1.- Dada la función f(x):

$$d)\ f(x)=\begin{cases} 2x+9 & si\ x\leq -4 \\ \dfrac{-2}{x+3} & si\ -4<x\leq 0 \\ -x^2+2x & si\ \ 0<x\leq 2 \\ \log_2(x-2) & si\ \ x>2 \end{cases}$$

Se pide: a) Representación; b) Dominio; c) Recorrido d) Intervalos de crecimiento y decrecimiento; e) ¿Dónde f(x)>0?; f) f(-4); g) $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x)$;

h) $\lim\limits_{x\to -4^-} f(x)$; i) $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$; j) f(-3) ; k) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$;

(4 puntos)

2.- Cómo se llaman cada una de las siguientes funciones. Calcular su dominio.

a) $f(x)=3x^4+3x^2+7x-3$; b) $f(x)=\dfrac{-2}{-x+3}$ c) $f(x)=\dfrac{x^5-3x^3+2x}{2x^2-x-6}$

d) $f(x)=2^{-x}$ e) $f(x)=\log_2(x+4)$ f) $f(x)=\sqrt{x-3}$

(1 puntos)

3.- Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{5x^2+1}{x}+\dfrac{3-x^2}{x+2}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x+4}}{x}$

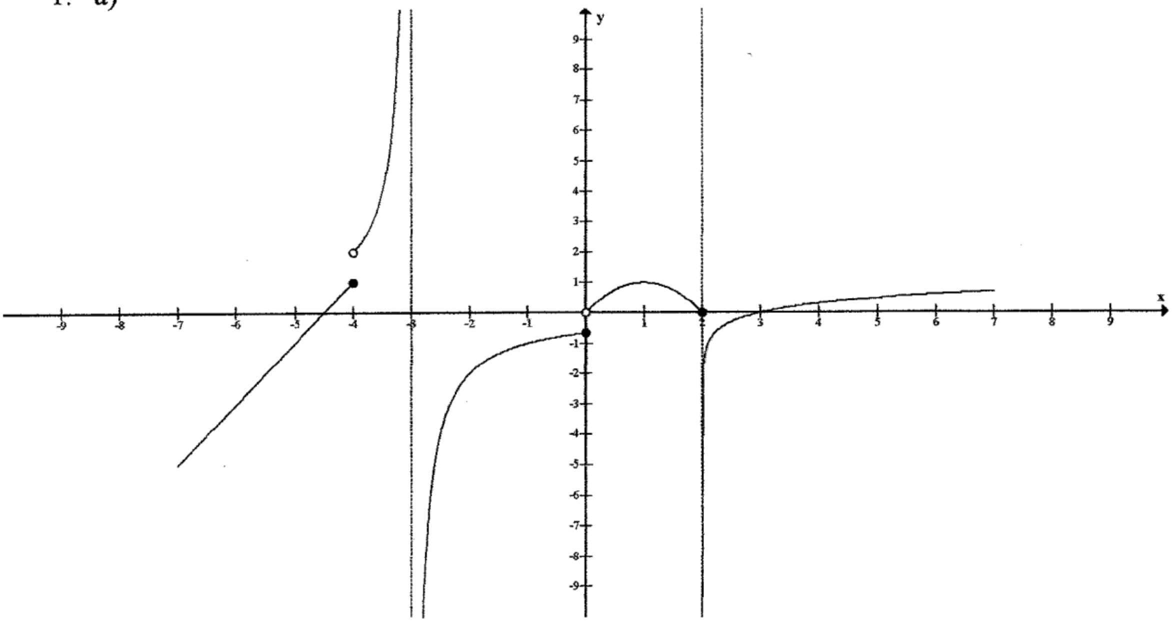
c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-11x+14}{4x^2-16x+16}$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x}-\sqrt{4x^2-3}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+3}{2x+1}\right)^{\frac{3}{x-2}}$

(Cada límite 1 punto)

SOLUCIONES

1. **a)**



b) Dom f(x) = $\Re$–{–3}

c) Im f(x) = $\Re$

d) Crece (–∞, –4) ∪ (–4, –3) ∪ (–3, 0) ∪ (0, 1) ∪ (2, +∞); Decrece (1, 2)

e) f(x) > 0 en (–4'5, –4) ∪ (–4, –3) ∪ (0, 2) ∪ (3, +∞)

f) f(–4) = 1

g) $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x) = 1$

h) $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = 2$

i) $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = \text{no existe}$

j) f(–3) = no existe

k) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \pm\infty$

2. a) Polinómica, Dom f(x) = $\Re$
   b) Racional de proporcionalidad inversa, Dom f(x) = $\Re$ – {3}
   c) Racional polinómica, Dom f(x) = $\Re$ – {2, –3/2}
   d) Exponencial, Dom f(x) = $\Re$
   e) Logarítmica, Dom f(x) = {x ∈ $\Re$ / x > –4}
   f) Radical, Dom f(x) = {x ∈ $\Re$/ x ≥ 3}

3. a) –∞ ; b) –1/4 ; c) ±∞ ; d) ½ ; e) $e^{-3/7}$

ver los límites desarrollados a continuación:

1) a) $y = 2x+9$

x	-5	-4
y	-1	1

$y = \frac{-2}{x+3}$

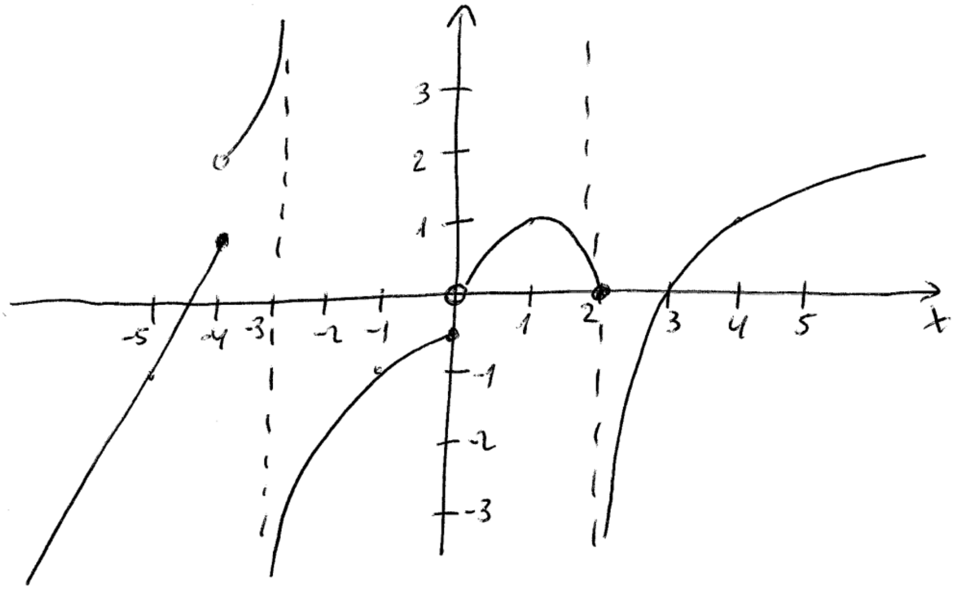
x	-4	-3	-1	0
y	2	∞	-1	$\frac{-2}{3}$

$y = -x^2+2x$

x	0	1	2
y	0	1	0

$y = \log_2(x-2)$

x	2	3	4
y	$-\infty$	0	1



b) $\text{Dom} f(x) = \mathbb{R} - \{-3\}$

c) $\text{Im} f(x) = \mathbb{R}$

d) Crece $(-\infty,-4) \cup (-4,-3) \cup (-3,0) \cup (0,1) \cup (2,\infty)$

Decrece $(1,2)$

e) $f(x) > 0$ en $(-\frac{9}{2},-4) \cup (-4,-3) \cup (0,2) \cup (3,\infty)$

f) $f(-4) = 1$ g) $\lim_{x \to -4^-} f = 1$ h) $\lim_{x \to -4^+} f = 2$

i) $\lim_{x \to -4} f = \nexists$ j) $f(-3) = \nexists$ k) $\lim_{x \to -3} f = \pm\infty$

—— o ——

2)

a) Polinómica, $Dom\, f = \mathbb{R}$

b) Racional, de proporcionalidad inversa.

