TEMA 2 – POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS

<u>EJERCICIO 1</u> : Desarrolla y simplifica:

a) $(x-1)(x^2+x)^2-(x^5-5x^4+x^3-x^2)$ **b)** $(2x-3)^2-(2x^2+4x+1)(x-2)$

c) $(x^2-2x+3)(2x+1)-(4x-1)^2$ **d)** $\left(\frac{2}{3}x-1\right)(3x+6)+(x+1)(x-1)-(x+2)^2$

Solución:

a) $(x-1)(x^2+x)^2-(x^5-5x^4+x^3-x^2)=(x-1)(x^4+2x^3+x^2)-(x^5-5x^4+x^3-x^2)=$

$=x^5+2x^4+x^3-x^4-2x^3-x^2-x^5+5x^4-x^3+x^2=6x^4-2x^3$

b) $(2x-3)^2-(2x^2+4x+1)(x-2)=(4x^2-12x+9)-(2x^3+4x^2+x-4x^2-8x-2)=$

$=4x^2-12x+9-(2x^3-7x-2)=4x^2-12x+9-2x^3+7x+2=-2x^3+4x^2-5x+11$

c) $(x^2-2x+3)(2x+1)-(4x-1)^2=(2x^3+x^2-4x^2-2x+6x+3)-(16x^2-8x+1)=$

$=2x^3-3x^2+4x+3-16x^2+8x-1=2x^3-19x^2+12x+2$

d) $\left(\frac{2}{3}x-1\right)(3x+6)+(x+1)(x-1)-(x+2)^2=(2x^2+4x-3x-6)+(x^2-1)-(x^2+4x+4)=$

$=2x^2+x-6+x^2-1-x^2-4x-4=2x^2-3x-11$

<u>EJERCICIO 2</u>

a) Opera y simplifica: $(x+2)^2-3(x^2-2x+4)$

b) Halla el cociente y el resto de esta división: $(4x^5+2x^3-3x+1):(x^2-2)$

Solución:

a) $(x+2)^2-3(x^2-2x+4)=x^2+4x+4-3x^2+6x-12=-2x^2+10x-8$

b)
$$\begin{array}{rrrr|l}
4x^5 & +\ 2x^3 & -\ 3x & +\ 1 & x^2-2 \\ \cline{5-5}
-\ 4x^5 & +\ 8x^3 & & & 4x^3+10x \\ \cline{1-4}
 & 10x^3 & -\ 3x & +\ 1 & \\
 & -\ 10x^3 & +\ 20x & & \\ \cline{2-4}
 & & 17x & +\ 1 &
\end{array}$$

Cociente = $4x^3+10x$ Resto = $17x+1$

<u>EJERCICIO 3</u>

a) Opera y simplifica: $\left(\frac{1}{2}x+1\right)(2x+2)-(x+1)^2$

b) Halla el cociente y el resto de esta división: $(7x^5-2x^3+3x-2):(x^2+2)$

Solución:

a) $\left(\frac{1}{2}x+1\right)(2x+2)-(x+1)^2=x^2+x+2x+2-(x^2+2x+1)==x^2+3x+2-x^2-2x-1=x+1$

b)
$$\begin{array}{rrrr|l}
7x^5 & -\ 2x^3 & +\ 3x & -\ 2 & x^2+2 \\ \cline{5-5}
-\ 7x^5 & -\ 14x^3 & & & 7x^3-16x \\ \cline{1-4}
 & -\ 16x^3 & +\ 3x & -\ 2 & \\
 & 16x^3 & +\ 32x & & \\ \cline{2-4}
 & & 35x & -\ 2 &
\end{array}$$

Cociente = $7x^3-16x$ Resto = $35x-2$

EJERCICIO 4 : Calcula el cociente y el resto de cada división:

a) $\left(2x^5 - 3x^4 + 2x^2 - x + 1\right) : \left(x^3 - 2x + 1\right)$ **b)** $\left(2x^5 - 3x^3 + 2x - 1\right) : \left(x + 2\right)$

