Matemáticas

aplicadas a las Ciencias Sociales

2

BACHILLERATO

María José Ruiz
Jesús Llorente
Carlos González

EDITEX

Unidad 1 – Matrices

PÁGINA 7

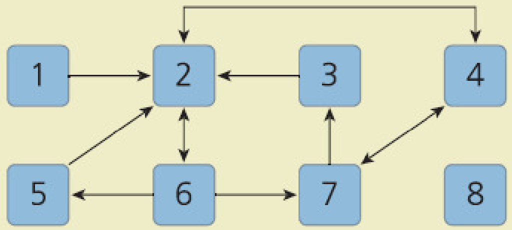
cuestiones iniciales

1. Expresa en notación matricial y resuelve por el método de Gauss los sistemas de ecuaciones siguientes:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 28 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 3y + 4z = 9 \\ 3x + 5y - z = 17 \\ -2x + 6y + z = 18 \end{cases}$

2. Si se cumple que $PQ = P$ y $QP = Q$, prueba que $P^2 = P$.

3. El grafo siguiente nos muestra las relaciones que se establecen en un grupo de ocho personas. Construye una tabla que indique las relaciones anteriores, indicando con 1 la existencia de relación entre dos personas y con 0 la no existencia de relación.



SOLUCIONES

1. La resolución de los sistemas puede expresarse de la forma siguiente:

$$a)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 28 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3F_1 - 2F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 28 \\ 0 & 13 & 78 \end{pmatrix}$$

La segunda matriz proporciona la solución $x = 5, y = 6$.

$$b)\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 9 \\ 3 & 5 & -1 & 17 \\ -2 & 6 & 1 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow[2F_1 + F_3 \to F_3]{3F_1 - F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 9 \\ 0 & -14 & 13 & 10 \\ 0 & 0 & 9 & 36 \end{pmatrix}$$

La última matriz proporciona la solución $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$.

2. Veamos que $P^2 = P$. Para ello,

$$P^2 \underset{(1)}{=} P \cdot P \underset{(2)}{=} PQ \cdot P \underset{(3)}{=} P \cdot QP \underset{(4)}{=} PQ \underset{(5)}{=} P$$

Las igualdades anteriores son debidas a:

(1) la definición de la potencia al cuadrado;
(2) la hipótesis $PQ = P$;
(3) la propiedad asociativa del producto;
(4) la hipótesis $QP = Q$;
(5) la hipótesis $PQ = P$.

3. La que indica las relaciones existentes en el grafo es:

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\
\hline
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}$$

PÁGINA 23

ACTIVIDADES

■ Con el fin de que te acostumbres a escribir los protocolos de resolución de los problemas, escribe los protocolos de los siguientes problemas:

1. **Las edades de la familia.** Una madre de familia, que ronda la cuarentena, observa que, si escribe tres veces seguidas su edad, obtiene un número que es igual al producto de su edad multiplicada por la de su marido y las edades de sus cuatro hijos. ¿Qué edad tiene cada uno de los miembros de la familia?
2. **Dos números.** Encuentra dos números tales que su suma, su producto y su cociente sean iguales.

SOLUCIONES

1. Supongamos que la edad de la madre es de 39 años; imponiendo las condiciones del problema, obtenemos:

$$393939 = 39 \cdot P \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4 \Rightarrow P \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4 = 10101$$
$$P \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4 = 37 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 1$$

Luego si la madre tiene 39 años, el padre tiene 37 y los cuatro hijos tienen respectivamente, 13, 7, 3 y 1 años.

Observamos que si partimos de que la madre tiene 38 años obtenemos la misma respuesta, e igual que para 37, 36, 35 años. Es decir, independientemente de la edad de la madre, nos salen las edades del padre, 37 años, y las edades de los hijos: 13, 7, 3 y 1 años.

En general la madre tendrá xy años $xy = 10x + y$ años.

$$xyxyxy = xy \cdot P \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4 \Rightarrow \frac{xyxyxy}{xy} = P \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4$$

Ahora bien:

$$\frac{xyxyxy}{xy} = \frac{100\,000x + 10\,000y + 1000x + 100y + 10x\,y}{10x + y} =$$
$$= \frac{101010x + 10101y}{10x + y} = \frac{10101(10x + y)}{10x + y} = 10101$$

Descomponemos 10 101 en factores y es: $10101 = 37 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 1$

Luego las edades serán:

$Q = 37$ años $H_3 = 3$ años
$H_1 = 13$ años $H_4 = 1$ año
$H_2 = 7$ años

2. Llamamos x, y a los números. Se debe cumplir que:

$$x+y=x\cdot y=\frac{x}{y}$$

Resolviendo:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=x\cdot y \\ x\cdot y=\dfrac{x}{y} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow y=\dfrac{x}{x-1} \\ \Rightarrow xy^2=x \Rightarrow y=\pm 1 \end{array}$$

Luego para $y=+1 \Rightarrow \frac{x}{x-1}=1$ no tiene solución.

Para $y=-1 \Rightarrow \frac{x}{x-1}=-1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

La solución válida es: $x=\frac{1}{2}; y=-1$

PÁGINA 28

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula a, b, c y d para que se cumpla $2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 7 \\ -2 & 3d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & a+b \\ c+d & 4 \end{pmatrix}$.

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, calcula:

   a) $A + B$ b) $A - B - C$ c) $3A + 5B - 6C$ d) $AB - BC$ e) $2AB + 3AC - 5BC$

3. Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, calcula AB y BA.

4. Calcula los productos posibles entre las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Si A y B son dos matrices cuadradas de orden n, ¿son ciertas, en general, las igualdades siguientes?:

   a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ b) $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ c) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

6. Encuentra todas las matrices, del orden correspondiente, que conmuten, respectivamente, con las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Obtén las matrices X e Y que verifiquen los siguientes sistemas matriciales:

   a) $\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ X - 3Y = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$ b) $\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$

8. Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, efectúa las siguientes operaciones:

   a) $C \cdot A^t$ b) $A^t \cdot B^t$ c) $2 \cdot C^t \cdot C$ d) $B \cdot A \cdot C^t$

9. Descompón en suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica las matrices siguientes:

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

10. Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula A^{50} y A^{97}. Encuentra los valores de a y b para que la matriz A conmute con la matriz $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$.

SOLUCIONES

1. Realizando las operaciones indicadas y aplicando la igualdad de matrices, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+5 & a+b+7 \\ c+d-2 & 3d+4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = a+5 \\ 2b = a+b+7 \\ 2c = c+d-2 \\ 2d = 3d+4 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, a=5, b=12, c=−6, d=−4.

2. La solución en cada caso queda:

a) $A+B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A-B-C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

c) $3A-B-C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

d) $AB-BC=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$

e) $2AB+3AC-5BC=2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}-5\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -18 & 27 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -20 & 40 \\ 25 & -40 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 33 & -39 \\ -49 & 55 \end{pmatrix}$

3. Los productos quedan:

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -6 & -1 \\ 8 & 13 & 13 \\ 0 & 20 & 12 \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 27 \end{pmatrix}$$

4. Los productos posibles son:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 7 & 15 & 8 \end{pmatrix}$$

$$CB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \end{pmatrix}$$

5. En general, las igualdades anteriores no son ciertas, ya que el producto de matrices no es conmutativo.

   a) $(A + B)^2 = (A + B)\,(A + B) = AA + AB + BA + BB =$
   $= A^2 + AB + BA + B^2$

   b) $(A - B)^2 = (A - B)\,(A - B) = AA - AB - BA + BB =$
   $= A^2 - AB - BA + B^2$

   c) $(A + B)\,(A - B) = AA - AB + BA - BB =$
   $= A^2 - AB + BA - B^2$

6. Encuentra todas las matrices, del orden correspondiente, que conmuten con las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matriz que conmuta con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Debe cumplirse: $XA = AX$

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a + c \\ a + b = b + d \\ c = c \\ c + d = d \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos $\begin{cases} c = 0 \\ d = a \end{cases}$

Las matrices buscadas son de la forma $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ con a y b números reales cualesquiera.

Sea $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matriz que conmuta con $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Debe cumplirse: $XB=BX$

$$X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} a-b & 2b \\ c-d & 2c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ -a & -b \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} a-b=a+2c \\ 2a=b+2d \\ c-d=-a \\ 2c=-b \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos $\begin{cases} a=-c+d \\ b=-2c \end{cases}$

Las matrices buscadas son de la forma $X=\begin{pmatrix} -c+d & -2c \\ c & d \end{pmatrix}$ con c y d números reales cualesquiera.

7. Llamamos A y B a las matrices numéricas que aparecen en cada uno de los sistemas. Resolvemos éstos por el método de reducción y obtenemos:

a) $\begin{cases} 2X+Y=A \\ X-3Y=B \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2X+Y=A \\ 7Y=A-2B \end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases} X=3/7\,A+1/7\,B \\ Y=1/7\,A-2/7\,B \end{cases}$

Por tanto, $X=\begin{pmatrix} -1/7 & 3/7 & 4/7 \\ -1 & 3/7 & 1/7 \end{pmatrix}$ e $Y=\begin{pmatrix} 9/7 & 8/7 & 6/7 \\ 0 & 1/7 & -2/7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{cases} X+Y=A \\ X-Y=B \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} X=1/2\,A+1/2\,B \\ Y=1/2\,A-1/2\,B \end{cases}\Leftrightarrow$

Por tanto, $X=\begin{pmatrix} 4 & 3/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ e $Y=\begin{pmatrix} -2 & -1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{cases} 2X+Y=A \\ X+2Y=B \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2X+Y=A \\ Y=1/3\,A+2/3\,B \end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases} X=2/3\,A-1/3\,B \\ Y=-1/3A+2/3B \end{cases}$

Por tanto, $X=\begin{pmatrix} 5/3 & 2/3 \\ 2/3 & -8/3 \end{pmatrix}$ e $Y=\begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 \\ -4/3 & 10/3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{cases} 3x+y=A \\ x+y=B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=A \\ x=\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B \\ y=-\frac{1}{2}A+\frac{3}{2}B \end{cases}$

Por tanto, $X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ e $Y=\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{cases} 2x-3y=A \\ x-y=B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=B \\ y=-A+2B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-A+3B \\ y=-A+2B \end{cases}$

Por tanto, $X=\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$ e $Y=\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$

8. Las operaciones quedan:

a) $C\cdot A^t=\begin{pmatrix} 7 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A^t\cdot B^t=\begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 0 & 1 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$

c) $2\cdot C^t\cdot C=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 12 \\ 4 & 2 & 6 \\ 12 & 6 & 18 \end{pmatrix}$

d) $B\cdot A\cdot C^t=\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$

9. Toda matriz cuadrada A puede expresarse de la forma $A=\frac{A+A^t}{2}+\frac{A-A^t}{2}$.

En la suma anterior, el sumando $\frac{A+A^t}{2}$ es una matriz simétrica y el sumando $\frac{A-A^t}{2}$ es una matriz antisimétrica.

Las descomposiciones pedidas son:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 5/2 \\ 2 & 5/2 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 3 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

10. En cada uno de los dos casos queda del siguiente modo:

Calculamos las potencias sucesivas de *A.*

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -I$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = -I \cdot A = -A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = -A \cdot A = -A^2 = -(-I) = I$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = I \cdot A = A$$

$$A^6 = A^5 \cdot A = A \cdot A = -I; \quad \text{etcétera.}$$

Observamos que las potencias de la matriz A se repiten de cuatro en cuatro. Así:

$$A^{50} = A^{4\cdot 12+2} = (A^4)^{12} \cdot A^2 = I^{12} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = -I$$

$$A^{97} = A^{4\cdot 24+1} = (A^4)^{24} \cdot A = I^{24} \cdot A = I \cdot A = A$$

La matriz $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ que conmuta con A cumplirá: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Finalmente: $\begin{pmatrix} -b & -1 \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 1 & -b \end{pmatrix}$ con $a=1$ y $b=0$.

PÁGINA 29

11. Utilizando las operaciones elementales por filas, obtén matrices triangulares equivalentes a las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

12. Calcula las matrices inversas, si existen, de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

13. Resuelve la ecuación matricial $A \cdot X = B \cdot X + C$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

14. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, calcula $(AB)^t$ y $(AB)^{-1}$.

15. Sea $B = (b_{ij})$ una matriz cuadrada de orden 3 tal que:

$$b_{ij} = (i - j) \cdot (-1)^{i+j} \text{ con } j \neq 2 \text{ y } b_{ij} = 1 \text{ si } j = 2$$

Encuentra la matriz B y resuelve la ecuación $X \cdot B = 3B$.

16. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

17. a) Escribe tres matrices de dimensión 3×3 que tengan, respectivamente, rango 3, 2 y 1.

b) Escribe tres matrices 3×2 que tengan, respectivamente, rango 1, 2 y 3.

18. Sean X, Y, Z tres matrices tales que es posible efectuar $Z^t - XY$. ¿Es posible efectuar $(Y \cdot Z)^t + X$?

19. Una pizzería hace tres tipos de pizza, calidad extra, calidad superior y calidad normal. Emplea en cada una de ellas 150 g de masa, 200 g de ingredientes y 250 g de queso; 200 g de masa, 200 g de ingredientes y 200 g de queso; 250 g de masa, 150 g de ingredientes y 100 g de queso, respectivamente a las calidades extra, superior y normal.

a) ¿Qué cantidad de masa, ingredientes y queso necesita la pizzería para hacer 100 pizzas de calidad extra,120 de calidad superior y 200 de calidad normal?

b) Sabiendo que el kilo de masa vale a 1,5 euros, el de ingredientes a 3 euros y el de queso a 2,75 euros, ¿a cómo vale cada pizza?

11. Las triangulares equivalentes son:

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{3F_1 - F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b)\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[2F_1 + F_3 \to F_3]{F_1 + F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 2F_3 \to F_3}$$

$$\xrightarrow{F_2 - 2F_3 \to F_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$c)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[4F_1 - F_3 \to F_3]{3F_1 - F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & 8 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_3 \to F_3}$$

$$\xrightarrow{F_2 - F_3 \to F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_1 + F_3 \to F_3 \\ 3F_1 - F_4 \to F_4}]{2F_1 - F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[2F_4 - F_2 \to F_4]{F_2 - F_3 \to F_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -9 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{9F_3 - 5F_4 \to F_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -42 \end{pmatrix}$$

12. Las inversas quedan del siguiente modo:

$$a)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \vdots & 1 & 0 \\ 3 & 4 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \vdots & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \vdots & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$c)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \vdots & 1 & 0 \\ 4 & 8 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 4 & -1 \end{pmatrix} \text{No existe matriz inversa}$$

$$d)\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & \vdots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & \vdots & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & \vdots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & \vdots & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & \vdots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1/16 & 5/16 & -1/16 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 11/16 & -9/16 & 5/16 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1/16 & 5/16 & -1/16 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -3/16 & 1/16 & 3/16 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 11/16 & -9/16 & 5/16 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1/16 & 5/16 & -1/16 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} -3/16 & 1/16 & 3/16 \\ 11/16 & -9/16 & 5/16 \\ 1/16 & 5/16 & -1/16 \end{pmatrix}$

$$e)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ -5/3 & -2/3 & 4/3 \\ 4/3 & 4/3 & -5/3 \end{pmatrix}$$

13. Despejamos la matriz X en la ecuación dada:

$AX - BX = C \Rightarrow (A - B)\,X = C$ y calculemos esta matriz X: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 0 \\ -3y - 2y = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 2 \end{array}\right.$ donde la matriz X es: $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

14. Queda:

La matriz (AB) es $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

La matriz traspuesta de la anterior $(AB)^t$ es $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$

La matriz inversa de la anterior $(AB)^{-1}$ es $\begin{pmatrix} -1/14 & 1/2 \\ 3/14 & -1/2 \end{pmatrix}$

15. La solución queda:

La matriz B es $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Resolvemos la ecuación: $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -3 & 3 & 3 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Operando e igualando matrices obtenemos tres sistemas:

$\left.\begin{array}{l} -b + 2c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ -2a + b = -6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 3 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{array}\right.$ $\quad \left.\begin{array}{l} -e + 2f = -3 \\ d + e + f = 3 \\ -2d + e = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} d = 0 \\ e = 3 \\ f = 0 \end{array}\right.$ $\quad \left.\begin{array}{l} -h + 2i = 6 \\ g + h + i = 3 \\ -2g + h = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} g = 0 \\ h = 0 \\ i = 3 \end{array}\right.$

La matriz X viene dada por: $X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

16. Queda del siguiente modo:

a) Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 2$

b) Rango de $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

c) Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & -9 & -3 \\ 0 & -9 & -2 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$

d) Rango de $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

17. Quedan:

a) Escribe tres matrices de dimensión 3x3 que tengan, respectivamente, rango 3, 2 y 1

Una matriz 3x3 de rango 3 es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Tiene las tres filas independientes.

Una matriz 3x3 de rango 2 es $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. La fila tercera es suma de la primera y la segunda.

Una matriz 3x3 de rango 1 es $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 8 & -4 \\ -5 & -10 & 5 \end{pmatrix}$. La fila segunda es cuatro veces la primera y la fila tercera es el producto de –5 por los elementos de la fila primera.

b) Escribe tres matrices 3x2 que tengan, respectivamente, rango 1, 2 y 3.

Una matriz 3x2 de rango 1 es $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 8\\ -3 & -6\end{pmatrix}$. La fila segunda es cuatro veces la fila primera y la fila tercera es el producto de los elementos de la fila primera por –4.

Una matriz 3x2 de rango 2 es $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$. La fila tercera es suma de los elementos de las filas primera y segunda.

Una matriz 3x3 de rango 3 no puede existir.

18. La solución queda:

Sean X, Y, Z tres matrices tales que es posible efectuar $Z^t - XY$.
¿Es posible efectuar $(Y \cdot Z)^t + X$?

Sea Z una matriz de dimensión (m x n) por tanto Z^t tendrá por dimensión (n x m).
Para que sea posible efectuar la operación $Z^t - X\ Y$ las matrices X e Y tendrán por dimensiones X (n x p) e Y (p x m). De este modo YZ es una matriz de dimensión (p x n) y $(Y\ Z)^t$ será de dimensión (n x p) y como X es de dimensión (n x p) es posible efectuar la suma $(Y\ Z)^t + X$.

19. Quedan:

a) 100 pizzas de calidad extra necesitan 15 000 g de masa, 20 000 g de ingredientes y 25 000 g de queso; 120 pizzas de calidad superior necesitan 24 000 g de masa, 24 000 g de ingredientes y 24 000 g de queso, y 200 pizzas de calidad normal necesitan 50 000 g de masa, 30 000 g de ingredientes y 20 000 g de queso.

b) $$\begin{pmatrix}0{,}150 & 0{,}200 & 0{,}250\\ 0{,}200 & 0{,}200 & 0{,}200\\ 0{,}250 & 0{,}150 & 0{,}100\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1{,}50\ € \\ 3{,}00\ € \\ 2{,}75\ €\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}512\ € \\ 1{,}45\ € \\ 1{,}10\ €\end{pmatrix}$$

Esta matriz nos da el precio de cada pizza extra, superior y normal, respectivamente.

PÁGINA 30

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

20. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determina, si es posible, un valor de k para que la matriz $(A - kI)^2$ sea la matriz nula.

21. Resuelve la ecuación matricial $B(2A + I) = AXA + B$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

22. Obtén la matriz inversa de $A + A^t$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

23. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, construye la matriz $Y = 3A^tA - 2I$, y resuelve la ecuación $AX = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

24. Prueba que $A^2 - A - 2I = 0$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula A^{-1} utilizando la igualdad anterior o de cualquier otra forma.

25. Una fábrica decide distribuir sus excedentes en tres productos alimenticios A, B y C a cuatro países de África P_1, P_2, P_3 y P_4 según se muestra en la matriz M (cantidades en toneladas). La fábrica ha recibido presupuestos de dos empresas de transporte E_1 y E_2, como indica la matriz T (en euros por tonelada).

$$M = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 200 & 100 & 120 \\ 110 & 130 & 200 \\ 220 & 200 & 100 \\ 150 & 160 & 150 \end{pmatrix} \end{array} \qquad T = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 500 & 450 & 375 & 350 \\ 510 & 400 & 400 & 350 \end{pmatrix} \end{array}$$

Efectúa el producto de ambas matrices y responde:

a) ¿Qué representa el elemento a_{11} de la matriz producto? ¿Qué elementos de esta matriz nos indican lo que nos cuesta transportar el producto C con la empresa E_2?

b) Indica qué elementos de esa matriz te permiten decidir la empresa que resulta más barata.

26. Sea A una matriz cuadrada de orden n, tal que $A^2 = A$, I la matriz unidad de orden n y $B = 2A - I$. Calcula B^2.

27. Calcula la matriz $B^{-1}A^2B$, siendo $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

28. Halla todas las matrices que conmuten con la matriz: $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

20. Queda del siguiente modo:

La matriz $A - kI$ es $A - kI = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}$

La matriz $(A - kI)^2$ es

$$(A - kI)\,(A - kI) = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3k \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} k^2 - 1 & 2k-2 & 4k-4 \\ 2k-2 & k^2-1 & 4k-4 \\ -2k+2 & -2k+2 & 5-6k+k^2 \end{pmatrix}$$

El valor que hace que la última matriz sea la matriz nula es $k=1$.

21. Operando en la ecuación matricial, obtenemos:

$$2BA + B = AXA + B \Leftrightarrow AXA = 2BA \Leftrightarrow AX = 2B \Leftrightarrow X = 2A^{-1}B$$

Por tanto, la solución es la matriz $X = 2A^{-1}B$.

Al ser $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$, la matriz buscada es la resultante de efectuar la operación:

$$X = 2A^{-1}B = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 14 \\ -6 & -18 & 32 \\ 4 & 14 & -26 \end{pmatrix}$$

22. Queda:

La matriz $A + A^t$ es

$$A + A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

La matriz $(A + A^t)^{-1}$ es $\begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/6 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}$

23. Queda del siguiente modo:

La matriz $Y = 3A^tA - 2I$ es

$$Y = 3\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 102 & 39 \\ 39 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 100 & 39 \\ 39 & 13 \end{pmatrix}$$

Para resolver la ecuación $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, llamamos a $X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, operamos y resolvemos el sistema correspondiente.

El sistema es $\begin{cases} 3a_{11} + a_{21} = 2 \\ 5a_{11} + 2a_{21} = 0 \\ 3a_{12} + a_{22} = 0 \\ 5a_{12} + 2a_{22} = 1 \end{cases}$

Las soluciones son: $a_{11} = 4$, $a_{21} = -10$, $a_{12} = -1$, $a_{22} = 3$

La matriz X es: $X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -10 & 3 \end{pmatrix}$.