$Dom\, f = \mathbb{R} - \{3\}$

c) Racional polinómica, $Dom\, f = \mathbb{R} - \{2, \frac{-3}{2}\}$

$2x^2 - x - 6 = 0 \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4} \begin{cases} 2 \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$

d) Exponencial, $Dom\, f = \mathbb{R}$

e) Logarítmica, $Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} / x > -4\}$

$x + 4 > 0 \rightarrow x > -4$

f) Radical, $Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 3\}$

$x - 3 \geq 0 \quad x \geq 3$

——— o ———

3) a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{5x^2+1}{x} + \frac{3-x^2}{x+2} \right) = (\infty - \infty) =$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{5x^3+10x^2+x+2+3x-x^3}{x^2+2x} \right) =$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4x^3+10x^2+4x+2}{x^2+2x} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2-\sqrt{x+4}}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(2-\sqrt{x+4})(2+\sqrt{x+4})}{x(2+\sqrt{x+4})} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{4-(x+4)}{x(2+\sqrt{x+4})} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-x}{x(2+\sqrt{x+4})} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{-1}{2+\sqrt{x+4}} = \frac{-1}{4}$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x^2-11x+14}{4x^2-16x+16} = \left(\frac{0}{0}\right) =$

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{2(x-7/2)\cancel{(x-2)}}{4(x-2)^{\cancel{2}}} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{2(x-7/2)}{4(x-2)} =$

$= \frac{-3}{0} = \pm\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{(2x-7)}{4(x-2)} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{(2x-7)}{4(x-2)} = -\infty$

3) d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x}-\sqrt{4x^2-3}\right)=(\infty-\infty)=$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x}-\sqrt{4x^2-3}\right)\frac{\left(\sqrt{4x^2+2x}+\sqrt{4x^2-3}\right)}{\left(\sqrt{4x^2+2x}+\sqrt{4x^2-3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(4x^2+2x)-(4x^2-3)}{\sqrt{4x^2+2x}+\sqrt{4x^2-3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{\sqrt{4x^2+2x}+\sqrt{4x^2-3}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+3/x}{\sqrt{\frac{4x^2+2x}{x^2}}+\sqrt{\frac{4x^2-3}{x^2}}}=\frac{2+0}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}=\frac{2}{2+2}=\frac{1}{2}$$

e) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x+3}{2x+1}\right)^{\frac{3}{x-2}}=\left[1^{\infty}\right]=$

$$\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{x+3}{2x+1}-1\right)^{\frac{3}{x-2}}=\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{-x+2}{2x+1}\right)^{\frac{3}{x-2}}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{-x+2}}\right)^{\frac{3}{x-2}}=\lim_{x\to 2}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{-x+2}}\right)^{\frac{2x+1}{-x+2}}\right]^{\frac{-x+2}{2x+1}\cdot\frac{3}{x-2}}$$

$$=\cancel{\lim_{x\to 2}}\,e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{(-x+2)\,3}{(2x+1)(x-2)}}=e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{-3\cancel{(x-2)}}{(2x+1)\cancel{(x-2)}}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{-3}{2x+1}}=e^{-\frac{3}{7}}$$

EXAMEN DE MATEMÁTICAS

1º BACHILLERATO. Curso 2004_2005

1. Dada la función:

$$y = F(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{si} \quad x < 1 \\ 3x + 2 & \text{si} \quad 1 \le x < 4 \\ 4x - 2 & \text{si} \quad x \ge 4 \end{cases}$$

¿Existe el límite de F(x) para $x \to 1$? ¿Y para $x \to 4$? Razona tu respuesta.
Dibuja la gráfica de F(x).

2. Calcular b para que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2 + 2x}{bx(1 + x)} = \frac{1}{5}$$

3. Calcular los siguientes límites:

a) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 - 5x + 6}{x^3 - x^2 + 8}$$

b) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^4 - 2x}{x(x^2 - 1)}$$

c) $$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{x^2 + 5}\right)^{\frac{3x+1}{x+2}}$$

d) $$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^3 + 2} - 5x\right)$$

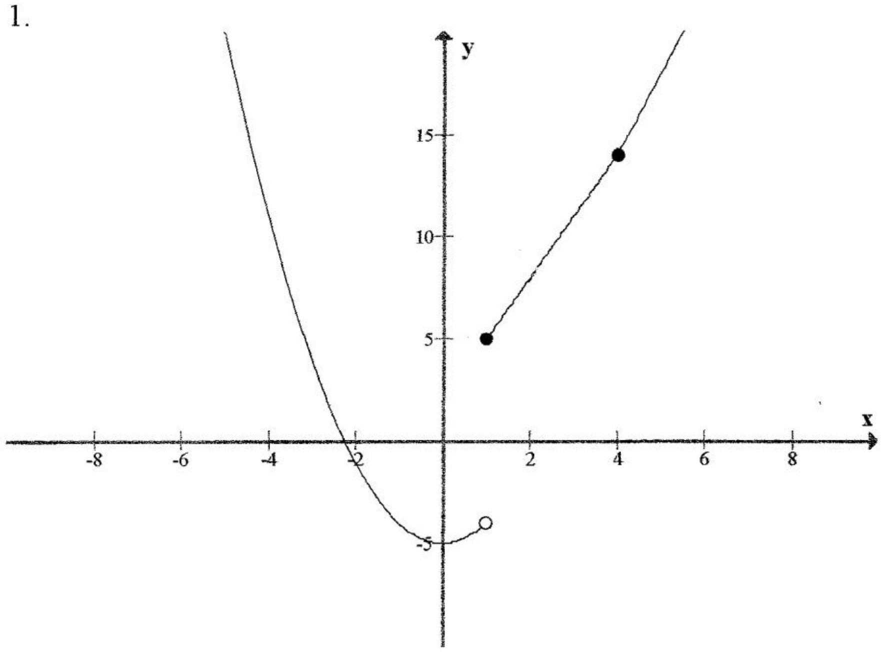
4. Calcular los siguientes límites del número e:

a) $$\lim_{x\to 2} \left(\frac{x + 3}{2x + 1}\right)^{2/(x-2)}$$

b) $$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x + 1}{3x + 4}\right)^{2x}$$

SOLUCIONES

1.



No existe límite para x = 1, discontinuidad de salto finito. Sí existe límite para x = 4, vale 14, es continua.

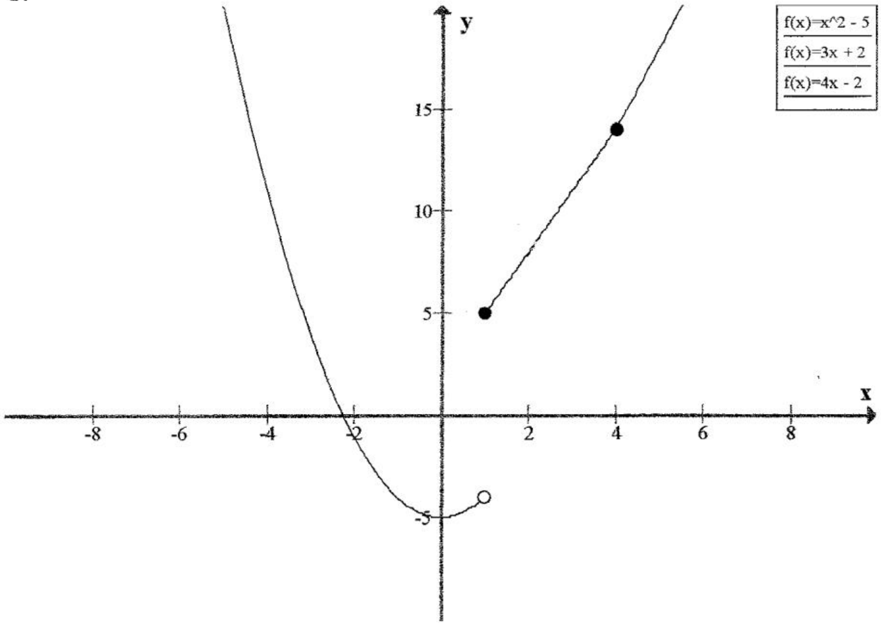
2. $b = -5$

3. a) 0 b) $\pm\infty$ c) 8 d) $\pm\infty$

4. a) $e^{-2/5}$ b) e^{-2}

1\.

1\.



$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2-5 = -4$$

$\neq$ $\nexists$ límite en $x=1$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 3x+2 = 5$$

discontinua de salto finito

$$\lim_{x\to 4^-} 3x+2 = 14 = \lim_{x\to 4^+} 4x-2 = f(4)$$

$\exists$ límite y es continua en $x=4$

——o——

2. $$\lim_{x\to\infty} \frac{-x^2+2x}{bx(1+x)} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-x^2+2x}{bx(1+x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2+2x}{bx^2+bx} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}}{\frac{bx^2}{x^2}+\frac{bx}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1+\cancel{\frac{2}{x}}^{\to 0}}{b+\cancel{\frac{b}{x}}_{\to 0}} = -\frac{1}{b} = \frac{1}{5}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{b=-5}$$

—— o ——

3. a) $$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-5x+6}{x^3-x^2+8} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^3}-\frac{5x}{x^3}+\frac{6}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{x^2}{x^3}+\frac{8}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{\frac{2}{x}}^{\to 0}-\cancel{\frac{5}{x^2}}^{\to 0}+\cancel{\frac{6}{x^3}}^{\to 0}}{1-\cancel{\frac{1}{x}}_{0}+\cancel{\frac{8}{x^3}}_{0}} =$$

$$= \frac{0}{1} = 0$$

b) $$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^4-2x}{x(x^2-1)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^4-2x}{x^3-x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4x^4}{x^4}-\frac{2x}{x^4}}{\frac{x^3}{x^4}-\frac{x}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{4-\cancel{\frac{2}{x^3}}^{\to 0}}{\cancel{\frac{1}{x}}_{0}-\cancel{\frac{1}{x^3}}_{0}} = \frac{4}{0} = \infty$$

3\. c) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+1}{x^2+5}\right)^{\frac{3x+1}{x+2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+1}{x^2+5}\right)^{\frac{3x+1}{x+2}} = 2^3 = 8$$

d) $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+2x}-5x\right) = [\infty-\infty] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+2x}-5x\right)\frac{\left(\sqrt{x^3+2x}+5x\right)}{\left(\sqrt{x^3+2x}+5x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^3+2x}\right)^2-(5x)^2}{\sqrt{x^3+2x}+5x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x-25x^2}{\sqrt{x^3+2x}+5x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{x^3+2x-25x^2}^{\text{grad } 3}}{\underbrace{\sqrt{x^3+2x}+5x}_{\text{grad } \frac{3}{2}}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \infty$$