Solución:

a)
$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
2x^5 & -3x^4 & & +2x^2 & -x & +1 & x^2+2+1 \\ \cline{7-7}
-2x^5 & & +4x^3 & -2x^2 & & & 2x^2-3x+4 \\ \cline{1-6}
 & -3x^4 & +4x^3 & & -x & +1 & \\
 & 3x^4 & & -6x^2 & +3x & & \\ \cline{2-6}
 & & 4x^3 & -6x^2 & +2x & +1 & \\
 & & -4x^3 & & +8x & -4 & \\ \cline{3-6}
 & & & -6x^2 & +10x & -3 &
\end{array}
$$

Cociente $= 2x^2 - 3x + 4$ Resto $= -6x^2 + 10x - 3$

b) Aplicamos la regla de Ruffini:

	2	0	–3	0	2	–1
–2		–4	8	–10	20	–44
	2	–4	5	–10	22	–45

Cociente $= 2x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 10x + 22$ Resto $= -45$

EJERCICIO 5 : Halla el cociente y el resto de cada división:

a) $\left(2x^4 - 7x^3 + 3x^2 - 1\right) : \left(x^2 + 2\right)$ **b)** $\left(-3x^4 + 6x^2 + x - 2\right) : \left(x - 1\right)$

Solución:

a)
$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & +7x^3 & +3x^2 & & -1 & x^2+2 \\ \cline{6-6}
-2x^4 & & -4x^2 & & & 2x^2-7x-1 \\ \cline{1-5}
 & -7x^3 & -x^2 & & -1 & \\
 & 7x^3 & & +14x & & \\ \cline{2-5}
 & & -x^2 & +14x & -1 & \\
 & & x^2 & & +2 & \\ \cline{3-5}
 & & & 14x & +1 &
\end{array}
$$

Cociente $= 2x^2 - 7x - 1$ Resto $= 14x + 1$

b) Aplicamos la regla de Ruffini:

	–3	0	6	1	–2
1		–3	–3	3	4
	–3	–3	3	4	2

Cociente $= -3x^3 - 3x^2 + 3x + 4$ Resto $= 2$

EJERCICIO 6 : Halla el valor de k para que la siguiente división sea exacta: $\left(3x^2 + kx - 2\right) : \left(x + 2\right)$

Solución: Llamamos $P(x) = 3x^2 + kx - 2$.

Para que la división sea exacta, ha de ser $P(-2) = 0$; es decir: $P(-2) = 12 - 2k - 2 = 10 - 2k = 0 \rightarrow k = 5$

EJERCICIO 7

a) Halla el valor numérico de $P(x) = -2x^3 + x^2 - 3x - 6$ para $x = -1$

b) ¿Es divisible el polinomio anterior, $P(x)$, entre $x + 1$?

Solución:

a) $P(-1) = 2 + 1 + 3 - 6 = 0$

b) Sí. Por el teorema del resto, sabemos que el resto de la división $P(x) : (x + 1)$ coincide con $P(-1)$. En este caso $P(-1) = 0$; por tanto, $P(x)$ es divisible entre $x + 1$.

EJERCICIO 8 : Dado el polinomio $P(x) = 4x^3 - 8x^2 + 3x - 1$:

a) Halla el cociente y el resto de la división: $P(x) : (x - 2)$

b) ¿Cuánto vale $P(2)$?

Solución:

a) Aplicamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 4 & -8 & 3 & 1 \\ 2 & & 8 & 0 & 6 \\ \hline & 4 & 0 & 3 & 5 \end{array}$$

Cociente $= 4x^2 + 3$ Resto $= 5$

b) Por el teorema del resto, sabemos que $P(2) = 5$.

EJERCICIO 9

a) Halla el valor numérico de $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 2x - 3$ para $x = 1$.

b) ¿Es divisible el polinomio anterior, $P(x)$, entre $x - 1$?

Solución:

a) $P(1) = 3 - 2 + 2 - 3 = 0$

b) Si. Por el teorema del resto, sabemos que el resto de la división $P(x) : (x - 1)$ coincide con $P(1)$. En este caso $P(1) = 0$, por tanto, $P(x)$ es divisible entre $x - 1$.

