TEMA 9 – DERIVADAS. TÉCNICAS DE DERIVACIÓN

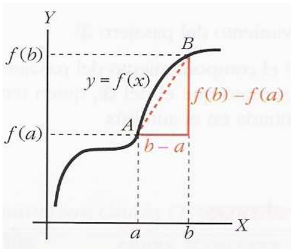
9.1 – DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

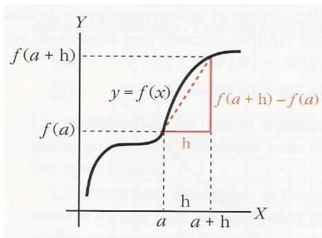
TASA DE VARIACIÓN MEDIA

Definición

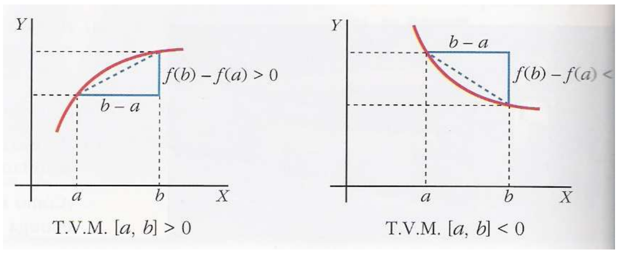
Se llama **tasa de variación media (T.V.M.)** de una función, y = f(x) en un intervalo [a,b] al cociente: T.V.M.[a,b] = $\dfrac{\text{Variación de f(x)}}{\text{Variación de x}} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$
y es la pendiente del segmento que une los puntos A(a,f(a)) y B(b,f(b))

Con frecuencia, el intervalo se le designa mediante la expresión [a,a+h], nombrando, así, a un extremo del intervalo "a", y a su longitud, "h". En tal caso, la tasa de variación media se obtiene : T.V.M. [a,a+h] = $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$





Si una función es creciente en [a,b], su tasa de variación media es positiva; y si es decreciente, negativa.



TASA DE VARIACIÓN INSTANTÁNEA O DERIVADA

Definición: Se llama **tasa de variación instantánea (T.V.I)** de una función, y = f(x) en un punto x = a o **derivada de una función en un punto x = a**, y se denota **f ´(a)**

$$\text{T.V.I.(a)} = f\,'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Significado:
Si es positiva $\Rightarrow$ La función es creciente en el punto x = a
Si es negativa $\Rightarrow$ La función es decreciente en el punto x = a

DERIVADAS LATERALES

Se llama **derivada por la izquierda** de f en x = a, $f\,'(a^-)$ a:

$$f\,'(a^-) = \lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Se llama **derivada por la derecha** de f en x = a, $f\,'(a^+)$ a:

$$f\,'(a^+) = \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

A ambas se las llama **derivadas laterales.**

Nota: Si en un punto las derivadas laterales son distintas, el punto es **anguloso**. Si las derivadas laterales coinciden, la curva es “suave” o “lisa”, es decir, es derivable.

DERIVABILIDAD Y CONTINUIDAD

Si una función es continua en un punto puede ser derivable o no derivable en ese punto.

Ejemplos:
a) $f(x) = 2x^2 + 3$ Continua en x = 0 y Derivable en x = 0
b) $f(x) = |x|$ Continua en x = 0 y No derivable en x = 0

Pero si una función es derivable en un punto, necesariamente es continua en él.

Dem: f(x) es derivable en x = a, es decir, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Vemos si f es continua en x = a, para ello debemos probar que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ *ó lo que es lo mismo,*

$$\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = 0$$

$$\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\lim_{x\to a}(x-a) = f\,'(a).0 = 0$$

Nota: Por el resultado anterior, cuando tengamos que estudiar la derivabilidad de una función estudiaremos primero su continuidad.
- Si es continua ⇒ Estudiaremos su derivabilidad ($f\,'(a^-) = f\,'(a^+)$)
- Si no es continua ⇒ No es derivable.

9.2 – FUNCIÓN DERIVADA

Si una función, f, es derivable en todos los puntos de un intervalo, I, la función f ´:

$$x \to f\,'(x)$$

definida en I, se llama **función derivada** de f.

Si f ´es derivable, su derivada se llama f ´´ (se lee derivada segunda o f segunda).
Así sucesivamente, se definen f ´´´, f^{iv}, …, $f^{\,n)}$ (f tercera, f cuarta,… f n-ésima).

Otra forma de nombrar las derivadas es Df, D^2f, D^3f, …, D^nf.
Habitualmente se obtienen las derivadas de las funciones a partir de las llamadas “reglas de derivación” que permiten obtener con comodidad y rapidez la derivada de cualquier función.