— o —

4. a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+3}{2x+1}\right)^{\frac{2}{x-2}} = [1^{\infty}] =$

$= e^{\lim\limits_{x\to 2} \frac{2}{x-2}\cdot\left(\frac{x+3}{2x+1}-1\right)} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to 2} \frac{2}{x-2} \frac{x+3-2x-1}{2x+1}} = e^{\lim\limits_{x\to 2} \frac{2}{x-2}\cdot\frac{-x+2}{2x+1}} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to 2} \frac{2}{\cancel{x-2}} \frac{-\cancel{(x-2)}}{2x+1}} = e^{\lim\limits_{x\to 2} \frac{-2}{2x+1}} = e^{-2/5}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x+4}\right)^{2x} = [1^{\infty}] =$

$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} 2x\left(\frac{3x+1}{3x+4}-1\right)} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} 2x\left(\frac{3x+1-3x-4}{3x+4}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} 2x\left(\frac{-3}{3x+4}\right)} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-6x}{3x+4}} = e^{-2}$

—— o ——

EXAMEN FUNCIONES 1

1.- Dadas las funciones: $f(x)=\sqrt{x-2}$; $g(x)=\dfrac{x-1}{3+x}$; $h(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

a) Calcula los dominios de f, g y h.
b) Calcula la función inversa de g.
c) Calcula $f\circ g$, $g\circ f$, $h\circ f$ y sus dominios

2.- Calcula los siguientes límites (en caso de no existir, explica por qué):

a) $\displaystyle\lim_{x\to 5}\frac{3x-15}{\sqrt{x+4}-3}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2-1}{3x+1}-\frac{x^3-x^2+1}{3x^2}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-2}\right)^{\frac{1}{x-3}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 5}\sqrt{\frac{x^2-4x+6}{x-5}}$

3.- Encuentra razonadamente la expresión analítica de una función racional que cumpla:
  a) Tiene una discontinuidad evitable en x = 3
  b) Tiene asíntotas verticales en x = 1 y x = -1
  c) Tiene asíntota horizontal en y = 2
  d) Haz una representación gráfica aproximada de dicha función.

4.- Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x}{x+3} & \text{si } x\le -1\\[2mm] \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1} & \text{si } -1<x<1\\[2mm] mx-2 & \text{si } x\ge 1\end{cases}$$

Estudia su continuidad y halla m para que sea continua en x = 1

5.- Representa gráficamente la función $f(x)=\left|\dfrac{x+3}{x-2}\right|$. Halla su dominio y su recorrido y exprésala como función a trozos.

PUNTUACIÓN: 2 PUNTOS CADA EJERCICIO

SOLUCIONES

1.- Dadas las funciones: $f(x)=\sqrt{x-2}$; $g(x)=\dfrac{x-1}{3+x}$; $h(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

a) dominios de f, g y h.

$f(x)=\sqrt{x-2} \to x-2\geq 0 \to x\geq 2 \Rightarrow Dom(f)=[2,+\infty)$

$g(x)=\dfrac{x-1}{3+x} \to 3+x=0 \Rightarrow x=-3 \Rightarrow Dom(g)=R-\{-3\}$

$h(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) \to \dfrac{1}{x}>0 \Rightarrow x>0 \Rightarrow Dom(h)=(0,+\infty)$

b)función inversa de g: $y=\dfrac{x-1}{3+x} \to x=\dfrac{y-1}{3+y} \to 3x+xy=y-1 \to 3x+1=y-xy$

$y(1-x)=3x+1 \to y=\dfrac{3x+1}{1-x} \Rightarrow g^{-1}(x)=\dfrac{3x+1}{1-x}$

c) $(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f\left[\dfrac{x-1}{3+x}\right]=\sqrt{\dfrac{x-1}{3+x}-2}=\sqrt{\dfrac{x-1-6-2x}{3+x}}=\sqrt{\dfrac{-x-7}{3+x}}$,

$\dfrac{-(x+7)}{3+x}\geq 0 \to \dfrac{x+7}{3+x}\leq 0 \to$

+ -7 - -3 +

$Dom(f\circ g)=[-7,-3)$

$(g\circ f)(x)=g[f(x)]=g\left[\sqrt{x-2}\right]=\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{3+\sqrt{x-2}} \quad \to Dom(g\circ f)=[2,+\infty)$

$(h\circ f)(x)=h[f(x)]=h\left(\sqrt{x-2}\right)=\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}\right) \to \ Dom(h\circ f)=(2,+\infty)$

2.- a) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x-15}{\sqrt{x+4}-3}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(3x-15)(\sqrt{x+4}+3)}{(\sqrt{x+4}-3)(\sqrt{x+4}+3)}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(3x-15)(\sqrt{x+4}+3)}{x+4-9}=$

$=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3(x-5)(\sqrt{x+4}+3)}{x-5}= \quad =\lim\limits_{x\to 5}3(\sqrt{x+4}+3)=18$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{3x+1}-\dfrac{x^3-x^2+1}{3x^2}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{(x^2-1)3x^2}{3x+1}-\dfrac{(x^3-x^2+1)(3x+1)}{3x^2}\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^4-3x^2-3x^4+3x^3-3x-x^3+x^2-1}{9x^3+3x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^3-2x^2-3x-1}{9x^3+3x^2}\right)=\dfrac{2}{9}$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-2}\right)^{\frac{1}{x-3}}=(1^\infty)=e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{x-3}\left[\frac{1}{x-2}-1\right]}=e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{x-3}\cdot\frac{1-x+2}{x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{3-x}{(x-3)(x-2)}}=e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{-1}{x-2}}=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$

d) $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{\dfrac{x^2-4x+6}{x-5}}=\left(\sqrt{\dfrac{11}{0}}\right)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 5^-}\sqrt{\dfrac{x^2-4x+6}{x-5}}=\sqrt{\dfrac{11}{0^-}}\to \text{no existe}\\ \lim\limits_{x\to 5^+}\sqrt{\dfrac{x^2-4x+6}{x-5}}=\sqrt{\dfrac{11}{0^+}}=+\infty\end{cases}$ No existe límite

3.- a) Discontinuidad evitable en x = 3

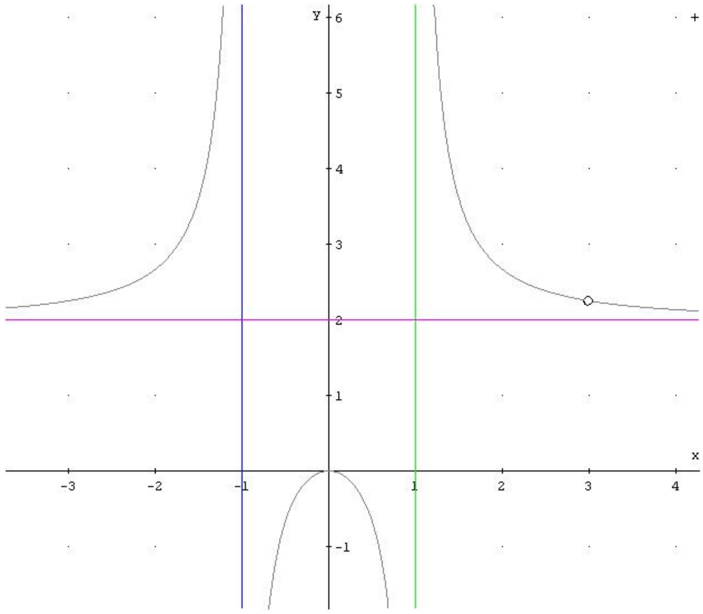
$\rightarrow \dfrac{(x-3)}{(x-3)}$

A.V. en x = 1 y x = -1

$\rightarrow \dfrac{(x-3)}{(x-3)(x-1)(x+1)}$

A.H. en y = 2

$\rightarrow \dfrac{2(x-3)x^2}{(x-3)(x-1)(x+1)}$



4.- $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x}{x+3} & \text{si } x\le -1 \quad \rightarrow \text{continua en } (-\infty,-3)\cup(-3,-1), \text{ racional}\\ \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1} & \text{si} -1<x<1 \rightarrow \text{continua en } (-1,1), \text{ racional}\\ mx-2 & \text{si } x\ge 1 \quad \rightarrow \text{continua en } (1,+\infty)\end{cases}$$

Habrá que estudiar la continuidad en x = -3, x = -1 , x = 1

En x = -3

$f(-3)=\dfrac{-12}{0}$ no existe $\rightarrow \lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x}{x+3}=\left\langle \begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{4x}{x+3}=\dfrac{-12}{0^-}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{4x}{x+3}=\dfrac{-12}{0^+}=-\infty\end{array}\right.$ tenemos una discontinuidad de salto infinito, es decir una asíntota vertical de ramas divergentes