EJERCICIO 10 : Opera y simplifica cada una de estas expresiones:

a) $\mathbf{2x(2x + 1) - (2x + 3)^2}$ **b)** $\dfrac{4}{x} + \dfrac{x}{x-2}$

c) $\mathbf{(x + 3)(x - 3) - x(3x - 7)}$ **b)** $\dfrac{(x+5)^2}{x} : \dfrac{x+5}{3x^3}$

Solución:

a) $2x(2x + 1) - (2x + 3)^2 = 4x^2 + 2x - (4x^2 + 12x + 9) = 4x^2 + 2x - 4x^2 - 12x - 9 = -10x - 9$

b) $\dfrac{4}{x} + \dfrac{x}{x-2} = \dfrac{4(x-2)}{x(x-2)} + \dfrac{x^2}{x(x-2)} = \dfrac{x^2+4x-8}{x(x-2)} = \dfrac{x^2+4x-8}{x^2-2x}$

c) $(x + 3)(x - 3) - x(3x - 7) = x^2 - 9 - 3x^2 + 7x = -2x^2 + 7x - 9$

b) $\dfrac{(x+5)^2}{x} : \dfrac{x+5}{3x^3} = \dfrac{3x^3(x+5)^2}{x(x+5)} = 3x^2 \cdot (x+5) = 3x^3 + 15x^2$

EJERCICIO 11 : Opera y simplifica:

a) $(3x + 2)^2 + x^2(x - 9)$ **b)** $\dfrac{3x}{x+2} - \dfrac{5}{x-2}$ **c)** $2(x - 1)^2 - x(1 + 2x)$ **b)** $\dfrac{5x^4}{x-6} : \dfrac{10x^2}{(x-6)^2}$

Solución:

a) $(3x + 2)^2 + x^2(x - 9) = 9x^2 + 12x + 4 + x^3 - 9x^2 = x^3 + 12x + 4$

b) $\dfrac{3x}{x+2} - \dfrac{5}{x-2} = \dfrac{3x(x-2)}{(x+2)(x-2)} - \dfrac{5(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{3x^2 - 6x - 5x - 10}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{3x^2 - 11x - 10}{x^2 - 4}$

c) $2(x - 1)^2 - x(1 + 2x) = 2(x^2 - 2x + 1) - x - 2x^2 = 2x^2 - 4x + 2 - x - 2x^2 = -5x + 2$

b) $\dfrac{5x^4}{x-6} : \dfrac{10x^2}{(x-6)^2} = \dfrac{5x^4(x-6)^2}{10x^2(x-6)} = \dfrac{x^2(x-6)}{2} = \dfrac{x^3 - 6x^2}{2}$

<u>EJERCICIO 12</u> : Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^5 + 5x^4 - x^3 - 5x^2$ **b)** $x^5 + x^4 - 4x^3 - 4x^2$ **c)** $x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 18x$
d) $x^4 + 6x^3 - x^2 - 6x$ **e)** $x^4 + 6x^3 - x^2 - 6x$ **f)** $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9$

Solución:

a) $x^5 + 5x^4 - x^3 - 5x^2$

- Sacamos x^2 factor común: $x^2 (x^3 + 5x^2 - x - 5)$
- Utilizamos la regla de Ruffini para factorizar $x^3 + 5x^2 - x - 5$:

	1	5	–1	–5
1		1	6	5
	1	6	5	0
–1		–1	–5	
	1	5	0	

Por tanto: $x^5 + 5x^4 - x^3 - 5x^2 = x^2 (x - 1) (x + 1) (x + 5)$

b) $x^5 + x^4 - 4x^3 - 4x^2$

- Sacamos x^2 factor común: $x^2 (x^3 + x^2 - 4x - 4)$
- Utilizamos la regla de Ruffini para factorizar $x^3 + x^2 - 4x - 4$:

	1	1	–4	–4
–1		–1	0	4
	1	0	–4	0
2		2	4	
	1	2	0	

Por tanto: $x^5 + x^4 - 4x^3 - 4x^2 = x^2 (x + 1) (x - 2) (x + 2)$

c) $x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 18x$

- Sacamos x factor común: $x (x^3 + 2x^2 - 9x - 18)$
- Utilizamos la regla de Ruffini para factorizar $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$:

	1	2	–9	–18
3		3	15	18
	1	5	6	0
–3		–3	–6	
	1	2	0	

Por tanto: $x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 18x = x\,(x - 3)\,(x + 3)\,(x + 2)$

d) $x^4 + 6x^3 - x^2 - 6x$

- Sacamos x factor común: $x\,(x^3 + 6x^2 - x - 6)$
- Utilizamos la regla de Ruffini para factorizar $x^3 + 6x^2 - x - 6$:

	1	6	–1	–6
1		1	7	6
	1	7	6	0
–1		–1	–6	
	1	6	0	

Por tanto: $x^4 + 6x^3 - x^2 - 6x = x\,(x - 1)\,(x + 1)\,(x + 6)$

e) $x^4 + 6x^3 - x^2 - 6x$

- Sacamos x factor común: $x\,(x^3 + 6x^2 - x - 6)$
- Utilizamos la regla de Ruffini para factorizar $x^3 + 6x^2 - x - 6$:

	1	6	–1	–6
1		1	7	6
	1	7	6	0
–1		–1	–6	
	1	6	0	

Por tanto: $x^4 + 6x^3 - x^2 - 6x = x\,(x - 1)\,(x + 1)\,(x + 6)$

f) Usamos la regla de Ruffini:

	1	–6	8	6	–9
1		1	–5	3	9
	1	–5	3	9	0
–1		–1	6	–9	
	1	–6	9	0	
3		3	–9		
	1	–3	0		

Luego: $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 = (x - 1)\,(x + 1)\,(x - 3)^2$

<u>EJERCICIO 13</u>

a) Halla el cociente y el resto de la siguiente división: $(3x^5 - 16x^3 + 6x^2 + 7x - 2) : (3x^2 - 1)$

b) Factoriza este polinomio: $2x^4 + 4x^2$

Solución:

a)
$$\begin{array}{rrrrr|l}
3x^5 & -16x^3 & +6x^2 & +7x & -2 & 3x^2 - 1 \\ \cline{6-6}
-3x^5 & x^3 & & & & x^3 - 5x + 2 \\ \cline{1-5}
& -15x^3 & +6x^2 & +7x & & \\
& 15x^3 & & -5x & & \\ \cline{2-5}
& & 6x^2 & +2x & -2 & \\
& & -6x^2 & & +2 & \\ \cline{3-5}
& & & 2x & &
\end{array}$$

Cociente $= x^3 - 5x + 2$ Resto $= 2x$

b) $2x^4 + 4x^2 = 2x^2(x^2 + 2)$ (El polinomio $x^2 + 2$ no tiene raíces reales.)

<u>EJERCICIO 14</u>

a) Calcula y simplifica: $(x - 3)\,(x + 3) - 2x(x^2 - 5x)$

b) Descompón en factores este polinomio: $3x^3 - 16x^2 + 23x - 6$

Solución:

a) $(x - 3)\,(x + 3) - 2x(x^2 - 5x) = x^2 - 9 - 2x^3 + 10x^2 = -2x^3 + 11x^2 - 9$

b) Utilizamos la regla de Ruffini:

	3	–16	23	–6
2		6	–20	6
	3	–10	3	0
3		9	–3	
	3	–1	0	

Luego: $3x^3 - 16x^2 + 23x - 6 = (x - 2)\,(x - 3)\,(3x - 1)$

<u>EJERCICIO 15</u> : Factoriza los siguientes polinomios:

a) $2x^4 - 18x^2$ **b) $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$** **c) $x^3 - 13x^2 + 36x$**

d) $2x^3 - 9x^2 - 8x + 15$ **e) $x^5 + x^4 - 2x^3$** **e) $x^3 - 3x + 2$**

Solución:

a) Sacamos factor común y tenemos en cuenta que $a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$:

$2x^4 - 18x^2 = 2x^2\,(x^2 - 9) = 2x^2\,(x + 3)\,(x - 3)$

b) Utilizamos la regla de Ruffini:

	1	–1	–1	–1	–2
–1		–1	2	–1	2
	1	–2	1	–2	0
2		2	0	2	
	1	0	1	0	

$x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = (x + 1)\,(x - 2)\,(x^2 + 1)$ (El polinomio $x^2 + 1$ no tiene raíces reales).

c) Sacamos factor común y hallamos las otras raíces resolviendo la ecuación de segundo grado:

$x^3 - 13x^2 + 36x = x\left(x^2 - 13x + 36\right)$

$$x^2 - 13x + 36 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 9 \\ x = 4 \end{cases}$$