24. Queda:

Calculamos $A^2 - A - 2I$, y obtenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De la expresión $A^2 - A - 2I = 0$, operando se obtiene:

$$A^2 - A - 2I = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}A - I = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}A = I \Leftrightarrow A\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I\right) = I$$

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I$.

Por tanto,

$$A^{-1} = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

25. La solución es:

a) $T \cdot M = \begin{pmatrix} 284\,500 & 239\,500 & 240\,000 \\ 286\,500 & 239\,000 & 233\,700 \end{pmatrix}$

El elemento a_{11} de esta matriz representa el precio en euros que cobra la empresa E_1 por llevar el producto A a estos cuatro países.
El elemento a_{23} nos da el precio que cuesta transportar C con la empresa E_2.

b) La suma de los elementos de cada fila de esta matriz nos muestra la más barata y es la empresa E_2.

26. Queda:

$$B^2 = B \cdot B = (2A - I) \cdot (2A - I) = 4A^2 - 2AI - 2AI + I^2 = 4A - 2A - 2A + I = I$$

Por tanto, la matriz B^2 es la identidad.

27. Queda:

La matriz B^{-1} es $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

La matriz A^2 es $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

La matriz $B^{-1}\ A^2$ es $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & -45 \\ -27 & 36 \end{pmatrix}$

La matriz $B^{-1}\ A^2\ B$ es $\begin{pmatrix} 36 & -45 \\ -27 & 36 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

28. La solución queda:

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matriz que conmuta con $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Debe cumplirse: $AX = XA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} a+2b & -a+3b \\ c+2d & -c\,3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ 2a+3c & 2b\,3d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b = a-c \\ -a+3b = b-d \\ c+2d = 2a+3c \\ -c+3d = 2b+3d \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos $\begin{cases} c = -2b \\ d = a-2b \end{cases}$

Las matrices buscadas son de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a-2b \end{pmatrix}$ con a y b números reales cualesquiera.

Unidad 2 – Determinantes

PÁGINA 33

cuestiones iniciales

1. Calcula las matrices inversas de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

2. Calcula el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 7 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

SOLUCIONES

1. Las matrices buscadas son las siguientes:

a) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) Esta matriz no tiene inversa.

2. Haciendo ceros escalonamos las matrices, obteniendo:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, luego el rango es 2.

b) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 7 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 20 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, luego el rango es 2.

c) $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - F_1 \to F_3]{} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[2F_4 - F_2 \to F_4]{2F_3 - F_2 \to F_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango es 3.

PÁGINA 45

ACTIVIDADES

- Practica las fases anteriores en la resolución de los siguientes problemas:

1. **Parejas.** Tres amigos Juan, José y Jesús van de compras con sus parejas María, Merche y Marina, aunque no necesariamente en ese orden. Cada uno de los seis compra uno o varios objetos y paga por cada objeto tantos euros como objetos compra. José compra 23 objetos más que María y Juan 11 más que Merche. Cada hombre gastó 63 euros más que su pareja. ¿Cuál es la pareja de cada uno?

2. **Pirámides de bolas.** Un mago apila bolas, todas iguales, para formar dos pirámides tetraédricas. De pronto se da cuenta de que juntando las bolas de ambas pirámides, puede formar una sola pirámide tetraédrica mayor. ¿Cuál es el mínimo número de bolas de las que tendría que disponer el mago inicialmente?

SOLUCIONES

1. Hacemos una tabla con la información del problema:

	Juan	José	Jesús	María	Merche	Marina
OBJETOS COMPRA	$(11+y)$	$(23+x)$		x	y	z
EUROS PAGA	$(11+y)^2$	$(23+x)^2$		x^2	y^2	z^2

Una solución puede ser:

Juan con maría $\Rightarrow x^2=(11+y)^2-63$

José con marina $\Rightarrow z^2=(23+x)^2-63$

Entonces: $\begin{cases} x=9 \\ y=1 \\ z=31 \end{cases}$

Juan compra 12 y su esposa maría 9

José compra 32 y su esposa marina 31

Jesús compra 8 y su esposa Merche 1

2. Al construir pirámides tetraédricas de bolas aparecen los números tetraédricos:

1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, …

que forman una progresión geométrica de tercer orden de término general: $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

• Si las dos pirámides son iguales, el mínimo número es 20 bolas, con lo que formaría una pirámide tetraédrica de arista 4 a partir de dos tetraédricas de arista 3.

• Si las pirámides iniciales no son iguales, el número mínimo de bolas es de 680, número obtenido al sumar las bolas de dos pirámides tetraédricas de aristas 8 y 14, y bolas 120 y 560.

La nueva pirámide tetraédrica formada por 680 bolas tiene de arista 15, pues:

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=680 \Rightarrow n=15$$

PÁGINA 50

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} a & -5 \\ 5 & a \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} m^2 & m \\ m & 1 \end{pmatrix}$

2. Calcula los determinantes de las matrices que siguen, utilizando la regla de Sarrus:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & m \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} m+1 & 1 & 0 \\ 0 & m+1 & 1 \\ 1 & 0 & m+1 \end{pmatrix}$

3. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$, calcula, sin desarrollar, los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3a+3 & 3b & 3c+2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

4. Sea A una matriz cuyas filas son F_1, F_2, F_3, y su determinante vale 4. ¿Cuánto vale el determinante de la matriz B cuyas filas son $F_3, F_1 - 2F_2, -F_1$?

5. Sea A una matriz cuadrada de orden 3 y sea $|A| = 4$. Halla:

a) $|I \cdot A|$ b) $|A^2|$ c) $|2 \cdot A|$ d) $|A^{-1}|$

6. Demuestra, mediante las propiedades de los determinantes, las siguientes igualdades:

a) $\begin{vmatrix} x & z+t & y \\ x & y+t & z \\ x & y+z & t \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} bc & 2/a & a \\ ac & 2/b & b \\ ab & 2/c & c \end{vmatrix} = 0$

7. Comprueba que el determinante A_1 vale 0 y que el determinante A_2 es divisible por 5, sin calcularlos, a partir de las propiedades de los determinantes, siendo:

$$A_1 = \begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ \frac{2}{5} & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} \qquad A_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

8. Prueba, sin desarrollar, que los determinantes siguientes son múltiplos de 11:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 9 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 9 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & 5 & 9 \end{vmatrix}$

SOLUCIONES

1. Las soluciones son:

a) -2
b) 22
c) $a^2 + 25$
d) 23
e) $a^2 + b^2$
f) 0

2. Aplicando la regla de Sarrus se obtiene:

a) -2
b) 2
c) 79
d) $a^3 - 3a + 2$
e) $-m^2 - 4\,m + 1$
f) $m^3 + 3\,m^2 + 3\,m + 2$

3. En cada caso:

a) $$\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2\cdot 3/2 & 2\cdot 0 & 2\cdot 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

b) $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3a+3 & 3b & 3c+2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3a & 3b & 3c \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

c) $$\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{F_2 - F_3 \to F_2}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

4. La solución queda:

$$\begin{vmatrix} F_3 \\ F_1 - 2F_2 \\ -F_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -F_1 \\ F_1 - 2F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 \\ F_1 - 2F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 \\ -2F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = -2\left|A\right| = -8$$

5. La solución en cada caso es.

a) $|I\cdot A|=|I|\cdot|A|=1\cdot 4=4$

b) $|A^2|=|A|\,|A|=16$

c) $|2\cdot A|=2^3\cdot|A|=32$

d) $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}\cdot\frac{1}{4}$

6. Queda del siguiente modo:

a) Sumamos la segunda y la tercera columna y el resultado lo colocamos en la tercera columna. De la tercera columna sacamos factor común $y+z+t$. Quedaría:

$$\begin{vmatrix} x & z+t & y \\ x & y+t & z \\ x & y+z & t \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2+C_3\to C_3} \begin{vmatrix} x & z+t & y+z+t \\ x & y+t & y+z+t \\ x & y+z & y+z+t \end{vmatrix} = x\cdot(y+z+t)\begin{vmatrix} 1 & z+t & 1 \\ 1 & y+t & 1 \\ 1 & y+z & 1 \end{vmatrix}=0$$

El último determinante tiene dos columnas iguales, por tanto es nulo.

b) Multiplicamos (y dividimos) la primera fila por *a*, la segunda por *b* y la tercera por *c*. Sacamos factor común a *abc* de la primera columna y 2 de la segunda.
Obtenemos:

$$\begin{vmatrix} bc & 2/a & a \\ ac & 2/b & b \\ ab & 2/c & c \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} abc & 2 & a^2 \\ abc & 2 & b^2 \\ abc & 2 & c^2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & b^2 \\ 1 & 1 & c^2 \end{vmatrix}=0$$

El último determinante tiene dos columnas iguales, por tanto es nulo.

7. En cada caso queda:

Para la matriz A_1, multiplicamos su determinante por –1/5 y los elementos de la primera columna por (-5) y obtenemos:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ 2/5 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}\cdot\begin{vmatrix} (-5)\cdot(-8) & 25 & 40 \\ (-5)\cdot 2/5 & 3 & -2 \\ (-5)\cdot 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}\cdot\begin{vmatrix} 40 & 25 & 40 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix}$$

El valor del último determinante es cero al tener dos columnas iguales.

Para la matriz A_2, en su determinante sustituimos los elementos de la fila tercera por la suma de los elementos de las filas tercera y segunda, obtenemos:

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 10 & 10 & 15 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Observamos que el determinante de la matriz A_2 es divisible por 5.

Existen otras formas de combinar líneas de este determinante para obtener números múltiplos de 5, por ejemplo la suma de los elementos de la columna tercera con el doble de los elementos de la columna segunda.

8. En cada caso queda:

a) Puede observarse que los números 121, 198 y 506 son múltiplos de 11. Operando en cada fila, multiplicamos la primera columna por 100, la segunda por 10 y sumamos ambos resultados en la tercera columna. Quedaría:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 121 \\ 1 & 9 & 198 \\ 5 & 0 & 506 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 11\cdot 11 \\ 1 & 9 & 11\cdot 18 \\ 5 & 0 & 11\cdot 46 \end{vmatrix} = 11 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 1 & 9 & 18 \\ 5 & 0 & 46 \end{vmatrix}$$

b) Procediendo de forma análoga:

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1221 & 9625 & 1111 & 3839 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 11\cdot 111 & 11\cdot 875 & 11\cdot 101 & 11\cdot 349 \end{vmatrix} =$$

$$= 11 \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 111 & 875 & 101 & 349 \end{vmatrix}$$

c) Procediendo de forma análoga:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 9 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 3014 \\ 9 & 7 & 2 & 9724 \\ 2 & 3 & 5 & 2354 \\ 4 & 0 & 5 & 4059 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11\cdot 274 \\ 9 & 7 & 2 & 11\cdot 884 \\ 2 & 3 & 5 & 11\cdot 214 \\ 4 & 0 & 5 & 11\cdot 369 \end{vmatrix} = 11 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 274 \\ 9 & 7 & 2 & 884 \\ 2 & 3 & 5 & 214 \\ 4 & 0 & 5 & 369 \end{vmatrix}$$

PÁGINA 51

■ 9. Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1\\3&0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\0&1&2&1\\-1&1&0&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

a) Halla los menores complementarios de los elementos a_{11}, a_{23}, a_{32} y a_{41} en ellas, cuando existan.

b) Halla, en los casos en que existan, A_{11}, A_{23}, A_{32} y A_{41}.

■ 10. Halla las matrices adjuntas de las matrices:

a) $\begin{pmatrix}2&4\\1&5\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&-5&1\\5&0&4\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&2\\1&3&4\end{pmatrix}$

■ 11. Resuelve los siguientes determinantes por el método de Chío:

a) $\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&-1&1\\0&2&1\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}2&3&1&-1\\1&-2&2&1\\0&0&0&3\\2&1&-1&2\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&8&27&64\end{vmatrix}$

■ 12. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix}x&2&2\\2&x&2\\2&2&x\end{vmatrix}=0$ b) $\begin{vmatrix}1&1&1\\2&x&x+1\\4&x^2&x^2+2x+1\end{vmatrix}=0$ c) $\begin{vmatrix}1&0&0&x\\0&1&x&0\\0&x&1&0\\x&0&0&1\end{vmatrix}=0$

■ 13. Calcula las matrices inversas de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix}1&-2\\-3&4\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}0&-3\\-1&2\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}2&-1&4\\4&-1&-2\\5&5&0\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}1&2&2\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}1&2&2\\0&2&3\\0&3&-2\end{pmatrix}$

■ 14. Determina, según los valores de m, el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix}1&2&3\\7&1&1\\m&1&2\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}m&1&m\\1&m&m\\m&m&1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&2&3&3\\1&2&3&m\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}1&1&0&2\\1&-1&1&3\\-1&2&4&2\\3&2&4&m\end{pmatrix}$

■ 15. Si A es una matriz de orden n tal que $\det(A)=2$, calcula $\det(A^{-1})$, $\det(5A)$ y $\det(2A^{-1})$.

■ 16. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$ a) Calcula A^{-1}. b) Resuelve la ecuación $\det(A^{-1}-xI)=0$.

■ 17. ¿Para qué valores del parámetro no es invertible la matriz $A=\begin{pmatrix}4&1&7\\1&3&2\\a&-2&5\end{pmatrix}$?

9. La solución en cada caso es:

a) En la matriz A: $\alpha_{11} = 0$; el resto no existen
En la matriz B : $\alpha_{11} = -1$; $\alpha_{23} = -1$; $\alpha_{32} = 2$
En la matriz C : $\alpha_{11} = -2$; $\alpha_{23} = 2$; $\alpha_{32} = 3$; $\alpha_{41} = 2$

b) En la matriz A : $A_{11} = 0$; el resto no existen
En la matriz B : $B_{11} = -1$; $B_{23} = 1$; $B_{32} = -2$
En la matriz C : $C_{11} = -2$; $C_{23} = -2$; $C_{32} = -3$; $C_{41} = -2$

10. Las matrices adjuntas son:

$$A^d = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \qquad B^d = \begin{pmatrix} -20 & -7 & 25 \\ -8 & -11 & 10 \\ 17 & 8 & -11 \end{pmatrix} \qquad C^d = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

11. La resolución queda:

a) Hacemos ceros los elementos a_{12} y a_{13} y desarrollamos por la primera fila para obtener:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -9$$

b) Desarrollamos por la tercera fila. Posteriormente en el determinante de orden 3 resultante hacemos ceros los elementos a_{21} y a_{31} y desarrollamos por la primera columna para obtener:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-3)\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 7 & -3 \\ 0 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = 3\cdot(-20) = -60$$

c) Hacemos ceros los elementos $a_{21;}$ a_{31} y a_{41} y desarrollamos por la primera columna. Posteriormente hacemos ceros los elementos a_{32}, a_{42} y a_{43}. Calculamos el determinante resultante multiplicando los elementos de la diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 8 & 15 \\ 0 & 7 & 26 & 63 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 12 & 42 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 12.$$

12. Las soluciones son:

a) $$\begin{vmatrix} x & 2 & 2 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix} = x^3 - 12x + 16 = (x-2)^2\,(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -4 \end{cases}$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & x & x+1 \\ 4 & x^2 & x^2+2x+1 \end{vmatrix} = (x-2)\,(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

c) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ x & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-x^2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

13. Las matrices inversas son las siguientes:

a) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2/3 & -1 \\ -1/3 & 0 \end{pmatrix}$ c) no tiene inversa.

d) $\begin{pmatrix} 10/130 & 20/130 & 6/130 \\ -10/130 & -20/130 & 20/130 \\ 25/130 & -15/130 & 2/130 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & -10/13 & -2/13 \\ 0 & 2/13 & 3/13 \\ 0 & 3/13 & -2/13 \end{pmatrix}$

14. El rango según el parámetro queda del siguiente modo:

a) Si $m = -6$ el rango es dos y si $m \neq -6$, el rango es tres.

b) Si $m = 1$, el rango es uno.
Si $m = -1/2$, el rango es dos.
Si $m \neq -1/2$ y $m \neq +1$, el rango es tres.

c) Si $m = 3$, el rango es tres.
Si $m \neq 3$, el rango es cuatro.

d) Si $m = 10$, el rango es tres.
Si $m \neq 10$, el rango es cuatro.

15. Los determinantes pedidos son:

- $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{2}$
- $\det(5A) = 5^n \cdot \det(A) = 5^n \cdot 2.$
- $\det(2A^{-1}) = 2^n \det(A^{-1}) = 2^n \cdot \dfrac{1}{\det A} = 2^n \cdot \dfrac{1}{2} = 2^{n-1}$

16. En cada caso queda:

a) El determinante de la matriz A es $\det(A) = -1$. La matriz in versa es: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) La ecuación es $\begin{vmatrix} -1-x & 1 & 1 \\ -1 & -x & 1 \\ -1 & 1 & -x \end{vmatrix} = 0$.

Desarrollando el determinante obtenemos $(1+x)(1+x^2) = 0$.
Las soluciones de la ecuación son $x = -1$ y los números complejos i y $-i$.

17. Al ser $\det(A) = -19a + 57$, este determinante se anula para $a = 3$. Para este valor de a la matriz A no es invertible.

PÁGINA 52

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

18. Calcula el valor de los determinantes siguientes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$

19. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$:

a) Halla A^2.

b) Resuelve la ecuación $A^2 \cdot X + A \cdot B = B$.

20. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 1 \\ k & 1 & k \end{pmatrix}$:

a) Calcula los valores de k para los cuales no existe la inversa de A.

b) Para $k = 3$, calcula la inversa de A.

21. De una matriz X cuadrada se sabe que $|X| = 3$ y $|2 \cdot X| = 48$. Halla el orden de la matriz X y $|X^{-1}|$.

22. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:

a) Comprueba que $A^{-1} = A^t$.

b) Utilizando el resultado anterior, calcula $(A^t \cdot A)^{1999}$.

23. Resuelve la ecuación matricial $A \cdot X \cdot B = C$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

24. Sean las matrices A y B de orden 4 con $|A| = 3$ y $|B| = 2$. Calcula $|A^{-1}|$; $|B^t \cdot A|$; $|(A \cdot B^{-1})^t|$.

25. El determinante $\begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 4 & a^2 & 13 \\ 8 & a^3 & 35 \end{vmatrix}$ vale cero para $a = 3$. Comprueba esta afirmación sin desarrollarlo e indicando las propiedades de los determinantes que apliques.

26. Halla el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 1 & 2a^2-2 & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$ según sea el valor del parámetro a. Halla, si existe, la matriz inversa de A en los casos en que $a = 0$ y $a = 1$.

18. La solución en cada caso es:

a) $$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 3+3x & x & x & x \\ 3+3x & 3 & x & x \\ 3+3x & x & 3 & x \\ 3+3x & x & x & 3 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} \begin{vmatrix} 3+3x & x & x & x \\ 0 & 3-x & x & x \\ 0 & 0 & 3-x & x \\ 0 & 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} (3x+3)(3-x)^3$$

(1) Sumando todas las columnas y el resultado a la primera; (2) Restando de todas las filas la primera; (3) Desarrollando.

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} -2$$

(1) La diferencia de las dos primeras filas a la segunda fila; (2) Desarrollando por la primera columna; (3) Utilizando la regla de Sarrus.

c) Su valor es nulo al tener dos columnas iguales.

d) En este caso:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & a & b & c \\ a+b+c & 0 & c & b \\ a+b+c & c & 0 & a \\ a+b+c & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a & b & c \\ 0 & -a & c-b & b-c \\ 0 & c-a & -b & a-c \\ 0 & b-a & a-b & c \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} -a & c-b & b-c \\ c-a & -b & a-c \\ b-a & a-b & -c \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} -a+b-c & c-b & b-c \\ 0 & -b & a-c \\ b-a-c & a-b & -c \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c)(b-a-c) \begin{vmatrix} 1 & c-b & b-c \\ 0 & -b & a-c \\ 1 & a-b & -c \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a-c) \begin{vmatrix} 1 & c-b & b-c \\ 0 & -b & a-c \\ 0 & a-c & -b \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c)(b-a-c)(b-a+c)(b+a-c)$$

19. La solución del ejercicio queda:

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) La ecuación queda:

$$A^2 X + AB = B \Rightarrow A^2 X = B - AB \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot A \cdot X = A^{-1}(B - AB) \Rightarrow X = (A^{-1})^2 (B - AB) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = I \cdot (B - AB) = B - AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

20. Diremos lo siguiente:

a) No existe la inversa de A para todos los valores de k que hacen $|A| = 0$.

$$|A| = k - 1 \;\Rightarrow\; \exists A^{-1} \Leftrightarrow k \neq 1$$

b) Para $k=3$ queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

21. La solución es:

El primer determinante es: $|2 \cdot X| = 2^n \cdot |X| \Rightarrow 48 = 2^n \cdot 3 \Rightarrow 2^n = 16 \Rightarrow n = 4$ donde el orden de la matriz X es 4.

Finalmente: $|X^{-1}| = \dfrac{1}{|X|} = \dfrac{1}{3}$

22. La solución es en cada caso:

a) $A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Como podemos ver las dos matrices son iguales.

b) Por otro lado: $(A^t \cdot A)^{1999} = (A^{-1} \cdot A)^{1999} = I^{1999} = I$

23. La solución es la siguiente:

$$A\cdot X\cdot B=C\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X\cdot B\cdot B^{-1}=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}\Rightarrow X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & 5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

24. La solución en cada uno de los casos es:

El determinante de la inversa queda: $\left|A^{-1}\right|=\dfrac{1}{|A|}=\dfrac{1}{3}$; por otro lado, el del producto propuesto es: $\left|B^t\cdot A\right|=\left|B^t\right|\cdot|A|=|B|\cdot|A|=2\cdot 3=6$. Y finalmente: $\left|(A\cdot B^{-1})^t\right|=|A|\cdot\left|B^{-1}\right|=|A|\cdot\dfrac{1}{|B|}=\dfrac{3}{2}$

25. Queda:

$$\text{Si } a=3\Rightarrow\begin{vmatrix}2 & 3 & 5\\ 4 & 9 & 13\\ 8 & 27 & 35\end{vmatrix}\overset{C_3-C_1-C_2\leftrightarrow C_3}{=}\begin{vmatrix}2 & 3 & 0\\ 4 & 9 & 0\\ 8 & 27 & 0\end{vmatrix}$$

Esta determinante es cero pues tiene una columna toda de ceros.

26. La solución dice así:

Calculamos el determinante: $\begin{vmatrix}1 & a^2-1 & a\\ 1 & 2a^2-2 & 2a-1\\ 1 & 0 & a^2\end{vmatrix}=(a^2-1)^2$

Por tanto la discusión queda:

- Si $a=1$ el rango de A es uno.
- Si $a=-1$ el rango de A es dos.
- Si $a\neq\pm 1$ el rango de A es tres.