En x = -1

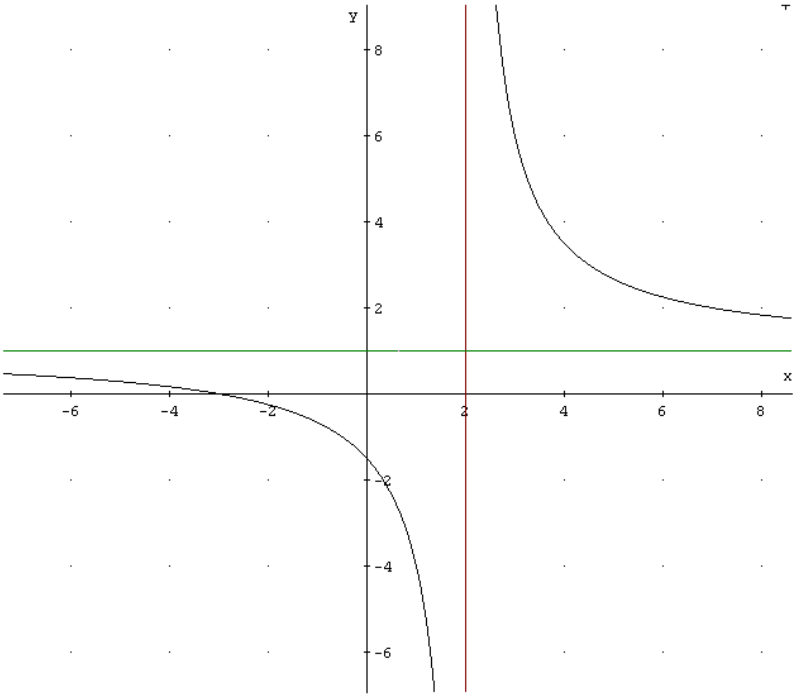
$f(-1)=\dfrac{-4}{2}=-2 \rightarrow \lim\limits_{x\to -1}f(x)=\left\langle \begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{4x}{x+3}=\dfrac{-4}{2}=-2\\ \lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}=\dfrac{-2}{0^-}=+\infty\end{array}\right.$ tenemos una discontinuidad de salto infinito en x = -1

En x = 1

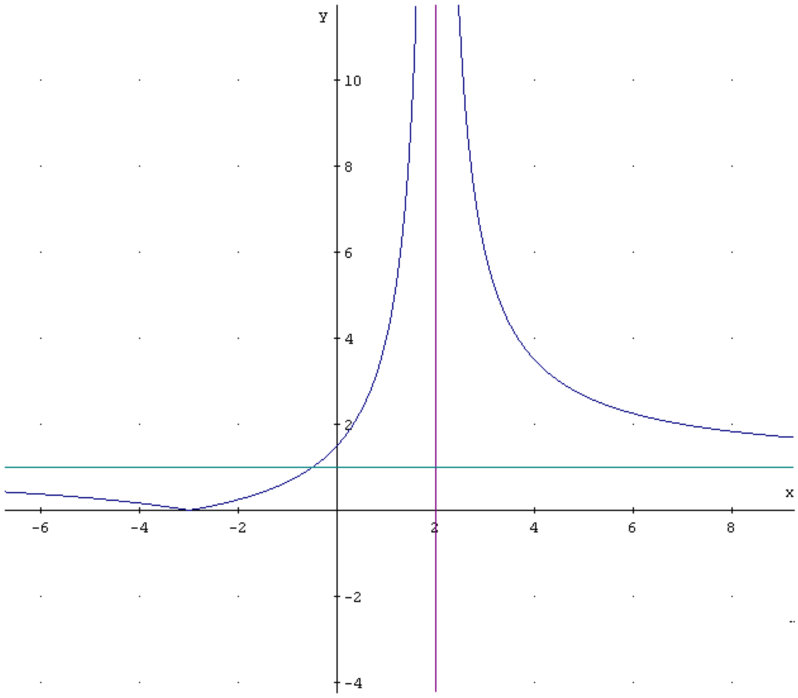
$$f(1)=m-2 \rightarrow \lim_{x\to 1}f(x)=\left\langle \begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{3}{2}\\ \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(mx-2)=m-2\end{array}\right.$$

para que sea continua en x = 1 tiene que ser $m-2=\dfrac{3}{2}\Rightarrow m=2+\dfrac{3}{2}\rightarrow m=\dfrac{7}{2}$

5.- $f(x)=\left|\dfrac{x+3}{x-2}\right|$ empezamos representando gráficamente la hipérbola $y=\dfrac{x+3}{x-2}$ que tiene la asíntota vertical en x = 2 y la asíntota horizontal en y = 1, dibujamos su gráfica



y "pasamos" la parte negativa (debajo del eje OX) a positiva (al hacer el valor absoluto)



$Dom(f)=R-\{2\}$

$Re\,c(f)=R-\{1\}$

$\dfrac{x+3}{x-2}>0$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+3}{x-2} & si\ x<-3\\ -\dfrac{x+3}{x-2} & si\ -3\le x<2\\ \dfrac{x+3}{x-2} & si\ x>2\end{cases}$$

CONTROL FUNCIONES 2

1.- Halla razonadamente el dominio de las siguientes funciones: (2,5 puntos)

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 9}}$

b) $g(x) = \ln\left(4 - x^2\right)$

c) $h(x) = \sqrt{\dfrac{3 + x}{2x - 1}}$

2.- Dadas las funciones: $f(x) = \sqrt{x - 2}$ y $g(x) = \dfrac{2x}{x - 1}$

Halla:

a) fog, gof y sus dominios. (1,5 puntos)

b) f^{-1} y g^{-1} y sus dominios (1 punto)

3.- Representa gráficamente y halla el dominio y el recorrido de las funciones:

a) $f(x) = \left| -x^2 + 6x - 5 \right|$ b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x - 1} & \text{si } x \leq 2 \\ x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ (1,5 puntos cada una)

4.- Dadas las funciones $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ y $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ (2 puntos)

a) Escribe las características de cada una de ellas.

b) Represéntalas gráficamente en el mismo sistema de referencia.

c) ¿Qué relación hay entre ellas?

SOLUCIONES

1.- a) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-9}}$ la raíz cúbica no tiene problemas, sólo habrá problemas cuando se anule el denominador $\rightarrow x^2-9=0 \Rightarrow x=\pm 3 \rightarrow Dom(f)=R-\{-3,3\}$

b) $g(x)=\ln(4-x^2)$, la función logarítmica tiene dominio $(0,+\infty)$, luego habrá que resolver la inecuación $4-x^2>0 \Rightarrow (2-x)(2+x)>0$

$(4-x^2)$ -   -2   +   2   - $\rightarrow Dom(g)=(-2,2)$

c) $h(x)=\sqrt{\dfrac{3+x}{2x-1}}$ tiene que cumplirse $\dfrac{3+x}{2x-1}\geq 0 \rightarrow \begin{cases} 3+x=0 \Rightarrow x=-3 \\ 2x-1=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\dfrac{3+x}{2x-1}$ +   -3   -   1/2   +

$\rightarrow Dom(h)=(-\infty,-3]\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

3.- a) $f(x)=\sqrt{x-2}$ y $g(x)=\dfrac{2x}{x-1}$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\dfrac{2x}{x-1}\right)=\sqrt{\dfrac{2x}{x-1}-2}=\sqrt{\dfrac{2}{x-1}} \rightarrow Dom(f\circ g)=(1,+\infty)$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\sqrt{x-2}\right)=\dfrac{2\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}-1} \rightarrow x-2\geq 0 \Rightarrow x\geq 2$

$\sqrt{x-2}-1=0 \Rightarrow \sqrt{x-2}=1 \Rightarrow x-2=1 \Rightarrow x=3 \rightarrow Dom(g\circ f)=[2,3)\cup(3,+\infty)$

b) $f(x)=\sqrt{x-2} \rightarrow y=\sqrt{x-2} \rightarrow x=\sqrt{y-2} \rightarrow x^2=y-2 \Rightarrow f^{-1}(x)=x^2+2$

$\rightarrow Dom(f^{-1})=R$

$g(x)=\dfrac{2x}{x-1} \rightarrow y=\dfrac{2x}{x-1} \rightarrow x=\dfrac{2y}{y-1} \rightarrow xy-x=2y \rightarrow xy-2y=x \rightarrow y(x-2)=x$

$y=\dfrac{x}{x-2} \rightarrow g^{-1}(x)=\dfrac{x}{x-2} \rightarrow Dom(g^{-1})=R-\{2\}$

3.- a) $f(x)=\left|-x^2+6x-5\right|=\begin{cases} -x^2+6x-5 & si\ x<1 \\ x^2-6x+5 & si\ 1\leq x\leq 5 \\ -x^2+6x-5 & si\ x>5 \end{cases}$

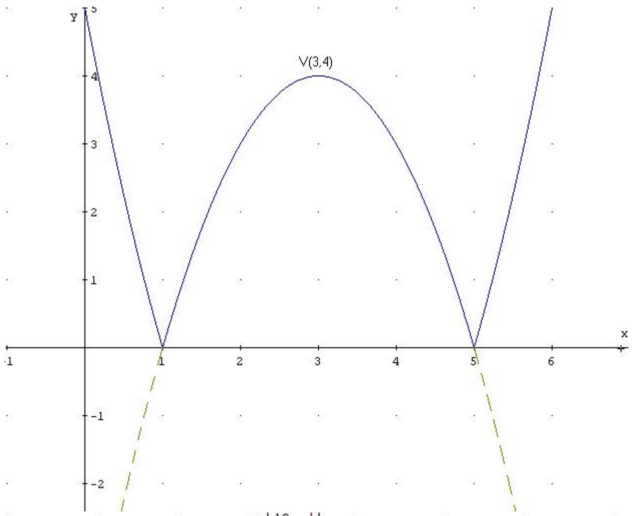
$y=-x^2+6x-5$ parábola, mira hacia abajo.