Por tanto: $x^3 - 13x^2 + 36\,x = x\,(x - 9)\,(x - 4)$

d) Utilizamos la regla de Ruffini:

	2	–9	–8	15
1		2	–7	–15
	2	–7	–15	0
5		10	15	
	2	3	0	

$2x^3 - 9x^2 - 8x + 15 = (x - 1)\,(x - 5)\,(2x + 3)$

e) Sacamos factor común y hallamos las otras raíces resolviendo la ecuación:

$x^5 + x^4 - 2x^3 = x^3\,(x^2 + x - 2)$

$$x^2+x-2=0 \to x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2} \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

Por tanto: $x^5+x^4-2x^3=x^3\,(x-1)\,(x+2)$

f) Utilizamos la regla de Ruffini:

	1	0	–3	2
1		1	1	–2
	1	1	–2	0
1		1	2	
	1	2	0	

$x^3-3x+2=(x-1)^2\,(x+2)$

<u>EJERCICIO 16</u> : Opera y simplifica:

a) $\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{2}{x-1}$ b) $\dfrac{x^2-2x+1}{x+3}:\dfrac{x-1}{x^2-9}$

a) $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x^2+2}{x^2-x}$ b) $\dfrac{x^2-1}{x+2}\cdot\dfrac{(x+2)^2}{x^2+2x+1}$

a) $\dfrac{x-1}{x-2}+\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$ b) $\dfrac{x^2+x}{2x+4}:\dfrac{x^2-1}{x+2}$

a) $\dfrac{2x+1}{x^2-9}+\dfrac{3}{x+3}$ b) $\dfrac{x^2+2x}{x^3}\cdot\dfrac{x^2}{x^2-4}$

a) $\dfrac{3x^2+1}{x^2+x}-\dfrac{2x}{x+1}$ b) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\cdot\dfrac{x}{x+1}$

Solución:

a) $\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{2x}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{2x-2x-2}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{-2}{x^2-1}$

b) $\dfrac{x^2-2x+1}{x+3}:\dfrac{x-1}{x^2-9}=\dfrac{(x-1)^2}{(x+3)}:\dfrac{(x-1)}{(x+3)(x-3)}=\dfrac{(x-1)^2(x+3)(x-3)}{(x+3)(x-1)}==(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$

a) $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x^2+2}{x^2-x}=\dfrac{x(x+1)}{x(x-1)}-\dfrac{x^2+2}{x(x-1)}=\dfrac{x^2+x-x^2-2}{x(x-1)}=\dfrac{x-2}{x^2-x}$

b) $\dfrac{x^2-1}{x+2}\cdot\dfrac{(x+2)^2}{x^2+2x+1}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+2)}\cdot\dfrac{(x+2)^2}{(x+1)^2}=\dfrac{(x-1)(x+2)}{x+1}=\dfrac{x^2+x-2}{x+1}$

a) $\dfrac{x-1}{x-2}+\dfrac{x^2+1}{x^2-4}=\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-2)(x+2)}+\dfrac{x^2+1}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{x^2+x-2+x^2+1}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-4}$

b) $\dfrac{x^2+x}{2x+4}:\dfrac{x^2-1}{x+2}=\dfrac{x(x+1)}{2(x+2)}:\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+2)}=\dfrac{x(x+1)(x+2)}{2(x+2)(x-1)(x+1)}=\dfrac{x}{2(x-1)}=\dfrac{x}{2x-2}$

a) $\dfrac{2x+1}{x^2-9}+\dfrac{3}{x+3}=\dfrac{2x+1}{(x-3)(x+3)}+\dfrac{3(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{2x+1+3x-9}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{5x-8}{x^2-9}$

b) $\dfrac{x^2+2x}{x^3}\cdot\dfrac{x^2}{x^2-4}=\dfrac{x(x+2)}{x^3}\cdot\dfrac{x^2}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{1}{x-2}$

a) $\dfrac{3x^2+1}{x^2+x}-\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{3x^2+1}{x(x+1)}-\dfrac{2x^2}{x(x+1)}=\dfrac{3x^2+1-2x^2}{x(x+1)}=\dfrac{x^2+1}{x^2+x}$

b) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\cdot\dfrac{x}{x+1}=\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\cdot\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{x^2-1}{x^2}\cdot\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}\cdot\dfrac{x}{(x+1)}==\dfrac{x-1}{x}=1-\dfrac{1}{x}$