9. 3 – REGLAS DE DERIVACIÓN

OPERACIONES CON DERIVADAS

- Multiplicación por un número :(k.f(x))’ = k.f ‘(x)
- Suma y resta: [f(x) ± g(x)]’ = f ’(x) ± g’(x)
- Producto : [f(x).g(x)]’=f ‘(x).g(x) + f(x).g’(x)
- Cociente : $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
- Composición (Regla de la Cadena) : [f(g(x))]’=f ’(g(x)).g’(x)
  [f(g(h(x)))]´= f ´(g(h(x))).g´(h(x)).h´(x)

REGLAS DE DERIVACIÓN

FUNCIÓN	DERIVADA	FUNCIÓN	DERIVADA
y = k	y’ = 0		
y = x	y’ = 1		
y = x^n	y’ = $n.x^{n-1}$	y = $f^n(x)$	y’ = $n.f(x)^{n-1}.f'(x)$
y = $\sqrt{x}$	y’ = $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	y = $\sqrt{f(x)}$	y’ = $\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
y = $\sqrt[n]{x}$	y’ = $\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	y = $\sqrt[n]{f(x)}$	y’ = $\dfrac{f'(x)}{n\sqrt[n]{f^{n-1}(x)}}$
y = a^x	y’ = a^x. Ln a	y = $a^{f(x)}$	y’ = $a^{f(x)}$.Ln a.f ’(x)
y = e^x	y’ = e^x	y = $e^{f(x)}$	y’ = $e^{f(x)}$.f ‘(x)
y = $\log_a x$	y’ = $\dfrac{1}{x.Lna}$	y = $\log_a f(x)$	y’ = $\dfrac{f'(x)}{f(x).Lna}$
y = Ln x	y’ = $\dfrac{1}{x}$	y = Ln f(x)	y’ = $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
y = sen x	y’ = cos x	y = sen f(x)	y’ = cos f(x).f ‘(x)
y = cos x	y’ = - sen x	y = cos f(x)	y’ = - sen f(x).f ‘(x)
y = tag x	y’ = 1 + tag^2x = $\dfrac{1}{\cos^2 x}$	y = tag f(x)	y’ = $\dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$ = [1 + $tag^2f(x)$].f ‘(x)
y = arcsen x	y’ = $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	y = arcsen f(x)	y’ = $\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
y = arccos x	y’ = $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	y = arccos f(x)	y’ = $\dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
y = arctag x	y’ = $\dfrac{1}{1+x^2}$	y = arctag f(x)	y’ = $\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$

9.5 – DERIVADA DE LA FUNCIÓN INVERSA O RECÍPROCA DE OTRA

Si conocemos la derivada de una función f y, a partir de ella, queremos obtener la derivada de su función recíproca, f^{-1}, procederemos del siguiente modo:

$f(f^{-1}(x)) = x \rightarrow \text{Derivando} \rightarrow f'(f^{-1}(x)).(f^{-1})'(x) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$

9.6 – NUEVAS TÉCNICAS DE DERIVACIÓN

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN IMPLÍCITA

Hay funciones que vienen dadas mediante expresiones $\phi(x,y) = 0$, en las cuales es difícil o imposible despejar la y. Por ejemplo: $y^3 - 7x^2 + 5y^2x + 17 = 0$

En ellas, los valores de y quedan implícitamente dados por la expresión, pero no es posible obtener explícitamente una expresión del tipo y = f(x). La derivada, y´, de la función, no es, sin embargo, difícil de obtener (sólo hay que tener en cuenta que la derivada de x es uno, y la derivada de y es y´).

En el ejemplo: $3y^2y' - 14x + 5(2yy'x + y^2) + 0 = 0 \Rightarrow 3y^2y' + 10yy'x = 14x - 5y^2 \Rightarrow$

$$y' = \frac{14x - 5y^2}{3y^2 + 10xy}$$

Observamos que y´ viene dada en función de x y de y. Por tanto, para hallar el valor de la derivada en un punto, hemos de conocer su abscisa y su ordenada.

Por ejemplo, sabiendo que la curva pasa por (2,1), obtenemos la derivada en ese punto:

$y'(2,1) = \dfrac{14.2 - 1^2.5}{3.1^2 + 10.2.1} = \dfrac{23}{23} = 1$

DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

Función potencial: $y = f(x)^n \Rightarrow y' = n.f(x)^{n-1}$

Función exponencial: $y = a^{f(x)} \Rightarrow y' = a^{f(x)}.Lna.f'(x)$

Función exponencial-potencial: $y = f(x)^{g(x)} \Rightarrow$ Derivación logarítmica:

1 – Tomar logaritmos: $Ln\ y = Ln\ f(x)^{g(x)} \Rightarrow Ln\ y = g(x).Ln\ f(x)$

2 – Derivamos los dos miembros de la igualdad:

$$\frac{y'}{y} = g'(x).Lnf(x) + g(x).\frac{f'(x)}{f(x)}$$

3 – Despejamos y´: $y' = y.\left[g'(x).Lnf(x) + g(x).\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right]$

4 – Sustituimos la y: $y' = f(x)^{g(x)}.\left[g'(x).Lnf(x) + g(x).\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right]$

Ejemplo: $f(x) = x^x$

$Ln\ f(x) = Ln\ x^x \Rightarrow Ln\ f(x) = x.Ln\ x \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = 1.Lnx + x.\dfrac{1}{x} \Rightarrow$

$f'(x) = f(x)\ [Ln\ x + 1] \Rightarrow f'(x) = x^x\ [Ln\ x + 1]$