Vértice $\rightarrow x=-\dfrac{6}{-2}=3 \rightarrow V(3,4)$

Corte ejes:

Eje OY $\rightarrow (0,-5)$

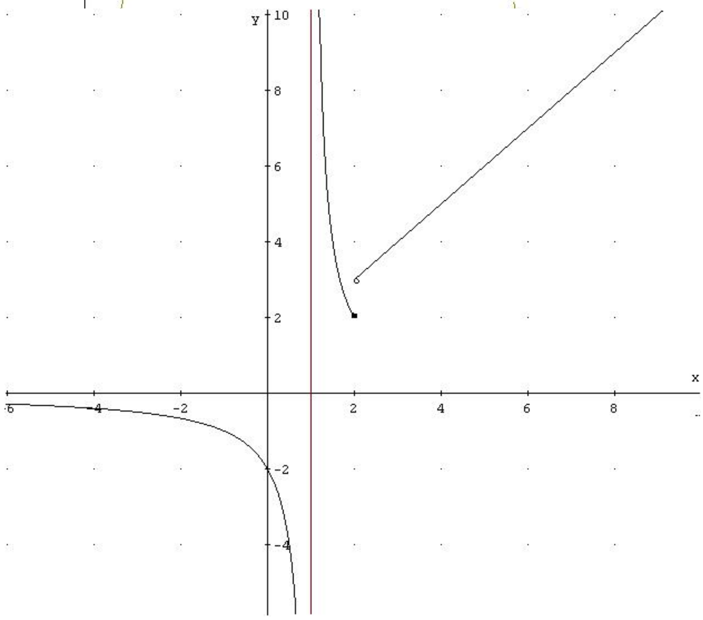
Eje OX $\rightarrow -x^2+6x-5=0 \rightarrow x = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ 5 \end{matrix} \right.$



$Dom(f) = R$

$Re\,c(f) = [0,+\infty)$

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x-1} & si\ x \le 2 \\ x+1 & si\ x > 2 \end{cases}$ la gráfica será un trozo de hipérbola, un segmento y una semirrecta, vamos a dibujarla: La hipérbola tiene la asíntota horizontal en el eje OX y la vertical en $x=1$, para dibujar la semirrecta le damos un par de valores.



$Dom(g) = R - \{1\}$

$Re\,c(g) = (-\infty,0) \cup [2,+\infty)$

4.- $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

$Dom = R, \quad Re\,c = (0,+\infty)$

Pasa por $(0,1)$ y $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$

Es decreciente en su dominio

Asíntota horizontal eje OX (dcha)

$g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

$Dom = (0,+\infty) \quad Re\,c = R$

Pasa por $(1,0)$ y $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

Es decreciente en su dominio

Asíntota vertical eje OY

Las gráficas de ambas funciones están hechas en el libro de texto.

Estas funciones son INVERSAS o RECÍPROCAS.

CONTROL FUNCIONES

1. Dadas las funciones: $f(x)=\sqrt{x+3}$, $g(x)=\dfrac{4x}{x-1}$, $h(x)=2x^3-3$

Halla: (2 p)

a) $f\circ g$ y $g\circ f$

b) La función inversa de h(x), h^{-1}, comprueba el resultado y halla su dominio.

c) La función inversa de g(x), g^{-1}, comprueba el resultado y halla su dominio.

2. Halla los dominios de las siguientes funciones: (2 p)

a) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-3}}$ b) $g(x)=e^{\frac{2}{x^2-x}}$ c) $h(x)=\log\left(4x-x^2\right)$

3. Representa gráficamente (sin hacer tabla de valores) la función $y=\left|\dfrac{3}{x-2}\right|$

Escribe sus características: Dominio, recorrido, asíntotas, continuidad, etc.

(1,5 p)

4. Representa gráficamente la siguiente función (sin hacer tabla de valores) y escribe sus características:

$$f(x)=\begin{cases}-3 & \text{si } x<-2\\ x-1 & \text{si } -2<x<1\\ -x^2+5x-4 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$ (2,5 p)

5. Representa gráficamente las siguientes funciones, sin hacer tabla de valores, es decir, hallando previamente su dominio, puntos de corte con los ejes y demás características. $y=\sqrt{x-2}$, $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ (2 p)

SOLUCIONES

1. Dadas las funciones: $f(x)=\sqrt{x+3}$, $g(x)=\dfrac{4x}{x-1}$, $h(x)=2x^3-3$

Halla:

a) $(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f\left(\dfrac{4x}{x-1}\right)=\sqrt{\dfrac{4x}{x-1}+3}=\sqrt{\dfrac{4x}{x-1}+3}=\sqrt{\dfrac{7x-3}{x-1}}$

$(g\circ f)(x)=g[f(x)]=g\left[\sqrt{x+3}\right]=\dfrac{4\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}-1}$

b) $y=2x^3-3\rightarrow$ cambiamos: $x=2y^3-3\rightarrow x+3=2y^3\rightarrow y^3=\dfrac{x+3}{2}$

$y=\sqrt[3]{\dfrac{x+3}{2}}\rightarrow h^{-1}(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x+3}{2}}$ $\quad$ $\mathrm{Dom}(h^{-1})=R$

Comprobación:

$$\left(h\circ h^{-1}\right)(x)=h\left[h^{-1}(x)\right]=h\left(\sqrt[3]{\frac{x+3}{2}}\right)=2\left(\sqrt[3]{\frac{x+3}{2}}\right)^3-3=2\cdot\frac{x+3}{2}-3=x+3-3=x$$

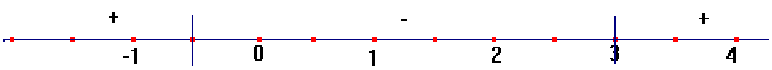
c) $y=\dfrac{4x}{x-1}$ cambiamos $x=\dfrac{4y}{y-1}$ y despejamos $xy-x=4y\rightarrow xy-4y=x$

$y(x-4)=x\rightarrow y=\dfrac{x}{x-4}\rightarrow g^{-1}(x)=\dfrac{x}{x-4}$

Comprobación: $\left(g\circ g^{-1}\right)(x)=g\left[g^{-1}(x)\right]=g\left(\dfrac{x}{x-4}\right)=\dfrac{4\cdot\dfrac{x}{x-4}}{\dfrac{x}{x-4}-1}=\dfrac{\dfrac{4x}{x-4}}{\dfrac{x-x+4}{x-4}}=\dfrac{4x}{x}=4$

2. Halla los dominios de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-3}}\rightarrow\dfrac{2x+1}{x-3}\geq 0\rightarrow\begin{cases}2x+1=0\rightarrow x=-\dfrac{1}{2}\\ x-3=0\rightarrow x=3\end{cases}$



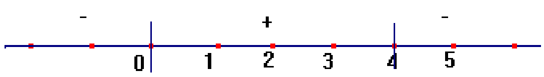
$\mathrm{Dom(f)}=\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]\cup(3,+\infty)$

b) $g(x)=e^{\frac{2}{x^2-x}}$ la exponencial está definida en todo R, pero hay que tener cuidado con el exponente, que no está definido para

$x^2-x=0\rightarrow x(x-1)=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\ x=1\end{cases}$ $\quad$ $\mathrm{Dom}(g)=R-\{0,1\}$

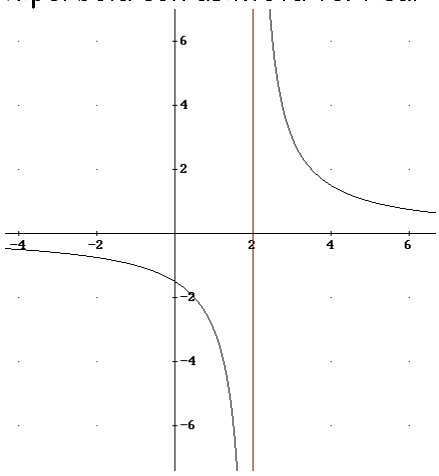
c) $h(x)=\log\left(4x-x^2\right)$ los logaritmos sólo están definidos para números positivos, es decir si

$4x-x^2>0\rightarrow x(4-x)>0\rightarrow$

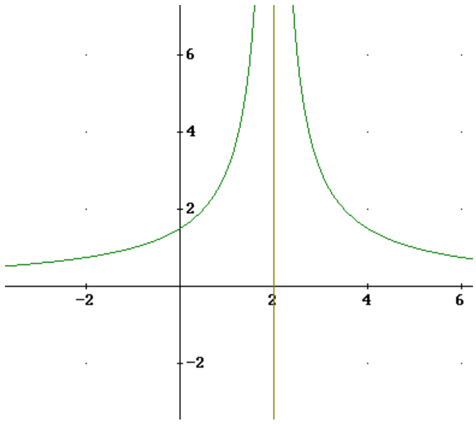


Dom(h)= $(0,4)$

3. $y=\left|\dfrac{3}{x-2}\right|$ primero vamos a representar la función $y=\dfrac{3}{x-2}$, que es una hipérbola con asíntota vertical $x = 2$ y horizontal el eje x.



y ahora el valor absoluto:



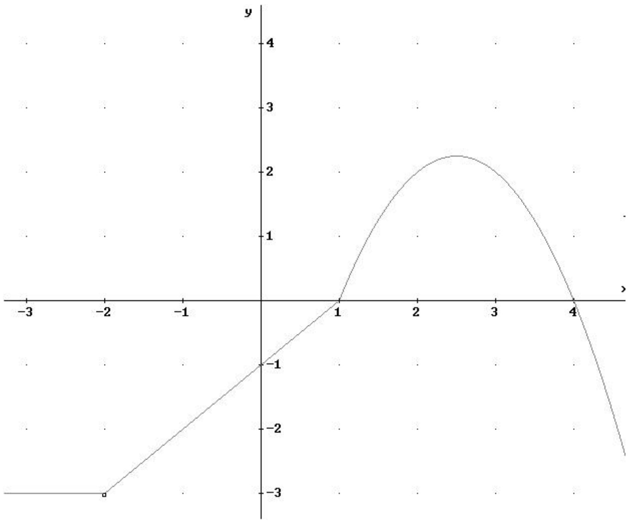
Características: Dom = $R-\{2\}$

Rec = $(0,+\infty)$ Continua en su dominio, discontinuidad de salto infinito en x = 2

Creciente en $(-\infty,0)$ y decreciente en $(0,+\infty)$

4. $f(x)=\begin{cases}-3 & \text{si } x<-2 & \rightarrow \text{recta horizontal}\\ x-1 & \text{si } -2<x<1 & \rightarrow \text{recta}\\ -x^2+5x-4 & \text{si } x\geq 1 & \rightarrow \text{parábola}\end{cases}$

Parábola $y=-x^2+5x-4$ vértice $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{5}{-2}=\dfrac{5}{2}\rightarrow V\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{9}{4}\right)$



Corte con los ejes: Eje OX:

$-x^2+5x-4=0\rightarrow x=\left\langle\begin{matrix}1\\4\end{matrix}\right.$ eje

$OY\rightarrow y=-4$

Características:

Dom = $R-\{-2\}$

Rec = $\left(-\infty,\dfrac{9}{4}\right]$

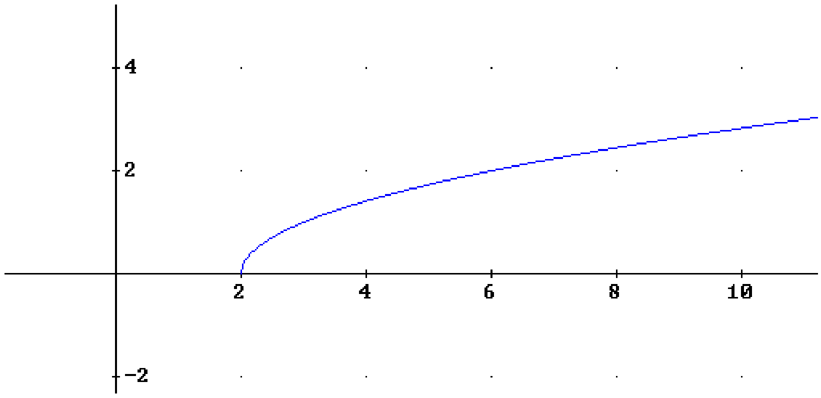
Constante en $(-\infty,-2)$

Creciente en $\left(-2,\dfrac{5}{2}\right)$

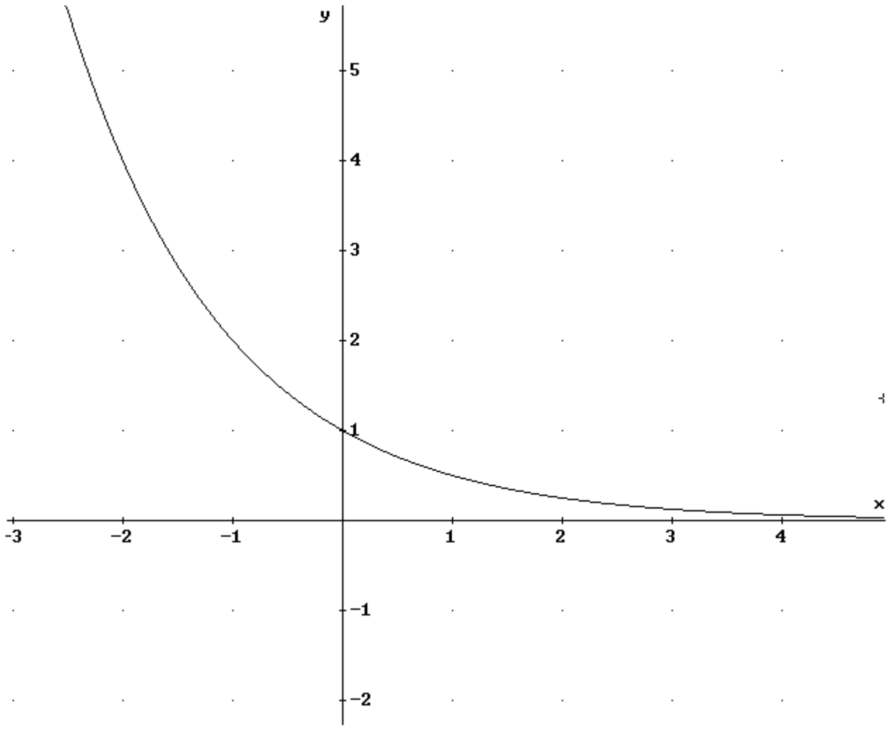
Decreciente en $\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$

Tiene un máximo en $V\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{9}{4}\right)$ no tiene asíntotas.

5. $y=\sqrt{x-2}$ tiene que ser $x-2\geq 0 \rightarrow x\geq 2$ luego, Dom = $[2,+\infty)$
corta al eje x en (2,0), no corta al eje y, es creciente y continua en su dominio y su recorrido es $[0,+\infty)$
Gráfica:



$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ función exponencial de base menor que 1, Dom = R, siempre positiva, decreciente en su dominio, corta al eje y en (0,1) y no corta al eje x.
Gráfica:



EXAMEN ANÁLISIS - GEOMETRÍA

1.- Dadas las funciones: $f(x)=\sqrt{x+1}$ y $g(x)=\dfrac{x}{x-2}$.

a) Calcula $f\circ g$, $g\circ f$ y sus dominios.

b) f^{-1}, g^{-1} y sus dominios. (2 puntos)

2.- Representa gráficamente las siguientes funciones (sin utilizar tabla de valores) y escribe sus características:

a) $f(x)=\left|-x^2+2x\right|$ b) $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$ (2,5 puntos)

3.- Representa gráficamente la función: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+2} & \text{si } x<0 \\ 2^x & \text{si } 0\le x<2 \\ x+2 & \text{si } x>2 \end{cases}$

a) Escribe sus características.

b) Calcula: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

c) Estudia su continuidad. (1,5 puntos)

4.- Dibuja razonadamente una función que cumpla las siguientes condiciones:

a) Tiene asíntota vertical en x = 2 y asíntota horizontal en y = -1

b) Su Dominio es $R-\{0,2\}$

c) Corta al eje OX sólo en el punto (1,0) (1 punto)

5.- Dado el triángulo que tiene sus vértices en los puntos A=(1,4), B=(3,-2) y C=(-1,0). Calcula:

a) Su área.

b) Su perímetro.

c) El ángulo en C.

d) La ecuación de la mediatriz del lado AC. (2 puntos)

6.- Determina m y n sabiendo que la recta 2x+ny=0 pasa por el punto (1,2) y es paralela a la recta mx-2y+3=0. (1 punto)

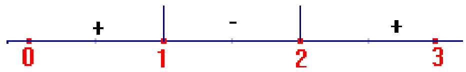
SOLUCIONES

1.- 1.- Dadas las funciones: $f(x)=\sqrt{x+1}$ y $g(x)=\dfrac{x}{x-2}$.

a) Calcula $f\circ g$, $g\circ f$ y sus dominios.

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f\left(\frac{x}{x-2}\right)=\sqrt{\frac{x}{x-2}+1}=\sqrt{\frac{2x-2}{x-2}}$$

Dominio: $\dfrac{2x-2}{x-2}\geq 0 \rightarrow$



$Dom(f\circ g)=(-\infty,1]\cup(2,+\infty)$

$$(g\circ f)(x)=g[f(x)]=g\left(\sqrt{x+1}\right)=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-2}=\frac{\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-2^2}=\frac{x+1+2\sqrt{x+1}}{x-3}$$

Dominio: tiene que ser $x+1\geq 0\rightarrow x\geq -1$, pero no puede ser x = 3 porque se anula el denominador. $Dom(g\circ f)=[-1,3)\cup(3,+\infty)$

b) f^{-1}, g^{-1} y sus dominios. $y=\sqrt{x+1}$ cambiamos: $x=\sqrt{y+1}$

despejamos $y\rightarrow x^2=\left(\sqrt{y+1}\right)^2\rightarrow x^2=y+1\rightarrow y=x^2-1\rightarrow f^{-1}(x)=x^2-1$

comprobamos: $\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left[f^{-1}(x)\right]=f\left(x^2-1\right)=\sqrt{x^2-1+1}=\sqrt{x^2}=x$

$Dom(f^{-1})=R$, función polinómica

$y=\dfrac{x}{x-2}$ cambiamos: $x=\dfrac{y}{y-2}$, despejamos y $\rightarrow x(y-2)=y\rightarrow xy-2x=y$