EJERCICIO 17 : Calcula y simplifica si es posible:

a) $\frac{2}{x+1}-\frac{x+3}{2x+2}+\frac{x}{(x+1)^2}$ **b)** $\frac{x^2-9}{2x^2+x}:\frac{x^2-6x+9}{4x^2+4x+1}$ **c)** $\frac{1}{x}+\frac{x+1}{x^2}-\frac{2x^2-6}{2x^3}$

d) $\left(\frac{2}{x}+x^2\right):\frac{4x^4+8x}{x^2+5x^3}$ **e)** $\frac{2x+5}{x+5}+\frac{5x^2}{x-5}-\frac{6x-5}{3x-15}$ **f)** $\frac{2x^3-5x^2+3x}{2x^2+x-6}$

g) $\frac{x^3+7x^2+12x}{x^3+3x^2-16x-48}$ **h)** $\frac{3x^3-3x}{x^5-x}$ **i)** $\frac{2x^3+10x^2+16x+8}{4x^3+8x^2-4x-8}$ **j)** $\frac{x^3-49x}{x^4-7x^3}$

Solución:

a) Observa que $2x+2=2(x+1)$, por tanto:

m.c.m. $[x+1,\ 2x+2,\ (x+1)^2]=2(x+1)^2$

Así: $\frac{2}{x+1}-\frac{x+3}{2x+2}+\frac{x}{(x+1)^2}=\frac{4(x+1)}{2(x+1)^2}-\frac{(x+3)(x+1)}{2(x+1)^2}+\frac{2x}{2(x+1)^2}=$

$=\frac{4x+4}{2(x+1)^2}-\frac{x^2+4x+3}{2(x+1)^2}+\frac{2x}{2(x+1)^2}=\frac{4x+4-x^2-4x-3+2x}{2(x+1)^2}=$

b) $\frac{x^2-9}{2x^2+x}:\frac{x^2-6x+9}{4x^2+4x+1}=\frac{(x^2-9)(4x^2+4x+1)}{(2x^2+x)(x^2-6x+9)}$

Factorizamos para simplificar: $\left.\begin{array}{l} x^2-9=(x-3)(x+3) \\ 4x^2+4x+1=(2x+1)^2 \\ x^2-6x+9=(x-3)^2 \end{array}\right\}$ Productos notables

$2x^2+x=x(2x+1)$

Así: $\frac{(x^2-9)(4x^2+4x+1)}{(2x^2+x)(x^2-6x+9)}=\frac{(x-3)(x+3)(2x+1)^2}{x(2x+1)(x-3)^2}=\frac{(x+3)(2x+1)}{x(x-3)}=\frac{2x^2+7x+3}{x^2-3x}$

c) m.c.m. $[x,\ x^2,\ 2x^3]=2x^3$

$\frac{1}{x}+\frac{x+1}{x^2}-\frac{2x^2-6}{2x^3}=\frac{2x^2}{2x^3}+\frac{2x(x+1)}{2x^3}-\frac{2x^2-6}{2x^3}==\frac{2x^2}{2x^3}+\frac{2x^2+2x}{2x^3}-\frac{2x^2-6}{2x^3}=\frac{2x^2+2x+6}{2x^3}=\frac{x^2+x+3}{x^3}$

d) $\left(\frac{2}{x}+x^2\right):\frac{4x^4+8x}{x^2+5x^3}=\frac{2+x^3}{x}:\frac{4x^4+8x}{x^2+5x^3}=\frac{(2+x^3)(x^2+5x^3)}{x(4x^4+8x)}$

Factorizamos para simplificar:

$x^2+5x^3=x^2(1+5x)$

$4x^4+8x=4x(x^3+2)$

Luego: $\frac{(2+x^3)(x^2+5x^3)}{x(4x^4+8x)}=\frac{(2+x^3)x^2(1+5x)}{x\cdot 4x(x^3+2)}=\frac{1+5x}{4}$

e) Como $3x-15=3(x-5)$, se tiene que: m.c.m. $[x+5,\ x-5,\ 3(x-5)]=3(x-5)(x+5)$

Así: $\frac{2x+5}{x+5}+\frac{5x^2}{x-5}-\frac{6x-5}{3x-15}=\frac{3(2x+5)(x-5)}{3(x-5)(x+5)}+\frac{15x^2(x+5)}{3(x-5)(x+5)}-\frac{(6x-5)(x+5)}{3(x-5)(x+5)}=$

$=\frac{3(2x^2-5x-25)}{3(x-5)(x+5)}+\frac{15x^3+75x^2}{3(x-5)(x+5)}-\frac{6x^2+25x-25}{3(x-5)(x+5)}=$

$=\frac{6x^2-15x-75+15x^3+75x^2-6x^2-25x+25}{3(x-5)(x+5)}=\frac{15x^3+75x^2-40x-50}{3(x-5)(x+5)}==\frac{15x^3+75x^2-40x-50}{3(x^2-25)}$

f) Factorizamos ambos polinomios:

$2x^3-5x^2+3x=x\cdot(2x^2-5x+3)$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{4}=\frac{5\pm1}{4}\begin{cases}\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\\[4pt] \frac{4}{4}=1\end{cases}$$

Luego: $2x^3-5x^2+3x=x(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)$

$2x^2+x-6=(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)$ ya que: $x=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{4}=\frac{-1\pm7}{4}\begin{cases}\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\\[4pt] \frac{-8}{4}=-2\end{cases}$

Por tanto: $\dfrac{2x^3-5x^2+3x}{2x^2+x-6}=\dfrac{x(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)}{(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)}=\dfrac{x(x-1)}{x+2}$

g)

- Numerador → Sacamos factor común y descomponemos en factores el polinomio de grado 2 que nos queda: $x^3+7x^2+12x=x(x^2+7x+12)$

  $$x=\frac{-7\pm\sqrt{49-48}}{2}=\frac{-7\pm1}{2}\begin{cases}-\frac{8}{2}=-4\\[4pt] \frac{-6}{2}=-3\end{cases}$$

  Así: $x^3+7x^2+12x=x(x+4)\ (x+3)$

- Denominador → Descomponemos aplicando Ruffini:

	1	3	–16	–48
4		4	28	48
	1	7	12	0

  $x^2+7x+12$ es una expresión de 2º grado cuyas raíces se calculan resolviendo la ecuación: $x^2+7x+12=0$, que coincide con la del numerador. Así, finalmente, el denominador descompuesto en factores será: $x^3+3x^2-16x-48=(x-4)\ (x+4)\ (x+3)$

- Simplificación de la fracción algebraica: $\dfrac{x^3+7x^2+12x}{x^3+3x^2-16x-48}=\dfrac{x(x+4)(x+3)}{(x-4)(x+4)(x+3)}=\dfrac{x}{x-4}$

h) $\dfrac{3x^3-3x}{x^5-x}=\dfrac{3x(x^2-1)}{x(x^4-1)}=\dfrac{3x(x^2-1)}{x(x^2-1)(x^2+1)}=\dfrac{3}{x^2+1}$

En el primer paso sacamos factor común y en el segundo paso aplicamos el producto notable $a^2-b^2=(a-b)\ (a+b)$ a la expresión x^4-1.

i) Descomponemos factorialmente el numerador y el denominador:

- Numerador → Sacamos factor común 2 y aplicamos la regla de Ruffini hasta llegar a un polinomio de 2º grado:

  $2x^3+10x^2+16x+8=2(x^3+5x^2+8x+4)$

	1	5	8	4
–2		–2	–6	–4
	1	3	2	0

$$x^2+3x+2=0 \to x=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{-3\pm 1}{2} \begin{cases} \dfrac{-4}{2}=-2 \\ \dfrac{-2}{2}=-1 \end{cases}$$

Así: $2x^3 + 10x^2 + 16x + 8 = 2\,(x + 2)^2\,(x + 1)$

- Denominador $\to$ Sacamos factor común 4 y aplicamos la regla de Ruffini hasta llegar a un polinomio de 2º grado:

$4x^3 + 8x^2 - 4x - 8 = 4(x^3 + 2x^2 - x - 2)$

	1	2	–1	–2
–2		–2	0	2
	1	0	–1	0

$x^2 - 1 = 0 \;\to\; x^2 = 1 \;\to\; x = \pm 1$

Así: $4x^3 + 8x^2 - 4x - 8 = 4\,(x + 2)\,(x + 1)\,(x - 1)$

- Simplificación: $\dfrac{2x^3+10x^2+16x+8}{4x^3+8x^2-4x-8}=\dfrac{2(x+2)^2(x+1)}{4(x+2)(x+1)(x-1)}=\dfrac{(x+2)}{2(x-1)}=\dfrac{x+2}{2x-2}$

Se obtiene dividiendo numerador y denominador entre el M.C.D. del ambos, que es $2(x + 2)\,(x + 1)$.

j) $\dfrac{x^3-49x}{x^4-7x^3}=\dfrac{x(x^2-49)}{x^3(x-7)}=\dfrac{x(x-7)(x+7)}{x^3(x-7)}=\dfrac{x+7}{x^2}$

En el primer paso sacamos factor común; en el segundo paso aplicamos la identidad notable $a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$ a la expresión $x^2 - 49$, y finalmente dividimos numerador y denominador entre el M.C.D. de ambos, que es $x\,(x - 7)$.

<u>**EJERCICIO 18**</u> **: Opera y simplifica:** **a)** $\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)\cdot\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)$ **b)** $\dfrac{x+1}{x-2}+\dfrac{2+x}{x^2-4x+x}$

Solución:

a) Observamos que tenemos el producto notable $(a + b)\cdot(a - b) = a^2 - b^2$.

Así: $\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)\cdot\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)=x^2-\dfrac{1}{x^4}=\dfrac{x^6-1}{x^4}$

b) Calculamos el m.c.m.$\left[(x-2),\ (x^2-4x+4)\right]$ que es $(x-2)^2$.

$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$

Luego: $\dfrac{x+1}{x-2}+\dfrac{2+x}{(x-2)^2}=\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-2)^2}+\dfrac{2+x}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-2x+x-2+2+x}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2}{(x-2)^2}$

<u>**EJERCICIO 19**</u> **: Calcula y simplifica:** **a)** $\dfrac{1}{x^2-x}+\dfrac{2x-1}{x-1}-\dfrac{3x-1}{x}$ **b)** $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2+2x-15}:\dfrac{2x-10}{x^2-25}$

Solución:

a) m.c.m.$\left[(x^2-x),\ (x-1),\ x\right]=x(x-1)$

$$\frac{1}{x^2-x}+\frac{2x-1}{x-1}-\frac{3x-1}{x}=\frac{1}{x(x-1)}+\frac{x(2x-1)}{x(x-1)}-\frac{(3x-1)(x-1)}{x(x-1)}=$$

$$=\frac{1}{x(x-1)}+\frac{2x^2-x}{x(x-1)}-\frac{3x^2-3x-x+1}{x(x-1)}=\frac{1+2x^2-x-3x^2+3x+x-1}{x(x-1)}==\frac{-x^2+3x}{x(x-1)}=\frac{x(-x+3)}{x(x-1)}=\frac{-x+3}{x-1}$$

b) Efectuamos el cociente: $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2+2x-15}:\dfrac{2x-10}{x^2-25}=\dfrac{(x^2-6x+9)(x^2-25)}{(x^2+2x-15)(2x-10)}$

Factorizamos para simplificar:

- $x^2 - 25 = (x - 5)\ (x + 5)$ $\rightarrow$ Producto notable

  $2x - 10 = 2(x - 5)$

- $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$, ya que las raíces de $x^2 - 6x + 9 = 0$ son:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \rightarrow \text{Raíz doble}$$

- $x^2 + 2x - 15 = (x + 5)\ (x - 3)$, ya que las raíces de $x^2 + 2x - 15 = 0$ son:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} \begin{cases} \dfrac{-10}{2} = -5 \\[2ex] \dfrac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

Así: $\dfrac{(x^2 - 6x + 9)(x^2 - 25)}{(x^2 + 2x - 15)(2x - 10)} = \dfrac{(x-3)^2 (x-5)(x+5)}{(x+5)(x-3)2(x-5)} = \dfrac{x-3}{2}$