En los casos propuestos:

- Para $a=1$ no existe A^{-1} puesto que $|A|=0$
- Para $a=0\Rightarrow|A|=1\neq 0$ luego existe A^{-1} y vale: $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}$

Unidad 3 – Sistemas de ecuaciones lineales

PÁGINA 55

cuestiones iniciales

1. Resuelve los sistemas de ecuaciones lineales siguientes:

a) $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x + 5y = 23 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$

2. En una fiesta cierta parte de los presentes está jugando a las cartas, otra parte está charlando y el resto, que es la cuarta parte, está bailando. Al cabo de un rato, cuatro cambian el juego por el baile, uno deja la charla y se pone a jugar, y dos dejan el baile y se ponen a charlar. Tras estos cambios hay igual número de personas en cada una de las actividades. ¿Cuántas personas había en la reunión?

SOLUCIONES

1. Las soluciones son:

   a) La solución es $x = 4,\ y = 3$

   b) La solución es $x = 4,\ y = -2,\ z = 3$

2. Llamando x el número de personas que juegan a cartas, y el número de personas que charlan y z el número de personas que bailan e imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x + y - 3z = 0 \\ x - y = 4 \\ y - z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 11 \\ y = 7 \\ z = 6 \end{array}\right\}$$

Luego hay 24 personas en la reunión.

PÁGINA 69

ACTIVIDADES

■ Encuentra el lenguaje y la notación adecuados en la resolución de los problemas siguientes:

1. **Pesada difícil.** Cuatro amigos, Arturo, Berta, Carlos y Diana, encuentran una antigua báscula que sólo pesa objetos de entre 50 y 100 kg. Estos amigos, individualmente, pesan menos de 50 kg y tres juntos, más de 100 kg, por lo que deciden pesarse de dos en dos de la siguiente manera: Arturo y Berta, 69 kg; Berta y Carlos, 79 kg; Carlos y Diana, 74 kg; Diana y Arturo, 64 kg. Con estos datos, ¿se puede determinar el peso de cada uno? Si no fuera posible determinar los pesos individualmente, ¿qué parejas deben pesarse para encontrar la solución?

2. **Curiosa elección.** En una clase hacen la elección de delegados de una forma muy original. Se piden tres alumnos voluntarios, que resultan ser Ana, Luis y Clara. Se les venda los ojos a cada uno de ellos y se les coloca en la cabeza una cinta, como la que llevan algunos tenistas. Estas tres cintas se toman de una bolsa que contiene tres cintas rojas y dos amarillas. Se les retira la venda de los ojos y de esta forma cada uno puede ver las cintas de sus compañeros, pero no la suya propia. Será elegido quien acierte el color de la cinta que lleva. Primero se pregunta a Ana y responde que no puede saberlo; lo mismo sucede con Luis. Por último, Clara dice que su cinta es roja, por lo que resulta ser elegida delegada. ¿Cómo lo supo?

3. **Suma de cubos.** ¿Cuánto suman los cubos de los n primeros números naturales?

SOLUCIONES

1. La solución queda:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Arturo} + \text{Berta} = 69 \\ \text{Berta} + \text{Carlos} = 79 \\ \text{Carlos} + \text{Diana} = 74 \\ \text{Diana} + \text{Arturo} = 64 \end{array}\right\}$$

Restando la primera igualdad a la segunda obtenemos: $\text{Arturo} - \text{Carlos} = -10$

Sumando a ésta la tercera obtenemos: $\text{Arturo} - \text{Diana} = 64$

Esta igualdad es la misma que tenemos en cuarto lugar. Luego no es posible determinar el peso de cada uno ya que nos queda un sistema indeterminado con más incógnitas que ecuaciones.

El sistema tiene una única solución si reemplazamos la tercera igualdad, sustituyéndola por la expresión: $\text{Arturo} + \text{Carlos} = 74$ Kg con lo cual obtenemos que: Arturo pesa 32 Kg; Berta pesa 37 Kg; Carlos pesa 42 Kg y Diana pesa 32 Kg.

2. En la siguiente tabla podemos ver todas las situaciones que se pueden plantear:

ANA	LUIS	CLARA	
R	R	R	(1)
R	R	A	(2)
R	A	R	(3)
A	R	R	(4)
R	A	A	(5)
A	R	A	(6)
A	A	R	(7)

En todos los casos lleva cinta roja excepto en (2), (5) y (6).

(2) no es posible, pues en esta situación Luis hubiera sabido que su cinta era roja, ya que si hubiera sido amarilla Ana hubiera sabido el color de la suya.

(5) no es posible pues en esta situación ana hubiese dicho que su cinta era roja.

(6) no es posible, pues en esta situación Luis hubiera dicho que su cinta era roja. Por tanto en todos los demás casos la de Clara es roja.

3. Queda así:

$1^3 = 1 = 1^2$
$1^3 + 2^3 = 9 = 3^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225 = 15^2$

1, 3, 6, 10, 15, … Es una progresión aritmética de 2º orden y su término general es $\frac{n^2+n}{2}$, por tanto:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2$$

Vamos a probarlo por inducción:

Suponemos que es cierto para $n=1$, $n=2$, …, $n=n$ y veamos si es cierto para $n=n+1$.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)^2+n+1}{2}\right]^2$$

Restando $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)^2+n+1}{2}\right]^2 - \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2$$

Habría que ver si esa igualdad es cierta. Operando el segundo miembro:

$$(n+1)^3 = \frac{4n^3 + 12n^2 + 12n + 4}{4}$$

Es cierta esta igualdad.
Por tanto queda probado que para «n» se cumple:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2$$

PÁGINA 74

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Resuelve los siguientes sistemas e indica de qué clase son:

a) $\begin{cases} 7x-2y=12 \\ x-2=0 \\ 2x-y=3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 4x-2y=6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+y+2z=3 \\ 2x+3y-z=4 \\ 3x+4y+z=7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-y=-1 \\ x+y=7 \\ x-5y=5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=-2 \\ x+z=3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x+y+2z=3 \\ -y+z=1 \\ x+2y-z=2 \end{cases}$

2. Dado el sistema $\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x+y+z=-1 \end{cases}$:

a) Añade una ecuación para que el sistema sea incompatible.

b) Añade una ecuación para que el sistema tenga infinitas soluciones.

3. Dado el sistema $\begin{cases} mx-y=1 \\ x-my=2m-1 \end{cases}$, halla m para que:

a) No tenga soluciones.

b) Tenga infinitas soluciones.

c) Tenga solución única.

d) Tenga una solución en la que $x=3$.

4. Discute, según los valores del parámetro a, los siguientes sistemas y resuelve en los casos que sea posible:

a) $\begin{cases} x+z=8 \\ 2x+y+z=10 \\ 3x+2y+az=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=5 \\ y+3z=a \\ x+z=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-y=a \\ ax+3y=4 \\ 3x-y=2 \end{cases}$

5. Interpreta geométricamente cada uno de lo siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 2x-3y-2z=5 \\ x-3y+5z=4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y-z=3 \\ 3x+4y-z=5 \\ x-2y+3z=-1 \end{cases}$

6. Interpreta geométricamente cada uno de los siguientes sistemas en función de los valores del parámetro a:

a) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ ax-y-z=1 \\ x-y+z=-2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z=a \\ x+y+az=1 \\ x+ay+z=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} ax+y=a^2 \\ x+a^2y=1 \end{cases}$

7. Discute los siguientes sistemas en función de k y resuélvelos cuando sean compatibles:

a) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ kx+2z=0 \\ 2x-y+kz=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y+2z=z \\ 2x-ky-3z=x \\ 5x+3y-z=y \end{cases}$

SOLUCIONES

1. Las soluciones son:

   a) La solución es $x=2,\ y=1$.
   b) El sistema es incompatible.
   c) El sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son: $x=t,\ y=2t-3$ con $t\in\mathbb{R}$.
   d) La solución es $x=3,\ y=-2,\ z=0$.
   e) Las soluciones son: $x=5-7t,\ y=-2+5t,\ z=t$ con $t\in\mathbb{R}$.
   f) El sistema no tiene solución.

2. Queda así:

   a) Por ejemplo, la ecuación añadida para que el sistema sea incompatible es $3x+2z=5$.
   b) La ecuación añadida para que el sistema sea compatible indeterminado puede ser $3x+2z=2$.

3. Queda:

   a) Si $m=-1$, el sistema es incompatible.
   b) Si $m=1$, el sistema es compatible indeterminado.
   c) Si $m\neq 1$ y $m\neq -1$, el sistema es compatible determinado.
   d) El valor de m es $-4/3$.

4. Queda:

   a) Sean $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & a\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 8\\ 2 & 1 & 1 & 10\\ 3 & 2 & a & 5\end{pmatrix}$.

   El rango de A es 2 independientemente del valor de a. El determinante de A es $|A|=a-1$.

   Discusión:

   • Si a ≠ 1, el rango de A es 3 y el rango de A^* es 3. El sistema es compatible determinado y su solución es:

   $$x=\frac{8a-1}{a-1}\qquad y=\frac{-6a-1}{a-1}\qquad z=\frac{-7}{a-1}$$

   • Si a = 1, el rango de A es 2 y el rango de A^* es 3. El sistema es incompatible.

b) Sean $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&3\\1&0&1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1&1&0&5\\0&1&3&a\\1&0&1&1\end{pmatrix}$.

El rango de A es 3 para cualquier valor de a. El sistema es siempre compatible determinado y su solución es:

$$x=\frac{8-a}{4}\qquad y=\frac{a+12}{4}\qquad z=\frac{a-4}{4}$$

c) Sean $A=\begin{pmatrix}2&-1\\a&3\\3&-1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}2&-1&a\\a&3&4\\3&-1&2\end{pmatrix}$

El rango de A es 2 para cualquier valor de a. El determinante de A* es $|A|=-a^2-7a+8$.

Discusión:

- Si a ≠ 1 y a ≠ 8, el rango de A es 2 y el rango de A^* es 3. El sistema es incompatible.
- Si a = 1, el rango de A es 2 y el rango de A* es 2. El sistema es compatible determinado y su solución es x = 1; y = 1.
- Si a = -8, el rango de A es 2 y el rango de A* es 2. El sistema es compatible determinado y su solución es x = 10; y = 28.

5. Queda:

a) El rango de A es 2 y el rango de A^* es 2. El sistema es compatible determinado y las dos rectas se cortan en el punto de coordenadas x = 7/5; y = 1/5.

b) El rango de A es 2 y el rango de A^* es 2. El sistema es compatible indeterminado y los tres planos se cortan en una recta.

c) El rango de A es 3 y el rango de A^* es 3 El sistema es compatible determinado y los tres planos se cortan en el punto de coordenadas x = 2,2; y = -0,8; z = -1,6.

6. Queda del siguiente modo:

a) Si a ≠ -1, el rango de la matriz A es 3 y el rango de A* es 3. El sistema es compatible determinado y los tres planos se cortan en un punto.

Si a = 1, el rango de A es 2 y el rango de A* es 3. El sistema es incompatible y los tres planos se cortan dos a dos.

b) Si a ≠ 1, el rango de la matriz A es 3 y el rango de A* es 3. El sistema es compatible determinado y los tres planos se cortan en un punto.

Si a = 1, el rango de A es 1 y el rango de A* es 2. El sistema es incompatible y de los tres planos dos coinciden y el tercero es paralelo a los dos anteriores.

c) Si a ≠ 1, el rango de la matriz A es 2 y el rango de A* es 2. El sistema es compatible determinado y las dos rectas se cortan en un punto.

Si a = 1, el rango de A es 1 y el rango de A* es 1. El sistema es compatible indeterminado y las dos rectas coinciden.

7. Queda:

a) Si $k=-3$ el sistema es compatible indeterminado. La solución de este sistema en este caso es la siguiente: $x=2t, y=-5t, z=3t \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Si $k=2$ el sistema es compatible indeterminado. Su solución es: $x=t, y=0, z=-t \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Si $k \neq -3$ y $k \neq 2$ el sistema es compatible determinado y su solución es: $x=0; y=0; z=0$

b) Si $k=-8$ el sistema es compatible indeterminado. La solución de este sistema en este caso es la siguiente: $x=t, y=7t, z=19t \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Si $k \neq -8$ el sistema es compatible determinado y su solución es la trivial: $x=0; y=0; z=0$

PÁGINA 75

8. Cierta marca de pintura es elaborada con tres ingredientes, *A*, *B* y *C*, comercializándose en tres tonos diferentes. El primero se prepara con 2 unidades de *A*, 2 de *B* y 1 de *C*; el segundo, con 1 unidad de *A*, 2 de *B* y 2 de *C*; y el tercero con una unidad de cada ingrediente.

   El bote del primer tono se vende a 23 euros, el del segundo a 17 euros y el del tercero a 14 euros. Sabiendo que el margen comercial (o ganancia) es de 3 euros por bote, ¿qué precio por unidad le cuesta a dicha marca de pintura cada uno de los tres ingredientes?

9. Una fábrica de chocolates emplea, para una determinada marca, leche, cacao y almendras, siendo la proporción de leche el doble que la de cacao y almendras juntas. Los precios de los ingredientes por kilo son: leche, 0,80 euros; cacao, 4 euros; y almendra, 10 euros.

   En un día se fabrican 9 000 kg de chocolate de dicha marca con un coste total de 22 800 euros. ¿Cuántos kilogramos se utilizan de cada componente?

10. Para un determinado partido de fútbol se ponen a la venta tres tipos de localidades: fondo, general y tribuna. Se sabe que la relación entre los precios de las localidades de tribuna y general es de 19/18, y entre general y fondo es de 6/5.

    Si al comprar tres localidades, una de cada clase, se pagan en total 52 euros, ¿cuál es el precio de cada tipo de localidad?

11. Un tren transporta 500 viajeros y la recaudación de sus billetes asciende a 2 142 euros. Calcula cuántos viajeros han pagado el importe total del billete, que vale 9 euros; cuántos han pagado el 20 % del billete y cuántos el 50 %, sabiendo que el número de viajeros que han pagado el 20 % del billete es el doble del número de viajeros que pagan el billete entero.

12. Andrés, Juan y Luis son tres amigos. Hablando un buen día sobre sus edades observan que: «El doble de la edad de Andrés más el triple de la edad de Juan es tres años superior a cuatro veces la edad de Luis. El triple de la edad de Luis menos el doble de la edad de Juan es siete años inferior al doble de la edad de Andrés. El doble de las edades de Andrés y Luis es tres años inferior a cinco veces la edad de Juan». ¿Cuál es la edad de cada uno de los amigos?

13. Un país importa 21 000 vehículos mensuales de 3 marcas *A*, *B*, *C*, al precio de 7 500; 9 100 y 12 000 euros, respectivamente. Si el total de la importación asciende a 201,8 millones de euros y de la marca *A* importa el 40 % de las otras dos marcas juntas, ¿cuántos vehículos de cada marca entran en el país?

14. En una tienda, por comprar dos chaquetas y una blusa nos cobran 200 euros. Volvemos a la tienda y compramos una chaqueta, un pantalón y devolvemos la blusa, y nos cobran 100 euros. En una tercera visita a la tienda compramos cinco chaquetas, un pantalón y una blusa, ¿cuánto nos cobrarán?

8. Llamando x, y, z al precio por unidad de cada uno de los ingredientes obtenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l}2x+2y+z=23-3\\1x+2y+2z=17-3\\x+y\,z=14-3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x=8\\y=1\\z=2\end{array}\right\}$$

Cada unidad de A cuesta a 8 euros, cada una de B a 1 euro y cada una de C a 2 euros.

9. Llamando *x* a los kg de cacao, e *y* a los kg de almendra, queda: $2(x+y)=$ kg de leche

Imponiendo las condiciones del problema obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l}2(x+y)+x+y=9000\\2(x+y)\cdot 0{,}8+4\cdot x+10\cdot y=22800\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x+3y=9000\\5{,}6x+11{,}6y=22800\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=2000\\y=1000\end{array}\right.$$

Utiliza 2 000 kg de cacao, 1 000 kg de almendra y 6 000 kg de leche.

10. Llamamos *x*, *y*, *z* al precio de las localidades de los tres tipos. Obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l}z/y=19/18\\y/x=6/5\\x+y+z=52\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x=15\\y=18\\z=19\end{array}\right\}$$

La localidad de Fondo cuesta 15 euros, la de General 18 euros y la de Tribuna 19 euros.

11. Llamamos *x* al número de viajeros que pagan el billete entero, *y* a los que pagan el 20% y *z* a los que pagan el 50%. Obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l}x+y+z=500\\9x+1{,}8y+4{,}5z=2142\\y=2x\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x=120\\y=240\\z=140\end{array}\right\}$$

12. Sea *x* la edad de Andrés, *y* la de Juan y *z* la de Luis:

$$\left.\begin{array}{l}2x+3y=4z+3\\3z-2y=2x-7\\2x+2z=5y-3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2x+3y-4z=3\\2x-2y+3z=-7\\2x-5y+2z=-3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x=17\\y=15\\z=19\end{array}\right\}$$

Andrés tiene 17 años
Juan tiene 15 años
Luis tiene 19 años

13. Llamando x, y, z al número de vehículos que importa de las marcas A, B, C respectivamente, e imponiendo las condiciones del problema obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=21000 \\ 7\,500x+9100y+12\,000z=201{,}8\cdot 10^{6} \\ x=(40/100)(y+z) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=6\,000 \\ y=8\,000 \\ z=7\,000 \end{array}\right\}$$

6000 vehículos marca A
8000 vehículos marca B
7000 vehículos marca C

14. Sean x, y, z los valores de una chaqueta, una blusa y un pantalón, respectivamente. El enunciado nos permite escribir el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y \phantom{{}+z} = 200 \\ x + y + z = 100 \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado y sus soluciones pueden expresarse en la forma:

$$\begin{cases} x = 100 - \dfrac{z}{3} \\ y = \dfrac{2z}{3} \end{cases}$$

Si compramos 5 chaquetas, un pantalón y una blusa, nos cobrarán:

$$5x+y+z=5(100 - \frac{z}{3}) + \frac{2z}{3} + z = 500 - \frac{5z}{3} + \frac{2z}{3} + z = 500 \text{ euros}$$

PÁGINA 76

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

15. Resuelve por el método de Gauss el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 8 \\ x + y + 2z = 1 \\ 7x - 8y + 8z = 22 \end{cases}$

16. Resuelve y clasifica el sistema de ecuaciones lineales:

$$2x + y = 3 \qquad y - 2x = -6 \qquad 3y - 6x = -3$$

Representa e interpreta gráficamente la situación relativa de las rectas cuyas ecuaciones forman el sistema.

17. Sea el siguiente sistema de ecuaciones, en función del parámetro m: $\begin{cases} 3x + (2m+3)y = 1 \\ -3mx + y = 1 \end{cases}$

a) Exprésalo en forma matricial, siendo los elementos de una de las matrices que intervienen las variables x e y.

b) Discútelo según los valores del parámetro m.

c) Determina su solución para $m = 5$.

18. Dado el sistema: $\begin{cases} x - 2y = -3 \\ -2x + 3y + z = 4 \end{cases}$

a) Clasifícalo y resuélvelo.

b) Añade una ecuación de modo que el sistema resultante represente las ecuaciones de tres planos que se cortan en una recta.

19. La edad de una madre es, en la actualidad, el triple que la de su hijo. La suma de las edades de padre, madre e hijo es 80 años, y dentro de 5 años, la suma de las edades de la madre y del hijo será 5 años más que la del padre. ¿Cuántos años tienen el padre, la madre y el hijo en la actualidad?

20. Un grupo de personas se reúne para ir de excursión, juntándose un total de 20 entre hombres, mujeres y niños. Contando hombres y mujeres juntos, su número resulta ser el triple del número de niños. Además, si hubiera acudido una mujer más, su número igualaría al de hombres. Averigua cuántos hombres, mujeres y niños han ido de excursión.

21. Si a un número de dos cifras se le suma 18, se obtiene el número con las cifras intercambiadas. Sabiendo que la suma de las cifras del número es 16, encuentra dicho número.

22. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, resuelve por el método de Gauss:

a) El sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es $A \cdot A^t$.

b) El sistema de ecuaciones lineales no homogéneo cuya matriz ampliada es $A^t \cdot A$, siendo la última columna los términos independientes.

23. Un cine proyecta una película sólo tres días: lunes, martes y miércoles. Se sabe que el número de espectadores del martes se incrementó un 12 % respecto al del lunes, el miércoles ese número disminuyó un 12 % respecto al martes y el lunes ese número superó en 36 espectadores el del miércoles. ¿Cuántos espectadores vieron la película cada uno de los días?

24. Discute, según los valores de t y resuelve cuando sea posible, encontrando la solución para la cual $z = 1$, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ tx + 2z = 0 \\ 2x - y + tz = 0 \end{cases}$$

15. Se tiene que:

$$\begin{cases} 3x-2y+4z=8 \\ x+y+2z=1 \\ 7x-8y+8z=22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y+4z=8 \\ 5y+2z=-5 \\ 10y+4z=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y+4z=8 \\ 5y+2z=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=8-4z \\ 5y=-5-2z \end{cases}$$

Las soluciones son: $x=2-8t;\ y=-1-2t;\ z=5t$ con $t\in\mathbb{R}$

16. El sistema es incompatible. Las dos últimas rectas son paralelas y la primera corta a ambas.

17. Queda:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2m+3 \\ -3m & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Si $m\neq-\dfrac{1}{2}$ y $m\neq-1$, el sistema es compatible determinado.

Si $m=-\dfrac{1}{2}$, el sistema es incompatible.

Si $m=-1$, el sistema es compatible indeterminado.

c) Para $m=5$, la solución es: $x=-\dfrac{2}{33}, y=\dfrac{1}{11}$

18. Queda:

a) El sistema es compatible indeterminado y sus soluciones en este caso vienen expresadas del siguiente modo: $x=1+2t,\ y=2+t,\ z=t$ con $t\in\mathbb{R}$.

b) Con la ecuación $-x+y+z=1$, el sistema es compatible indeterminado.

Con la ecuación $x+y+z=3$, el sistema es compatible determinado.

Con la ecuación $-x+y+z=5$, el sistema es incompatible.

19. Llamando *x*, *y*, *z* a las edades del padre, madre e hijo, respectivamente, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} y=3z \\ x+y+z=80 \\ y+5+z+5=5+x+5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=80 \\ y-3z=0 \\ x-y-z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=40 \text{ años} \\ y=30 \text{ años} \\ z=10 \text{ años} \end{array}\right\}$$

20. Llamando *x*, *y*, *z* al número de hombres, mujeres y niños que van de excursión, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=20 \\ x+y=3z \\ y+1=x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=20 \\ y+y-3z=0 \\ -x+y=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=48 \\ y=7 \\ z=5 \end{array}\right\}$$

Van de excursión 8 hombres, 7 mujeres y 5 niños.

