupo de personas se reúne para ir de excursión, juntándose un total de 20 entre hombres, mujeres y niños. Contando hombres y mujeres juntas, su número resulta ser el triple del número de niños.

Además, si hubiera acudido una mujer más, su número igualaría al de hombres. Averigua cuántos hombres, mujeres y niños han ido de excursión.

■ 34. Un ganadero tiene vacas que comen la misma cantidad de pienso cada día. Observa que si vende 15 vacas el pienso le dura 3 días más, y en cambio si compra 25 vacas el pienso le dura 3 días menos. ¿Cuántas vacas tiene este ganadero?

■ 35. En cierto colegio, al principio de curso, la relación del número de alumnas al de alumnos era de 8/7. Al finalizar el curso, habían causado baja, por diversas causas, 40 chicas y el 4% de los chicos, y la relación era de 15/14. ¿Cuántos alumnos de cada sexo acabaron el curso?

■ 36. En una confitería envasan los bombones en cajas de 250 g, 500 g y 1 kg. Cierto día envasaron 60 cajas en total, habiendo 5 cajas más de tamaño pequeño (250 g) que de tamaño mediano (500 g). Sabiendo que el precio del kilo de bombones son 24 euros y que el importe total de los bombones envasados asciende a 750 euros, determina cuántas cajas se han envasado de cada tipo.

28. Llamando *x*, *y*, *z* a los alumnos que eligen Italia, Canarias y Holanda respectivamente e imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=50 \\ x=2y \\ z=\dfrac{y}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=30 \text{ alumnos prefieren ir a Italia} \\ y=15 \text{ alumnos prefieren ir a Canarias} \\ z=5 \text{ alumnos prefieren ir a Holanda} \end{array}$$

29. Llamamos *x* al tiempo que invertiría la tercera ella sola. Obtenemos:

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{10}+\frac{1}{x}=\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad x=15 \text{ días tarda la 3ª}$$

30. Llamando *x* e *y* a los capitales, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} x-y=567 \\ \dfrac{x\cdot r\cdot 4}{1200}=\dfrac{y\cdot r\cdot 13}{1200} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y=567 \\ 4x-13y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=819 \\ y=252 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Luego los capitales pedidos} \\ \text{son de 819 euros y 252 euros.} \end{array}$$

31. Llamando *x* al interés que produce cada acción tipo *A* e *y* al que produce cada acción tipo *B*, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} 1000x+2\,000y=1680 \\ 2\,000x+1000y=1560 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=0,48 \text{ euros} \\ y=0,6 \text{ euros} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Luego 3 000 euros en tipo A y 5 000 euros} \\ \text{en tipo B producen 4 400 euros.} \end{array}$$

32. Llamando *x* al rendimiento que produce el tipo bueno, *y* al de tipo medio y *z* al de tipo bajo, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3y+z=4 \\ 3x+2y+3z=5 \\ 3x+y+2z=5 \end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{7}{9};\ y=\frac{4}{9};\ z=\frac{10}{9}$$

33. Llamando *h* al número de hombres, *m* al de mujeres y *n* al de niños, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} h+m+n=20 \\ h+m=3n \\ m+1=h \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} h=8 \text{ hombres} \\ m=7 \text{ mujeres} \\ n=5 \text{ niños} \end{array}$$

34. Llamamos v al número de vacas que tiene el ganadero y t al tiempo en días que le dura el pienso para sus vacas. Obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} v\cdot t=(v-15)\cdot(t+3) \\ v\cdot t=(v+25)\cdot(t-3) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} v=75 \text{ vacas} \\ t=12 \text{ días} \end{array} \Rightarrow \text{Luego el ganadero tiene 75 vacas.}$$

35. Llamamos x al número de alumnas que había al principio del curso e y al número de alumnos. Obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{y}=\dfrac{8}{7} \\ \dfrac{x-40}{0,96\cdot y}=\dfrac{15}{14} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=400 \text{ alumnas} \\ y=350 \text{ alumnos} \end{array} \Rightarrow \text{Luego finalizan el curso 360 chicas y 336 chicos.}$$

36. Llamamos x al número de cajas de 250 gr, y al de 500 gr y z al de 1 00 gr. Obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=60 \\ x=y+5 \\ (0,25x+0,5y+z)\cdot 24=750 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=25 \text{ cajas pequeñas} \\ y=20 \text{ cajas medianas} \\ z=15 \text{ cajas grandes} \end{array}$$

PÁGINA 72

ACTIVIDADES FINALES

37. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{5}{4}(2x-4) - \frac{2(x-3)}{3} = x + 2$

b) $\frac{x^2-4}{x^2-1} = 0$

c) $(2x^2+8)(x^2-x-6) = 0$

d) $(x^2-2)(x^2+2) = 12$

e) $2x^5 + 3x^4 - 2x^3 = 3x^2$

f) $x^3 - x^2 + 9x = 9$

g) $\sqrt{2x^2-4} = 1 + \sqrt{x^2-3}$

h) $\frac{4}{x^2-1} = x^2 - 1$

38. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} \frac{x+3y}{3} - \frac{3x+y}{2} = 1 \\ 2x = 3 - 7y \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 9 \\ \frac{x}{6} = \frac{3}{y} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \\ x + y + 2z = 150 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 3y = 6 - z \\ 3x - 5z = -4 - 2y \\ z - 6y = 9 - 4x \end{cases}$

39. Una casa rural dispone de 27 camas en habitaciones dobles y sencillas. Halla el número de habitaciones de cada tipo si en total son 16 habitaciones.

40. El perímetro de un jardín rectangular es 36 m. Si se aumentan sus lados en 2 metros cada uno, el área aumenta en 40 m². Halla las dimensiones del jardín.

41. La suma de tres números es 98. La razón del primero al segundo es $\frac{2}{3}$ y del segundo al tercero $\frac{5}{8}$. encuentra los números.

42. La suma de las áreas de dos cuadrados es 673 m² y su diferencia es 385 m². Halla las longitudes de los lados de los cuadrados.

43. A la proyección de una película asisten 500 personas, de las cuales algunas pagan la entrada a 9 euros, otras son jubiladas y pagan el 20% del precio de la entrada, y los niños que asisten pagan el 50% del precio de la entrada. Sabiendo que el número de jubilados es doble del de personas que pagan la entrada completa y que en total se han recaudado 2 115 euros; halla el número de niños que ven la película.

44. En una finca hay 22 árboles entre manzanos, ciruelos y perales. El doble del número de ciruelos más el triple del número de perales es igual al doble del número de manzanas. Halla el número de árboles de cada tipo si se sabe que el número de ciruelos es la mitad del de manzanos.

37. Las soluciones quedan:

a) $x=6$
b) $x=2$ y $x=-2$
c) $x=-2$ y $x=3$
d) $x=2$ y $x=-2$
e) $x=0;\ x=1;\ x=-1$ y $x=-\frac{3}{2}$
f) $x=1$
g) $x=2$ y $x=-2$
h) $x=\sqrt{3}$ y $x=-\sqrt{3}$

38. Las soluciones de los sistemas son:

a) $x=-\frac{3}{5};\ y=\frac{3}{5}$
b) $x=3;\ y=6$ o bien $x=6;\ y=3$
c) $x=20;\ y=30;\ z=50$
d) $x=3;\ y=1;\ z=3$

39. Llamando *D* al número de habitaciones dobles y *S* al de sencillas obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} D+S=16 \\ 2D+S=27 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} D=11 \text{ habitaciones dobles} \\ S=5 \text{ habitaciones sencillas} \end{array}$$

40. Llamando *x*, *y* a las dimensiones del jardín e imponiendo las condiciones del problema obtenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+2y=36 \\ (x+2)(y+2)=xy+40 \end{array}\right\}$$

Este sistema tiene indefinidas soluciones, todos los valores de *x* e *y* que verifiquen la siguiente expresión: $x+y=18$ con $x\in(0,18)$ e $y\in(0,18)$.

41. Sean *x*, *y*, *z* los tres números. Obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=98 \\ \frac{x}{y}=\frac{2}{3} \\ \frac{y}{z}=\frac{5}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=20 \\ y=30 \\ z=48 \end{array}$$

42. Llamamos x, y a las áreas de estos cuadrados. Obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=673 \\ x-y=385 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=529 \text{ m}^2 \\ y=144 \text{ m}^2 \end{array} \Rightarrow \text{Luego los lados de estos cuadrados miden 23 m y 12 m.}$$

43. Llamamos x a las personas que pagan la entrada a 9 euros, y a los jubilados y z a los niños. Obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=500 \\ y=2x \\ 9x+1{,}8y+4{,}5z=2115 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=150 \text{ pagan la entrada a 9 euros} \\ y=300 \text{ son jubilados} \\ z=50 \text{ son niños} \end{array}$$

44. Llamando x, y, z al número de manzanos, ciruelos y perales respectivamente. Obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=22 \\ 2y+3y=2x \\ y=\dfrac{x}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=12 \text{ manzanos} \\ y=6 \text{ ciruelos} \\ z=4 \text{ perales} \end{array}$$

Unidad 4 – Inecuaciones y sistemas

PÁGINA 75

cuestiones iniciales

1. Dos segmentos miden 10 y 15 cm, respectivamente. ¿Qué dimensiones puede tener un tercer segmento para que forme triángulo con los anteriores?

2. La desigualdad 25 > 15 es verdadera. Estudia si son verdaderas las desigualdades siguientes:

a) $25 + 5 > 15 + 5$ c) $25 \cdot 4 > 15 \cdot 4$ e) $25\,(-3) > 15\,(-3)$

b) $25 - 6 > 15 - 6$ d) $25 / 5 > 15 / 5$ f) $25/(-5) > 15/(-5)$

3. Comprueba si los valores que se indican son soluciones de las inecuaciones correspondientes:

a) $x = 3,\ x = 4,\ x = 5$ de $x^2 + 3x > 30$

b) $x = -2,\ x = 6$ de $x + 2 < 8 - x$

c) $x = 0,\ x = 2$ de $\dfrac{2x + 3}{x - 1} > 1$

d) $x = 0,\ x = 1$ de $\dfrac{2x + 1}{x - 2} > \dfrac{1}{2}$

4. Un vehículo se desplaza en línea recta con una velocidad superior a 75 m/s e inferior a 110 m/s. ¿Entre qué distancias se encuentra el móvil al cabo de dos horas?

SOLUCIONES

1. La medida del tercer segmento debe estar entre 5 y 25 cm.

2. En cada uno de los casos:

   Son verdaderas las desigualdades: a), b), c) y d).
   Son falsas las desigualdades: e) y f).

3. En cada uno de los casos:

   a) Los valores de $x = 3$ y $x = 4$ no son soluciones de la inecuación dada. Sin embargo, $x = 5$ sí lo es.
   b) El valor $x = -2$ es solución de la inecuación dada y $x = 6$ no lo es.
   c) El valor $x = 0$ no es solución de la inecuación dada y $x = 5$ sí lo es.
   d) Los valores $x = 0$, $x = 1$ no son soluciones de la inecuación.

4. Entre 540 km y 792 km.

PÁGINA 85

ACTIVIDADES

- Practica lo dicho anteriormente con los siguientes problemas

1. **Relaciones familiares.** Por ahí vienen nuestros padres, padres de nuestros hijos, maridos de nuestras madres y nuestros propios maridos. ¿Es esto cierto?
2. **Animado baile.** Cuarenta y dos personas toman parte en un baile. Durante la velada, una primera dama bailó con siete caballeros; una segunda, con ocho; una tercera, con nueve; y así sucesivamente hasta la última, que bailó con todos los caballeros. ¿Cuántas damas había en aquel baile?
3. **La perra *Cati*.** Luis va todos los días desde su casa a la sierra más cercana, que dista 1,5 km. Va acompañado de su perra mastina *Cati,* que va corriendo a la sierra. Cuando la perra llega a la sierra, vuelve con Luis y así sucesivamente, hasta que Luis llega a la sierra. Luis camina a 6 km/h y *Cati* va a 16 km/h. ¿Cuántos km recorre *Cati*?
4. **La edad de Astérix.** ¿Qué edad tenía Astérix en el año 2000, sabiendo que esa edad es igual a la suma de las tres últimas cifras de su año de nacimiento?

SOLUCIONES

1. Sí puede ser cierto; se trata de dos padres que se han casado cada uno con la hija del otro.

2. Diremos que:

$$a_1 = 7$$
$$a_2 = 8$$
$$.$$
$$a_n = 7 + (n-1)\cdot 1 = n + 6$$

Además sabemos que $a_n + n = 42 \Rightarrow n = 18$ damas.

$a_n = 42 - 18 = 24$ caballeros.

Había 18 damas y 24 caballeros.

3. Luis tarda 15 minutos en llegar a la sierra.
La perra, por lo tanto, ha estado moviéndose durante 15 minutos.
Por tanto ha recorrido: $16\ \mathrm{km}/\mathrm{h} : 4 = 4$ kilómetros.

4. Diremos que:

$$\left.\begin{array}{l} 2000 - 19xy = 9 + x + y \\ 2000 - (1000 + 900 + 10x + y) = 9 + x + y \\ \quad \Rightarrow 11x + 2y = 91 \Rightarrow x = 7 \quad y = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Es decir, Astérix nació en el año 1 977 y en el año 2 000 tendrá 23 años.

PÁGINA 88

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Comprueba si los valores $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$ son soluciones de las inecuaciones siguientes:

a) $3 - x < 2 + 5x$

b) $1 + x > 2 - 3x$

c) $x^2 - 2x + 8 < 0$

d) $\dfrac{2x+3}{x-1} \leq 2$

e) $\dfrac{x-1}{x+3} > 3$

f) $\dfrac{2x+1}{x+5} > \dfrac{2}{3}$

g) $x\,(x + 4) < 2x^2$

h) $(x + 2)^2 > 9$

i) $\dfrac{(x-1)^2 - 6}{3 - 2x} > 1$

2. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $2\,(3x - 3) > 6$

b) $3\,(3 - 2x) < 2\,(3 + x)$

c) $2\,(x + 3) + 3\,(x - 1) > 2\,(x + 2)$

d) $\dfrac{3x-3}{5} - \dfrac{4x+8}{2} < \dfrac{x}{4} - 3x$

e) $2\,(3 + x) > \dfrac{8+x}{3}$

f) $\dfrac{x+1}{2} - 3x \geq \dfrac{1-5x}{3} + 4$

3. Asocia a cada inecuación su conjunto de soluciones correspondientes:

1) $\dfrac{x+1}{10} \leq 2x - 17$

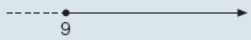
2) $3x - 7 > x - 1$

3) $\dfrac{4x-6}{7} < x + 3$

4) $2(x - 3) \leq x$

a) $(-9, +\infty)$

b) $(-\infty, 6]$

c) 

d) $x > 3$

4. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 1 - x < 2 - 3x \\ 3 + x < 2 + 5x \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + \dfrac{1}{5} < 3 \\ x < \dfrac{4-2x}{5} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - 7 > 5 - x \\ 3x + 1 \leq x - 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{5} > 8 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{4x}{9} > 5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3} - \dfrac{x+3}{2} \leq x \\ \dfrac{4x-2}{4} - \dfrac{x-1}{3} \geq x \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dfrac{x}{5} - \dfrac{x}{7} < 2 \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{x}{5} > -6 \end{cases}$

5. Asocia, de forma razonada, las siguientes soluciones con sus sistemas correspondientes:

a) $\begin{cases} 2x - 3 < 4x - 5 \\ x + 1 > \dfrac{7x-2}{4} \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x < 3 \\ x + 6 \leq 6 \\ 2\,(x + 1) \geq x \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2x < -6 \\ x \geq 0 \\ -1 < x \end{cases}$

i) $(3, +\infty)$

ii) $[-2, 0]$

iii) $(1, 2)$

6. Juan tiene la costumbre de subir la escalera de su casa saltando los escalones de 2 en 2 y la baja con saltos de 3 en 3. No recuerda con exactitud cuántos saltos da entre la subida y la bajada: entre 45 y 50. ¿Cuántos escalones tiene la escalera de su casa?

7. En un concurso organizado en el aula, una de las pruebas consiste en tirar una moneda 20 veces. Si sale *cara* al jugador se le asignan 10 000 puntos y si sale *cruz,* 6 000. ¿Cuántas caras y cruces han podido salir si se sabe que ha ganado menos de 176 000 puntos?

8. Un vendedor recibe una cantidad fija al mes de 600 euros, además de un 5% de las ventas que realice. ¿Qué cantidad debe vender para tener un sueldo mensual comprendido entre 1 200 y 1 500 euros?

SOLUCIONES

1. Los resultados pueden verse en la tabla que sigue:

Inecuación	$x=-2$	$x=-1$	$x=0$	$x=1$	$x=2$
a)	no	no	no	sí	sí
b)	no	no	no	sí	sí
c)	no	no	no	no	no
d)	sí	sí	sí	no	no
e)	no	no	no	no	no
f)	no	no	no	no	sí
g)	sí	sí	no	no	no
h)	no	no	no	no	sí
i)	no	no	no	no	sí

2. Las soluciones quedan:

a) $2(3x-3)>6 \quad \Leftrightarrow \quad 6x-6>6 \quad \Leftrightarrow \quad 6x>12 \Leftrightarrow \quad x>2$

b) $3(3-2x)<3(3+x) \quad \Leftrightarrow \quad 9-6x<6+2x \quad \Leftrightarrow -8x<-3 \quad \Leftrightarrow \quad x>\dfrac{3}{8}$

c) $2(x+3)+3(x-1)>2(x+2) \quad \Leftrightarrow \quad 2x+6+3x-3>2x+4 \quad \Leftrightarrow \quad 3x>1 \quad \Leftrightarrow \quad x>\dfrac{1}{3}$

d) $\dfrac{3x-3}{5}-\dfrac{4x+8}{2}<\dfrac{x}{4}-3x \quad \Leftrightarrow \quad 12x-12-40x-80<5x-60x \quad \Leftrightarrow \quad 27x<92 \Leftrightarrow \quad x<3,41$

e) $2(3+x)>\dfrac{8+x}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 6+2x>\dfrac{8+x}{3} \Leftrightarrow \quad 18+6x>8+x \quad \Leftrightarrow \quad 5x>-10 \quad \Leftrightarrow \quad x>-2$

f) $\dfrac{x+1}{2}-3x\geq\dfrac{1-5x}{3}+4 \quad \Leftrightarrow \quad 3x+3-18x\geq 2-10x+24 \quad \Leftrightarrow \quad -5x\geq 23 \quad \Leftrightarrow \quad x\leq-\dfrac{23}{5}$

3. Las asociaciones quedan: $1\to$ c) $\qquad 2\to$ d) $\qquad 3\to$ a) $\qquad 4\to$ b)

4. Los sistemas quedan:

a) $\begin{cases}1-x<2-3x\\3+x<2+5x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x<1\\-4x<-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<\dfrac{1}{2}\\x>\dfrac{1}{4}\end{cases} \Rightarrow$ La solución es el rango: $x\in\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$

b) $\begin{cases} x+\dfrac{1}{5}<3 \\ x<\dfrac{4-2x}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\dfrac{14}{5} \\ 5x<4-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\dfrac{14}{5} \\ x>\dfrac{4}{7} \end{cases} \Rightarrow$ La solución es el rango : $x\in\left(-\infty,\dfrac{4}{7}\right)$

c) $\begin{cases} 5x-7>5-x \\ 3x+1\le x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x>12 \\ 2x\le -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x\le -1 \end{cases} \Rightarrow$ El sistema no tiene solución.

d) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{5}>8 \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{4x}{9}>5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+3x>120 \\ 9x-8x>90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>15 \\ x>90 \end{cases} \Rightarrow$ La solución es el rango : $x\in(90,+\infty)$

e) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3}-\dfrac{x+3}{2}\le x \\ \dfrac{4x-2}{4}-\dfrac{x-1}{3}\ge x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2-3x-9\le 6x \\ 12x-6-4x+4\ge 12x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7x\le 11 \\ -4x\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{11}{7} \\ x\le -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ La solución es el rango : $x\in\left[-\dfrac{11}{7},-\dfrac{1}{2}\right]$

f) $\begin{cases} \dfrac{x}{5}-\dfrac{x}{7}<2 \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{x}{5}>-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x-5x<70 \\ 5x-3x>-90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<35 \\ x>-45 \end{cases} \Rightarrow$ La solución es el rango : $x\in[-45,35]$

5. La solución es: a) con iii); b) con ii); c) con i)

6. Llamando x al número de escalones, tenemos:

$$45<\frac{x}{2}+\frac{x}{3}<50 \Leftrightarrow 45<\frac{5x}{6}<50 \Leftrightarrow 9<\frac{x}{6}<10 \Leftrightarrow 54<x<60$$

El número de escalones está comprendido entre 54 y 60.

7. Llamando x al número de caras y $(20-x)$ al número de cruces obtenemos:

$10\,000\cdot x+6\,000\cdot(20-x)<176\,000 \Rightarrow x<14 \Rightarrow$ El máximo número de caras conseguido es 14.

8. Llamando x a la cantidad que debe vender cumple:

$$1200<600+0{,}05\cdot x<1500 \quad \Rightarrow \quad 12\,000<x<18\,000$$

Debe vender una cantidad entre 12 000 y 18 000 euros.

■ 9. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $-x^2 + 3x + 10 \leq 0$

b) $9x^2 - 6x + 1 > 0$

c) $(x + 1)^2 - 8x + 4 \geq 0$

d) $\dfrac{(x-1)^2}{3} + \dfrac{11x + 2}{15} < \dfrac{x^2 - 1}{3}$

e) $x^3 - 11x^2 + 10x \leq 0$

f) $x^3 - 1 > 0$

■ 10. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\dfrac{3}{x-2} > 0$

b) $\dfrac{3-x}{x+3} \leq 0$

c) $\dfrac{-10}{x-2} < 0$

d) $\dfrac{6-2x}{x+3} \geq 1$

e) $\dfrac{1}{x} > 1$

f) $\dfrac{x+1}{x-1} + 2 < 0$

■ 11. ¿Qué números reales verifican que su cuadrado es menor que su cuádruplo?

■ 12. Sin hacer la representación gráfica, estudia para qué valores de x la función $f(x) = -x^2 + 4x$ es positiva.

■ 13. Deseamos constuir un cuadro metálico de forma cuadrada. El interior del cuadrado es de acero que vale a 150 euros el metro cuadrado y el marco de cobre cuesta 30 euros el metro. ¿Qué longitud tendrá como máximo el lado del cuadrado si no disponemos de más de 620 euros?

■ 14. Estudia en cada una de las siguientes inecuaciones si los puntos que se dan son o no soluciones de la misma:

a) $3x + 2y > 5$; $A\,(1, 2)$, $B\,(-1, 2)$, $C\,(-2, 1)$ y $M\,(0, 0)$

b) $4x + 3y \leq -2$; $D\left(\dfrac{1}{4}, 1\right)$, $E\left(-\dfrac{1}{2}, -1\right)$, $F\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$ y $G\left(-\dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{3}\right)$

■ 15. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $x - 2y < 0$

b) $5x - 2y \geq 3$

c) $-2x - y > 2$

■ 16. Busca el conjunto solución o región factible en los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y \leq 0 \\ -x + y > 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y \geq -3 \\ x + y < 2 \end{cases}$

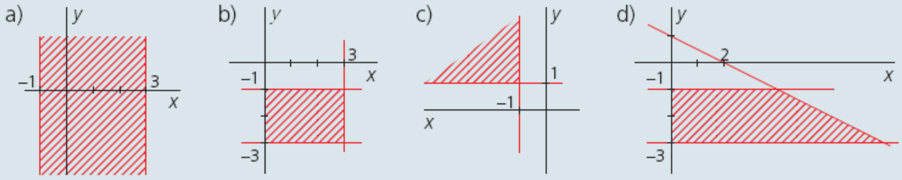
c) $\begin{cases} x - 3y \leq 2 \\ y + 2 > 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y > x - 1 \\ x \geq 0 \\ y \leq 4 \\ 2x \leq 5 - y \end{cases}$

e) $\begin{cases} y \leq 5 \\ x \leq 3 \\ x > y \\ x < y + 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x > 1 - y \\ y < 2 \\ x > -2 \end{cases}$

■ 17. Escribe los sistemas de inecuaciones que representan las regiones rayadas siguientes:



9. La solución en cada caso es:

a) $-x^2+3x+10\leq 0 \;\Rightarrow\; x^2-3x-10\geq 0 \;\Rightarrow\;$ La solución queda: $(-\infty,-2]\cup[5,+\infty)$

b) $9x^2-6x+1>0 \;\Rightarrow\; (3x-1)^2>0 \;\Rightarrow\;$ La solución queda: $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$

c) $(x+1)^2-8x+4\geq 0 \;\Rightarrow\; x^2-6x+5\geq 0 \;\Rightarrow\;$ La solución queda: $(-\infty,1]\cup[5,+\infty)$

d) $\frac{(x-1)^2}{3}+\frac{11x+2}{15}<\frac{x^2-1}{3} \;\Rightarrow\; x+12<0 \;\Rightarrow\;$ La solución queda: $(-\infty,-12)$

e) $x^3-11x^2+10x\leq 0 \;\Rightarrow\;$ La solución queda: $(-\infty,0]\cup[1,10]$

f) $x^3-1>0 \;\Rightarrow\;$ La solución queda: $[1,+\infty)$

10. Las soluciones quedan:

a) Solución: $(2,+\infty)$

b) Solución: $(-\infty,-3)\cup[3,+\infty)$

c) Solución: $(2,+\infty)$

d) Solución: $(-3,3]$

e) Solución: $(0,1)$

f) Solución: $\left(\frac{1}{3},1\right)$

11. Todos los números *x* que verifiquen $x^2<4x$, es decir, los valores del intervalo (0,4).

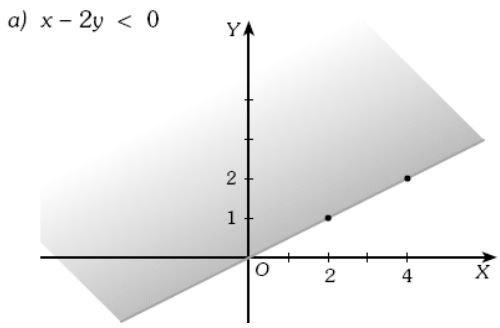
12. Todos los números *x* que verifiquen $-x^2+4x>0$, es decir, los valores del intervalo (0,4).

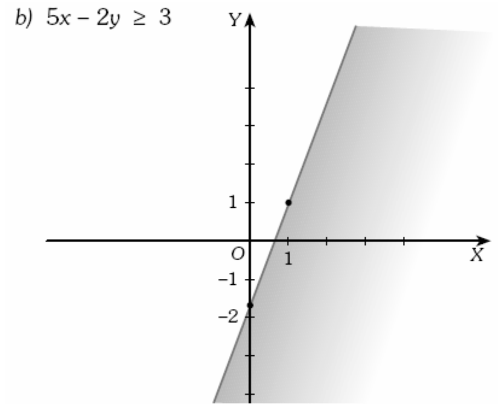
13. Llamando *x* al lado del cuadrado obtenemos: $150\cdot x^2+30\cdot 4x\leq 620$.

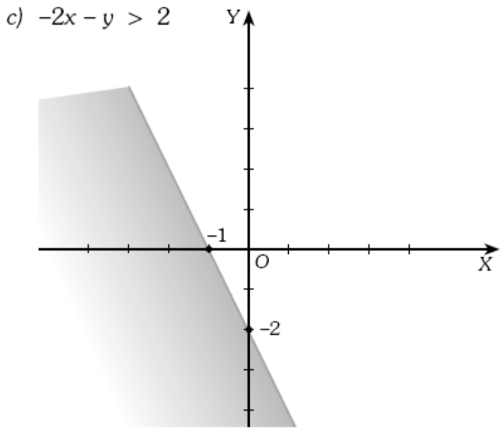
Las soluciones son los valores de *x* que estén en el intervalo $(-2,47;1,67)$. Luego la longitud máxima del cuadro es de 1,67 metros.

14. Las soluciones de las inecuaciones son: a) El punto A b) Los puntos E, F y G.

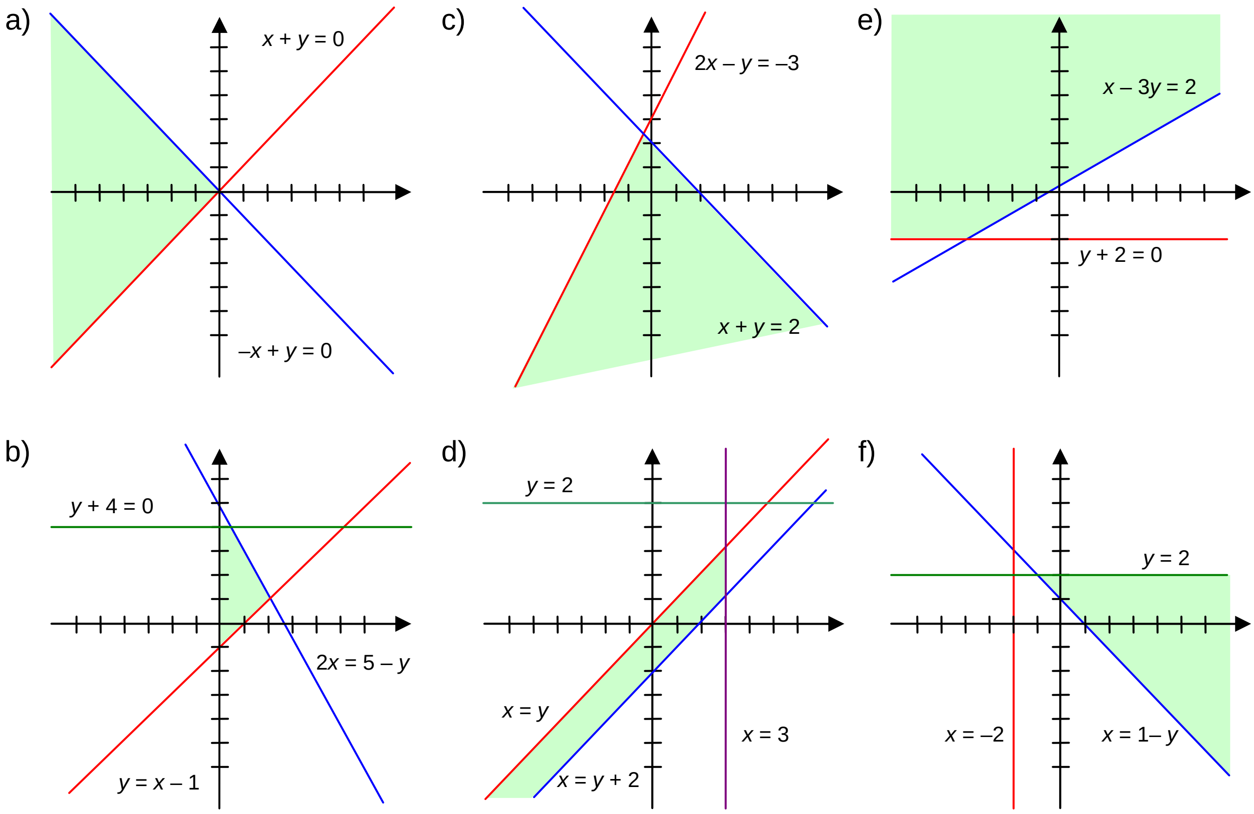
15. Las soluciones son las regiones rayadas.







16. En cada uno de los casos queda:



17. Los sistemas de inecuaciones son:

a) $\begin{cases} x > -1 \\ x < 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x > 0 \\ x < 3 \\ y > -3 \\ y < -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x < -1 \\ y > 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y > -3 \\ y < -1 \\ x + 2y < 2 \end{cases}$

PÁGINA 90

ACTIVIDADES FINALES

18. Encuentra los vértices de las regiones factibles solución de cada uno de los siguientes sistemas de inecuaciones:

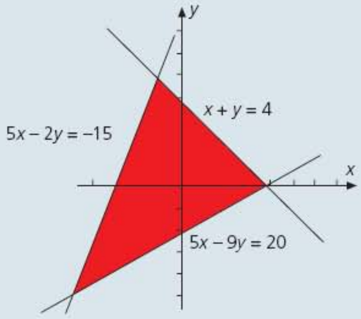
a) $\begin{cases} x - y > 0 \\ y > 0 \\ x + y - 6 < 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y \geq -4 \\ x - y + 1 > 0 \\ x + y + 1 < 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y \leq 2 \\ y \geq -1 \\ x < 0 \\ x - y + 3 > 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y \leq 12 \\ y > x \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

19. En el dibujo está representada la región factible que es solución de un sistema de inecuaciones. Busca el citado sistema y halla los vértices de esta región factible.



20. Halla el área de la parte del plano que cumple las condiciones:

$$y > x, \quad x > -5, \quad -2 < y < 2$$

21. Un quiosco vende bolígrafos a 0,2 euros y cuadernos a 0,6 euros. Llevamos 2 euros y pretendemos comprar los mismos cuadernos que bolígrafos por lo menos. ¿Cuál será el máximo número de piezas que podemos comprar?

22. La edad de un padre es 30 años mayor que la de su hijo. ¿Para qué edad del hijo la edad del padre supera en 6 años el doble de la del hijo?

23. Con un cordel de 8 m queremos rodear un triángulo isósceles. ¿Qué medida puede tener este triángulo?

24. Entre dos cofres tienen más de 10 monedas. El número de monedas del cofre rojo disminuido en 6 es inferior al triple del número de monedas del otro cofre. ¿Cuántas monedas puede contener cada uno de estos cofres?

25. En un campeonato de mus, cada partida ganada vale 2 puntos y cada partida perdida, 1 punto; además, no puede haber empates. A una pareja le faltan diez partidas por disputar. Para conseguir dicho campeonato tendrán que lograr un mínimo de 16 puntos. ¿Cuántas partidas han de ganar?

26. Mezclamos azúcar de 2 euros/kg con otra de 3 euros/kg, y queremos obtener una mezcla de calidad intermedia cuyo precio no sobrepase las 2,6 euros/kg. Para conseguir 60 kg de esta calidad intermedia, qué condiciones deberán cumplir los pesos de las dos clases mezcladas?

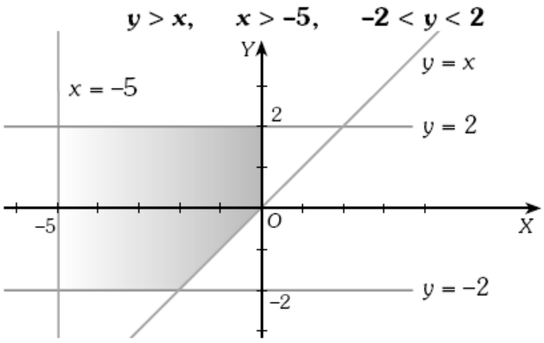
18. En cada caso quedan:

a) (0,0); (0,6); (3,3)
b) (– 1,0); (– 5, – 4); (3, – 4)
c) (– 4, – 1); (– 1,2); (0, 2); (0, – 1)
d) (0,0); (0,6); (4,4)

19. El sistema y los vértices quedan:

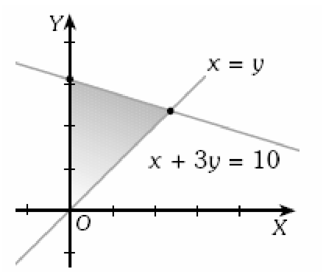
$$\left.\begin{array}{r} 5x-2y>-15 \\ x+y<4 \\ 5x-9y<20 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ Los vértices son}: (-1,5); (-5,-5); (4,0)$$

20. El cálculo sobre el recinto queda:



El área del recinto es de 18 unidades cuadradas.

21. Sean x e y el número de bolígrafos y cuadernos, respectivamente, que podemos comprar. Se debe cumplir:



$$\left.\begin{array}{r} x>0 \\ y>0 \\ x\leq y \\ 0,2x+0,6y\leq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Las soluciones son el conjunto de pares enteros dentro del recinto rayado. Es decir: (0,1) (0,2) (0,3) (1,1) (1,2) (1,3) (2,2)

22. Para que se cumplan las condiciones del enunciado el hijo debe tener 24 años como mínimo. Este resultado satisface al sistema que se obtiene del enunciado, llamando P a la edad del padre y H a la del hijo:

$$\left.\begin{array}{r} P-H>30 \\ P=2H+6 \end{array}\right\} \Rightarrow H>24 \text{ años}$$

23. Llamando *x* e *y* a los lados del triángulo, debe cumplirse:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ 2x + y \leq 8 \end{cases}$$

Las medidas serán las coordenadas de la región de soluciones del sistema de inecuaciones anterior. Estas aparecen a continuación en la región sombreada.

24. Llamando *x* al número de monedas del cofre rojo, e *y* al número de monedas del otro cofre. Dichas cantidades deben cumplir el sistema:

$$\begin{cases} x > 0,\ y > 0 \\ x + y > 10 \\ x - 3y < 6 \end{cases}$$

Las soluciones del problema son las coordenadas enteras de los puntos que aparecen en la región marcada en el siguiente diagrama.

25. Llamamos *x* al número de partidas ganadas; se debe cumplir:

$$2 \cdot x + (10 - x) \cdot 1 \geq 16 \quad \Rightarrow \quad x \geq 6 \quad \Rightarrow$$ Por tanto ha de ganar más de 5 de las 10 partidas.

26. Se debe cumplir: $2 \cdot x + 3 \cdot (60 - x) \leq 2{,}6 \cdot 60 \quad \Rightarrow \quad x \geq 24$

Por tanto deben mezclarse 24 o más kilos de 2 euros/kg con 36 o menos kilos de 3 euros/kg.

Unidad 5 – Logaritmos. Aplicaciones

PÁGINA 93

cuestiones iniciales

1. Un fabricante incrementa el precio de sus productos en un 5% anual. Actualmente, uno de sus productos cuesta 15 euros. ¿Cuánto costará este producto dentro de 3 años? ¿Cuánto costaba hace 2 años?

2. ¿A qué rédito anual hemos de colocar 120 euros para que en 6 trimestres se conviertan en 150 euros?

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $8^x = 32$ b) $3^x \cdot 9^x = 9^3$ c) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{27}{8}$

4. Los bulbos de algunas flores se triplican en la tierra cada año, es decir, si sembramos 1 bulbo, al final del año tendremos 3 bulbos en la tierra, y así sucesivamente. Suponiendo que no sacamos los bulbos de la tierra, responde a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuántos bulbos tendremos al cabo de 8 años?

b) ¿Cuántos años han pasado si tenemos 1 594 323 bulbos en la tierra?

SOLUCIONES

1. La solución en cada caso queda:

Al cabo de 3 años costará $15 \cdot \left(\frac{105}{100}\right)^3 = 17,36$ euros.

Hace 2 años costaba $15 \cdot \left(\frac{105}{100}\right)^2 = 13,61$ euros.

2. Los intereses que han producido son 30 euros, por tanto:

$$30 = \frac{120 \cdot r \cdot 6}{1200} \quad \Rightarrow \quad r = 50\% \quad \Rightarrow \quad \text{El rédito es del } 50\%.$$

3. En cada uno de los casos queda:

- $8^x = 32 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{3}$
- $3^x \cdot 9^x = 9^3 \quad \Rightarrow \quad 3^{3x} = 3^6 \quad \Rightarrow \quad x = 2$
- $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{27}{8} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \quad \Rightarrow \quad x = -3$

4. En cada uno de los casos queda:

a) Al cabo de 8 años tendremos $1 \cdot 3^8$ bulbos $= 6\,561$ bulbos.

b) El cálculo de los años queda: $3^x = 1\,594\,323 \Rightarrow 3^x = 3^{13} \Rightarrow x = 13$ años han pasado.

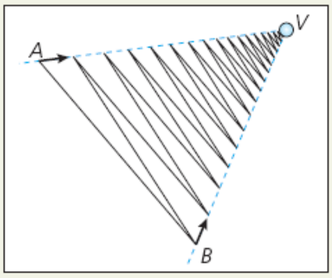
PÁGINA 109

ACTIVIDADES

■ Practica la fase de búsqueda de estrategias en la resolución de los siguientes problemas:

1. Producto de cuatro enteros. Observa las siguientes igualdades:

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 5^2 - 1;$ $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 11^2 - 1;$ $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 19^2 - 1$



¿Será siempre cierto que el producto de cuatro enteros consecutivos es un cuadrado perfecto menos uno?

2. Naves hacia Venus. Los cohetes A y B marchan hacia Venus a una velocidad de 50 000 km/s, formando sus trayectorias hacia dicho planeta un ángulo de 60°. En un instante dado, hallándose ambos a 3 000 000 de km de Venus, A emite una señal de radio (velocidad de esta 300 000 km/s), que una vez alcanzado B, es devuelta por este hacia A. Este nuevamente la reenvía y así sucesivamente, hasta que ambos cohetes llegan al planeta. Halla la distancia recorrida por las señales radio eléctricas desde su emisión hasta ese momento.

3. A buen fin, mejor principio. ¿En qué cifra termina $7^{83\,578}$?

SOLUCIONES

1. Veamos si el producto de cuatro números enteros $(x-1)x(x+1)(x+2)$ es un cuadrado perfecto menos una unidad.

$$\left.\begin{array}{l}(x-1)\,x\,(x+1)\,(x+2) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x \\ (x^2 + x - 1)^2 = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ Luego } (x-1)\,x\,(x+1)\,(x+2) = (x^2 + x - 1)^2 - 1$$

2. Ambos cohetes tardan $\dfrac{3\,000\,000}{50\,000} = 60$ segundos en alcanzar Venus. Durante este tiempo la señal, en sus idas y venidas ha recorrido: $300\,000 \cdot 60 = 18\,000\,000$ km.

3. Planteamos lo siguiente:

$7^1 = 7 \Rightarrow$ termina en 7
$7^2 = 49 \Rightarrow$ termina en 9
$7^3 = 343 \Rightarrow$ termina en 3
$7^4 = 2\,401 \Rightarrow$ termina en 1
$7^1 = 16\,807 \Rightarrow$ termina en 7

Por tanto hay cuatro terminaciones distintas que se repiten cíclicamente; de modo que:

$$\begin{array}{l|l} 83\,578 & 4 \\ \hline R = 2 & 20\,894 \end{array}$$

Es decir, 7^{83578} termina en el mismo número que 7^2, es decir, termina en 9.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula los siguientes logartimos:

a) $\log_5 5$
b) $\log_5 25$
c) $\log_{25} 5$
d) $\log_4 64$
e) $\log_{1/4} 64$
f) $\log_{1/2} \sqrt[3]{4}$

2. Utilizando la definición de logaritmo, calcula x en cada uno de los apartados:

a) $\log_x 1\,000 = 3$
b) $\log_3 27 = x$
c) $\log_2 x = 3$
d) $\log_2 \frac{1}{16} = x$
e) $\log_x 32 = -5$
f) $\log x = 2$

3. Halla, con ayuda de la calculadora, los siguientes logaritmos:

a) $\log 7$
b) $\log \frac{1}{2}$
c) $\log 12$
d) $\ln 5$
e) $\ln \frac{1}{4}$
f) $\ln \sqrt{5}$
g) $\log (1{,}5 \cdot 10^8)$
h) $\ln (2{,}3 \cdot 10^7)$
i) $\ln (7 \cdot 10^{-5})$

4. Calcula el valor de las siguientes expresiones, sin hacer uso de la calculadora:

a) $\log_2 24 - \log_2 3$
b) $\log_6 3 + \log_6 4 + \log_6 18$
c) $\log_3 45 - \log_3 3 + \log_3 81 - \log_3 15$
d) $2 \log_5 10 - \log_5 4$
e) $\frac{1}{2} \log_2 36 + \log_3 \frac{1}{2}$
f) $\frac{3 \log_2 48 - \log_2 27}{2}$

5. Expresa como un solo logaritmo cada una de las siguientes expresiones:

a) $2 \log_2 M - 3 \log_2 N$
b) $\ln M + 2 \ln N - \ln P$
c) $\frac{3}{4} \log M - \frac{2}{5} \log N$
d) $\frac{2}{3} \ln M - \ln N - \frac{3}{2} \ln P$

6. Halla el valor de x en cada caso, aplicando las propiedades de los logaritmos:

a) $\log x = \log 75 - \log 3$
b) $\log x = 4 \log 3 + 3 \log 4$
c) $\ln x = \ln 3 - \frac{1}{2} \ln 9$
d) $\ln x = \frac{1}{2} \ln 36 + 3 \ln 2 - \ln 9$

7. Expresa los siguientes logaritmos como cocientes de logaritmos decimales y halla sus valores con la calculadora:

a) $\log_2 5$
b) $\log_5 2$
c) $\log_{0,3} 0{,}6$
d) $\log_3 (6)^2$
e) $\log_{0,25} \frac{2}{5}$
f) $\log_{2/3} \frac{4}{5}$

8. Sabiendo que $\log 2 = 0{,}3010$ y $\log 3 = 0{,}4771$, calcula:

a) $\log 6$
b) $\log 5$
c) $\log 12$
d) $\log 18$
e) $\log 300$
f) $\log 0{,}5$
g) $\log_3 2$
h) $\log_2 27$
i) $\log_5 9$
j) $\log 0{,}03$
k) $\log 1\,200$
l) $\log 0{,}45$

SOLUCIONES

1. Las soluciones quedan:

a) 1 b) 2 c) $\frac{1}{2}$ d) 3 e) -3 f) $-\frac{2}{3}$

2. En cada caso queda:

a) $x=10$ b) $x=3$ c) $x=8$ d) $x=-4$ e) $x=\frac{1}{2}$ f) $x=100$

3. En cada caso queda:

a) $0,85$ b) $-0,3010$ c) $1,08$ d) $1,609$ e) $-1,39$
f) $0,805$ g) $8,18$ h) $16,95$ i) $-9,57$

4. En cada caso queda:

a) 3 b) 3 c) 4 d) 2 e) $1,95$ f) 6

5. En cada caso queda:

a) $\log_2\left(\frac{M^2}{N^3}\right)$ b) $\ln\left(\frac{M\cdot N^2}{P}\right)$ c) $\log\left(\frac{M^{3/4}}{N^{2/5}}\right)$ d) $\ln\left(\frac{M^{2/3}}{N\cdot P^{3/2}}\right)$

6. En cada caso queda:

a) $x=25$ b) $x=5184$ c) $x=1$ d) $x=\frac{48}{9}$

7. En cada caso queda:

a) $\frac{\log 5}{\log 2}=2,32$ b) $\frac{\log 2}{\log 5}=0,43$ c) $\frac{\log 0,6}{\log 0,3}=0,42$

d) $\frac{2\cdot\log 6}{\log 3}=0,85$ e) $\frac{\log 2-\log 5}{-\log 4}=0,66$ f) $\frac{\log\left(4/5\right)}{\log\left(2/3\right)}=0,55$

8. Las soluciones son:

a) $\log 6 = \log 2 + \log 3 = 0,78$

b) $\log 5 = \log 10 - \log 2 = 0,70$

c) $\log 12 = 2 \cdot \log 2 + \log 3 = 1,08$

d) $\log 18 = \log 2 + 2 \cdot \log 3 = 1,26$

e) $\log 300 = \log 3 + \log 100 = 2,48$

f) $\log 0,5 = \log 1 - \log 2 = -0,30$

g) $\log_3 2 = \dfrac{\log 2}{\log 3} = 0,63$

h) $\log_2 27 = \dfrac{3 \cdot \log 3}{\log 2} = 4,75$

i) $\log_5 9 = \dfrac{2 \cdot \log 3}{\log 5} = 1,36$

j) $\log 0,03 = \log 3 - \log 100 = -1,52$

k) $\log 1200 = \log 12 + \log 100 = 3,08$

l) $\log 0,45 = 2 \cdot \log 3 - \log 2 - \log 10 = -0,35$

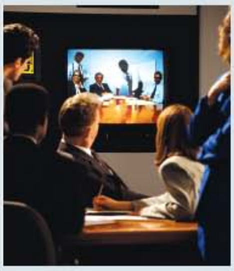
PÁGINA 113

9. Un empresario incrementa el precio de sus productos en un 5% anual. Actualmente, uno de sus productos vale 1,8 euros. Contesta a las siguientes cuestiones:

   a) ¿Cuánto costará el producto dentro de 4 años?

   b) ¿Cuánto costaba hace 4 años?

   c) ¿Cuántos años han de pasar para que el precio actual del producto se duplique?



10. El servicio de control de calidad de una gran empresa que fabrica cierta marca de televisores ha comprobado que el porcentaje de televisores que sigue funcionando al cabo de t años viene dado por la función $f(t) = \left(\frac{8}{9}\right)^t$:

    a) ¿Qué proporción de televisores siguen funcionando después de 5 años? ¿Y después de 15 años? ¿Y al cabo de 20 años?

    b) ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que funcionen el 40% de los televisores fabricados?

11. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $128^{x+1} = 2^{x^2-x-2}$	f) $4^{x+1} + 2^{x+3} - 320 = 0$
b) $3^x \cdot 9^x = 9^3$	g) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 1$
c) $2^{-x} = 8^{3-x}$	h) $9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 81 = 0$
d) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 7$	i) $5^{x+1} = 10 + 3 \cdot 5^{2-x}$
e) $6^{1-x} + 6^x = 7$	j) $2^{x^2-5x} = 64^{-1}$

12. Resuelve los siguientes sistemas:

    a) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 6 \\ 2^x - 2^y = 2 \end{cases}$

    b) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 36 \\ 3^{x+y} = 243 \end{cases}$

    c) $\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} - 5^{y+1} = -9 \end{cases}$

    d) $\begin{cases} 3^x = 3^y \\ 4^x \cdot 4^y = 256 \end{cases}$

13. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $2 \log_2 x - \log_2 (x - 16) = \log_2 4$	d) $(x^2 - 5x + 9) \log 2 + \log 125 = 3$
b) $\log x = 1 + \log (22 - x)$	e) $\ln (2x - 3) + \ln (5 - x) = \ln 5$
c) $2 \log (5x + 4) - \log 4 = \log (x + 4)$	f) $\ln x = \ln 2 + 2 \ln (x - 3)$

14. Resuelve los siguientes sistemas:

    a) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$

    b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

    c) $\begin{cases} \log \left(\frac{x}{y}\right) = 1 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$

    d) $\begin{cases} \log x - \log y = 3 \log 5 \\ \log x + \log y = \log 5 \end{cases}$

9. En cada apartado queda:

a) El producto dentro de 4 años costará: $1,8\cdot 1,05^4=2,19$ euros.

b) Hace 4 años costaba: $1,8\cdot 1,05^{-4}=1,48$ euros.

c) Llamando t al número de años que han de pasar obtenemos:

$$3,6=1,8\cdot 1,05^t \;\Rightarrow\; 2=1,05^t \;\Rightarrow\; \text{Tomando logaritmos: } t=\frac{\log 2}{\log 1,05}=14,21 \text{ años.}$$

Por tanto, han de pasar casi 15 años.

10. En cada apartado queda:

a) Al cabo de 5 años funcionan $\left(\frac{8}{9}\right)^5=0,55$, el 55% de los televisores.

Después de 15 años: $\left(\frac{8}{9}\right)^{15}=0,17$, es decir, el 17% de los televisores.

Al cabo de 20 años: $\left(\frac{8}{9}\right)^{20}=0,09$, es decir, el 9% de los televisores.

b) Deberían pasar t años y se debe cumplir:

$$\left(\frac{8}{9}\right)^t=0,4 \;\Rightarrow\; t=\frac{\log 0,4}{\log\left(\frac{8}{9}\right)}=7,8 \;\Rightarrow\; \text{Deberán pasar casi 8 años.}$$

11. La solución de cada ecuación es:

a) $128^{x+1}=2^{x^2-x-2} \;\Rightarrow\; x_1=9 \;\text{ y }\; x_2=-1$

b) $3^x\cdot 9^x=9^3 \;\Rightarrow\; 3^{3x}=3^6 \;\Rightarrow\; x=2$

c) $2^{-x}=8^{3-x} \;\Rightarrow\; 2^{-x}=2^{9-3x} \;\Rightarrow\; x=\frac{9}{2}$

d) $2^x+2^{x+1}+2^{x+2}=7 \;\Rightarrow\; 2^x+2\cdot 2^x+4\cdot 2^x=7 \;\Rightarrow\; 2^x=1 \;\Rightarrow\; x=0$

e) $6^{1-x}+6^x=7 \;\Rightarrow\; \frac{6}{6^x}+6^x=7 \;\Rightarrow\; x_1=0 \;\text{ y }\; x_2=1$

f) $4^{x+1}+2^{x+3}-320=0 \;\Rightarrow\; 4\cdot 2^{2x}+8\cdot 2^x-320=0 \;\Rightarrow\; 2^{2x}+2\cdot 2^x-80=0 \;\Rightarrow\; x=3$

g) $2^x+2^{x-1}+2^{x-2}=1 \;\Rightarrow\; 2^x+\frac{2^x}{2}+\frac{2^x}{4}=1 \;\Rightarrow\; 2^x=\frac{4}{7} \;\Rightarrow\; x=\frac{\log\left(4/7\right)}{\log 2}=-0,81$

h) $9^x-2\cdot 3^{x+2}+81=0 \;\Rightarrow\; 3^{2x}-18\cdot 3^x+81=0 \;\Rightarrow\; x=2$

i) $5^{x+1}=10+3\cdot 5^{2-x} \quad \Rightarrow \quad 5\cdot 5^{x}=10+\dfrac{75}{5^{x}} \quad \Rightarrow \quad x=1$

j) $2^{x^2-5x}=64^{-1} \quad \Rightarrow \quad 2^{x^2-5x}=2^{-6} \quad \Rightarrow \quad x_1=2 \quad \text{y} \quad x_2=3$

12. Los sistemas quedan:

a) $\left.\begin{array}{r} 2^x+2^y=6 \\ 2^x-2^y=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2^x=4 \\ 2^y=2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x=2 \\ y=1 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3^x+3^y=36 \\ 3^{x+y}=243 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Haciendo $\begin{array}{l} 3^x=a \\ 3^y=b \end{array}$ obtenemos $\left.\begin{array}{r} a+b=36 \\ a\cdot b=243 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a=27 \;\; \text{y} \;\; b=9 \Rightarrow x=3;\, y=2 \\ a=9 \;\; \text{y} \;\; b=27 \Rightarrow x=2;\, y=3 \end{array}$

c) $\left.\begin{array}{r} 2^x+5^y=9 \\ 2^{x+2}-5^{y+1}=-9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2^x+5^y=9 \\ 4\cdot 2^x-5\cdot 5^y=-9 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2^x=4 \\ 5^y=5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x=2 \\ y=1 \end{array}$

d) $\left.\begin{array}{r} 3^x=3^y \\ 4^x\cdot 4^y=256 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=y \\ x+y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=2 \\ y=2 \end{array}$

13. Las soluciones quedan:

a) $\log_2\left[\dfrac{x^2}{x-16}\right]=\log_2 4 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x^2}{x-16}=4 \quad \Rightarrow$ No tiene soluciones reales

b) $\log x=\log\left[10\cdot(22-x)\right] \quad \Rightarrow \quad x=10(22-x) \quad \Rightarrow \quad x=20$

c) $\log\left[\dfrac{(5x+4)^2}{4}\right]=\log\,(x+4) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{(5x+4)^2}{4}=x+4 \quad \Rightarrow \quad x_1=0\ ;\ x_2=-\dfrac{36}{25}$

d) $\log\left[2^{x^2-5x+9}\cdot 125\right]=\log 1000 \quad \Rightarrow \quad 2^{x^2-5x+9}=8 \quad \Rightarrow \quad x_1=2\ ;\ x_2=3$

e) $\ln\left[(2x-3)\cdot(5-x)\right]=\ln 5 \quad \Rightarrow \quad (2x-3)(5-x)=5 \quad \Rightarrow \quad x_1=4\ ;\ x_2=\dfrac{9}{4}$

f) $\ln x=\ln\left[2\cdot(x-3)^2\right] \quad \Rightarrow \quad x=2\cdot(x-3)^2 \quad \Rightarrow \quad x_1=\dfrac{9}{2}\ ;\ x_2=2$

14. Los siguientes sistemas quedan:

a) $\left.\begin{array}{r}\log_3 x+\log_3 y=0\\ x+y=3\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}x\cdot y=1\\ x+y=3\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}x=2,62\ ;\ \ y=0,38\\ x=0,38\ ;\ \ y=2,62\end{array}$

b) $\left.\begin{array}{r}x^2-y^2=11\\ \log x-\log\ y=1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}x^2-y^2=11\\ \dfrac{x}{y}=10\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}x=\dfrac{10}{3}\\ y=\dfrac{1}{3}\end{array}$

c) $\left.\begin{array}{r}\log\left(\dfrac{x}{y}\right)=1\\ \log x+\log y=3\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}\log x-\log y=1\\ \log x+\log y=3\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\log x=2\ ;\ \ x=100\\ \log\ y=1\ ;\ \ y=10\end{array}$

d) $\left.\begin{array}{l}\log x+\log y=3\log 5\\ \log x-\log y=\log 5\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\log x=2\log 5\ ;\ \ x=25\\ \log y=\log 5\ ;\ \ y=5\end{array}$

PÁGINA 114

ACTIVIDADES FINALES

■ 15. Responde a las siguientes cuestiones relacionadas con el interés simple:

a) Un capital de 1 000 euros colocado al 12% de interés simple durante tres años, ¿en qué capital se transforma?

b) ¿Cuánto tiempo hay que tener 3 000 euros al 10% de interés simple para que se conviertan en 3 900 euros?

c) Calcula los intereses que generan 12 000 euros colocados al 7% de interés simple durante 4 años, si los intereses se devengan:

c1) Anualmente   c2) Mensualmente

■ 16. Calcula el tiempo que debe estar colocado un capital de 4 000 euros en una cuenta corriente al 5,5% de interés compuesto anual para que el capital se duplique.