$xy-y=2x\rightarrow y(x-1)=2x\rightarrow y=\dfrac{2x}{x-1}\rightarrow g^{-1}(x)=\dfrac{2x}{x-1}$

comprobamos: $\left(g\circ g^{-1}\right)(x)=g\left[g^{-1}(x)\right]=g\left(\dfrac{2x}{x-1}\right)=\dfrac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{2x}{x-1}-2}=\dfrac{2x}{x-1}:\dfrac{2x-2(x-1)}{x-1}=$

$=\dfrac{2x(x-1)}{(x-1)\cdot 2}=x$ $\qquad Dom(g^{-1})=R-\{1\}$, función racional

2.- a) $f(x)=\left|-x^2+2x\right|$ vamos a representar primero

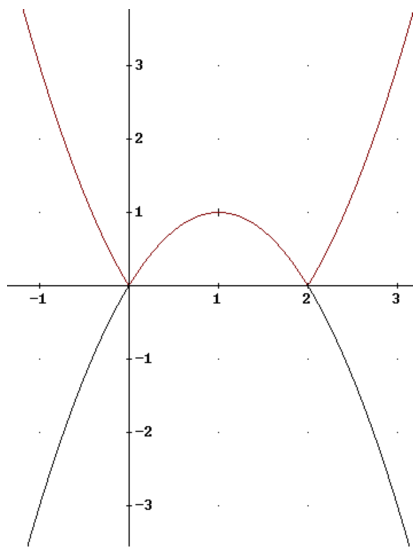
la parábola $y=-x^2+2x$

Mira hacia abajo. Vértice $x=-\dfrac{2}{-2}=1$

$V(1,1)$ Eje de simetría $x=1$

Corte ejes: eje OY: y=0

Eje OX: $-x^2+2x=0\rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$



Haciendo el valor absoluto tenemos la gráfica pedida (en rojo)

Características: Dom = R ; Rec = $[0,+\infty)$ Continua en R

Máximo en $(1,1)$, Mínimos en (0,0) y (2,0).
Crecimiento: creciente en $(0,1)\cup(2,+\infty)$ y decreciente en $(-\infty,0)\cup(1,2)$

b) $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$

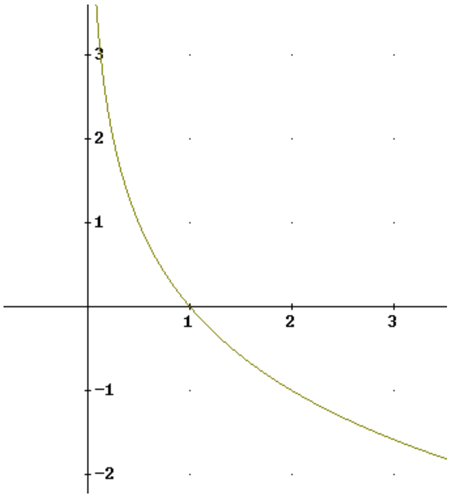
Función logarítmica de base <1, luego es decreciente

Su dominio (como todo logaritmo) es $(0,+\infty)$

Asíntota vertical el eje OY.

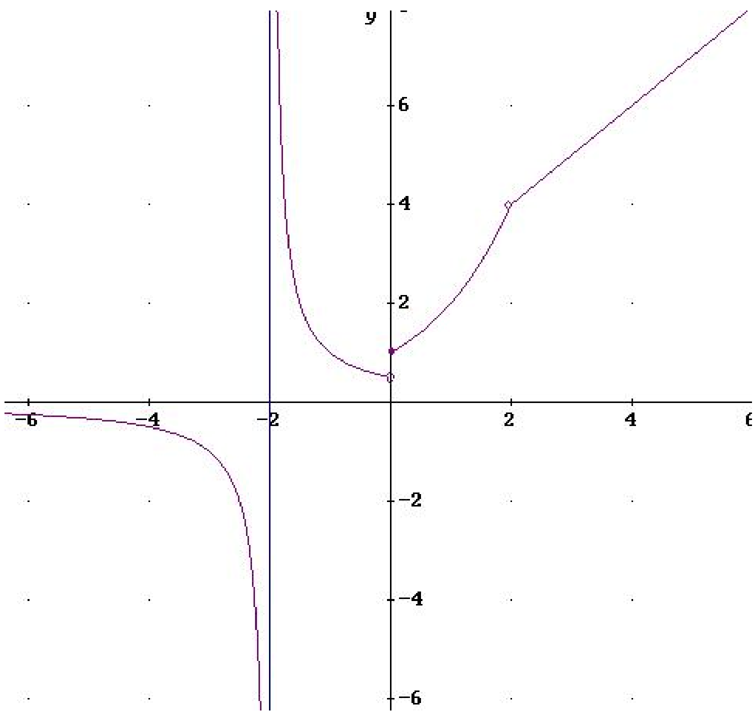
Pasa por (1,0).

La dibujamos:



3.- a)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+2} & \text{si } x<0 \rightarrow \text{trozo de hipérbola AV } x=-2\\ 2^x & \text{si } 0\le x<2 \rightarrow \text{trozo de exponencial de base} >1\\ x+2 & \text{si } x>2 \rightarrow \text{semirrecta}\end{cases}$$



Características:

Dom = $R-\{-2,2\}$

Rec = $(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

Asíntota vertical x = -2

Creciente en $(0,2)\cup(2,+\infty)$

Decreciente en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$

b) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=4$, $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=4$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\frac{1}{2}$,

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$

c) Continuidad: tenemos "problemas" en la AV: x = -2 y en los puntos de enganche 0 y 2. Estudiaremos la continuidad en esos tres puntos, puesto que en el resto es continua.

En $x=-2$ $\quad f(-2)=$ no existe $\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=+\infty\end{matrix}\right\}$ Discontinuidad de salto infinito

En x = 0 $\quad f(0)=1 \quad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\dfrac{1}{2}\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1\end{array}\right\}$ Discontinuidad de salto finito

En x = 2 $\quad f(2)=\text{no existe} \quad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=4\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=4\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$ Discontinuidad evitable

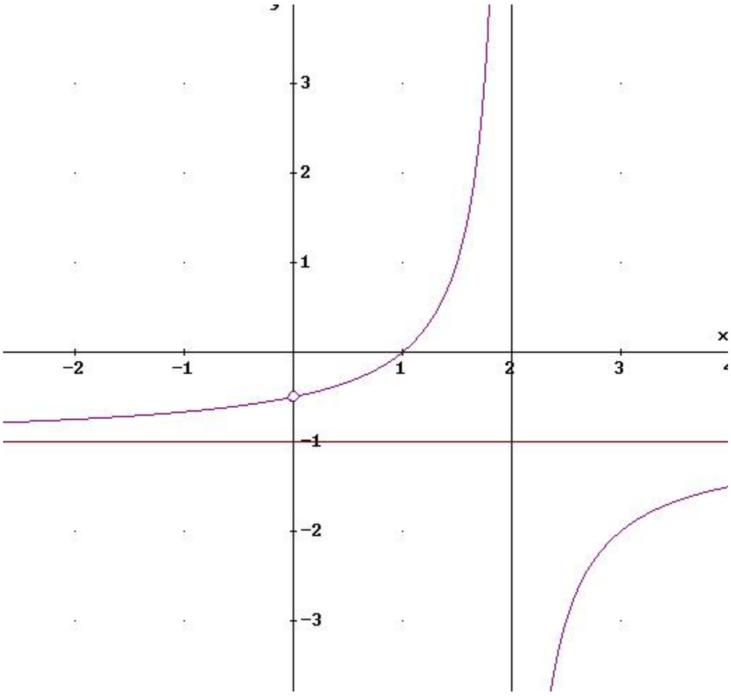
4.- Dibuja razonadamente una función que cumpla las siguientes condiciones:

a) Tiene asíntota vertical en x = 2 y asíntota horizontal en y = -1

b) Su Dominio es $R-\{0,2\}$

c) Corta al eje OX sólo en el punto (1,0)

Una gráfica sería:

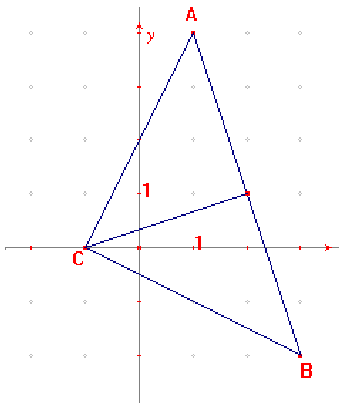


5.- Dado el triángulo que tiene sus vértices en los puntos A=(1,4), B=(3,-2) y C=(-1,0). Calcula:

a) Su área.

Necesitamos una base y la altura correspondiente, tomamos como base AB y la altura correspondiente será la distancia del punto C a la recta AB.