21. Sea el numero *xy*.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=16 \\ 10x+y+18=10y+x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=16 \\ 9x-9y=-18 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=16 \\ x-y=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=7 \\ y=9 \end{array}\right\}$$ Luego el número es 79.

22. La solución queda:

a) $A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ El sistema pedido es: $\left.\begin{array}{l} 2x+y=0 \\ x+6y=10 \end{array}\right\}$ Y su única solución es $x=0; y=0$.

b) $A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ El sistema pedido es: $\left\{\begin{array}{l} 5x+2y=1 \\ 2x+y=1 \\ x+y=2 \end{array}\right.$

Este sistema es compatible determinado y su solución es: $x=-1;\ y=3$

23. La solución queda:

El lunes fueron al cine x personas, el martes fueron $\frac{112}{100}x$ personas y, por tanto, el miércoles fueron $\frac{88}{100}\cdot\frac{112}{100}x$ personas.

A partir del enunciado, obtenemos: $x = 36 + \frac{88}{100}\cdot\frac{112}{100}x \Rightarrow x = 2\,500$ Personas.

El lunes hubo 2 500 espectadores, el martes hubo 2 800 espectadores y, finalmente, el miércoles hubo 2 464 espectadores.

24. La discusión queda:

- Si $t = -3$ el sistema es compatible indeterminado.
- Si $t = 2$ el sistema es compatible indeterminado.
- Si $t \neq -3$ y $t \neq 2$ el sistema es compatible determinado y su única solución es la trivial $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.
- Si $t = -3$ la solución es: $\begin{cases} x = 2t \\ y = -5t \\ z = 3t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$

Para $z = 1$ la solución es: $x = \frac{2}{3}$; $y = \frac{-5}{3}$; $z = 1$

- Si $t = 2$ la solución del sistema es: $\begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$

Para $z = 1$ la solución del sistema es: $x = -1$; $y = 0$; $z = 1$

Unidad 4 – Programación lineal

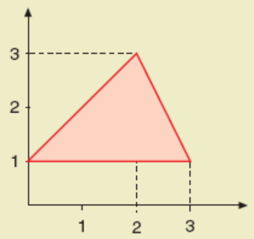
PÁGINA 79

cuestiones iniciales

1. Representa en el plano el conjunto de puntos que cumplen las siguientes condiciones:

a) $\begin{cases} y \leq 2 \\ y \geq -1 \\ x < y \end{cases}$ b) $\begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 2 \\ x + y \leq 3 \end{cases}$

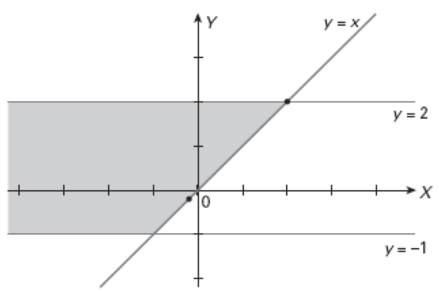
2. Escribe el sistema de inecuaciones cuya solución es el conjunto de puntos de la figura sombreada.



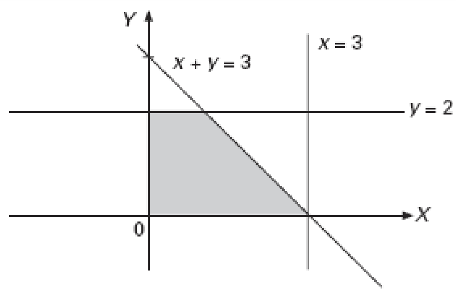
SOLUCIONES

1. Las regiones quedan:

a)



b)



2. El sistema pedido es:

$$\left.\begin{aligned} x - y &> -1 \\ 2x + y &< 7 \\ y &> 1 \end{aligned}\right\}$$

PÁGINA 91

ACTIVIDADES

■ Aplica la técnica de ensayo y error en la resolución de los siguientes problemas:

1. **Lentejas y garbanzos.** En un puesto del mercado tienen 5 sacos de garbanzos y uno de lentejas. Un cliente se lleva una cierta cantidad de garbanzos; después, otro cliente se lleva el doble de garbanzos que el cliente anterior, quedándose sólo el saco de lentejas. El vendedor sólo vende sacos completos. Sabiendo que los diferentes sacos son de 19, 18, 31, 16, 15 y 20 kg, ¿de cuántos kilogramos es el saco de lentejas?

2. **Tres cartas.** De una baraja española de 40 cartas, extraemos 3 y las colocamos en una fila horizontal. Las cartas verifican las condiciones siguientes: a la derecha del *caballo* hay 1 o 2 *sotas*; a la izquierda de la *sota*, hay 1 o 2 *sotas*; a la izquierda de un *oro*, hay una o dos *copas*; y a la derecha de una *copa*, hay una o dos *copas*. ¿De qué tres cartas se trata?

3. **Primas.** Dos amigos, Pedro y Luisa, se encuentran una tarde y Pedro le dice a Luisa: «Ayer estuve con mis tres primas». Luisa le pregunta: «¿qué edad tienen?», a lo que Pedro contesta: «el producto de sus edades es 2 450 y la suma de las mismas es el doble de tu edad». Luisa dijo que con estos datos no podía saber las edades. Pedro añadió: «yo soy por lo menos un año más joven que la más vieja». Por supuesto, Luisa conoce la edad de Pedro. ¿Cuáles son las edades de las primas de Pedro y cuál es la edad de Luisa?

SOLUCIONES

1. Sumando los kilos de todos los sacos, obtenemos 119 Kg Como un cliente se lleva cierta cantidad y otro se lleva el doble de esa cantidad quedando sólo el caso de lentejas, entonces al quitar a 119 Kg, el saco de lentejas debe quedar un número que es múltiplo de 3, esto se cumple con:

$$119-20=99.$$

   Un cliente lleva 33 Kg. en los sacos de 18 Kg. y 15 Kg. y el otro cliente se lleva 66 Kg en los sacos de 19 Kg, 31 Kg, 16 Kg. El saco de lentejas es el que pesa 20 Kg.

2. El caballo y las sotas las señalamos con CSS. Para que verifiquen las condiciones han de ser: $C_c\,S_o\,S_c$

   Por tanto, las cartas son:

   - Caballo de copas.
   - Sota de oros.
   - Sota de copas.

3. Descomponiendo 2.450 en factores, obtenemos: $2\,450 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$

Las posibles edades de las tres primas son:

Prima 1	Prima 2	Prima 3	Suma	Luisa
2	25	49	76	38
5	5	98	108	54
5	10	49	64	32
7	7	50	64	32
2	35	35	72	36
1	49	50	100	50
7	14	25	46	23
7	10	35	52	26
5	14	35	54	27

Una vez hecha la tabla con todas las posibilidades, observamos que hay un resultado suma repetido, por tanto ahí está la razón de que Luisa le dijera a Pedro que con esos datos no podía saber las edades. La edad de Luisa es de 32 años. Luisa sabe la edad Pedro. Si Pedro hubiera tenido 48 años o menos, no quedaría claro, por tanto Pedro ha de tener 49 años y las primas 7, 7 y 50 años.

PÁGINA 98

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Encuentra el conjunto de soluciones de las inecuaciones siguientes:

   a) $x + y - 7 \leq 0$ b) $2x - y + 3 \geq 0$ c) $y \geq 3$ d) $x \leq 5$

2. Dibuja las regiones factibles de los siguientes sistemas:

   a) $\begin{cases} 0{,}3x + 0{,}4y \leq 0{,}9 \\ 0{,}2x - 0{,}1y \geq 1{,}2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y + 3x - 7 \leq 0 \\ y - 6x + 11 \leq 0 \end{cases}$

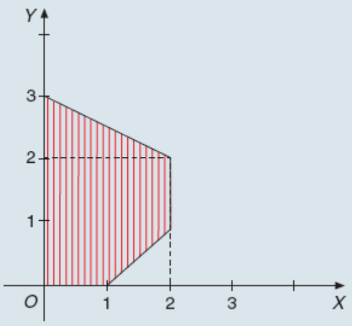
3. Encuentra el conjunto de puntos del plano que verifica el siguiente sistema de inecuaciones:

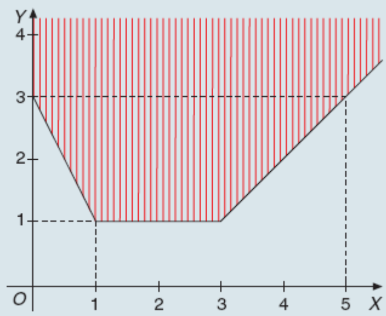
$$\begin{cases} 6 \leq y \leq 30 \\ 5x + 2y \leq 100 \\ 6x + y \geq 30 \\ x + 2y \geq 20 \end{cases}$$

4. Representa la región factible solución del sistema de inecuaciones: $\begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 5 \\ x - 2y \leq 10 \\ x + y \geq 10 \end{cases}$. Encuentra los vértices de la misma.

5. Encuentra el sistema de inecuaciones cuya región factible es el triángulo de vértices (1, 1), (2, 3) y (3, 1).

6. ¿Qué sistemas de inecuaciones tienen por solución la región rayada en cada uno de los gráficos siguientes?





7. Calcula el valor máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x + 2y$, sometida a las restricciones:

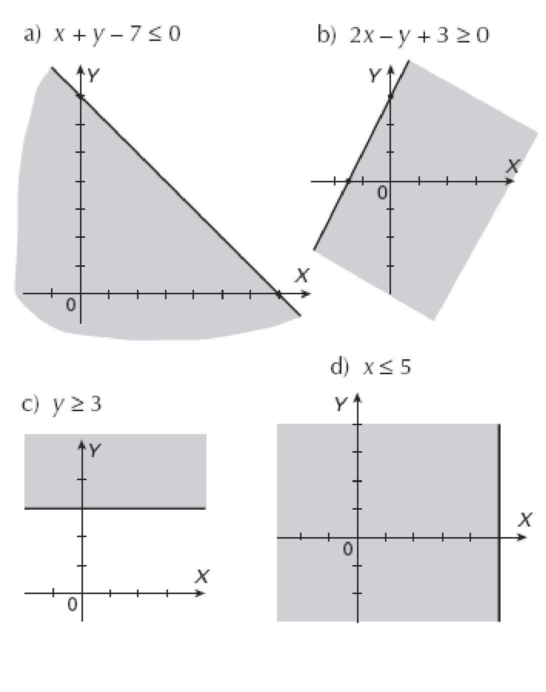
$$y \leq 4; \quad x \leq 3; \quad x - y \leq 3; \quad x - y \geq 0$$

8. Maximiza la función $z = 3x + 2y$ en el dominio definido por las inecuaciones siguientes:

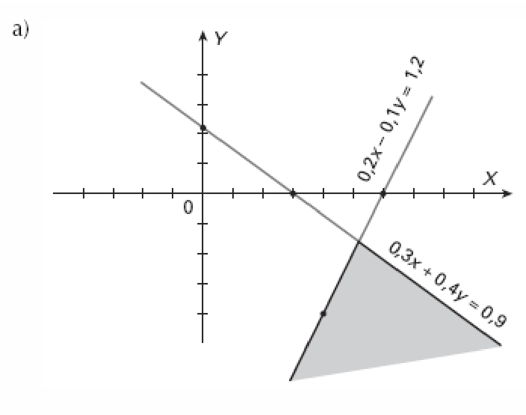
$$\{y + 2x \geq 0; \quad 3y - x \leq 1; \quad 0 \leq x \leq 2\}$$

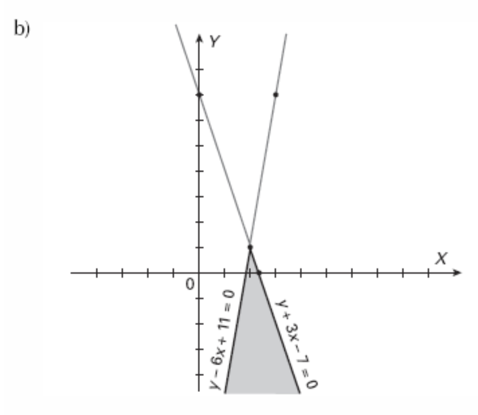
SOLUCIONES

1. Las soluciones pueden verse en los dibujos siguientes:

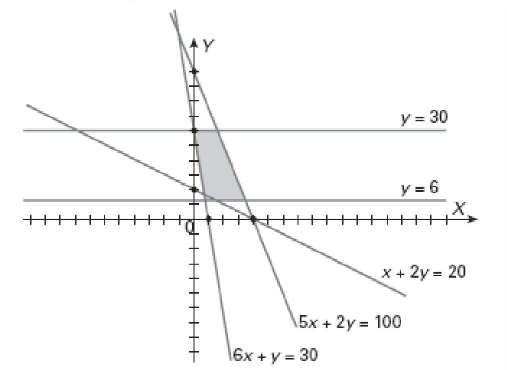


2. Las regiones factibles pueden verse en los dibujos que siguen:

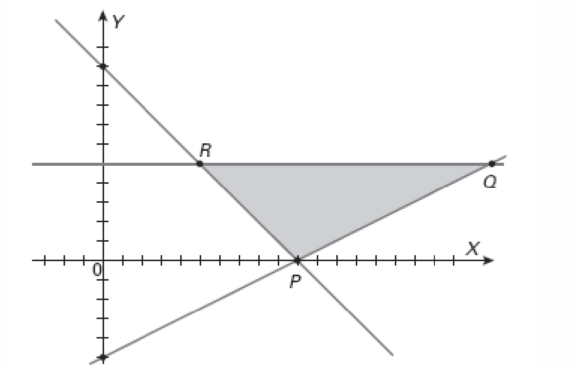




3. El conjunto de puntos es el siguiente:



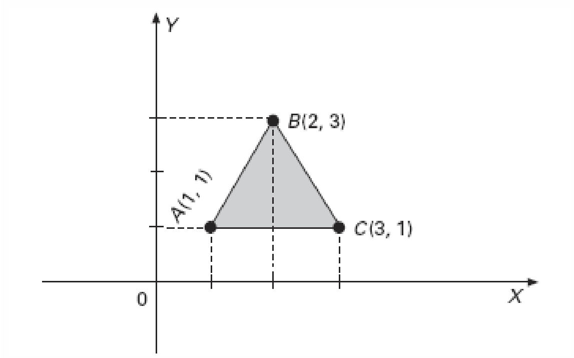
4. El recinto pedido es el que puede verse en el dibujo.



Los vértices del recinto son los puntos $P(10,0), Q(20,5)$ y $R(5,5)$

5. El sistema y la gráfica son:

$$\left.\begin{array}{l} y \geq 1 \\ 2x - y \geq 1 \\ 2x + y \leq 7 \end{array}\right\}$$



6. Los sistemas quedan:

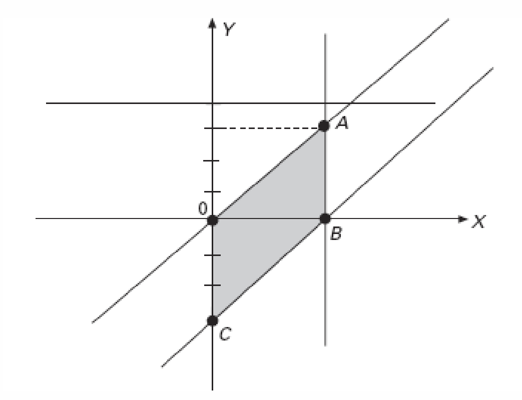
a)

$$\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ y > 0 \\ x < 2 \\ y > x - 1 \\ x + 2y < 6 \end{array}\right\}$$

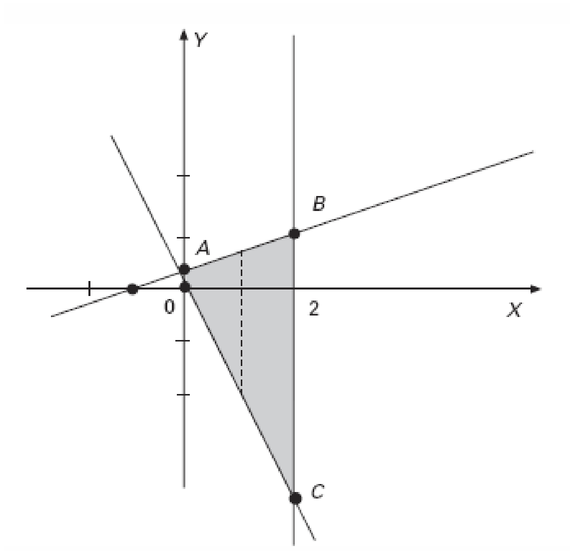
b)

$$\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ y > 1 \\ x - y < 2 \\ 2x + y > 3 \end{array}\right\}$$

7. La región factible esta representada en el dibujo.
   Los vértices son: $O(0,0)$ $A(3,3)$ $B(3,0)$ $C(0,-3)$
   La función $f(x,y)=x+2y$ alcanza el valor máximo en $A(3,3)$ y el valor mínimo en $C(0,-3)$.



8. La región factible es la representada en el dibujo.
   Los vértices de la misma son: $O(0,0)$ $A\left(0,\frac{1}{3}\right)$ $B(2,1)$ $C(2,-4)$
   La función $z=3x+2y$ alcanza el máximo en $B(2,1)$ y este valor es $z=8$.



PÁGINA 99

9. Representa el conjunto definido por las siguientes inecuaciones y calcula sus vértices:

$$\begin{cases} -x + y \le 2 \\ x + y \le 4 \\ -x + 2y \ge -1 \end{cases}$$

a) Calcula el valor máximo y mínimo que alcanza la función $f(x, y) = 4x + 2y$ en este conjunto.

b) Determina en qué puntos alcanza dichos valores.

10. Maximiza la función $f(x, y) = x + y + 1$ sujeta a las restricciones:

$$0 \le y; \quad 0 \le x \le 10; \quad x \le y; \quad y - 2x \le 6; \quad 3x + 4y \ge 24$$

11. Encuentra el mínimo de la función $z = 3x + 4y$ cuando se verifican las siguientes desigualdades:

$$x + 2y \ge 8; \quad 2x + 3y \ge 12; \quad x + y \ge 6; \quad x \ge 0; \quad y \ge 0$$

12. Considera el triángulo de vértices (0, 0), (2, 8) y (10, 3). Determina razonadamente:

a) El punto del triángulo donde la función $f(x, y) = -4x + y + 9$ alcanza el máximo.

b) El punto del triángulo donde la función $g(x, y) = 4x + y + 12$ alcanza el máximo.

13. Un fabricante de coches lanza una oferta especial en dos de sus modelos, ofreciendo el modelo *A* a un precio de 9 000 euros y el modelo *B* a 12 000 euros. La oferta está limitada por las existencias, que son 20 coches del modelo *A* y 10 del modelo *B*, queriendo vender al menos tantas unidades del modelo *A* como del modelo *B*. Por otra parte, para cubrir los gastos de esta campaña, los ingresos obtenidos con ella deben ser, al menos, de 36 000 euros.

a) ¿Cuántas unidades de cada modelo puede vender? Plantea el problema y representa su conjunto de soluciones.

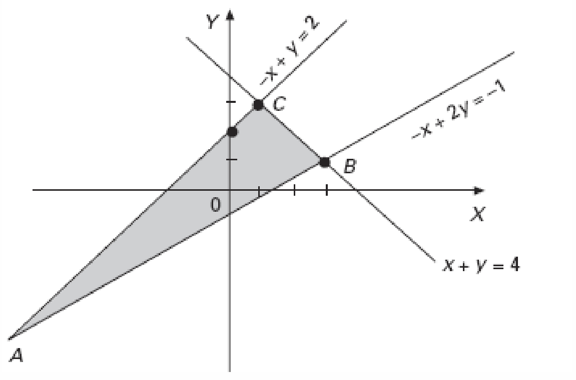
b) ¿Cuántos coches deberá vender de cada modelo para maximizar sus ingresos? ¿Cuál es su importe?

14. En una región se dispone de una área máxima de 600 ha para el cultivo de trigo y algodón. Las disponibilidades de agua en la zona son, sin embargo, limitadas, calculándose que el consumo global dedicado a estos cultivos no puede exceder en el presente año los 3 000 000 de m³. Razones de regulación de los precios obligan a una asignación mínima de 200 ha de trigo y 100 de algodón, y se estima que cada hectárea cultivada de trigo precisa de 6 000 m³ por año siendo 4 000 m³ los precisados por la de algodón. Las ganancias que se espera obtener por hectárea cultivada de trigo son de 15 000 euros, mientras que la de algodón producirá 12 000 euros. ¿Cuántas hectáreas deberán dedicarse a cada cultivo para obtener la máxima ganancia?

15. La capacidad de producción de una factoría permite elaborar diariamente 120 artículos del tipo *A* y 360 del tipo *B*. Las reglamentaciones existentes obligan a que al menos el 80 % de la producción total se destine a exportación, pero la capacidad de inspección en la aduana es de solo 200 artículos diarios. El precio de los artículos del tipo *A* es cuatro veces el de los de tipo *B*. Planifica la producción diaria para maximizar los beneficios.

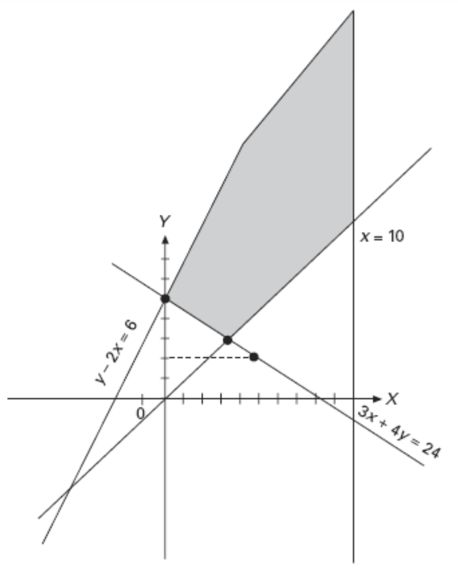
9. Los vértices de la región factible son: $A(-5,-3)$ $B(3,1)$ $C(1,3)$

La función $f(x,y)=4x+2y$ alcanza el máximo en $B(3,1)$ y vale 14 y el mínimo en $A(-5,-3)$ y vale -26.