■ 17. ¿A qué tanto por ciento anual debe prestarse un capital puesto a interés compuesto para que en 20 años se duplique? ¿Y para que se duplique en 10 años?

■ 18. ¿Qué capital será preciso que coloque un padre, al nacer su hijo, en el banco, si desea que cuando cumpla siete años pueda tener un capital de 2 100 euros? La imposición la hace al 8% de interés compuesto anual.

■ 19. Una persona entrega al principio de cada mes y durante 4 años una cantidad fija de 60 euros. La capitalización es mensual al 5% anual. ¿Qué capital tendrá al final de los 4 años?

■ 20. ¿Qué anualidad habrá de colocarse al 13% de interés compuesto para reunir en 5 años doce mil euros?

■ 21. Al comienzo de cada uno de 4 años consecutivos depositamos en una libreta de ahorro 1 500 euros. Al comenzar el quinto año, sacamos 5 000 euros de la libreta. ¿Qué cantidad de dinero queda en la libreta si sabemos que los intereses son compuestos al 4,5% anual?

■ 22. Se paga una deuda al 9% en 6 años mediante una anualidad de amortización de 1 350 euros. ¿A cuánto ascendía la deuda?

■ 23. ¿Cuál es la cuota mensual de amortización de un préstamo hipotecario de 50 000 euros a 15 años al 11% anual? ¿Qué cantidad de dinero pagamos durante los 15 años?

■ 24. Para amortizar una deuda de 29 500 euros, hemos abonado varias anualidades de 4 200 euros cada una al 7% anual. ¿Durante cuántos años?

■ 55. Una empresa maderera compra un camión, el cual se compromete a pagar en 13 anualidades al 6%. Cada anualidad de amortización asciende a 21 000 euros. ¿Cuánto costó el camión?

■ 26. Tu hermana se ha comprado una moto cuyo valor es de 10 000 euros. Ha de pagarla mediante cuotas trimestrales de 528,7 euros al 8% anual. ¿Cuántos años tardará en pagar la moto?

15. En cada caso queda:

a) $i=\dfrac{1000\cdot 12\cdot 3}{100}=360$ euros $\Rightarrow$ Se transforma en 1300 euros

b) $900=\dfrac{3\,000\cdot 10\cdot t}{100} \Rightarrow t=3$ años

c) $$\left.\begin{array}{l} i=\dfrac{12\,000\cdot 7\cdot 4}{100} \Rightarrow i=3\,360 \text{ euros} \\ i=\dfrac{12\,000\cdot 7\cdot 48}{1200} \Rightarrow i=3\,360 \text{ euros}\end{array}\right\} \Rightarrow$$ En ambos casos generan unos intereses de 3 360 euros.

16. Aplicando la fórmula: $M=C(1+r)^t$ obtenemos:

$$8\,000=4\,000\cdot(1+0{,}055)^t \Rightarrow 2=(1+0{,}055)^t \Rightarrow t=\frac{\log 2}{\log 1{,}055}=12{,}9 \text{ años}$$

17. En cada caso queda:

- $2C=C\,(1+r)^{20} \Rightarrow 2=(1+r)^{20}$

Tomando logaritmos obtenemos: $\log(1+r)=\dfrac{\log 2}{20} \Rightarrow 1+r=1{,}035 \Rightarrow r=0{,}035$

Para que el capital se duplique al cabo de 20 años el rédito debe ser de un 3,5%.

- $2C=C\,(1+r)^{10} \Rightarrow \log(1+r)=\dfrac{\log 2}{10} \Rightarrow r=0{,}072$

Para se duplique en 10 años se debe colocar a un rédito del 7,2%.

18. La solución queda:

$$2100=C\,(1+0{,}08)^7 \Rightarrow C=1225{,}33 \text{ euros.}$$

19. Queda:

$$C=\frac{60\left(1+\dfrac{0{,}05}{12}\right)\cdot\left[\left(1+\dfrac{0{,}05}{12}\right)^{48}-1\right]}{\dfrac{0{,}05}{12}}=3194{,}1468 \text{ euros}$$

Al cabo de 4 años tendrá 3 194,1468 euros.

20. Aplicando la fórmula:

$$C=\frac{a\cdot(1+r)\cdot\left[(1+r)^t-1\right]}{r} \Rightarrow 12\,000=\frac{a\cdot(1+0{,}13)\cdot\left[(1+0{,}13)^5-1\right]}{0{,}13} \Rightarrow a=1638{,}7385 \text{ euros}$$

21. Aplicando la misma fórmula que en el problema anterior:

$$C=\frac{1500\cdot(1+0{,}045)\left[(1+0{,}045)^4-1\right]}{0{,}045}=6\,706{,}06 \text{ euros}$$

En la libreta después de sacar 5 000 euros quedan 1 706,06 euros.

22. Aplicando la fórmula: $a=\frac{D\cdot r\cdot(1+r)^t}{(1+r)^t-1}$ obtenemos:

$$1350=\frac{D\cdot 0{,}09\cdot(1+0{,}09)^6}{(1+0{,}09)^6-1} \Rightarrow D=6\,055{,}99 \Rightarrow \text{La deuda asciende a } 6\,055{,}99 \text{ euros.}$$

23. Aplicando la misma fórmula del problema anterior:

$$a=\frac{50\,000\cdot\left(1+\frac{0{,}11}{12}\right)^{180}\cdot\frac{0{,}11}{12}}{\left(1+\frac{0{,}11}{12}\right)^{180}-1} \Rightarrow a=568{,}298 \text{ euros}$$

La cuota mensual de amortización es 568,298 euros.

En total hemos pagado:

$$C=\frac{568{,}298\cdot\left(1+\frac{0{,}11}{12}\right)^{180}\left[\left(1+\frac{0{,}11}{12}\right)^{180}-1\right]}{\frac{0{,}11}{12}}=260\,767{,}83 \text{ euros.}$$

24. Aplicando la fórmula: $A=\dfrac{D\cdot r\cdot(1+r)^t}{(1+r)^t-1}$ obtenemos:

$$4\,200=\frac{29\,500\cdot 0,07\cdot 1,07^t}{1,07^t-1}\quad\Rightarrow\quad 1,07^t=1,9672\quad\Rightarrow\quad t=10\ \text{años.}$$

25. Aplicando la fórmula anterior obtenemos.

$$21000=\frac{D\cdot 0,06\cdot(1+0,06)^{13}}{(1+0,06)^{13}-1}\quad\Rightarrow\quad D=185\,906,34\ \text{euros costó el camión.}$$

26. Aplicando la fórmula anterior obtenemos:

$$528,7=\frac{10\,000\cdot\dfrac{0,08}{4}\cdot\left(1+\dfrac{0,08}{4}\right)^t}{\left(1+\dfrac{0,08}{4}\right)^t-1}\quad\Rightarrow\quad 528,7\cdot\left(1,02^t-1\right)=200\cdot 1,02^t$$

$$\Rightarrow\quad 1,02^t=1,60845\quad\Rightarrow\quad t=24\ \text{períodos}\quad\Rightarrow\quad \text{Es decir, pagará la moto en 6 años.}$$

Unidad 6 – Funciones reales. Propiedades globales

PÁGINA 117

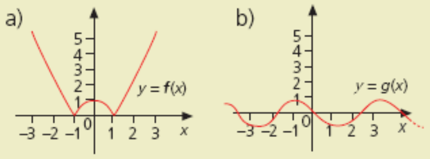
cuestiones iniciales

1. Dibuja la gráfica de las funciones con las características siguientes:

a) Dom $f = (-6, 6)$; Im $f = [0, 4]$; simétrica respecto del eje OY, máximos en los puntos $(3, 4)$ y $(-3, 4)$ y mínimo en el punto $(0, 0)$.

b) Dom $f = (-\infty, 0)$; Im $f = (-\infty, 0)$ y estrictamente decreciente en todo su dominio.

2. Describe las características (dominio, recorrido, simetría, acotación, extremos relativos, periodicidad y tendencia) de cada una de las funciones representadas gráficamente.

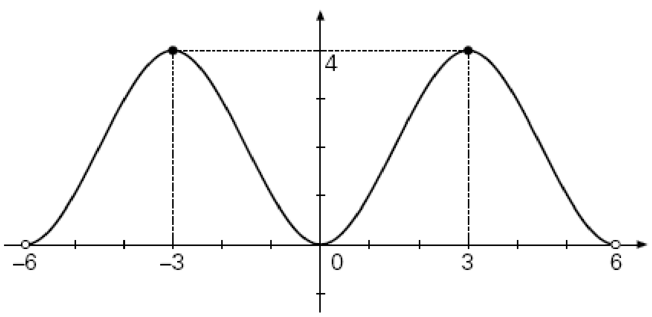


3. Encuentra la función asociada a la siguiente descripción verbal: *La bacteria «Salmonella typhimurium» causante de intoxicaciones alimentarias, se reproduce cada hora dividiéndose la célula madre en dos células hijas.*

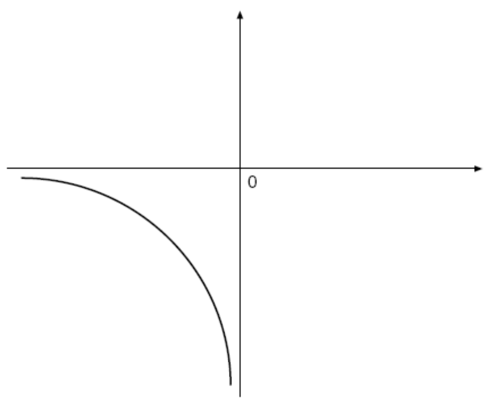
SOLUCIONES

1. Las soluciones pueden quedar así:

a)



b)



2. En cada uno de los casos queda:

a) Dom $f = \mathbb{R}$; Im $f = [0, +\infty)$

Simétrica respecto al eje OY.

Acotada inferiormente por $y = 0$ pero no acotada superiormente.

Mínimos en $(-1, 0)$ y $(1, 0)$. Máximo en $(0, 1)$.

Tiende a $(+\infty)$ para x tendiendo a $(\pm\infty)$.

b) $\text{Dom}\, g = \mathbb{R}$; $\text{Im}\, g = [-1,1]$

Simétrica respecto al origen de coordenadas.
Periódica de período 4.
Acotada inferiormente por $y = -1$ y superiormente por $y = 1$.
El período tiene un máximo relativo en $(-1,1)$ y un mínimo relativo en $(1,5; -1)$.

c) $\text{Dom}\, h = \mathbb{R}$; $\text{Im}\, h = (0, +\infty)$

No es simétrica ni periódica.
Acotada inferiormente por $y = 0$ pero no acotada superiormente.
Carece de extremos relativos.
Cuando *x* tiende a $(-\infty)$ la función tiende a $(+\infty)$ y cuando *x* tiende a $(+\infty)$ la función tiende a 0.

3. La función es: $N = 2^t$ siendo N el número de bacterias y *t* el tiempo en horas.

PÁGINA 129

ACTIVIDADES

■ Intenta utilizar las ideas referentes a la fase de llevar adelante la estrategia en la resolución de los siguientes problemas:

1. El pequeño astuto. El pequeño astuto tiene más de 36 cajas, pero menos de 1 991. Las dispone todas en una pila triangular y luego las coloca formando una pila cuadrada. ¿Cuántas cajas tiene?

2. Igualdad. ¿Será cierta la siguiente igualdad?

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{988\cdot 999}+\frac{1}{999\cdot 1\,000}=0{,}999$$

3. Tostado rápido. Hay que tostar tres rebanadas de pan. En el tostador caben dos rebanadas a la vez, pero sólo se tuestan por un lado. Se tarda 30 segundos en tostar una cara de una rebanada de pan; 5 segundos en colocarla en el tostador; 5 segundos en sacarla; y 3 segundos en darle la vuelta. ¿Cuál es el mínimo de tiempo que se necesita para tostar las tres rebanadas?

SOLUCIONES

1. Hay que buscar un número que sea a la vez triangular y cuadrado.

$$\text{Números triangulares}: 1, 3, 4, 10, 15, 21, \ldots, \frac{n^2+n}{2}$$

$$\text{Números cuadrados}: 1, 4, 9, 16, 25, \ldots, n^2$$

$$\Rightarrow \frac{n^2+n}{2}=x^2 \;\Rightarrow\; \text{esto se cumple para } n=8, \text{ pues } \frac{8^2+8}{2}=x^2 \;\Rightarrow\; x^2=36.$$

Como dice que hay más de 36 cajas, hay que buscar otra solución, y ésta es:

$$n=49, \text{ pues } \frac{49^2+49}{2}=35^2=1225 \;\Rightarrow\; \text{Luego } x^2=1225 \text{ cajas tiene.}$$

2. Observamos que:

$$\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n} \text{ con } n\geq 2.$$

Luego:

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$
$$\ldots=\ldots-\ldots$$
$$\frac{1}{998\cdot 999}=\frac{1}{998}-\frac{1}{999}$$
$$\frac{1}{999\cdot 1000}=\frac{1}{999}-\frac{1}{1000}$$

Sumando:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{998\cdot 999}+\frac{1}{999\cdot 1000}=0,999$$

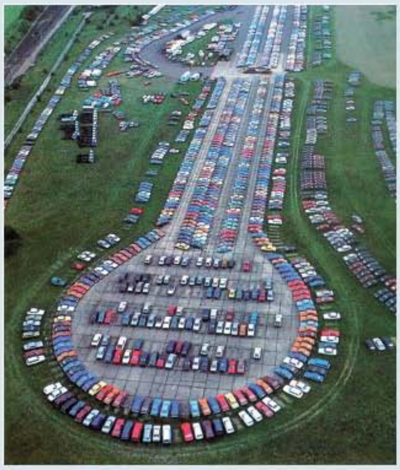
3. Sean A, B, C, las tres rebanadas. Con A_1 indicamos que se tuesta la cara 1 y con A_2 indicamos que se tuesta la cara 2.

$$\begin{aligned}
&1.^{\text{o}}\, A_1B_1 \text{ tarda: } && 30s: \text{tostar cara } A_1 \text{ y } B_1\\
& && 5s: \text{colocar } A_1\\
& && 5s: \text{colocar } B_1\\
& && 5s: \text{sacar } B_1\\
&2.^{\text{o}}\, A_2C_1 \text{ tarda: } && 3s: \text{dar la vuelta } A_1\\
& && 5s: \text{meter } C_1\\
& && 30s: \text{tostar cara } A_2 \text{ y } C_1\\
& && 3s: \text{dar la vuelta } C_2\\
&3.^{\text{o}}\, B_2C_2 \text{ tarda: } && 5s: \text{sacar } A_2\\
& && 5s: \text{meter } B_2\\
& && 30s: \text{tostar cara } B_2 \text{ y } C_2\\
& && 5s: \text{sacar } B_2\\
& && 5s: \text{sacar } C_2
\end{aligned}$$

En total se necesitan: 136 s en tostar las 3 rebanadas.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS



1. Determina una tabla de valores, una fórmula matemática y una gráfica de cada una de las siguientes funciones:

   a) La tarifa de precios de un aparcamiento urbano indica que el precio es de 1 euro por cada hora o fracción, siendo el precio máximo por día de 8 euros. Expresa esta función mediante su tabla de valores, su gráfica y su expresión algebraica.

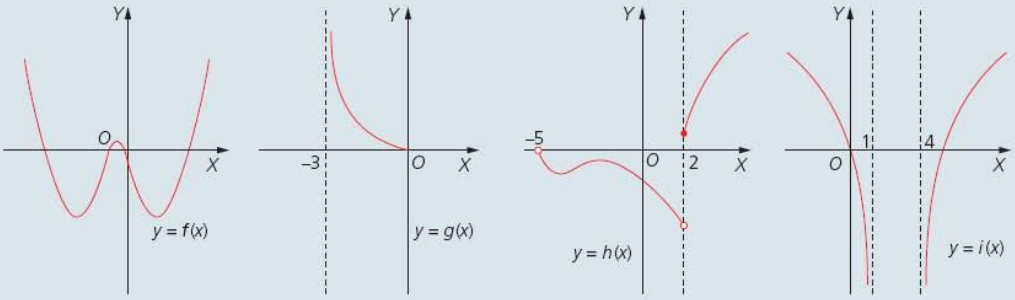
   b) El espacio, en kilómetros, que recorre un autobús que lleva una velocidad constante de 100 km/h.

   c) La tarifa de los taxis que cobran 1 euro por bajada de bandera y 0,05 euros por cada minuto recorrido en el taxi.

   d) El área de un rectángulo cuya base mide 5 m más que su respectiva altura.

   Expresar, en cada caso, sus dominios y recorrido o conjunto imagen.

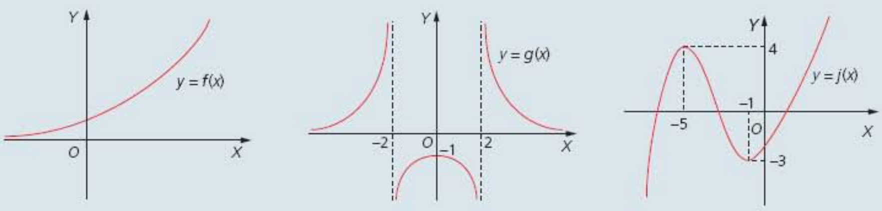
2. Estudia el dominio de las siguientes funciones:



$j(x) = x^4 - 2x^2$ $\quad k(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-5x+6}$ $\quad l(x) = \dfrac{-1}{1-x}$ $\quad m(x) = \sqrt{x+2}$

$n(x) = \sqrt[3]{x^2+5}$ $\quad o(x) = \sqrt[4]{x-1}$ $\quad p(x) = \sqrt[6]{x^2-4}$ $\quad q(x) = \dfrac{\sqrt[5]{x^3-2x^2}}{x+1}$

3. Analiza y estudia, en cada una de las siguientes funciones, el dominio, el recorrido o conjunto imagen, la monotonía y los extremos relativos:



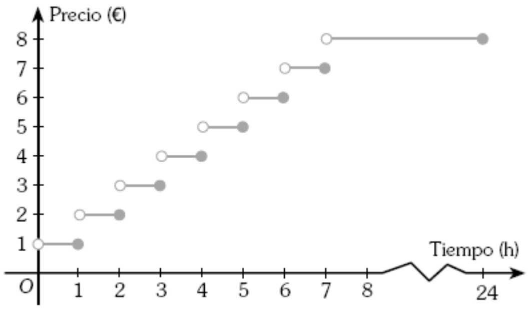
1. En cada apartado queda:

a) La tabla de valores, la fórmula y la gráfica son:

Tiempo en horas	1	1,5	2	…	8	9
Precio en euros	1	2	2	…	8	8

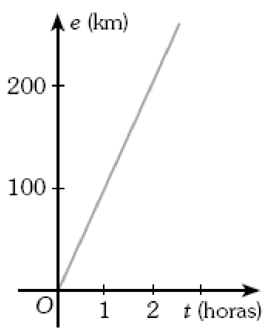
$$\text{Fórmula} \quad f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 < x \leq 1 \\ 2 \text{ si } 1 < x \leq 2 \\ \text{-----------} \\ 8 \text{ si } 7 < x \leq 24 \end{cases}$$

Dom $f = (0, +\infty)$; Im $f = [1, +\infty)$. La gráfica es:



b) La tabla de valores, la fórmula y la gráfica son:

t	e
1	100
1,5	150
2	200



Fórmula:

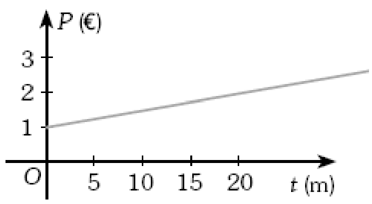
$$e = 100 \cdot t$$

Dom $e = [0, +\infty)$

Im $e = [0, +\infty)$

c) La tabla de valores, la fórmula y la gráfica son:

t	P
1	1,05
10	1,5
20	2



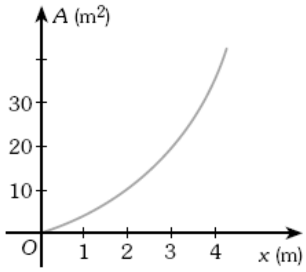
$$P = 1 + 0{,}05 \cdot t$$

Dom $P = [0, +\infty)$; Im $P = [1, +\infty)$

d) Llamando x a la medida de la altura sabemos que la base mide $5+x$, por tanto, la tabla de valores, la fórmula y la gráfica quedan:

$$A = x \cdot (x+5) \quad \Rightarrow \quad A = x^2 + 5x$$

x	A
1	6
2	14
3	24
4	36



$$\text{Dom } A = (0, +\infty); \ \text{Im } A = (0, +\infty)$$

2. Los dominios quedan:

$\text{Dom} f = \mathbb{R}$

$\text{Dom} g = (-3, 0]$

$\text{Dom} h = (-5, +\infty)$

$\text{Dom} i = (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$

$\text{Dom} j = \mathbb{R}$

$\text{Dom} k = \mathbb{R} - \{2, 3\}$

$\text{Dom} l = \mathbb{R} - \{1\}$

$\text{Dom} m = [-2, +\infty)$

$\text{Dom} n = \mathbb{R}$

$\text{Dom} o = [1, +\infty)$

$\text{Dom} p = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

$\text{Dom} q = \mathbb{R} - \{-1\}$

3. Las funciones se caracterizan por:

- $y = f(x)$

  $\text{Dom} f = \mathbb{R}$; $\text{Im} f = (0, +\infty)$

  Estrictamente creciente en todo su dominio.
  No tiene extremos relativos.

- $y = g(x)$

  $\text{Dom} g = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$; $\text{Im} g = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$

  Estrictamente creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$

  Estrictamente decreciente en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

  Máximo relativo $(0, -1)$

- $y = j(x)$

  Dom $j = \mathbb{R}$; Im $j = \mathbb{R}$

  Estrictamente creciente en $(-\infty, -5) \cup (-1, +\infty)$

  Estrictamente decreciente en $(-5, -1)$

  Máximo relativo $(-5, 4)$

  Mínimo relativo $(-1, -3)$

PÁGINA 133

■ 4. Dibuja las gráficas correspondientes a la funciones con las características que se citan a continuación:

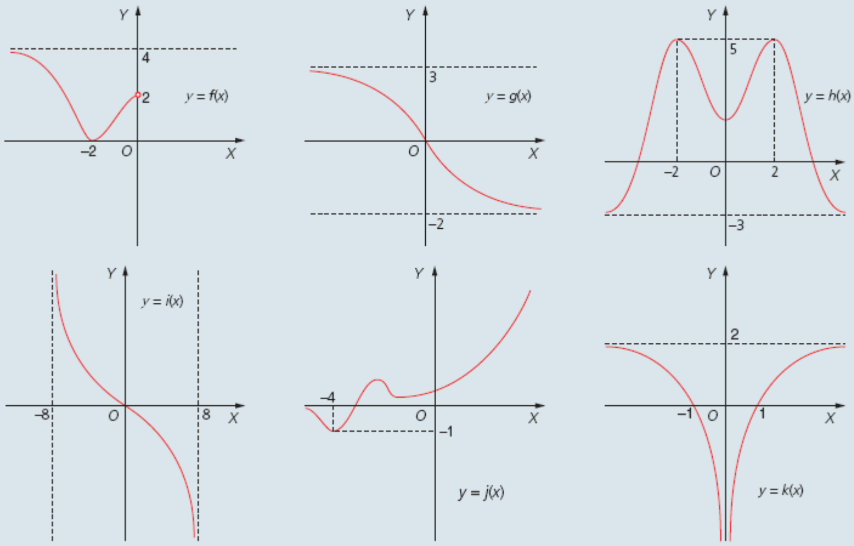
a) Dom $f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$; Im $f = (-\infty, 2]$; máximos relativos en los puntos $(-3, 2)$ y $(3, 2)$.

b) Dom $g = R$; Im $g = (-3, 2)$; mínimo relativo en el punto $(-2, -1)$ y máximo relativo en el punto $(0, 1)$.

c) Dom $h = (-\infty, 0)$; Im $h = (1, +\infty)$ y estrictamente creciente en todo su dominio.

d) Dom $i = R - \{0\}$; Im $i = R$; estrictamente creciente en $(-\infty, 0)$; estrictamente decreciente en $(0, +\infty)$ y simétrica respecto del eje de ordenadas.

■ 5. Estudia la acotación, simetría, tendencias y la posible existencia de supremo, ínfimo y extremos absolutos en cada una de las siguientes funciones:



■ 6. Estudia la simetría de las siguientes funciones:

$f(x) = x^6 - x^4$ $\quad g(x) = x - 1$ $\quad h(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad i(x) = 8$

$j(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 4}$ $\quad k(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$ $\quad l(x) = |x|$ $\quad m(x) = x \cdot e^{x^2}$

■ 7. La gráfica siguiente muestra los beneficios en miles de euros de una empresa desde el momento en que se fundó.

Contesta razonadamente a cada una de las siguientes cuestiones:

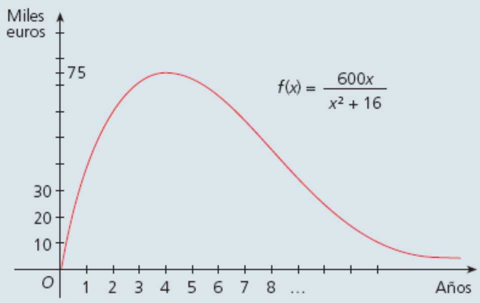
a) ¿Qué variables se relacionan?

b) ¿Cuál es el dominio y el recorrido de esta función? ¿Qué sentido tienen en el contexto del problema?

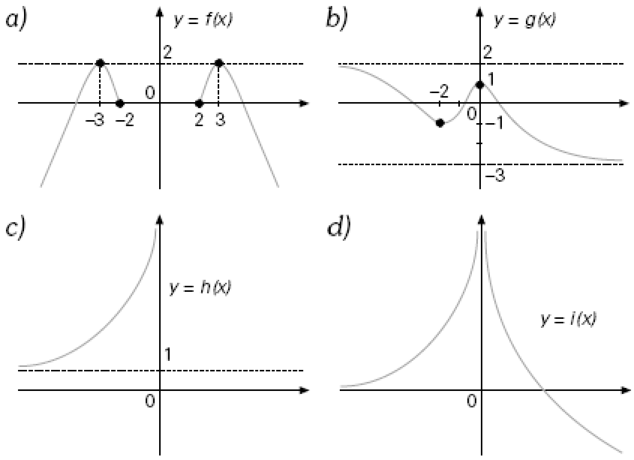
c) ¿Al cabo de cuántos años tiene la empresa beneficios máximos? ¿A cuánto ascienden estos?

d) ¿Cómo varían los beneficios los primeros años? ¿Y después?

e) ¿Crees que habrá un punto en el que no existan ni beneficios ni pérdidas?



4. Las representaciones quedan:



5. El estudio de cada función nos ofrece la siguiente información:

a) Esta función $y = f(x)$ está acotada por $y = 0$ e $y = 4$.
El supremo es $y = 4$ y el ínfimo es $y = 0$.
Esta función tiene un mínimo absoluto en $y = 0$.

b) Esta función $y = g(x)$ está acotada por $y = 3$ e $y = -2$.
El supremo es $y = 3$ y el ínfimo es $y = -2$.
Esta función no tiene extremos absolutos.

c) Esta función $y = h(x)$ está acotada por $y = -3$ e $y = 5$.
El supremo es $y = 5$ y el ínfimo es $y = -3$.
Esta función tiene un máximo absoluto en $y = 5$.

d) Esta función $y = i(x)$ no está acotada.

e) Esta función $y = j(x)$ está acotada inferiormente por $y = -1$.
El ínfimo es $y = -1$ y no tiene supremo.
Esta función tiene un mínimo absoluto en $y = -1$.

f) Esta función $y = k(x)$ está acotada superiormente por $y = 2$.
El supremo es $y = 2$ y no tiene ínfimo.
Esta función no tiene extremos absolutos.

6. Las simetrías en cada caso son:

- Las funciones: *f*; *i*; *k*; *l*; son simétricas respecto al eje de ordenadas.
- Las funciones: *h*; *j*; *m*; son simétricas respecto al origen de coordenadas.
- Las demás funciones no tienen simetrías.

7. En cada caso las respuestas son:

a) La variable independiente es el número de años desde su fundación, y la variable dependiente el beneficio en miles de euros.

b) $\mathrm{Dom} f = [0, +\infty)$ $\mathrm{Im} f = [0, 75]$

c) La empresa tiene beneficios máximos al cabo de 4 años, y estos ascienden a 75 000 euros.

d) Durante los primeros cuatro años los beneficios crecen; a partir del 4º año empiezan a decrecer.

e) Como en todo el dominio se verifica que $f(x) > 0$, no habrá pérdidas en ningún momento; siempre habrá beneficios.

ACTIVIDADES FINALES

8. Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-1}$ y $g(x) = x - 1$, calcula:

a) Dom f ; Dom g b) $f + g$; $f \cdot g$; $\dfrac{f}{g}$ y sus dominios c) $\dfrac{1}{f}$ y el dominio

9. Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{x}{2-x}$ y $g(x) = x^2 + 2$, determina las siguientes funciones con sus respectivos dominios:

a) $f + g$ b) $f \cdot g$ c) $\dfrac{f}{g}$ d) $g \circ f$ e) $g \circ g$

10. Dadas las funciones $f(x) = 1 + 3x^2$; $g(x) = \sqrt{x}$ y $h(x) = \dfrac{3}{x^2+1}$; calcula:

a) $f \circ g$ c) $f \circ h$ e) $(g \circ f)(-1)$

b) $h \circ g$ d) $(f \circ f)(1)$ f) $(h \circ h)(0)$

11. Siendo $f(x) = 5 - x$ y $g(x) = 3x - a$, calcula el valor de a para que la composición de ambas sea conmutativa, es decir, $f \circ g = g \circ f$.

12. Dadas las siguientes funciones, halla, en cada caso, las dos funciones que, compuestas, resultan la que se indica:

$$(f \circ g)(x) = (x^3 + 2)^2 \qquad (h \circ l)(x) = 3^{2x} \qquad (t \circ p)(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2}$$

13. Determina las funciones inversas de:

a) $f(x) = 5$ c) $f(x) = (x + 1)^2$ e) $f(x) = \dfrac{3x}{2x+5}$

b) $f(x) = 2x - 3$ d) $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$ f) $f(x) = \dfrac{3-x}{3x+1}$

14. Calcula la función inversa de cada una de las siguientes y comprueba, en cada caso, que la función dada compuesta con su inversa, da la función identidad:

$$f(x) = x^3 - 2 \qquad g(x) = 1 - 3x \qquad h(x) = 2^{x+2}$$

15. Sea $f(x) = \dfrac{x-2}{2}$ y $g(x) = 2x - 4$. Calcula $(f \circ g)^{-1}(4)$.

16. En el año 1995 se fundó una ONG. El número de sus afiliados ha variado con los años según la función:

$$N = 250\,(2t^2 - 12t + 21)$$

¿Cuántos son los afiliados fundadores? Ayudándote de una calculadora indica cómo varía el número de afiliados. ¿En algún momento será nulo este número?

17. Una empresa *Cable I* ofrece una tarifa de utilización de Internet de 15 euros mensuales. La empresa *Cable II* ofrece una tarifa de 0,05 euros por hora. Discute qué tarifa te parece la más conveniente a la hora de elegir.

8. En cada caso queda:

a) $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ $\quad \text{Dom} g = \mathbb{R}$

b) Quedan:

$$(f+g)(x) = \frac{x^3 - x^2 + 4}{x^2 - 1} \Rightarrow \text{Dom}(f+g) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

$$(f \cdot g)(x) = \frac{x+3}{x+1} \Rightarrow \text{Dom}(f \cdot g) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x+3}{x^3 - x^2 - x + 1} \Rightarrow \text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

c) Queda:

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{x^2 - 1}{x+3} \Rightarrow \text{Dom}\left(\frac{1}{f}\right) = \mathbb{R} - \{-3\}$$

9. Los dominios quedan:

a) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \dfrac{x}{2-x} + x^2 + 2 = \dfrac{-x^3 + 2x^2 - x + 4}{2-x} \Rightarrow \text{Dominio} = \mathbb{R} - \{2\}$

b) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \dfrac{x}{2-x} \cdot (x^2 + 2) = \dfrac{x^3 + 2x}{2-x} \Rightarrow \text{Dom } f \cdot g = \mathbb{R} - \{2\}$

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x}{2-x} : (x^2 + 2) = \dfrac{x}{(2-x)\,(x^2+2)} \Rightarrow \text{Dom } \dfrac{f}{g} = \mathbb{R} - \{2\}$

d) $(g \circ f)(x) = g\,[f(x)] = g\left[\dfrac{x}{2-x}\right] = \left(\dfrac{x}{2-x}\right)^2 + 2 = \dfrac{3x^2 - 8x + 8}{4 - 4x + x^2} \Rightarrow \text{Dom } g \circ f = \mathbb{R} - \{2\}$

e) $(g \circ g)(x) = g\,[g(x)] = g\,[x^2 + 2] = (x^2 + 2)^2 + 2 = x^4 + 4x^2 + 6 \Rightarrow \text{Dom } g \circ g = \mathbb{R}$

10. Las soluciones son:

a) $f \circ g(x) = 1 + 3x$

b) $h \circ g(x) = \dfrac{3}{x+1}$

c) $f \circ h(x) = \dfrac{x^4 + 2x^2 + 28}{x^4 + 2x^2 + 1}$

d) $(f \circ f)(1) = 49$

e) $(g \circ f)(-1) = 2$

f) $(h \circ h)(0) = \dfrac{3}{10}$

11. La solución queda:

$$\left.\begin{array}{r} (f \circ g)(x) = f\,[g\,(x)] = f\,(3x - a) = 5 + a - 3x \\ (g \circ f)(x) = g\,[f\,(x)] = g\,(5 - x) = 3\,(5 - x) - a = 15 - a - 3x \end{array}\right\} \Rightarrow\ a = 5$$

12. Por ejemplo, las funciones pueden ser:

$f(x) = x^2$ $\qquad g(x) = x^3 + 2$

$h(x) = 3^x$ $\qquad l(x) = 2x$

$t(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$ $\qquad p(x) = x^2$

13. Las inversas quedan:

a) $f^{-1}(x)$ no existe

b) $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2}$

c) $f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 1$

d) $f^{-1}(x) = \dfrac{2+x}{x}$

e) $f^{-1}(x) = \dfrac{5x}{3-2x}$

f) $f^{-1}(x) = \dfrac{3-x}{3x+1}$

14. Las inversas quedan:

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+2}$ $\qquad g^{-1}(x) = \dfrac{1-x}{3}$ $\qquad h^{-1}(x) = \dfrac{\log x}{\log 2} - 2$

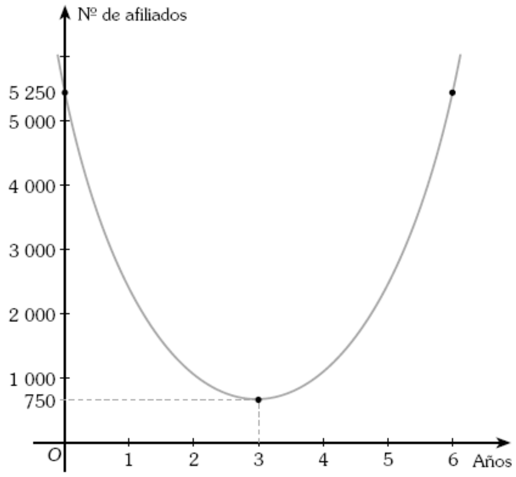
15. Queda:

$$(f \circ g)(x) = x - 3 \quad \Rightarrow \quad (f \circ g)^{-1}(x) = x + 3 \quad \Rightarrow \quad (f \circ g)^{-1}(4) = 7$$

16. La solución queda:

Haciendo $t=0$ obtenemos $N=5\,250$ socios fundadores.

La gráfica de la función viene dada por:



El número de afiliados desciende los tres primeros años hasta alcanzar el número de 750 y, a partir de ese año, empieza a aumentar.
En ningún momento es nulo este número.

17. La solución queda:

$$\textit{Cable I} \Rightarrow P=15$$
$$\textit{Cable II} \Rightarrow P=0,05\cdot t$$

Veamos a partir de qué número de horas el precio de una empresa y de la otra es el mismo:

$$0,05\cdot t=15 \quad \Rightarrow \quad t=300 \text{ horas}$$

Hasta 300 horas mensuales interesa más la empresa *Cable II*; a partir de 300 horas mensuales interesa más la empresa *Cable I*, y si se utiliza Internet durante 300 horas mensuales exactamente es indistinta la empresa a elegir.

Unidad 7 – Funciones polinómicas. Interpolación

PÁGINA 137

cuestiones iniciales

1. Dibuja las gráficas de las siguientes funciones y estudia sus propiedades:

$f(x) = 4; \quad g(x) = 2x; \quad h(x) = -3x + 1; \quad k(x) = x^2 - 4x$

2. Encuentra la función de primer grado cuya gráfica pase por los puntos (1, –1); (2, 1) y (–1, –5).

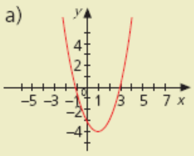
3. Las diferentes contracciones de un muelle (en mm) sometido a diferentes cargas (en kg) vienen dadas por la tabla:

Carga x	5	10	15	20	25
Contracción y	49	105	172	253	352

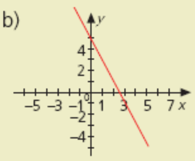
Halla la función cuadrática cuya gráfica pase por los puntos (5, 49), (10, 105) y (25, 352). Comprueba si esta función aproxima convenientemente los otros valores de la tabla.

4. Asocia cada una de las siguientes gráficas con su correspondiente expresión algebraica:

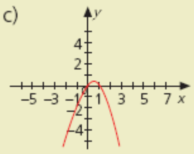
a)



b)



c)

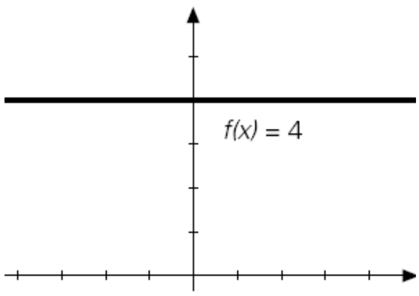


$y = x - x^2 \qquad y = -2x + 5 \qquad y = x^2 - 3 - 2x$

SOLUCIONES

1. Las representaciones quedan:

a) $f(x) = 4$



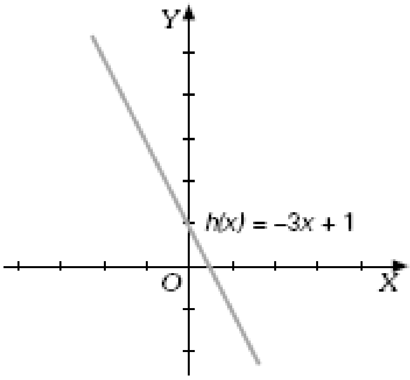
• $f(x)$ es una función constante.

$\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}\, f = \{4\}$

Acotada por 4.

b) $h(x) = -3x + 1$



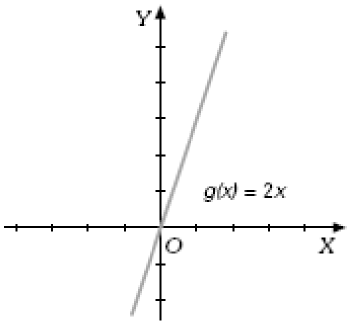
- $h(x)$ es una función afín.

  Dom $h = \mathbb{R}$

  Im $h = \mathbb{R}$

  Estrictamente decreciente en su dominio.

c) $g(x) = 2x$



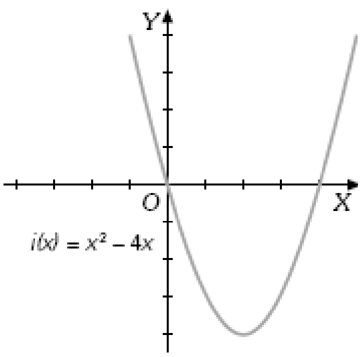
- $g(x)$ es una función lineal.

  Dom $g = \mathbb{R}$

  Im $g = \mathbb{R}$

  Estrictamente creciente en su dominio.

d) $i(x) = x^2 - 4x$



- $i(x)$ es una función cuadrática.

  Dom $i = \mathbb{R}$

  Im $i = [-4, +\infty)$

  Acotada inferiormente por (-4).

  Estrictamente creciente $(2, +\infty)$

  Estrictamente decreciente $(-\infty, 2)$

  Mínimo en $(2, -4)$

2. La función queda: $f(x) = 2x - 3$.

3. La función cuadrática buscada será de la forma:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Buscamos los coeficientes:

$$\left.\begin{aligned} 49 &= a_0 + 5a_1 + 25a_2 \\ 105 &= a_0 + 10a_1 + 100a_2 \\ 352 &= a_0 + 25a_1 + 625a_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_0 = \frac{37}{6};\ a_1 = \frac{29}{4};\ a_2 = \frac{79}{300}$$

Por tanto, $f(x) = \frac{37}{6} + \frac{29}{4}x + \frac{79}{300}x^2$

Para: $x = 15 \Rightarrow f(15) = \frac{37}{6} + \frac{29}{4}\cdot 15 + \frac{79}{300}\cdot 15^2 = 174{,}17$

Para: $x = 20 \Rightarrow f(20) = \frac{37}{6} + \frac{29}{4}\cdot 20 + \frac{79}{300}\cdot 20^2 = 256{,}5$

Esta función nos permite obtener buenas aproximaciones de $x = 15$ y $x = 20$.

4. Queda en cada caso:

a) $y = x^2 - 2x - 3$ b) $y = -2x + 5$ c) $y = x - x^2$

PÁGINA 151

ACTIVIDADES

■ Practica la fase de revisar el proceso y sacar consecuencias de él en la resolución de los siguientes problemas:

1. **Vacas lecheras.** Cuatro vacas blancas y tres vacas negras dan tanta leche en cinco días como tres vacas blancas y cinco negras en cuatro días. ¿Qué clase de vaca es la más lechera, la blanca o la negra?

2. **Naranjas.** En un almacén de fruta almacenamos naranjas en pilas con forma de pirámide de base cuadrada. Cada lado de la base lo forman 15 naranjas, ¿cuál es el máximo número de naranjas que podremos apilar? Intenta generalizar este problema.

3. **Tres naipes.** Tres naipes de una baraja están colocados boca arriba en una fila horizontal. A la derecha del rey hay una o dos damas. A la izquierda de una dama hay una o dos damas. A la izquierda de un corazón hay una o dos picas. A la derecha de una pica hay una o dos picas. ¿Puedes decir de qué cartas se trata?

SOLUCIONES

1. Llamemos B a las vacas blancas y N a las vacas negras:

$$5\cdot(4B+3N)=4\cdot(3B+5N) \;\Rightarrow\; 20B+15N=12B+20N \;\Rightarrow\; 8B=5N$$

Dan más leche las vacas negras.

2. El número de naranjas en la pirámide es:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+14^2+15^2=1\,240 \text{ naranjas.}$$

En general si el lado de la base es de *n* naranjas, el número de naranja en la pirámide es:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{2n^3+3n^2+n}{6} \text{ naranjas.}$$

3. Por medio de ensayo y error dirigido se obtiene:

- Con la información referida a los Reyes (*R*) y las Damas (*D*) llegamos a que puede ser *RDD* o *DRD*.

- Con la información referida a los Corazones (*C*) y las Picas (*P*) llegamos a que puede ser *PCP* o *PPC*.

Juntando los resultados obtenidos llegamos a que la solución es: Rey de Picas – Dama de Picas – Dama de Corazones.

PÁGINA 154

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Resuelve las cuestiones que siguen:

   a) Halla la función lineal cuya gráfica pasa por el punto (5, 3).

   b) La recta que pasa por los puntos (1, 2) y (–1, –2), ¿es una función constante, lineal o afín?

   c) Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(1, -3)$ y $B(-2, 6)$.

   d) Averigua si los puntos (0, 7), (3, –6) y (–3, –8) están o no alineados.

2. Realiza la gráfica de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = |x - 1|$ b) $g(x) = |x| + \dfrac{|x|}{x}$ c) $h(x) = |x| - \dfrac{|x|}{x}$

3. Representa gráficamente las siguientes funciones definidas a trozos:

   a) $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -1 \\ 1 - 2x & \text{si } -1 \le x < 1 \\ 3x - 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} 5x - 2 & \text{si } x \le 1 \\ -2 & \text{si } x = 2 \\ \dfrac{1}{2}x & \text{si } x > 2 \end{cases}$ c) $h(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \le 2 \\ -1 & \text{si } 2 < x \le 5 \\ x - 6 & \text{si } x > 5 \end{cases}$

   Estudia en cada una de ellas: dominio, recorrido, monotonía, extremos relativos, acotación y simetría.

4. Los muros de las viviendas de una determinada urbanización se han construido con tres revestimientos aislantes de 10 cm de grosor.

   Para un determinado instante de tiempo con una temperatura exterior de 5 °C la siguiente función, $f(x)$, describe la temperatura en un punto del muro situado a una distancia x cm del interior de la vivienda.

   $$f(x) = \begin{cases} -0{,}8x + 22 & 0 < x \le 10 \text{ cm} \\ -0{,}4x + 18 & 10 < x \le 20 \text{ cm} \\ -0{,}5x + 20 & 20 < x \le 30 \text{ cm} \end{cases}$$

   Representa gráficamente la función $f(x)$.

5. La bajada de bandera de un taxi está en 1 euro y cada 3 minutos sube 0,2 euros el marcador. Dibuja la gráfica correspondiente a la primera media hora e indica el costo de una carrera de 15 minutos y 30 segundos.

6. Una determinada empresa nos ofrece lo siguiente por conectarnos a Internet:

   — Cuota mensual de abono 6 euros.

   — Cada hora de conexión 1,8 euros.

   a) Encuentra la función que nos indique el precio a pagar mensualmente, según las horas que se haya establecido conexión.

   b) Representa gráficamente esta función.

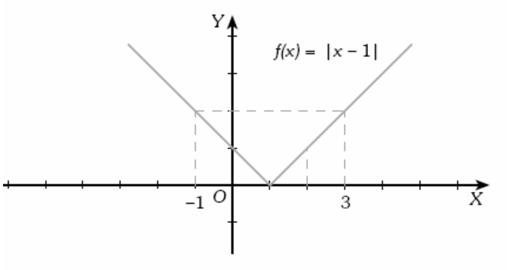
   c) La empresa carga un 16% de IVA. ¿Cómo afecta esto a la función anterior y a su gráfica?

1. En cada caso:

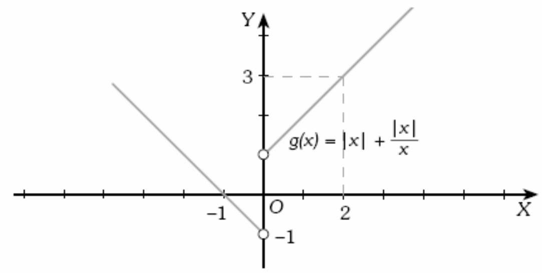
   a) La función es $y=\frac{3}{5}\cdot x$
   b) Es la función lineal $y=2x$
   c) Su ecuación es $y=-3x$
   d) No están alineados.

2. Las gráficas quedan:

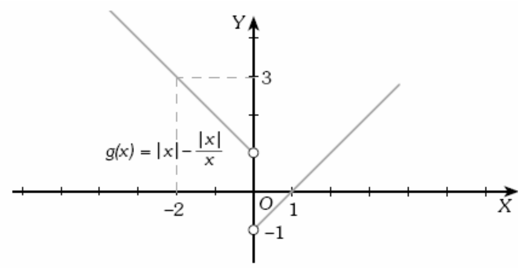
a) $f(x)=|x-1|$



b) $g(x)=|x|+\frac{|x|}{x}$

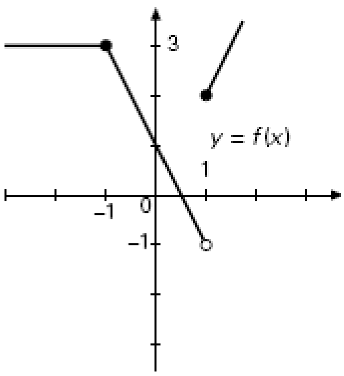


c) $h(x)=|x|-\frac{|x|}{x}$



3. Las gráficas quedan:

   a) $y=f(x)$



$\mathrm{Dom} f=\mathbb{R}$

$\mathrm{Im} f=(-1,+\infty)$

Estrictamente decreciente $(-1,1)$

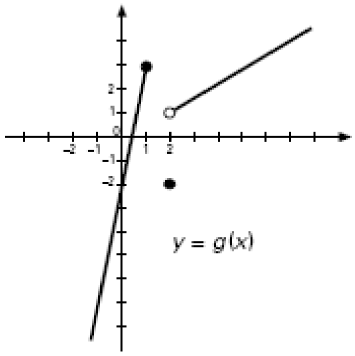
Estrictamente creciente $(1,+\infty)$

No tiene extremos relativos.

Está acotada inferiormente por (-1).

No es simétrica ni respecto al eje de ordenadas ni respecto al origen.

b) $y = g(x)$



$\text{Dom}\, g = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

$\text{Im}\, g = \mathbb{R}$

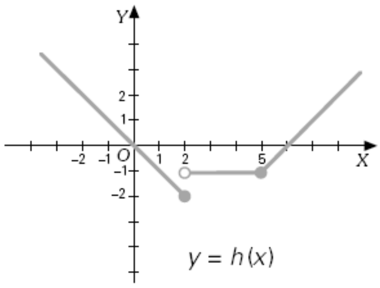
Estrictamente creciente $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

No tiene extremos relativos.

No está acotada.

No es simétrica ni respecto al eje de ordenadas ni respecto al origen.

c) $y = h(x)$



$\text{Dom}\, h = \mathbb{R}$

$\text{Im}\, h = [-2, +\infty)$

Estrictamente decreciente $(-\infty, 2)$

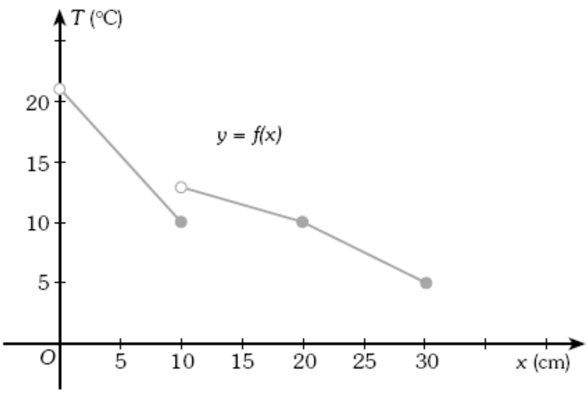
Estrictamente creciente $(5, +\infty)$

No tiene extremos relativos.

Está acotada inferiormente por (2) y no está. acotada superiormente, luego no es acotada.

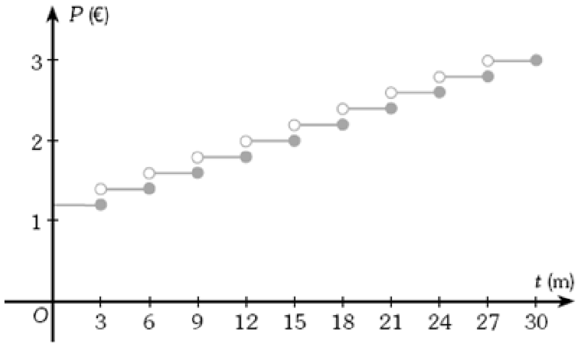
No tiene simetrías.

4. La representación queda:



5. La función y la gráfica quedan:

$$f(x)=\begin{cases} 1,2 & \text{si } 0<x\leq 3 \\ 1,4 & \text{si } 3<x\leq 6 \\ 1,6 & \text{si } 6<x\leq 9 \\ 1,8 & \text{si } 9<x\leq 12 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ 3 & \text{si } 27<x\leq 30 \end{cases}$$

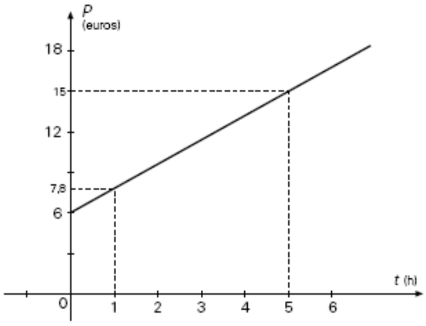


Una carrera de 15 min 30 s cuesta 2,2 euros.

6. La solución queda:

a) La función es: $P=6+1,8\cdot t$, donde P es el precio a pagar en euros y t el tiempo en horas.

b) Queda:



c) La función será: $f(x)=\dfrac{116}{100}P=\dfrac{116}{100}(6+1,8t)$.

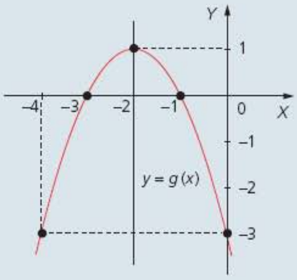
Todas las ordenadas de esta función quedan multiplicadas por 1,16.

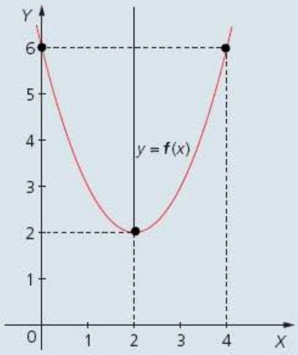
■ 7. Dibuja, para cada una de las siguientes funciones cuadráticas, sus respectivas gráficas:

a) $f(x) = x^2 - 8x + 12$
c) $h(x) = x^2 - 2x + 3$
e) $j(x) = -x^2 + 6x - 5$
b) $g(x) = x^2 - 6x + 9$
d) $i(x) = -x^2 + 4x - 6$
f) $k(x) = -x^2 - 4x - 4$

Estudia en cada una de estas funciones: dominio, recorrido, monotonía, extremos relativos, acotación y simetría.

■ 8. Encuentra las ecuaciones o expresiones algebraicas de las funciones cuyas gráficas son las adjuntas.





■ 9. Resuelve las cuestiones que siguen:

a) Halla una función cuadrática que se anule, para $x = 1$ y para $x = -1$. ¿Cuántas soluciones hay?

b) Estudia los intervalos en los cuales la función cuadrática $f(x) = x^2 - 6x + 5$ es positiva y los intervalos en los que es negativa. ¿Se anula para algún valor?

c) Halla los intervalos en los cuales las ordenadas de la función $f(x) = x^2 - 5x + 6$ sean iguales o superiores a 2.

■ 10. Las funciones que aparecen a continuación, representan el beneficio, expresado en miles de euros, que obtiene una empresa por la fabricación de x unidades de dos productos distintos.

$$f(x) = \frac{1}{90}(-x^2 + 100x - 1\,600) \qquad g(x) = 10x - x^2 - 21$$

a) Representa gráficamente las funciones.

b) ¿Cuántas unidades hay que fabricar de cada producto para que no se produzcan pérdidas?

c) ¿Cuál es el mayor beneficio posible? ¿Cuántas unidades deben fabricarse?

■ 11. La economía de un gran almacén de zapatos se rige por las siguientes funciones de oferta y demanda:

$$f_o(p) = \frac{19}{50}p + 100 \left\{ \begin{array}{l} f_o(p) = \text{n.° de unidades que el almacén produce} \\ p = \text{precio de cada unidad} \end{array} \right. \qquad f_d(p) = \frac{2}{3}p + \frac{16\,000}{3} \left\{ \begin{array}{l} f_d(p) = \text{n.° de unidades que el mercado pide} \\ p = \text{precio que paga por unidad} \end{array} \right.$$

Halla el precio y el número de unidades que se deben fabricar para que la oferta y la demanda coincidan, es decir, «precio de equilibrio» y «cantidad de equilibrio».

■ 12. Las funciones de oferta y demanda correspondientes a un taller de alfarería son: $f_o(p) = 3p + 150$ y $f_d(p) = 300 - 2p$ donde p es el precio unitario en euros.

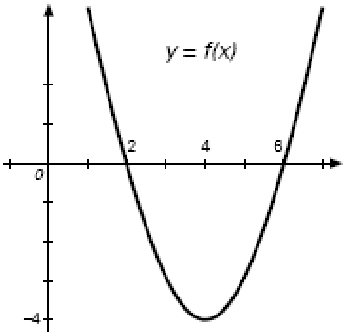
a) Encuentra el precio y la cantidad de equilibrio.

b) ¿Qué ocurre, si el artesano pone un precio de 40 euros/unidad? ¿Y si el comprador no está dispuesto a pagar más de 15 euros/unidad?

■ 13. Una agencia inmobiliaria de una zona turística dispone de apartamentos para alquilar. La función demanda de estos apartamentos obedece a un modelo lineal. La agencia observa que si el precio, p, de alquiler mensual por apartamento es de 600 euros, esta alquila 100 apartamentos, mientras que si el alquiler mensual es de 750 euros, entonces alquila 50 apartamentos. Obtén la función demanda $f_d(p)$ e indica a partir de qué precio la agencia no alquila ningún apartamento.

7. Las gráficas quedan:

a) $f(x)=x^2-8x+12$



$\text{Dom} f=\mathbb{R}$

$\text{Im} f=[-4,+\infty)$

Estrictamente decreciente $(-\infty,4)$.

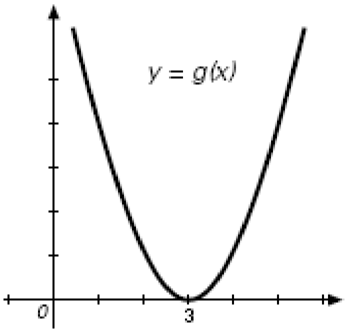
Estrictamente creciente $(4,+\infty)$.

Mínimo relativo en $(4,-4)$.