Empezamos hallando la ecuación de la recta AB:



Pendiente $m=\dfrac{-2-4}{3-1}=-3$ y punto A(1,4)

Ecuación punto-pendiente: $y=-3(x-1)+4$

$y=-3x+7 \to 3x+y-7=0$ es la recta AB

$$h=d(C,\overline{AB})=\frac{|3\cdot(-1)+0-7|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}u$$

$$b=d(A,B)=\sqrt{(3-1)^2+(-2-4)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}u \to A=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{10\sqrt{40}}{2\sqrt{10}}=10\ u^2$$

b) Su perímetro.

$$c=d(A,B)=\sqrt{(3-1)^2+(-2-4)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}\,u$$

$b = d(A,C) = \sqrt{(-1-1)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}\,u$

$a = d(B,C) = \sqrt{(-1-3)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}\,u$

$P = \sqrt{40} + \sqrt{20} + \sqrt{20} = 2\sqrt{10} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 2\sqrt{10} + 4\sqrt{5}\ u$

c) El ángulo en C. Será el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}\ (\alpha)$

$\overrightarrow{CA} = (1+1, 4-0) = (2,4)$; $\overrightarrow{CB} = (3+1, -2-0) = (4,-2)$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CB}\right|} = \frac{2\cdot 4 + 4\cdot(-2)}{\sqrt{2^2+4^2}\cdot\sqrt{4^2+(-2)^2}} = 0 \rightarrow \alpha = 90^{o}$$ Triángulo rectángulo

d) La ecuación de la mediatriz del lado AC. Punto medio M $\left(\frac{1-1}{2}, \frac{4+0}{2}\right) = (0,2)$

$\overrightarrow{AC} = (-2,-4) \perp (4,-2)$ mediatriz: $\frac{x-0}{4} = \frac{y-2}{-2} \rightarrow x + 2y - 4 = 0$

6.- Determina m y n sabiendo que la recta 2x+ny=0 pasa por el punto (1,2) y es paralela a la recta mx-2y+3=0.

2x+ny=0 pasa por el punto (1,2) $\rightarrow 2\cdot 1 + n\cdot 2 = 0 \Rightarrow 2n = -2 \Rightarrow n = -1$

luego, la primera recta es 2x-y = 0 $\rightarrow$ vector normal (2,-1)

la segunda recta es mx-2y+3=0 $\rightarrow$ vector normal (m, -2)

ambos vectores tienen que tener la misma dirección, es decir que $m = 4$

1. Calcula: (4,5 puntos)

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - x^2}{3x^2 + 5x - 1}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 5x^2 + 11x - 10}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x^2 - 1}$

d) $\lim\limits_{x \to 3} \left(\dfrac{1}{x-2} \right)^{\frac{1}{x-3}}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \right)$

2. Escribe **razonadamente** y representa gráficamente una función con una discontinuidad evitable en x = 2, una asíntota horizontal en y = -1 y una asíntota vertical en x = 1. (1,5 puntos)

3. Halla el valor de k para que la siguiente función sea continua en x = -1

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+1} & \text{si } x \leq -1 \\ kx^2 - 1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Para ese valor de k, representa gráficamente la función f y comprueba que es continua. (2 puntos)

4. Estudia la continuidad de la siguiente función y clasifica sus discontinuidades, si las hay:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+3} & \text{si } x < -2 \\ 3 & \text{si } x = -2 \\ x^2 - 3 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

(2 puntos)

SOLUCIONES

1. Calcula:

a) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-x^2}{3x^2+5x-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{x}-1}{3+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{3}$$

b) $$\lim_{x\to2} \frac{x^2-3x+2}{x^3-5x^2+11x-10} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x^2-3x+5)} =$$
$$= \lim_{x\to2} \frac{(x-1)}{(x^2-3x+5)} = \frac{2-1}{2^2-6+5} = \frac{1}{3}$$

Factorizamos: $x^2-3x+2=0 \to x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \left\langle\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right.$

	1	-5	+11	-10
2		2	-6	+10
	1	-3	+5	0

c) $$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x^2-1} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{1-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to1} \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}{(x^2-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)} =$$
$$= \lim_{x\to1} \frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}{(x^2-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)} = \lim_{x\to1} \frac{x-1}{(x^2-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)} =$$
$$= \lim_{x\to1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)} = \lim_{x\to1} \frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)} = \frac{1}{2\left(2\sqrt{2}\right)} = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

d) $$\lim_{x\to3} \left(\frac{1}{x-2}\right)^{\frac{1}{x-3}} = (1^\infty) = \lim_{x\to3} \left(1+\frac{1}{x-2}-1\right)^{\frac{1}{x-3}} = \lim_{x\to3} \left(1+\frac{1-x+2}{x-2}\right)^{\frac{1}{x-3}} =$$
$$= \lim_{x\to3} \left(1+\frac{3-x}{x-2}\right)^{\frac{1}{x-3}} = \lim_{x\to3} \left[\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{3-x}}\right)^{\frac{x-2}{3-x}}\right]^{\frac{3-x}{x-2}\cdot\frac{1}{x-3}} = e^{\lim_{x\to3}\frac{3-x}{(x-2)(x-3)}} =$$
$$= e^{\lim_{x\to3}\frac{-1}{(x-2)}} = e^{-1} = 1/e$$

e) $$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x-1}\right)^2}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)} == \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1-x+1}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)} = 0$$

2. x = 1 Asíntota Vertical, anula el denominador.

$$f(x)=\frac{-(x-2)^2}{(x-1)(x-2)}$$

y= -1 Asíntota Horizontal,

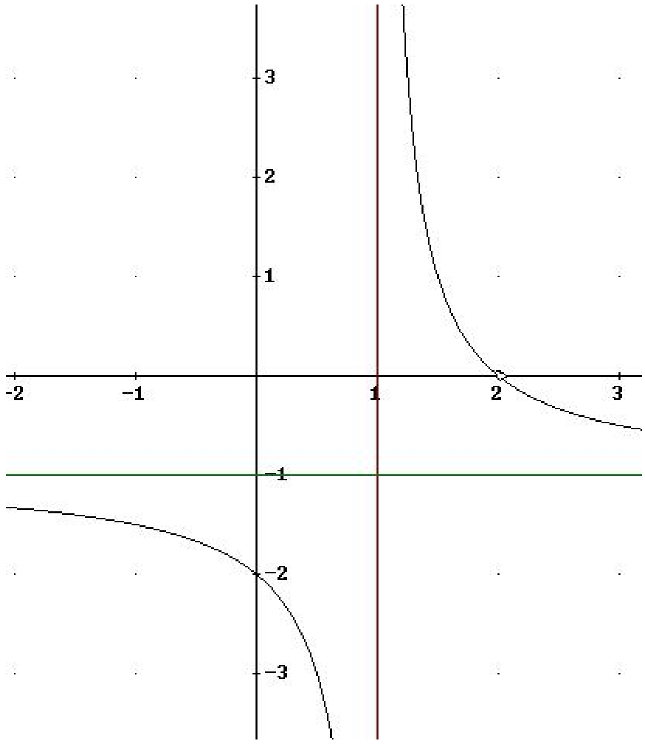
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-(x-2)^2}{(x-1)(x-2)}=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-(x-2)^2}{(x-1)(x-2)}=-1$$

discontinuidad evitable en x = 2,
ya que no existe f(2), pero si el límite

$$\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)^2}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{-x+2}{(x-1)}=0$$

Gráfica aproximada:



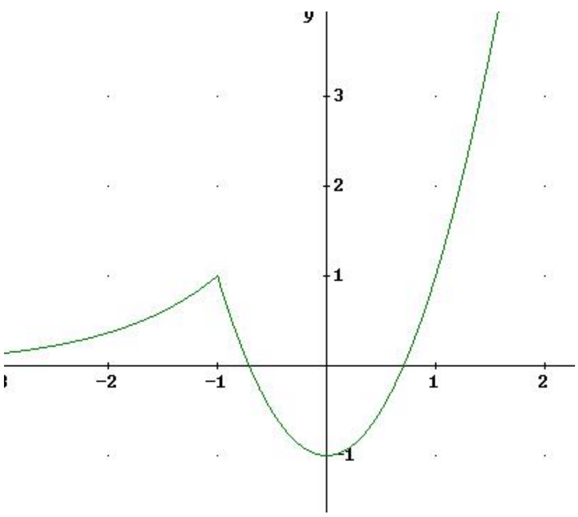
3. $f(x)=\begin{cases} e^{x+1} & \text{si } x\le -1 \quad \text{exponencial, continua} \\ kx^2-1 & \text{si } x>-1 \quad \text{cuadrática, continua}\end{cases}$

Continuidad en x = -1

$$f(-1)=e^{-1+1}=e^0=1\ \begin{cases}\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1} e^{x+1}=e^0=1 \\ \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}(kx^2-1)=k-1\end{cases}\to 1=k-1\to k=2$$

$$f(x)=\begin{cases} e^{x+1} & \text{si } x\le -1 \quad \text{exponencial, creciente} \\ 2x^2-1 & \text{si } x>1 \quad \text{parábola, } \cup\text{, vértice}(0,-1)\end{cases}$$

Gráfica:



4. $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+3} & \text{si } x<-2 \rightarrow \text{hipérbola, } AV: x=-3, AH: y=0 \\ 3 & \text{si } x=-2 \rightarrow \text{punto}(-2,3) \\ x^2-3 & \text{si } x>-2 \rightarrow \text{parábola, } \cup\text{, vértice}(0,-3)\end{cases}$

Hay problemas, o puede haberlos en x = -3 (AV de la hipérbola), y en x = -2. En el resto, la función es continua.

Continuidad en x = -3:

$$f(-3)=\text{No existe} \quad \begin{cases}\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty\end{cases}$$ discontinuidad de salto infinito (AV)

Continuidad en x = -2:

$$f(-2)=2 \quad \begin{cases}\lim\limits_{x\to -2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{1}=1 \\ \lim\limits_{x\to -2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}(x^2-3)=4-3=1\end{cases}$$ discontinuidad evitable