10. Los vértices de la región factible son: $(0,6)$ $\left(\frac{24}{7},\frac{24}{7}\right)$ $(10,10)$ $(10,26)$

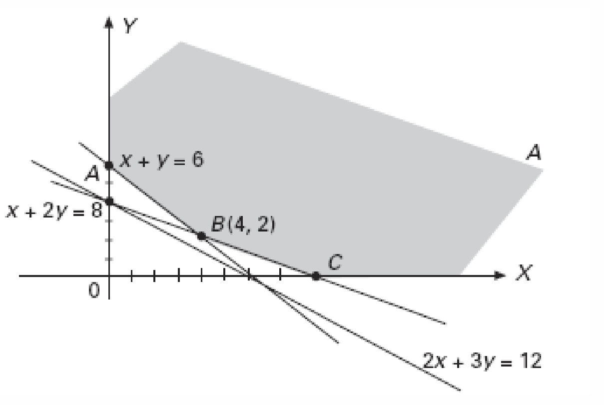
La función $f(x,y)=x+y+1$ toma el valor máximo en (10, 26) y este valor es 37.



11. Región factible no acotada.

Los vértices son: $A(0,6)$ $B(4,2)$ $C(8,0)$

La función $z=3x+4y$ alcanza el mínimo en (4, 2) y vale 20.

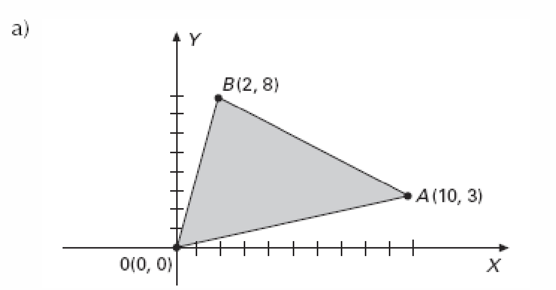


12. Llamando a los vértices $O(0,0)$ $A(10,3)$ $B(2,8)$ obtenemos las ecuaciones de los lados:

lado $OA \equiv 3x-10y=0$; $OB \equiv 4x-y=0$

lado $AB \equiv 5x+8y=74$

La función $f(x,y)=-4x+y+9$ alcanza el máximo en cualquier punto del lado OB.

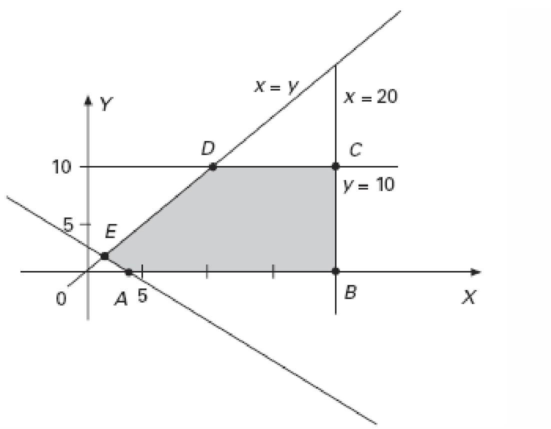


b) la función $g(x,y)=4x+y+12$ alcanza el máximo en el punto $A(10,3)$ y vale 55.

13. La solución queda:

a) Llamando x al número de coches del modelo A e y al del modelo B obtenemos el siguiente sistema y la siguiente gráfica:

$$\left.\begin{array}{l} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ x\leq 20 \\ y\leq 10 \\ x\geq y \\ 9x+12y\geq 36 \\ x,y\in \mathbb{N} \end{array}\right\}$$



Los vértices son:

$A(4,0)\ B(20,0)\ C(20,10)\ D(10,10)\ E\left(\frac{12}{7},\frac{12}{7}\right)$

a) la función que nos da los ingresos es: $z=9x+12y$ en miles de euros.

Esta función alcanaza el máximo en $C(20,10)$ y este asciende a 300 000 euros.

14. Llamando *x* al número de hectáreas de tipo e *y* al número de hectáreas de algodón obtenemos:

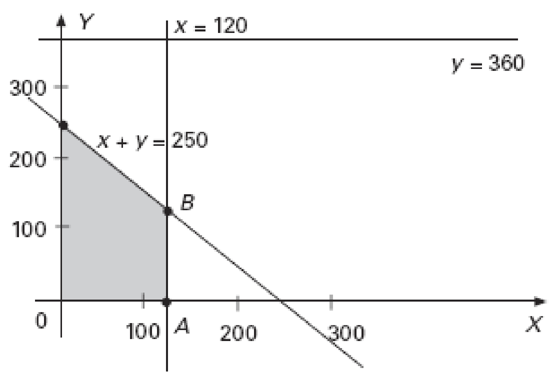
$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \ ;\ y \geq 0 \\ x + y \leq 600 \\ x \geq 200 \\ y \geq 100 \\ 6000\ x + 4000\ y \leq 3\ 000\ 000 \end{array}\right\}$$

La función al optimizar es $z=15000x+12000y$ y el máximo lo alcanza en el punto (300, 300) es decir debe plantar 300 hectáreas de trigo y lo mismo de algodón.

15. Sea *x* el numero de artículos de A e *y* el de B.

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 120 \\ 0 \leq y \leq 360 \\ (80/100)\ (x + y) \leq \end{array}\right\}$$

La función a optimizar es $z=4\,px+py$ y alcanza el máximo en $B(120,130)$. Debe fabricar 120 artículos de A y 130 de B.



Vértices: $O(0, 0)$ $A(120, 0)$ $B(120, 130)$ $C(0, 250)$

PÁGINA 100

ACTIVIDADES FINALES

16. Un almacenista tiene en su almacén 150 kg de caramelos de limón y 180 kg de caramelos de menta. Decide venderlos haciendo dos mezclas: una está formada por la mitad de caramelos de cada clase y la vende a 2 euros/kg, y la otra contiene la tercera parte de caramelos de limón y el resto de menta, vendiéndola a 1,5 euros/kg.

    ¿Cuántos kilos de cada mezcla deberá preparar para maximizar sus ingresos?

17. Una empresa tiene dos centros de producción en los que se fabrican tres tipos de productos, A, B y C. Debe entregar semanalmente un mínimo de 18 unidades de A, 16 de B y 6 de C. El primer centro le cuesta diariamente 10^4 euros y produce cada día 9 unidades de A, 4 de B y 1 de C. El segundo centro le cuesta diariamente $8 \cdot 10^3$ euros y produce cada día 3 unidades de A, 4 de B y 3 de C.

    ¿Cuántos días por semana debe trabajar cada centro para cumplir los compromisos comerciales y que los costes de producción sean mínimos?

18. El veterinario ha recomendado al dueño de un perro que el animal tome diariamente al menos 4 unidades de hidratos, 23 de proteínas y 6 de grasas.

    En el mercado venden un producto en bolsas verdes que contiene 4 unidades de hidratos, 6 de proteínas y 1 de grasas, y otro producto en bolsas blancas que contiene 1 unidad de hidratos, 10 de proteínas y 6 de grasas. La bolsa verde cuesta 1 euro y la blanca 1,5 euros. ¿Cómo debe combinar el dueño ambos productos para dar la dieta necesaria a su perro con menor precio?

19. Para cubrir cierto trayecto, una compañía aérea tiene dos aviones A y B. El número total de vuelos de los aviones no debe ser inferior a 60 ni superior a 200. Además, el avión A no puede sobrepasar los 120 vuelos, pero debe hacer, al menos, tantos como el B. Cada viaje de A supone un consumo de 900 litros de combustible y proporciona a la compañía un beneficio de 2 000 euros. En el caso del avión B, el consumo es de 800 litros y el beneficio es de 1 600 euros por viaje.

    a) ¿Cuántos vuelos debe hacer cada avión para que el beneficio sea máximo?

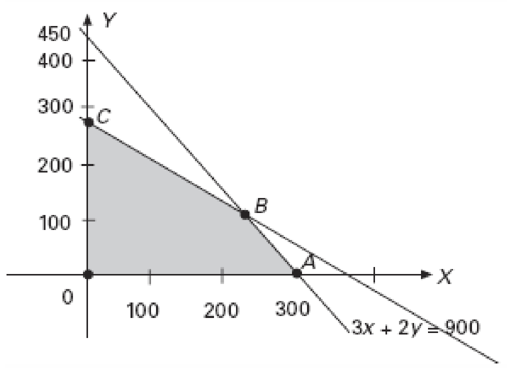
    b) ¿Y si lo que se desea es que el consumo de combustible sea mínimo?

20. Un agricultor, para abonar una finca, necesita al menos 9 kg de nitrógeno y 15 kg de fósforo. En el mercado venden un producto A que contiene un 20% de nitrógeno y un 40% de fósforo, y otro producto B que contiene un 30% de nitrógeno y un 30% de fósforo. El precio del producto A es de 4 euros/kg y el del B de 5 euros/kg.

    ¿Qué cantidad de cada producto ha de comprar el agricultor para abonar la finca con el menor gasto posible?

16. La solución es:

	1.ª mezcla	2.ª mezcla
Limón	1/2	1/3
Menta	1/2	2/3
Precio	2 €/kg	1,5 €/kg
Kg	x	y



La función a optimizar es: $z = 2x + 1{,}5\,y$

Sujeta a restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \;;\; y \geq 0 \\ x/2 + y/3 \leq 150 \\ x/2 + 2y/3 \leq 180 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x \geq 0 \;;\; y \geq 0 \\ 3x + 2y \leq 900 \\ 3x + 4y \leq 1080 \end{array}$$

Los vértices de la región factible son:

$$O(0,\, 0) \quad A(300,\, 0) \quad B(240,\, 90) \quad C(0,\, 270)$$

La función z alcanza el máximo en $B(240, 90)$.

Luego debe preparar 240 Kg. de la primera mezcla y 90 Kg. de la segunda para maximizar ingresos.

17. Recogemos la información en la siguiente tabla:

	1.er centro	2.º centro	
A	9	3	≥ 18
B	4	4	≥ 16
C	1	3	≥ 6
	10^4	$8 \cdot 10^3$	
Días semana	x	y	

La función a optimizar es: $z = 10^4\,x + 8 \cdot 10^3 \cdot y$

Sujeta a las restricciones:

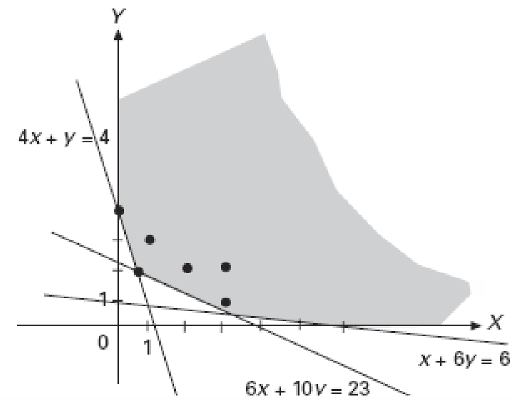
$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \; x,\, y \in \mathbb{N} \\ \begin{array}{l} 9x + 3y \geq 18 \\ 4x + 4y \geq 16 \\ x + 3y \geq 6 \end{array}\right\}$$

La función alcanza el mínimo en $(1,3)$ es decir debe trabajar 1 día en el primer centro y 3 en el segundo.

18. Recogemos la información que da el problema en la siguiente tabla. La función a minimizar es $z = 1x + 1{,}5y$ sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \ ; \ y \geq 0 \ ; \ x, y \in \mathbb{Z} \\ 4x + y \geq 4 \\ 6x + 10y \geq 23 \end{cases}$$

	Verdes	Blancas	
Hidratos	4	1	≥4
Proteinas	6	10	≥23
Grasas	1	6	≥6
Precio €	1	1,5	
	x	y	

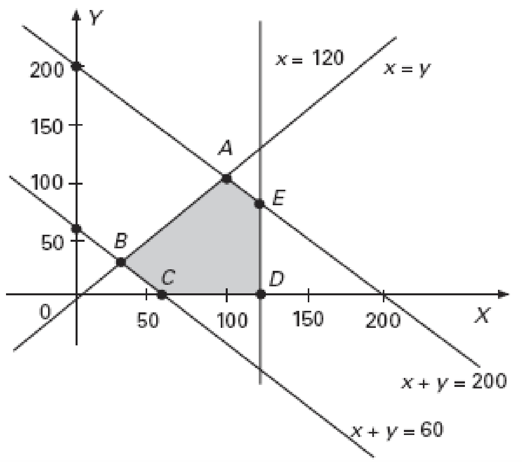


La región factible esta formada por todos los puntos enteros de la zona sombreada.
El corte es mínimo en el punto (1, 2) es decir que debe tomar 1 bolsa verde y 2 blancas.

19. Llamamos x e y al menos de vuelos de los aviones A y B respectivamente.

a) La función beneficio es: $z = 2000x + 1600y$ que hay que maximizar sujeta a las siguientes restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 120 \\ y \geq 0 \\ 60 \leq x + y \leq 200 \\ x \geq y \end{array}\right\}$$



Los vértices de la región factible son:

$A(100, 100)$ $B(30, 30)$ $C(60, 0)$
$D(120, 0)$ $E(120, 80)$

La función $z = 2000x + 1600y$ es máxima en $E(120,80)$ es decir debe hacer 120 vuelos con el avión A y 80 con el avión B.

b) la función consumo $f(x,y) = 900x + 800y$ que hay que minimizar sujeta a las restricciones anteriores alcanza el mínimo en $B(30,30)$ es decir para que el consumo sea mínimo debe hacer 30 vuelos con A y 30 vuelos con B.

20. Sean x los kilogramos del producto A e y los kilogramos del producto B. Los datos del enunciado aparecen recogidos en la tabla:

	A	B	NECESIDADES
NITRÓGENO	0,2	0,3	9
FÓSFORO	0,4	0,3	15
PRECIO	4	5	

Las restricciones son:

$$\begin{cases} 0,2x + 0,3y \geq 9 \\ 0,4x + 0,3y \geq 15 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La función objetivo a minimizar es F(x, y) = 4x + 5y. Con el programa *Prolim* obtenemos:

F(45, 0) = 180; S S
F(30, 10) = 170; S S

Max(45, 0) = 180
Mín(30, 10) = 170

Es decir que para abonar la finca con mínimo gasto tiene que comprar 30 Kg. de producto A y 10 Kg. del producto B.

PÁGINA 101

■ 21. Las necesidades vitamínicas diarias de una persona son de un mínimo de 36 mg de vitamina A, 28 mg de vitamina C y 34 mg de vitamina D. Estas necesidades se podrían cubrir tomando complejos vitamínicos de la marca *Y* y de la marca *Z*. Cada pastilla de la primera marca cuesta 0,03 euros y proporciona 2 mg de vitamina A, 2 mg de vitamina C y 8 mg de vitamina D. Cada pastilla de la segunda marca cuesta 0,04 euros y proporciona 3 mg de vitamina A, 2 mg de vitamina C y 2 mg de vitamina D.

¿Cuántas pastillas de cada marca se han de tomar diariamente si se desean cubrir las necesidades vitamínicas básicas con el menor coste posible? Determina dicho coste.

■ 22. En una empresa se fabrican dos tipos de piezas de recambio, *A* y *B*. Para fabricar una pieza del tipo *A* se necesitan 2 kg de un metal y para hacer una del tipo *B*, 4 kg del mismo metal. La empresa dispone, como máximo, de 100 kg de metal y no puede fabricar más de 40 piezas del tipo *A* ni más de 20 del tipo *B*.

a) Plantea un sistema de inecuaciones que represente las restricciones en la fabricación de la empresa.

b) Determina gráficamente los puntos del plano que verifican este sistema.

c) De entre las soluciones obtenidas, ¿cuáles son los posibles valores de las piezas de cada tipo (han de ser enteros) si se quieren gastar los 100 kg de metal?

■ 23. Un mayorista vende productos congelados que presenta en envases de dos tamaños: pequeño y grande. La capacidad de sus congeladores no le permite almacenar más de 1 000 envases en total. En función de la demanda sabe que debe mantener un stock mínimo de 100 envases pequeños y 200 grandes. La demanda de envases grandes es igual o superior a la de envases pequeños. El coste por almacenaje es de 10 céntimos de euro por cada envase pequeño y de 20 céntimos de euro por cada uno de los grandes.

¿Qué cantidad de cada tipo de envases proporciona el mínimo gasto de almacenaje? Obtén dicho mínimo.

■ 24. Encuentra la distribución de coste mínimo para los problemas de transporte de cada una de las tablas:

a)

	Hiper *A*	Hiper *B*	Hiper *C*	**Ofertas**
Fábrica *A*	4	4	6	**600**
Fábrica *B*	8	2	5	**400**
Demandas	**500**	**300**	**200**	

b)

	A Bilbao	A Santander	A Zaragoza	**Ofertas**
De Madrid	2	3	1	**40**
De Barcelona	1	4	2	**80**
Demandas	**20**	**40**	**60**	

■ 25. Un camión de 9 toneladas debe transportar mercancías de dos tipos: *A* y *B*. La cantidad de *A* no puede ser inferior a 4 toneladas ni superior al doble de la cantidad de *B*. Si el transportista gana 0,03 euros por cada kilogramo de *A* y 0,02 euros por cada kilogramo de *B*, ¿cómo debe cargar el camión para obtener la máxima ganancia? ¿A cuánto ascendería esa ganancia?

21. Sean x el número de pastillas que se han de tomar diariamente de la marca *Energic* e y el número de pastillas que han de tomar diariamente de la marca *Vigor*.

La función objetivo a minimizar es F(x, y) = 0,03x + 0,04y.

Los datos del enunciado aparecen recogidos en la tabla:

	ENERGIC	VIGOR	NECESIDADES
A	2	3	36
B	2	2	28
C	8	8	34
PRECIO	0,03	0,04	

Las restricciones son: $\begin{cases} 2x + 3y \geq 36 \\ 2x + 2y \geq 28 \\ 8x + 2y \geq 34 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Los valores que toma la función objetivo son:

F(18, 0) = 0.54; S S S F(6, 8) = 0.5; S S S
F(1, 13) = 0.55; S S S F(0, 17) = 0.68; S S S

Max(0, 17) = 0.6 Mín(6, 8) = 0.5

Para que el coste sea mínimo, se ha de tomar diariamente 6 pastillas de la marca *Energic* y 8 pastillas de la marca *Vigor*. El coste mínimo diario es de 0,5 euros.

22. La solución queda:

a) Sea x el número de piezas del tipo A e y el número de piezas del tipo B.
Las restricciones son:

$$\begin{cases} 2x + 4y \leq 100 \\ 0 \leq x \leq 40 \\ 0 \leq y \leq 20 \end{cases}$$

b) Los puntos del plano que verifican el sistema de inecuaciones son los de la zona sombreada de la gráfica que, fácilmente se obtiene.

c) Si se quiere gastar los 100 kilos de metal, las soluciones deben estar en la recta $y = \dfrac{50 - x}{2}$ y ser número enteros.
Vamos dando valores enteros pares (porque cada pieza necesita 2 kilos de metal) a x, entre 10 y 40, y obtenemos valores enteros de y en la ecuación $y = \dfrac{50 - x}{2}$.
Las soluciones son: (10, 20), (12, 19), (14, 18), (16, 17), (18, 16) (20, 15), (22, 14), (24, 13), (26, 12), (28, 11), (30, 10), (32, 9), (34, 8), (36, 7), (38, 6) y (40, 5).

23. Sea *x* el número de envases pequeños e *y* el número de envases grandes.
Las restricciones son:

$$\begin{cases} x + y \le 1000 \\ x \ge 100 \\ y \ge 200 \\ y \ge x \end{cases}$$

La región factible es la zona sombreada que se obtiene en la gráfica.

La función objetivo a minimizar es F(x, y) = 0,1x + 0,2y.

Con el programa Prolim obtenemos que el mínimo de F(x, y) se alcanza en uno de los vértices de la región factible:

F(100, 900) = 190; S S S S
F(500, 500) = 150; S S S S
F(100, 200) = 50; S S S S
F(200, 200) = 60; S S S S

Max(100, 900) = 190
Mín(100, 200) = 50

Por lo que el gasto mínimo de almacenaje es de 50 euros y se consigue con 100 envases pequeños y 200 envases grandes.

24. La solución queda:

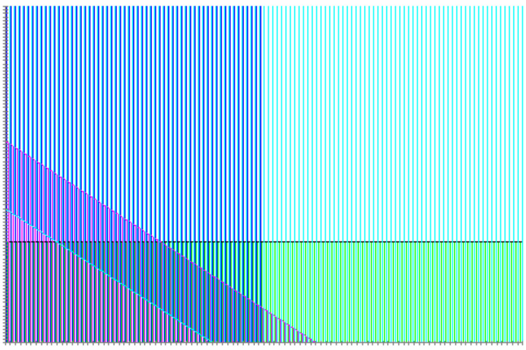
a) Si llamamos *x* a la cantidad de mercancía a transportar desde la Fábrica A hasta el Hiper A, e *y* a la cantidad de mercancía a transportar desde la Fábrica A hasta el Hiper B, toda la distribución de mercancía, en función de las variables anteriores, queda en la forma que recoge la tabla que sigue:

x	y	600 – x – y
500 - x	300 – y	- 400 + x + y

El programa lineal a resolver es:

Minimizar la función z = -5x + y + 6200;

sometida a las restricciones: $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x \le 500 \\ y \le 300 \\ x + y \le 600 \\ x + y \ge 400 \end{cases}$



La región factible es la zona sombreada.

El valor de la función objetivo en los vértices A(400, 0), B(500, 0), C(500, 100), D(300, 300) y E(100, 300) de la región factible es:

$Z_A = 4200 \quad Z_B = 3700 \quad Z_C = 3800 \quad Z_D = 5000 \quad Z_E = 6000$

Se observa que en el vértice B se minimiza la función objetivo; por tanto, la solución es x = 500, y = 0, es decir, las cantidades a transportar son las que se recogen en la tabla que sigue:

500	0	100
0	300	100

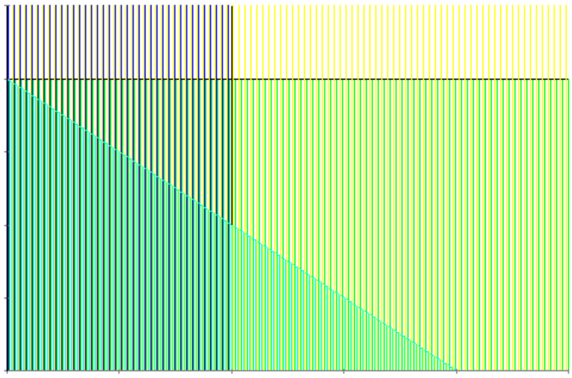
b) Si llamamos x a la cantidad de mercancía a transportar desde la Madrid a Bilbao, e y a la cantidad de mercancía a transportar desde Madrid a Santander, toda la distribución de mercancía, en función de las variables anteriores, queda en la forma que recoge la tabla que sigue:

x	y	40 – x – y
20 - x	40 – y	20 + x + y

El programa lineal a resolver es:

Minimizar la función z = 2x + 260;

sometida a las restricciones: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 20 \\ y \leq 40 \\ x + y \leq 40 \\ x + y \geq -20 \end{cases}$



La región factible es la zona sombreada.