Está acotada inferiormente por (-4). Mínimo absoluto -4.

Es simétrica respecto a su eje $x=4$.

b) $g(x)=x^2-6x+9$



$\text{Dom} g=\mathbb{R}$

$\text{Im} g=[0,+\infty)$

Estrictamente decreciente $(-\infty,3)$.

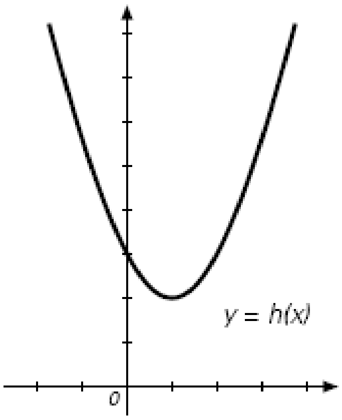
Estrictamente creciente $(3,+\infty)$.

Mínimo relativo en $(3,0)$.

Está acotada inferiormente por (0). Mínimo absoluto en 0.

Es simétrica respecto a su eje $x=3$.

c) $h(x)=x^2-2x+3$



$\text{Dom} h=\mathbb{R}$

$\text{Im} h=[2,+\infty)$

Estrictamente decreciente $(-\infty,1)$.

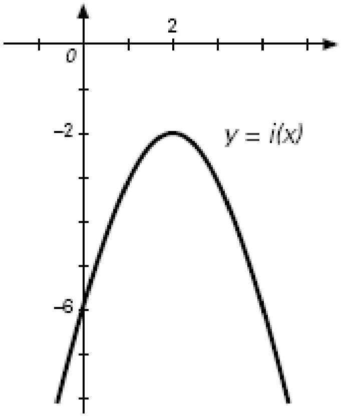
Estrictamente creciente $(1,+\infty)$.

Mínimo relativo en $(1,2)$.

Está acotada inferiormente por (2). Mínimo absoluto en 2.

Es simétrica respecto a su eje $x=1$.

d) $i(x) = -x^2 + 4x - 6$



$\text{Dom}\, i = \mathbb{R}$

$\text{Im}\, i = (-\infty, -2]$

Estrictamente creciente $(-\infty, 2)$.

Estrictamente decreciente $(2, +\infty)$.

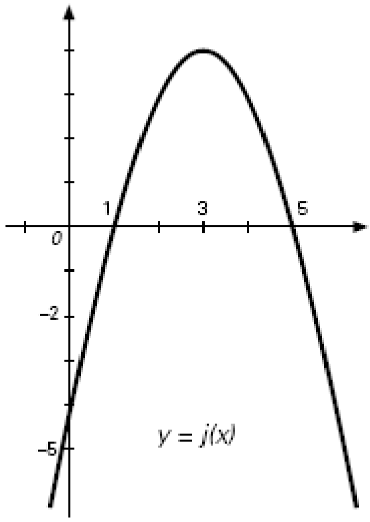
Máximo relativo en $(2, -2)$.

Está acotada superiormente por (-2).

Máximo absoluto en -2.

Es simétrica respecto a su eje $x = 2$.

e) $j(x) = -x^2 + 6x - 5$



$\text{Dom}\, j = \mathbb{R}$

$\text{Im}\, j = (-\infty, 4]$

Estrictamente creciente $(-\infty, 3)$.

Estrictamente decreciente $(3, +\infty)$.

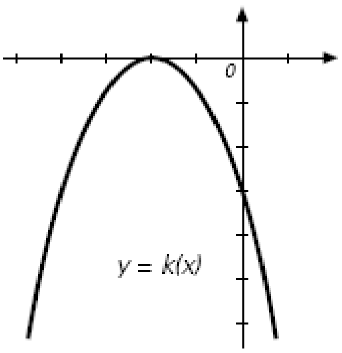
Máximo relativo en $(3, 4)$.

Está acotada superiormente por (4).

Máximo absoluto en 4.

Es simétrica respecto a su eje $x = 3$.

f) $k(x) = -x^2 - 4x - 4$



$\text{Dom}\, k = \mathbb{R}$

$\text{Im}\, k = (-\infty, 0]$

Estrictamente creciente $(-\infty, -2)$.

Estrictamente decreciente $(-2, +\infty)$.

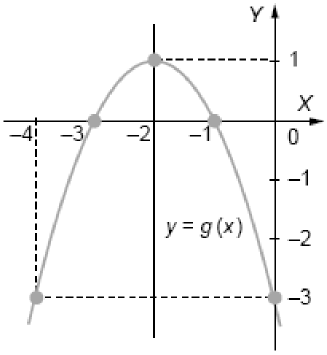
Máximo relativo en $(-2, 0)$.

Está acotada superiormente por (0).

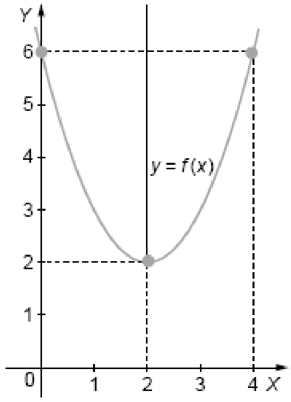
Máximo absoluto en 0.

Es simétrica respecto a su eje $x = -2$.

8. Las soluciones se presentan bajo las gráficas:



$y = g(x) = -x^2 - 4x - 3$

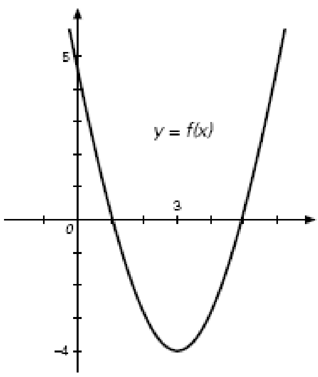


$y = f(x) = x^2 - 4x + 6$

9. En cada uno de los casos:

a) Hay infinitas soluciones. Todas las funciones cuadráticas se presentan según la ecuación: $y = K\left(x^2 - 1\right)$ con $K \in \mathbb{R}$.

b) La representación queda:



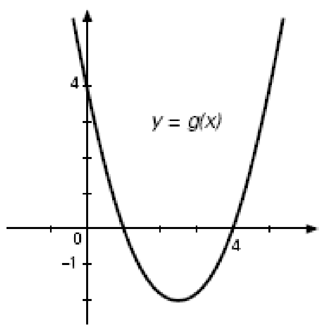
A la vista de la gráfica tenemos que:

$f(x) > 0$ en $(-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$.

$f(x) < 0$ en $(1, 5)$.

$f(x) = 0$ en $x = 1$ y $x = 5$.

c) Buscamos $f(x) = x^2 - 5x + 6 \geq 2 \;\Rightarrow\; x^2 - 5x + 4 \geq 0$.



Veamos los intervalos para los cuales la función $g(x) = x^2 - 5x + 4 \geq 0$.

En la gráfica se observa que:

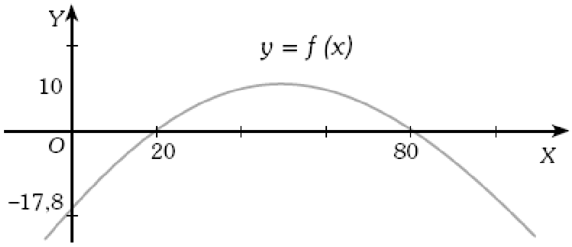
$g(x) > 0$ en $(-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$.

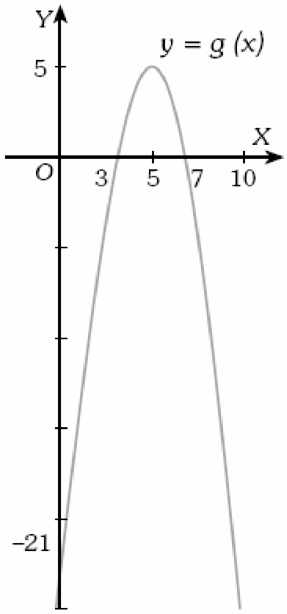
$g(x) = 0$ en $x = 1$ y $x = 4$.

Luego $f(x) \geq 2$ en $(-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$

10. En cada caso:

a) Las representaciones quedan:





b) En el primer caso hay que fabricar entre 20 y 80 unidades y en el segundo caso entre 3 y 7 unidades.

c) En la función $f(x)$ el mayor beneficio se produce al fabricar 50 unidades y este beneficio es 10 000 euros.

En la función $g(x)$ el mayor beneficio se produce al fabricar 5 unidades y este beneficio es 4 000 euros.

11. El precio de equilibrio se consigue cuando coinciden ambas funciones:

$$\frac{19}{50}\cdot p+100=-\frac{2}{3}\cdot p+\frac{16\,000}{3} \quad \Rightarrow \quad p=5\,000$$

El precio de equilibrio es de 5 000, y la cantidad de equilibrio es 2 000 unidades.

12. En cada caso:

a) El precio de equilibrio es $p=30\,\text{euros}$ y la cantidad de equilibrio es 240 unidades.

b) Si se pone un precio de 40 euros/unidad, él oferta 270 unidades y se demandan sólo 220 unidades.

Si se pone un precio de 15 euros/unidad, la oferta es de 195 unidades y se demandan de 270 unidades, es decir, se produce un desequilibrio.

13. La función demanda que obedece a estas condiciones es: $f_d(p)=300-\frac{1}{3}\cdot p$

No alquila ningún apartamento al precio de 900 euros.

PÁGINA 156

ACTIVIDADES FINALES

14. La función que determina la curva (de demanda) de un producto es $f(x) = -2x + 16$, donde $f(x)$ es la cantidad de producto fabricado por unidad de tiempo y x es el precio en dólares por unidad. Se define el ingreso total como el producto $x \cdot f(x)$.

    Dibuja, en el primer cuadrante, las funciones $f(x)$ y $g(x) = x \cdot f(x)$.

    Halla el punto de intersección y determina el ingreso total máximo.

    Si el ingreso total del producto aumenta de 14 a 24 dólares, antes de llegar al ingreso total máximo, ¿en qué cantidad aumenta el producto fabricado por unidad de tiempo y en qué cantidad disminuye el precio del producto?

15. Obtén la función de interpolación lineal que pasa por los puntos:

$$(-1, 1) \text{ y } (2, 4)$$

    Interpola el valor $a = 0$ y extrapola el valor $a = 5$.

16. Determina el polinomio interpolador cuya gráfica pasa por los puntos:

$$(-1, 12), (0, 6) \text{ y } (3, 0)$$

    Encuentra por interpolación el valor del polinomio para $x = 2{,}75$ y encuentra por extrapolación el valor que toma el polinomio para $x = -1{,}25$.

17. En España, en el año 1993, la inflación en los meses que se indican fue:

Julio	Septiembre	Octubre
4,9	4,3	4,6

    Haz sendas estimaciones para los meses de agosto y noviembre.

18. En la siguiente tabla se dan los pesos, en kg, de una niña al nacer y en los dos siguientes meses:

Meses	0	6	12
Peso (kg)	3,200	7,300	11,100

    Utilizando un polinomio de interpolación, ¿qué peso estimas que alcanzará cuando tenga año y medio?

    ¿Puedes estimar, por este procedimiento, cuánto pesará cuando tenga 5 años?

19. En una farmacia encontramos junto a la máquina de pesar una tabla en la que indica los pesos ideales de mujeres, en kg, en función de la altura en cm. La tabla es:

Altura (cm)	155	160	170
Peso (kg)	48	52	60

    a) Calcula por interpolación lineal el peso de una mujer de 168 cm de altura.

    b) ¿Qué altura corresponde a una mujer que pesa 62,5 kg?

20. La población activa española en el sector agrícola en los años que se indican fue:

1988	1990	1991
1 694,2	1 485,5	1 341,1

    donde el número de ocupados viene dado en miles.

    a) Obtén la función de interpolación cuadrática.

    b) Determina por interpolación el número de ocupados en el sector agrícola en el año 1989 y por extrapolación el número de ocupados en el año 1992.

14. La solución queda:

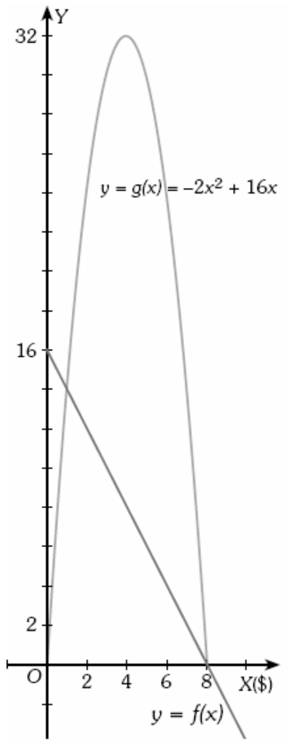
- El punto de intersección lo hallamos resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y = -2x^2 + 16x \\ y = -2x + 16 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 8 \\ y = 0 \end{array} \text{ ó } \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 14 \end{array}$$

Los puntos de intersección son (8,0) y (1,14).
El ingreso total máximo se produce para $x = 4$ dólares.

- El ingreso total pasa de 14 a 24 dólares para valores de $x \in (1, 2)$.

La función $f(x)$ que da la cantidad de producto fabricado disminuye de 14 a 12 unidades, no aumenta y el precio pasa de 1 a 2 dólares.



15. La función de interpolación lineal es:

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - 1 = \frac{4-1}{2+1} \cdot (x+1) \quad \Rightarrow \quad y = x + 2$$

La función buscada es $f(x) = x + 2$

Para el valor de $a = 0$, obtenemos: $f(a) = 0 + 2 \quad \Rightarrow \quad f(0) = 2$

Para el valor de $a = 5$, obtenemos: $f(5) = 5 + 2 \quad \Rightarrow \quad f(5) = 7$

16. El polinomio interpolado es: $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$$\left.\begin{array}{c} 12 = a_0 - a_1 + a_2 \\ 6 = a_0 \\ 0 = a_0 + 3a_1 + 9a_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} a_0 = 6 \\ a_1 = -5 \\ a_2 = 1 \end{array} \Rightarrow P(x) = 6 - 5x + x^2$$

Los valores pedidos son:

$$P(2,75) = 6 - 5 \cdot 2,75 + 2,75^2 = -0,1875$$
$$P(-1,25) = 6 - 5 \cdot (-1,25) + (-1,25)^2 = 13,8125$$

17. Considerando julio como mes 0, septiembre como mes 2 t octubre como mes 3, obtenemos la función de interpolación cuadrática que se ajusta a estos datos:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=4,9 \;\Rightarrow\; a_0=4,9 \\ f(2)=4,3 \;\Rightarrow\; a_0+2a_1+4a_2=4,3 \\ f(3)=4,6 \;\Rightarrow\; a_0+3a_1+9a_2=4,6 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_0=4,9 \\ a_1=-0,7 \\ a_2=0,2 \end{array} \Rightarrow f(x)=4,9-0,7x+0,2x^2$$

• $f(1)=4,4$; la inflación en agosto es $4,4$

• $f(4)=5,3$; la inflación en noviembre es $5,3$

18. La solución queda:

$$\left.\begin{array}{l} P(0)=3,2 \;\Rightarrow\; a_0=3,2 \\ P(6)=7,3 \;\Rightarrow\; a_0+6a_1+36a_2=7,3 \\ P(12)=11,1 \;\Rightarrow\; a_0+12a_1+144a_2=11,1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_0=3,2 \\ a_1=-0,675 \\ a_2=-0,0014 \end{array} \Rightarrow P(x)=3,2+0,675x-0,0014x^2$$

$P(18)=14,9\,\text{kg}$ pesará a los 18 meses.

Con el polinomio interpolador podemos calcular (extrapolando) el valor buscado para $x=60$ que queda como $P(60)=38,66\,\text{kg}$.

Pero este valor no tiene mucho sentido porque está muy alejado de los puntos que hemos considerado para calcular el polinomio interpolador.

19. La solución queda:

a) Calculamos el polinomio de interpolación lineal utilizado los puntos (160,52) y (170,60) porque la altura que nos piden está entre esos dos valores y por tanto la interpolación será más precisa:

$$y-52=\frac{60-52}{170-160}\cdot(x-60) \;\Rightarrow\; y=0,8x-7,6 \;\Rightarrow\; \text{Por tanto } y(168)=58,4\,\text{kg}$$

b) En este caso: $0,8x-76=62,5 \;\Rightarrow\; x=173,125\,\text{cm}$

20. En cada caso:

a) La función es: $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$

Tomando 1 988 como año 0, 1 990 como año 2 y 1 991 como año 3, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} a_0=1694,2 \\ a_0+2a_1+4a_2=1485,5 \\ a_0+3a_1+9a_2=1341,1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_0=1694,2 \\ a_1=-77,65 \\ a_2=-13,35 \end{array} \Rightarrow f(x)=1694,2-77,65x-13,35x^2$$

b) Los valores pedidos son:

$f(1)=1603,2 \;\Rightarrow$ en 1989 había 1603,2 ocupados.

$f(4)=1170 \;\Rightarrow$ en 1992 había 1170 ocupados.

Unidad 8 – Funciones racionales

PÁGINA 159

cuestiones iniciales

1. Indica cuáles de las siguientes magnitudes son inversamente proporcionales:

a) El número de invitados a una fiesta y los aperitivos que pueden comerse.

b) El número de lápices adquiridos y el precio pagado por ellos.

c) La dosis de un jarabe y el peso del enfermo.

d) El número de mecanógrafos y el tiempo que tardan en hacer un determinado trabajo.

2. La siguiente tabla muestra el tiempo que emplea un autobús de línea regular en realizar el trayecto entre dos ciudades en función de la velocidad media que lleva:

Velocidad (km/h)	80	85	90	95	100	105	110	115
Tiempo (h)	5	4,71	4,44	4,21	4	3,81	3,64	3,48

Encuentra la expresión algebraica correspondiente a la función que define esta tabla. ¿Cuál es la distancia entre estas ciudades?

3. A partir de la gráfica de la función $y = x^2$ construye las gráficas de las siguientes funciones:

a) $y = x^2 + 4$ b) $y = (x + 2)^2$ c) $y = (x - 1)^2 - 2$

SOLUCIONES

---

1. Son magnitudes inversamente proporcionales las que intervienen en las cuestiones *a)* y *d)*.

2. La expresión algebraica correspondiente al problema es: $t = \dfrac{400}{v}$ y la distancia entre las ciudades es de 400 km.

3. Estas gráficas se obtienen trasladando la gráfica de la función $y = x^2$.

   a) 4 unidades hacia arriba (hacia el semieje positivo OY).
   b) 2 unidades hacia la izquierda (hacia el semieje negativo OX).
   c) 1 unidad hacia la derecha (hacia el semieje positivo OX) y esta nueva gráfica 2 unidades hacia abajo (hacia el semieje negativo OY).

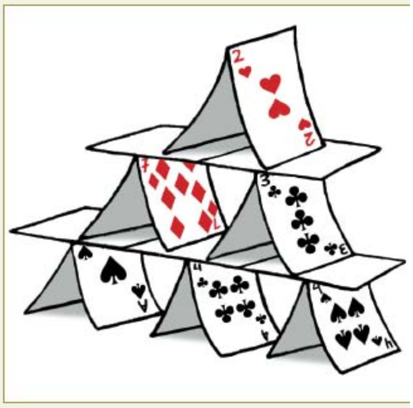
PÁGINA 169

ACTIVIDADES

■ Utiliza la experimentación en la resolución de los siguientes problemas.

1. **Sumas.** Considera los números impares 1, 3, 5, 7, etc. ¿Cuánto vale la suma de los n primeros?

2. **Castillo de naipes.** En la figura tienes un castillo de naipes de dos pisos. Han sido necesarias 7 cartas para formarlo. ¿Cuántas cartas serán necesarias para hacer un castillo similar de 15 pisos de altura? ¿Cuántos pisos tendrá un castillo que tiene 3 775 naipes?



3. **Las bicis.** Un padre y un hijo van en sendas bicicletas a la misma velocidad. La rueda trasera de la bici del padre da una vuelta, al tiempo que la rueda trasera de la bici del hijo da vuelta y media. En la rueda de la bici del padre hay dos marcas, azul y roja, diametralmente opuestas; esto ocurre análogamente en la rueda de la bici del hijo. En un determinado instante, las dos marcas rojas están sobre el suelo. ¿Cuándo coincidirán por primera vez las marcas azules sobre el suelo?

4. **Número fantasma.** Tu amigo Juan dice haber encontrado un número cuyo cuadrado acaba en tres cifras idénticas. ¿Dice la verdad?, ¿sería cierto si las cifras no pueden ser cero?

5. **Desigualdad.** ¿Es cierta la siguiente desigualdad?

$$(2n)! > [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)]^2 \cdot \sqrt{2n+1}$$

SOLUCIONES

1. La suma queda: $1+3+5+7+...+2n-1=\dfrac{1+(2n-1)}{2}\cdot n=n^2$

2. La solución queda:

   1.^{er} piso: se necesitan 2 naipes.
   2.º piso: se necesitan 5 naipes.
   3.^{er} piso: se necesitan 8 naipes.
   4.º piso: se necesitan 11 naipes.
   …

   Luego en el enésimo piso habrá $(3n-1)$ naipes.

   Una torre con *n* pisos tendrá: $\dfrac{(3n+1)\cdot n}{2}$ naipes.

   Una torre con 15 pisos tendrá: $\dfrac{(3\cdot 15+1)\cdot 15}{2}=345$ naipes.

   Veamos cuántos pisos tendrá un castillo de 3 775 naipes:

$$\frac{(3n+1)\cdot n}{2}=3775 \Rightarrow 3n^2+n-7750=0 \Rightarrow \boxed{n=50 \text{ pisos}}$$

3. Imaginamos que la rueda del padre tarda 6 segundos en dar una vuelta y la del hijo 6 segundos en dar vuelta y media.

   En la situación de partida vuelven a estar al cabo de 12'', pero en ningún momento coincidirán las marcas azules sobre el suelo.

4. El cuadrado de cualquier número entero termina en 0, 1, 4, 5, 6, 9.

   Si el número entero es par, su cuadrado es múltiplo de 4.

   Así, $14^2 = 196 = \dot{4}$.

   Si el número entero es impar, su cuadrado es múltiplo de $4+1$. Así, $13^2 = 169 = \dot{4}+1$.

   Ahora bien, si el número al cuadrado termina en 111, 555, 666 ó 999, éstos no son ni múltiplos de 4 ni múltiplos de $4+1$, luego no pueden ser.

   Veamos, pues, los que terminan en 000 ó 444.

   Efectivamente: $1444 = 38^2$, luego también se verifica si no son cero las cifras.

5. La demostración queda:

$$(2n)! = 2n\cdot(2n-1)\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

Veamos si es cierta la igualdad anterior transformada en otra:

$$2n\cdot(2n-1)\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 > \left[1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\right]^2\cdot\sqrt{2n+1} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \frac{2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)} > \sqrt{2n+1} \;\Rightarrow\; \frac{2n\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot 6\cdot 4\cdot 2}{(2n-1)\cdot\ldots 5\cdot 3\cdot 1} > \sqrt{2n+1}$$

Esto es lo que vamos a demostrar por el método de inducción:

Para $n = 1 \Rightarrow 2 > \sqrt{2\cdot 1+1} \Rightarrow 2 > \sqrt{3}$

Supongamos que es cierto para n: $\dfrac{2n\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot 6\cdot 4\cdot 2}{(2n-1)\cdot\ldots 5\cdot 3\cdot 1} > \sqrt{2n+1}$

Veamos que es cierto para $n+1$: ¿$\dfrac{(2n+2)\cdot(2n)\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot 6\cdot 4\cdot 2}{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdot\ldots 5\cdot 3\cdot 1} > \sqrt{2n+3}$? (I)

$$\frac{(2n+2)\cdot(2n)\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot 6\cdot 4\cdot 2}{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdot\ldots 5\cdot 3\cdot 1} = \frac{(2n+2)}{(2n+1)}\cdot\frac{(2n)\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot 6\cdot 4\cdot 2}{(2n-1)\cdot\ldots 5\cdot 3\cdot 1} > \frac{(2n+2)}{(2n+1)}\sqrt{2n+1} > \sqrt{2n+3}$$

Elevando al cuadrado: $(2n+2)^2(2n+1) > (2n+1) > (2n+1)^2(2n+3) \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ 16n+4 > 14n+3 \ \Rightarrow\ \ 2n+1 > 0$$

Esto siempre es cierto, pues $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ es cierta la desigualdad (I) $\Rightarrow$ es cierto el enunciado.

PÁGINA 172

ACTIVIDADES FINALES

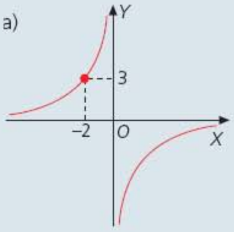
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Representa gráficamente las siguientes funciones de proporcionalidad inversa, realizando sus correspondientes tablas de valores:

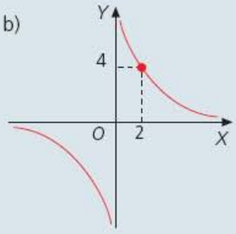
a) $y = \frac{3}{x}$ b) $y = -\frac{3}{x}$ c) $y = \frac{1}{3x}$ d) $y = -\frac{1}{3x}$

2. Encuentra la función de proporcionalidad inversa que se adecua a cada una de las siguientes gráficas:

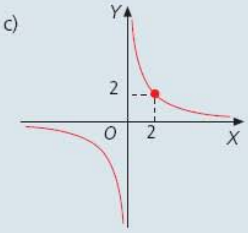
a)



b)



c)



3. La siguiente tabla muestra el tiempo de llenado de una piscina en función del número de grifos que se abren:

Nº de grifos (x)	2	3	4	5	6
Tiempo en horas (y)	12	8	6	24/5	4

a) Encuentra más valores para la tabla.

b) ¿Cuál es la expresión matemática de la función que se ajusta a la tabla?

c) Realiza la representación gráfica.

4. Un cine-club piensa proyectar una gran película la próxima semana. El alquiler de la misma cuesta 300 euros que deben pagar entre todos los asistentes a la proyección. Encuentra la función real de variable natural que matematiza esta función. Representa esta función gráficamente e indica qué tipo de función obtienes.

5. Un generador de sonidos emite estos con distintas longitudes de onda y distintas frecuencias, según muestra la siguiente tabla:

Frecuencia (ciclos/segundo)	6	60	75	150	500	800	1 200
Longitud de onda (metros)	50	5	4	2			

a) Completa esta tabla.

b) Representa gráficamente los datos de esta tabla.

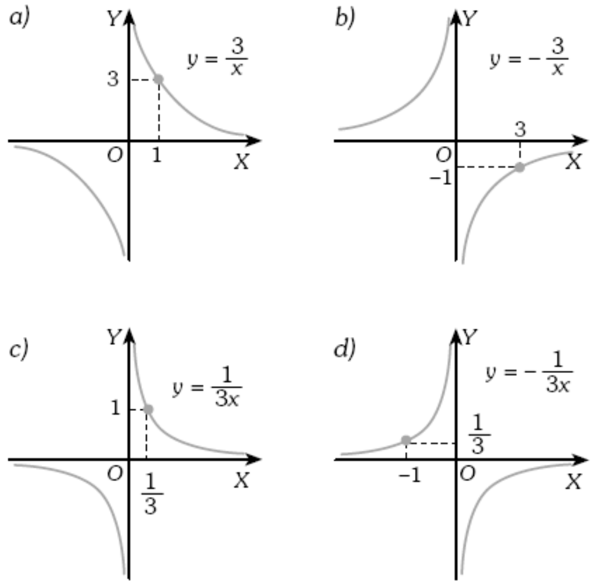
c) Encuentra la fórmula matemática asociada a esta función.

6. Representa gráficamente la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} & \text{si } x < -\frac{3}{2} \\ 2x + 1 & \text{si } -\frac{3}{2} \leq x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

SOLUCIONES

1. Las representaciones quedan:



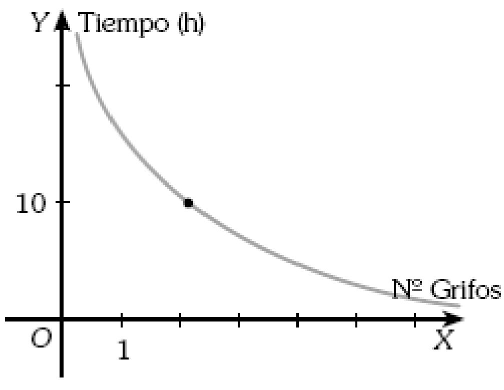
2. En cada uno de los casos son:

a) $y = -\dfrac{6}{x}$ b) $y = \dfrac{8}{x}$ c) $y = \dfrac{4}{x}$

3. En cada caso queda:

   a) b) La expresión correspondiente es $y = \dfrac{24}{x}$, con lo cual podemos buscar todos los valores que queramos.

   c) La gráfica correspondiente viene dada por:

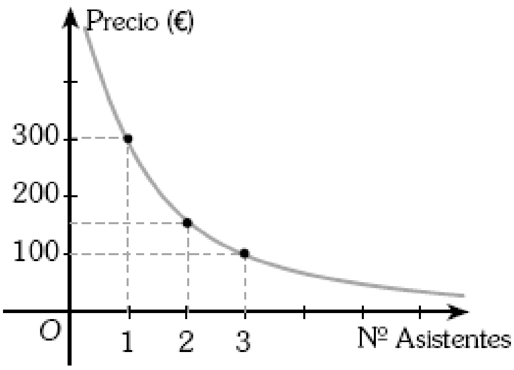


La parte negativa de la gráfica no tiene sentido en el contexto del problema.

4. La solución queda:

La función es: $y = \dfrac{300}{x}$

Es una proporcionalidad inversa. Su gráfica viene dada por:



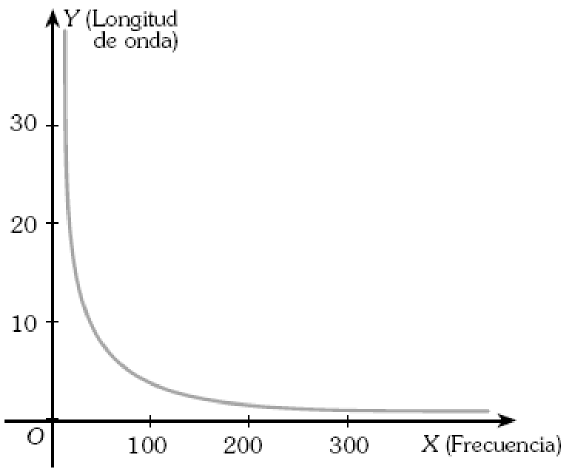
La parte negativa de la gráfica no tiene sentido en el contexto del problema.

5. En cada caso queda.

a) La tabla completa queda:

Frecuencia	6	60	75	150	500	800	1 200
Longitud onda	50	5	4	2	0,6	0,375	0,25

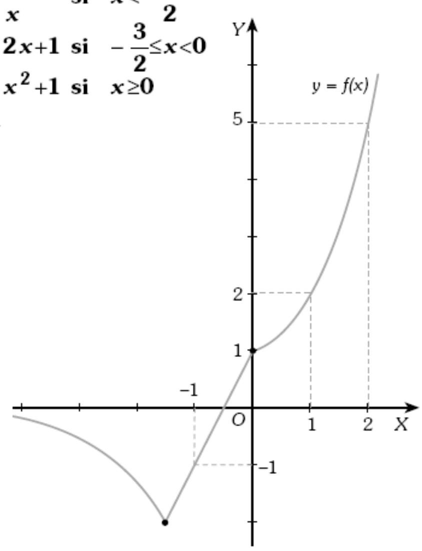
b) La gráfica queda:



c) La fórmula pedida es: $y = \dfrac{300}{x}$

6. La representación queda:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x} & \text{si} \quad x < -\dfrac{3}{2} \\ 2x+1 & \text{si} \quad -\dfrac{3}{2} \le x < 0 \\ x^2+1 & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$$



■ 7. En la función de proporcionalidad inversa $y = \frac{1}{x}$, halla:

a) ¿Para qué valores de x la función es igual o menor que una millonésima?

b) ¿Para qué valores de x la función es igual o mayor que una milésima?

■ 8. Dadas las funciones $y = \frac{-2}{x+1}$ e $y = \frac{8}{x-2}$, represéntalas gráficamente y encuentra sus asíntotas.

■ 9. Representa gráficamente las siguientes funciones, determinando previamente sus respectivas asíntotas.

a) $y = \frac{4x}{x+1}$ b) $y = \frac{6x-11}{2x-4}$ c) $y = \frac{4x+7}{4x+8}$ d) $y = \frac{-2x-8}{x+2}$

■ 10. Una fábrica dedicada al montaje de dispositivos para aviones ha calculado que la media de dispositivos que prepara cada trabajador viene dada por la siguiente función:

$$y = \frac{60x}{x+5}$$

siendo x el tiempo en días desde que el trabajador es contratado. ¿Cuántos dispositivos prepara un trabajador el primer día? ¿Cuántos prepara el quinto día? ¿Y el trigésimo día? ¿Al cabo de cuántos días prepara 50 dispositivos? ¿Tiene ramas infinitas esta función? En caso afirmativo, discute su significado.

■ 11. Un gabinete psicopedagógico ha hecho un estudio para determinar la memoria visual de los empleados de un banco. Para ello, se pasó a cada empleado una colección de 60 dibujos y se les dio dos días para que los memorizaran. El gabinete determinó que, durante cada uno de los 30 días siguientes, cada empleado debía escribir los nombres de los dibujos que recordaban, y obtuvo este gabinete que la media de aciertos es:

$$y = \frac{8t+50}{t+1}, \text{ siendo } t \text{ el tiempo en días.}$$

Haz una tabla de valores y, a partir de ella, dibuja la gráfica correspondiente.

¿Cuántos dibujos recuerda un empleado al cabo de 8 días? ¿Y al cabo de 10 días? ¿Y al cabo de 15 días? ¿Cuál es el menor número de dibujos que retiene en la memoria? ¿Y el máximo?

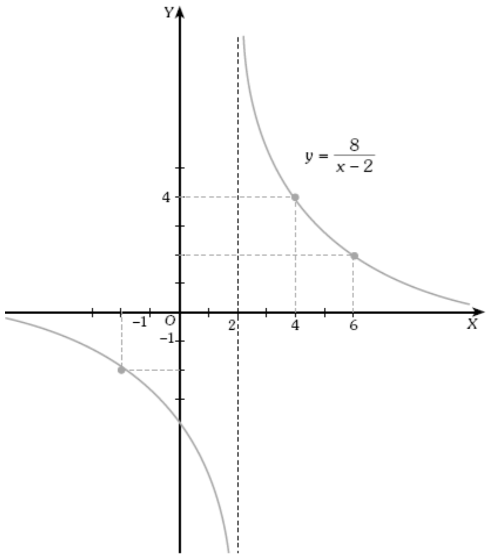
Estudia las ramas infinitas y asíntotas de esta función.

7. En cada caso:

a) $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{1000\,000} \Rightarrow x \geq 10^6 \Rightarrow \forall x \geq 10^6$

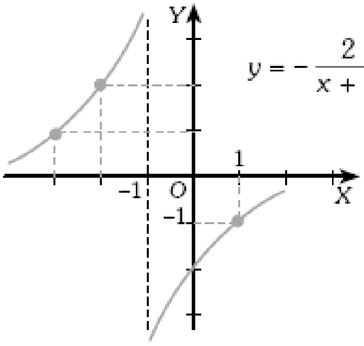
b) $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{1000} \Rightarrow x \leq 1000 \Rightarrow \forall x \leq 10^3$

8. En cada uno de los casos:



La función $y = \frac{8}{x-2}$ tiene como asíntotas las rectas de ecuaciones:

$x = 2 \qquad y = 0$

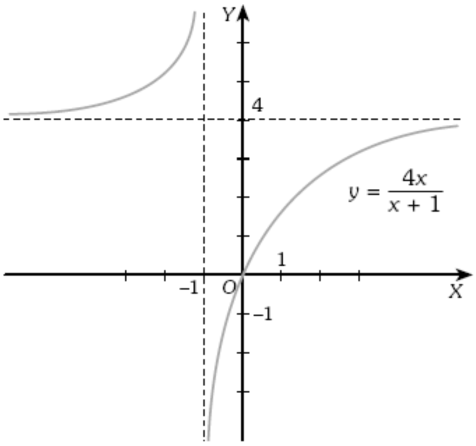


La función $y = \frac{-2}{x+1}$ tiene como asíntotas las rectas de ecuaciones:

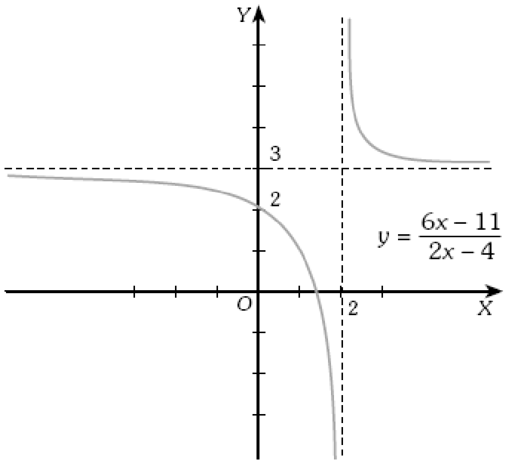
$x = -1 \qquad y = 0$

9. En cada uno de los casos:

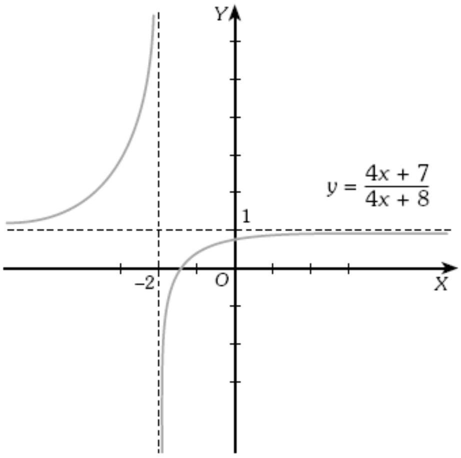
a) Asíntotas: $x=-1$; $y=4$.



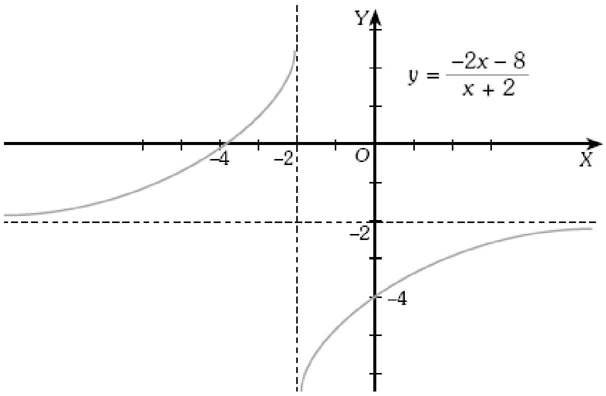
b) Asíntotas: $x=2$; $y=3$.



c) Asíntotas: $x=-2$; $y=1$.



d) Asíntotas: $x=-2$; $y=-2$.



10. La solución queda:

El 1er día prepara: $\dfrac{60\cdot 1}{1+5}=10$ dispositivos.

El 5to día prepara: $\dfrac{60\cdot 5}{5+5}=30$ dispositivos.

El 30^{o} día prepara: $\dfrac{60\cdot 30}{30+5}=51{,}4$ dispositivos.

Para preparar 50 dispositivos necesita: $\frac{60 \cdot x}{x+5} = 50 \quad \Rightarrow \quad x = 25$ días.

El vigésimo quinto día prepara una media de 50 dispositivos.

Esta función tiene dos ramas infinitas horizontales con asíntota horizontal $y = 60$. Las ramas infinitas verticales no tienen sentido en el contexto del problema porque están en $x = -5$.

El sentido de la rama infinita horizontal es que la media de dispositivos que lega a hacer es de 60 como máximo.

11. La solución queda:

Al cabo de 8 días recuerda: $\frac{8 \cdot 8 + 50}{8+1} = 12{,}7$ dibujos.

Al cabo de 10 días recuerda: $\frac{8 \cdot 10 + 50}{10+1} = 11{,}8$ dibujos.

Al cabo de 15 días recuerda: $\frac{8 \cdot 15 + 50}{15+1} = 10{,}6$ dibujos.

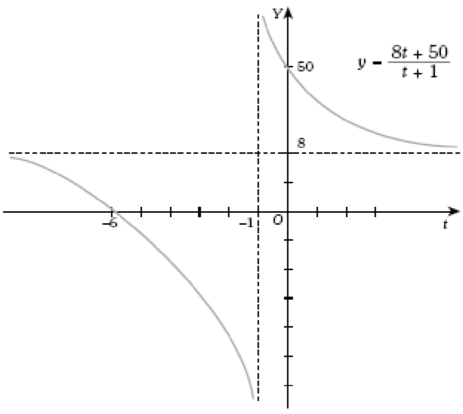
El menor número de dibujos que retiene en la memoria es 8 dibujos.

El mayor número lo da en 50 dibujos.

Esta función presenta dos ramas infinitas verticales con asíntota vertical la recta $t = -1$ y dos ramas infinitas horizontales con asíntota horizontal $y = 8$. Las ramas verticales no tienen sentido en el contexto del problema.

La tabla y la gráfica quedan:

t	y
0	50
1	29
2	22
3	18,5
4	16,4
10	11,8
100	8,4
1 000	8,04



ACTIVIDADES FINALES

■ 12. A partir de la gráfica de la función $y = \frac{2}{x}$ representa las gráficas de las funciones: $y = \frac{2}{x} - 1$, $y = \frac{2}{x} + 2$

■ 13. Dibuja las gráficas de las funciones $y = 3 + x^3$, $y = x^3 - 1$ utilizando la gráfica de la función $y = x^3$.

■ 14. A partir de la gráfica de la función $y = x^2$ encuentra las gráficas de las funciones: $y = x^2 - 6x + 9$, $y = x^2 + x + \frac{1}{4}$

■ 15. Dibuja la gráfica de las funciones $y = (x + 2)^2 - 1$, $y = \frac{2}{x-2}$ a partir de las gráficas de las funciones correspondientes.

■ 16. A partir de las gráficas de las funciones básicas, dibuja las gráficas de las siguientes funciones:

a) $y = x^4 - 2$

b) $y = \frac{1}{x^3} + 3$

c) $y = (x - 1)^2 + 4$

d) $y = (x - 2)^3$

e) $y = \frac{1}{(x+1)^4}$

f) $y = \frac{1}{x+2} - 3$

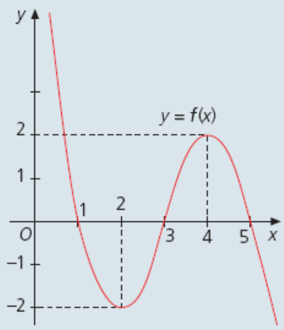
■ 17. A partir de la gráfica $y = f(x)$ adjunta, dibuja las gráficas de las siguientes funciones:

a) $y = f(x + 2)$

b) $y = f(x) - 5$

c) $y = -f(x)$

d) $y = |f(x)|$



■ 18. Dibuja las gráficas de las funciones opuestas de las siguientes:

a) $y = 4 - 3x$

b) $y = -x^2 + 6x$

c) $y = \frac{2x}{x-1}$

■ 19. Dibuja las gráficas de las siguientes funciones:

a) $y = |3 - x|$

b) $y = |x^2 - 8x + 12|$

c) $y = \left|\frac{5}{2x}\right|$

■ 20. A partir de la gráfica adjunta de la función $y = f(x)$, dibuja las gráficas de las siguientes funciones:

a) $y = -f(x)$

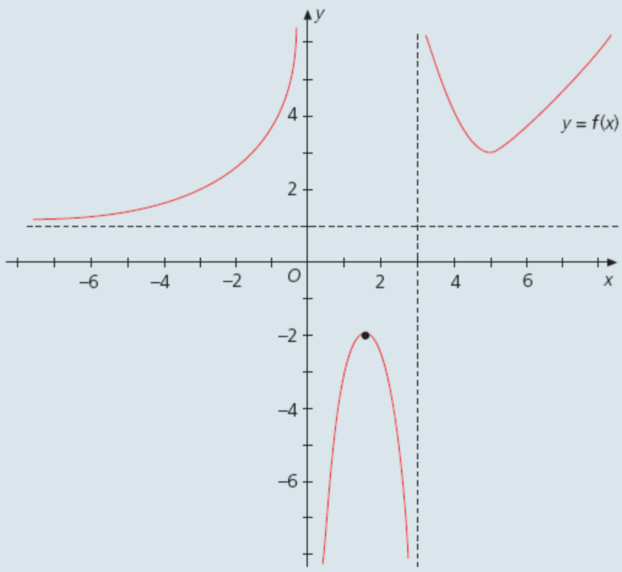
b) $y = |f(x)|$

c) $y = -|f(x)|$

d) $y = f(x) + 2$

e) $y = f(x - 1)$

f) $y = f(x + 3) - 1$



12. En cada uno de los dos casos:

- La gráfica de la función $y=\frac{2}{x}-1$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y=\frac{2}{x}$, 1 unidad hacia abajo, es decir, hacia el semieje negativo OY.
- La gráfica de la función $y=\frac{2}{x}+2$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y=\frac{2}{x}$, 2 unidades hacia arriba, es decir, hacia el semieje positivo OY.

13. En cada uno de los dos casos:

- La gráfica de la función $y=3+x^3$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y=x^3$, 3 unidades hacia el semieje positivo OY.
- La gráfica de la función $y=x^3-1$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y=x^3$, 1 unidad hacia arriba, es decir, hacia el semieje negativo OY.

14. En cada uno de los dos casos.

- La gráfica de la función $y=x^2-6x+3=(x-3)^2$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y=x^2$, 3 unidades hacia la derecha, hacia el semieje positivo OX.
- La gráfica de la función $y=x^2+x+\frac{1}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y=x^2$, media unidad hacia la izquierda, hacia el semieje negativo OX.

15. En cada uno de los dos casos:

- La gráfica de la función $y=(x+2)^2-1$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y=x^2$, 2 unidades hacia la derecha, hacia el semieje negativo OX, y esta nueva gráfica una unidad hacia el semieje negativo OY.
- La gráfica de la función $y=\frac{2}{x-2}$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y=\frac{2}{x}$, 2 unidades hacia el semieje positivo OX.

16. En cada uno de los casos:

   a) Se obtiene de trasladar la gráfica $y=x^4$, 2 unidades hacia abajo.

   b) Se obtiene de trasladar la gráfica $y=\frac{1}{x^3}$, 3 unidades hacia arriba.

   c) Se obtiene de trasladar la gráfica $y=x^2$, 4 unidades hacia arriba y ésta 1 unidad hacia la derecha.

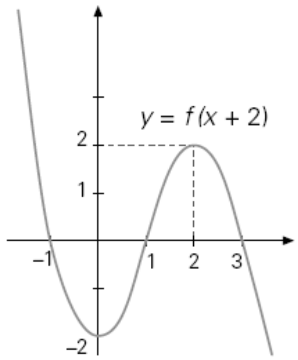
d) Se obtiene de trasladar la gráfica $y = x^3$, 2 unidades hacia la derecha.

e) Se obtiene de trasladar la gráfica $y = \dfrac{1}{x^4}$, 1 unidad hacia la izquierda.

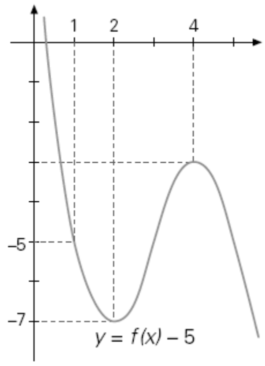
f) Se obtiene de trasladar la gráfica $y = \dfrac{1}{x}$, 2 unidades hacia la izquierda, y ésta nueva gráfica 3 unidades hacia abajo.

17. Las gráficas quedan:

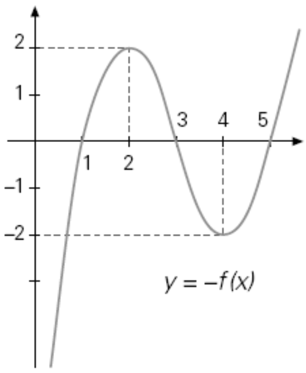
a) $y = f(x+2)$



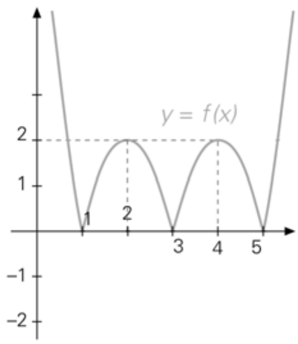
b) $y = f(x) - 5$



c) $y = -f(x)$

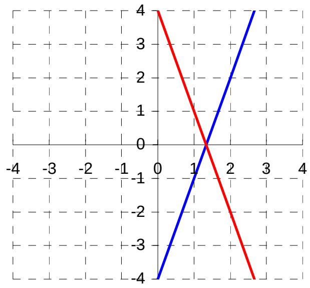


d) $y = |f(x)|$

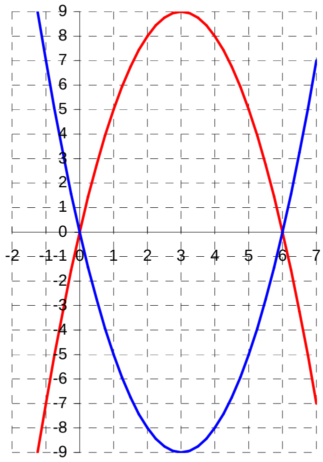


18. Las gráficas quedan:

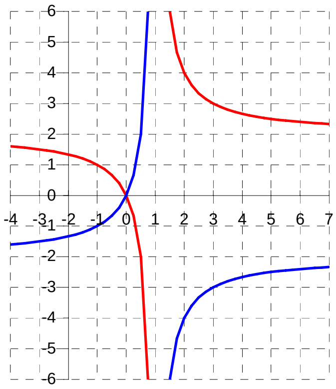
a) La función opuesta de $y=4-3x$ es $y=3x-4$ y las gráficas son:



b) La función opuesta de $y=-x^2+6x$ es $y=x^2-6x$, y las gráficas son:

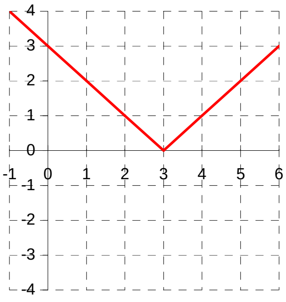


c) La función opuesta es $y=\dfrac{-2x}{x-1}$ y las gráficas son:

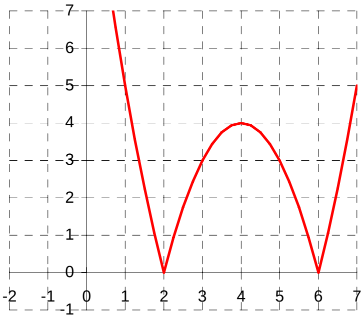


19. Las gráficas quedan:

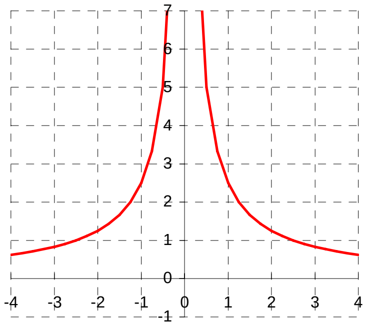
a) $y=|3-x|$



b) $y=|x^2-8x+12|$

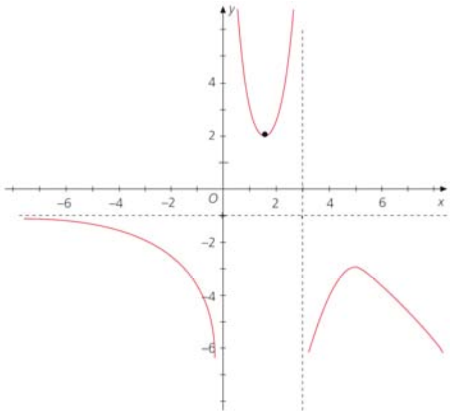


c) $y=\left|\dfrac{5}{2x}\right|$

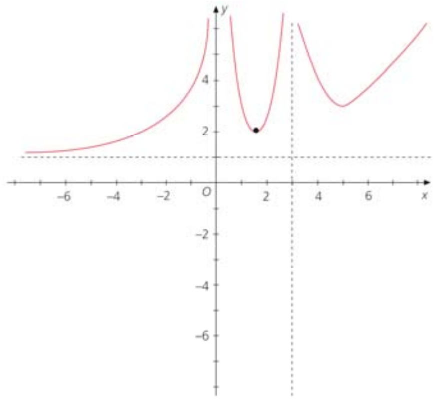


20. Las gráficas quedan:

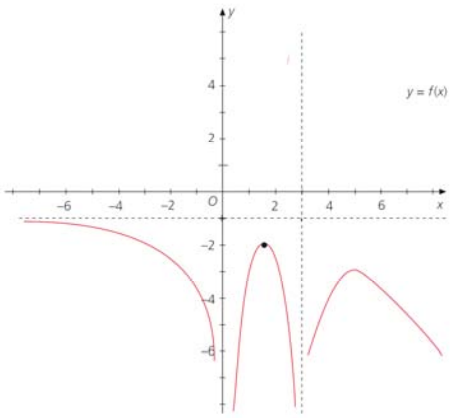
a) $y = -f(x)$



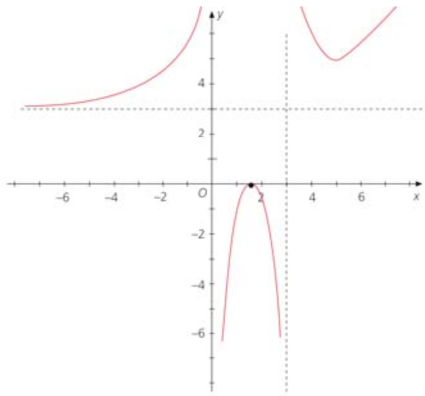
b) $y = |f(x)|$



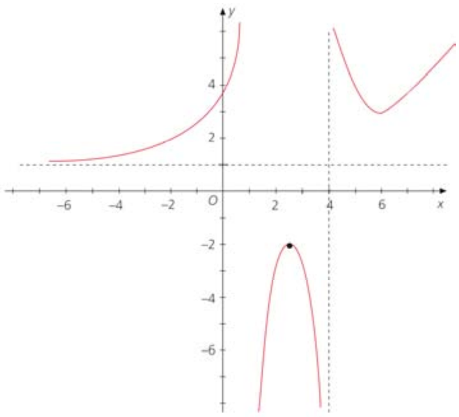
c) $y = -|f(x)|$



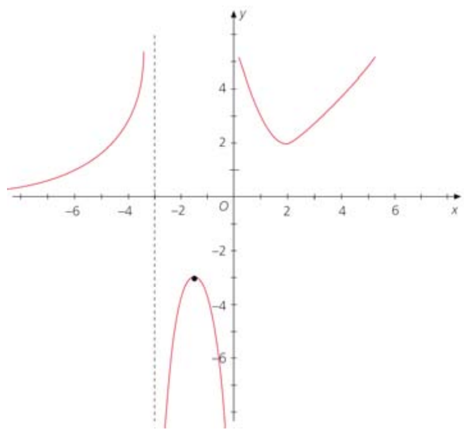
d) $y = f(x) + 2$



e) $y = f(x-1)$



f) $y = f(x+3) - 1$

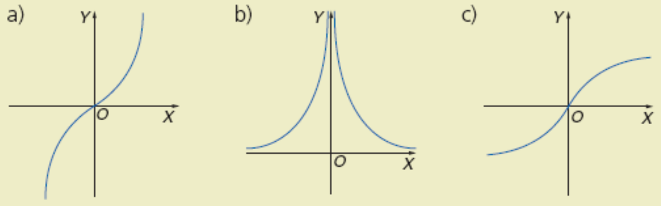


Unidad 9 – Funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas

PÁGINA 177

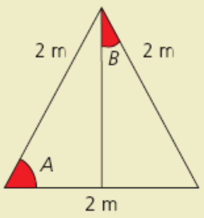
cuestiones iniciales

1. En cada una de las siguientes gráficas estudia: dominio, recorrido, monotonía, acotación, simetrías y asíntotas.



2. Completa la siguiente tabla referida a los ángulos del triángulo de la figura. ¿Cuánto miden estos ángulos?

	Seno	Coseno	Tangente
A			
B			



SOLUCIONES

1. En cada uno de los tres casos:

a) $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$ $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}$

Estrictamente creciente en todo su dominio.
No acotada.
Simétrica respecto al origen.
Tiene dos ramas infinitas parabólicas.
Continua en $\mathbb{R}$.

b) $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R} - \{0\}$ $\mathrm{Im} f = (0, +\infty)$

Estrictamente creciente en $(-\infty, 0)$.
Estrictamente decreciente en $(0, +\infty)$.
Acotada inferiormente por 0.
Simétrica respecto a OY.
Asíntota vertical $x = 0$.
Asíntota horizontal $y = 0$.
Continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

c) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$ $\quad$ $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$

Estrictamente creciente en todo su dominio.
No acotada.
Simétrica respecto al origen de coordenadas.
Tiene dos ramas infinitas parabólicas.
No tiene asíntotas.

2. La solución queda:

Al ser un triángulo equilátero los ángulos miden: $\hat{A} = 60^{\text{o}}$ y $\hat{B} = 30^{\text{o}}$.

La altura del triángulo vale $\sqrt{3}$ m aplicando el teorema de Pitágoras

La tabla quedaría:

	seno	coseno	tangente
$\hat{A} = 60^{\text{o}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\hat{B} = 30^{\text{o}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

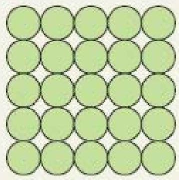
PÁGINA 193

ACTIVIDADES

- Utiliza esta estrategia en la resolución de los siguientes problemas:

1. **Un paso difícil.** En la subida a un pico de montaña hay que pasar por un sendero muy estrecho en el que resulta imposible que se crucen dos personas, a excepción de un lugar al lado del camino en el que hay una pequeña cueva donde tan sólo cabe una persona. Un fin de semana en el que suben muchos montañeros, coinciden dos grupos. Uno de ellos, compuesto por dos montañeros, está subiendo al pico, mientras el otro, compuesto por tres, está bajando. ¿Cómo puede organizarse el paso de los montañeros para que cada grupo pueda seguir su camino sin que ninguno tenga que retroceder?