El valor de la función objetivo en los vértices A(0, 0), B(20, 0), C(20, 20) y D(0, 40) de la región factible es:

$Z_A = 260 \quad Z_B = 300 \quad Z_C = 300 \quad Z_D = 260$

Se observa que en los vértices A (0, 0) y D (0, 40) se minimiza la función objetivo; por tanto, la solución se obtiene para cualquier punto del segmento de extremos A y D. En este caso existen innumerables soluciones; desde A (0, 0) hasta D (0, 40) como se muestran en las tablas que siguen:

0	0	40
20	40	20

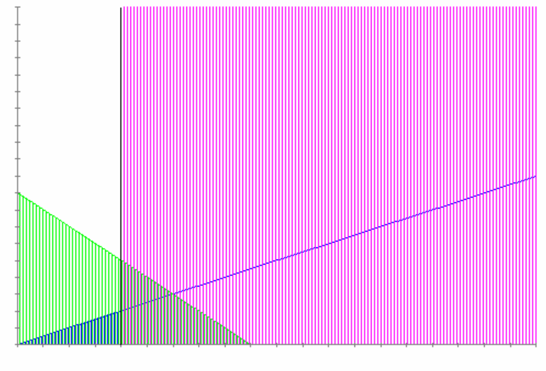
...

0	40	0
20	0	60

25. Sea *x* las toneladas que debe cargar de A e y las toneladas que debe cargar de B.

Las restricciones son: $\begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq 2y \\ x + y \leq 9 \\ y \geq 0 \end{cases}$

La región factible es la zona sombreada.



La función objetivo a maximizar es F(x, y) = 30x + 20y.

El máximo de F(x, y) se alcanza en uno de los vértices de la región factible:

F(4, 2) = 160 F(6, 3) = 240 F (4, 5) = 220

La ganancia máxima es de 240 euros, para obtenerla hay que cargar el camión con 6 toneladas de mercancía tipo A y e toneladas de mercancía tipo B.

PÁGINA 102

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

26. Dado el siguiente sistema de desigualdades lineales: $\begin{cases} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x + 4y \leq 16 \\ x + 2y \leq 10 \\ 2x + y \leq 14 \end{cases}$

 a) Represéntalo gráficamente.

 b) Maximiza $f = 3x + 5y$ sujeta a las restricciones anteriores.

 c) Discute razonadamente si el resultado obtenido en el apartado b) seguirá siendo el mismo al añadir la condición $x \leq 5$.

27. Una fábrica produce chaquetas y pantalones. Tres máquinas diferentes (de cortar, coser y tintar) son empleadas en la producción. Fabricar una chaqueta supone utilizar la máquina de cortar una hora, la de coser tres horas y la de tintar una hora, y, para unos pantalones, la máquina de cortar una hora, la de coser una hora y la tintar no se utiliza. La máquina de tintar se puede usar durante tres horas, la de coser doce y la de cortar siete. Todo lo que se fabrica es vendido y se saca un beneficio de ocho euros por cada chaqueta y de cinco por cada pantalón. ¿Cómo emplearemos las máquinas si queremos sacar el máximo beneficio posible? Da la respuesta en números enteros.

28. Un orfebre fabrica dos tipos de joyas. Cada joya tipo *A* se hace con 1 g de oro y 1,5 g de plata y se vende a 24 euros. La de tipo *B* se vende a 30 euros y lleva 1,5 g de oro y 1 g de plata.

 Si el orfebre sólo dispone de 750 g de cada metal, ¿cuántas joyas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

29. Se va a organizar una planta de un taller de automóviles donde van a trabajar electricistas y mecánicos. Por necesidades de mercado, es necesario que haya mayor o igual número de mecánicos que de electricistas y que el número de mecánicos no supere al doble del de electricistas.

 En total hay disponibles 30 electricistas y 20 mecánicos. El beneficio de la empresa por jornadas es de 150 euros por electricista y 120 euros por mecánico.

 ¿Cuántos trabajadores de cada especialidad deben elegirse para obtener beneficio máximo?

30. Una empresa compra 5 autobuses a una factoría francesa y 7 a una alemana. Quiere proveer al menos de 6 autobuses a la estación de Palma y al menos de 3 a la de Inca.

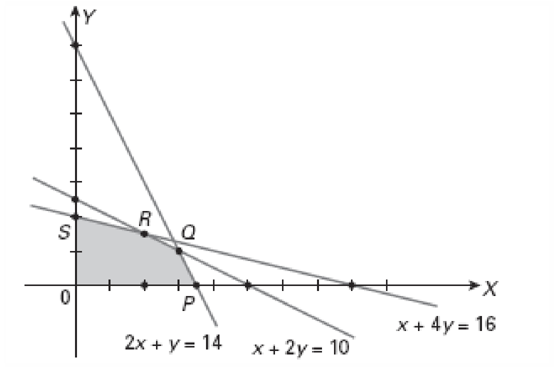
 ¿Cuántos autobuses de cada tipo colocará la empresa en cada estación si desea que el coste sea mínimo, siendo el coste del tipo de autobús, según destino, el indicado en la tabla?

	Francés	Alemán
Palma	4	16
Inca	9	17

31. Una fábrica produce gasolina y gasóleo en las siguientes condiciones: puede producir como máximo una tonelada de cada producto y el mínimo operativo es de 100 kg por producto. Los precios de venta son de 0,25 euros/kg la gasolina y de 0,2 euros/kg el gasóleo. Si produce en total 1 700 kg, ¿cuál será la producción que maximiza los ingresos?

26. La solución queda:

a)



Los vértices de la región son los puntos $O(0,0), P(7,0), Q(6,2), R(4,3)$ y $S(0,4)$.

b) el máximo de la función $f=3x+5y$ es $f=28$, para $x=6, y=2$.

c) En el caso de añadir la condición $x \leq 5$, el máximo de la función $f=3x+5y$ es $f=27{,}5$, para $x=5, y=\frac{5}{2}$.

27. Recogemos la información del problema en la siguiente tabla:

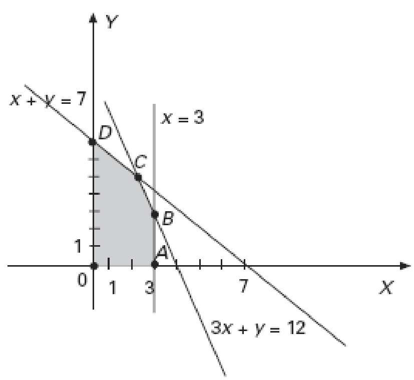
La función a maximizar es $z=8x+5y$

Sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \quad x, y \in \mathbb{Z} \\ x + y \leq 7 \\ 3x + y \leq 12 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

	Chaquetas	Pantalones	
Cortar	1	1	≤ 7
Coser	3	1	≤12
Tintar	1	0	≤ 3
Beneficio en €	8	5	
Número de unidades	x	y	

La región factible es la zona sombreada del grafico:



Los vértices son:

$$O(0,\ 0)\ A(3,\ 0)\ B(3,\ 3)\ C\left(\frac{5}{2},\ \frac{9}{2}\right)\ D(0,\ 7)$$

El valor máximo lo alcanza en $C\left(\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right)$ pero como los valores no son enteros tomamos los enteros más próximos dentro de la región es decir $x=2\ y=5$ y el beneficio máximo será de 41 euros.

28. En la siguiente tabla recogemos la información:

La función beneficio es: $z=24x+30y$

Sujeta a las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \quad x,\ y \in \mathbb{Z} \\ y \geq 0 \\ x + 1{,}5y \leq 750 \end{array}\right\}$$

	Tipo A	Tipo B	
Oro	1	1,5	≤750 g
Plata	1,5	1	≤750 g
Precio	24 €	30 €	
Número de joyas	x	y	

Dibujando la región factible obtenemos de vértices $(0,0)(500,0)(300,300)(0,500)$

El valor que hace máximo el beneficio es $x=300\ y=300$

29. Llamando x, y al número de electricistas y mecánicos respectivamente obtenemos que la función beneficio es: $z=150x+120y$

Esta función hay que maximizar sujeta a las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} y \geq x \\ y \leq 2x \\ 0 \leq x \leq 30 \\ 0 \leq y \leq 20 \\ x,\ y \in \mathbb{Z} \end{array}\right\}$$

Representando gráficamente la región factible tiene de vértices: $(0,0)(20,20)(10,20)$

El valor que hace máximo el beneficio es $x=20\ \ y=20$.

30. La información de este problema de transporte lo recogemos en la siguiente tabla supuesto que x es el numero de autobuses desde Francia para Palma e y el numero desde Alemania para Palma.

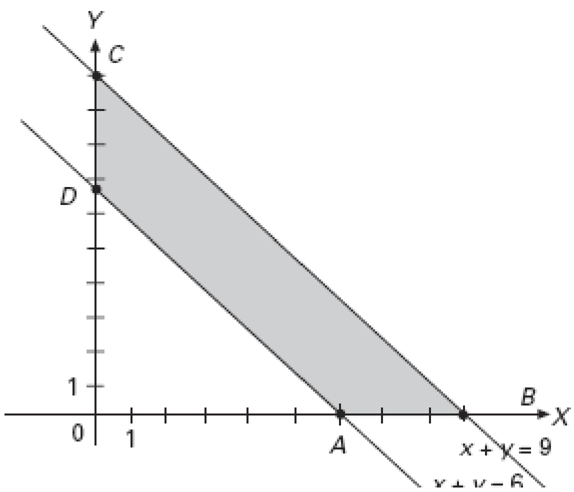
	F	A	
Palma	x	y	6
Ince	$5-x$	$7-y$	3

La función coste es: $z=4x+16y+9(5-x)+17(7-y) \Rightarrow z=164-5x-y$

Hay que minimizarla sujeta a las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \quad x, y \in \mathbb{N} \\ y \geq 0 \\ x+y \geq 6 \end{array}\right\}$$

La región factible queda representada en el grafico siguiente:



Los vértices de la región factible son:

$A(6, 0)$ $B(9, 0)$ $C(0, 9)$ $D(0, 6)$

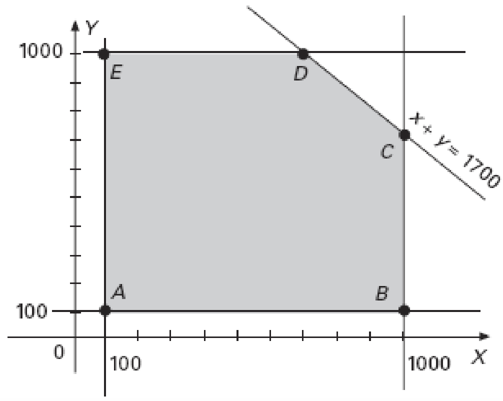
$\mathbb{Z}$ alcanza el mínimo en el punto $B(9, 0)$.

31. Llamando *x*, *y* al número de kilos de gasolina y de gasóleo respectivamente obtenemos un función que da los ingresos de la fábrica es: $z = 0{,}25 \cdot x + 0{,}2\, y$

Hemos de maximizar esta función sujeta a las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} 100 \le x \le 1000 \\ 100 \le y \le 1000 \\ x + y \le 1700 \end{array}\right\}$$

La región factible esta representada en el siguiente grafico:



Los vértices de la región factible son:

A(100, 100) B(100, 100) C(1000, 700) D(700, 1000) y E(100, 1000)

La función *z* alcanza su valor máximo en el vértice C es decir la producción será de 1 000 Kg de gasolina y 700 Kg de gasóleo.

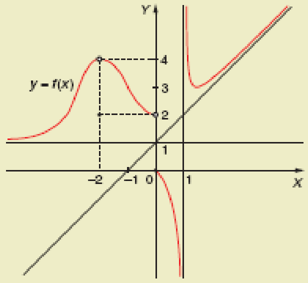
Unidad 5 – Límites de funciones. Continuidad

PÁGINA 104

cuestiones iniciales

1. En la función $y = f(x)$, cuya gráfica se adjunta, calcula:

- $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty}$
- $f(-2)$; $f(0)$
- Asíntotas horizontales, verticales y oblicuas.



2. Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + 2x}{x^2 - 1}$, halla:

- $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

SOLUCIONES

1. Los límites quedan:

- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 4$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 4 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 4$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 \Rightarrow$ no existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -1$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$
- $f(-2) = 2$; $f(0) = 0$
- Asíntota vertical: $x = 1$; asíntota horizontal: $y = 1$; Asíntota oblicua: $y = x + 1$

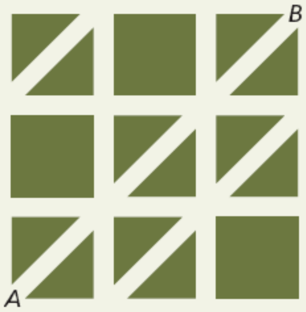
2. Los límites en cada caso quedan:

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2 + 2x}{x^2 - 1} = \lim_{x\to -1} \frac{2x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = 1 \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2 + 2x}{x^2 - 1} = 2 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + 2x}{x^2 - 1} = 0$$

PÁGINA 125

A C T I V I D A D E S

Utiliza la estrategia de simplificar y/o particularizar en la resolución de los siguientes problemas:



1. **Sumas.** Demuestra: $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{999\cdot 1001}=0,\widehat{498501}$
2. **Plano de ciudad.** La figura representa el plano de una ciudad. ¿De cuántas formas se puede ir desde A hasta B de manera que nunca retrocedamos?
3. **Trama triangular.** Resuelve el problema análogo al que figura en la página anterior, considerando que en este caso los triángulos equiláteros que debes contar son los que tienen el vértice hacia abajo.
4. **Primos.** Demuestra que la diferencia de cuadrados de dos números primos mayores que 3 es siempre un número múltiplo de 24.
5. **Tablero de ajedrez.** ¿Cuántos rectángulos de lados desiguales hay en un tablero de ajedrez?

SOLUCIONES

1. Queda:

   El termino general de la sucesión formada por los sumandos es: $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

   Descomponiendo este en fracciones simples, obtenemos:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1/2}{2n-1}+\frac{-1/2}{2n+1}$$

   Aplicando esta igualdad a cada uno de los sumandos obtenemos:

$$\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1/2}{1}+\frac{-1/2}{3}$$

$$\frac{1}{3\cdot 5}=\frac{1/2}{3}+\frac{-1/2}{5}$$

$$\frac{1}{5\cdot 7}=\frac{1/2}{5}+\frac{-1/2}{7}$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$\frac{1}{997\cdot 999}=\frac{1/2}{997}+\frac{-1/2}{999}$$

$$\frac{1}{999\cdot 1001}=\frac{1/2}{999}+\frac{-1/2}{1001}$$

Sumando todas estas igualdades, obtenemos:

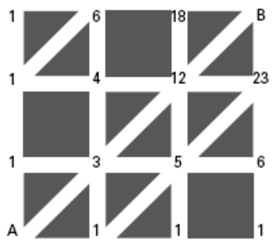
$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{999\cdot 1001}=\frac{1/2}{1}+\frac{-1/2}{1001}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2002}=\frac{1000}{2002}=\frac{500}{1001}=0,\overparen{499500}$$

Fácilmente se comprueba la igualdad sin más que poner el número decimal periódico puro dado en forma de fracción:

$$0,\overparen{499500}=\frac{499\,500}{999\,999}=\frac{500\cdot 27\cdot 37}{1001\cdot 27\cdot 37}=\frac{500}{1001}$$

Por tanto, la igualdad que plantea el problema es verdadera.

2. Queda del siguiente modo:



Solamente consideramos los caminos en vertical hacia arriba que denotamos como V, en diagonal hacia arriba que denotamos con D y en horizontal hacia la derecha que denotamos con H.

En la figura tenemos señalados el número de caminos que hay desde A a cada esquina. Fácilmente se llegan a encontrar esos números sin más que ir trazando caminos. Así en el cruce que hay un 3 se llega a el desde A por tres caminos V-D-H; en el cruce que hay $5=3+1+1$ se llega a el por cinco caminos: HHV-HD-DH-VH-HVH.

Observamos que el número que hay en cada cruce es suma de los de las dos esquinas contiguas si el cuadrado es cerrado y de las tres esquinas si el cuadrado es abierto.

3. Procediendo de forma análoga a la del problema de la pagina anterior, obtenemos:

	N.º triángulos de lado 1	N.º triángulos de lado 2	N.º triángulos de lado 3	N.º triángulos de lado 4	N.º triángulos de lado 5	Total
Trama $n=2$	1					1
Trama $n=3$	3					3
Trama $n=4$	6	1				7
Trama $n=5$	10	3				13
Trama $n=6$	15	6	1			22
Trama $n=7$	21	10	3			34
Trama $n=8$	28	15	6	1		50

Observamos que aparecen dos sucesiones según sea $n =$ par o $n =$ impar.

- Si $n =$ par, obtenemos la sucesión: 1, 7, 22, 50, 95, 161, …

Es una progresión aritmética o sucesión aritmética de orden 3 y su término general vale:

$$\frac{n \cdot (n+2) \cdot (2n-1)}{24}$$

- Si $n =$ impar obtenemos la sucesión: 3, 13, 34, 70. 125, …

Es una progresión aritmética o sucesión aritmética de orden 3 y su término general es:

$$\frac{(n-1) \cdot (n+1) \cdot (2n+3)}{24}$$

Por tanto, el número de triángulos equiláteros con el vértice hacia abajo que podemos contar en una trama triangular de n-unidades de lado es:

$$\begin{cases} \dfrac{n \cdot (n+2)\,(2n-1)}{24} & \text{si } n \text{ es par} \\ \dfrac{(n-1)\,(n+1)\,(2n+3)}{24} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

- En una trama de lado n hay:

I. $1+3+6+10+15+21+28+\ldots = \binom{n}{n-2}$ triángulos de lado 1 con $n \geq 2$

II. $1+3+6+10+15+\ldots = \binom{n-2}{n-4}$ triángulos de lado 2 con $n \geq 4$.

III. $1+3+6+10+15+\ldots = \binom{n-4}{n-6}$ triángulos de lado 3 con $n \geq 6$.

Así sucesivamente.

En general es $\binom{n+2-2k}{n-2k}$ con $k = 1,2,\ldots,n$ $\quad k =$ Número de unidades de lado.

4. Hemos de demostrar que $p^2 - q^2 = \dot{24}$ siendo p y q números primos mayores que 3.
   Para demostrarlo, veamos primeramente que si p es un número primo mayor que 3, entonces

$$p^2 - 1 = \dot{24} \qquad\qquad p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$$

   Los números están colocados:

$$p-1 \qquad \underset{\substack{\downarrow \\ primo}}{p} \qquad p+1$$

   Como p es primo, $p-1$ y $p+1$ son múltiplos de 2 y uno de ellos también es múltiplo de 4, pues en tres números consecutivos mayores que 3 con los extremos pares a la fuerza uno de estos extremos es múltiplo de 4.

   También $(p-1)$ o $(p+1)$ han de ser múltiplos de 3, puesto que son tres números consecutivos.

   Por tanto, se cumple que $p^2 - 1 = \dot{2} \cdot \dot{4} \cdot \dot{3} = \dot{24}$. Además como:

$$p^2 - q^2 = (p^2 - 1) - (q^2 - 1) \Rightarrow p^2 - q^2 = \dot{24} - \dot{24} = \dot{24}$$

   Por tanto, se cumple que la diferencia de cuadrados de dos números primos mayores que 3 es siempre múltiplo de 24.

5. Partimos del siguiente cuadro:

TIPO DE TABLERO	TIPOS DE RECTÁNGULOS										TOTAL
	1 × 1	1 × 2	1 × 3	1 × 4	2 × 2	2 × 3	2 × 4	3 × 3	3 × 4	4 × 4	
1 × 1	1										1
2 × 2	4	4			1						9
3 × 3	9	12	6		4	4		1			36
4 × 4	16	24	16	8	9	12	6	4	4	1	100
5 × 5	25	40	30	20	16	24	16	9	12	4	225

   Observamos la sucesión del número total de rectángulos (incluidos como tales los cuadrados):

   1, 9, 36, 100, 225, 441, ...

   $1^2, 3^2, 6^2, 10^2, 15^2, 21^2, \ldots$

   En un tablero 8×8, que es un tablero de ajedrez, hay $36^2 = 1296$ rectángulos.

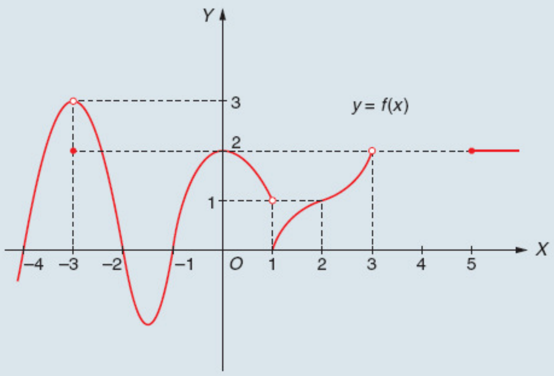
   Si nos quedamos solo con los no cuadrados, habría $1\,296 - 204$ cuadrados $= 1092$ rectángulos no cuadrados en un tablero 8×8.