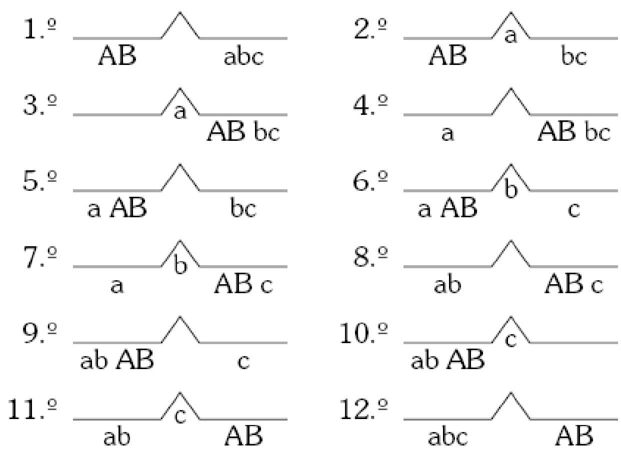
2. **Una abeja golosa.** Sobre una mesa hay 25 monedas, cada una de las cuales contiene una gota de miel, colocadas como indica la figura. Viene volando una abeja y se posa sobre una de las monedas para comerse la gota de miel. Como es muy golosa, quiere comerse todas las gotas, pero para ello debe pasar de una moneda a otra y no pisar dos veces una misma moneda. ¿Podrá hacerlo?



3. **La magia de los números.** Toma un número cualquiera de tres cifras diferentes, por ejemplo, 472. Dale la vuelta: 274. Resta el menor del mayor: 472 – 274 = 198. Invierte este número: 891. Suma los dos últimos y obtienes: 198 + 891 = = 1 089. ¿Ocurre lo mismo con cualquier número de tres cifras distintas?

SOLUCIONES

1. Los pasos a seguir son los siguientes, llamando *AB* a los montañeros que suben y *abc* a los que bajan.

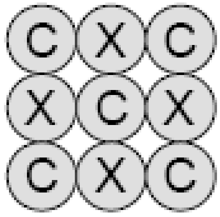


2. Señalamos las monedas con C y X.

- Consideramos el caso de que sólo tengamos 9 monedas.

En este caso hay 5 caras C y 4 cruces X.
Si la abeja parte de una moneda marcada con C, puede hacer el recorrido:

CXCXCXCXC



Pero si parte de una moneda marcada con X, no puede:
XCXCXCXC… falta una C.

- En nuestro caso hay 13 caras C y 12 cruces X.

Si la abeja parte de una moneda marcada con C, es posible el recorrido, pero si la abeja parte de una moneda marcada con X no es posible.

3. La solución queda:

Sea el número inicial $xyz \Rightarrow (100x+10y+z)-(100z+10y+x)=100(x-z)+(z-x)$

Si $x>z \;\Rightarrow\; z-x<0 \;\Rightarrow$ hay que escribir la expresión anterior de la forma:

$$(x-z-1)100+100+(z-x)=(x-z-1)100+9\cdot 10+(10+z-x)$$

La 1.ª cifra de este número es: $x-z-1$.

La 2.ª cifra de este número es: 9.

La 3.ª cifra de este número es: $10+z-x$.

Observamos que $(x-z-1)+(10+z-x)=9$, es decir, la 1ª + 3ª siempre da 9 y la 2ª también da 9. Luego siempre se cumple el resultado del problema.

PÁGINA 196

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Representa gráficamente las funciones:

a) $y = 3^x$ b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ c) $y = e^x$ d) $y = 4^{-x}$

Ayúdate de la calculadora creando una tabla de valores para cada función.

2. A partir de la gráfica de la función $y = e^x$ representa las gráficas de las funciones $y = e^x - 1$; $y = e^x + 2$; $y = e^{x-1}$; $y = e^{x+2}$.

3. Demuestra que si el punto (m, p) está en la gráfica de la función $y = a^x$, el punto $\left(-m, \frac{1}{p}\right)$ está también en su gráfica.

4. ¿Respecto de qué rectas son simétricas las funciones $f(x) = 4^x$ y $g(x) = 4^{-x}$? Asimismo, la función $t(x) = 2^{|x|}$ es simétrica respecto de una recta. ¿Qué recta es?

5. Los controles de calidad de una cadena de montaje de ordenadores han obtenido que el porcentaje de ordenadores que siguen funcionando al cabo de t años viene dado por:

$$p(t) = 100 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t$$

a) Representa gráficamente esta función.

b) ¿Tiene sentido real toda la gráfica obtenida?

c) ¿Qué porcentaje de ordenadores sigue funcionando al cabo de dos años? ¿Y al cabo de cinco años?

d) ¿Qué significado tiene el punto de corte con el eje de ordenadas?

6. La cantidad de madera de un bosque aumenta en un 50 % cada 100 años. Tomando como punto de partida y como unidad de medida la cantidad de madera que había en este bosque en el año 1600 y como unidad de tiempo el siglo:

a) Encuentra la cantidad de madera que había en los años 1800, 2000, 1900.

b) Encuentra la función correspondiente.

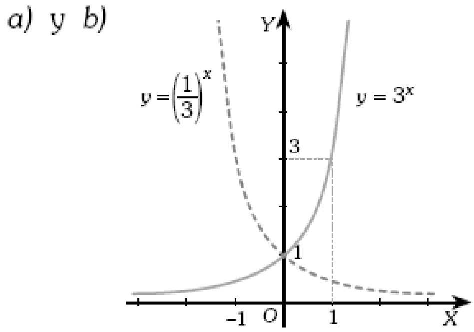
c) ¿Cuánta madera había en los años 1500, 1400, 1450, 1000?

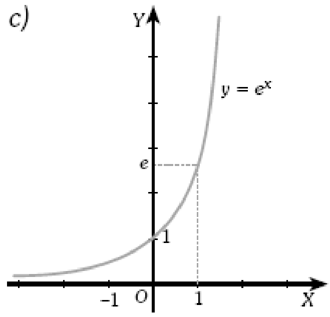
d) Averigua cuándo habrá una masa de madera doble que en 1600 y cuándo la mitad.

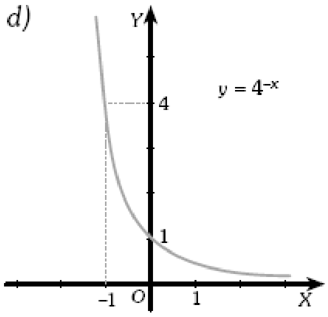
e) Averigua cada cuánto tiempo se triplica la cantidad de madera.

SOLUCIONES

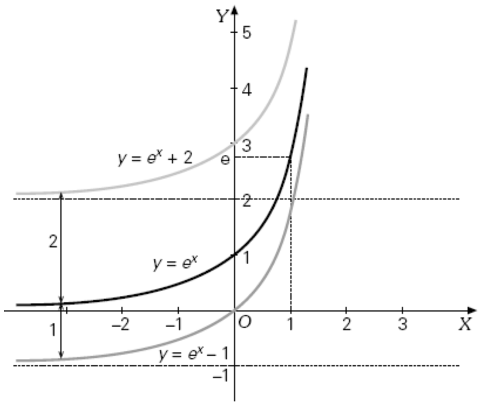
1. Las gráficas quedan:







2. En cada uno de los casos:



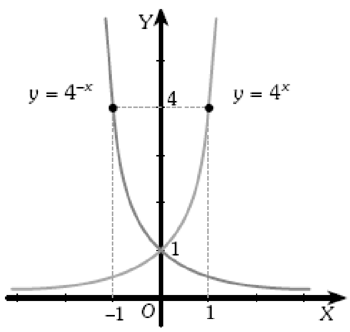
- $y = e^{x-1}$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = e^{x}$, 1 unidad a la derecha.
- $y = e^{x+2}$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = e^{x}$, 2 unidades a la izquierda.

3. La demostración queda:

Si (m, p) está en la gráfica de la función $y = a^{x}$ entonces:

$y = a^{x} \Rightarrow p = a^{m} \Rightarrow \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{a^{m}} \Rightarrow \dfrac{1}{p} = a^{-m} \Rightarrow \left(-m, \dfrac{1}{p}\right)$ pertenece a la misma función $y = a^{x}$

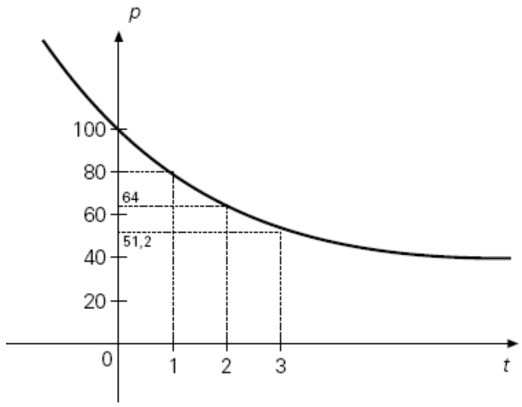
4. La solución es:



- Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son simétricas respecto del eje OY o del eje de ordenadas $x = 0$.
- Igualmente, la función $y = 2^{|x|}$ es simétrica respecto al eje de ordenadas.

5. La solución queda:

a) La gráfica queda:



b) La parte negativa de a gráfica no tiene sentido.

c) En cada caso:

$t=2 \quad \Rightarrow \quad p=64\%$ siguen funcionando al cabo de 2 años.

$t=5 \quad \Rightarrow \quad p=32,768\%$ siguen funcionando al cabo de 5 años.

d) El punto de corte con el eje de ordenadas significa el 100% de ordenadores que funcionan en el momento de salir de la cadena de montaje.

6. La solución queda:

a) En el año 1 600 hay una unidad de madera.

En el año 1 800 había $(1+50\% \text{ de } 1)^2 = 1,5^2$ unidades de madera.

En el año 1 900 había $1,5^3$ unidades de madera.

En el año 2 005 había $1,5^{4,05}$ unidades de madera.

b) La función es $y=1,5^t$, con $t=$ siglos a partir de 1 600.

c) En el año 1 500 había $1,5^{-1}=0,667$ unidades de madera (u m).

En el año 1 400 había $1,5^{-2}=0,444$ u m.

En el año 1 450 había $1,5^{-1.5}=0,544$ u m.

En el año 1 000 había $1,5^{-6}=0,087$ u m.

d) Para que haya doble madera que en 1 600 se ha de verificar:

$$2=1{,}5^t \quad \Rightarrow \quad t=\frac{\log 2}{\log 1{,}5}=1{,}710\,\text{siglos} \quad \Rightarrow \quad \text{Es decir, en el año } 1600+171=1771.$$

Para que haya la mitad de madera se ha de verificar:

$$\frac{1}{2}=1{,}5^t \quad \Rightarrow \quad t=\frac{\log 0{,}5}{\log 1{,}5}=-1{,}710\,\text{siglos} \quad \Rightarrow \quad \text{Es decir, en el año } 1600-171=1429.$$

e) Si consideramos la madera en un tiempo *t* como $1{,}5^t$ y queremos saber cuánto tiempo t' ha de pasar para que la madera se triplique, $3\cdot 1{,}5^t$, obtenemos:

$$1{,}5^{t+t'}=3\cdot 1{,}5^t \quad \Rightarrow \quad 1{,}5^{t'}=3 \quad \Rightarrow t'=2{,}710 \text{ siglos}$$

Es decir, cada 2,710 siglos o 271 años, la madera se triplica.

7. Representa gráficamente las funciones:

a) $y = \log_3 x$ b) $y = \log_{1/3} x$ c) $y = \ln x$ d) $y = \log_{1/4} x$

Ayúdate de una calculadora creando una tabla de valores para cada función.

8. A partir de la gráfica de la función $y = \log_2 x$ representa las gráficas de las funciones:

a) $y = -1 + \log_2 x$ b) $y = 2 + \log_2 x$ c) $y = \log_2 (x - 1)$ d) $y = \log_2 (x + 2)$

9. A partir de las gráficas de las funciones siguientes, compáralas dos a dos:

$f(x) = 2^x$ $g(x) = x^2$ $h(x) = \log_2 x$

10. Representa gráficamente, con ayuda de la calculadora, las siguientes funciones:

$f(x) = 4^x$ $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ $h(x) = \log_4 x$

$y(x) = \log_{1/4} x$ $j(x) = 4^x + 2$ $k(x) = \log_4 x + 4$

11. Representa gráficamente la función: $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si} \quad x \le -1 \\ -x^2 + 2 & \text{si} \quad -1 < x \le 1 \\ \ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

12. En un pueblo de alta montaña se repobló una zona con acebos hace 6 años. Inicialmente se pusieron 100 ejemplares y en estos momentos hay 2 010 ejemplares de acebo. Si sabemos que $N = A \cdot e^{Bt}$ es la función que da el número N de acebos en función del tiempo que ha pasado, encuentra esta función para este enunciado. ¿Cuántos años han de pasar para que haya 14 850 ejemplares?

13. En el contrato de trabajo de un empleado se especifica que cada año se le aumentará el sueldo el 12% de lo que cobró el año precedente. ¿Cuántos años tardará en doblar el sueldo? ¿Cuánto tardará en cuadriplicarlo? ¿Y en sextuplicarlo?

14. La población de la Tierra, en 1986, era de 4 mil millones de personas. Suponiendo que tiene un crecimiento anual del 2 %, ¿cuándo se alcanzará una población de 10 mil millones?

15. La función $y = \log x - \log\left(\frac{x}{2}\right)$ ¿es una función logarítmica? Razona la respuesta.

16. Considerando la función $f(x) = 2 - e^{-x}$, calcula:

a) $f(0)$; $f(1)$.

b) El valor de x que anulará la función.

c) Los valores de x tales que $f(x) = \frac{5}{2}$ y $f(x) = \frac{1}{2}$, respectivamente.

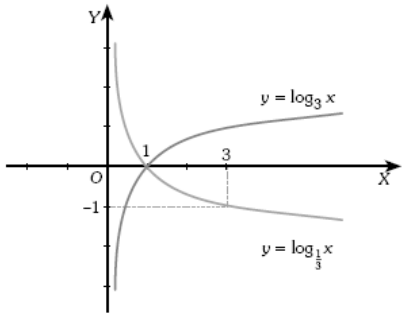
17. Una fábrica produce dos tipos de ruedas de automóvil: Tipo S y Tipo N. Las ventas, en millones de ruedas, de cada uno de los tipos sigue las funciones:

Tipo S $\equiv y = 4^{t-1}$ Tipo N $\equiv y = 2^t$ t en años

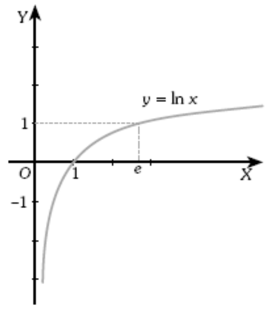
A partir de sus gráficas indica en qué momento vende el mismo número de ruedas de cada tipo. ¿En qué momento vende más ruedas de calidad S que de calidad N?

7. Las gráficas quedan:

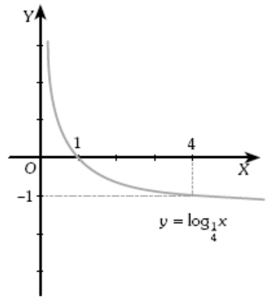
a)y b) $y = \log_3 x$; $y = \log_{1/3} x$



c) $y = \ln x$



d) $y = \log_{1/4} x$

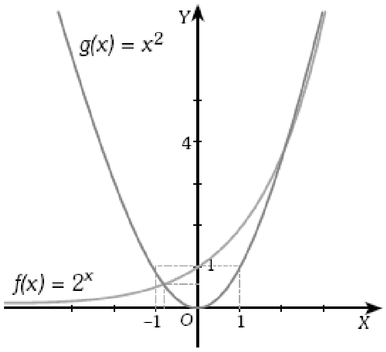


8. A partir de la gráfica dada, sólo cabe hacer las transformaciones pertinentes en cada caso:

- $y = -1 + \log_2 x$ se obtiene de trasladar la gráfica de $y = \log_2 x$, 1 unidad hacia abajo.
- $y = 2 + \log_2 x$ se obtiene de trasladar la gráfica de $y = \log_2 x$, 2 unidades hacia arriba.
- $y = \log_2 (x - 1)$ se obtiene de trasladar la gráfica de $y = \log_2 x$, 1 unidad hacia la derecha.
- $y = \log_2 (x + 2)$ se obtiene de trasladar la gráfica de $y = \log_2 x$, 2 unidades hacia la izquierda.

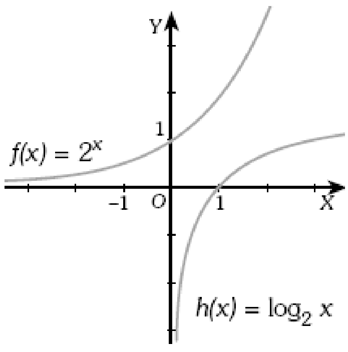
9. Las comparaciones quedan:

- $f(x) = 2^x$ y $g(x) = x^2$



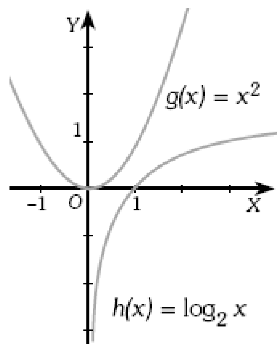
$2^x > x^2$ en $(-0,75; 2)$
$2^x < x^2$ en $(-\infty, -0,75) \cup (2, +\infty)$
$2^x = x^2$ en $x = 2$ y $x \approx -0,75$

- $f(x) = 2^x$ y $h(x) = \log_2 x$



$2^x > \log_2 x; \forall x \in \mathbb{R}$

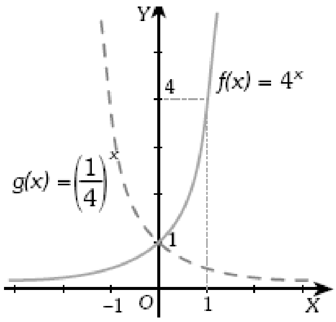
- $h(x) = \log_2 x$ y $g(x) = x^2$

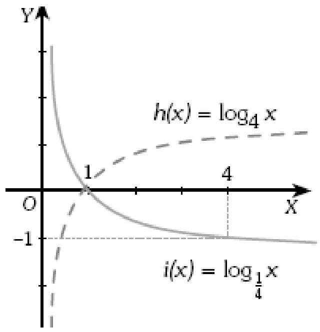


$x^2 > \log_2 x; \forall x \in \mathbb{R}$

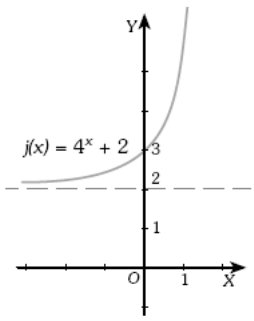
10. Las gráficas quedan:

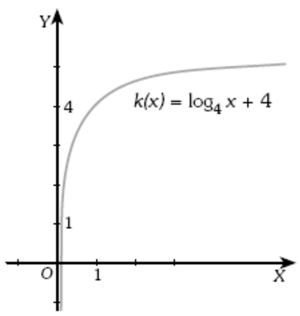
• $f(x)=4^x$; $g(x)=\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$ • $h(x)=\log_4 x$; $y(x)=\log_{1/4} x$



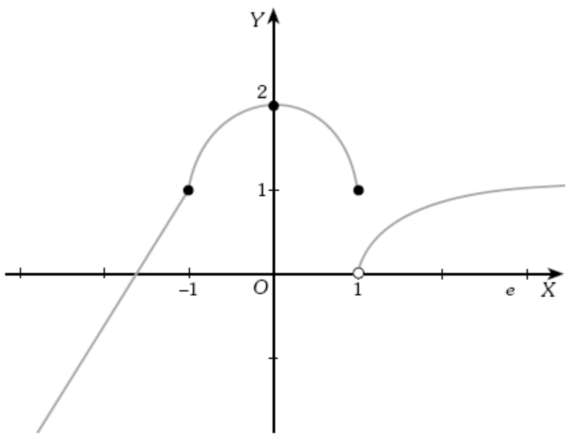


• $j(x)=4^x+2$; $k(x)=\log_4 x+4$





11. La gráfica queda:



12. Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r}100 = A \cdot e^{0} \\ 2010 = A \cdot e^{B \cdot 6}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}A = 100 \\ B = \dfrac{\ln(20{,}10)}{6} = 0{,}5\end{array}\right\} \Rightarrow \text{La función buscada es: } N = 100 \cdot e^{0{,}5 \cdot t}$$

Para que haya 14 850 ejemplares han de pasar *t* años, y se debe verificar:

$$14\,850 = 100 \cdot e^{0{,}5 \cdot t} \quad \Rightarrow \quad t = 10 \text{ años.}$$

13. La solución del problema queda:

El sueldo de este empleado al cabo de *t* años será $y = 1{,}12^{t} \cdot x$, siendo *x* el sueldo inicial.

- $2x = 1{,}12^{t} \cdot x \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{\log 2}{\log 1{,}12} = 6{,}12$ años tardará en duplicar su salario.
- $4x = 1{,}12^{t} \cdot x \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{\log 4}{\log 1{,}12} = 12{,}23$ años tardará en cuadruplicar su salario.
- $6x = 1{,}12^{t} \cdot x \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{\log 6}{\log 1{,}12} = 15{,}8$ años tardará en sextuplicar su salario.

14. La solución queda del siguiente modo:

Con un crecimiento anual del 2% al cabo de *t* años, habrá en la Tierra una población de:

$$P = 1{,}02^{t} \cdot 4 \text{ mil millones de habitantes}$$

De este modo: $10 = 1{,}02^{t} \cdot 4 \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{\log \frac{10}{4}}{\log 1{,}02} = 46{,}27 \text{ años}$.

Al cabo de 46,27 años la población será de 10 mil millones.

15. Operando:

$y = \log x - \log\left(\dfrac{x}{2}\right) = \log \dfrac{x}{x/2} = \log 2 \ \Rightarrow$ No es una función logarítmica, sino una función constante.

16. En cada uno de los casos:

a) $f(0)=2-e^{0}=1;\ f(1)=2-\dfrac{1}{e}=1,63$

b) $2-e^{-x}=0\ \Rightarrow\ e^{x}=\dfrac{1}{2}\ \Rightarrow\ x=-0,69$

c) $f(x)=\dfrac{5}{2}\ \Rightarrow\ 2-e^{-x}=\dfrac{5}{2}\ \Rightarrow\ e^{-x}=-\dfrac{1}{2}\ \Rightarrow$ Imposible

$f(x)=\dfrac{1}{2}\ \Rightarrow\ 2-e^{-x}=\dfrac{1}{2}\ \Rightarrow\ e^{-x}=\dfrac{3}{2}\ \Rightarrow\ e^{x}=\dfrac{2}{3}\ \Rightarrow\ x=\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)=-0,41$

17. La solución queda:

- Para ver en qué momento vende el mismo número de ruedas de cada tipo resolvemos la ecuación:

$$4^{t-1}=2^{t}\ \Rightarrow\ 2^{2t-2}=2^{t}\ \Rightarrow\ 2t-2=t\ \Rightarrow\ t=2\text{ años}\ \Rightarrow\ \text{Al cabo de 2 años.}$$

- Vender más ruedas *S* que *N* para los valores de *t* que verifiquen la inecuación:

$$4^{t-1}>2^{t}\ \Rightarrow\ 2^{2t-2}>2^{t}\ \Rightarrow\ 2t-2>t\ \Rightarrow\ t>2\text{ años}$$

A partir del 2º año se vende más ruedas de calidad *S* que de calidad *N*.

PÁGINA 198

ACTIVIDADES FINALES

18. Una persona está aprendiendo a nadar el estilo espalda. Transcurridas x horas de entrenamiento, es capaz de nadar, en un minuto, una distancia de y metros, dada por la expresión:

$$y = 16\,(1 - e^{-0{,}035x})$$

a) ¿Qué distancia es capaz de recorrer en un minuto después de 12 horas de entrenamiento?

b) ¿Cuántas horas de entrenamiento son necesarias para recorrer 12 metros en un minuto?

19. Indica el signo de cada una de las siguientes razones trigonométricas:

a) sen 150° c) tg 200° e) tg 345° g) cos 250° i) tg 27°

b) cos 285° d) cos 170° f) sen 55° h) sen 320° j) sen (−120°)

20. Reduce los siguientes ángulos al primer giro:

a) 1 215° b) −60° c) $\dfrac{23\pi}{6}$ d) 18 750° e) $\dfrac{26\pi}{3}$

21. A partir de las gráficas de las funciones circulares halla los valores de x en el intervalo $[-\pi, \pi]$ que hagan ciertas las siguientes desigualdades:

$$\cos x \le -\frac{1}{2} \qquad \operatorname{tg} x > 1 \qquad 2 > \operatorname{sen} x \qquad \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \ge 0$$

22. Dibuja las gráficas de las siguientes funciones a partir de las gráficas de las funciones circulares:

a) $y = \operatorname{sen} x - 3$ c) $y = \operatorname{sen}(x + \pi)$ e) $y = 3 \operatorname{sen} x$ g) $y = \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}$ i) $y = 3 \operatorname{sen}\left[2\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\right]$

b) $y = \cos x + 2$ d) $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ f) $y = \cos(2x)$ h) $y = -2\cos x$

23. En una isla del Pacífico se ha comprobado que la temperatura media durante el mes de diciembre viene dada por (en grados centígrados):

$$T = 5\cos\left[\left(\frac{12 - t}{12}\right)\cdot \pi\right] + 10\ °C$$

donde t es la hora del día variando en [0, 24).

a) ¿Qué temperatura habrá a las 16 horas? ¿Y a las 8 horas?

b) ¿A qué hora del día la temperatura es de 10 °C? ¿Podrá ser la temperatura 0 °C?

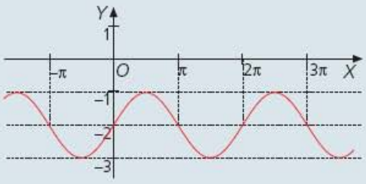
c) ¿A qué hora se alcanza la temperatura mínima? ¿Y la máxima?

24. Encuentra una solución en cada una de las siguientes ecuaciones:

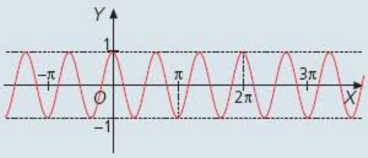
a) $\operatorname{sen} y = -\dfrac{1}{2}$ b) $x = \arccos \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\operatorname{tg} y = -1$

25. Encuentra la expresión algebraica asociada a cada una de las siguientes funciones e indica el período de las mismas y los valores máximo y mínimo que alcanzan:

a)



b)



18. La solución queda:

a) Si $x=12 \Rightarrow y=5,48$ metros es capaz de recorrer en un minuto después de 12 horas de entrenamiento.

b) Si $y=12$ metros por minuto $\Rightarrow 12=16\left(1-e^{-0,035x}\right) \Rightarrow 0,75=1-e^{-0,035x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow e^{-0,035x}=0,25 \Rightarrow x=\frac{\ln 0,25}{-0,035}=39,61 \text{ horas de entrenamiento}$$

19. En cada uno de los casos:

- Son positivas las razones trigonométricas de los apartados *a*) *b*) *c*) *f*) *i*).
- son negativas en los apartados *d*) *e*) *g*) *h*) *j*).

20. Las reducciones quedan:

a) $1215º=135º+3\cdot 360º \Rightarrow 135º$

b) $-60º=300º \Rightarrow 300º$

c) $\frac{23\pi}{6}=690º=330º+1\cdot 360º \Rightarrow 330º$

d) $18\,750º=30º+360º\cdot 52 \Rightarrow 30º$

e) $\frac{26\pi}{3}=1560º=120º+4\cdot 360º \Rightarrow 120º$

21. Queda en cada caso:

a) $\cos x \leq -\frac{1}{2}$ en $\left(-\pi,-\frac{2\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$

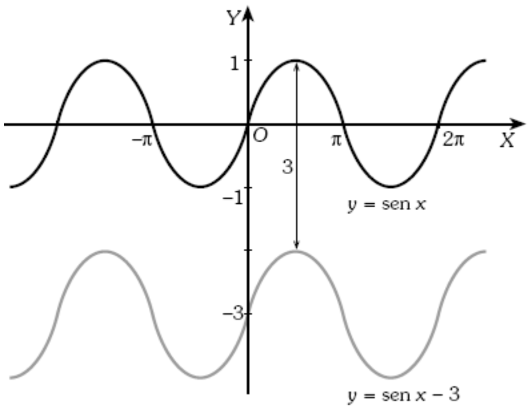
b) $\operatorname{tg} x>1$ en $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right]$

c) $2>\operatorname{sen} x$ en todo el intervalo $[-\pi,\pi]$

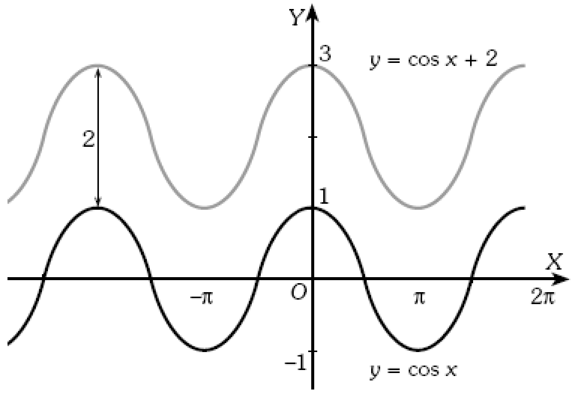
d) $\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\geq 0$ en $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$

22. En cada uno de los casos queda:

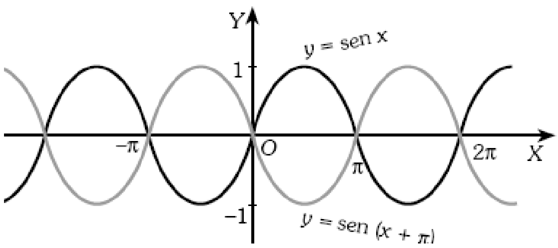
a) $y = \text{sen}x - 3$



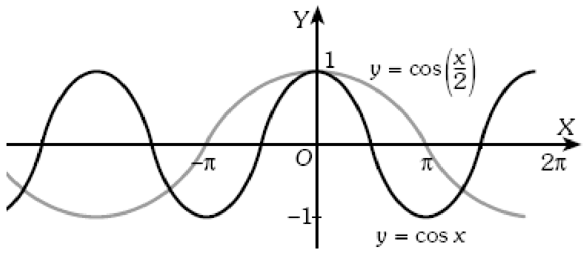
b) $y = \cos x + 2$



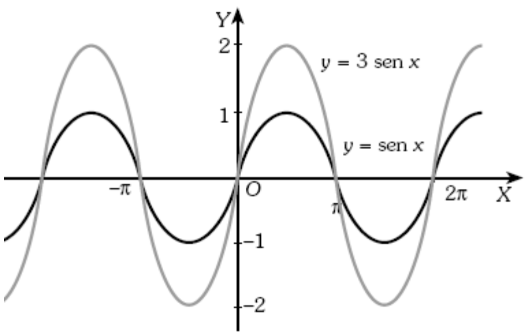
c) $y = \text{sen}(x + \pi)$



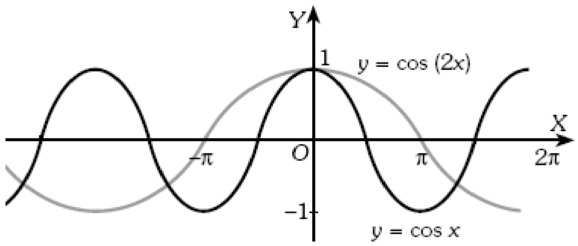
d) $y = \cos\left(x - \dfrac{x}{2}\right)$



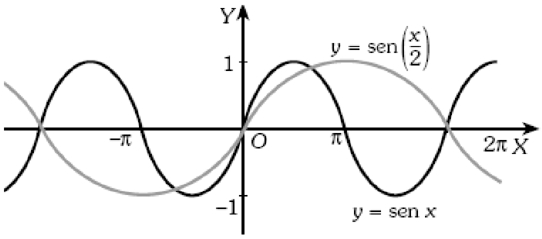
e) $y = 3\text{sen}x$



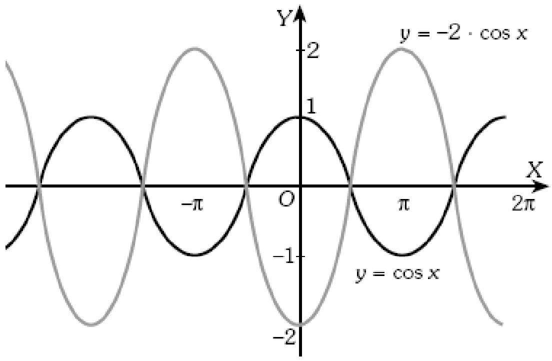
f) $y = \cos(2x)$



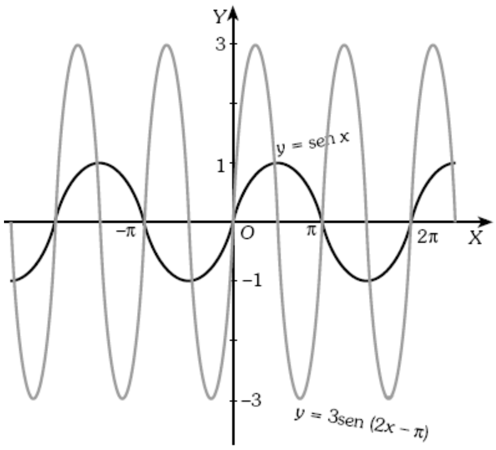
g) $y = \operatorname{sen}\dfrac{x}{2}$



h) $y = -2\cos x$



i) $y = 3\operatorname{sen}\left[2\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\right]$



23. En cada apartado queda:

a) $T(16) = 12{,}5^{o}C$; $T(8) = 12{,}5^{o}C$

b) Queda:

- $10\,^{o}C = 5 \cdot \cos\left[\left(\dfrac{12-t}{12}\right) \cdot \pi\right] + 10\,^{o}C \;\Rightarrow\; \cos\left[\left(\dfrac{12-t}{12}\right) \cdot \pi\right] = 0 \;\Rightarrow\; t = 6\,\text{horas y } t = -6\,\text{horas}$

  A las 6 horas ya a las 18 horas la temperatura fue de 10º C.

- $0\,^{o}C = 5 \cdot \cos\left[\left(\dfrac{12-t}{12}\right) \cdot \pi\right] + 10\,^{o}C \;\Rightarrow\; \cos\left[\left(\dfrac{12-t}{12}\right) \cdot \pi\right] = -2 \;\Rightarrow\; \text{Imposible}$

  Nunca podrá ser 0º C la temperatura.

c) La temperatura mínima fue de 5º C y la alcanzó a las 0 horas.
La temperatura máxima fue de 15º C y la alcanzó a las 12 horas.

24. Las soluciones quedan:

a) $\text{sen}\, y = -\dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \begin{cases} 210^{\circ} + 360^{\circ} \cdot K \\ 330^{\circ} + 360^{\circ} \cdot K \end{cases}$

b) $x = \arccos \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \begin{cases} 30^{\circ} + 360^{\circ} \cdot K \\ 330^{\circ} + 360^{\circ} \cdot K \end{cases}$

c) $\text{tg}\, y = -1 \quad \Rightarrow \quad y = \begin{cases} 135^{\circ} + 360^{\circ} \cdot K \\ 315^{\circ} + 360^{\circ} \cdot K \end{cases}$

25. Las expresiones quedan:

a) $y = \text{sen}\, x - 2$

El período es 2π

Los valores máximo lo alcanza en $\left(\dfrac{\pi}{2}, -1\right)$ y el mínimo en $\left(\dfrac{3\pi}{2}, -3\right)$.

b) $y = \cos(3x)$

El período es $\dfrac{2\pi}{3}$

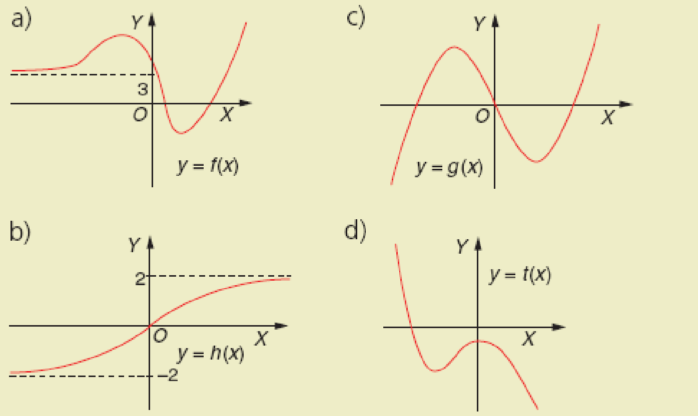
Los valores máximo lo alcanza en $\left(\dfrac{2\pi}{3}, 1\right)$ y el mínimo en $\left(\dfrac{\pi}{3}, -1\right)$.

Unidad 10 – Límites de funciones. Continuidad.

PÁGINA 201

cuestiones iniciales

1. Comenta la tendencia de las siguientes funciones:



SOLUCIONES

1. Podemos decir lo siguiente:

- $f(x)$ tiende a (3) cuando x tiende a $(-\infty)$ y tiende a $(+\infty)$ cuando x tiende a $(+\infty)$.
- $g(x)$ tiende a $(-\infty)$ cuando x tiende a $(-\infty)$ y tiende a $(+\infty)$ cuando x tiende a $(+\infty)$.
- $h(x)$ tiende a (-2) cuando x tiende a $(-\infty)$ y tiende a (2) cuando x tiende a $(+\infty)$.
- $t(x)$ tiende a $(+\infty)$ cuando x tiende a $(-\infty)$ y tiende a $(-\infty)$ cuando x tiende a $(+\infty)$.

PÁGINA 219

ACTIVIDADES

■ Aplica esta estrategia de ensayo y error en la resolución de los siguientes problemas:

1. **Fichas de colores.** Tenemos 16 fichas, de las cuales 4 son rojas, 4 verdes, 4 azules y 4 amarillas. De cada uno de los colores tenemos una ficha cuadrada, una circular, una triangular y otra pentagonal. Coloca estas fichas en una cuadrícula o tablero de 4 × 4, de manera que, en cada fila, columna o diagonal, haya una ficha de cada color y de cada forma.

2. ***Amanitas muscarias.*** Juan fue con su padre a ver una exposición micológica. Les llamó la atención el colorido de la *Amanita muscaria*. Al día siguiente, su amigo le preguntó por el número total de ejemplares que habían visto de esta variedad en la exposición, a lo que Juan respondió: «Había 8/9 de las Amanita muscaria más 8/9 de *Amanita muscaria*.» ¿Cuántos ejemplares de *amanita* había en la exposición?

3. **Latas de zumo.** Hay un cierto número de latas de zumo en la nevera. Invitas a dos amigos a tu casa a merendar. El primero se bebe la mitad de las latas que hay en la nevera más media lata; el segundo, la mitad de las que quedan más media lata; y tú te bebes la mitad de las que quedan más media lata. Después de esto, no queda ninguna lata de zumo. ¿Cuántas latas había inicialmente?

4. **Múltiplo de doce.** Si multiplicamos el cuadrado de un número natural por el número natural anterior a ese cuadrado, ¿el resultado es múltiplo de 12?

SOLUCIONES

1. Designamos los colores por: rojo (*R*), verde (*V*), azul (*Z*) y amarillo (*A*); y las tres formas por: cuadrada (*C*), circular (*O*), triangular (*T*) y pentagonal (*P*).

   Por ensayo y error las colocamos en un tablero 4 x 4, cumpliendo las condiciones que marca el enunciado.

   Una solución es:

RC	*VO*	*ZT*	*AP*
ZP	*AT*	*RO*	*VC*
AO	*ZC*	*VP*	*RT*
VT	*RP*	*AC*	*ZO*

   Podemos encontrar hasta 72 soluciones distintas.

2. El número total de amanitas ha de ser múltiplo de 9 menos 1, es decir, 8 amanitas. Haciendo el problema mediante ecuaciones:

$$\frac{8}{9}x + \frac{8}{9} = x \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 8 \text{ amanitas}}$$

3. El enunciado del problema nos muestra que el número de latas de zumo debe ser un número impar. Por ensayo y error dirigido obtenemos:

   Hay 7 latas de zumo.

   El 1.er amigo se bebe $\frac{7}{2}+0,5=4$ latas. Quedan 3 latas.

   El 2.o amigo se bebe $\frac{3}{2}+0,5=2$ latas. Queda 1 lata.

   El dueño de la casa se bebe $\frac{1}{2}+0,5=1$ lata.

   Luego, efectivamente, había inicialmente 7 latas de zumo.

   Este problema se puede resolver también por medio de ecuaciones.

4. Sea n un número real.

   Veamos si $n^2\cdot\left(n^2-1\right)=\dot{12}$

   $n^2\cdot\left(n^2-1\right)=n\cdot n\left(n-1\right)\cdot\left(n+1\right)$

   $n\left(n-1\right)\cdot\left(n+1\right)=\dot{3}$, pues es producto de tres números consecutivos.

   Si $n=\dot{3} \;\Rightarrow\; n-1=\dot{2}$ y $n+1=\dot{2}$, luego $\left(n-1\right)\cdot n\cdot\left(n+1\right)=\dot{3}\cdot\dot{2}\cdot\dot{2}=\dot{12}$,

   Si $n-1=\dot{3} \;\Rightarrow\; n=\dot{2}$, por lo que $n\left(n-1\right)\cdot n\cdot\left(n+1\right)=\dot{2}\cdot\dot{3}\cdot\dot{2}=\dot{12}$,

   Si $n+1=\dot{3} \;\Rightarrow\; n=\dot{2}$, por lo que $n\left(n-1\right)\cdot n\cdot\left(n+1\right)=\dot{2}\cdot\dot{2}\cdot\dot{3}=\dot{12}$,

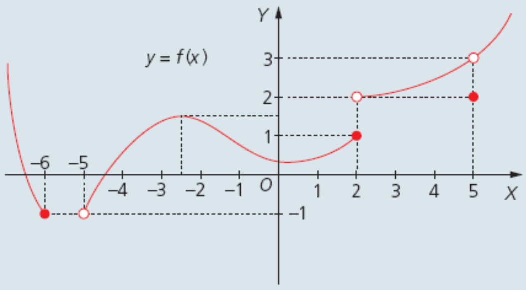
   En cualquier caso, efectivamente, $n^2\cdot\left(n^2-1\right)=\dot{12}$.

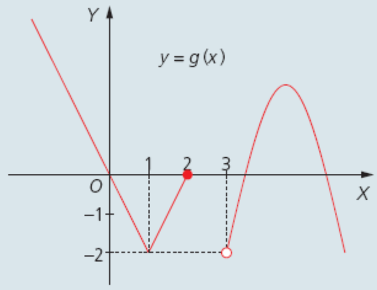
PÁGINA 222

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. En las siguientes funciones, cuyas gráficas se dan, calcula los valores pedidos:





a) $f(2)$

b) $\lim\limits_{x \to -5^-} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$

e) $f(5)$

f) $\lim\limits_{x \to -5^+} f(x)$

g) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

h) $\lim\limits_{x \to -2,5^+} f(x)$

i) $f(-5)$

j) $f(-6)$

k) $\lim\limits_{x \to -6^-} f(x)$

l) $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$

m) $\lim\limits_{x \to -2,5} f(x)$

n) $g(1)$

o) $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$

p) $\lim\limits_{x \to 3^+} g(x)$

q) $g(2)$

r) $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x)$

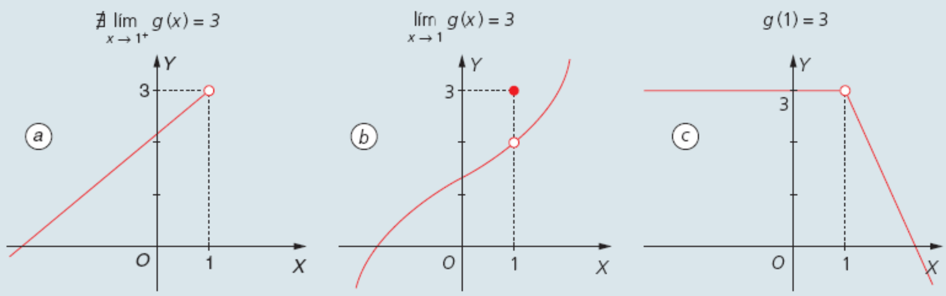
s) $\lim\limits_{x \to 3^-} g(x)$

t) $g(2,5)$

u) $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x)$

v) $\lim\limits_{x \to 3} g(x)$

2. Identifica cada una de las tres expresiones siguientes con su gráfica correspondiente:



3. Representa gráficamente funciones que satisfagan las siguientes condiciones:

a) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -2$; $f(2) = 5$; Dom $f = R$; Im $f = (-2, +\infty)$

b) $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 4$; $g(x)$ estrictamente creciente en $(-\infty, 1)$; Im $g = (-\infty, 4]$

c) $\lim\limits_{x \to 2^-} h(x) = 3$; $\lim\limits_{x \to 2^+} h(x) = 5$; $h(2) = 3$; Dom $h = [0, 3]$

d) $\lim\limits_{x \to -1} t(x) = \lim\limits_{x \to 0} t(x) = \lim\limits_{x \to 1} t(x)$

e) $l(x) > 0 \quad \forall x > 2$; $l(x) \le 0 \quad \forall x < 2$; $\nexists \lim\limits_{x \to 2} l(x)$

f) Dom $n = \mathbb{R} - (2, 3]$; Im $n = \mathbb{R}$; $\lim\limits_{x \to 2^-} n(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 3^+} n(x) = -2$; $n(0) = 0$

SOLUCIONES

1. Las soluciones quedan:

a) $f(2)=1$;

b) $\lim_{x \to -5^-} f(x)$ no existe

c) $\lim_{x \to 2^+} f(x)=2$

d) $\lim_{x \to 5^+} f(x)=3$

e) $f(5)=2$

f) $\lim_{x \to -5^+} f(x)=-1$

g) $\lim_{x \to 2^-} f(x)=1$

h) $\lim_{x \to -2,5^+} f(x)=1,5$

i) $f(-5)$ no definida

• $f(-6)=-1$

j) $\lim_{x \to -6^-} f(x)=-1$

k) $\lim_{x \to 5^-} f(x)=3$

l) $\lim_{x \to -2,5} f(x)=1,5$

m) $g(1)=-2$

n) $\lim_{x \to 1} g(x)=-2$

o) $\lim_{x \to 3^+} g(x)=-2$

p) $g(2)=0$

q) $\lim_{x \to 2^-} g(x)=0$

r) $\lim_{x \to 3^-} g(x)$ no existe

s) $g(2,5)$ no existe

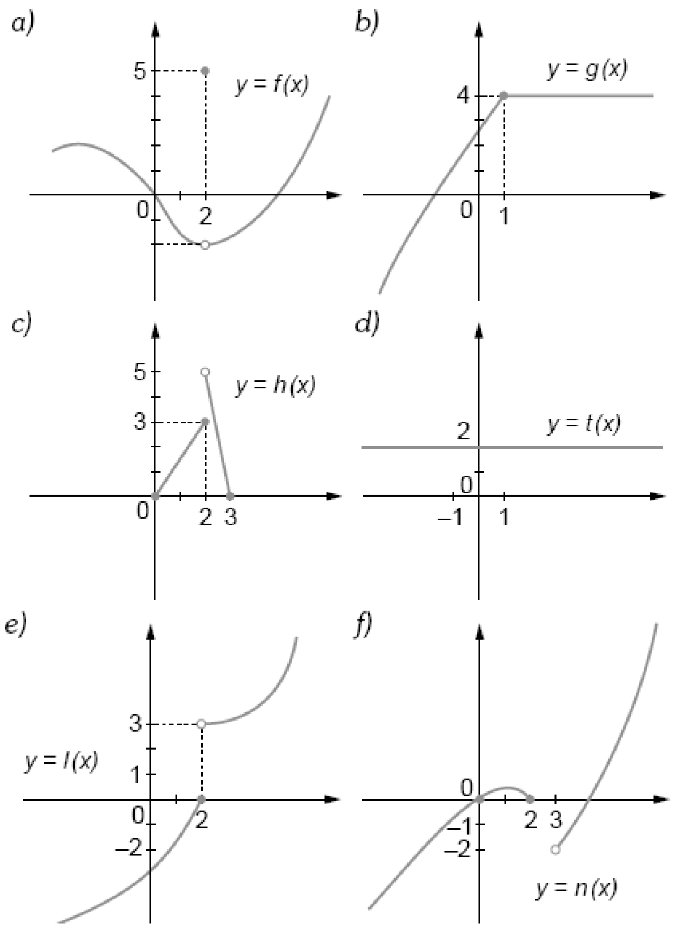
t) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$ no existe

u) $\lim_{x \to 3} g(x)$ no existe

2. Las correspondencias quedan:

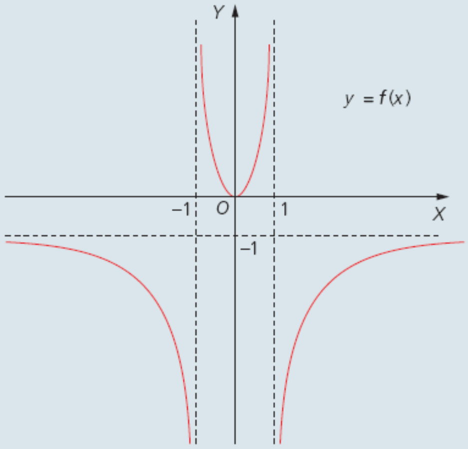
a) $\nexists \lim_{x \to 1^+} g(x) = 3$ b) $g(1) = 3$ c) $\lim_{x \to 1} g(x) = 3$

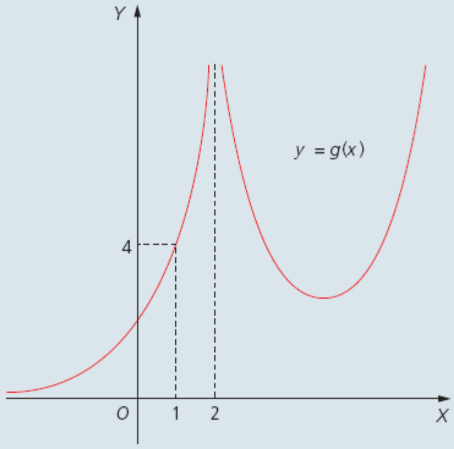
3. Las gráficas quedan:



PÁGINA 223

■ 4. En las siguientes funciones, cuyas gráficas se dan, calcula los valores pedidos:





a) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

d) Ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales, si es que existen.

e) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$

f) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

h) $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x)$

i) $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

k) Ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales, si es que existen.

l) $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x)$

m) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$

n) $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$

■ 5. Representa gráficamente funciones que satisfagan las siguientes condiciones:

a) Asíntota vertical en $x = -2$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

b) $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 3^+} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 3^-} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

c) $h(-4) = 2$; $\lim\limits_{x \to -2^-} h(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} h(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^-} h(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to 2^+} h(x) = -1$

d) $t(0) = 1$; $\lim\limits_{x \to 0^+} t(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2} t(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to 3^-} t(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} t(x) = +\infty$

■ 6. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to 0} 2$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-5}$

c) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{1}{x^2}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^5$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-7)$

f) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^{10}}$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^{10}}$

h) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^{13}}$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^{13}}$

j) $\lim\limits_{x \to -1} x^6$

k) $\lim\limits_{x \to 0^-} x^3$

l) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^6}$

m) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^7}$

n) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^7}$

o) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^6$

p) $\lim\limits_{x \to 1} x$

4. Las respuestas quedan:

a) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$

d) Asíntota horizontal: $y = -1$.
Asíntotas verticales: $x = -1$; $x = 1$.

e) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

f) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

h) $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = +\infty$

i) $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = +\infty$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

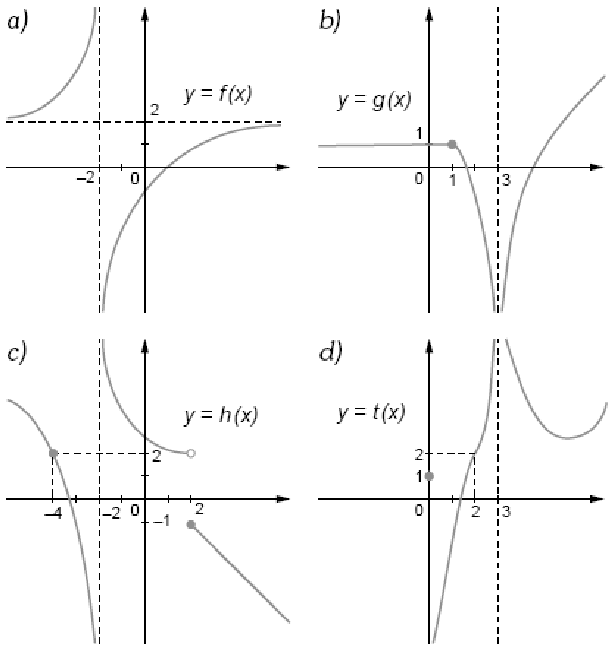
k) Asíntota horizontal: $y = 0$.
Asíntota vertical: $x = 2$.

l) $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = +\infty$

m) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$

n) $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 4$

5. Las representaciones quedan:



6. Los resultados son:

a) $\lim\limits_{x \to 0} 2 = 2$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-5} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{9}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^5 = -\infty$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-7) = -7$

f) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^{10}} = +\infty$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-1}{x^{10}} = 0$

h) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^{13}} = -\infty$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^{13}} = 0$

j) $\lim\limits_{x \to -1} x^6 = +1$

k) $\lim\limits_{x \to 0^-} x^3 = 0$

l) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^6} = +\infty$

m) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^7} = +\infty$

n) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^7} = -\infty$

o) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^6 = +\infty$

p) $\lim\limits_{x \to 1} x = 1$

ACTIVIDADES FINALES

7. Dada la función f, calcula:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si} & x < -1 \\ -3 & \text{si} & -1 \le x < 2 \\ x+1 & \text{si} & x \ge 2 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Comprueba los resultados obtenidos por medio de la gráfica.

8. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} [2x^3 - 7x + 2]$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{3x^2 - 5x + 2}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} [4x^4 - 7x + 5]$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} [-3x^5 + 2x - 4]$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^2 - 5x + 1}{2x^3 - 3}$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2 - 7x + 5}{-2x^2 + 4x - 3}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+7}}{2x}$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^4 - 7x}{4x^2 + 5}$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6x+2}{\sqrt{x^2+2}+x}$

9. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3-1}{x^3+2x^2-3x}$

b) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2+x}{x^3-2x^2+x}$

c) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^2-9}{5x^2-13x-6}$

d) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^4-1}{x^3+1}$

e) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{2x-6}$

f) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}$

g) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{2x}$

h) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$

i) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x+2}-2}$

10. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x^2+1}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{2+x}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} [\sqrt{x^2+3} - x]$

d) $\lim\limits_{x\to0} \left[\dfrac{2}{x^3} \cdot \dfrac{x^2+2x}{3}\right]$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} [\sqrt{9x^2+4x} - \sqrt{9x^2-2}]$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{x^2}{x+2} - \dfrac{x^3-1}{x^2+2}\right]$

11. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{5x-2}{5x+3}\right]^{3x}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{2x^2-6x}{2x^2-x-5}\right]^{\frac{x^2}{2}}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{4-3x}{5-3x}\right]^{x-3}$

12. Halla las asíntotas, si las tienen, de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$

b) $g(x) = \dfrac{3x}{x^2-4}$

c) $h(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$

d) $k(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$

e) $m(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-1}$

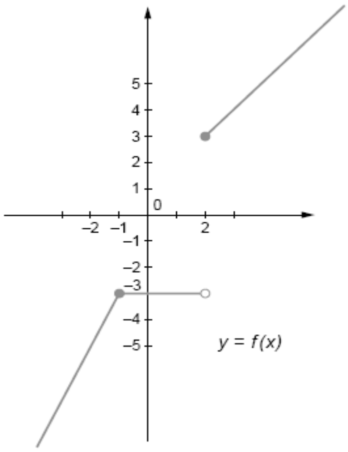
f) $r(x) = \dfrac{x^2-4}{x}$

7. Los límites y la gráfica quedan:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(2x-1)=-3\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(-3)=-3\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} f(x)=-3$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(-3)=-3\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x+1)=3\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)\text{ no existe}$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=-\infty;\qquad \lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$$



8. Los límites quedan:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}[2x^3-7x+2]=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2}{3x^2-5x+2}=0$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}[4x^4-7x+5]=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}[-3x^5+2x-4]=+\infty$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-x^2-5x+1]}{2x^3-3}=0$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2-7x+5}{-2x^2+4x-3}=-1$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+7}}{2x}=\dfrac{1}{2}$

h) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^4-7x}{4x^2+5}=+\infty$

i) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{6x+2}{\sqrt{x^2+2}+x}=3$

9. Los límites quedan:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^3+2x^2-3x}\boxed{\frac{0}{0}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-1)(x+3)}=\dfrac{3}{4}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{x^3-2x^2+x}\boxed{\frac{0}{0}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+1)}{x(x^2-2x+1)}=1$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{5x^2-13x-6}\boxed{\frac{0}{0}}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(5x+2)}=\dfrac{6}{17}$

d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-1}{x^3+1}\boxed{\frac{0}{0}}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x-1)(x^2+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\dfrac{-4}{3}$

e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{2x-6} \boxed{\frac{0}{0}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{3})(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{(\sqrt{x}+\sqrt{3})(2x-6)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-3}{(\sqrt{x}+\sqrt{3})(x-3)2} = \dfrac{1}{4\sqrt{3}}$

f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4} \boxed{\frac{0}{0}} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^2} = \pm\infty$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{2x} \boxed{\frac{0}{0}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)}{2x(\sqrt{1-x}+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-x-1}{2x(\sqrt{1-x}+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1}{2(\sqrt{1-x}+1)} = \dfrac{-1}{4}$

h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} \boxed{\frac{0}{0}} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x^2-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x^2-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} \boxed{\frac{0}{0}} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = 4$

i) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x+2}-2} \boxed{\frac{0}{0}} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x^2-2x)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2} = 8$

10. Los límites quedan:

a) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2+1}{x-1} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2+x}{x^2} = +\infty;\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2+x}{x^2} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2+x}{x^2} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\sqrt{x^2+3}-x\right] \boxed{\infty-\infty} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(\sqrt{x^2+3}-x)(\sqrt{x^2+3}+x)}{\sqrt{x^2+3}+x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3}{\sqrt{x^2+3}+x} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{2}{x^3}\cdot\dfrac{x^2+2x}{3}\right] \boxed{\infty\cdot 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(x^2+2x)}{3x^3} \boxed{\frac{0}{0}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cdot x(x+2)}{3x^3} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\sqrt{9x^2+4x}-\sqrt{9x^2-2}\right] \boxed{\infty-\infty} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(\sqrt{9x^2+4x}+\sqrt{9x^2-2})(\sqrt{9x^2+4x}-\sqrt{9x^2-2})}{\sqrt{9x^2+4x}+\sqrt{9x^2-2}} =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4x+2}{\sqrt{9x^2+4x}+\sqrt{9x^2-2}} = \dfrac{2}{3}$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\dfrac{x^2}{x+2}-\dfrac{x^3-1}{x^2+2}\right] \boxed{\infty-\infty} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2(x^2+2)-(x+2)(x^3-1)}{x^3+2x^2+2x+4} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-2x^3+2x^2+x+2}{x^3+2x^2+2x+4} = -2$

11. Los límites quedan:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{5x-2}{5x+3}\right]^{3x} \boxed{1^{\infty}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} 3x\left(\frac{5x-2}{5x+3}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-15x}{5x+3}} = e^{-3}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{2x^2-6x}{2x^2-x-5}\right]^{\frac{x^2}{2}} \boxed{1^{\infty}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2}\left(\frac{2x^2-6x}{2x^2-x-5}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-5x^3+5x^2}{4x^2-2x-10}} = e^{-\infty} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{4-3x}{5-3x}\right]^{x-3} \boxed{1^{\infty}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} (x-3)\left(\frac{4-3x}{5-3x}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-x+3}{5-3x}} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$

12. Las asíntotas quedan:

a) Asíntota vertical: $x = 1$
Asíntota horizontal: $y = 2$

b) Asíntotas verticales: $x = 2;\ x = -2$
Asíntota horizontal: $y = 0$

c) Asíntota vertical: $x = 3$
Asíntota oblicua: $y = x + 3$

d) Asíntota horizontal: $y = 0$

e) Asíntota verticales: $x = 1;\ x = -1$
Asíntota horizontal: $y = 1$

f) Asíntota vertical: $x = 0$
Asíntota oblicua: $y = x$

PÁGINA 225

13. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x \to 2^-} \frac{3}{x-2}$

b) $\lim_{x \to +\infty} [\sqrt{4x^2 - 6x + 3} - 2x]$

c) $\lim_{x \to 0^-} 3^{\frac{1}{x}}$

d) $\lim_{x \to 1} \frac{2x^3 + 4x^2 - 2x - 4}{2x^2 + x - 3}$

e) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x^2 - x}$

f) $\lim_{x \to 0} [1 + 3x]^{\frac{2}{x}}$

14. Un estudio biológico establece que el número de animales de una determinada población de una especie protegida vendrá dado, durante los próximos años, por la función:

$$F(t) = \frac{15\,000\, t + 10\,000}{2t + 2} \quad (t \text{ son años transcurridos})$$

Halla:

a) El tamaño actual de la población.

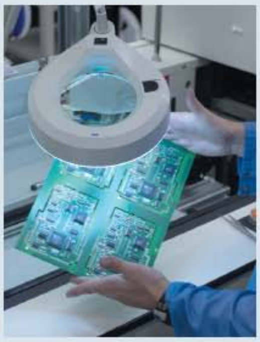
b) Si esta función fuese válida indefinidamente, ¿se estabilizaría el tamaño de la población? Si es así, ¿en qué número de individuos?

15. La siguiente función muestra los beneficios en miles de euros de un banco en función del tiempo x desde que abrió sus puertas.

$$f(x) = \frac{60\,x + 810}{x^2 + 9} \quad (x \text{ en años})$$

¿Qué pasa con los beneficios cuando el tiempo se hace infinitamente grande?

16. El número de montajes $M(t)$ por día de un determinado artículo que un trabajador realiza en función del número de días, t, de entrenamiento viene dado por:



$$M(t) = \frac{600\,t + 120}{t + 3}$$

a) Halla el número de montajes que realiza al empezar a trabajar con ese artículo.

b) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{t \to -3^+} \frac{600\,t + 120}{t + 3} \qquad \lim_{t \to +\infty} \frac{600\,t + 120}{t + 3}$$

c) ¿Cuántos días debe entrenar para conseguir hacer 500 montajes? ¿Cuál es el máximo número de montajes que puede hacer estando muy entrenado?

17. La función $C(x) = \frac{3x + 60}{x}$ indica el coste, en euros, de producción de cada pieza de un determinado producto en función del número, x, de piezas producidas. Encuentra las asíntotas de esta función y las tendencias con sentido en el contexto del problema.

18. La puntuación obtenida por un estudiante en un test dependiendo del tiempo (x en horas) que ha dedicado al estudio viene dada por:

$$P(x) = \begin{cases} \frac{2x}{5} & \text{si} \quad 0 \le x \le 20 \\ \frac{3x}{0{,}5x - 2{,}5} & \text{si} \quad x > 20 \end{cases}$$

Razona que la puntuación obtenida no puede ser superior a 8.

13. Los límites quedan:

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3}{x-2} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\sqrt{4x^2-6x+3}-2x\right] \boxed{\infty-\infty} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-6x+3}{\sqrt{4x^2-6x+3}+2x} = -\dfrac{3}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0^-} 3^{1/x} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^3+4x^2-2x-4}{2x^2+x-3} \boxed{\frac{0}{0}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(2x^2+6x+4)(x-1)}{(2x+3)(x-1)} = \dfrac{12}{5}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2-x} \boxed{\frac{0}{0}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)(x-1)} = -\dfrac{1}{4}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} [1+3x]^{\frac{2}{x}} \boxed{1^\infty} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{x}(1+3x-1)} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{6x}{x}} = e^6$

14. Queda:

a) $F(0)=5\,000$ animales hay en la actualidad $(t=0)$.

b) La población tiende a estabilizarse a 7 500 animales, puesto que:

$$\lim_{t\to +\infty} \frac{15\,000\,t+10\,000}{2t+2} = 7\,500$$

15. Queda la expresión:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{60x+810}{x^2+9} = 0$$

Los beneficios se anulan cuando el tiempo crece indefinidamente.

16. Queda:

a) $M(0)=40$ montajes

b) $\lim\limits_{t\to -3^-} \dfrac{600\,t+120}{t+3} = -\infty$; $\lim\limits_{t\to +\infty} \dfrac{600\,t+120}{t+3} = 600$

c) $\dfrac{600\,t+120}{t+3} = 500 \;\Rightarrow\; t = 13{,}8$ días. El máximo número de montajes que puede hacer es 600.

17. Las asíntotas son: $x=0$ y $C(x)=3$.

Las tendencias son:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3x+60}{x} = +\infty \ ; \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{3x+60}{x} = 3$$

18. La función $y=\dfrac{2x}{5}$ es creciente en todo su dominio y el valor máximo lo alcanza en $x=20$ y vale 8. La función $f(x)=\dfrac{3x}{0,5x-2,5}$ es decreciente en su dominio (para $x>20$) y el valor máximo lo alcanza en $x=20$ y vale 8. Por tanto la máxima puntuación es 8 puntos.

ACTIVIDADES FINALES

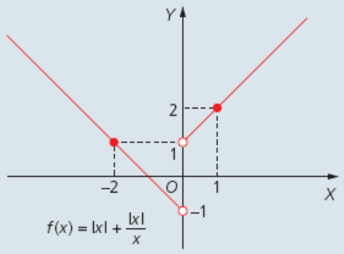
19. Dada la función f, calcula:

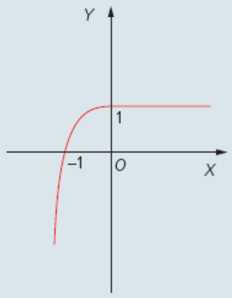
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 3 - 3x & \text{si} \quad 0 \le x < 3 \\ -2x & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$$

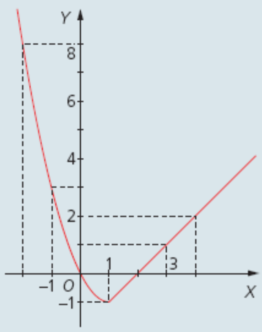
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$; $f(0)$; $f(1)$ y $f(3)$.

A la vista de los resultados obtenidos, estudia la continuidad de esta función.

20. En las siguientes funciones, calcula $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ y $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$. Estudia su continuidad en las respectivas tendencias de x.







$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x > 0 \\ -x - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \le 1 \\ x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

21. Obtén las gráficas de las funciones siguientes y calcula los límites indicados:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \le 0 \\ -2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 0-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b) $g(x) = \dfrac{x + 4}{x - 2}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x \to 2-} g(x)$; $\lim\limits_{x \to 2+} g(x)$

c) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2 - x} & \text{si } x \le 1 \\ 2 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$; $\lim\limits_{x \to 1-} h(x)$; $\lim\limits_{x \to 1+} h(x)$

Estudia la continuidad de estas funciones en los puntos que se indican:

$f(x)$ en $x = 0$; $g(x)$ en $x = 2$; $h(x)$ en $x = 1$.

22. Estudia la continuidad de las siguientes funciones definidas a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si} \quad x < 2 \\ x - 2 & \text{si} \quad 2 \le x \le 4 \\ 5 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{x - 5} & \text{si} \quad x \le 0 \\ \sqrt{x + 1} & \text{si} \quad 0 < x \le 3 \\ \dfrac{10}{x + 2} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

19. Se calcula del siguiente modo:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(x^2+1\right) = 1$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(3-3x\right) = 3$$
$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \left(3-3x\right) = 0$$
$$\lim_{x\to 3} f(x) \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -6 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -6 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 3} f(x) = -6$$

$f(0)=3$; $f(1)=0$; $f(3)=-6$

La función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$

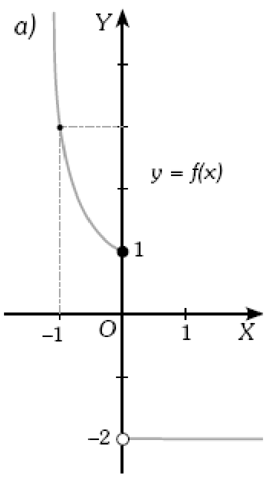
20. El estudio en cada caso queda:

a) $f(x)$ no es continua en $x=0$ pues no está definida en ese punto. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe.

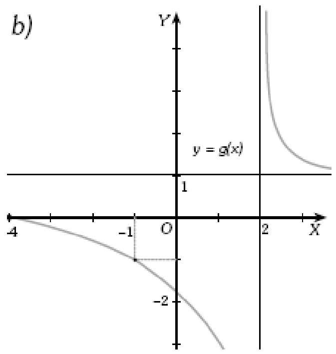
b) $g(x)$ es continua en toda la recta real. $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$.

c) $h(x)$ es continua en toda la recta real. $\lim\limits_{x\to 1} h(x)=-1$.

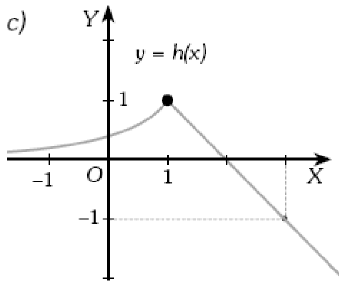
21. En cada caso queda:



- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -2$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -2$
- $f(x)$ es discontinua no evitable en $x=0$



- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 1$
- $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = +\infty$
- $g(x)$ es discontinua no evitable en $x = 2$



- $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = 1$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = 1$
- $h(x)$ es continua en $x = 1$

22. En cada caso queda:

a) Veamos la continuidad de $f(x)$ en $x=2$ y $x=4$.

$f(2)=0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \left(x^2-4\right)=0 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \left(x-2\right)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} f(x)=0=f(2)=0 \Rightarrow \text{Luego } f(x) \text{ es continua en } x=2.$$

$f(4)=2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} \left(x-2\right)=2 \\ \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} 5=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to 4} f(x) \Rightarrow \text{Luego } f(x) \text{ no es continua en } x=4.$$

b) Veamos la continuidad de $g(x)$ en $x=0$ y $x=3$.

$g(0)=-1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{5}{x-5}=-1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x+1}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to 0} g(x) \Rightarrow \text{Luego } g(x) \text{ no es continua en } x=0.$$

$g(3)=2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \sqrt{x+1}=2 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{10}{x+2}=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 3} g(x)=g(3)=2 \Rightarrow \text{Luego } g(x) \text{ es continua en } x=3.$$

Unidad 11 – Introducción a las derivadas y sus aplicaciones

PÁGINA 229

cuestiones iniciales

1. Calcula los siguientes límites:

a) $f(x) = 3x + 5;\ \lim_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$

b) $g(x) = 4x^2;\ \lim_{h \to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$

2. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2, -3)$ y cuya pendiente vale $-1/5$.

3. ¿En qué dos partes debe dividirse el número 12 para que su producto alcance el máximo valor posible? Ayúdate de una tabla de valores y de la correspondiente representación gráfica.

4. Calcula la tasa de variación media en los intervalos $[0, 2]$ y $[2, 4]$ para cada una de las siguientes funciones:

a) $f_1(x) = 2x$ b) $f_2(x) = 2x + 2$ c) $f_3(x) = x^2$ d) $f_4(x) = 2^x$

SOLUCIONES

1. Los límites quedan:

a) $$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(2+h)+5-11}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h}{h} = 3$$

b) $$\lim_{h\to 0} \frac{g(2+h)-g(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4(x+h)^2-4x^2}{h} = 8x$$

2. Las rectas de pendiente $-\dfrac{1}{5}$ son de la forma: $y = -\dfrac{1}{5}x + b$

La que pase por $(2, -3)$ es: $y = -\dfrac{1}{5}x - \dfrac{13}{5}$

3. Los números son x y $12 - x$.

$y = (12 - x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = -x^2 + 12x$

Es una función cuadrática y el máximo lo alcanza en su vértice, es decir, para $x = 6$.

Los números buscados son 6 y 6.

4. En cada uno de los intervalos queda:

a) $t_{vm}[0,2]=\frac{f_1(2)-f_1(0)}{2-0}=2 \qquad t_{vm}[2,4]=\frac{f_1(4)-f_1(2)}{4-2}=2$

b) $t_{vm}[0,2]=\frac{f_2(2)-f_2(0)}{2-0}=3 \qquad t_{vm}[2,4]=\frac{f_2(4)-f_2(2)}{4-2}=2$

c) $t_{vm}[0,2]=\frac{f_3(2)-f_3(0)}{2-0}=2 \qquad t_{vm}[2,4]=\frac{f_3(4)-f_3(2)}{4-2}=6$

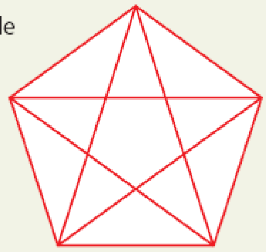
d) $t_{vm}[0,2]=\frac{f_4(2)-f_4(0)}{2-0}=\frac{3}{2} \qquad t_{vm}[2,4]=\frac{f_4(4)-f_4(2)}{4-2}=6$

PÁGINA 249

A C T I V I D A D E S

■ Para que cojas soltura en esta técnica de organización, resuelve los siguientes problemas.

1. **Fonoteca.** La empleada de la fonoteca no ha parado de trabajar en toda la semana. El lunes recibió varios discos y marcó algunos de ellos. El martes recibió tantos discos nuevos como no había marcado el lunes, y marcó 12. El miércoles recibió 14 más que el lunes, y marcó doble número que el lunes. El jueves recibió el doble de los discos que había marcado el miércoles, y marcó 10. El viernes recibió 4 discos y marcó 14 menos de los que había recibido el miércoles. El sábado marcó los 20 discos que le quedaban. ¿Cuántos discos recibió el lunes?
2. **Camión y tractor.** Un camión tarda en adelantar a un tractor, una vez que lo alcanza, el doble de lo que tardan ambos en cruzarse cuando circulan en direcciones opuestas. ¿Qué relación existe entre las velocidades de ambos?
3. **Relojes de arena.** Disponemos de dos relojes de arena: el uno mide cuatro minutos y el otro nueve minutos. Se trata de conseguir medir intervalos de uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve y diez minutos. Describe, razonadamente, los procedimientos a utilizar.
4. **Triángulos.** La figura adjunta muestra la estrella pitagórica inscrita en un pentágono regular. ¿Cuántos triángulos pueden verse en esta figura?



SOLUCIONES

1. Vamos a organizar los datos en una tabla:

	Recibe	Marca
Lunes	X	M
Martes	X − M	12
Miércoles	X + 14	2M
Jueves	4M	10
Viernes	4	X + 14 − 14
Sábado		20

Los discos que recibe menos los que marca son los 20 discos que le quedaron para el sábado:

$$X + X - M + X + 14 + 4M + 4 -$$
$$(M + 12 + 2M + 10 + X) = 20 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3X + 3M + 18 - 3M - X - 22 = 20$$

$2X = 24 \Rightarrow \boxed{X = 12}$ discos recibió el lunes.

2. Sea v la velocidad del camión y w la velocidad del tractor.

La expresión queda: $v + w = 2(v - w) \Rightarrow \boxed{v = 3w}$

Es decir, la velocidad del camión es el triple que la velocidad del tractor.

3. Llamamos R_4 al reloj que mide 4 minutos y R_9 al que mide 9 minutos.

- *Para medir 1 minuto*: ponemos ambos relojes. Cuando pasan 4 minutos, damos la vuelta a R_4 y al pasar otros 4 minutos, lo que queda de R_9 es 1 minuto.

- *Para medir 2 minutos*: conseguimos 1 minuto por el procedimiento anterior. A la vez que logramos 1 minuto, el reloj R_4 lo ponemos y quedan en él 3 minutos. En este momento ponemos a funcionar R_9 y al terminar, quedan en éste 6 minutos; ponemos a funcionar R_4 y al terminar éste último, quedan en el anterior 2 minutos.

- *Para medir 3 minutos*: está explicado en el procedimiento anterior.

- *Para medir 4 minutos*: con el reloj R_4.

- *Para medir 5 minutos*: ponemos R_4 y R_9; al terminar R_4, quedan en R_9 5 minutos.

- *Para medir 6 minutos*: esta situación se explica en el procedimiento para medir 2 minutos.

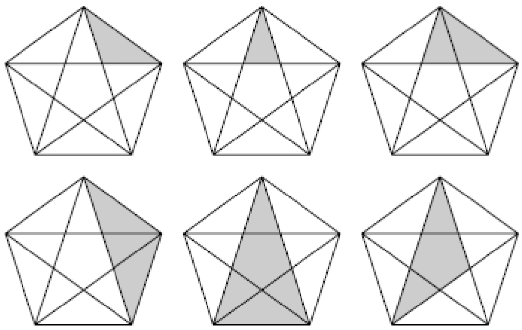
- *Para medir 7 minutos*: conseguimos 2 minutos por el procedimiento dado anteriormente. Los 2 minutos los tenemos en R_9. Ponemos a funcionar R_4 y al pasar 2 minutos en R_9 quedan otros 2 minutos en R_4. Ponemos a funcionar R_9 y, al pasar los dos minutos de R_4 quedarán 7 minutos en R_9.

- *Para medir 8 minutos*: ponemos dos veces R_4.

- *Para medir 9 minutos*: ponemos a funcionar R_9.

- *Para medir 10 minutos*: conseguimos que queden 6 minutos en R_9 por los procedimientos ya vistos anteriormente y, cuando pasan esos 6 minutos, ponemos a funcionar R_4 obteniendo así los 10 minutos.

4. en esta figura podemos encontrar los siguientes tipos de triángulos:



En cada figura podemos encontrar 5 triángulos iguales al rayado en la misma; por tanto, en total hay $5 x 6 = 30$ triángulos.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Completa en tu cuaderno la tabla que sigue con la determinación de las tasas de variación media correspondientes.

t_{vm}	$f_1(x) = 3x$	$f_2(x) = 3x - 2$	$f_3(x) = 3x + 2$	$f_4(x) = x^2$	$f_5(x) = x^3$	$f_6(x) = 3^x$
[–2, 0]						
[–1, 1]						
[0, 2]						
[1, 2]						
[a, a+1]						

2. Un depósito de agua tiene forma cilíndrica con unas medidas de 1 m de radio y 3 m de altura.

   a) Realiza la gráfica de la función que proporciona el volumen de agua en función de la altura del líquido.

   b) Calcula la tasa de aumento medio del volumen en litros por centímetro de altura de agua cuando el nivel sube de 0,5 a 1 m; de 1,5 a 2 m y de 2 a 2,5 m.

   c) ¿Cuánto vale la tasa de aumento medio entre dos niveles de agua?

3. Un país desea enviar un satélite artificial al espacio. El cohete que lo transportará llevará una ecuación de movimiento $e = 3t^2 + 8t$, donde e es el espacio recorrido en km, desde la superficie terrestre y t el tiempo en minutos, desde que la lanzadera espacial pone en movimiento al cohete. Calcula la velocidad media del cohete en los intervalos [0, 3]; [2, 5]; [1, 8]; [8, 12]. Al alejarse de la Tierra el cohete, ¿cómo varía su velocidad?, ¿aumenta o disminuye?

4. La función $C = 10 \cdot 0{,}92^t$ nos da la cantidad del fármaco Valium presente en la sangre, en mg, en función del tiempo, en horas, desde que este fármaco llega a la sangre.

   a) ¿Cuál es la dosis inicial administrada?

   b) ¿Cuál es la variación media de la cantidad del fármaco en sangre entre la primera y segunda hora? ¿Cuál es el significado del resultado obtenido?

   c) ¿Cuál es la variación instantánea al cabo de hora y media? ¿Y cuál es su significado?

5. Calcula, usando la definición de derivada de una función en un punto, las derivadas siguientes en los puntos donde se indica:

   a) $f(x) = 6$; $D[f(3)]$

   b) $g(x) = 7 - x$; $D[g(0)]$

   c) $h(x) = 3x^2 + 2$; $D[h(-1)]$

   d) $l(x) = \sqrt{x+1}$; $D[l(3)]$

6. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a las gráficas de las funciones de la actividad anterior en los puntos indicados en la misma.

7. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ en el punto de abscisa $x_0 = -1$.

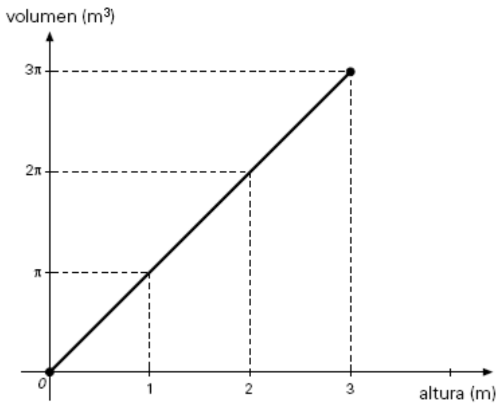
SOLUCIONES

1. La tabla queda del siguiente modo:

t_{vm}	$f_1(x)=3x$	$f_2(x)=3x-2$	$f_3(x)=3x+2$	$f_4(x)=x^2$	$f_5(x)=x^3$	$f_6(x)=3^x$
$[-2,0]$	3	3	3	-2	4	$4/9$
$[-1,1]$	3	3	3	0	1	$5/3$
$[0,2]$	3	3	3	2	4	4
$[1,2]$	3	3	3	3	7	6
$[a,a+1]$	3	3	3	$2a+1$	$3a^2+3a+1$	$2\cdot 3^a$

2. En cada apartado queda:

a) Llamando *x* a la altura del líquido obtenemos:



La ecuación es:

$$V=\pi\cdot x \quad \text{con} \quad 0\le x\le 3$$

b) Queda:

$$t_{vm}[0,5;1]=\frac{\pi-0,5\pi}{0,5}=\pi \qquad t_{vm}[1,5;2]=\frac{2\pi-1,5\pi}{0,5}=\pi \qquad t_{vm}[2;2,5]=\frac{2,5\pi-2\pi}{0,5}=\pi$$

c) Queda:

$$t_{vm}[a;b]=\frac{b\pi-a\pi}{b-a}=\pi$$

3. Queda:

$$V_m[0,3]=t_{vm}[0,3]=\frac{e(3)-e(0)}{3-0}=\frac{3\cdot 3^2+8\cdot 3}{3}=17\text{ km/s}$$

$$V_m[2,5]=t_{vm}[2,5]=\frac{e(5)-e(2)}{5-2}=\frac{115-28}{3}=29\text{ km/s}$$

$$V_m[1,8]=t_{vm}[1,8]=\frac{e(8)-e(1)}{8-1}=\frac{256-11}{7}=35\text{ km/s}$$

$$V_m[8,12]=t_{vm}[8,12]=\frac{e(12)-e(8)}{12-8}=\frac{528-256}{4}=68\text{ km/s}$$

Al alejarse de la Tierra aumenta la velocidad del cohete.

4. La solución queda:

a) La dosis inicial es 10 mg.

b) $t_{vm}[1,2]=\dfrac{C(2)-C(1)}{2-1}=10\cdot 0,92^2-10\cdot 0,92=-0,736$

Significa que va disminuyendo la cantidad de fármaco a medida que pasa el tiempo.

c) $t_{vm}(1,5)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{C(1,5+h)-C(1,5)}{h}=D[C(1,5)]=10\cdot 0,92^{1,5}\cdot \ln 0,92=-0,736$

Significa que es negativa la velocidad de aumento del fármaco al cabo de hora y media.

5. En cada caso queda:

a) $D[f(3)]=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{6-6}{h}=0$

b) $D[g(0)]=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{7-h-7}{h}=-1$

c) $D[h(-1)]=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(-1+h)-h(-1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3(-1+h)^2+2-5}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3h^2-6h}{h}=-6$

d) $D[l(3)]=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{l(3+h)-l(3)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{4+h}\right)^2-2^2}{h\left(\sqrt{4+h}+2\right)}=\dfrac{1}{4}$

6. En cada caso queda:

a) La recta tangente a $f(x)=6$ en el punto $P(3,6)$ es: $y-6=0(x-3) \quad \Rightarrow \quad y=6$

b) La recta tangente a $g(x)=7-x$ en el punto $P(0,7)$ es: $y-7=-1(x-0) \quad \Rightarrow \quad y=-x+7$

c) La recta tangente a $h(x)=3x^2+2$ en el punto $P(-1,5)$ es: $y-5=-6(x+1) \quad \Rightarrow \quad y=-6x-1$

d) La recta tangente a $l(x)=\sqrt{x+1}$ en el punto $P(3,2)$ es: $y-2=\frac{1}{4}(x-3) \quad \Rightarrow \quad x-4y+5=0$

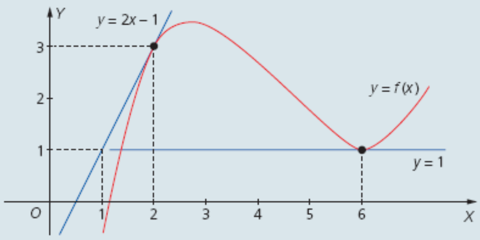
7. La derivada queda: $f'(x)=3x^2-6x$

La pendiente de la recta tangente en $P(-1,-2)$ es: $f'(-1)=9$

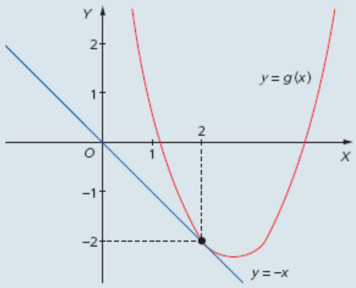
La ecuación de la recta tangente es: $y+2=9(x+1) \quad \Rightarrow \quad 9x-y+7=0$

PÁGINA 253

8. Calcula en cada una de las siguientes funciones las derivadas que se indican:



$D[f(2)]$ y $D[f(6)]$



$D[g(2)]$

9. Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = 2x^2 - 12x + 10$ en los puntos en que esta corta al eje de abscisas.

10. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $D\,[x^6]$

b) $D\,[3x^2 + 2]$

c) $D\,[5x^3 - 7x + 3]$

d) $D\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + 5x\right]$

e) $D\left[\frac{3}{x^6}\right]$

f) $D\,[\sqrt[5]{x^3}]$

g) $D\,[(x^2 + x)^4]$

h) $D\,[\sqrt{3x^4 - 2}]$

i) $D\,[2\sqrt[3]{4x^3 + 3x}]$

j) $D\,[4x^3 \cdot (x^2 - 3)^2]$

k) $D\,[(2x - 1) \cdot \sqrt{x^2 + 4}]$

l) $D\,[(3x - 5)^3 \cdot (4x^3 + 3)^4]$

m) $D\left[\frac{2x}{2x - 5}\right]$

n) $D\left[\frac{4 + 7x^2}{4 - 7x^2}\right]$

ñ) $D\left[\frac{3x}{\sqrt{4x^2 + 5}}\right]$

11. Calcula las derivadas de las siguientes funciones exponenciales:

a) $D\left[4^{\frac{3}{x}}\right]$

b) $D\,[3 \cdot 2^x]$

c) $D\,[e^{2x^2} - e^x - 2]$

d) $D\,[2^{x^2} \cdot 3^{x^2}]$

e) $\mathrm{D}\left[\frac{e^{-x^2}}{4}\right]$

f) $D\,[(e^{2x} + 1)^3]$

12. Calcula las derivadas de las siguientes funciones logarítmicas:

a) $D\,[\ln(x^2 + 7)]$

b) $D\,[\ln(e^x + 2)]$

c) $D\,[\ln(3 - 4x^3)^5]$

d) $D\,[\ln[(2x^2 - 1) \cdot (x^2 - 2)]]$

e) $D\,[\log_2(x^2 + 1)]$

f) $D\left[\ln\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)\right]$

13. Calcula las derivadas de las siguientes funciones trigonométricas:

a) $D\,[\text{sen } 4x]$

b) $D\,[4 \text{ sen } x]$

c) $D\left[\text{sen}\left(\frac{x}{4}\right)\right]$

d) $D\left[\text{sen}\left(\frac{4}{x}\right)\right]$

e) $D\,[\text{sen } x^4]$

f) $D\,[\text{sen}^4 x]$

g) $D\,[\text{sen } 2x - 2 \cos x]$

h) $D\,[\text{sen } x^{-4}]$

i) $D\,[\sqrt[4]{\text{sen } x}]$

j) $D\,[3 \cdot \cos(x + 1)]$

k) $D\,[\cos^2(x^2 + 1)]$

l) $D\,[\cos^2 x + \cos x^2]$

m) $D\,[\text{tg}(x^2 + 2)]$

n) $D\,[\text{tg}\sqrt{x}]$

ñ) $D\,[x \cdot \text{tg } x]$

8. Realizamos los cálculos a partir de las gráficas:

$D[f(2)]=2$ $\qquad$ $D[f(6)]=0$ $\qquad$ $D[g(2)]=-1$

9. La solución queda:

Los puntos de corte:

$$\left.\begin{array}{l} y=2x^2-12x+10 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow P(1,0) \quad Q(5,0)$$

La derivada queda: $y'=4x-12$

- La pendiente de la recta tangente en P es: $y'(1)=4\cdot 1-12=-8$
  La ecuación de la recta tangente queda: $y-0=-8(x-1) \Rightarrow 8x+y-8=0$

- De igual forma queda en el punto Q.
  La ecuación de la recta tangente queda: $y-0=-8(x-5) \Rightarrow 8x+y-40=0$

10. Quedan:

a) $D\left[x^6\right]=6x^5$

b) $D\left[3x^2+2\right]=6x$

c) $D\left[5x^3-7x+3\right]=15x^2-7$

d) $D\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^3+5x\right]=x^3-\frac{9}{2}x^2+5$

e) $D\left[\frac{3}{x^6}\right]=-\frac{18}{x^7}$

f) $D\left[\sqrt[5]{x^3}\right]=\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$

g) $D\left[(x^2+x)^4\right]=(x^2+x)^3\cdot(8x+4)$

h) $D\left[\sqrt{3x^4-2}\right]=\dfrac{6x^3}{\sqrt{3x^4-2}}$

i) $D\left[2\sqrt[3]{4x^3+3x}\right]=\dfrac{8x^2+2}{\sqrt[3]{\left(4x^3+3x\right)^2}}$

j) $D\left[4x^3\,(x^2-3)^2\right]=26x^6-120x^4+108x^2$

k) $D\left[(2x-1)\sqrt{x^2+4}\right]=\dfrac{4x^2-x+8}{\sqrt{x^2+4}}$

l) $D\left[(3x-5)^3\cdot(4x^3+3)^4\right]=9(3x-5)^2\cdot(4x^3+3)^4+48x^2(3x-5)^3\cdot(4x^3+3)^3$

m) $D\left[\dfrac{2x}{2x-5}\right]=\dfrac{-10}{(2x-5)^2}$

n) $D\left[\dfrac{4+7x^2}{4-7x^2}\right]=\dfrac{112x}{(4-7x^2)^2}$

ñ) $D\left[\dfrac{3x}{\sqrt{4x^2+5}}\right]=\dfrac{15}{(4x^2+5)\sqrt{4x^2+5}}$

11. Las derivadas quedan:

a) $D\left[4^{\frac{3}{x}}\right]=4^{\frac{3}{x}}\cdot\ln 4\cdot\left(\dfrac{-3}{x^2}\right)$

b) $D\left[3\cdot 2^x\right]=3\cdot 2^x\cdot\ln 2$

c) $D\left[e^{2x^2}-e^x-2\right]=e^{2x^2}\cdot 4x-e^x$

d) $D\left[2^{x^2}\cdot 3^{x^2}\right]=D\left[6^{x^2}\right]=6^{x^2}\cdot 2x\cdot\ \ln 6$

e) $D\left[\dfrac{e^{-2x}}{4}\right]=\dfrac{-e^{-2x}}{2}$

f) $D\left[\left(e^{2x}+1\right)^3\right]=6\cdot e^{2x}\left(e^{2x}+1\right)^2$

12. Las derivadas quedan:

a) $D\left[\ln\left(x^2+7\right)\right]=\dfrac{2x}{x^2+7}$

b) $D\left[\ln\left(e^x+2\right)\right]=\dfrac{e^x}{e^x+2}$

c) $D\left[\ln\left(3-4x^3\right)^5\right]=D\left[5\cdot\ln\left(3-4x^3\right)\right]=5\cdot\dfrac{-12x^2}{3-4x^3}=\dfrac{-60x^2}{3-4x^3}$

d) $D\left[\ln(2x^2-1)\cdot(x^2-2)\right]=D\left[\ln(2x^2-1)+\ln(x^2-2)\right]=\dfrac{4x}{2x^2-1}+\dfrac{2x}{x^2-2}=\dfrac{8x^3-10x}{2x^4-5x^2+2}$

e) $D\left[\log_2\left(x^2+1\right)\right]=\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)\ln 2}$

f) $D\left[\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)\right]=D\left[\ln(1-x)-\ln(1+x)\right]=\dfrac{-1}{1+x}-\dfrac{-1}{1-x}=\dfrac{-2}{1-x^2}$

13. Las derivadas quedan:

a) $D[\operatorname{sen} 4x]=4\cdot\cos 4x$

b) $D[4\operatorname{sen} x]=4\cdot\cos x$

c) $D\left[\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{4}\right)\right]=\dfrac{1}{4}\cos\dfrac{x}{4}$

d) $D\left[\operatorname{sen}\left(\dfrac{4}{x}\right)\right]=-\dfrac{4}{x^2}\cdot\cos\left(\dfrac{4}{x}\right)$

e) $D\left[\operatorname{sen} x^4\right]=4x^3\cdot\cos x^4$

f) $D\left[\operatorname{sen}^4 x\right]=D\left[(\operatorname{sen} x)^4\right]=4\cdot\operatorname{sen}^3 x\cdot\cos x$

g) $D[\operatorname{sen} 2x-2\cos x]=2\cos 2x+2\operatorname{sen}x$

h) $D\left[\operatorname{sen} x^{-4}\right]=\dfrac{-4\cdot\cos\left(x^{-4}\right)}{x^5}$

i) $D\left[\sqrt[4]{\operatorname{sen} x}\right]=\dfrac{\cos x}{4\sqrt[4]{\operatorname{sen}^3 x}}$

j) $D\left[3\cdot\cos\left(x+1\right)\right]=-3\cdot\operatorname{sen}\left(x^{3}+1\right)$

k) $D\left[\cos^{2}\left(x^{2}+1\right)\right]=-4x\cos\left(x^{2}+1\right)\cdot\operatorname{sen}\left(x^{2}+1\right)$

l) $D\left[\cos^{2}x+\cos x^{2}\right]=-2\cos x\cdot\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}x^{2}\cdot 2x$

m) $D\left[\operatorname{tg}\left(x^{2}+2\right)\right]=\dfrac{2x}{\cos^{2}\left(x^{2}+2\right)}$

n) $D\left(\operatorname{tg}\sqrt{x}\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}\cdot\cos^{2}\sqrt{x}}$

ñ) $D\left[x\cdot\operatorname{tg}x\right]=\operatorname{tg}x+x\,(1+\operatorname{tg}^{2}x)$

ACTIVIDADES FINALES

14. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (x^2 - 1) \cdot \sqrt{x+2}$

b) $y = e^{3x} \cdot x^2$

c) $y = \dfrac{\ln x}{x}$

d) $y = \dfrac{-3x^2}{4x^2 - 2}$

e) $y = 3 \cdot \text{sen}\,(x - 2)$

f) $y = \text{sen}^2\, 7x - \cos 4x$

g) $y = \ln \left(\dfrac{2 - 5x^2}{4}\right)$

h) $y = \ln\,(4x^2 - 5)^3$

i) $y = (e^{-x} - x)^2$

j) $y = \text{tg}\,(3^x)$

k) $y = \dfrac{x}{e^x}$

l) $y = \ln \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)$

15. Dada la función $f(x) = ax + b$, calcula a y b, de modo que $f(1) = 1$ y $f'(1) = 2$.

16. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 7 - 3x$

b) $g(x) = 2x^2$

c) $h(x) = \dfrac{1}{x}$

d) $l(x) = 8x - x^2 - 4$

e) $t(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 5$

f) $s(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

17. En una empresa se ha hecho un estudio sobre el rendimiento, en tanto por ciento, de los trabajadores en función del tiempo a lo largo de un día cualquiera y se ha obtenido la función:

$$f(t) = 3\,200\, t - 400\, t^2$$

con t en horas y $0 < t < 8$. ¿En qué período de tiempo el rendimiento aumenta? ¿En qué período de tiempo disminuye?

18. Encuentra los máximos y mínimos de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + 2x$

b) $g(x) = 6x^2 - x^3$

c) $h(x) = x^4 - 8x^2 + 2$

19. Una compañía de autobuses observa que sus ingresos dependen del precio p a que cobren el billete, en euros, según la función:

$$I(p) = 18p - 3p^2$$

¿Para qué valores de p aumentan los ingresos? ¿Para qué valor de p los ingresos alcanzan el mayor valor posible? ¿Cuál es este valor máximo?

20. En el mes de enero hubo una epidemia de gripe que afectó a los habitantes de una ciudad. El número de enfermos, N, es función del número, t, de días que transcurrieron desde que comenzó la epidemia viene dado por:

$$N = 56t - 2t^2 + 120$$

¿En qué momento aumenta el número de enfermos? ¿Cuándo alcanza el número máximo de enfermos? ¿Cuál fue el número máximo de enfermos?

14. Las derivadas quedan:

a) $D\left[(1-x)\sqrt{1+x}\right]=-1\sqrt{1+x}+\dfrac{1-x}{2\sqrt{1+x}}=\dfrac{-1-3x}{2\sqrt{1+x}}$

b) $D\left[x^2\cdot e^{3x}\right]=2x\cdot e^{3x}+3e^{3x}\,x^2=e^{3x}\,(3x^2+2x)$

c) $D\left[\dfrac{\ln x}{x}\right]=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

d) $D\left[\dfrac{-3x^2}{4x^2-2}\right]=\dfrac{-6x\,(4x^2-2)+3x^2\,(8x)}{(4x^2-2)^2}=\dfrac{12x}{(4x^2-2)^2}$

e) $D\left[3\,\text{sen}\,(x-2)\right]=3\cos\,(x-2)$

f) $D\left[\text{sen}^2 7x-\cos 4x\right]=14\,\text{sen}\,7\text{x}\cdot\cos 7\text{x}+4\,\text{sen}\,4\text{x}$

g) $D\left[\ln\left(\dfrac{2-5x^2}{4}\right)\right]=\dfrac{\frac{1}{4}(-10x)}{\left(\dfrac{2-5x^2}{4}\right)}=\dfrac{-10x}{2-5x^2}$

h) $D\left[\ln\left(4x^2-5\right)^3\right]=\dfrac{24x}{4x^2-5}$

i) $D\left[\left(e^{-x}-x\right)^2\right]=2\left(e^{-x}-x\right)\left(-e^{-x}-1\right)$

j) $D\left[\text{tg}(3^x)\right]=(1+\text{tg}^2\,(3^x))\,3^x\cdot\ln 3$

k) $D\left[\dfrac{x}{e^x}\right]=\dfrac{e^x-xe^x}{e^{2x}}=\dfrac{(1-x)}{e^x}$

l) $D\left[\ln\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)\right]=\dfrac{9}{x\,(x^2+9)}$

15. Quedaría el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} a+b=1 \\ a=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a=2 \\ b=-1 \end{array}\right\} \text{ La función queda}: f(x)=2x-1$$

16. Quedan:

$$\begin{array}{l}
\text{a)}\, f'(x)=-3 \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ es decreciente en todo } \mathbb{R} \\
\text{b)}\, g'(x)=4x \quad \Rightarrow \quad g(x) \text{ es decreciente en } (-\infty,0) \text{ y creciente en } (0,+\infty) \\
\text{c)}\, h'(x)=-\dfrac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad h(x) \text{ es decreciente en todo } \mathbb{R}-\{0\} \\
\text{d)}\, l'(x)=8-2x \quad \Rightarrow \quad l(x) \text{ es creciente en } (-\infty,4) \text{ y decreciente en } (4,+\infty) \\
\text{e)}\, t'(x)=3x^2-12x+9 \quad \Rightarrow \quad t(x) \text{ es creciente en } (-\infty,1)\cup(3,+\infty) \text{ y decreciente en } (1,3) \\
\text{f)}\, s'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} \quad \Rightarrow \quad s(x) \text{ es creciente en } (-\infty,0) \text{ y decreciente en } (0,+\infty)
\end{array}$$

17. La solución queda:

$$\begin{array}{l}
f'(t)=3\,200-800t=0 \quad \Rightarrow \quad t=4 \text{ horas} \\
f''(t)=-800<0 \;\; \text{Máximo} \\
\text{Crece en } (0,4) \text{ y decrece en } (4,8).
\end{array}$$

18. Los extremos quedan:

$$\begin{array}{l}
\text{a)}\, f'(x)=2x+2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1 \\
\quad f''(x)=2>0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ tiene mínimo en } (-1,-1)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\text{b)}\, g'(x)=12x-3x^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=0;\ x=4 \\
\quad g''(x)=\begin{cases} g''(0)>0 \\ g''(4)<0 \end{cases} \Rightarrow \; g(x) \text{ tiene un mímino en } (0,0) \text{ y un máximo en } (4,32)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\text{c)}\, h'(x)=4x^3-16x=0 \quad \Rightarrow \quad x=0;\ x=2;\ x=-2 \\
\quad h''(x)=\begin{cases} h''(0)<0 \quad \Rightarrow \quad h(x) \text{ tiene máximo en } (0,2) \\ h''(2)>0 \quad \Rightarrow \quad h(x) \text{ tiene mínimo en } (2,-14) \\ h''(-2)>0 \quad \Rightarrow \quad h(x) \text{ tiene mínimo en } (-2,-14) \end{cases}
\end{array}$$

19. Los ingresos aumentan para los valores de p que verifiquen $I'(p)>0$.
Es decir: $I'(p)=18-6p>0 \;\Rightarrow\; p\in(0,3)$.

20. La solución queda:

$N'(t) = 56 - 4t = 0 \;\Rightarrow\; t = 14$ días

$N''(t) = -4 < 0$ Máximo

El número de enfermos aumenta durante los primeros 14 días, entonces alcanza su máximo (serían 510 enfermos). A partir de ese día decrecerá el número de enfermos.

PÁGINA 255

■ 21. Dada la función $f(x) = x^4 - 18x^2 + 2$. Halla:

a) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa 1.

b) Los intervalos en los que la función es creciente y en los que es decreciente.

c) Los extremos relativos de esta función.

■ 22. El consumo, en litros, de un vehículo en función de la velocidad, en km/h, por cada 100 kilómetros recorridos viene dado por:

$$C = 0{,}1 \cdot v^2 - 12 \cdot v + 368$$

¿Para qué valores de la velocidad aumenta el consumo? ¿Para qué valores disminuye? ¿Para qué valor de la velocidad el consumo es mínimo y cuál es este?

■ 23. La producción de fresas en un invernadero depende de la temperatura T, en °C, del mismo según muestra la función:

$$P = 60 + 120 \cdot T + 27 \cdot T^2 - T^3$$
(con P en kg)

¿A qué temperatura se conseguirá el máximo número de kg de fresas en el invernadero?

■ 24. Una empresa ha estimado que los gastos anuales (en euros) que genera la fabricación y venta de x unidades de un producto vienen dados por las funciones:

Ingresos: $I(x) = 2x^2 - 500x - 350\,000$

Gastos: $G(x) = 3x^2 - 2\,000x + 120\,000$

a) Determina la función que da el beneficio anual de la empresa.

b) ¿Qué número de unidades hay que vender para que el beneficio sea máximo?

c) ¿A cuánto asciende este beneficio máximo?

■ 25. Una empresa maderera arroja diariamente material según la función:

$$p = 0{,}01t^3 - 0{,}2t^2 + t + 1$$

con p la cantidad de material en kilogramos y t la hora del día con $8 \le t \le 20$.

¿En qué momento del día aumenta la cantidad de material que arroja?¿En cuál disminuye? Halla la cantidad máxima de material que arroja y a qué hora se produce.

■ 26. El valor en millones de euros de una empresa en función del tiempo en años que lleva funcionando viene dado por:

$$f(t) = 9 - (t-2)^2 \quad \text{con } 0 \le t \le 6$$

¿En qué momento alcanzó su valor máximo?

■ 27. Calcula el valor de a para el cual la función $f(x) = x^3 + ax^2 - 3x$ tiene un mínimo relativo en $x = 3$.

21. La solución queda:

a) Realizando la derivada de la función y particuarizando en $x=1$ obtenemos la siguiente recta tangente: $y+15=-32(x-1)$.

b) Los intervalos de crecimiento son:
Crece $(-3,0)\cup(3,+\infty)$ Decrece $(-\infty,-3)\cup(0,3)$

c) Los extremos son: $x=0$ Máximo; $x=\pm 3$ Mínimos

22. Realizando las derivadas obtenemos:

- Para una velocidad de 60 km/h se alcanza el mínimo consumo.
- Para velocidades inferiores a 60 km/h el consumo disminuye y para velocidades superiores aumentará.

23. El máximo se producirá cuando haya 20º C.

24. La solución queda:

a) Función Beneficio $B(x)=I(x)-G(x)$
$\Rightarrow B(x)=(2x^2+360x)-(4x^2+120x+70)=-2x^2+240x-70$

b) $B'(x)=-4x+240=0 \Rightarrow x=60$
$B''(60)<0 \Rightarrow$ El beneficio es máximo al vender 60 unidades del producto.

c) Para $x=60 \Rightarrow B(60)=7130$ euros.
El beneficio máximo es de 7130 euros.

25. La cantidad de material aumenta cuando la función es creciente y disminuye cuando es decreciente.
Esta función es creciente $(-\infty;3{,}3)\cup(10,+\infty)$, y decreciente en $(3{,}3;10)$; por tanto, la cantidad de material aumenta para $t\in(10,20)$ y disminuye para $t\in(8,10)$.
El máximo de esta función está en $(3{,}3;2{,}48)$, luego la cantidad máxima de material está en $t=3{,}3$ y arroja 2,48 kg, pero esta hora se sale del intervalo fijado.

26. La empresa alcanza el valor máximo en $f'(t)=0$ y $f''(t)<0$, es decir, para $t=2$ años.

27. Derivando la función y forzando a que $f'(3)=0$ obtenemos $a=-4$.

ACTIVIDADES FINALES

28. Encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos, si es que los tiene, de la función:

$$f(x) = 2x^2 + 4 \ln x$$

29. ¿Para qué valores reales de p y q la función: $f(x) = x^3 + px^2 + qx + 1$ tiene un mínimo en el punto $(1, 1)$?

30. ¿Qué número verifica que la diferencia entre él y su cuadrado sea máxima?

31. Halla dos números cuya suma sea 50 y tales que el doble del cuadrado del primero más el triple del cuadrado del segundo sea mínimo.

32. Entre los rectángulos de 4 m de perímetro, determina el de área máxima. ¿Cuál será el de diagonal mínima?

33. Entre todos los triángulos rectángulos de igual hipotenusa, 10 m, ¿cuál es el de área máxima?

34. ¿En qué punto de la curva $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$ la recta tangente tiene de pendiente 1?

35. Una finca rectangular se divide en tres rectángulos iguales con el fin de plantar diferentes variedades de árboles. Para vallar todas las partes se utilizan 4 000 metros de alambre. ¿Qué dimensiones tendrá la finca para que el área encerrada por la valla sea máxima?

36. Un instituto concierta un viaje con una agencia de forma que hasta 40 alumnos cobra a cada uno 50 euros. La agencia ofrece una oferta especial diciendo que por cada alumno más que se apunte descontará 1 euro en el precio del viaje. ¿Qué número de alumnos hacen máximos los ingresos de la agencia? ¿Cuál es el valor de dichos ingresos máximos?

37. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = 3x^2 - 2x^3$

b) $y = x^4 - 8x^2 + 16$

c) $y = 4x^2 - 2x^4$

d) $y = \dfrac{3}{x - 2}$

e) $y = \dfrac{-2x}{x + 4}$

f) $y = \dfrac{4}{x^2 + 1}$

g) $y = \dfrac{x - 2}{x + 2}$

h) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

i) $y = \dfrac{x^2}{x - 2}$

38. Se ha comprobado que la evolución desde el año 1980 ($t = 0$) del número de ejemplares de lince ibérico sigue la ley:

$$N = \frac{t + 2}{t + 1} \quad \text{(con } N \text{ miles de ejemplares y } t \text{ tiempo en años)}$$

Representa gráficamente esta función y haz un estudio de la evolución de esta especie animal.

28. La solución queda:

Derivamos: $f'(x) = 4x + \frac{4}{x} = \frac{4x^2+4}{x}$; al igualar a cero no obtenemos extremos. Pero sí tenemos los intervalos de crecimiento: creciente $(0, +\infty)$ y decreciente $(-\infty, 0)$. De estos dos intervalos, el segundo no tendría sentido porque en él no está definida la función.

29. Si la función $f(x)$ tiene un mínimo en el punto (1, 1) verificará:

$$\left.\begin{array}{lll} f(1)=1 & \Rightarrow & 1=1+p+q+1 \\ f'(1)=0 & \Rightarrow & 0=3+2p+q \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} p=-2 \\ q=1 \end{array} \Rightarrow \text{La función queda}: f(x)=x^3-2x^2+x+1$$

30. Llamamos x al máximo:

$$D(x)=x-x^2 \Rightarrow D'(x)=-2x+1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$D''(x)=-2<0 \Rightarrow \text{Luego la diferencia es máxima con el número } 0{,}5.$$

31. Los números son x y $(50-x)$.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} P(x)=2x + (50-x)^2 = 5x^2-300x+7500 \\ P'(x)=10x-300=0 \quad \Rightarrow \quad x=30 \\ P''(x)=10;\ P''(30)>0 \ \text{Mínimo} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Los números pedidos son 30 y 20.}$$

32. Los rectángulos de 4 cm de perímetro tendrán por dimensiones x y $(2-x)$:

- El área será:

$$A(x)=x(2-x)=-x^2+2x \Rightarrow A'(x)=-2x+2=0 \Rightarrow x=1$$

$$A''(x)=-2<0 \quad \text{Mínimo}$$

El rectángulo de área máxima tiene de dimensiones 1 m y 1 m, es decir, un cuadrado de 1 m de lado.

- La diagonal será:

$$D(x)=\sqrt{x^2+(2-x)^2}=\sqrt{2x^2-4x+4} \Rightarrow D'(x)=\frac{\sqrt{2}\,(x-1)}{\sqrt{x^2-2x+2}}=0 \Rightarrow x=1$$

$$D''(x)=\frac{\sqrt{2}}{(x^2-2x+2)\sqrt{x^2-2x+2}}>0 \ \text{Mínimo}$$

El rectángulo de diagonal mínima tiene de dimensiones 1 m y 1 m, es decir, un cuadrado de 1 m de lado.

33. Llamamos x, y a los catetos de un triángulo rectángulo.

Se verifica: $x^2+y^2=100 \quad \Rightarrow \quad y=\sqrt{100-x^2}$

El área es: $\text{Área}=\frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{100-x^2}$

Derivando:

$$A'(x)=\frac{100-2x^2}{2\sqrt{100-x^2}}=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm 5\sqrt{2}$$

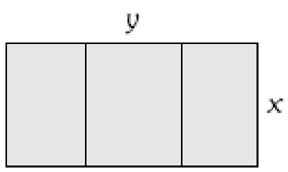
$$A''(x)=\frac{2x^3-300x}{2(100-x^2)\sqrt{100-x^2}} \quad \Rightarrow \quad A''(5\sqrt{2})>0 \quad \Rightarrow \quad \text{Área máxima.}$$

El triángulo rectángulo de área máxima es un triángulo isósceles de catetos $5\sqrt{2}$ unidades.

34. Realizando la derivada en dicho punto obtenemos:

$f'(x)=1 \quad \Rightarrow \quad x=1 \quad$ el punto es $P\left(1,-\frac{1}{2}\right)$

35. La solución queda:



$4x+2y=4\ 000 \quad \Rightarrow \quad y=2\ 000-2x$

$\text{Área}=x\cdot(2\ 000-2x)=2\ 000x-2x^2$

$A'=2\ 000-4x=0 \quad \Rightarrow \quad x=500$

$A''(500)=-4<0$ Máxima

El área es máxima para $x=500$ m $\quad y=1\ 000$ m

36. Los ingresos de la agencia vendrán dados por la función $I(x)=(40+x)\cdot(50-x)$ siendo x el número de alumnos que más van de viaje. Veamos para qué valor de x estos ingresos son máximos.

$$I(x)=-x^2+10x+2\ 000$$

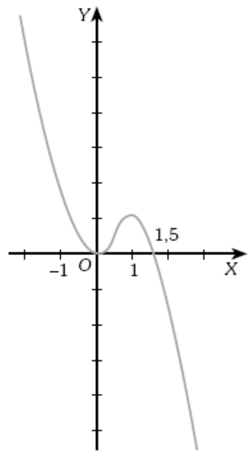
$$I'(x)=-2x+10=0 \quad \Rightarrow \quad x=5 \text{ alumnos}$$

$$I''(x)=-2<0 \text{ Máximo}$$

Los ingresos son máximos para 5 alumnos de más, y estos ingresos ascienden a $I(5)=2\ 050$ euros.