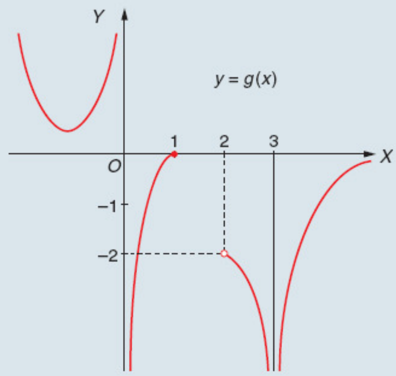
PÁGINA 130

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Determina, en las siguientes funciones, los datos pedidos:





- $f(-3)$
- $f(-2)$
- $f(0)$
- $f(4)$
- $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to 3} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$

2. Representa gráficamente funciones que satisfagan, respectivamente, las siguientes condiciones:

a) $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -2$; $f(-3) = -2$; Dom $f = \mathbb{R}$; Im $f = [-3, +\infty)$.

b) g estrictamente decreciente en $(0, 6)$; asíntota vertical en $x = 6$; $\lim\limits_{x \to 3} g(x) = -2$; no existe $g(3)$.

c) h acotada inferiormente por 2; $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 2$; asíntota vertical en $x = 2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

3. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-4}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 4x^4$

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[\dfrac{3}{x^3}\right]$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{x^{-2}}{5}\right]$

e) $\lim\limits_{x \to 0^-} \left[\dfrac{x^5}{3}\right]$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\dfrac{2}{x^5}\right]$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{2}{x^2+1} + \dfrac{3}{x+2}\right]$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} 3^{-x}$

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} 3^{-x}$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{2}{3}\right]^x$

k) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-2}}$

l) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^4 - 3x - 1}{x^3 + 3}$

4. Determina, si existen, las asíntotas de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

b) $g(x) = \dfrac{x^2}{x + 2}$

c) $h(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$

d) $i(x) = \dfrac{2x^2 + 3}{x^3 - 9x}$

e) $j(x) = \dfrac{x^2 + x - 5}{x - 2}$

f) $k(x) = \dfrac{x^2 - 3}{2x - 4}$

SOLUCIONES

1. Los datos requeridos son los siguientes:

$y = f(x)$

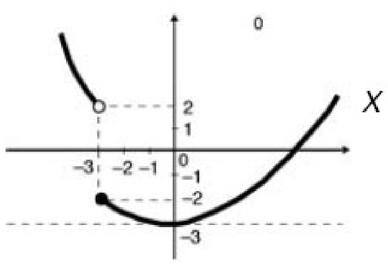
- $f(-3) = 2$ • $f(-2) = 0$ • $f(0) = 2$
- $f(4)$ no definida
- $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = 3$ • $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$
- $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 2$ • $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ no existe
- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$ • $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ no existe • $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$

$y = g(x)$

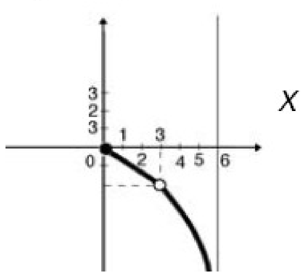
- $\lim\limits_{x \to 3} g(x) = -\infty$ • $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = -2$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ • $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = +\infty$ • $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$ no existe • $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$ no existe

2. Las gráficas quedan:

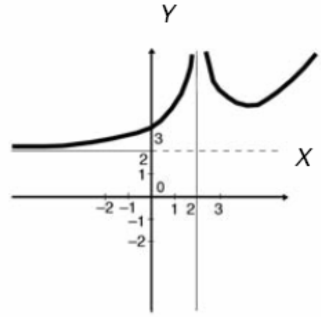
a)



b)



c)



3. La solución en cada caso es:

a) 0	b) $+\infty$	c) $+\infty$	d) $+\infty$	e) 0	f) 0
g) 0	h) 0	i) $+\infty$	j) 0	k) $+\infty$	l) $-\infty$

4. Queda:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Asíntotas verticales: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = +1}\ \boxed{x = -1}$

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0}$

Asíntotas oblicuas: no tiene.

b) $g(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$

Asíntotas verticales: $x+2=0 \Rightarrow \boxed{x=-2}$

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{x+2} = \pm\infty$ no existen.

Asíntotas oblicuas: son rectas de ecuación $y = mx+n$.

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x+2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2+2x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2}{x+2} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x}{x+2} = -2$$

La asíntota oblicua queda $\boxed{y = x-2}$

c) $h(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$

Asíntotas verticales: no existen.

Asíntoras horizontales: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4} = 1 \Rightarrow \boxed{y = 1}$

Asíntotas oblicuas: no existen.

d) $f(x)=\dfrac{2x^2+3}{x^3-9x}$

Asíntotas verticales: $\boxed{x=0}$ $\boxed{x=3}$ $\boxed{x=-3}$.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^2+3}{x^3-9x}=0$ quedando $\boxed{y=0}$

e) $j(x)=\dfrac{x^2+x-5}{x-2}$

Asíntotas verticales: $x=2$

Asíntotas horizontales: no tiene.

Asíntotas oblicuas: $y=x+3$

f) $k(x)=\dfrac{x^2-3}{2x-4}$

Asíntotas verticales: $x=2$

Asíntotas horizontales: no tiene.

Asíntotas oblicuas: $y=\dfrac{1}{2}x+1$

PÁGINA 131

5. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^3-1}$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-x+6}{x^2+3x+2}$

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-1}{x^2+1}$

d) $\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x^3-1}$

e) $\lim_{x\to-2} \frac{x^2-x-6}{x^3+3x^2+2x}$

f) $\lim_{x\to2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}$

g) $\lim_{x\to1} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$

h) $\lim_{x\to0} \frac{2-\sqrt{4-x}}{x}$

i) $\lim_{x\to0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

j) $\lim_{x\to3} \frac{x^2+6x+9}{x-3}$

k) $\lim_{x\to0} \frac{2x^2+6x-3}{2x^2+5x}$

l) $\lim_{x\to1} \frac{2x^2+x-3}{x^2-5x+4}$

m) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)$

n) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$

ñ) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{2x^2+1}\right)$

o) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{5x+1}{5x-1}\right)^{3x+2}$

p) $\lim_{x\to1} \left(\frac{x^3+1}{x^2+1}\right)^{\frac{3}{x-1}}$

q) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+2x+1}{x^2}\right)^{\frac{x^2+1}{x-1}}$

6. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases}5-\frac{|x|}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 5 & \text{si } x=0\end{cases}$

b) $g(x)=\begin{cases}x^2-1 & \text{si } x\leq 2\\ x+1 & \text{si } x>2\end{cases}$

c) $h(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x-3} & \text{si } x\neq 3\\ 6 & \text{si } x=3\end{cases}$

d) $i(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{si } x>-1\\ 3 & \text{si } x\leq -1\end{cases}$

7. Calcula k, en cada caso, de modo que las siguientes funciones sean continuas en todo $\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\begin{cases}kx-3 & \text{si } x<4\\ -x^2+10x-13 & \text{si } x\geq 4\end{cases}$

b) $g(x)=\begin{cases}\frac{2x-2}{x^2-1} & \text{si } x\neq -1\\ k & \text{si } x=-1\end{cases}$

8. Sea la función $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}+b & \text{si } x\leq -1\\ 3x^2+4 & \text{si } -1<x<1\\ -x^3+8 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

Halla el valor del parámetro b para el cual la función $f(x)$ es continua en $x=-1$ y en $x=1$.

9. Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones y clasifícalos:

a) $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-2x}$

b) $f(x)=\begin{cases}2-x & \text{si } x\leq 0\\ e^{-x} & \text{si } x>0\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}e^x & \text{si } x\leq 0\\ 1-x^2 & \text{si } 0<x<1\\ x & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

5. Los límites quedan:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - x + 6}{x^2 + 3x + 2} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 1} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x + 1}{x^2 + x + 1} = \dfrac{2}{3}$

e) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^3 + 3x^2 + 2x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x + 2)(x - 3)}{(x + 2)(x^2 + x)} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x - 3}{x^2 + x} = -\dfrac{5}{2}$

f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 4} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x - 2)(x - 3)}{(x - 2)^2} \overset{\left(\frac{k}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 3}{x - 2}$ no existe este límite

g) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} \cdot \dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x} + 1 = 2$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 - \sqrt{4 - x}}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 - \sqrt{4 - x}}{x} \cdot \dfrac{2 + \sqrt{4 - x}}{2 + \sqrt{4 - x}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{2 + \sqrt{4 - x}} = \dfrac{1}{4}$

i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}} \cdot \dfrac{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}} =$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x})}{2} = 1$

j) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 + 6x - 9}{x - 3}$ este límite no existe

k) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2 + 6x - 3}{2x^2 + 5x} \overset{\left(\frac{k}{0}\right)}{=}$ no existe este límite

l) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(2x+3)}{(x-1)(x-4)} = -\dfrac{5}{3}$

m) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} = 0$

n) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \dfrac{(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \dfrac{1}{2}$

ñ) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{2x^2 + 1}) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{2x^2 + 1}) \dfrac{(\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{2x^2 + 1})}{(\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{2x^2 + 1})} =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^2 - x - 1}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{2x^2 + 1}} = -\infty$

o) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{5x + 1}{5x - 1} \right)^{3x + 2} \overset{(1^\infty)}{=} e^{\lim\limits_{x \to +\infty} (3x + 2) \cdot \left(\frac{5x + 1}{5x - 1} - 1 \right)} = e^{6/5}$

p) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{3}{x - 1}} \overset{(1^\infty)}{=} e^{\lim\limits_{x \to 1} \frac{3}{x - 1} \cdot \left(\frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} - 1 \right)} = e^{3/2}$

q) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2} \right)^{\frac{x^2 + 1}{x - 1}} \overset{(1^\infty)}{=} e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1}{x - 1} \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2} - 1 \right)} = e^2$

6. En cada caso queda:

a) Para esta función:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 5 - \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} 5 - \frac{(-x)}{x} = 6$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 5 - \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} 5 - \frac{x}{x} = 4$$

$f(0)=5$

$f(x)$ no es continua ni por la derecha ni por la izquierda en $x=0$. Es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$

b) En este caso:

$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 - 1) = 3 = g(2)$$

$$\lim_{x \to 2^+} g(x) = \lim_{x \to 2^+} (x + 1) = 3 = g(2)$$

$g(x)$ es continua en toda la recta real.

c) En este caso:

$$\lim_{x \to 3^-} h(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 - 9}{x - 3} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 3^-} \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^-} (x + 3) = 6$$

$$\lim_{x \to 3^+} h(x) = \lim_{x \to 3^+} (x + 3) = 6$$

$h(3)=6$, por tanto $h(x)$ es continua en toda la recta real.

d) Finalmente:

$$\lim_{x \to -1^-} l(x) = \lim_{x \to -1^-} 3 = 3$$

$$\lim_{x \to -1^+} l(x) = \lim_{x \to -1^+} (2x - 1) = -3$$

$l(-1) = 3$

$l(x)$ es continua por la izquierda en $x=-1$, pero no lo es por la derecha.

Luego, $l(x)$ no es continua en $x=-1$, o bien $l(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{-1\}$

7. En cada caso queda:

a) $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} f(kx-3) = 4k-3 = f(4) \Rightarrow k = \dfrac{14}{4} = \dfrac{7}{2}$

$\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} f(-x^2+10x-13) = 11 = f(4)$

$f(4) = 11$

$f(x)$ es continua en toda la recta real para $k = \dfrac{7}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x+2}{x-2} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x+2}{x-2} = +\infty$

$g(x)$ no es continua en $x = 2$ para ningún valor de *k*.

8. La solución es:

- Veamos la continuidad en $x = -1$

Los límites son: $\lim\limits_{x \to 1^-} \left(\dfrac{1}{x^2} + b \right) = 1 + b$ $\lim\limits_{x \to 1^+} (3x^2+4) = 7$

$f(-1) = 1 + b$

$f(x)$ es continua en $x = 1$ si $1 + b = 7 \Rightarrow b = 6$.

- Veamos la continuidad en $x = 1$

Los límites son: $\lim\limits_{x \to 1^-} (3x^2+4) = 7$ $\lim\limits_{x \to 1^+} (-x^3+8) = 7$

$f(1) = 7$

Luego $f(x)$ es continua en $x = -1$ y en $x = 1$ si $b = 6$.

9. En cada caso queda:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$ es discontinua no evitable en $x=0$ y discontinua evitable en $x=2$, evitemos esta discontinuidad redefiniendo la función de este modo:

$$f(x)=\begin{cases}(x^2-4)/(x^2-2x) & si\ x\neq 2\\ 2 & si\ x=2\end{cases}$$

b) En $x=0$ la función presenta un punto de discontinuidad no evitable con salto finito, al ser:

$$\lim_{x\to 0^-}(2-x)=2 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+} e^{-x}=1$$

c) En $x=1$ la función tiene una discontinuidad no evitable con salto finito, al cumplirse:

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x^2)=0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^+} x=1$$

PÁGINA 132

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

10. Calcula $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ cuando:

a) $f(x) = \dfrac{2x+3}{4x-5}$ b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+5}$ c) $f(x) = \dfrac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1}$

11. Obtén las asíntotas verticales y oblicuas de la función $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$.

12. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le -1 \\ x+1 & \text{si } -1 < x \le 3 \\ x^2-5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ -x^2+2x+1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

13. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x < 2, \\ x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$ represéntala y estudia la continuidad en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

14. Dibuja la gráfica y escribe las ecuaciones de una función real que cumpla: sea continua en todos los puntos; sea lineal si $x < -3$, cuadrática en el intervalo $[-3, 3]$ y tienda a 0 cuando $x \to +\infty$.

15. Dada la función $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x < 0 \\ x+2a & \text{si } 0 \le x \le 2, \\ -x+b & \text{si } 2 < x \end{cases}$ calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua.

16. En la oficina central de Correos de cierto país están expuestas las tarifas del servicio de cartas, que son las siguientes:

– Cartas hasta 20 g de peso: 0,35 euros.

– Por cada 10 g o fracción de exceso de peso hay que añadir 0,05 euros más.

a) Escribe la fórmula de la función $y = f(x)$ (donde x representa el peso de cada carta e y el precio que tenemos que pagar para enviarla), hasta 50 g.

b) Representa gráficamente la función f. Indica en qué puntos de su dominio es discontinua y por qué.

17. La puntuación obtenida por un estudiante en un examen depende del tiempo que haya dedicado a su preparación (x, expresado en horas) en los siguientes términos:

$$P(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{3} & \text{si } 0 \le x \le 15 \\ \dfrac{2x}{0{,}2x+3} & \text{si } x > 15 \end{cases}$$

a) Representa gráficamente la función y estudia su continuidad.

b) ¿Cuántas horas debe dedicar a preparar dicho examen para obtener una puntuación de 7,5?

c) Justifica que la puntuación nunca puede superar los 10 puntos.

10. Los límites quedan:

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x+3}{4x-5} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2+5} = 0$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1} = -1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1} = 1$

11. Las asíntotas quedan: asíntotas verticales $x=1$ y $x=-1$, y asíntota oblicua: $y=x$.

12. Queda del siguiente modo:

a) $f(-1)=0$; $\lim\limits_{x\to-1^+}(0)=0$; $\lim\limits_{x\to-1^+}(x+1)=0$

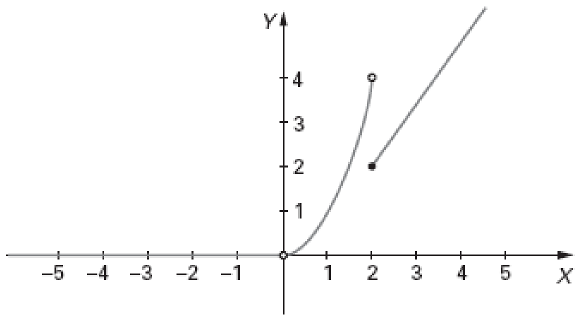
$f(3)=4$; $\lim\limits_{x\to-3^-}(x+1)=4$; $\lim\limits_{x\to-3^+}(x^2-5)=4$

$f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) $g(0)=1$; $\lim\limits_{x\to0^-}(e^x)=1$; $\lim\limits_{x\to0^+}(-x^2+2x+1)=1$

$g(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

13. Queda:

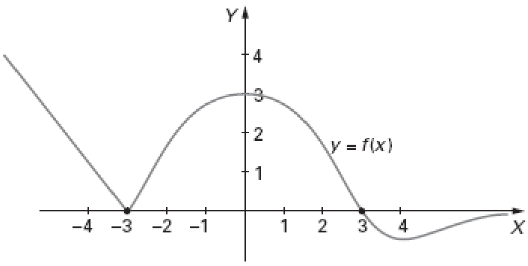


En $x=0$, la función $f(x)$ presenta una discontinuidad evitable.

En $x=1$, la función $f(x)$ es continua.

En $x=2$, la función $f(x)$ presenta una discontinuidad no evitable de salto finito.

14. Queda:



$$f(x)=\begin{cases} -x-3 & \text{si } x<-3 \\ -\dfrac{1}{3}x^2+3 & \text{si } -3\le x\le 3 \\ \dfrac{-(x-3)}{x^2+1} & \text{si } x>3 \end{cases}$$

15. La solución queda:

- $f(0)=2a$

$\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2a)$; $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{ax}=1$

$f(x)$ es continua en $x=0$ si $a=\dfrac{1}{2}$

- $f(2)=2+2a=3$

$\lim\limits_{x\to 2^+}(-x+b)=b-2$; $\lim\limits_{x\to 0^-}(x+2a)=2+1=3$

$f(x)$ es continua en $x=2$ si $b=5$

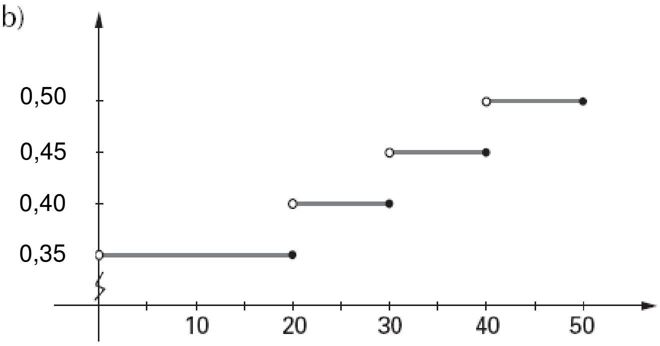
Luego $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ si $a=\dfrac{1}{2}$ y $b=5$.

16. Queda del siguiente modo:

a) La ecuación queda:

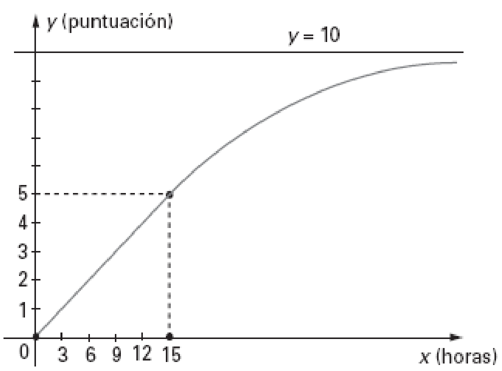
$$f(x)=\begin{cases} 0{,}35 & \text{si } 0 < x \leq 20 \\ 0{,}40 & \text{si } 20 < x \leq 30 \\ 0{,}45 & \text{si } 30 < x \leq 40 \\ 0{,}50 & \text{si } 40 < x \leq 50 \end{cases}$$

b)



c) La función es discontinua en $x=20$, $x=30$ y $x=40$. Siendo estas discontinuidades no evitables de salto finito.

17. La solución queda:



Para sacar un 7,5 necesita 45 horas.

Esta función es continua en su dominio $[0,+\infty)$ y presenta una asíntota horizontal en 10.

Unidad 6 – Derivadas

PÁGINA 135

cuestiones iniciales

1. Calcula los siguientes límites:

a) $f(x) = 3x^2 + 5$; $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$

b) $g(x) = \sqrt{3x+1}$; $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$

2. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2, -3)$ y su pendiente vale $-1/5$. Halla la perpendicular a esta recta en el punto A.

3. Calcula la tasa de variación media en los intervalos $[0, 2]$ y $[2, 4]$ para cada una de las siguientes funciones:

a) $f_1(x) = 3x$ b) $f_2(x) = 3x + 2$ c) $f_3(x) = x^3$ d) $f_4(x) = 3^x$

4. Dada la función $f(x) = |2x - 4|$, calcula:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \qquad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

SOLUCIONES

1. La solución en cada caso es:

a) $$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(2+h)^2 + 5 - 17}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{12h + 3h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (12 + 3h) = 12$$

b) $$\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{3(x+h)+1} - \sqrt{3x+1}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h(\sqrt{3x+3h+1} + \sqrt{3x+1})} = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$$

2. Queda:

- La recta debe tener una forma: $y = -\dfrac{1}{5}x + b$

Como ha de pasar por $A(2, -3) \Rightarrow -3 = -\dfrac{2}{5} + b \Rightarrow b = -\dfrac{13}{5}$

La ecuación de la recta es: $y = -\dfrac{1}{5}x - \dfrac{13}{5}$

- La ecuación de la perpendicular es: $y = 5x + b$

Por pasar por $A(2,-3) \Rightarrow -3 = 10 + b \Rightarrow b = -13$

La recta pedida tiene por ecuación $y = 5x - 13$

3. Queda:

a) $t_{vm}\,[0,\,2] = \dfrac{f_1(2) - f_1(0)}{2} = 3$

$t_{vm}\,[2,\,4] = \dfrac{f_1(4) - f_1(2)}{2} = \dfrac{12 - 6}{2} = 3$

b) $t_{vm}\,[0,\,2] = \dfrac{f_2(2) - f_2(0)}{2} = \dfrac{8 - 2}{2} = 3$

$t_{vm}\,[2,\,4] = \dfrac{f_2(4) - f_2(2)}{2} = \dfrac{14 - 8}{2} = 3$

c) $t_{vm}\,[0,\,2] = \dfrac{f_3(2) - f_3(0)}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$

$t_{vm}\,[2,\,4] = \dfrac{f_3(4) - f_3(2)}{2} = \dfrac{64 - 8}{2} = 28$

d) $t_{vm}\,[0,\,2] = \dfrac{f_4(2) - f_4(0)}{2} = \dfrac{3^2 - 3^0}{2} = 4$

$t_{vm}\,[2,\,4] = \dfrac{f_4(4) - f_4(2)}{2} = \dfrac{3^4 - 3^2}{2} = 36$

4. Queda:

$$f(x) = |2x - 4| = 0 \begin{cases} 2x - 4 \ si \ x \geq 2 \\ -2x + 4 \ si \ x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(2+h) - 4 - 0}{h} = 2$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-2(2+h) + 4 - 0}{h} = -2$$

PÁGINA 155

ACTIVIDADES

- Busca analogías en el archivo de tu experiencia que te sean útiles en la resolución de los siguientes problemas:

1. **El manantial oculto.** En una antigua ciudad amurallada, de forma rectangular, existía en un punto intramuros un manantial que se encontraba a 2 100 m de la esquina superior izquierda, a 600 m de la esquina superior derecha y a 1 800 m de la esquina inferior derecha. El manantial actualmente ha desaparecido. ¿A qué distancia se encontraría de la esquina inferior izquierda?

2. **Número oculto.** La siguiente expresión esconde un número conocido. ¿Sabes cuál es?

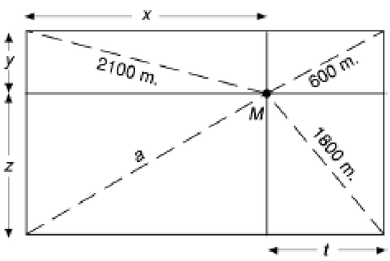
$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$$

3. **Monedas.** ¿Es posible colocar 18 monedas en 9 filas de manera que cada fila contenga 4 monedas?

4. **Tantos por ciento.** Parte de los 8 000 habitantes de un pueblo se va de vacaciones en verano. De los que quedan, al 63,636363…% les gusta la música y al 22,297297297…% les gusta usar pantalones vaqueros. ¿Cuántos habitantes se fueron de vacaciones en verano?