37. Cada una de las representaciones quedan:

a)



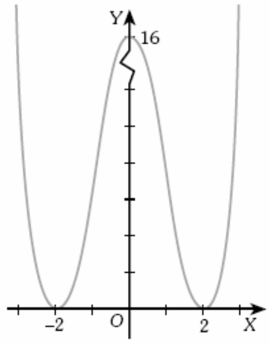
$y = 3x^2 - 2x^3$

Máximo (1, 1)

Mínimo (0, 0)

Cortes (0, 0) (1,5 ; 0)

b)



$y = x^4 - 8x^2 + 16$

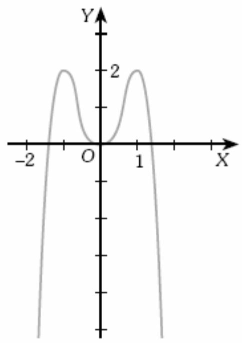
Máximo (0, 16)

Mínimos (–2, 0) (2, 0)

Cortes (–2, 0) (2, 0)
(0, 16)

Simétrica respecto OY

c)



$y = 4x^2 - 2x^4$

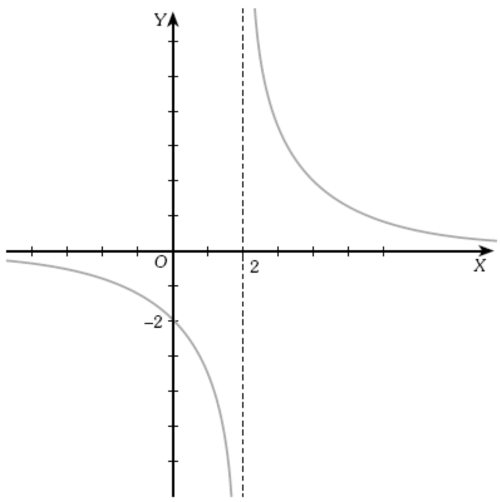
Máximos (–1, 2) (1, 2)

Mínimo (0, 0)

Cortes (–1,4 ; 0) (1,4 ; 0)
(0, 0)

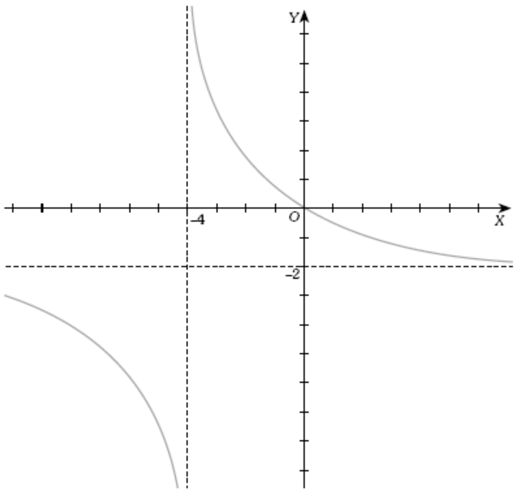
Simétrica respecto OY

d)



$y = \dfrac{3}{x-2}$ Corte (0; −1,5) Asíntotas: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

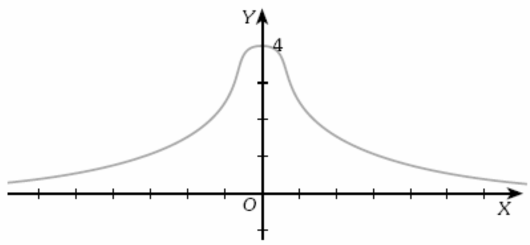
e)



$y = \dfrac{-2x}{x+4}$ Asíntotas: $\begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \end{cases}$

Cortes (0, 0)

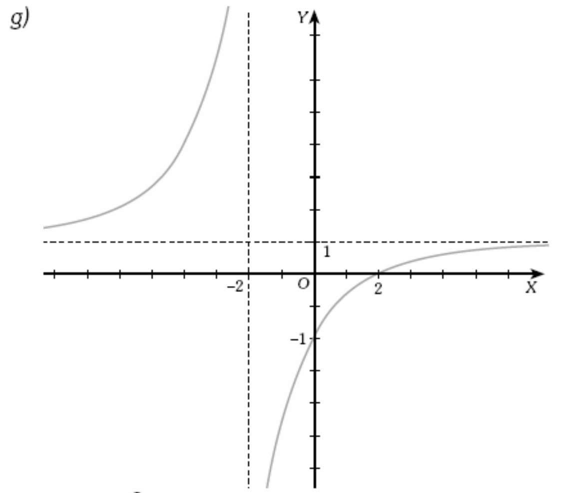
f)



$y = \dfrac{4}{x^2+1}$ Cortes (0, 4) Máximo (0, 4)

Asíntonta $y = 0$ Simétrica respecto OY

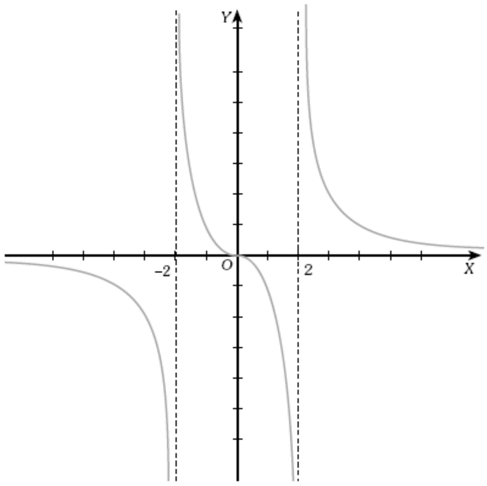
g)



$y = \dfrac{x-2}{x+2}$ Cortes $(0, -1)$ $(2, 0)$

Asíntontas $x = -2$; $y = 1$

h)

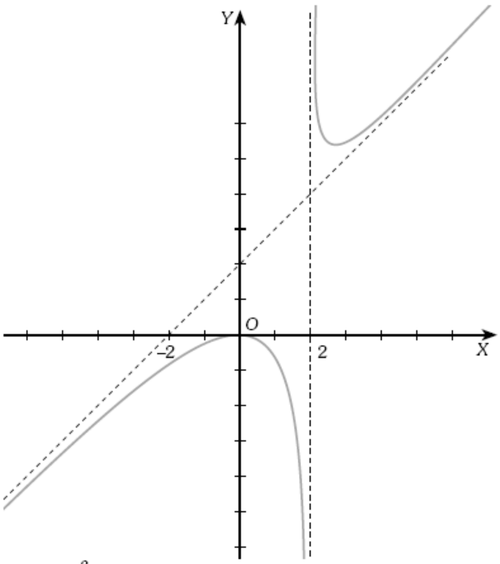


$y = \dfrac{x}{x^2-4}$ Cortes $(0, 0)$

Asíntontas $x = 2$; $x = -2$; $y = 0$

Simétrica respecto al origen.

i)

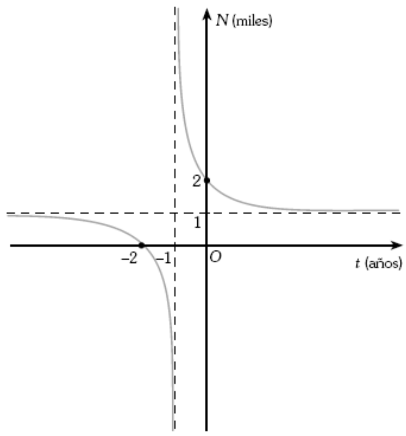


$y = \dfrac{x^2}{x-2}$ Cortes $(0, 0)$

Asíntontas $x = 2$; $y = x + 2$

Máximo $(0, 0)$ y Mínimo $(4, 8)$.

38. La función dada es :



En el dibujo está representada gráficamente la función dada.
Sólo consideramos la parte positiva de la gráfica (desde $t = 0$), pues el resto no tiene sentido en el contexto.
En el año 1 980 ($t = 0$) había 2 000 ejemplares de lince ibérico, éstos van disminuyendo con los años tendiendo hacia 1 000 ejemplares.

Unidad 12 – Estadística. Tablas y gráficos

PÁGINA 259

cuestiones iniciales

1. Un grupo de estudiantes ha realizado una recogida de plantas de una misma especie, anotando el número de estas, por dam^2, en función de su altitud, como puede verse en la tabla que sigue:

Altitud (m)	100	200	300	400	500	600	700	800
Nº de plantas	1	5	10	15	17	8	3	1

Determina el porcentaje total de plantas que corresponde a cada altitud.

2. La tabla muestra los porcentajes de la producción mundial de petróleo en el año 1990.

Representa estas producciones sobre un círculo, de manera que cada sector circular tenga una amplitud proporcional a cada uno de los tantos por ciento de la tabla.

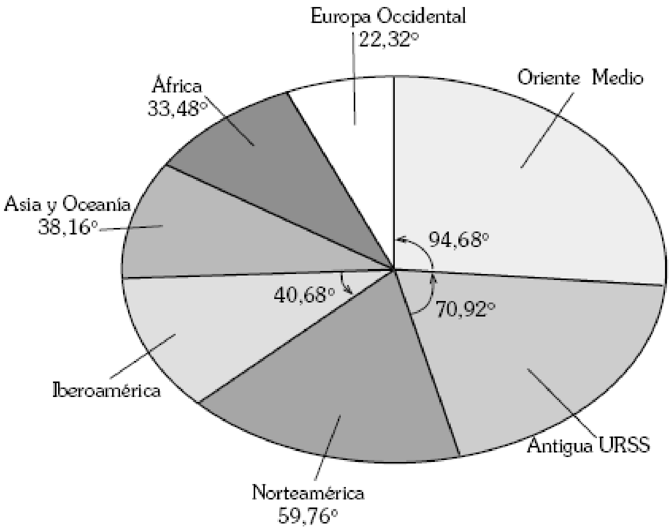
Región	Porcentaje
Oriente Próximo	26,3
Antigua URSS	19,7
Norteamérica	16,6
Iberoamérica	11,3
Asia y Oceanía	10,6
África	9,3
Europa Occidental	6,2

SOLUCIONES

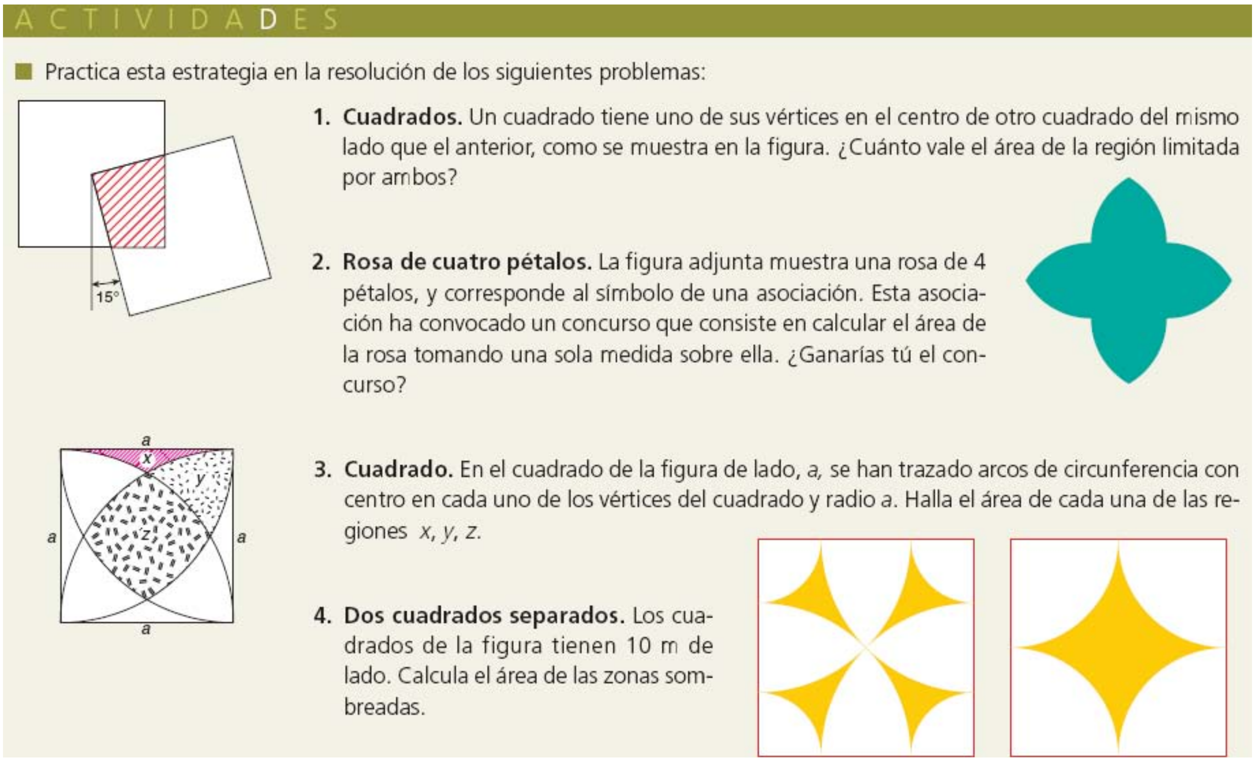
1. Los porcentajes se expresan en la siguiente tabla:

Altitud (m)	100	200	300	400	500	600	700	800
Nº de plantas	1,67	8,33	16,67	25	28,33	13,33	5	1,67

2. La representación queda:



PÁGINA 275



ACTIVIDADES

■ Practica esta estrategia en la resolución de los siguientes problemas:

1. **Cuadrados.** Un cuadrado tiene uno de sus vértices en el centro de otro cuadrado del mismo lado que el anterior, como se muestra en la figura. ¿Cuánto vale el área de la región limitada por ambos?

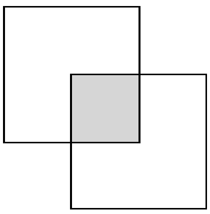
2. **Rosa de cuatro pétalos.** La figura adjunta muestra una rosa de 4 pétalos, y corresponde al símbolo de una asociación. Esta asociación ha convocado un concurso que consiste en calcular el área de la rosa tomando una sola medida sobre ella. ¿Ganarías tú el concurso?

3. **Cuadrado.** En el cuadrado de la figura de lado, *a*, se han trazado arcos de circunferencia con centro en cada uno de los vértices del cuadrado y radio *a*. Halla el área de cada una de las regiones *x*, *y*, *z*.

4. **Dos cuadrados separados.** Los cuadrados de la figura tienen 10 m de lado. Calcula el área de las zonas sombreadas.

SOLUCIONES

1. La solución queda:

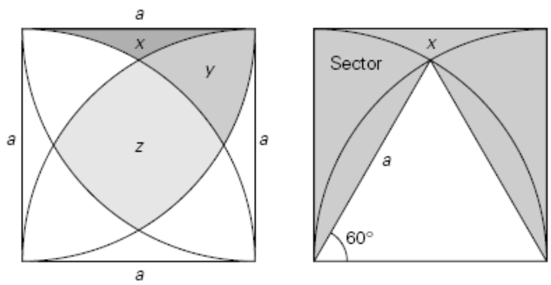


Basta con mover el cuadrado para ver que el área de la región limitada es la cuarta parte del cuadrado.

2. Basta conocer el lado del cuadrado que se forma dentro de la figura. La resolución nos recuerda al problema de los *perros guardianes*.

   El área de esta rosa de 4 pétalos es igual al área del cuadrado rayado más 4 veces el área de un pétalo. El área de un pétalo lo puedes encontrar en el problema de los *perros guardianes*.

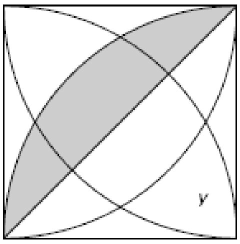
3. La representación geométrica del problema así como su resolución quedan:



Los cálculos quedan:

$$\text{Área}(x) = \text{Área cuadrado} - \text{Área triángulo} - 2\cdot\text{Área sector} =$$

$$= a^2 - \frac{a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} - 2\cdot\frac{\pi\cdot a^2}{12} = \boxed{a^2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}$$



$$\text{Área}(\text{rayada}) = \frac{1}{4}\text{Área círculo} - \text{Área triángulo rectángulo} =$$

$$= \frac{\pi\cdot a^2}{4} - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

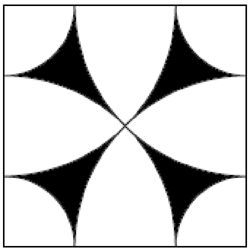
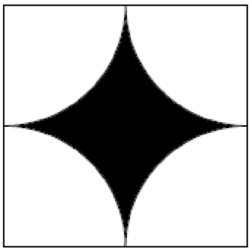
$$\text{Área}(\text{y}) = \text{Área triángulo rectángulo} - \text{Área}(\text{rayada}) - 2\cdot\text{Área}(\text{x}) =$$

$$= \frac{a^2}{2} - \left(\frac{\pi\cdot a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\right) - 2\cdot a^2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = \boxed{-a^2 + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi\cdot a^2}{12}}$$

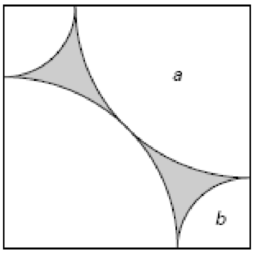
$$\text{Área}(\text{z}) = 2\cdot\text{Área}(\text{rayada}) - 2\cdot\text{Área}(\text{y}) = 2\cdot\left(\frac{\pi\cdot a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\right) - 2\cdot\left(-a^2 + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi\cdot a^2}{12}\right) =$$

$$= \frac{\pi\cdot a^2}{2} - a^2 + 2a^2 - a^2\sqrt{3} - \frac{\pi\cdot a^2}{6} = \boxed{a^2 - a^2\sqrt{3} + \frac{\pi\cdot a^2}{3}}$$

4. Sean las figuras:

1)  2) 

• En la figura (1) el área pedida es 2 veces el área de una de las aspas rayada en el dibujo adjunto.



$$\text{Área aspa} = \text{Área cuadrado} - 2 \cdot \text{Área}(a) - 2 \cdot \text{Área}(b)$$

Vamos a hallar el área de la zona (a).
El radio de esta zona es la mitad de la diagonal del cuadrado.

$$D = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} \;\Rightarrow\; r = 5\sqrt{2} \quad \text{y} \quad \text{Área}(a) = \frac{1}{4}\pi \cdot r^2 = \frac{1}{4}\pi \cdot \left(5\sqrt{2}\right)^2 = \frac{50\pi}{4} = \frac{25\pi}{2}\,\text{m}^2$$

Ahora hallamos el área de la zona (b). El radio de esta zona es el lado del cuadrado menos el radio de la zona (a) $\Rightarrow r = 10 - 5\sqrt{2}$.

$$\text{Área}(b) = \frac{1}{4}\pi(10 - 5\sqrt{2})^2 = \frac{(75 - 50\sqrt{2})\pi}{4}\,\text{m}^2$$

El área del aspa queda:

$$\text{Área aspa} = 10^2 - 25\pi - (75 - 50\sqrt{2})\pi = 100 - 100\pi + 50\sqrt{2}\pi$$

El área pedida queda:

$$\text{Área pedida} = 2 \cdot \text{Área aspa} = 2 \cdot (100 - 100\pi + 50\sqrt{2}\pi) = 15{,}97\,\text{m}^2$$

$$\boxed{\text{Área pedida} = 15{,}97\,\text{m}^2}$$

• En la figura (2) el área pedida es igual al área del cuadrado de lado 10 m menos el área del círculo de radio 5 m.

$$\text{Área figura}(2) = 10^2 - \pi \cdot 5^2 = 100 - 25\pi \;\Rightarrow\; \boxed{\text{Área figura}(2) = 21{,}46\,\text{m}^2}$$

PÁGINA 278

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Enuncia cinco variables estadísticas de cada una de las clases que aparecen en el texto, referidas a los alumnos de tu curso.

2. Responde a lo que se pide en la actividad anterior, referidas, en este caso, a un individuo de tu lugar de residencia.

3. Clasifica las siguientes variables estadísticas:

   a) Temperaturas registradas cada día en un observatorio.

   b) Duración de un determinado modelo de pila eléctrica.

   c) Número de frutas producidas por cada árbol de una plantación de melocotoneros.

   d) Número de caries de cada alumno de un instituto.

   e) Gasto medio de litros de gasóleo por cada 100 km de un determinado modelo de camión.

   f) Número de espectadores que han asistido a un pabellón durante los partidos de baloncesto de toda la liga.

4. Una determinada especie de mamíferos tiene en cada parto un número variable de hijos. Se observa que las camadas de 35 familias durante un año han sido las que se recogen en la tabla adjunta.

   Elabora una tabla estadística completa con todos los tipos de frecuencias existentes.

Nº de hijos	0	1	2	3	4	5	6	7
Nº de familias	2	3	10	10	5	0	5	0

5. La realización de una prueba de habilidad motora por parte de 60 niños ha dado los resultados que siguen:

   15, 35, 18, 23, 75, 81, 19, 27, 15, 18, 63, 45, 31, 32, 45, 18, 29, 17, 30, 77,
   76, 75, 19, 15, 23, 35, 81, 15, 81, 41, 76, 24, 27, 69, 15, 18, 13, 18, 76, 14,
   29, 31, 52, 46, 18, 17, 35, 62, 44, 31, 18, 27, 32, 74, 19, 31, 47, 19, 82, 50.

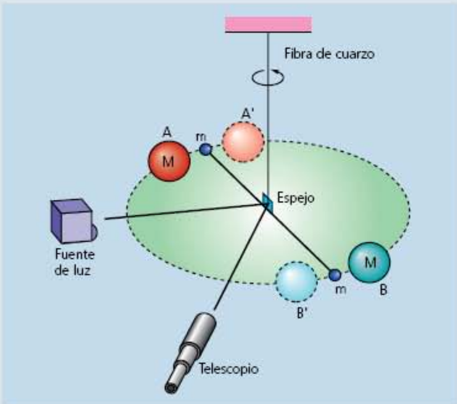
   a) Agrupa estos datos en intervalos de amplitud 5, realizando la correspondiente tabla estadística completa.

   b) Responde a las mismas cuestiones del apartado anterior tomando clases de amplitud 10.

6. En 1798 el científico inglés Henry Cavendish midió la densidad de la Tierra a través de una balanza de torsión. Realizó 29 observaciones y obtuvo los siguientes valores (en g/cm³).

5,50	5,61	4,88	5,07	5,26	5,55	5,36	5,29	5,58	5,65
5,57	5,53	5,63	5,29	5,44	5,34	5,79	5,10	5,27	5,39
5,42	5,47	5,63	5,34	5,46	5,30	5,75	5,68	5,85	

   Agrupa los datos en 5 clases de amplitud 0,25, considerando como límite inferior de la primera clase el valor 4,75 y construye la correspondiente tabla completa de frecuencias.



↑ Balanza de Cavendish. Con ella se hizo acreedor de la frase "Cavendish pesó la Tierra por primera vez".

1. Las variables quedan:

   Variables o caracteres cualitativos:
   1. Color de cabello.
   2. Deporte favorito.
   3. Asignatura favorita.
   4. Diversión más practicada.
   5. Marca de zapatos que utiliza.

   Variables o caracteres cualitativos discretos:
   1. Número de hermanos.
   2. Número de deportes practicados.
   3. Películas vistas esta semana.
   4. Número de electrodomésticos en su hogar.
   5. Libros leídos al año.

   Variables o caracteres cuantitativos continuos:
   1. Estatura.
   2. Peso.
   3. Perímetro torácico.
   4. Tiempo en realizar una prueba.
   5. Longitud de las piernas.

2. Las variables quedan:

   Variables o caracteres cualitativos:
   1. Color de ojos.
   2. Deporte practicado.
   3. Programa de TV más visto.
   4. Marca del coche de la familia.
   5. Marca de pantalones que utiliza.

   Variables o caracteres cualitativos discretos:
   1. Número de tu familia.
   2. Número de operaciones quirúrgicas realizadas.
   3. Días de baja por enfermedad.
   4. Número de vehículos su familia.
   5. Refrescos que toma al día.

Variables o caracteres cuantitativos continuos:

1. Superficie de una vivienda.
2. Peso.
3. Perímetro craneal.
4. Gastos anuales en alimentación de una familia.
5. Longitud de los brazos.

3. En cada caso quedan:

a) Continua. b) Continua
c) Discreta. d) Discreta.
e) Continua. f) Continua

4. La tabla pedida queda:

N.º hijos x_i	N.º familias f_i	Frecuencias absolutas acumuladas F_i	Frecuencias relativas h_i	Frecuencias relativas acumuladas H_i	Porcentajes
0	2	2	0,0571	0,0571	5,71
1	3	5	0,0857	0,1428	8,57
2	10	15	0,2857	0,4285	28,57
3	10	25	0,2857	0,7142	28,57
4	5	30	0,1428	0,8571	14,28
5	0	30	0,0000	0,8571	0,00
6	5	35	0,1428	1,0000	14,28
7	0	35	0,0000	1,0000	0,00

5. Las tablas quedan:

a) La tabla con intervalos de amplitud 5 es la siguiente:

Intervalos	Marca de clase x_i	f_i	F_i	h_i	H_i	%
[13,18)	15	9	9	0,1500	0,1500	15
[18,23)	20	11	20	0,0833	0,3333	8,33
[23,28)	25	6	26	0,1000	0,4333	10
[28,33)	30	9	35	0,1500	0,5833	15
[33,38)	35	3	38	0,0500	0,6333	5
[38,43)	40	1	39	0,0167	0,6500	1,67
[43,48)	45	5	44	0,0833	0,7333	8,33
[48,53)	50	2	46	0,0333	0,7667	3,33
[53,58)	55	0	46	0,000	0,7667	0
[58,63)	60	1	47	0,0167	0,7833	1,67
[63,68)	65	1	48	0,0167	0,8000	1,67
[68,73)	70	1	49	0,0167	0,8167	1,67
[73,78)	75	7	56	0,1167	0,9333	11,67
[78,83)	80	4	60	0,0667	1,0000	6,67

b) La tabla con intervalos de amplitud 10 es la siguiente:

Intervalos	Marca de clase x_i	f_i	F_i	h_i	H_i	%
[13,23)	18	20	20	0,3333	0,3333	33,33
[23,33)	28	15	35	0,2500	0,5833	25
[33,43)	38	4	39	0,0667	0,6500	6,67
[43,53)	48	7	46	0,1167	0,7667	11,67
[53,63)	58	1	47	0,0167	0,7833	1,67
[63,73)	68	2	49	0,0333	0,8167	3,33
[73,83)	78	11	60	0,1833	1,0000	18,33

6. La tabla de frecuencias queda:

	Frecuencias absolutas		Frecuencias relativas		Porcentajes	
Intervalo	Simples	Acumuladas	Simples	Acumuladas	Simples	Acumuladas
[4,75;5,00)	1	1	0,0345	0,0345	3,45	3,45
[5,00;5,25)	2	3	0,0690	0,1034	6,90	10,34
[5,25;5,50)	13	16	0,4483	0,5517	44,83	55,17
[5,50;5,75)	10	26	0,3448	0,8966	34,48	89,66
[5,75;6,00)	3	29	0,1034	1,0000	10,34	100,00

PÁGINA 279

■ 7. Elabora una tabla completa de frecuencias de la aparición de vocales de la frase que sigue.

"There are two ways of talking about ambiguity: we can talk of one string representing two different sentences, or we can say that one sentence has two different meanings."

■ 8. El número de trabajadores en las 60 empresas de una determinada localidad es la siguiente:

13, 50, 46, 22, 54, 5, 61, 26, 43, 34, 75, 79, 234, 434 ,45, 36, 84, 75, 56, 53
5, 64, 74, 25, 62, 6, 49, 75, 34, 2, 83, 42, 53, 67, 63, 96, 15, 7, 33, 45
16, 54, 3, 47, 4, 22, 50, 42, 18, 46, 95, 27, 4, 45, 32, 86, 58, 72, 38, 4.

En ocasiones no resulta útil usar intervalos de la misma amplitud como ocurre en este caso. Utiliza los intervalos [0, 15), [15, 30), [30, 45), [45, 60], [60, 75), [75, 90), [90, 450) y elabora la tabla estadística completa.

■ 9. Completa los datos que faltan en las tablas estadísticas siguientes:

a)

Calificación	f_i	h_i
Insuficiente		0,375
Suficiente	20	
Notable	16	
Sobresaliente		
Total	80	

c)

Número de hijos	f_i	h_i
0		0,2
1	15	
2		
3	5	
4	4	
5		0,02
TOTAL	50	

b)

Número de caries	f_i	h_i	p_i
0	25	0,25	
1	20	0,2	
2			
3	15	0,15	
4		0,05	
TOTAL			

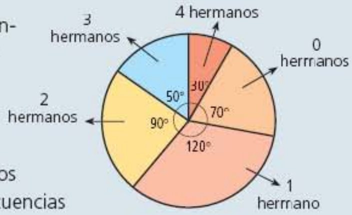
d)

x_i	f_i	F_i	h_i
1	3		
2	4		
3		16	0,15
4	7		
5	5	28	
6		38	
7	7	45	
8			

■ 10. En un centro de enseñanza hay 240, 160, 200 y 120 alumnos de primero, segundo, tercero y cuarto curso de Enseñanza Secundaria Obligatoria, respectivamente. Se pide:

a) Representar gráficamente estos datos mediante un diagrama de sectores.

b) Representar mediante un diagrama de barras el número de alumnos que tendría cada curso si el centro decide: aumentar en un 5 % el número de alumnos matriculados en primer curso, mantener el número de matriculados en segundo y tercero, y disminuir el número de matriculados en cuarto curso, de manera que no se modifique el número total de alumnos.



■ 11. En este diagrama de sectores aparecen representados el número de hermanos de un grupo de 36 alumnos de 1º de bachillerato. Construye la tabla de frecuencias absolutas correspondiente.

7. La tabla de frecuencias queda:

	Frecuencias absolutas		Frecuencias relativas		Porcentajes	
Vocales	Simples	Acumuladas	Simples	Acumuladas	Simples	Acumuladas
a	12	12	0,2308	0,2308	23,08	23,08
e	21	33	0,4038	0,6346	40,38	63,46
i	8	41	0,1538	0,7885	15,38	78,85
o	9	50	0,1731	0,9615	17,31	96,15
u	2	52	0,0385	1,0000	3,85	100,00
TOTAL	52					

8. La tabla completa queda:

	Frecuencias absolutas		Frecuencias relativas		Porcentajes	
Número de trabajadores	Simples	Acumuladas	Simples	Acumuladas	Simples	Acumuladas
$[0,15)$	10	10	0,1667	0,1667	16,67	16,67
$[15,30)$	8	18	0,1333	0,3000	13,33	30,00
$[30,45)$	9	27	0,1500	0,4500	15,00	45,00
$[45,60)$	15	42	0,2500	0,7000	25,00	70,00
$[60,75)$	7	49	0,1167	0,8167	11,67	81,67
$[75,90)$	7	56	0,1167	0,9333	11,67	93,33
$[90,450)$	4	60	0,0667	1,0000	6,67	100,00

9. Las cuatro tablas quedan:

a)

Calificación	f_i	h_i
Insuficiente	30	0,375
Suficiente	20	0,25
Notable	16	0,20
Sobresaliente	14	0,175
Total	80	1 000

b)

Número de caries	f_i	h_i	p_i
0	25	0,25	25
1	20	0,2	20
2	35	0,35	35
3	15	0,15	10
4	5	0,05	5
TOTAL	100	1,00	100

c)

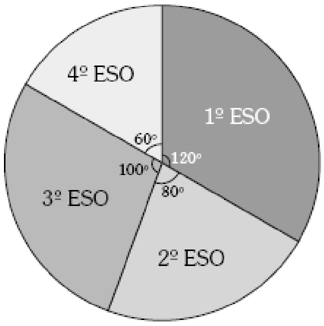
Número de hijos	f_i	h_i
0	10	0,2
1	15	0,3
2	15	0,3
3	5	0,1
4	4	0,08
5	1	0,02
TOTAL	50	1,00

d)

x_i	f_i	F_i	h_i
1	3	3	0,05
2	4	7	0,07
3	9	16	0,15
4	7	23	0,12
5	5	28	0,08
6	10	38	0,17
7	7	45	0,12
8	15	60	0,25

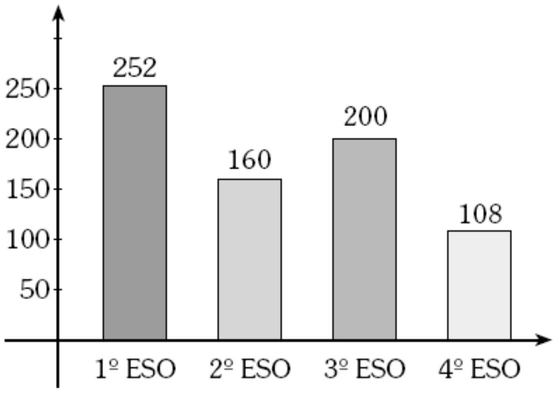
10. Las representaciones son:

1. El diagrama de sectores queda:



2. El 5% de 240 es 12 alumnos. La composición del centro se expresa mediante la tabla, además se presenta el diagrama de barras:

Curso	Número de alumnos
1º ESO	252
2º ESO	160
3º ESO	200
4º ESO	108
Total	720



11. La tabla de frecuencias buscada queda:

Número de hermanos	Frecuencias absolutas
0	7
1	12
2	9
3	5
4	3

ACTIVIDADES FINALES

■ 12. Las dianas logradas en un campeonato por 25 tiradores fueron:

8, 10, 12, 12, 10, 10, 11, 11, 10, 13, 9, 11, 10, 9, 9, 11, 12, 9, 10, 9, 10, 9, 10, 8, 10

Resume los datos anteriores en una tabla de frecuencias absolutas y relativas, y dibuja el correspondiente diagrama de barras.

■ 13. Se ha realizado un test de habilidad numérica a los alumnos de una clase. Los resultados obtenidos son:

Puntuaciones	[10, 15)	[15, 20)	[20, 25)	[25, 30)	[30, 35)	[35, 40)	[40, 45)	[45, 50]
Nº de alumnos	4	6	6	10	8	10	3	3

Representa los datos mediante un histograma.

■ 14. Se ha aplicado un test a los empleados de una fábrica, obteniéndose la siguiente tabla:

x	(38, 44]	(44, 50]	(50, 56]	(56, 62]	(62, 68]	(68, 74]	(74, 80]
Nº de trabajadores	7	8	15	25	18	9	6

Construye el histograma y el polígono de frecuencias absolutas acumuladas.

■ 15. Para la tabla de ingresos adjunta, construye el histograma de frecuencias relativas y el polígono de frecuencias.

Ingresos	Frecuencias
Menos de 40 000	35
40 000-70 000	70
70 000-80 000	70
80 000-100 000	90
100 000-130 000	85
Más de 130 000	64

■ 16. Los pesos en kg de 20 alumnos de cierto centro de enseñanza son:

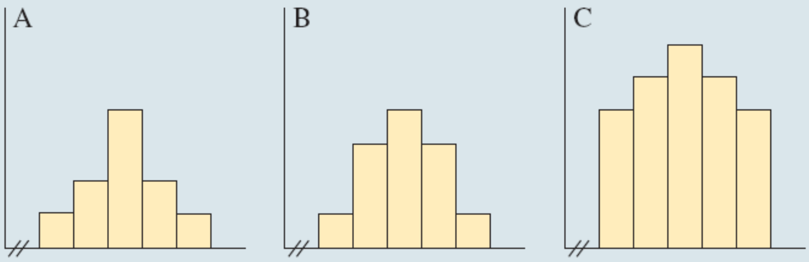
51, 47, 55, 53, 49, 47, 48, 50, 43, 60,
45, 54, 62, 57, 46, 49, 52, 42, 38, 61

Agrupa los datos en clases de amplitud 5, siendo el extremo inferior del primer intervalo 37,5. Dibuja el correspondiente histograma.

■ 17. Como resultado de un estudio estadístico sobre los ingresos por ventas (en miles de euros) realizado sobre un grupo de 100 empresas del sector de la alimentación, se ha obtenido la tabla de la derecha:

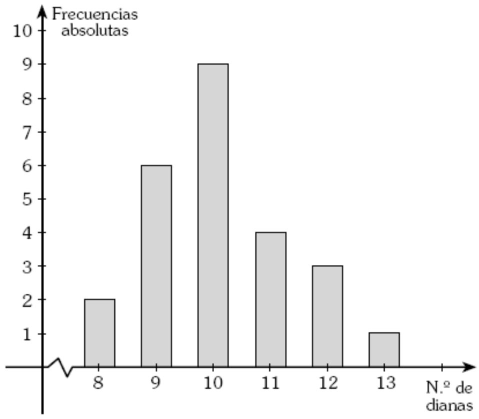
Ingresos	Resultados
[100, 200)	10
[200, 300)	20
[300, 400)	40
[400, 500)	20
[500, 600]	10

Identificar, entre los siguientes, el histograma de frecuencias asociado a los datos de la tabla. Explicar razonadamente la elección efectuada.

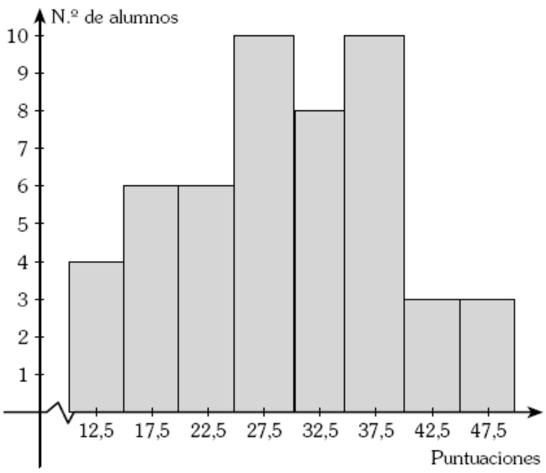


12. Los datos tabulados y el diagrama de barras quedan:

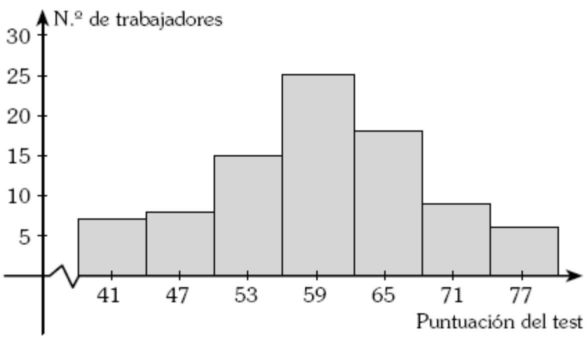
N.º de dianas x_i	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas
8	2	0,08
9	6	0,24
10	9	0,36
11	4	0,16
12	3	0,12
13	1	0,04

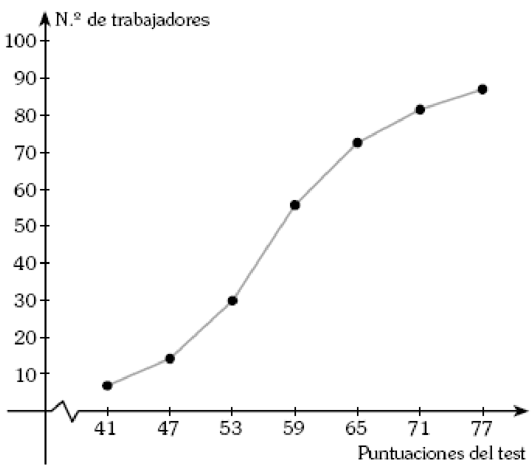


13. El histograma queda:

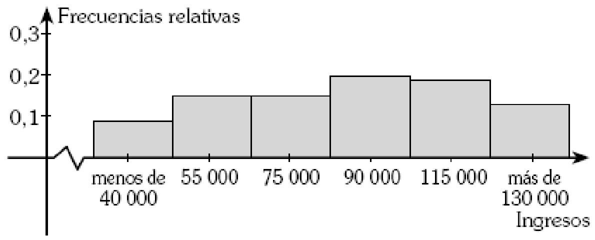


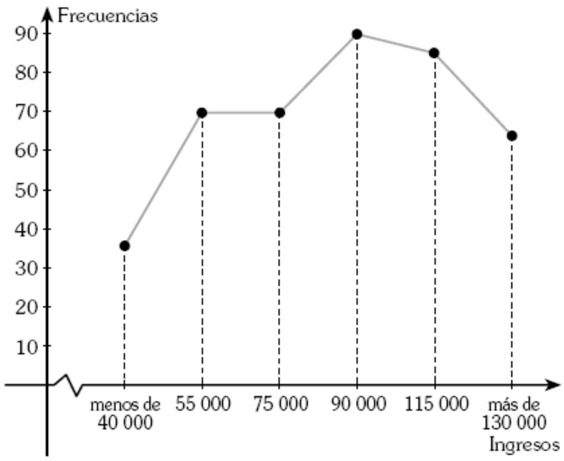
14. El histograma y el polígono quedan:





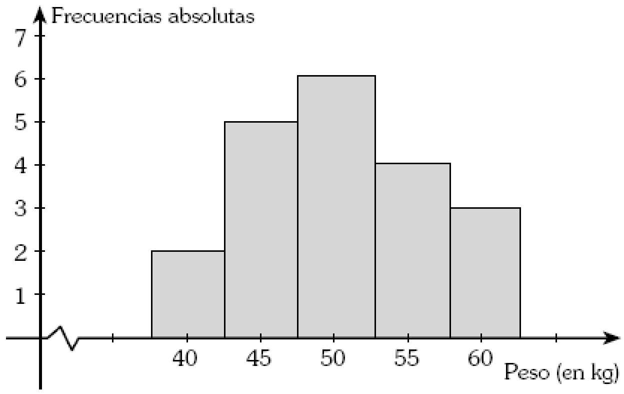
15. Los gráficos quedan:





16. La tabla y el histograma quedan:

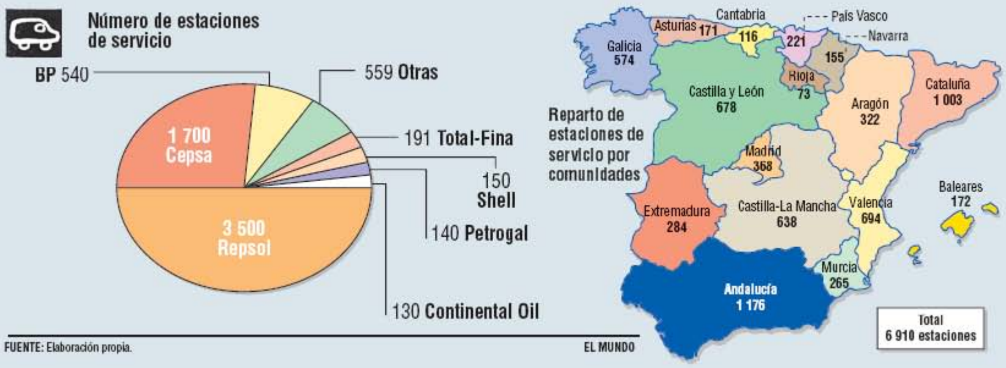
Intervalos	Marcas de clase x_i	Frecuencias absolutas f_i
[37,5; 42,5)	40	2
[42,5; 47,5)	45	5
[47,5; 52,5)	50	6
[52,5; 57,5)	55	4
[57,5; 62,5)	60	3



17. El histograma correcto es el correspondiente al gráfico A. Puede observarse que las alturas de los rectángulos son proporcionales a los resultados 10, 20, 40, 20 y 10, respectivamente.

PÁGINA 281

■ 18. Con los datos que aparecen en los gráficos que siguen elabora sendos diagramas de rectángulos.



■ 19. En un proceso experimental se han medido la longitud de 80 plantas adultas de cierta variedad de tomate cultivadas en las mismas condiciones en el interior de un invernadero, con los siguientes resultados, expresados en milímetros:

113	126	139	171	119	134	170	144	153	175	180	139	126	149	117	154	122	137	140	142
152	149	129	148	175	168	104	104	134	145	131	122	153	149	169	132	147	150	152	140
116	153	177	146	152	112	140	145	152	151	112	162	188	156	170	165	156	156	157	161
162	155	170	160	172	165	155	170	160	172	165	155	182	132	126	158	137	118	145	155

a) Efectúa el recuento de los datos anteriores realizando un diagrama de tallo y hojas.

b) Elabora la tabla estadística correspondiente a las distintas frecuencias y porcentajes, tomando 9 intervalos de la misma amplitud.

c) Representa dos histogramas, uno con las frecuencias relativas y otro con las frecuencias relativas acumuladas de la tabla anterior.

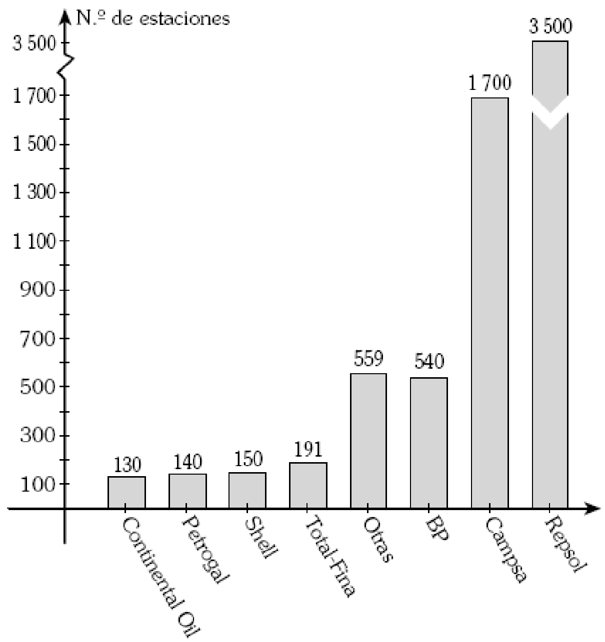
■ 20. Las alturas, en centímetros, de 60 alumnos que cursan 3º de ESO son:

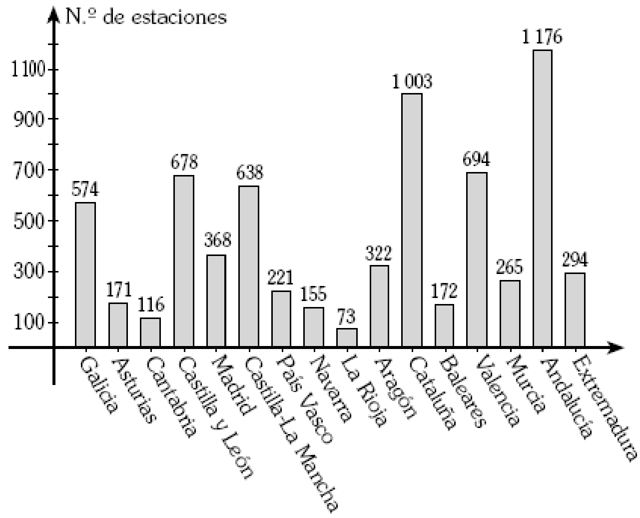
155	157	153	172	165	166	170	159	159	162	151	154	163	172	166
163	162	165	173	152	170	179	168	164	159	176	162	170	158	161
158	157	163	164	159	160	161	161	154	167	158	162	154	157	175
169	162	163	168	172	176	170	164	161	155	170	159	162	165	154

a) Agrupando los datos en intervalos de amplitud 10 centímetros, construye una tabla de frencuencias y el correspondiente histograma.

b) Realiza una tabla y un diagrama análogos a los del apartado anterior, agrupando los datos en intervalos de amplitud 5 centímetros.

18. Los diagramas quedan:





19. En cada caso queda:

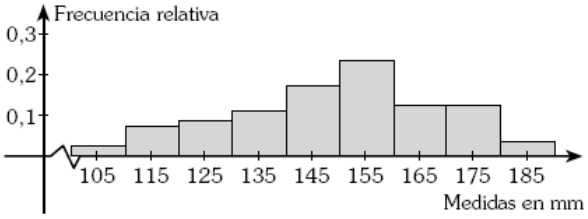
a) El diagrama de tallo y hojas es:

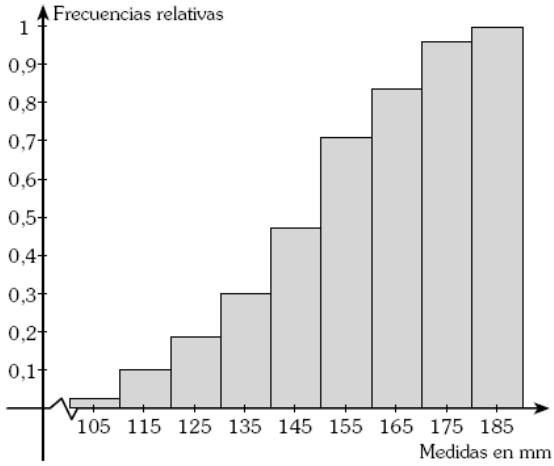
10	4 4
11	2 3 6 7 8 9
12	2 2 2 6 6 6 9
13	1 2 2 4 4 7 7 9 9
14	0 0 0 2 4 5 5 5 6 7 8 9 9 9
15	0 1 2 2 2 2 3 3 3 4 5 5 5 5 6 6 6 7 8
16	0 0 1 2 2 5 5 5 8 9
17	0 0 0 0 1 2 2 5 5 7
18	0 2 8

b) La tabla queda:

Medidas en mm.	Frecuencias absolutas		Frecuencias relativas		Porcentajes	
	Simples	Acumuladas	Simples	Acumuladas	Simples	Acumuladas
[100,110)	2	2	0,0250	0,0250	2,50	2,50
[110,120)	6	8	0,0750	0,1000	7,50	10,00
[120,130)	7	15	0,0875	0,1875	8,75	18,75
[130,140)	9	24	0,1125	0,3000	11,25	30,00
[140,150)	14	38	0,1750	0,4750	17,50	47,50
[150,160)	19	57	0,2375	0,7125	23,75	71,25
[160,170)	10	67	0,1250	0,8375	12,50	83,75
[170,180)	10	77	0,1250	0,9625	12,50	96,25
[180,190)	3	80	0,0375	1,0000	3,75	100,00

c) Los histogramas quedan:

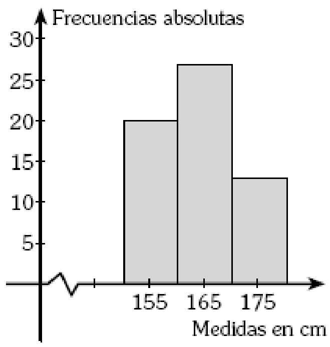




20. En cada caso queda:

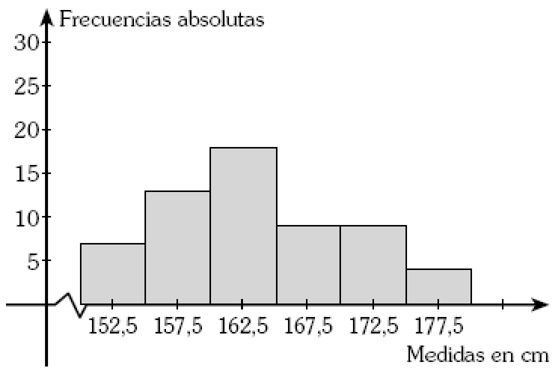
a) La tabla y el histograma quedan:

Alturas	Frecuencias absolutas
[150,160)	20
[160,170)	27
[170,180)	13



b) La tabla y el histograma quedan:

Alturas	Frecuencias absolutas
[150,155)	7
[155,160)	13
[160,165)	18
[165,170)	9
[170,175)	9
[175,180)	4



PÁGINA 282

ACTIVIDADES FINALES

■ 21. Se ha controlado el peso de 50 recién nacidos, obteniéndose los siguientes resultados:

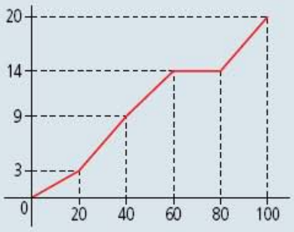
Peso en kilogramos	[2,5; 2,8)	[2,8; 3,1)	[3,1; 3,4)	[3,4; 3,7)	[3,7; 4)	[4; 4,3)	[4,3; 4,6]
Número de niños	2	2	4	10	16	10	6

Representa gráficamente estos datos, eligiendo el gráfico más adecuado.

■ 22. Se considera una distribución de datos agrupados en intervalos cuyo polígono de frecuencias acumuladas es el de la figura.

a) Calcular la tabla de distribución de frecuencias absolutas.

b) Dibuja el correspondiente histograma.



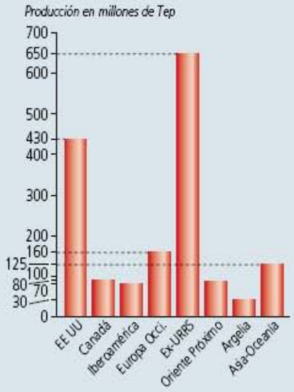
■ 23. El producto interior bruto (PIB) de los países que se indican tuvo la siguiente distribución en porcentajes durante el año 1986:

País	Agricultura	Industria	Servicios
Austria	4	40	56
Bélgica	2	31	67
Canadá	3	24	72
Etiopía	42	18	40
España	6	40	54
Grecia	17	29	54
Ghana	51	16	33
Italia	4	34	62
Mozambique	50	12	38
Venezuela	7	44	49

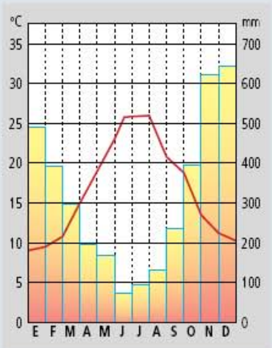
Representa estos datos en un diagrama triangular.

■ 24. Expresa en tablas de forma aproximada los datos recogidos en cada una de las gráficas.

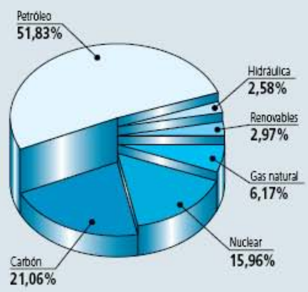
a) Principales productores de gas natural



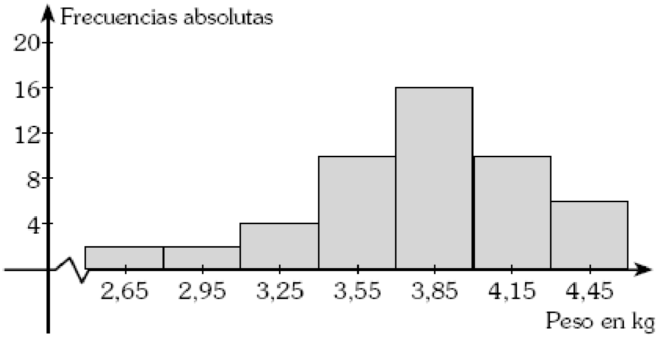
b) Climograma de una ciudad de clima atlántico



d) Procedencia de la energía por fuentes



21. El histograma de frecuencias absolutas queda:

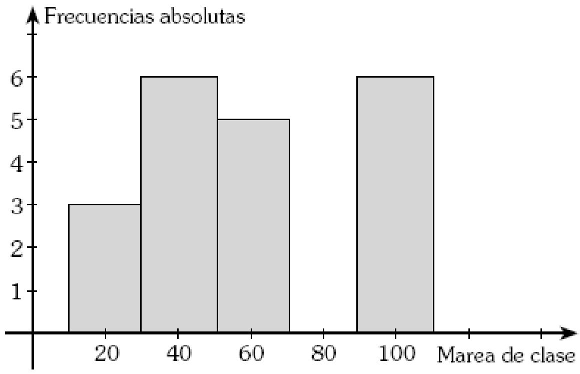


22. En cada caso queda:

a) La tabla de frecuencias es:

Intervalos	Marea de clase	Frecuencia absoluta
$[10,30)$	20	3
$[30,50)$	40	6
$[50,70)$	60	5
$[70,90)$	80	0
$[90,110)$	100	6

b) El histograma es:



23. El diagrama queda:

24. Queda:

a)

Países	EE UU	Canadá	Ibero - américa	Europa Occidental	Ex - URSS	Oriente Medio	Argelia	Asia Oceanía
Millones de Tep	430	100	88	160	650	100	30	125

b)

Mes	E	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Temp. °C	9	10	12	17	21	26	26	24	20	17	12	11
Precip. (mm)	490	390	290	190	170	70	90	130	230	400	620	640

c)

Fuente de energía	Petróleo	Carbón	Nuclear	Gas natural	Renovables	Hidráulica
Porcentaje	51,83	21,06	15,96	6,17	2,97	2,58

Unidad 13 – Distribuciones unidimensionales. Parámetros

PÁGINA 285

cuestiones iniciales

1. Elabora un climograma con los datos siguientes:

	E	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Temp. (°C)	3,7	4,9	8,2	10,5	13,6	18,4	21,5	21,3	18,1	12,5	7,5	4,3
Preci. (mm)	39	34	48	32	42	27	15	14	22	41	19	53

Calcula la temperatura media y la precipitación media anual.

2. Con el fin de estimar el grupo sanguíneo más abundante en un centro de 600 alumnos, hemos extraído una muestra de tamaño 25. Los grupos sanguíneos obtenidos son:

A, A, O, A, O, O, O, O, A, O, O, A, O, O, A, A, O, O, B, AB, B, A, A, A, O

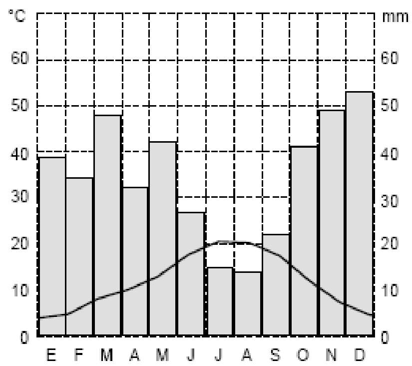
Determina el grupo sanguíneo moda de esta muestra.

3. Los precios de la luz para la tarifa doméstica (en euros por megavatiohora) durante los años que van desde 1997 hasta 2005 figuran en la siguiente tabla. Calcula la media del precio de la luz durante estos años.

Años	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
€ Mvh	118,2	107,7	102,4	99,7	96,7	96,7	97,1	97,1	98,1

SOLUCIONES

1. El climograma pedido es:



La temperatura media es:

$$\bar{t} = \frac{144,5}{12} = 12,04 °C$$

La precipitación media anual:

$$\bar{p} = \frac{386}{12} = 32,17 \text{ mm}$$

2. Los resultados pueden verse en la siguiente tabla.

Grupo sanguíneo	Frecuencia
A	10
B	2
AB	1
O	12

El grupo sanguíneo que presenta mayor frecuencia y, por tanto, el grupo moda es el grupo O.

3. La media vale: $\bar{x} = 101{,}52$ € Mvh.

PÁGINA 297

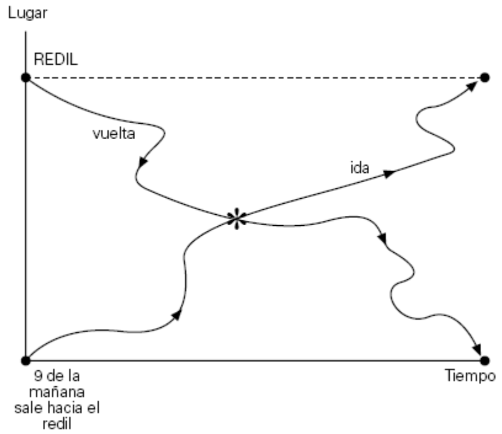
A C T I V I D A D E S

Ten muy en cuenta el lenguaje y la notación adecuados en la resolución de los siguientes problemas.

1. **El pastor y el rebaño.** Un pastor tiene un redil, donde guarda su rebaño, en lo alto de una montaña. Un determinado día sale de su casa a las 9 de la mañana y, después de caminar toda la jornada, llega al lugar donde está el redil. Allí permanece durante 10 días, al término de los cuales y a las 9 de la mañana, regresa a su casa. Al ir bajando, se pregunta: *¿Habrá algún punto del camino por el que pase a la misma hora que pasé el día que subí a la montaña?*
2. **Dos deportistas.** Luis y Ana hacen deporte todos los días. Ayer fueron desde la plaza Mayor hasta el Pinarcillo. Luis corrió la mitad de la distancia y anduvo la otra mitad. Ana corrió la mitad del tiempo y anduvo la otra mitad. Los dos corren a la misma velocidad y andan a la misma velocidad. ¿Quién llegó antes al Pinarcillo?
3. **Triple operación.** Un montañero ha sufrido una grave caída y, al llegar al hospital, ha de ser operado por tres cirujanos distintos. En ese momento hay una epidemia que pueden padecer los cirujanos y el montañero. Esta enfermedad puede contagiarse a través de cualquier útil o por la piel. Las tres intervenciones se debían realizar consecutivamente. Cada cirujano debe operar con ambas manos, pero en el hospital sólo había dos pares de guantes esterilizados. ¿Cómo consiguieron operar al montañero, utilizando los guantes disponibles y evitando toda posibilidad de contagio?

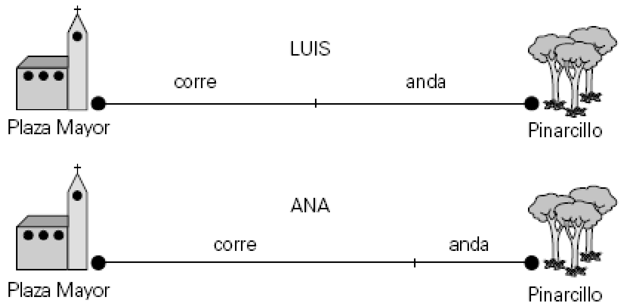
SOLUCIONES

1. El problema se representa del siguiente modo:



En el gráfico está muy clara la situación del problema y la solución del mismo. Efectivamente, hay un punto por el que pasa a la misma hora, y es el punto (*) en el que se encuentran los dos trayectos: de ida y de vuelta.

2. La figura queda:



Cuando Luis está a la mitad del camino, comienza a andar, luego la otra mitad va a velocidad más lenta.
En cambio, Ana, al correr la mitad del tiempo, corre más de la mitad del camino, por lo que menos de la mitad lo hace andando, así que llega antes Ana.

3. El primer cirujano se pone el guante (A) dentro del otro (B), es decir, se pone (A) y encima se pone al (B).

   El segundo cirujano se pone el guante (B) por la cara que no ha tocado al herido.

   El tercer cirujano se pone el guante (A) dándole la vuelta y encima de éste (B), operando al herido por el lado del guante (B) con que ya han operado los otros dos cirujanos.

PÁGINA 300

ACTIVIDADES FINALES

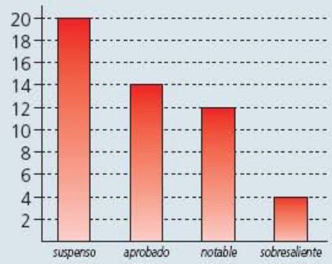
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Para comprobar la resistencia de unas varillas de nailon, se someten 250 varillas a un test de resistencia. El test consiste en comprobar si se rompen o no cuando se aplica una fuerza sobre 5 puntos diferentes de la varilla. El número de roturas sufridas por cada varilla aparece en la tabla adjunta.

   Calcula el número medio de roturas por varilla y el porcentaje de varillas que sufren más de 2 roturas.

Nº roturas	0	1	2	3	4	5
Nº varillas	141	62	31	14	1	1

2. El siguiente diagrama de barras muestra las calificaciones obtenidas por un grupo de 50 alumnos. Construye el histograma correspondiente a las calificaciones numéricas y calcula la calificación media, teniendo en cuenta el siguiente cuadro de calificaciones:



suspenso	aprobado	notable	sobres
[0, 5)	[5, 7)	[7, 9)	[9, 10]

3. A un conjunto de cinco números cuya media aritmética es 7,31 se le añaden 4,47 y 10,15. ¿Cuál es la media del nuevo conjunto de números?

4. Un instituto tiene tres grupos de Bachillerato. La nota media de los alumnos del grupo A es de 5,7 puntos. La de los alumnos del grupo B es de 5,6, siendo 5,5 para los del grupo C. En el grupo A hay 30 alumnos y se sabe que en el grupo C hay 5 alumnos más que en el grupo B. Si la nota media de todos los alumnos de Bachillerato es de 5,6 puntos, ¿cuántos alumnos de Bachillerato hay en el instituto?

5. Un especialista en pediatría obtuvo la siguiente tabla sobre los meses de edad de 50 niños de su consulta en el momento de andar por primera vez:

Meses	9	10	11	12	13	14	15
Niños	1	4	9	16	11	8	1

   a) Dibuja el polígono de frecuencias.

   b) Calcula la media, la moda y la mediana.

6. Se ha pasado un test de 79 preguntas a 600 personas. El número de respuestas correctas se refleja en la siguiente tabla:

Respuesta	[0, 10)	[10, 20)	[20, 30)	[30, 40)	[40, 50)	[50, 60)	[60, 70)	[70, 80]
Nº de personas	40	60	75	90	105	85	80	65

   a) Representa los datos mediante un histograma.

   b) Calcula la media y la moda de respuestas correctas.

   c) Calcula la mediana y el primer cuartil. ¿Qué miden estos parámetros?

7. Los siguientes datos corresponden a la altura en centímetros de los alumnos de una determinada clase:

   150, 169, 171, 172, 172, 175, 176, 177, 178, 179, 181, 182, 183, 184, 184

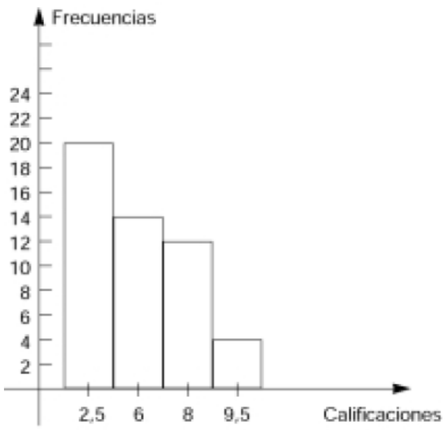
   Calcula la moda, mediana y los cuartiles de la variable. Indica el significado de los parámetros encontrados.

1. La solución queda:

   El número medio de rotura por varilla es: $\frac{175}{250} = 0,7$

   El porcentaje de varillas que sufren más de dos roturas es: $\frac{16}{250} \cdot 100 = 6,4\%$

2. El histograma y la media quedan:



La calificación media es:

$$\bar{x} = \frac{2,5 \cdot 20 + 6 \cdot 14 + 8 \cdot 12 + 9,5 \cdot 4}{20 + 14 + 12 + 4} = \frac{275}{50} = 5,36$$

3. La media es:

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 7,35 + 4,47 + 10,15}{7} = \frac{51,17}{7} = 7,31$$

4. Los datos del problema aparecen en la siguiente tabla:

Grupo	Nota media del grupo	Número de alumnos	Nota media de todos los alumnos
A	5,7	30	
B	5,6	*n*	5,6
C	5,5	*n* + 5	

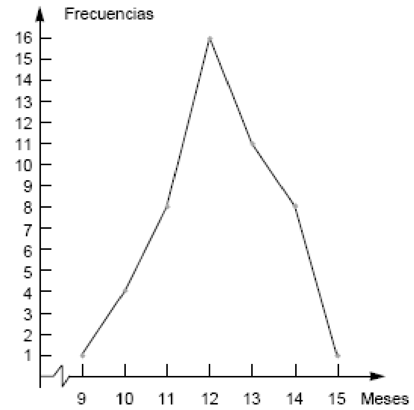
Se tiene que:

$$\frac{5,7 \cdot 30 + 5,6 \cdot n + 5,5 \cdot (n+5)}{30 + n + n + 5} = 5,6$$

Resolviendo la ecuación, se obtiene un valor de *n* de 25, por tanto el número de alumnos totales es: $30 + 25 + 30 = 85$.

5. En cada uno de los casos:

a) El polígono de frecuencia queda:



b) La media es:

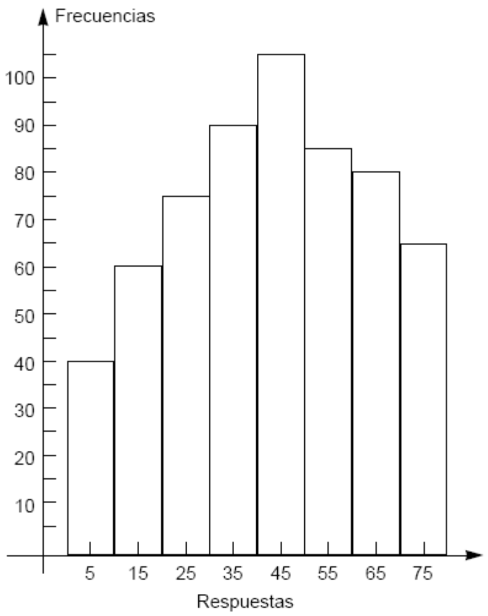
$$\bar{x} = \frac{610}{50} = 12,2 \text{ meses}$$

La moda es: $M_o = 12$ meses

La mediana es: $M_e = 12$ meses

6. En cada uno de los casos:

a) El histograma pedido es:



b) c) La media, mediana y primer cuartel son:

- La media es: $\bar{x} = \frac{25\,600}{600} = 42,67$

- La desviación típica es:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1345\,000}{600}(42,67)^2} = 20,52$$

- La mediana es:

$$M_e = 40 + \frac{300 - 265}{105} \cdot 10 = 43,33$$

- El primer cuartil es:

$$Q_1 = 20 + \frac{150 - 100}{75} \cdot 10 = 26,67$$

7. La solución queda:

   Existen dos valores modales, son 172 y 184 centímetros.

   La mediana o segundo cuartil vale $M_e = Q_2 = 177$ centímetros.

   Los otros dos cuarteles son $Q_1 = 172\,\text{cm}$ *y* $Q_2 = 182\,\text{cm}$.

   El primer cuartil indica que el 25% de los alumnos tienen una estatura entre 150 cm y 172 cm.

   El tercer cuartil indica que otro 25% de los alumnos tiene una estatura entre la mediana 177 cm y 182cm.

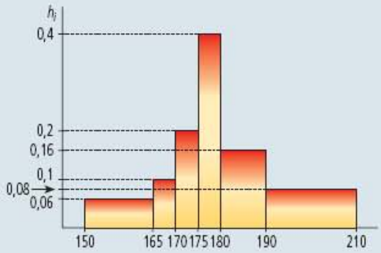
■ 8. Los gastos mensuales en lectura (periódicos, revistas y libros) de 7 personas fueron, en euros, 27, 29, 9, 28, 27,5, 30 y 28,5.

a) Calcula la media y la mediana de los datos anteriores. ¿Cuál de ellas es más representativa para estos datos?

b) Si el precio de los artículos de lectura sube un 10% y se mantiene el consumo, deduce los nuevos valores de la media y la mediana a partir de los resultados obtenidos en el apartado anterior.

■ 9. Se ha medido la altura (en cm) de un grupo de 100 alumnos de Segundo de Bachillerato y, posteriormente, se han agrupado los datos en intervalos (abiertos por la derecha).

Los resultados se han representado en el histograma adjunto.



Se pide:

a) Hallar la correspondiente tabla completa de frecuencias y calcular la media.

b) Representar el polígono de frecuencias acumuladas y hallar la mediana y el primer cuartil.

c) Calcular el percentil 60, es decir, encontrar un intervalo que abarque el 60% de la población.

■ 10. Calcula todos los parámetros de dispersión que se describen en el texto para las siguientes distribuciones estadísticas:

a) Goles por partido en la liga de fútbol 86-87:

Nº de goles	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Partidos	32	71	80	62	36	15	6	2	2

b) Prueba, con puntuación de 0 a 10, a 20 personas:

Intervalo	[0, 2)	[2, 4)	[4, 6)	[6, 8)	[8, 10]
Nº de personas	2	4	8	5	1

c) Calificaciones de 20 estudiantes:

6, 3, 2, 5, 7, 5, 9, 7, 6, 1, 4, 6, 6, 4, 2, 10, 8, 7, 5, 9

■ 11. Las ventas de tres modelos de coches de un concesionario durante 15 semanas son:

Semana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Mod X	25	15	32	19	10	25	15	19	29	17	22	28	18	17	21
Mod Y	20	14	12	25	37	13	44	14	15	39	36	25	15	18	36
Mod Z	19	19	34	43	19	18	26	8	17	30	33	26	12	17	35

Averigua la media y la desviación típica de las ventas de cada uno de los tres modelos de coches y, mediante el coeficiente de variación, compara las respectivas dispersiones relativas.

■ 12. En la tabla aparecen los resultados de las calificaciones correspondientes a un examen de Matemáticas para dos muestras de 10 alumnos:

Grupo A	0	1	1	3	5	5	6	8	8	9
Grupo B	2	2	4	4	4	5	5	6	6	8

¿Qué grupo obtuvo mejores resultados? ¿Cuál es más homogéneo?

8. Las soluciones quedan:

a) La media es: $\overline{x}=\frac{179}{7}\,25{,}57$ euros.

La mediana de los datos del enunciado, previamente ordenados, es: $M_e=28$ euros.

En esta situación es más representativa la mediana que la media.

b) Los parámetros anteriores aumentan ambos un 10% y valen:

$$\overline{x}=28{,}13 \text{ euros} \quad \text{y} \quad M_e=30{,}8 \text{ euros.}$$

9. La solución queda:

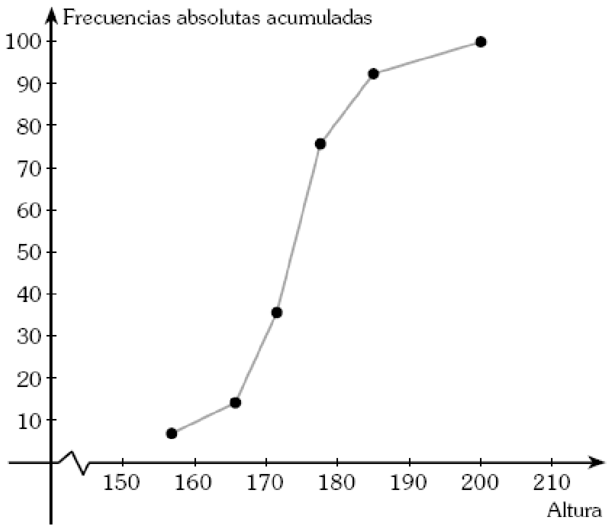
a) La tabla queda:

	Frecuencias absolutas		Frecuencias relativas		Porcentajes	
Altura (cm)	Simples	Acumuladas	Simples	Acumuladas	Simples	Acumuladas
$[150,165)$	6	6	0,06	0,06	6	6
$[165,170)$	10	16	0,10	0,16	10	16
$[170,175)$	20	36	0,20	0,36	20	36
$[175,180)$	40	76	0,40	0,76	40	76
$[180,190)$	16	92	0,16	0,92	16	92
$[190,210)$	8	100	0,08	1,00	8	100

b) La mediana y el primer cuartil son:

$$M_e = 175 + \frac{\frac{100}{2} - 36}{40} \cdot 5 = 176,75\,\text{cm} \qquad Q_1 = 170 + \frac{\frac{100}{4} - 16}{20} \cdot 5 = 172,25\,\text{cm}$$

El polígono de frecuencias queda:



c) El percentil 60 es:

$$P_{60} = 175 + \frac{\frac{60 \cdot 100}{100} - 36}{40} \cdot 5 = 178\,\text{cm}.$$

10. La solución en cada caso queda:

a) El rango es: $R = 8 - 0 = 8$

La desviación media es: $DM = \dfrac{377,4}{306} = 1,23$

La varianza es: $\sigma^2 = 2,39$

La desviación típica es: $\sigma = \sqrt{\dfrac{2342}{306} - (2,29)^2} = 1,55$

El coeficiente de variación es: $V = \dfrac{1,55}{2,29} = 0,6769$

b) El rango es: $R = 10 - 0 = 10$

La desviación media es: $DM = \dfrac{30,8}{20} = 1,54$

La varianza es: $\sigma^2 = 4,19$

La desviación típica es: $\sigma = \sqrt{\dfrac{564}{20} - (4,9)^2} = 2,05$

El coeficiente de variación es: $V = \dfrac{2,05}{4,9} = 0,4184$

c) El rango es: $R = 10 - 1 = 9$

La desviación media es: $DM = \dfrac{38,8}{20} = 1,94$

La varianza es: $\sigma^2 = 5,74$

La desviación típica es: $\sigma = \sqrt{\dfrac{742}{20} - (5,6)^2} = 2,4$

El coeficiente de variación es: $V = \dfrac{2,4}{5,6} = 0,4286$

11. La solución queda:

- Para el modelo x tenemos: $\overline{x} = 20,8 \quad \sigma_x = 5,822 \quad V_x = \dfrac{5,822}{20,8} = 0,2799$.
- Para el modelo y tenemos: $\overline{y} = 24,2 \quad \sigma_y = 10,839 \quad V_y = \dfrac{10,839}{24,2} = 0,4479$.
- Para el modelo z tenemos: $\overline{z} = 23,73 \quad \sigma_z = 9,363 \quad V_z = \dfrac{9,363}{23,73} = 0,3946$.

Las dispersiones, en porcentajes, son, respectivamente: 27,99%, 44,789% y 39,46%.
Los datos del modelo y son más dispersos.

12. La media y la desviación típica de cada grupo es:

Grupo A: $\overline{x}_A = 4,6 \quad \sigma_A = 3,072$ Grupo B: $\overline{x}_B = 4,6 \quad \sigma_B = 1,744$

Según la media los dos grupos obtienen igual resultado. El grupo B es más homogéneo al tener menor desviación típica.

ACTIVIDADES FINALES

13. Los jugadores de un determinado equipo de baloncesto se clasifican, por alturas, según la tabla siguiente:

Altura	[1,70; 1,75)	[1,75; 1,80)	[1,80; 1,85)	[1,85; 1,90)	[1,90; 1,95)	[1,95; 2,00]
Nº de jugadores	1	3	4	8	5	2

Queremos analizar la variable altura, para lo cual se pide calcular:

a) La mediana.

b) La media y la desviación típica.

c) ¿Cuántos jugadores se encuentran por encima de la media más una desviacion típica?

14. Un jugador de baloncesto tiene dos ofertas para la próxima temporada en equipos de categorías similares. Al consultar la información de la pasada liga, observa que los componentes del equipo A tienen una media de 18 puntos con desviación típica de 4 puntos, mientras que en el equipo B la media es de 21 puntos con desviación típica de 9.

Dado que las condiciones económicas de ambos contratos son prácticamente las mismas, el jugador decide fichar por el equipo en el que tenga mayores posibilidades de destacar como figura. ¿Cuál será la opción elegida?

15. Se nos informa que los datos correspondientes a los gráficos A y B son, aproximadamente:

$$\bar{x}_1 = 5,4;\ \sigma_1 = 3,3;\quad \bar{x}_2 = 5,6;\ \sigma_2 = 2,5.$$

Averiguar el gráfico correspondiente a cada par $(\bar{x}, \sigma)$, explicando el razonamiento que se ha seguido.

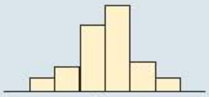


Gráfico A

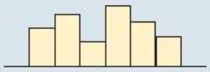


Gráfico B

16. En una clase hay 15 alumnos y 20 alumnas. El peso medio de los 15 alumnos es de 58,2 kg, y el de las 20 alumnas de 52,4 kg. Supongamos que las desviaciones típicas de los dos grupos son, respectivamente, 3,1 kg y 5,1 kg. El peso de Juan es de 70 kg y el de Pilar es de 65 kg. ¿Cuál de ellos puede, dentro del grupo de alumnos de su sexo, considerarse más grueso?

17. Se ha realizado una prueba, en una determinada asignatura, a dos grupos de alumnos, el grupo M y el N. De la información obtenida se han hecho los siguientes cálculos:

$$\bar{x}_M = 15,5 \qquad \bar{x}_N = 75 \qquad \sigma_M = 2,5 \qquad \sigma_N = 30,6$$

Los alumnos 1 y 2 han obtenido los siguientes resultados:

$$x_{1,M} = 16,7 \qquad x_{2,M} = 14 \qquad x_{1,N} = 77,5 \qquad x_{2,N} = 82,4$$

¿Cuál de los dos alumnos puede considerarse mejor?

18. Al estudiar la distribución de la edad en una población, se obtuvieron los resultados siguientes:

Edad (en años)	[0, 20]	(20, 40]	(40, 60]	(60, 80]
Nº de individuos	15	?	15	16

Como se ve, se ha extraviado el dato correspondiente al intervalo (20, 40].

a) ¿Cuál sería el valor de ese dato si la edad media fuera de 35 años?

b) ¿Cuál sería el valor de ese dato si la edad mediana fuera de 35 años?

c) ¿Cuál sería la desviación típica si el dato fuera 16?

13. La solución queda:

a) La mediana es: $M_e = 1,85 + \dfrac{\frac{23}{2} - 8}{8} \cdot 0,05 = 1,872$ cm.

b) La media y la desviación típica son: $\bar{x} = 1,866 \quad \sigma = 0,064$.

c) Los jugadores que se encuentran por encima de: $\bar{x} + \sigma = 1,866 + 0,064 = 1,93$ son 2 del intervalo $[1,90; 1,95)$ y otros dos del intervalo $[1,92; 2,00)$; en total, 4.

14. Debe elegir el equipo A, ya que en él todos los jugadores son parecidos, y, sin embargo, en el equipo B los jugadores presentan grandes diferencias como lo muestra el alto valor de la desviación típica.

15. El gráfico A presenta menos dispersión, por tanto le corresponden $\bar{x}_2 = 5,6 \quad \sigma_2 = 2,5$. La otra pareja de valores son los del gráfico B.

16. La solución queda:

Calculamos las puntuaciones típicas de ambos alumnos:

- Pilar pesa 65 kg, con $\bar{x}_P = 52,4 \quad \sigma_P = 5,1$.
- Juan pesa 70 kg, con $\bar{x}_g = 58,2 \quad \sigma_g = 3,1$.

Por tanto, $z_P = \dfrac{65 - 52,4}{5,1} = 2,471 \qquad z_g = \dfrac{70 - 58,2}{3,1} = 3,806$

Debe considerarse a Juan más grueso, dentro del grupo de alumnos.

17. La solución queda:

Calculamos las puntuaciones típicas de ambos alumnos:

- Primer alumno con $z_{1M} = \dfrac{16,7 - 15,5}{2,5} = 0,48 \qquad z_{1N} = \dfrac{77,5 - 75}{30,6} = 0,082$
- Segundo alumno con $z_{2M} = \dfrac{14 - 15,5}{2,5} = -0,6 \qquad z_{2N} = \dfrac{82,4 - 75}{30,6} = 0,242$

En el examen M ha ido mejor el alumno 1 y, por el contrario, en el examen N ha ido mejor el alumno 2.

18. La solución queda:

a) En este caso:

$$35 = \frac{10 \cdot 15 + 30x + 50 \cdot 15 + 70 \cdot 16}{15 + x + 15 + 16} \Rightarrow x = 82$$

b) En este caso:

$$35 = 20 + \frac{\frac{46 + x}{2} - 15}{x} \cdot 20 \quad \Rightarrow \quad x = 32$$

c) Si el dato fuera 16, la desviación típica sería: $\sigma = 22{,}358$.

Unidad 14 – Distribuciones bidimensionales. Correlación y regresión

PÁGINA 305

cuestiones iniciales

1. Un centro sanitario está llevando a cabo un estudio sobre la edad y el peso de los niños. Un determinado día obtiene los siguientes resultados:

(6, 24) (4, 21) (2, 15) (4, 21) (3, 18) (3, 17) (5, 19) (5, 23) (7, 33) (6, 24)

(3, 18) (4, 21) (5, 19) (7, 33) (6, 24) (8, 40) (5, 20) (6, 24) (5, 19) (6, 28)

a) Construye una tabla estadística de doble entrada.

b) Encuentra la media y la desviación típica de las edades y del peso en kilogramos.

2. Las ventas de libros de aventuras en una librería tiene como valores $\bar{x} = 10$, $\sigma = 3$. ¿Cómo se clasificaría un día que se vendan 15 libros de aventuras?

3. Diez alumnos han realizado el último mes dos ejercicios de Matemáticas. Las notas son las de la tabla.

Primer ejercicio	4	7	6	9	4	7	9	4	8	10
Segundo ejerc.	5	8	5	10	3	6	8	4	8	10

Dibuja la nube de puntos. Ajusta *a ojo* una recta a la nube de puntos y estima el valor que tendrá la posible correlación.

SOLUCIONES

1. En cada apartado:

a) La tabla de doble entrada es:

y peso \ x edad	2	3	4	5	6	7	8	TOTALES
$[15,20)$	1	3		3				7
$[20,25)$			3	2	4			9
$[25,30)$					1			1
$[30,35)$						2		2
$[35,40)$							1	1
TOTALES	1	3	3	5	5	2	1	20

b) Los distintos parámetros son:

- Los parámetros de las edades:

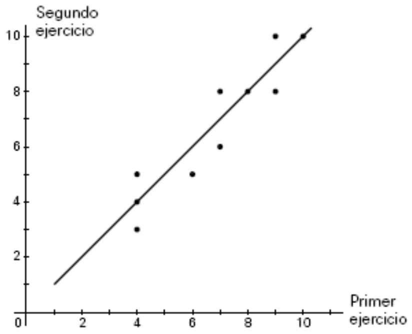
$$\bar{x} = 5 \qquad \sigma_x = 1{,}517$$

- Los parámetros de los pesos son:

$$\bar{y} = 23{,}05 \qquad \sigma_y = 6{,}07$$

2. Es un día raro ya que 15 se sitúa en el intervalo $(\overline{x}-2\sigma, \overline{x}+2\sigma)$. La puntuación típica $z=\dfrac{15-10}{3}=1,6667$ se aleja bastante de la media estándar que es cero.

3. La solución queda:



La nube de puntos aparece en la gráfica de la izquierda.
La recta ajustada *a ojo* puede ser bisectriz del cuadrante, $y=x$.
La correlación será positiva y fuerte, próxima a 1.

PÁGINA 317

A C T I V I D A D E S

■ Intenta buscar analogías en tu *archivo*, y resuelve los siguientes problemas.

1. **Juego al quince.** Nueve tarjetas numeradas del 1 al 9 se colocan sobre la mesa. Es un juego para dos jugadores y gana el primero que consiga sumar 15, tomando alternativamente una tarjeta cada uno. Intenta elaborar dos estrategias que puedan conducir a la victoria: una para usarla si eres tú el primero en comenzar el juego, y otra para si te toca en segundo lugar.

2. **Las gemas de la familia.** Un antiguo problema indio cuenta de qué manera, al morir un rico nabab, sus hijos se repartieron la herencia, consistente en un cierto número de gemas iguales. El hijo mayor tomó una piedra más una séptima parte del resto; el segundo, 2 piedras más un séptimo del resto; y así sucesivamente. Al terminar el reparto, todos los hijos habían recibido el mismo número de gemas. ¿Cuántos hijos y gemas tenía el nabab?

3. **Lúnula y triángulo.** ¿Existe alguna relación entre el área de la lúnula y la del triángulo de la figura adjunta?

4. **La cadena del estudiante.** Un estudiante, a mediados de mes, se ha quedado sin dinero y no puede pagar la pensión de los últimos quince días. Dispone de una cadena de oro de 15 cm de longitud, y llega al acuerdo con la patrona de que le pagará la pensión entregándole 1 cm de cadena cada día. El estudiante piensa en la forma de cumplir con el acuerdo al que ha llegado, y que la cadena no pierde valor al cortarla en muchos trozos. Por esto, decidió cortar la cadena en sólo 4 trozos. ¿Cómo consiguió pagar a la patrona?

SOLUCIONES

1. La solución queda:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

La estrategia consiste en establecer una analogía con el cuadro mágico 3 x 3 que contiene los nueve primeros números naturales 1 … 9 y la constante mágica 15.
Hay que utilizarlo como si se jugase a las tres en raya.

2. En total el nabab tenía 36 gemas y 6 hijos.

Al mayor le da: $1+\frac{35}{7}=6$ gemas. Quedan 30.

Al 2.º le da: $2+\frac{28}{7}=6$ gemas. Quedan 24.

Al 3.º le da: $3+\frac{21}{7}=6$ gemas. Quedan 18.

Al 4.º le da: $4+\frac{14}{7}=6$ gemas. Quedan 12.

Al 5.º le da: $5+\frac{7}{7}=6$ gemas. Quedan 6.

Al 6.º le da: 6 gemas.

3. La solución queda:

$$\text{Área triángulo} = \frac{r^2}{2};$$

$$\text{Área lúnula} = \frac{1}{2}\,\text{Área semicírculo} - \text{Área } (x);$$

$$\text{Área } (x) = \frac{1}{4}\,\text{Área círculo} - \text{Área triángulo} = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\text{Área lúnula} = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}\right) = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{\pi r^2}{4} + \frac{r^2}{2} = \frac{r^2}{2}$$

Ambas áreas son iguales.

4. Cortó la cadena en 4 trozos de 1, 2, 4 y 8 cm cada uno.

- El primer día le dio 1 cm.
- El segundo día le dio el trozo de 2 cm y le devolvió la patrona el de 1 cm.
- El tercer día le dio el trozo de 1 cm, luego la patrona tiene 1 cm y 2 cm.
- El cuarto día le dio el trozo de 4 cm y la patrona le devolvió los dos trozos que tenía.
- Así sucesivamente.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Estudia si existe o no correlación entre las siguientes variables estadísticas e indica su tipo en caso de que exista.

   a) Estatura de un estudiante y calificación que este obtiene en Lengua.

   b) Visión espacial de un estudiante y calificación que este obtiene en Dibujo Técnico.

   c) Número de vehículos en las carreteras y número de accidentes.

   d) Peso de un alumno y calificación en Educación Física.

   e) Gastos en publicidad de una empresa y ventas efectuadas por la misma.

   f) Número de plazas hospitalarias e índice de mortalidad de un país.

2. Se ha pasado una encuesta a los 20 vecinos de una urbanización de las afueras de una gran ciudad obteniéndose los siguientes resultados en los que el primer número se refiere al número de viajes realizados por los padres y el segundo al número de viajes realizados por sus hijos.

   (4, 1) (3, 4) (2, 5) (1, 6) (3, 2) (2, 6) (2, 6) (4, 2)

   (1, 7) (1, 6) (4, 1) (1, 7) (2, 4) (2, 6) (3, 3) (4, 2)

   (4, 1) (4, 2) (1, 6) (2, 5)

   a) Construye la tabla de doble entrada correspondiente.

   b) Representa gráficamente los datos de esta tabla y a la vista de la gráfica estudia si existe correlación entre las variables y el tipo de la misma.

3. En una muestra de 100 familias se han estudiado las variables estadísticas X, número de miembros en edad laboral, e Y, número de ellos que se encuentran en activo. Los resultados obtenidos pueden verse en la tabla adjunta.

$X \backslash Y$	1	2	3
1	9	0	0
2	14	7	0
3	16	9	5
4	20	12	8

   a) Construye la tabla bidimensional simple correspondiente.

   b) Obtén las distribuciones marginales de X e Y.

   c) Calcula la media y la derivación típica de las distribuciones marginales.

4. Se ha solicitado a un grupo de 50 individuos información sobre el número de horas que dedica diariamente a dormir y a ver la televisión. La clasificación de las respuestas ha permitido elaborar la siguiente tabla:

Nº horas dormidas X	6	7	8	9	10
Nº horas televisión Y	4	3	3	2	1
Frecuencias absolutas	3	16	20	10	1

   a) Realiza el diagrama de dispersión correspondiente.

   b) Calcula la media y la desviación típica de cada una de las variables.

   c) Halla el porcentaje de individuos que ven la televisión por encima de la media.

   d) Calcula el coeficiente de correlación lineal.

1. En cada caso:

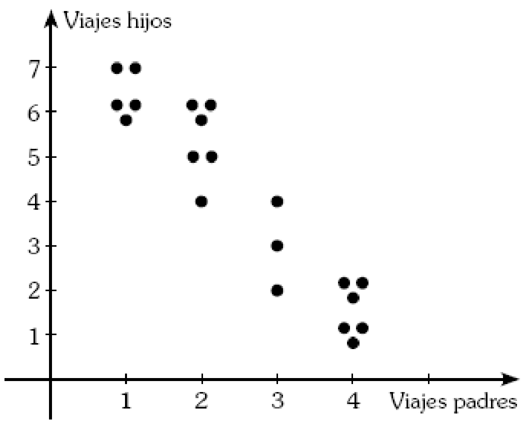
   a) No es probable que exista correlación.
   b) Es probable que haya correlación positiva y fuerte.
   c) Es probable que haya correlación positiva y fuerte.
   d) No es probable que exista correlación.
   e) Es probable que haya correlación positiva.
   f) Es probable que haya correlación positiva y fuerte.

2. La solución queda:

a) La tabla de doble entrada es:

y viajes hijos / x viajes padres	1	2	3	4
1	—	—	—	3
2	—	—	1	3
3	—	—	1	—
4	—	1	1	—
5	—	2	—	—
6	3	3	—	—
7	2	—	—	—

b) El diagrama de dispersión es:



Las variables presentan una correlación fuerte y negativa.

3. La solución queda:

a)

x \ y	1	2	3	
1	9	0	0	9
2	14	7	0	21
3	16	9	5	30
4	20	12	8	40
	59	28	13	

b)

x_i	f_i
1	9
2	21
3	30
4	40

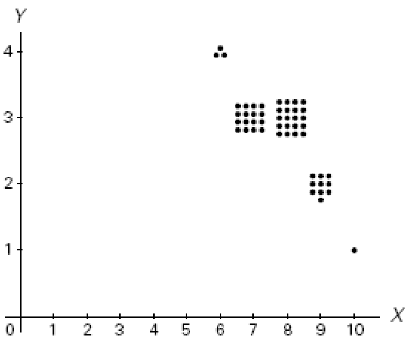
y_i	f_i
1	59
2	28
3	13

c) $\bar{x} = 3{,}01 \qquad \sigma_x = 0{,}98$

$\bar{y} = 1{,}54 \qquad \sigma_y = 0{,}71$

4. La solución queda:

a)



b) Para ambas variables queda:

$\bar{x} = \frac{390}{50} = 7{,}8$ horas dormidas y $\sigma_x = 0{,}89$

$\bar{y} = \frac{141}{50} = 2{,}82$ horas dormidas y $\sigma_y = 0{,}71$

c) El porcentaje de individuos por encima de la media es: $\frac{20+16+3}{50} = 0{,}78$, es decir, el 78%.

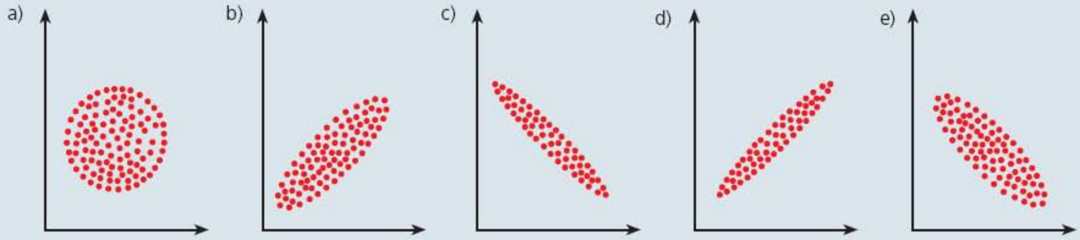
d) Para el cálculo de $r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$, calculamos la covarianza: $\sigma_{xy} = \frac{1078}{50} - 7{,}8 \cdot 2{,}82 = -0{,}436$.

Así $r = \frac{-0{,}436}{0{,}89 \cdot 0{,}71} = -0{,}69$. La correlación no es muy fuerte y es negativa.

■ 5. En cinco estudios estadísticos se han obtenido los siguientes coeficientes de correlación lineal:

$r = -0{,}98$ $\quad r = 0{,}93$ $\quad r = 0{,}05$ $\quad r = 0{,}71$ $\quad r = -0{,}62$

Identifica, justificando la respuesta, la nube de puntos correspondiente a cada uno de ellos:



■ 6. La estadística de ingresos de determinadas empresas, en millones de euros, y de empleados, en miles, es la siguiente:

Ingresos	5,7	3,8	1,9	1	1
Empleados	16	29	17	6	9

a) Estudia la correlación existente entre ambas variables.

b) Determina la recta de regresión de ingresos en función del número de empleados.

■ 7. Una compañía discográfica ha recopilado la siguiente información sobre el número de conciertos ofrecidos, durante el verano, por 15 grupos musicales y las ventas de discos de estos grupos (expresadas en miles de CD), obteniendo los datos siguientes:

Conciertos \ CD	10-30	30-40	40-80
1-5	3	0	0
5-10	1	4	1
10-20	0	1	5

a) Calcula el número medio de CD vendidos por estos grupos.

b) ¿Cómo es el grado de dependencia lineal del número de conciertos dado por el grupo con respecto al número de discos que ha vendido?

c) Obtén la recta de regresión que explica la dependencia anterior.

d) Si un grupo musical ha vendido 18 000 CD, ¿qué número de conciertos es previsible que dé?

■ 8. En la tabla figuran los datos correspondientes a una variable estadística bidimensional.

a) Calcula la covarianza.

b) Obtén e interpreta el coeficiente de correlación lineal.

c) Determina la ecuación de la recta de regresión de Y sobre X.

Y \ X	100	50	25
14	1	1	0
18	2	3	0
22	0	1	2

■ 9. La siguiente tabla muestra los valores observados de dos variables X e Y en cinco individuos:

X	1	–1	a	2	3
Y	–2	–3	2	1	0

a) Halla a para que el coeficiente de correlación sea nulo.

b) Suponiendo que $a = 4$, halla la recta de regresión de Y sobre X y estima el valor de Y cuando X tome el valor –2.

5. La correspondencia de cada gráfico con su coeficiente de correlación es:

a) $r = 0,05$ c) $r = -0,98$ e) $r = -0,62$
b) $r = 0,71$ d) $r = 0,93$

6. La solución queda:

Los parámetros estadísticos son: $\bar{x} = 2,68$; $\bar{y} = 15,4$; $\sigma_x = 1,98$; $\sigma_y = 7,96$; $\sigma_{xy} = 8,47$.

a) La correlación es $r = \dfrac{8,47}{1,98 \cdot 7,96} = 0,54$.

b) La recta de regresión es: $y - 15,4 = \dfrac{8,47}{3,92}(x - 2,68)$.

7. Llamamos x al número de CDs vendidos e y al número de conciertos. Los datos en una tabla simple son:

x	3	8	8	8	15	15	
y	20	20	35	60	35	60	
f_i	3	1	4	1	1	5	$\ldots \to 15$

Los parámetros estadísticos son: $\bar{x} = 9,6$; $\bar{y} = 41$; $\sigma_x = 4,71$; $\sigma_y = 16,55$; $\sigma_{xy} = 63,4$.

a) El número medio de CDs vendidos es $\bar{x} = 9,6$.

b) El coeficiente de correlación es $r = \dfrac{63,4}{4,71 \cdot 16,55} = 0,814$. La dependencia lineal es moderada.

c) La recta de regresión es: $y - 41 = \dfrac{63,4}{22,18}(x - 9,6)$.

d) Si $x = 18 \Rightarrow y = 65,01$ conciertos.

8. Los valores de la variable simple son:

x	100	100	50	50	50	25
y	14	18	14	18	22	22
f_i	1	2	1	3	1	2

a) Los parámetros estadísticos son: $\overline{x}=60$; $\overline{y}=18,4$; $\sigma_x=27,83$; $\sigma_y=2,83$; $\sigma_{xy}=-4,4$.

b) El coeficiente de correlación es: $r=-0,56$. La correlación es negativa y débil.

c) La recta de regresión de Y sobre X es: $y-18,4=\dfrac{-44}{774,51}(x-60)$.

9. La solución queda:

a) El coeficiente de correlación lineal es nulo si la covarianza es nula.
Por tanto:

$$\frac{3+2a}{5}-(-0,4)\cdot\frac{5+a}{5}=0 \quad\Rightarrow\quad \text{La solución es: } a=-2,083.$$

b) Los parámetros de las variables son: $\overline{x}=1,8$; $\overline{y}=-0,4$; $\sigma_x=1,72$; $\sigma_y=1,85$; $\sigma_{xy}=2,92$.

La recta de regresión de Y sobre X es: $y+0,4=\dfrac{2,92}{(1,72)^2}(x-1,8) \Rightarrow y=0,99x-2,18$

Si $x=-2$, el valor estimado de y es: $y=0,99(-2)-2,18=-4,16$

ACTIVIDADES FINALES

10. De dos variables X e Y se sabe que la desviación típica de X es $\sqrt{3}$, la media y la desviación típica de Y valen 1 y 2, respectivamente, y la ecuación de la recta de regresión de Y sobre X es $2x + 3y = 6$. Hallar:

    a) La media de X.

    b) La covarianza de X e Y.

    c) El coeficiente de correlación.

    d) La recta de regresión de X e Y.

11. La siguiente tabla muestra las notas que 5 amigos de primer curso de Bachillerato obtuvieron en la primera y segunda evaluación en la asignatura de Inglés:

1ª Evaluación (X)	5	6,5	8	4	3
2ª Evaluación (Y)	4,5	7	7,5	5	3,5

    a) Calcula el coeficiente de correlación lineal, interpretando el resultado.

    b) Determina las rectas de regresión de Y sobre X y de X sobre Y.

    c) Halla el punto donde se cortan las dos rectas de regresión.

12. En las bibliotecas de seis ciudades se han analizado la afluencia de lectores X (expresada en miles de personas) y el número de libros prestados (Y), obteniéndose los siguientes datos:

X	0,5	1	1,3	1,7	2	2,5
Y	180	240	250	300	340	400

    a) ¿Cuál es el número medio de libros prestados en el conjunto de bibliotecas?

    b) Ajusta estos datos a una recta en la que obtener el número de libros prestados a partir del número de lectores que van a la biblioteca.

    c) Si acudiesen 1 500 lectores a una biblioteca, ¿cuántos libros se prestarían?

13. La recta de regresión del gasto anual en alimentos Y (en euros) por familia, en función de los ingresos anuales X (en euros), viene dada por $y = 600 + 1{,}5x$.

    a) ¿Cuál es el gasto en alimentos en familias con ingresos anuales de diez mil euros?

    b) Sabiendo que el ingreso medio es de doce mil euros, halla el gasto medio anual en alimentos.

14. La estatura media de una muestra de padres es de 1,68 m con una desviación típica de 5 cm. En una muestra de sus hijos, la estatura media es de 1,70 m con una desviación típica de 7,5. El coeficiente de correlación entre las estaturas de padres e hijos es 0,7. Si un padre mide 1,80 m, ¿qué estatura se estima que tendrá su hijo?

15. Las rectas de regresión para una muestra de las variables x e y son:

$$y = 0{,}52x + 21{,}7 \quad ; \quad x = 0{,}85y + 40{,}97$$

    Determina las medias muestrales $\bar{x}, \bar{y}$ y el coeficiente de correlación lineal de Pearson.

10. La solución queda:

a) La recta de regresión $2x+3y=6$ pasa por el punto $(\overline{x},\overline{y})$, por tanto:

$$2\overline{x}+3\cdot 1=6 \;\Rightarrow\; 2\overline{x}=3 \;\Rightarrow\; \overline{x}=\frac{3}{2}$$

b) El coeficiente de regresión $\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^{\,2}}$ vale para la recta $2x+3y=6$, por tanto:

$$\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^{\,2}}=-\frac{2}{3};\text{ al ser } \sigma_x=\sqrt{3}, \text{ obtenemos } \sigma_{xy}=-2$$

c) El coeficiente de correlación es: $r=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\cdot\sigma_y}=\frac{-2}{\sqrt{3}\cdot 2}=-0,58$

d) La recta de regresión de X sobre Y es: $x-1,5=\frac{-2}{2^2}(y-1) \;\Rightarrow\; x=-0,5y+2$

11. La solución queda:

a) Los parámetros estadísticos son: $\overline{x}=5,3$; $\overline{y}=5,5$; $\sigma_x=1,78$; $\sigma_y=1,52$; $\sigma_{xy}=2,55$.

El coeficiente de correlación es: $r=0,94$. La correlación es positiva y muy fuerte.

b) La recta de regresión de Y sobre X es: $y-5,5=\frac{2,55}{1,78^2}(x-5,3) \;\Rightarrow\; y=0,8x+1,23$.

La recta de regresión de X sobre Y es: $y-5,3=\frac{2,55}{1,52^2}(x-5,5) \;\Rightarrow\; x=1,1y-0,77$.

c) Las rectas de regresión se cortan en el punto $(\overline{x},\overline{y})$, es decir, en $(5,3;5,5)$.

12. La solución queda:

a) El número medio de libros prestados es $\overline{y}=285$.

b) La recta de regresión de Y sobre X es: $y-285=\frac{46,67}{0,66^2}(x-1,5) \;\Rightarrow\; y=107,14x+124,3$

c) Si $x=1,5$ se prestarían, aproximadamente: $y=107,14\cdot 1,5+124,3=285$ libros.

13. La solución queda:

a) Si $x=10\,000$ euros, el gasto anual en alimentación será: $y=600+1,5\cdot 10\,000=15\,600$ euros.

b) Como la recta de regresión pasa por el punto $(\overline{x},\overline{y})$, al ser, $\overline{x}=12\,000$, obtenemos como gasto medio anual n alimentos: $\overline{y}=600+1,5\cdot 12\,000=18\,600$ euros.

14. Al ser el coeficiente de correlación $r = 0,7$; obtenemos:

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \Rightarrow 0,7 = \frac{\sigma_{xy}}{5 \cdot 7,5} \Rightarrow \sigma_{xy} = 26,25$$

La recta de regresión de Y (estatura de los hijos) sobre X (estatura de los padres) es:

$$y - 170 = \frac{26,25}{5^2}(x - 168) \Rightarrow y = 1,05x - 6,4$$

Si un padre mide 180 cm, se estima que su hijo tendrá: $y = 1,05 \cdot 180 - 6,4 = 182,6$ cm.

NOTA: Todos los datos se han convertido a centímetros.

15. La solución queda:

En punto de corte de las rectas es $(106,48; 77,07)$ por tanto $\overline{x} = 106,48$ e $\overline{y} = 77,07$.

Además como $r^2 = m \cdot m' = 0,52 \cdot 0,85 \Rightarrow r = 0,665$ es el valor del coeficiente de correlación de Pearson.

Unidad 15 – Distribuciones discretas. Distribución binomial

PÁGINA 325

cuestiones iniciales

1. En las familias formadas por cuatro hijos la probabilidad de que estos sean dos varones y dos hembras es:

a) 1/4 b) 1/2 c) 3/8 d) No puede saberse

2. Una empresa fabrica chips para ordenadores personales. Tras varios controles de calidad descubre que el 5% de los que fabrica son defectuosos. Elegidos 5 chips al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya 4 defectuosos?

3. Un arquero tiene una probabilidad de 5/6 de hacer blanco. Si realiza cuatro disparos, calcula:

a) La probabilidad de hacer dos blancos.

b) La probabilidad de hacer dos o más blancos.

4. Una fábrica de galletas empaqueta estas en cajas de cien unidades cada una. Para probar la eficacia de la producción, se han analizado 80 cajas, comprobando las galletas defectuosas que contiene cada una y se han obtenido los resultados de la tabla:

Nº de galletas defectuosas	0	1	2	3	4	5	6
Número de cajas	40	15	10	9	3	2	1

Calcula, para esta distribución, la media aritmética (μ), la desviación típica (σ) y el número de cajas que están en los intervalos $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$, $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$, $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$.

SOLUCIONES

1. La probabilidad es: $P(2V \text{ y } 2M) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$

2. Queda: $P(x=4) = \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{5}{100}\right)^4 \left(\frac{95}{100}\right) = 0{,}0000297$

3. En cada caso:

a) $P(2B) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \binom{4}{2} = 0{,}1157$

b) $P(\geq 2B) = P(2B) + P(3B) + P(4B) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \binom{4}{2} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \binom{4}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}98$

4. Sabemos que: $\mu = 1{,}125$; $\sigma = 1{,}452$.

En $(\mu - \sigma, \mu + \sigma) = (-0{,}327; 2{,}577)$ hay 65 cajas defectuosas, es decir, el 81,25%.
En $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma) = (-1{,}779; 4{,}029)$ hay 77 cajas defectuosas, es decir, el 96,25%.
En $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma) = (-3{,}231; 5{,}481)$ hay 79 cajas defectuosas, es decir, el 98,75%.

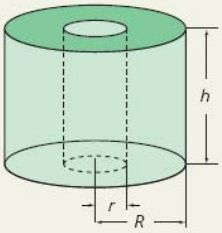
ACTIVIDADES

■ Usando la simetría o los casos límites, intentar resolver los siguientes problemas:

1. El bizcocho. La figura representa la forma de un bizcocho especial. En la etiqueta figura que el volumen es:

$$V = \pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2)$$

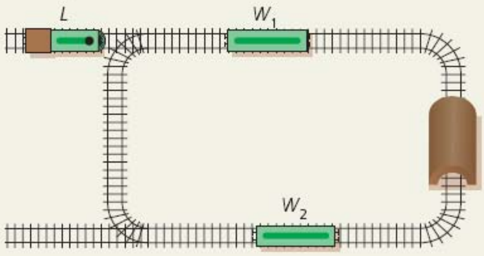
¿Es cierto?



2. Números felices. El número 44 es un número feliz, pues:

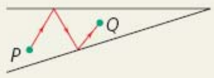
$$44 \Rightarrow 4^2 + 4^2 = 32 \Rightarrow 3^2 + 2^2 = 13 \Rightarrow 1^2 + 3^2 = 10 \Rightarrow 1^2 + 0^2 = 1$$

Investiga sobre los números felices.



3. Cambio de vagones. La figura muestra unas vías de tren, en las cuales hay dos vagones W_1 y W_2, una locomotora L, situada en una vía muerta, y un túnel, por el cual sólo puede pasar la locomotora. La locomotora puede enganchar los vagones por delante y por detrás, e incluso puede arrastrar los dos vagones a la vez. El problema consiste en cambiar la posición de los dos vagones, dejando la locomotora en una de las dos vías muertas. Puedes simular este problema utilizando tres monedas diferentes.

4. Doble frontón. Un pelotari se encuentra en P y golpea la pelota. Esta debe llegar al pelotari que se encuentra en Q después de pegar en ambos frontones. Construye la trayectoria que debe seguir la pelota.



SOLUCIONES

1. Veamos los dos casos límite:

   1.^{er} $r = 0 \Rightarrow V = \pi \cdot h \cdot R^2 =$ volumen del cilindro.

   2.^{do} $r = R \Rightarrow V = \pi \cdot h \cdot (R^2 + R^2) = 2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot$ h, pero si $r = R$ el volumen es cero.

   Luego la fórmula es falsa.

2. La solución queda:

   Números felices de 2 cifras:

$10 \Rightarrow 1^2 + 0^2 = 1$

$23 \Rightarrow 2^2 + 3^2 = 13 \Rightarrow 1^2 + 3^2 = 10 \Rightarrow 1^2 + 0^2 = 1$

$32 \Rightarrow 3^2 + 2^2 = 13 \Rightarrow 1^2 + 3^2 = 10 \Rightarrow 1^2 + 0^2 = 1$

$44 \Rightarrow 4^2 + 4^2 = 32 \Rightarrow 3^2 + 2^2 = 13 \Rightarrow 1^2 + 3^2 = 10 \Rightarrow 1^2 + 0^2 = 1$

$13 \Rightarrow 1^2 + 3^2 = 10 \Rightarrow 1^2 + 0^2 = 1$

$31 \Rightarrow 3^2 + 1^2 = 10 \Rightarrow 1^2 + 0^2 = 1$

Números felices de 3 cifras:

$100 \Rightarrow 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1$ $\qquad$ $130 \Rightarrow 1^2 + 3^2 + 0^2 = 10 \Rightarrow 1^2 + 0^2 = 1$

$103 \Rightarrow 1^2 + 0^2 + 3^2 = 10 \Rightarrow 1^2 + 0^2 = 1$

Igualmente: 310; 301; 230; 203; 320; 302; 440; 404.

Números felices de 4 cifras:

Igual que los que hemos estado formando hasta ahora más otros como 1 339.

Así sucesivamente podemos seguir con los demás.

3. Después de varios intentos vemos que la situación final, para lograr el objetivo buscado, que debe quedar en la vía muerta superior es: W_1 W_2 L.

   Llamamos A al lugar en que inicialmente está el vagón W_1 y B al lugar donde está inicialmente el vagón W_2.

   Los pasos a seguir son:

   1.º L coge W_1 y lo lleva a la vía muerta de abajo.

   2.º L da la vuelta al circuito pasando por el túnel y empuja a W_2 hasta el punto A.

   3.º L coge W_1 y lo lleva junto a W_2.

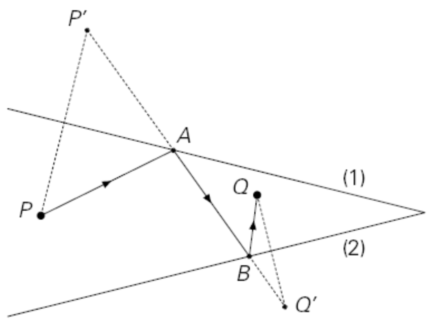
   4.º L da la vuelta al circuito y empuja a ambos vagones a la vía muerta de arriba, quedando la situación que buscábamos, W_1 W_2 L.

   5.º L remolca a W_2 hasta el punto A.

   6.º L da la vuelta al circuito y engancha a W_1 llevándolo a la posición B.

   7.º L vuelve a la vía muerta de arriba y los vagones han cambiado de posición.

4. La solución queda:



Este problema es una doble simetría.

Construimos P', simétrico de P respecto a la banda (1), y Q' simétrico de Q respecto a la banda (2).

Unimos P' y Q' y llamamos A y B a los puntos en que la recta P'Q' corta a las bandas.

La trayectoria pedida es $PABQ$.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Lanzamos dos dados al aire y anotamos los números de sus caras superiores. Hallar:

   a) El espacio muestral.

   b) El suceso «la suma de los números obtenidos es 7».

   c) El suceso «ambos números son iguales».

   d) El suceso «el producto de los números es mayor o igual que 20».

   e) La probabilidad de cada uno de los sucesos anteriores.

2. Extraemos una carta de una baraja española de 52 cartas. Sean los sucesos:

   A = {sacar copas} B = {sacar as} C = {sacar figura}

   a) Determina los sucesos siguientes:

   $A \cap B$; $A \cap B \cap C$; $\bar{A} \cap C$; $B \cup C$

   b) Calcula las probabilidades asociadas a los sucesos anteriores.

3. Una moneda está trucada de forma que la probabilidad de obtener cara es doble de la de obtener cruz. Halla cada una de estas probabilidades.

4. Lanzamos tres monedas al aire, calcula la probabilidad de que:

   a) Salgan tres caras.   b) Salgan al menos dos cruces.

   c) Salga como máximo una cara.   d) No salga ninguna cara.

5. Una urna tiene 10 fichas blancas, 8 azules y 7 verdes.

   - Sacamos una ficha, halla la probabilidad de que:

     a) Salga ficha azul   b) Salga ficha blanca o verde   c) No salga ficha verde.

   - Sacamos dos fichas, una detrás de otra y sin reemplazar la primera, halla la probabilidad de que:

     a) Salgan dos fichas verdes.   b) Salga la primera azul y la segunda blanca.

     c) Salga una azul y una blanca.   d) Salgan dos fichas iguales.

   - Haz el apartado anterior pero reemplazando la ficha.

6. A una parada de bus llegan dos autobuses uno rojo y el otro verde. La probabilidad de coger el rojo es 0,6 y el verde del 0,4. El bus rojo llega puntual a su destino el 80% de las veces y el verde el 90%. Un día que llegamos a la parada nos preguntamos:

   a) ¿Cuál es la probabilidad de coger el bus rojo y no llegar puntual al destino?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de llegar puntual al destino?

7. Una urna contiene 5 bolas rojas y 8 verdes. Se saca una bola y en su lugar se pone una del otro color. A continuación se saca otra bola. Hallar la probabilidad de que la segunda bola sea verde.

1. Los apartados quedan:

a) $E=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)...\ (6,5),(6,6),\}$
El espacio muestral tiene 36 elementos.

b) $A=$"suma de puntos es 7"$=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$

c) $B=$"números iguales"$=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

d) $C=$"producto ≥ 20"$=\{(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),(5,6),(6,4),(6,6),(6,5),(6,6)\}$

e) $P(E)=1;\ P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6};\ P(B)=\frac{1}{6};\ P(C)=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

2. La solución queda:

a) En cada caso es:

$A\cap B\equiv$ sacar as de copas.

$A\cap B\cap C\equiv$ sacar as de copas.

$\overline{A}\cap C=\{$as de oros, as de espadas, as de bastos, sota de oros, sota de espadas, sota de bastos, caballo de oros, caballo de espadas, caballo de bastos, rey de oros, rey de espadas, rey de bastos$\}$

$B\cup C=$ sacar as o sacar figura.

b) Las probabilidades en cada uno de los casos es:

$$P(A\cap B)=\frac{1}{52}\qquad P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{52}\qquad P(\overline{A}\cap C)=\frac{12}{52}=\frac{3}{13}\qquad P(B\cup C)=\frac{4}{13}$$

3. Llamando c a cara y x a cruz obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r}P(c)+P(x)=1\\ P(c)=2P(x)\end{array}\right\}\Rightarrow\ P(c)=\frac{2}{3}\quad \text{y}\quad P(x)=\frac{1}{3}$$

4. El espacio muestral consta de 8 elementos.

a) $P(3\text{ caras})=\frac{1}{8}$

b) $P(\text{al menos 2 caras})=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

c) $P(\text{máximo 1 cara})=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

d) $P(\text{ninguna cara})=\frac{1}{8}$

5. En cada uno de los casos:

- a) $P\,(\text{azul}) = \dfrac{8}{25}$

  b) $P\,(\text{blanca o verde}) = \dfrac{17}{25}$

  c) $P\,(\text{no verde}) = \dfrac{18}{25}$

- Sin reemplazamiento.

  a) $P\,(2\text{ verdes}) = \dfrac{7}{25} \cdot \dfrac{6}{24} = 0{,}07$

  b) $P\,(1^{\text{a}}\text{ azul y }2^{\text{a}}\text{ blanca}) = \dfrac{8}{25} \cdot \dfrac{10}{24} = 0{,}13$

  c) $P\,(\text{una azul y una blanca}) = \dfrac{8}{25} \cdot \dfrac{10}{24} \cdot 2 = 0{,}27$

  d) $P\,(\text{dos iguales}) = \dfrac{10}{25} \cdot \dfrac{9}{24} + \dfrac{8}{25} \cdot \dfrac{7}{24} + \dfrac{7}{25} \cdot \dfrac{6}{24} = 0{,}31$

- Con reemplazamiento.

  a) $P\,(2\text{ verdes}) = \dfrac{7}{25} \cdot \dfrac{7}{25} = 0{,}0784$

  b) $P\,(1^{\text{a}}\text{ azul y }2^{\text{a}}\text{ blanca}) = \dfrac{8}{25} \cdot \dfrac{10}{25} = 0{,}128$

  c) $P\,(\text{una azul y una blanca}) = \dfrac{8}{25} \cdot \dfrac{10}{25} \cdot 2 = 0{,}256$

  d) $P\,(\text{dos iguales}) = \dfrac{10}{25} \cdot \dfrac{10}{25} + \dfrac{8}{25} \cdot \dfrac{8}{25} + \dfrac{7}{25} \cdot \dfrac{7}{25} = 0{,}3408$

6. La solución queda:

   a) $P = 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}12$

   b) $P = 0{,}6 \cdot 0{,}8 + 0{,}4 \cdot 0{,}9 = 0{,}84$

7. La solución queda:

$$P\,(2^{\text{o}}V) = P\,(1^{\text{o}}V) \cdot P\,(2^{\text{o}}V) + P\,(1^{\text{o}}R) \cdot P\,(2^{\text{o}}V) = \frac{8}{13} \cdot \frac{7}{13} + \frac{5}{13} \cdot \frac{9}{13} = 0{,}5976$$

■ 8. En una determinada ciudad el 40% de la población son mujeres. La mitad de los hombres llevan gafas y las 3/5 partes de las mujeres no llevan gafas.

a) Halla la probabilidad de elegir un hombre sin gafas.

b) Sabiendo que hemos elegido una persona con gafas. Halla la probabilidad de que sea mujer.

■ 9. En una escuela bilingüe hay una clase con 28 alumnos. En esta clase 17 hablan español como primera lengua y 10 de estos 17 son mejicanos. Los otros alumnos de la clase hablan inglés como primera lengua y 5 de ellos son mejicanos.

a) Se elige un alumno al azar ¿cuál es la probabilidad de que hable inglés como primera lengua?

b) Se elige un alumno al azar y es mejicano. ¿Cuál es la probabilidad de que hable inglés como primera lengua?

■ 10. En familias de tres hijos en las que el hijo mayor es varón, ¿cuál es la probabilidad de que los otros dos hijos sean de distinto sexo?

■ 11. A un congreso asisten el mismo número de hombres que de mujeres. El 60% de los hombres llevan lentillas y el 30% de las mujeres no llevan lentillas. Si se elige al azar una persona que asiste al congreso ¿cuál es la probabilidad de que no lleve lentillas? Si se ha elegido una mujer ¿cuál es la probabilidad de que lleve lentillas? Si hemos elegido una persona que no lleva lentillas ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

■ 12. De los 150 estudiantes de un curso 30 son rubios y el resto morenos. Hay 40 estudiantes que tienen los ojos azules de los cuales 15 son morenos. Elegido un estudiante al azar ¿qué probabilidades tiene de ser moreno sin ojos azules? ¿Y de ser rubio con ojos azules? Elegido un estudiante rubio ¿cuál es la probabilidad de que tenga los ojos azules?

■ 13. En una ciudad en la que hay doble número de adultos que de niños se declara una epidemia vírica. El 6% de los adultos y el 11% de los niños están enfermos.

a) Se elige al azar un individuo, hallar la probabilidad de que sea un adulto y no esté enfermo.

b) Se elige una persona al azar y esta enferma ¿cuál es la probabilidad de que sea un niño?

■ 14. En un monedero de piel hay 4 monedas de níquel y 5 de cobre, en otro monedero de tela hay 8 monedas de níquel y 3 de cobre.

a) Elegimos un monedero al azar y sacamos una moneda. ¿Cuál es la probabilidad de sacar moneda de cobre?

b) Tiramos un dado al aire. Si sale 2 ó 6 sacamos moneda del monedero de tela y en caso contrario del otro. Hallar la probabilidad de sacar una moneda de níquel.

8. Con los datos del problema hacemos una tabla de contingencia y obtenemos:

	Mujeres	Hombres	Total
Gafas	16	30	46
No gafas	24	30	54
Total	40	60	100

a) $\text{P(hombre sin gafas)} = \frac{30}{100} = 0,3$

b) $\text{P}\left(\text{mujer}/\text{gafas}\right) = \frac{16}{46} = 0,35$

9. En cada caso queda:

a) $P(I) = \frac{11}{28}$ b) $P\left(I/Me\right) = \frac{1}{3}$

10. La solución es:

$$P\left(v\,y\,m/V\right) = \frac{2}{4} = 0,5$$

11. La tabla y las probabilidades son:

	Hombre	Mujer	Total
Lentillas	60	70	130
No lentillas	40	30	70
Total	100	100	200

$\text{P(no lentillas)} = \frac{70}{200} = 0,35$

$\text{P}\left(\text{lentillas}/\text{mujer}\right) = \frac{70}{100} = 0,7$

$\text{P}\left(\text{hombre}/\text{No lentillas}\right) = \frac{40}{70} = 0,57$

12. La tabla y las probabilidades son:

	Rubio	Moreno	Total
Ojos azules	25	15	40
No ojos azules	5	105	110
Total	30	120	150

$\text{P(moreno sin ojos azules)} = \frac{105}{150} = 0,7$

$\text{P(rubio con ojos azules)} = \frac{25}{150} = 0,16$

$\text{P}\left(\text{ojos azules}/\text{rubio}\right) = \frac{25}{30} = 0,83$

13. Queda:

	Adulto	Niño	Total
Enfermo	12	11	23
No enfermo	188	89	277
Total	200	100	300

a) $P(\text{adulto y no enfermo}) = \dfrac{188}{300} = 0,63$

b) $P(\text{al azar enferma, sea niño}) = \dfrac{11}{23} = 0,48$

14. La solución queda:

a) $P = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{5}{9} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{11} = 0,414$

b) $P = \dfrac{2}{6} \cdot \dfrac{8}{11} + \dfrac{4}{6} \cdot \dfrac{4}{9} = 0,54$

ACTIVIDADES FINALES

■ 15. En el lanzamiento de dos dados consideramos la variable aleatoria que asocia a cada resultado el mayor de los números obtenidos.

a) Halla la función de probabilidad asociada a dicha variable aleatoria.

b) Realiza el gráfico correspondiente.

c) Calcula la media o valor esperado y la desviación típica.

■ 16. Responde a las cuestiones propuestas en la actividad anterior si ahora se considera la variable aleatoria diferencia de puntos de los dos dados, en valor absoluto.

■ 17. Describe la función de probabilidad asociada a la variable aleatoria número de cruces en el lanzamiento de cuatro monedas. Halla el valor esperado y la desviación típica.

■ 18. Una urna tiene 10 bolas negras y 6 bolas blancas. Sacamos tres bolas sucesivamente y consideramos la variable aleatoria «número de bolas blancas extraídas». Halla:

a) La función de probabilidad asociada a dicha variable.

b) La probabilidad de extraer dos o más bolas blancas.

c) La probabilidad de extraer como máximo dos bolas blancas.

d) La esperanza matemática y la desviación típica.

■ 19. Tomamos al azar una ficha del dominó y consideramos la variable aleatoria que describa la suma de puntos de la ficha. Calcula la función de probabilidad, su esperanza matemática y su desviación típica.

■ 20. En la siguiente distribución de probabilidad halla x e y sabiendo que la esperanza matemática es 1,1.

X	0	1	2
P_i	0,2	x	y

Halla la desviación típica de esta variable aleatoria.

■ 21. La función de probabilidad de una variable aleatoria discreta X es:

X	0	1	2	3	4	5
P_i	0,01	a	b	c	0,1	0,09

Halla a, b, c sabiendo que la media es 2,45 y $P(2 \leq X \leq 3) = 0{,}6$.

■ 22. ¿Cuál es la esperanza matemática de ganar de un jugador que lanza dos dados de quinielas y recibe 90 euros si salen dos doses; 45 euros si sale un dos y paga 81 euros si no sale dos?

■ 23. Un juego consiste en lanzar dos dados al aire y apostar 1 € llevándose 5 euros si se saca una pareja (en ambos los mismo) ¿es justo el juego?

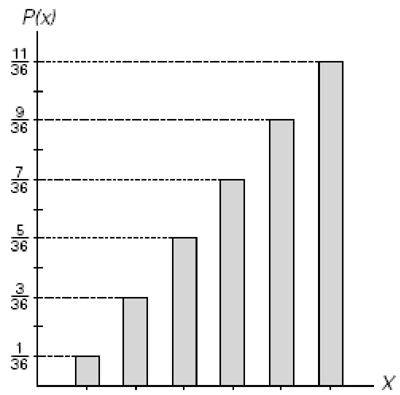
■ 24. En una caseta de feria hay una diana con 20 números y el feriante dice «a jugar que siempre se gana». Pagando 1 € se lanza un dardo a la diana. Si se acierta en el número 1 se ganan 7 €, si es en el 2, 3 o 4 ganan 3 euros y en caso contrario ganan 0,25 euros. ¿Dice la verdad el feriante?

15. La solución queda:

a) La función de probabilidad es:

Mayor nº	1	2	3	4	5	6
Probabilidad	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

b) El gráfico queda:



c) Los valores son:

$$\mu = 1\cdot\frac{1}{36} + 2\cdot\frac{3}{36} + 3\cdot\frac{5}{36} + 4\cdot\frac{7}{36} + 5\cdot\frac{9}{36} + 6\cdot\frac{11}{36} = 4,47$$

$$\sigma = \sqrt{1^2\cdot\frac{1}{36} + 2^2\cdot\frac{3}{36} + 3^2\cdot\frac{5}{36} + 4^2\cdot\frac{7}{36} + 5^2\cdot\frac{9}{36} + 6^2\cdot\frac{11}{36} - 4,47^2} = 1,41$$

16. La solución queda:

a) La función de probabilidad es:

Mayor nº	0	1	2	3	4	5
Probabilidad	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

b) El gráfico queda de forma análoga al ejercicio anterior.

c) Los valores son:

$$\mu = 0\cdot\frac{6}{36} + 1\cdot\frac{10}{36} + 2\cdot\frac{8}{36} + 3\cdot\frac{6}{36} + 4\cdot\frac{4}{36} + 5\cdot\frac{2}{36} = 1{,}94$$

$$\sigma = \sqrt{0^2\cdot\frac{6}{36} + 1^2\cdot\frac{10}{36} + 2^2\cdot\frac{8}{36} + 3^2\cdot\frac{6}{36} + 4^2\cdot\frac{4}{36} + 5^2\cdot\frac{2}{36} - 1{,}94^2} = 1{,}44$$

17. Queda:

La función de probabilidad es:

Nº cruces	0	1	2	3	4
$P(X)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

Y los valores de media y desviación típica:

$$\mu = 0\cdot\frac{1}{16} + 1\cdot\frac{4}{16} + 2\cdot\frac{6}{16} + 3\cdot\frac{4}{16} + 4\cdot\frac{1}{16} = 2$$

$$\sigma = \sqrt{0^2\cdot\frac{1}{16} + 1^2\cdot\frac{4}{16} + 2^2\cdot\frac{6}{16} + 3^2\cdot\frac{4}{16} + 4^2\cdot\frac{1}{16} - 2^2} = 1$$

18. Consideramos que reemplazamos las bolas:

a) La función de probabilidad es:

Nº bolas blancas	0	1	2	3
Probabilidad	$\frac{125}{512}$	$\frac{225}{512}$	$\frac{135}{512}$	$\frac{27}{512}$

b) $P(X\geq 2)=\frac{135}{512}+\frac{27}{512}=0,32$

c) $P(X\leq 2)=1-P(X>2)=1-\frac{27}{512}=0,95$

d) La esperanza matemática y la desviación típica son: $\mu=1,125$; $\sigma=0,84$.

19. La función de probabilidad es:

Suma puntos (X)	0	1	2	3	4	5	6
Probabilidad P_i	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{4}{28}$

Suma puntos (X)	7	8	9	10	11	12
Probabilidad P_i	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$

Sus valores de media y desviación típica: $\mu=6$; $\sigma=3$.

20. Se debe cumplir:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=0,8 \\ 0\cdot 0,2+1\cdot x+2\cdot y=1,1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=0,5 \\ y=0,3 \end{array} \Rightarrow \text{La desviación típica es: } \sigma=0,7$$

21. La solución es la del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} a+b+c=0,8 \\ a+2b+3c=1,6 \\ b+c=0,6 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a=0,2 \\ b=0,4 \\ c=0,2 \end{array}$$

22. La solución queda:

NºDoses	0	1	2
Probabilidad	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

Esperanza: $90\cdot\frac{1}{9}+45\cdot\frac{4}{9}-81\cdot\frac{4}{9}=-6$ euros

La esperanza del jugador es de -6 euros.

23. No es justo pues: $4\cdot\frac{6}{36}-1\cdot\frac{30}{36}=-\frac{6}{36}=-\frac{1}{6}$.

La esperanza del jugador es negativa, por tanto no es justo.

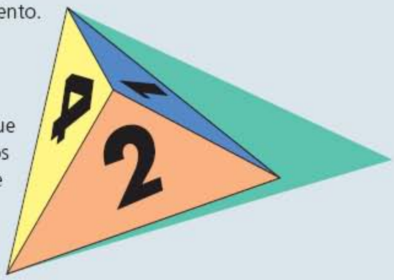
24. El juego es justo pues la esperanza es:

$$(7-1)\cdot\frac{1}{20}+(3-1)\cdot\frac{3}{20}+(0,25-1)\cdot\frac{16}{20}=0$$

■ 25. Una empresa de estadística te ofrece dos tipos de contratos para un trabajo de encuestador. Después de hacer un minucioso estudio de ambos concluyes que:

- Contrato 1: Tienes una probabilidad de 0,9 de ganar 100 euros diarios y 0,1 de perder 50 euros diarios por gastos.
- Contrato 2: Tienes una probabilidad de 0,7 de ganar al día 150 euros y una probabilidad de 0,3 de gastar 100 euros diarios en gastos de desplazamiento.

¿Qué contrato de parece más conveniente aceptar?



■ 26. Una tómbola con el nombre «El cliente siempre gana» te ofrece un juego que consiste en lanzar 2 veces seguidas un dado tetraédrico y sumar los números obtenidos en las caras de la base. Si obtienes suma mayor que 5 el dueño te da 6 euros y si la suma es menor que 5 tú le das al de la tómbola 4 euros. ¿Te parece justo el juego? (Un juego es justo si la ganancia o pérdida esperada es cero).

■ 27. Tráfico ha observado que el 60% de los accidentes en fin de semana se producen por conductores que han sobrepasado el nivel de alcohol en sangre permitido. En un fin de semana se produjeron 4 accidentes de tráfico. Encuentra la distribución de probabilidad asociada a la variable aleatoria X «número de conductores que han sobrepasado el nivel de alcohol». Halla $P(X \leq 3)$, la media y la desviación típica.

■ 28. Una variable aleatoria X sigue la ley binomial de tipo $B(5;\ 0{,}3)$. Determina:

a) Su función de probabilidad.

b) La media y la desviación típica.

c) Las probabilidades:

c1) $P(X = 2)$ c2) $P(X = 3)$ c3) $P(X < 2)$ c4) $P(X \geq 3)$

■ 29. Se tiene una moneda trucada, de modo que la probabilidad de sacar cara es cuatro veces la de sacar cruz. Se lanza seis veces la moneda. Calcula las siguientes probabilidades:

a) Obtener dos veces cruz. b) Obtener, a lo sumo, dos veces cruz.

■ 30. El 4% de los disquetes que fabrica una empresa son defectuosos. Los disquetes se distribuyen en cajas de 10 unidades. Hallar la probabilidad de que una caja tenga como mínimo 8 discos sin fallo.

■ 31. La probabilidad de que un estudiante de un determinado centro de enseñanza obtenga el título de bachillerato es de 0,7. Calcula la probabilidad de que de un grupo de diez estudiantes matriculados en ese centro:

a) Los diez finalicen el bachillerato.

b) Al menos dos acaben el bachillerato.

■ 32. La probabilidad de que un alumno/a de Primero de Bachillerato estudie Matemáticas I es de 0,4. Calcula la probabilidad de que en un grupo de 20 alumnos/as elegidos al azar haya exactamente 7 que no estudien Matemáticas I.

25. La solución queda:

- Contrato 1: Esperanza $=100 \cdot 0,9 - 50 \cdot 0,1 = 85$ euros diarios.
- Contrato 2: Esperanza $=150 \cdot 0,7 - 100 \cdot 0,3 = 75$ euros diarios.

Parece más conveniente el contrato 1.

26. La solución queda:

$$\text{Sea } x = \text{suma mayor que } 5 \quad \Rightarrow \quad P(x) = \frac{6}{16};\ P(\bar{x}) = \frac{10}{16} \quad \Rightarrow \quad \mu = 6 \cdot \frac{6}{16} - 4 \cdot \frac{10}{16} = -0,25$$

El juego no es justo, es favorable al dueño de la tómbola.

27. La solución queda:

x	0	1	2	3	4
$P(X)$	0,0256	0,1536	0,3456	0,3456	0,1296

- Es una distribución binomial $B(4;0,6)$
- $P(X \leq 3) = 1 - P(X = 4) = 0,8704$
- La media y la desviación típica son: $\mu = n \cdot p = 4 \cdot 0,6 = 2,4$; $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{4 \cdot 0,6 \cdot 0,4} = 0,98$.

28. La solución queda:

a) La función de probabilidad es:

X	0	1	2	3	4	5
P_i	0,1681	0,3602	0,3087	0,1323	0,0284	0,0024

b) La media y la desviación típica son: $\mu = n \cdot p = 5 \cdot 0,3 = 1,5$; $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{5 \cdot 0,3 \cdot 0,7} = 1,025$.

c) $P(X = 2) = 0,3087$

$P(X = 3) = 0,1323$

$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,1681 + 0,3602 = 0,5283$

$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0,1631$

29. Es una distribución binomial $B\left(6;4/5\right)$, con: $P(\text{cara})=\frac{4}{5}$ y $P(\text{cruz})=\frac{1}{5}$.

a) $P(X=4\,\text{caras})=\binom{6}{4}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2=0,2458$

b) $P(X\geq 4)=P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)=$

$$=\binom{6}{4}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2+\binom{6}{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^5\cdot\frac{1}{5}+\binom{6}{6}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^6=0,2458$$

30. Es una distribución binomial $B(10;0,96)$, con x el suceso salga disco sin fallo.

$P(X\geq 8)=P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)=$

$$=\binom{10}{8}\cdot(0,96)^8\cdot(0,04)^2+\binom{10}{9}\cdot(0,96)^9\cdot(0,04)^1+\binom{10}{10}\cdot(0,96)^{10}=0,99$$

31. Es una distribución binomial $B(10;0,7)$.

a) $P(X=10)=\binom{10}{10}\cdot(0,7)^{10}=0,0282$

b) $P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-\binom{10}{0}\cdot(0,3)^{10}-\binom{10}{1}\cdot(0,3)^9\cdot(0,7)^1=0,999$

32. Es una distribución binomial $B(20;0,6)$.

$P(X=7)=\binom{20}{7}\cdot(0,6)^7\cdot(0,4)^{13}=0,0146$

ACTIVIDADES FINALES

■ 33. La probabilidad de que salga cara con una moneda trucada es 0,45. Se lanza la moneda siete veces. Calcula la probabilidad de que:

a) Salgan exactamente tres caras.

b) Salgan, al menos, tres caras.

c) Salgan como máximo tres caras.

■ 34. En un examen trimestral de cierta asignatura suele aprobar el 70% de los que se presentan. ¿Cuál es la probabilidad de que aprueben los 8 alumnos que se han presentado un día determinado? ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe sólo uno?

■ 35. En una asociación juvenil el 30% de los socios juegan al baloncesto. Se quiere formar un equipo, por lo que se pregunta a 12 socios. ¿Cuál es la probabilidad de que haya 2 o más que jueguen a baloncesto? ¿Cuántos socios de ese grupo se espera que lo practiquen?

■ 36. En un examen tipo test hay 10 preguntas, con cuatro posibles respuestas a elegir en cada una. Si una persona desconoce completamente la materia y responde al azar:

a) ¿Cuántas respuestas acertará por término medio?

b) ¿Cuánto vale la desviación típica?

c) ¿Qué probabilidad tiene de acertar, al menos, cinco preguntas y, por tanto, aprobar?

■ 37. Supón que la probabilidad de que una persona sea mujer es 1/2. Se eligen al azar 100 familias de cinco hijos cada una. ¿En cuántas es de esperar que haya 2 mujeres y 3 hombres?

■ 38. La probabilidad de nacimientos de niños varones en España es de 51,7%. Halla la probabilidad de que una familia de 6 hijos tenga:

a) Por lo menos, una niña.

b) Por lo menos, un niño.

■ 39. En una estación de ferrocarril se sabe que la probabilidad de que un tren cualquiera llegue a su hora es del 95%. Un determinado día en el que llegan 20 trenes a la estación, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 18 lleguen a su hora? ¿Y la de que como máximo 1 no llegue a su hora?

■ 40. El 5% de los habitantes de un país pertenecen al grupo sanguíneo ORh$^-$. En una ciudad acuden un día 60 personas a donar sangre. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno sea de ese grupo sanguíneo? ¿Cuántas personas del grupo ORh$^-$ cabe esperar que haya entre esos donantes?

■ 41. La probabilidad de que un determinado móvil sea defectuoso es del 8%. En una tienda de telefonía en la que hay 1 200 móviles, ¿cuál es la probabilidad de que haya a lo sumo 3 defectuosos?, ¿cuántos cabrá esperar que sean defectuosos?

■ 42. Una persona compra de regalo de reyes para sus hermanos cuatro GPS y sabe que la probabilidad de que los cuatro salgan bien es 0,4096. ¿Cuál es la probabilidad de que un GPS sea defectuoso?

33. Es una distribución binomial $B(7;0,45)$.

a) $P(X=3)=\binom{7}{3}\cdot(0,45)^3\cdot(0,55)^4=0,2918$

b) $P(X\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)=$

$$=1-\binom{7}{0}\cdot(0,55)^7-\binom{7}{1}\cdot(0,55)^6\cdot(0,45)^1-\binom{7}{2}\cdot(0,55)^5\cdot(0,45)^2=0,6836$$

c) $P(X\leq 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=$

$$=\binom{7}{0}\cdot(0,55)^7+\binom{7}{1}\cdot(0,55)^6\cdot(0,45)^1+\binom{7}{2}\cdot(0,55)^5\cdot(0,45)^2+\binom{7}{3}\cdot(0,55)^4\cdot(0,45)^3=0,6083$$

34. Es una distribución binomial $B(8;0,7)$.

La probabilidad de que aprueben los 8 alumnos es: $P(X=8)=\binom{8}{8}\cdot(0,7)^8=0,0576$.

La probabilidad de que apruebe sólo uno es: $P(X=1)=\binom{8}{1}\cdot(0,7)^1\cdot(0,3)^7=0,0012$.

35. Es una distribución binomial $B(12;0,3)$. Llamamos x al suceso jugar al baloncesto.

$$P(X\geq 2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-\binom{12}{0}\cdot(0,7)^{12}-\binom{12}{1}\cdot(0,7)^{11}\cdot(0,3)^1=0,9150$$

Por otro lado: $\mu=12\cdot 0,3=4$ socios se espera que practiquen baloncesto.

36. Es una distribución binomial $B\left(10;\,1/4\right)$.

a) Acertará, por término medio, $\mu=n\cdot p=10\cdot\frac{1}{4}=2,5$.

b) La desviación típica es: ; $\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot q}=\sqrt{10\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}=1,37$.

c) La probabilidad pedida es:

$$P(X\geq 5)=P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)=0,076$$

37. Es una distribución binomial $B\left(5;\tfrac{1}{2}\right)$.

La probabilidad de que una familia formada por 5 hijos sean dos mujeres y 3 hombres es:

$$\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=0,3125$$

Entre las 100 familias cabe esperar que haya: $100\cdot 0,3125\cong 31$ familias con 2 hijas y 3 hijos.

38. Es una distribución binomial $B(6;0,483)$. Sea x el número de niñas.

a) $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\binom{6}{0}\cdot(0,517)^6=0,9809$

b) $P(\text{ al menos un chico})=1-P(\text{ningún chico})=1-P(X=6)=1-\binom{6}{6}\cdot(0,483)^6=0,9873$

39. Es una distribución binomial $B(20;0,95)$. Sea x el número de trenes que llegan a su hora:

$$P(X\geq 18)=P(X=18)+P(X=19)+P(X=20)=$$
$$=\binom{20}{18}\cdot(0,95)^{18}\cdot(0,05)^2+\binom{20}{19}\cdot(0,95)^{19}\cdot(0,05)^1+\binom{20}{20}\cdot(0,95)^{20}=0,9245$$

$$P(X\geq 19)=P(X=19)+P(X=20)=\binom{20}{19}\cdot(0,95)^{19}\cdot(0,05)^1+\binom{20}{20}\cdot(0,95)^{20}=0,7358$$

40. Es una distribución binomial $B(60;0,05)$. Sea x el número de personas con grupo ORh^-:

$$P(X=0)=\binom{60}{0}\cdot(0,95)^{60}=0,046$$

La esperanza es: $\mu=60\cdot 0,05=3$ personas cabe esperar que haya con ORh^-.

41. Es una distribución binomial $B(1200;0,08)$.

$$P(X\leq 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=9,45\cdot 10^{-39}$$

La esperanza es: $\mu=n\cdot p=1200\cdot 0,08=96$

42. Es una distribución binomial $B(4;p)$.

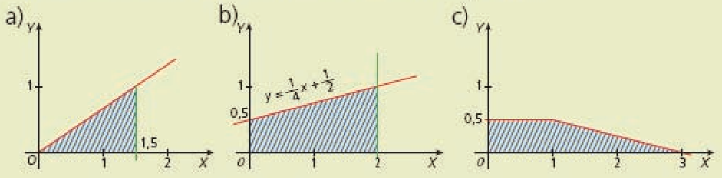
$P(X=4)=\binom{4}{4}\cdot(p)^4=0,4096 \quad \Rightarrow \quad p=0,8 \quad \Rightarrow$ La probabilidad de que sea defectuoso es $0,2$.

Unidad 16 – Distribuciones continuas. Distribución normal.

PÁGINA 349

cuestiones iniciales

1. Calcula el área de cada uno de los recintos rayados:



2. En una determinada ciudad se ha hecho un estudio sobre la edad de las personas que asistieron al último espectáculo musical del verano, y se han obtenido los siguientes resultados:

Edad	[0, 15)	[15, 30)	[30, 45)	[45, 60)	[60, 75)	[75, 90]
Nº de asistentes	12	120	310	95	47	16

Calcula la media aritmética y la desviación típica de esta distribución. ¿Qué % de personas hay en cada uno de los intervalos $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$, $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$, $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$?

3. Representa gráficamente la función siguiente y halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas $x = \frac{1}{2}$ y $x = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}x & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

SOLUCIONES

1. Las áreas quedan:

$$\text{a) Área} = \frac{1,5 \cdot 0,75}{2} = 0,5625 \text{ unidades cuadradas.}$$

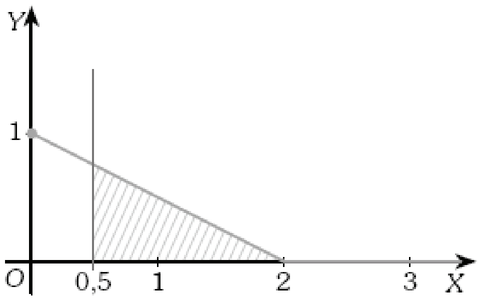
$$\text{b) Área} = \frac{0,5 + 1}{2} \cdot 2 = 1,5 \text{ unidades cuadradas.}$$

$$\text{c) Área} = 1 \cdot 0,5 + \frac{2 \cdot 0,5}{2} = 1 \text{ unidades cuadradas.}$$

2. Sabemos que: $\mu = 39{,}825$; $\sigma = 14{,}76$.

   En $(\mu - \sigma, \mu + \sigma) = (25{,}065; 54{,}585)$ hay 405 personas, es decir, el 67,5%.
   En $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma) = (10{,}305; 69{,}345)$ hay 572 personas, es decir, el 95,3%.
   En $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma) = (-4{,}455; 84{,}105)$ hay 600 personas, es decir, el 100%.

3. La representación y el área quedan:



El área rayada queda:

$$\frac{1{,}5 \cdot 0{,}75}{2} = 0{,}5625 \text{ unidades cuadradas.}$$

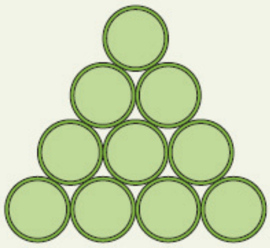
PÁGINA 363

A C T I V I D A D E S

■ Utilizando esta estrategia de marcha atrás, intenta resolver los siguientes problemas.

1. El caracol. Un caracol se encuentra en el fondo de un pozo. Cada día asciende 30 m, y por la noche se resbala 20 m hacia abajo. ¿Cuánto tiempo tardará el caracol en salir del pozo? El pozo mide 300 m de profundidad.

2. Triángulo de monedas. El triángulo de la figura está formado por 10 monedas iguales. ¿Cuál es el mínimo número de monedas que hay que cambiar de sitio para que el triángulo quede en posición invertida?



3. Valor desconocido. Determina el valor de la siguiente expresión:

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1\ldots}}}$$

4. Pies grandes y sus aves. El indio Pies Grandes sale de su tienda con un montón de granos de maíz y, cuando regresa de nuevo, no tiene ninguno. Cuando entra en su tienda, su hija Luz de Luna le pregunta qué ha hecho con el maíz. Él le dice: «A cada ave que me encontré le di la mitad de los granos que llevaba más uno. ¿Con cuántas aves te encontraste?», le vuelve a preguntar Luz de Luna. «Me encontré con ocho», responde Pies Grandes. ¿Cuántos granos de maíz llevaba Pies Grandes al principio?

5. Las pesas. ¿Cuál es el juego de 4 pesas que es necesario tener para poder pesar en una balanza de dos platos cualquier cantidad entera desde 1 hasta 40 kg?

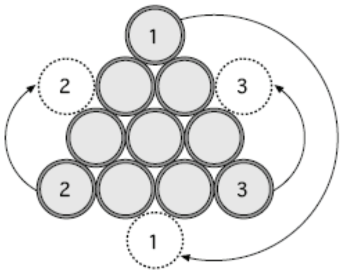
SOLUCIONES

1. Como cada día asciende 30 m y resbala 20 m, en realidad asciende 10 m.

   Luego al cabo de 27 días ha ascendido 270 m, y ya el día 28 asciende a la superficie, pues asciende $30\,\text{m} \Rightarrow 270+30=300\,\text{m}$.

   El caracol tarda 28 días en salir.

2. La solución queda:



Simplemente cambiando tres monedas, las señaladas con los números 1- 2- 3, el triángulo se invierte.

3. La solución queda:

Llamamos $x=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$ y elevamos al cuadrado $x^2=1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$

$$\Rightarrow x^2=1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}} \Rightarrow x^2=1+x \Rightarrow x^2-x-1=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \boxed{x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi} = \text{nº áureo.}$$

4. Comenzando el problema desde el final.

   Ave 8ª le da $1+1=2$.

   Ave 7ª (tiene 6) —le da $3+1=4$ — le quedan 2.

   Ave 6ª (tiene 14) —le da $7+1=8$ — le quedan 6.

   Ave 5ª (tiene 30) —le da $15+1=16$ — le quedan 14.

   Ave 4ª (tiene 62) —le da $31+1=32$ — le quedan 30.

   Ave 3ª (tiene 126) —le da $63+1=64$ — le quedan 62.

   Ave 2ª (tiene 254) —le da $127+1=128$ — le quedan 126.

   Ave 1ª (tiene 510) —le da $255+1=256$ — le quedan 254.

   Al principio tenía 510 gramos de maíz.

5. Las pesas que necesitamos han de ser de: 1, 3, 9 y 27 kg.
   Así:

   1 kg $=1$
   2 kg $=3-1$
   3 kg $=3$
   4 kg $=3+1$
   5 kg $=9-3-1$
   6 kg $=9-3$
   7 kg $=9-3+1$
   8 kg $=9-1$
   9 kg $=9$
   10 kg $=9+1$

   Y así sucesivamente.

   La suma de los números significa que las pesas se colocan en el mismo plato de la balanza, y la diferencia, que se colocan en platos diferentes.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Estudia, ayudándote de la representación gráfica, si las siguientes funciones son funciones de densidad de ciertas variables aleatorias continuas.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} & \text{si } 0 < x < 4 \\ 0 & \text{para otros } x \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \text{ y } x > 6 \\ \dfrac{1}{8}x - \dfrac{1}{4} & \text{si } 2 \le x \le 6 \end{cases}$

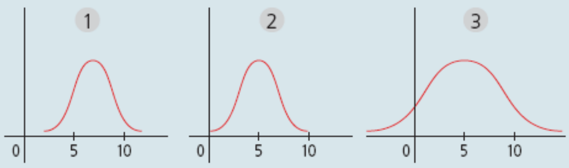
En caso afirmativo calcula:

$P(X \le 3)$; $P(X \ge 1)$; $P(X = 2{,}5)$; $P(2 \le X \le 3)$

2. En la siguiente función, calcula el valor de a para que sea una función de densidad para la variable aleatoria X continua:

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } -2 \le x \le 4 \\ 0 & \text{para otros valores de } x \end{cases}$$

3. Se ha hecho un estudio sobre una especie vegetal en tres zonas diferentes A, B y C, resultando que se ajustan a curvas normales $N(5; 3{,}5)$, $N(5; 1{,}5)$ y $N(7; 1{,}5)$, respectivamente.



a) Elige, de entre estas tres gráficas, la adecuada a cada caso.

b) Haz un breve resumen, comparando las semejanzas y las diferencias que hay en la altura que alcanza el vegetal en las tres zonas estudiadas.

4. En una distribución normal $N(0,1)$, calcula:

a) $P(Z \le 1{,}45)$
b) $P(Z \ge 0{,}25)$
c) $P(Z \le -1{,}45)$
d) $P(0{,}35 \le Z \le 1{,}5)$
e) $P(-1{,}35 \le Z \le 0{,}25)$
f) $P(Z \ge -0{,}84)$
g) $P(-1{,}45 \le Z \le -0{,}15)$
h) $P(Z \ge 3{,}8)$

5. En una distribución normal $N(0,1)$, calcula el valor de k, sabiendo que $k \ge 0$, en los siguientes casos:

a) $P(Z \ge k) = 0{,}1075$
b) $P(Z \ge k) = 0{,}7967$
c) $P(0 \le Z \le k) = 0{,}4236$

6. En una distribución normal $N(5, 2)$, calcula:

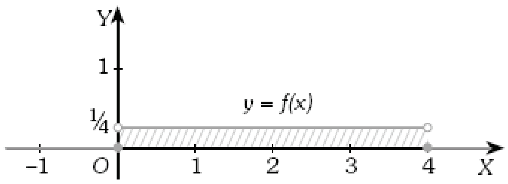
a) $P(X \le 6)$
b) $P(X \ge 4{,}5)$
c) $P(X \le 7{,}2)$
d) $P(3 \le X \le 6)$

7. En una distribución normal $N(5, 2)$, calcula el valor de k, para que se cumplan las siguientes igualdades:

a) $P(X \ge k) = 0{,}8106$
b) $P(X \ge k) = 0{,}4801$
c) $P(5 - k \le X \le 5 + k) = 0{,}5934$

1. En cada caso queda:

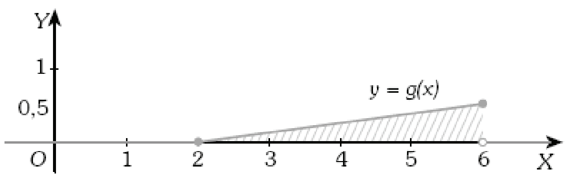
a) $f(x) \geq x \ \forall x$ y además el área del recinto rayado vale 1, por tanto es función de densidad.



$P(x \leq 3) = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ $\qquad$ $P(x \geq 1) = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$P(x = 2{,}5) = 0$ $\qquad$ $P(2 \leq x \leq 3) = 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

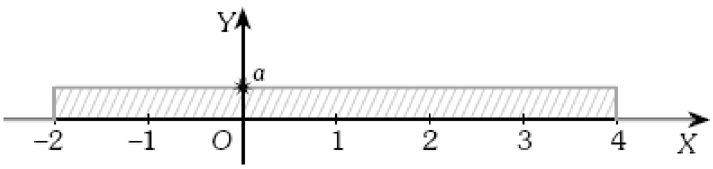
b) $g(x) \geq x \ \forall x$ y además el área del recinto rayado vale $\frac{4 \cdot 0{,}5}{2} = 1$, por tanto es función de densidad.



$P(x \leq 3) = \frac{1 \cdot \frac{1}{8}}{2} = \frac{1}{16}$ $\qquad$ $P(x \geq 1) = 1$

$P(x = 2{,}5) = 0$ $\qquad$ $P(2 \leq x \leq 3) = \frac{1}{16}$

2. La gráfica y los cálculos quedan:



• $f(x)$ ha de ser ≥ 0, por tanto $a > 0$.

• Como área rayada $= 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{6 \cdot a}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{3}$

Por lo tanto $f(x)$ es una función de densidad si $a = \frac{1}{3}$.

3. La solución es:

a) La gráfica 1 se corresponde con la distribución $N(7;1,5)$.
La gráfica 2 se corresponde con la distribución $N(5;1,5)$.
La gráfica 3 se corresponde con la distribución $N(5;3,5)$.

b) Las plantas más altas corresponden a la distribución $N(7;1,5)$. En las otras distribuciones, la media de las alturas coincide, y en $N(5;1,5)$ están más agrupadas, respecto a la media, que en $N(5;3,5)$.

4. Manejando la tabla de la distribución normal, hallamos cada caso:

a) $P(Z\le 1,45)=0,9265$
b) $P(Z\ge 0,25)=1-P(Z<0,25)=1-0,5987=0,4013$
c) $P(Z\le -1,45)=1-P(Z\le 1,45)=1-0,9265=0,0735$
d) $P(0,35\le Z\le 1,5)=P(Z\le 1,5)-P(Z\le 0,35)=0,9332-0,6368=0,2964$
e) $P(-1,35\le Z\le 0,25)=P(Z\le 0,25)-P(Z\le -1,35)=P(Z\le 0,25)-\left[1-P(Z\le 1,35)\right]=0,5102$
f) $P(Z\ge -0,84)=P(Z\le 0,84)=0,7995$
g) $P(-1,45\le Z\le -0,15)=P(0,15\le Z\le 1,45)=P(Z\le 1,45)-P(Z\le 0,15)=0,3669$
h) $P(-2,25\le Z\le 2)=P(Z\le 2)-P(Z\le -2,25)=P(Z\le 2)-\left[1-P(Z\le 2,25)\right]=0,965$

5. En las tablas vemos que:

a) $P(Z\ge K)=1-P(Z\le K)=1-0,1075=0,8925 \Rightarrow K=1,24.$
b) $P(Z\ge K)=0,7967=1-P(Z\le K) \Rightarrow K=-0,83.$
c) $P(0\le Z\le K)=0,4236 \Rightarrow P(Z\le K)-P(Z\le 0)K=0,4236 \Rightarrow K=1,43.$

6. Tipificamos la variable X, convirtiéndola en N(0,1) y, posteriormente, consultamos la tabla:

a) $P(X\le 6)=P\left(Z=\dfrac{x-5}{2}\le\dfrac{6-5}{2}\right)=P(Z\le 0,5)=0,6915$

b) $P(X\ge 4,5)=P\left(Z=\dfrac{x-5}{2}\ge\dfrac{4,5-5}{2}\right)=P(Z\ge -0,25)=P(Z\le 0,25)=0,5987$

c) $P(X\le 7,2)=P\left(Z=\dfrac{x-5}{2}\le\dfrac{7,2-5}{2}\right)=P(Z\le 1,1)=0,8643$

d) $P(3\le X\le 6)=P\left(\dfrac{3-5}{2}\le\dfrac{x-5}{2}\le\dfrac{6-5}{2}\right)=P(-1\le Z\le 0,5)=0,5328$

7. Tipificamos la variable y consultamos la tabla.

a) $k=6,76$ b) $k=5,1$ c) $k=1,66$

PÁGINA 367

■ 8. La dirección de una clínica ha observado que la estancia de los enfermos sigue una distribución normal de media 9 días y desviación típica 3. Calcula la probabilidad de que la estancia de un enfermo:

a) Sea superior a 8 días.

b) Sea inferior a 5 días.

c) Esté comprendida entre 11 y 13 días.

■ 9. El tiempo necesario para que una ambulancia llegue a un centro sanitario se distribuye según una variable normal de media 17 minutos y desviación típica 3 minutos.

a) Calcula la probabilidad de que el tiempo de llegada esté comprendido entre 13 y 21 minutos.

b) ¿Para qué valor de t, la probabilidad de que la ambulancia emplee más de t minutos en llegar es del 5%?

■ 10. El tiempo empleado por estudiantes de Química en realizar cierto experimento de laboratorio se distribuye normalmente con media 30 minutos y desviación típica 5.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante tarde menos de 28 minutos en realizar el experimento?

b) ¿Cuál es el porcentaje de estudiantes que emplean entre 25 y 35 minutos?

c) ¿Qué tiempo utilizan como máximo el 80% de los estudiantes?

■ 11. Un estudio antropológico de una tribu ha constatado que la longitud del dedo corazón de los adultos sigue una ley normal de media 60 mm y desviación típica de 3 mm. Si hay 800 adultos en esa tribu, determina cuántos tienen el dedo corazón:

a) Más largo de 62 mm   b) Más corto de 57 mm   c) Entre 60 y 66 mm

■ 12. En un bombo de lotería tenemos 10 bolas idénticas numeradas del 0 al 9. Cada vez que hacemos la extracción de una bola después la devolvemos al bombo.

a) Si tomamos 3 bolas, calcula la probabilidad de que el 0 salga una sola vez.

b) Si hacemos 100 extracciones, calcular empleando la normal, la probabilidad de que el 0 salga más de 12 veces.

■ 13. La media de una distribución binomial $B(n, p)$ con $n = 10$ es 8. Halla la desviación típica. Si p es la probabilidad de obtener cara con una moneda trucada, ¿cuántas veces hay que lanzarla para que la probabilidad de obtener al menos una cara sea 0,893?

■ 14. La calificación media de cierto examen ha sido de 5,5 con una desviación típica de 1,5, y el conjunto de notas se ajusta a una distribución normal. El profesor quiere calificar con sobresaliente al 10% de la clase, y con notable al 30%. ¿A partir de qué nota se conseguirá el sobresaliente y de cuál el notable?

■ 15. Se lanza un dado 360 veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 menos de 55 veces?

8. La solución queda:

$$a) P(X \geq 8) = P\left(\frac{x-9}{3} \geq \frac{8-9}{3}\right) = P\left(Z \geq -\frac{1}{3}\right) = P\left(Z \leq \frac{1}{3}\right) = 0,6293$$

$$b) P(X \leq 5) = P\left(\frac{x-9}{3} \leq \frac{5-9}{3}\right) = P\left(Z \leq -\frac{4}{3}\right) = P\left(Z \geq \frac{4}{3}\right) = 1 - 9082 = 0,0918$$

$$c) P(11 \leq X \leq 13) = P\left(\frac{11-9}{3} \leq \frac{x-9}{3} \leq \frac{13-9}{3}\right) = P\left(\frac{2}{3} \leq Z \leq \frac{4}{3}\right) = P\left(Z \geq \frac{4}{3}\right) - P\left(Z \leq \frac{2}{3}\right) = 0,1628$$

9. La solución es:

$$a) P(13 \leq t \leq 21) = P\left(\frac{13-17}{3} \leq Z \leq \frac{21-17}{3}\right) = P(-1,33 \leq Z \leq 1,33) = 2P(Z \leq 1,33) - 1 = 0,8164$$

$$b) P(X \leq t) = 0,95 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{t-17}{3}\right) = 0,95 \Rightarrow \frac{t-17}{3} = 1,645 \Rightarrow t = 21,935 \approx 22 \text{ minutos.}$$

10. La solución es:

$$a) P(X < 28) = P\left(Z < \frac{28-30}{5}\right) = P(Z < -0,4) = 1 - P(Z < 0,4) = 0,3346$$

$$b) P(25 \leq X \leq 35) = P\left(\frac{25-30}{5} \leq Z \leq \frac{35-30}{5}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) = 2\left[P(Z \leq 1) - P(Z \leq 0)\right] = 0,6826$$

Es decir, el 68,26%.

$$c) P(X \leq t) = 0,80 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{t-30}{5}\right) = 0,80 \Rightarrow \frac{t-30}{5} = 0,84 \Rightarrow t = 34,2 \text{ minutos.}$$

11. La variable se ajusta a una normal $N(60;3)$.

$$a) P(X \geq 62) = P\left(Z \geq \frac{62-60}{3}\right) = P(Z \geq 0,67) = 1 - P(Z \leq 0,4) = 0,2514 \Rightarrow 25,14\%$$

Por lo tanto hay 201 adultos con el dedo corazón más largo de 62 mm.

$$b) P(X \leq 57) = P(Z \leq -1) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 0,1587$$

Es el 15,87% que suponen 127 adultos.

$$c) P(60 \leq X \leq 66) = P(0 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - (Z \leq 0) = 0,4772$$

Es el 47,72% que suponen 382 adultos.

12. La solución queda:

a) $P(\text{salga 0 una sola vez}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot 3 = 0,243$

b) Es una distribución binomial $B(100;0,1)$ y la aproximaremos con una distribución normal de la forma $N(10;3)$.

$$P(X > 13) = P\left(Z \geq \frac{13-10}{3}\right) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 0,1587$$

13. La solución queda:

De los parámetros de la distribución obtenemos: $\mu = 8 = n \cdot p \quad \Rightarrow \quad p = 0,8$.

La desviación típica: $\sigma = \sqrt{10 \cdot 0,8 \cdot 0,2} = 1,26$

$P(\text{ninguna cara}) = 1 - 0,893 = 0,107.$

$\binom{n}{0} \cdot (0,2)^n = 0,107 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\log 0,107}{\log 0,2} = 1,4$

Hay que lanzarla al menos dos veces.

14. Llamamos k a la nota mínima a partir de la cual se conseguirá el sobresaliente. Debe cumplirse:

$$P(X \leq k) = 0,9 \quad \Rightarrow \quad P\left(\frac{x-5,5}{1,5} \leq \frac{k-5,5}{1,5}\right) = 0,9 \quad \Rightarrow \quad \frac{k-5,5}{1,5} = 1,282 \quad \Rightarrow \quad k = 7,423$$

De igual forma, para la calificación de notable:

$$P(X \leq k) = 0,7 \quad \Rightarrow \quad P\left(\frac{x-5,5}{1,5} \leq \frac{k-5,5}{1,5}\right) = 0,7 \quad \Rightarrow \quad \frac{k-5,5}{1,5} = 0,525 \quad \Rightarrow \quad k = 6,2875$$

15. Es una distribución binomial $B\left(360, 1/6\right)$ y la aproximaremos con una distribución normal.

Quedaría: $\mu = 360 \cdot \frac{1}{6} = 60 \quad$ y $\quad \sigma = \sqrt{360 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 7,07$.

La probabilidad es:

$$P(X \leq 55) = P(X' \leq 55,5) = P\left(\frac{X'-60}{7,07} \leq \frac{55,5-60}{7,07}\right) = P(Z \leq -0,64) = 1 - P(Z \leq 0,64) = 0,2611$$

ACTIVIDADES FINALES

16. Un jugador de ajedrez gana 9 de cada 10 partidas que disputa. Juega 50 partidas. ¿Cuál es la probabilidad de que gane 40?

17. Se lanza una moneda 100 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de caras que se obtenga esté comprendido entre 45 y 55?

18. Un examen tipo test tiene 100 preguntas y cada pregunta 4 respuestas diferentes, de la que sólo una es correcta. Calcula la probabilidad de que un estudiante que responde al azar acierte más de 20 preguntas.

19. La probabilidad de que un nacido sea varón es 0,52. Un año nacieron en mi ciudad 3 000 niños. ¿Cuál es la probabilidad de que hubiera entre 1 450 y 1 600 varones?

20. María se presenta al examen teórico para obtener el carnet de conducir. El examen consta de 80 preguntas a las que debe contestar sí o no. Para aprobar debe acertar al menos 45 preguntas. ¿Qué probabilidad tiene de aprobar si contesta al azar?

21. Según estudios médicos actuales el nivel de colesterol en una persona adulta sana sigue una distribución normal centrada en el valor 192 y con una desviación típica de 12 unidades. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona adulta sana tenga un nivel de colesterol inferior a 186 unidades?

22. Una gran empresa debe reponer las batas de sus 1 000 operarios. Se sabe que la talla media es 170 con una desviación típica de 3 cm. Las batas se confeccionan en tres tallas válidas para estaturas entre 155 y 165 cm, 165 y 175 cm y finalmente entre 175 y 185 cm. ¿Cuántas batas de cada talla ha de adquirir suponiendo que las tallas se distribuyen normalmente?

23. De una urna que contiene 1 bola blanca y 2 bolas negras se hacen extracciones sucesivas y con reemplazamiento (una bola cada vez). Llamamos X al número de bolas blancas extraídas.

   a) Si se hacen 5 extracciones, ¿cuál es la distribución de probabilidad de X? ¿Cuánto valen su media y su desviación típica? ¿Cuánto vale $P(X \geq 2)$?

   b) Si se hacen 288 extracciones, ¿cuál es la probabilidad de que salgan más de 90 bolas blancas?

24. La probabilidad de que un golfista haga hoyo en un lanzamiento es 0,4. Si lo intenta 10 veces, calcula la probabilidad de que acierte a lo sumo 2 veces. Si lanza 1 000 veces y su capacidad de acierto se mantuviera, ¿qué probabilidad hay de que acierte más de 450 veces?

25. Consideremos una distribución normal de media $\mu = 50$ en la que la probabilidad de obtener un valor por encima de 70 es 0,0228. ¿Cuál es la desviación típica? ¿Cuál será la probabilidad de los valores por debajo de 45?

16. Es una distribución binomial $B(50;0,9)$ y la aproximaremos con una distribución normal.

Quedaría: $\mu=50\cdot 0,9=45$ y $\sigma=\sqrt{50\cdot 0,9\cdot 0,1}=1,12$.

La probabilidad pedida con la corrección de Yates es:

$$P(X=40)=P(39,5\leq X'\leq 40,5)=P\left(\frac{39,5-45}{2,12}\leq Z\leq\frac{40,5-45}{2,12}\right)=P\left(-2,59\leq Z\leq -2,12\right)=$$
$$=1-P\left(2,12\leq Z\leq 2,59\right)=P\left(Z\leq 2,59\right)-P\left(Z\leq 2,12\right)=0,122$$

17. Es una distribución binomial $B(100;0,5)$ y la aproximaremos con una distribución normal.

Quedaría: $\mu=100\cdot 0,5=50$ y $\sigma=\sqrt{100\cdot 0,5\cdot 0,5}=5$.

La probabilidad pedida con la corrección de Yates es:

$$P(45\leq X\leq 55)=P(44,5\leq X'\leq 55,5)=P\left(\frac{45,5-50}{5}\leq\frac{X'-50}{5}\leq\frac{55,5-50}{5}\right)=P\left(-1,1\leq Z\leq 1,1\right)=$$
$$=P\left(Z\leq 1,1\right)-\left[1-P\left(Z\leq 1,1\right)\right]=0,7286$$

18. Es una distribución binomial $B(100;0,25)$ y la aproximaremos con una distribución normal $N(25;4,33)$.La probabilidad pedida es:

$$P(X\geq 20)=P(X'\geq 19,5)=P\left(Z\geq\frac{19,5-25}{4,33}\right)=P\left(Z\geq -1,27\right)=P\left(Z\leq 1,27\right)=0,8980$$

19. Es una binomial $B(3\,000;0,52)$ que podemos aproximarla a una normal $N(1\,560;27,4)$.

La probabilidad pedida queda:

$$P(1\,450\leq X\leq 1\,600)=P(1\,449,5\leq X'\leq 1\,600,5)=P\left(-4\leq Z\leq 1,48\right)=$$
$$=P\left(Z\leq 1,48\right)-P\left(Z\leq -4\right)=0,9306$$

20. Es una binomial $B(80;0,5)$ que podemos aproximarla a una normal $N(40;4,47)$.

La probabilidad pedida queda: $P(X\geq 45)=P(Z\geq 1,12)=1-0,8686=0,1314$

21. Es una distribución normal $N(192;12)$

La probabilidad pedida queda: $P(X\leq 186)=P(Z\leq -0,5)=P(Z\geq 0,5)=1-P(Z\leq 0,5)=0,3085$

22. Es una distribución normal $N(170;3)$

- $P(155 \leq X \leq 165) = P\left(-5 \leq Z \leq -1,67\right) = P\left(Z \leq 5\right) - P\left(Z \leq 1,67\right) = 0,0475,$ es decir 48 batas.

- $P(165 \leq X \leq 175) = P\left(-1,67 \leq Z \leq 1,67\right) = 2P\left(0 \leq Z \leq 1,67\right)$
  $= 2(0,9525 - 0,5) = 0,905,$ es decir 105 batas.

- $P(175 \leq X \leq 185) = P\left(1,67 \leq Z \leq 5\right) = P\left(Z \leq 5\right) - P\left(Z \leq 1,67\right) = 0,0475,$ es decir 48 batas.

23. La solución queda:

a) Es una binomial $B\left(5;\dfrac{1}{3}\right)$.

x	0	1	2	3	4	5
$P(x)$	$\left(\frac{2}{3}\right)^5$	$5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\frac{1}{3}$	$10\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$10\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4$	$\left(\frac{1}{3}\right)^5$

Los parámetros quedan: $\mu = 5\cdot\dfrac{1}{3} = 1,67$ y $\sigma = \sqrt{5\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}} = 1,05.$

La probabilidad es: $P(X \geq 2) = 1 - P\left(X < 2\right) = 1 - P\left(X = 0\right) - P\left(X = 1\right) = 0,539$

b) Es una binomial $B\left(288;\dfrac{1}{3}\right)$ que aproximamos a una normal $N(96;8)$

La probabilidad es: $P(X > 90) = P\left(X \geq 90,5\right) = P\left(Z \geq -0,69\right) = P(Z \leq 0,69) = 0,7549.$

24. La solución queda:

- Es una binomial $B\left(10;0,4\right)$.
  $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$
  $$= \binom{10}{0}\cdot(0,60)^{10} + \binom{10}{1}\cdot(0,60)^{9}\cdot(0,4)^{1} + \binom{10}{2}\cdot(0,60)^{8}\cdot(0,4)^{2} = 0,167$$

- La aproximamos a una distribución normal $N\left(400;15,49\right)$.
  $P(X > 450) = P(X \geq 450,5) = P\left(Z \geq 3,26\right) = 1 - P\left(Z \geq 3,26\right) = 0,0006.$

25. Es una distribución normal del tipo: $N(50;\sigma)$.

- En el primer caso:

$$P(X > 70) = 0,0228 \quad \Rightarrow \quad P\left(Z \geq \frac{70-50}{\sigma}\right) = 0,0228 \quad \Rightarrow \quad P\left(Z \geq \frac{20}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{20}{\sigma}\right) = 0,0228$$

$$\left(Z \leq \frac{20}{\sigma}\right) = 0,9772 \quad \Rightarrow \quad \frac{20}{\sigma} = 2 \quad \Rightarrow \quad \sigma = 2.$$

- En el segundo caso:

$$P(X \leq 45) = P\left(Z \leq \frac{45-60}{10}\right) = P(Z \leq -0,5) = P(Z \geq 0,5) = 0,3085$$