SOLUCIONES

1. La solución es:



Denotando con *x*, *y*, *z*, *t* los lados de los distintos triángulos rectángulos que se formen y con a la distancia que queremos hallar, al aplicar el teorema de Pitágoras, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=2100^2 \\ y^2+t^2=600^2 \\ z^2+t^2=1800^2 \\ x^2+z^2=a^2 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} x^2+y^2=2100^2 \\ \underline{-y^2-t^2=-600^2} \\ x^2-t^2=2100^2-600^2 \\ \underline{z^2+t^2=1800^2\qquad\quad} \\ x^2+z^2=2100^2-600^2+1800^2 \end{array}$$

Entre esta última igualada obtenida y la última igualdad del sistema, obtenemos:

$$a^2=2100^2-600^2+1800^2 \Rightarrow a=2700\ m$$

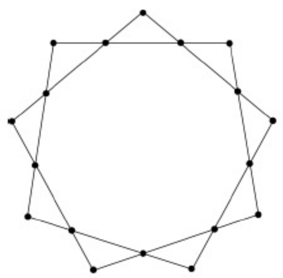
2. Queda:

Llamando *x* a la expresión dada, obtenemos:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}$$

$$\Rightarrow x - 1 = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$, luego $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi =$ numero de oro.

3. La solución queda:



En la figura puedes ver 18 monedas colocadas en 9 filas y con 4 monedas

4. La solución es:

Sabemos que $63,6363... = \frac{6\,300}{99} = \frac{700}{11}$ y que $22,297297... = \frac{22\,275}{99} = \frac{2\,475}{11} = \frac{825}{37}$

Al $63,66\,\%$ de los que quedan les gusta la música, es decir, al $\frac{700}{11}\%$ les gusta la música.

Al $22,297\,\%$ de los que queden les gusta usar pantalones vaqueros, es decir, al $\frac{825}{37}\%$ les gusta usar pantalones vaqueros.

Les gusta la música: $\frac{700}{11} \cdot x = \frac{7}{11} \cdot x$

Les gusta usar vaqueros: $\frac{85}{3\,700} \cdot x = \frac{33}{148} \cdot x$

Por tanto, x ha de ser múltiplo de 11 y 148.

Puede ser $x = 1628; x = 3\,256; x = 4\,884; x = 6\,512$.

Se fueron de vacaciones: 6 372 si $x = 1628; 4\,744$ *si* $x = 3\,256$; así sucesivamente.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Halla la tasa de variación media para las siguientes funciones en cada uno de los intervalos: [–2, 2]; [0, 3]; [4, 5].

   a) $f(x) = 6$ b) $g(x) = -2x + 5$ c) $h(x) = x^2 + 4$

2. Calcula la tasa de variación media para la función $f(x) = 3x^3 - 2$, que es creciente en todo su dominio, en los intervalos [–1, 2], [0, 3] y [2, 5]. ¿En qué intervalo crece más rápidamente la función?

3. Se sabe que el crecimiento de bacterias en cierto cultivo preparado en un laboratorio viene dado por:

$$N(t) = \frac{1000t + 50}{100 + t^2}$$

   siendo t el tiempo en horas y N el número de bacterias al cabo de t horas.

   a) Halla la variación media del número de bacterias entre los instantes $t = 2$ horas y $t = 5$ horas.

   b) Halla la velocidad de crecimiento de esta población de bacterias y al cabo de 2,5 horas.

4. El volumen de ventas de ordenadores en un gran centro comercial y en una determinada época del año, en función del tiempo en días, viene dado por $y = -2t^2 + 80t + 760$.

   a) Halla la variación instantánea al cabo de 2, 10 y 28 días.

   b) ¿En qué momentos aumenta el número de ventas y en cuáles disminuye?

5. Calcula, mediante la definición, las derivadas siguientes en los puntos que se indican:

   a) $f(x) = x^2 - 3$; $f'(1)$

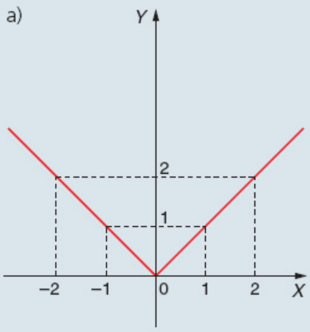
   b) $f(x) = \dfrac{-2}{x-1}$; $Df(2)$

   c) $f(x) = 10$; $f'(0)$

   d) $f(x) = \sqrt{x-3}$; $Df(7)$

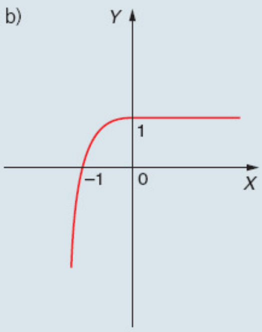
6. Haciendo uso del concepto de derivada lateral en un punto, estudia la derivabilidad de las siguientes funciones en $x = 0$.

a)



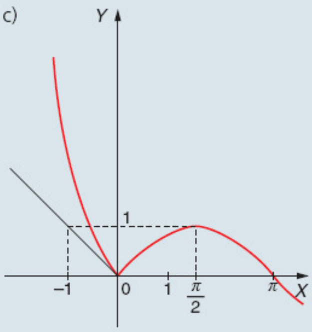
$f(x) = |x|$

b)



$g(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

c)



$h(x) = \begin{cases} -x^2 - x & \text{si } x \leq 0 \\ \text{sen}\, x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

SOLUCIONES

1. La solución en cada caso es:

a) $t_{vm}\,[-2,\,2]=0$; $t_{vm}\,[0,\,3]=0$; $t_{vm}\,[4,\,5]=0$

b) $t_{vm}\,[-2,\,2]=-2$; $t_{vm}\,[0,\,3]=-2$; $t_{vm}\,[4,\,5]=-2$

c) $t_{vm}\,[-2,\,2]=0$; $t_{vm}\,[0,\,3]=3$; $t_{vm}\,[4,\,5]=9$

2. Queda:

$t_{vm}\,[-1,\,2]=9$; $t_{vm}\,[0,\,3]=27$; $t_{vm}\,[2,\,5]=117$

Crece más rápidamente en el intervalo $[2,5]$.

3. La solución es:

a) $V_m = t_{vm}\,[2,5] = \dfrac{N(5)-N(2)}{3} = 6{,}89$

b) $V_i = t_{vi}\,(2{,}5) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{N(2{,}5+h)-N(2{,}5)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{2550+1000h}{100+(2{,}5+h)^2}-24}{h} = 8{,}28$

4. En cada caso:

$V_i\,(2)=72$
$V_i\,(10)=40$
$V_i\,(28)=-32$

Aumenta los 20 primeros días y después disminuye.

5. Las derivadas quedan:

a) $f'(1) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2$

b) $f'(2) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\dfrac{-2}{x-1}+2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x-4}{(x-1)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2}{x-1} = 2$

c) $f'(0) = \lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \dfrac{10 - 10}{x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{0}{x} = \lim_{x \to 0} 0 = 0$

d) $f'(7) = \lim_{x \to 7} \dfrac{f(x) - f(7)}{x - 7} = \lim_{x \to 7} \dfrac{\sqrt{x-3} - 2}{x - 7} = \lim_{x \to 7} \dfrac{(\sqrt{x-3} - 2)(\sqrt{x-3} + 2)}{(x-7)(\sqrt{x-3} + 2)} =$

$= \lim_{x \to 7} \dfrac{1}{\sqrt{x-3} + 2} = \dfrac{1}{4}$

6. La solución es:

a) $f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{h-0}{h} = 1$

$f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{-h-0}{h} = 1$

$f(x)$ no es derivable en $x=0$, pues las derivadas laterales son distintas.

b) $g'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{1-1}{h} = 0$

$g'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \dfrac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{-h^2 + 1 - 1}{h} = \lim_{h \to 0^-} -h = 0$

$g(x)$ es derivable en $x=0$.

c) $h'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{h(0+h) - h(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{sen\, h - 0}{h} = 1$

$h'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \dfrac{h(0+h) - h(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{-h^2 - h}{h} = \lim_{h \to 0^-} \dfrac{-h(h+1)}{h} = -1$

La función $h'(x)$ no es derivable en $x=0$.

PÁGINA 161

7. Representa gráficamente la función $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\le -1\\ x+1 & \text{si } -1<x\le 3\\ x^2-5 & \text{si } x>3\end{cases}$

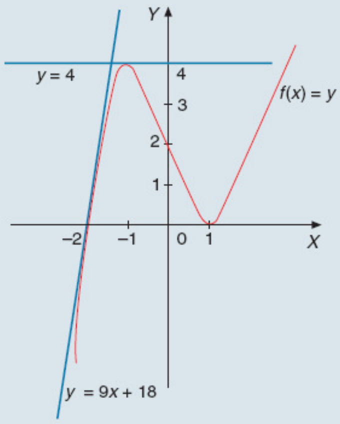
   a) ¿En qué puntos no es continua?
   b) ¿En qué puntos no tiene derivada?

8. Sea la función: $f(x)=\begin{cases}x^3-12x+1 & \text{si } 0\le x\le 1\\ 20x^2+bx+c & \text{si } 1<x\le 2\end{cases}$. Halla b y c para que la función sea continua y derivable en (0, 2).

9. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangentes a las funciones en los puntos que se indican:

   a) $f(x) = -(x^2-4)(x-4)$ en $x = 0$
   b) $f(x)=\dfrac{4}{x}$ en $x = 2$

10. Sea la curva de ecuación $y = -x^3 + 26x$. Halla las ecuaciones de sus rectas tangentes que sean paralelas a la recta de ecuación $y = -x$.



11. En la gráfica adjunta está representada la función $y = f(x)$. Calcula, de forma razonada:

   a) $D\,f(-2)$
   b) $D\,f(-1)$
   c) $D\,f(1)$

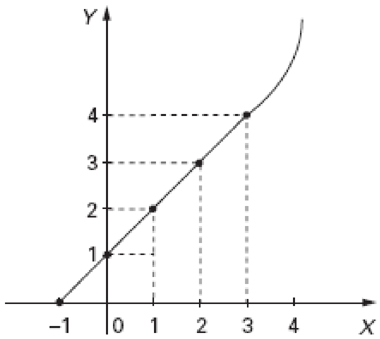
12. Halla la función derivada de cada una de las siguientes funciones y representa, en un mismo diagrama, la función y su función derivada:

   a) $f(x) = -2$
   b) $g(x) = 2x^2 - 4x$
   c) $h(x) = 12x - x^3 - 8$
   d) $t(x)=\dfrac{2x-6}{3}$

13. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

   a) $D\left[\dfrac{2}{(x-1)^3}\right]$
   b) $D\left[2^{5x^2}\cdot x^{10}\right]$
   c) $D\left[(3^{2x}-5)^3\right]$
   d) $D\left[\ln(7x-3)\right]$
   e) $D\left[\ln\dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}\right]$
   f) $D\left[\ln(x^2-3)^{-5}\right]$
   g) $D\left[\dfrac{\cos x}{1-\cos x}\right]$
   h) $D\left[\operatorname{tg} x^2\right]$
   i) $D\left[\operatorname{arcsen} x^2\right]$
   j) $D\left[\dfrac{x}{\sqrt{x}}\right]$
   k) $D\left[\dfrac{2}{4^{2x}}\right]$
   l) $D\left[13^{x^2}+13^x+13\right]$
   m) $D\left[\ln(2^x+1)\right]$
   n) $D\left[\ln(x\cdot\sqrt{x})\right]$
   ñ) $D\left[\ln\left(\dfrac{e^x}{1+e^x}\right)\right]$
   o) $D\left[(\operatorname{sen} x+\cos x)^2\right]$
   p) $D\left[\cos^2(x+2)\right]$
   q) $D\left[\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\right]$
   r) $D\left[\sqrt[4]{1-4x^2}\right]$
   s) $D\left[\dfrac{e^{x^2}}{3}\right]$
   t) $D\left[\sqrt{1+7e^x}\right]$
   u) $D\left[\ln(1-2x)^5\right]$
   v) $D\left[\ln^2 x\right]$
   w) $D[12\cdot\ln(2x+4)]$
   x) $D\left[\ln(\cos 2x)\right]$
   y) $D\left[e^{\operatorname{tg} x}\right]$
   z) $D\left[\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}\right]$

7. La representación queda:



Estudiamos la continuidad en $x=-1$ y en $x=3$.

$$f(-1)=0 \quad ; \quad \lim_{x\to -1^-} 0 = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to -1^+} (x+1)=0$$

$$f(3)=4 \quad ; \quad \lim_{x\to 3^-} (x+1)=4 \quad ; \quad \lim_{x\to 3^+} (x^2-5)=4$$

Luego $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\begin{cases} 0 \ si \ x<-1 \\ 1 \ si \ -1<x<3 \\ 2 \ si \ x>3 \end{cases} \qquad \begin{matrix} f'(-1^-)=0 \\ f'(-1^+)=1 \end{matrix}$$

Luego $f(x)$ no es derivable en $x=-1$, pues sus derivadas laterales no coinciden.
Por otro lado $f'(3^-)=1$; $f'(3^+)=6$, por tanto $f(x)$ tampoco es derivable en $x=3$.

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}-\{-1,3\}$.

8. Las derivadas quedan:

- $f(1)=-10$ y los límites son: $\lim\limits_{h\to 1^-} (x^3-12x+1)=-10$ y $\lim\limits_{h\to 1^+} (20x^2+bx+c)=20+b+c$

$f(x)$ es continua en (0, 2) siempre que $b+c=-30$.

- $f'(x)=\begin{cases} 3x^2-12x & si \ 0<x<1 \\ 40x+b & si \ 1<x<2 \end{cases}$

Las derivadas laterales son: $f'(1^-)=-9$; $f'(1^+)=40+b$
$f(x)$ es derivable en (0, 2) si $40+b=-9$, es decir, si $b=-49$.

Por tanto, es continua y derivable en (0, 2) si $b=-49$ y $c=19$

9. En cada caso:

   a) La ecuación de la recta tangente buscada es $y=4x-16$

   b) En este caso la ecuación de la recta tangente es $y=-x+4$

10. Queda:
   $y'=-3x^2+26=-1 \Rightarrow 3x^2=27 \Rightarrow x=\pm 3$ (puntos en los que la pendiente es -1).
   Los puntos de tangencia son: $P(3,51)$ y $Q(-3,-51)$

   Las rectas tangentes pedidas son:

$$y-51=-1(x-3) \Rightarrow x+y-54=0$$
$$y+51=-1(x+3) \Rightarrow x+y+54=0$$

11. En cada caso:

   - $D[f(-2)]=9$, que es la pendiente de la recta tangente a la función en $x=-2$. Razonando de forma análoga.
   - $D[f(-1)]=0$
   - $D[f(1)]=0$

12. La solución es:

   a) $f'(x)=0$

   b) $g'(x)=4x-4$

   c) $h'(x)=12-3x^2$

   d) $t'(x)=\dfrac{2}{3}$

   Fácilmente se representan estas funciones y sus funciones derivadas.

13. Las derivadas son:

   a) $D\left[\dfrac{2}{(x-1)^3}\right]=\dfrac{-6}{(x-1)^4}$

   b) $D\left[2^{5x^2}\cdot x^{10}\right]=10x^{11}\cdot 2^{5x^2}\cdot\ln 2\cdot 10x^9\cdot 2^{5x^2}$

   c) $D\left[\left(3^{2x}-5\right)^3\right]=6\cdot\left(3^{2x}-5\right)^2\cdot 3^{2x}\cdot\ln 3$

   d) $D\left[\ln(7x-3)\right]=\dfrac{7}{7x-3}$

e) $D\left[\ln\frac{1}{\sqrt{2x+3}}\right]=\frac{-1}{2x+3}$

f) $D\left[\ln\left(x^2-3\right)^{-5}\right]=\frac{-10x}{x^2-3}$

g) $D\left[\frac{\cos x}{1-\cos x}\right]=\frac{-\text{sen}x}{(1-\cos x)^2}$

h) $D\left[\text{tg}x^2\right]=\frac{2x}{\cos^2 x^2}$

i) $D\left[\text{arcsen}x^2\right]=\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

j) $D\left[\frac{x}{\sqrt{x}}\right]=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

k) $D\left[\frac{2}{4^{2x}}\right]=-\ln 4\cdot 4^{1-2x}$

l) $D\left[13^{x^2}+13^x+13\right]=\left(2x\cdot 13^{x^2}+13^x\right)\cdot\ln 13$

m) $D\left[\ln(2x+1)\right]=\frac{2}{2x+1}$

n) $D\left[\ln\left(x\cdot\sqrt{x}\right)\right]=\frac{3}{2x}$

ñ) $D\left[\ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)\right]=\frac{1}{1+e^x}$

o) $D\left[(\text{sen}x+\cos x)^2\right]=2\left(\cos^2 x-\text{sen}^2 x\right)$

p) $D\left[\cos^2(x+2)\right]=-2\cdot\text{sen}(x+2)\cdot\cos(x+2)$

q) $D\left[\text{arctg}\sqrt{x-1}\right]=\frac{1}{2x\sqrt{x-1}}$

r) $D\left[\sqrt[4]{1-4x^2}\right]=\frac{-2x}{\sqrt[4]{\left(1-4x^2\right)^3}}$

s) $D\left[\frac{e^{x^2}}{3}\right]=\frac{2x}{3}e^{x^2}$

t) $D\left[\sqrt{1+7e^x}\right]=\frac{7e^x}{2\sqrt{1+7e^x}}$

u) $D\left[\ln(1-2x)^5\right]=\frac{-10}{1-2x}$

v) $D\left[\ln^2 x\right]=2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}$

w) $D\left[12\cdot\ln(2x+4)\right]=\frac{12}{x+2}$

x) $D\left[\ln(\cos 2x)\right]=-2\text{tg}2x$

y) $D\left[e^{\text{tg}x}\right]=e^{\text{tg}x}\left(1+\text{tg}^2 x\right)$

z) $D\left[\text{arctg}\frac{x}{2}\right]=\frac{2}{4+x^2}$

PÁGINA 162

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

14. Calcula b para que la tasa de variación media de la función $f(x) = \ln(x + b)$ en el intervalo $[0, 2]$ valga $\ln 2$. Calcula a continuación la tasa de variación instantánea en los extremos de dicho intervalo.

15. En un laboratorio depositamos en un producto una colonia inicial de 4 000 hongos. La función que nos da el número de hongos en la colonia en función del tiempo que transcurre, en días, es $f(t) = 4\,000 \cdot 3^t$. Calcula:

a) El número de hongos existentes en la colonia al cabo de 5 días.

b) La tasa de variación instantánea o velocidad instantánea de crecimiento de la colonia al cabo de 5 días.

c) ¿En qué momento la velocidad instantánea de crecimiento es de 9 610 660,3 hongos/día?

16. Dada la función $f(x) = 1 - x + x^2$:

a) Mediante límites, calcula $f'(2)$.

b) ¿Qué significado tiene $f'(2)$? Deduce el punto de corte de la recta tangente a la curva en $x = 2$, con el eje OX.

17. Halla la ecuación de la recta tangente a $y = \dfrac{x+1}{x^2}$ en $x = 1$.

18. Considérese la curva de ecuación $y = kx^3 + 6x^2 - kx - 18$.

a) ¿Cuánto debe valer k si las tangentes en los puntos $A = (1, y(1))$ y $B = (-2, y(-2))$ son paralelas?

b) Determina las ecuaciones de ambas tangentes.

19. Se ha investigado el tiempo (T, en minutos) que se tarda en realizar una prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento (x, en días):

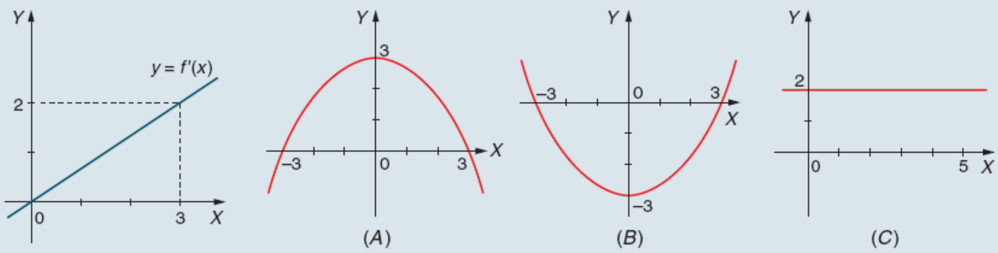
$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{300}{x+30} & \text{si } 0 \le x \le 30 \\[2mm] \dfrac{1125}{(x-5)(x-15)} + 2 & \text{si } x > 30 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad y derivabilidad de $T(x)$.

b) ¿Algún deportista tardará más de 10 minutos en finalizar la prueba?

20. Calcula el valor de m para que la derivada de la función $y = \dfrac{mx^2+1}{2x+m}$ en $x = \dfrac{1}{2}$ valga 1.

21. La primera gráfica corresponde a la función derivada de $f(x)$.



a) Obtén la expresión analítica de $y = f'(x)$.

b) Indica cuál de las gráficas, (A), (B) o (C) corresponde a la función $f(x)$. Justifica la respuesta.

14. La solución es:

$$t_{vm}[0,2]=\frac{f(2)-f(0)}{2}=\frac{\ln(2+b)-\ln(b)}{2}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+b}{b}\right)$$

Resolviendo la ecuación $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+b}{b}\right)=\ln 2\Rightarrow b=\frac{2}{3}$

$t_{vi}(0)=\frac{3}{2}$ $\qquad$ $t_{vi}(2)=\frac{3}{8}$

15. Las soluciones en cada caso son:

a) $f(5)=4\,000\cdot 3^5=972\,000$ hongos.

b) $v_i[5]=f'(5)$

$f'(t)=4\,000\cdot 3^t\cdot\ln 3$

$v_i[5]=f'(5)=4\,000\cdot 3^t\cdot\ln 3=1067\,851,4$ Hongos/día

c) $v_i(t)=f'(t)$

$4\,000\cdot 3^t\cdot\ln 3=9\,610\,660,3\Rightarrow 3^t=2187\Rightarrow t=7,6$

Al cabo de 8 días.

16. Las soluciones en cada caso son:

a) $f'(2)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{1-(2+h)+(2+h)^2-3}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{h^2+3h}{h}=3$

b) $f'(2)$ es el valor de la pendiente de la recta tangente a la grafica de la función en el punto de abscisa 2. Recta tangente en $P(2,3): y-3=3(x-2)\Rightarrow 3x-y-3=0$. el punto de corte de esta recta con OX es (1, 0).

17. La solución es:

El punto donde calcularlo es: $P[1,y(1)]\Rightarrow P\left(1,\frac{1}{2}\right)$

La pendiente en ese punto es la derivada: $m=y'(1)$ quedando: $y'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\Rightarrow m=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$

La ecuación de la recta tangente es: $y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(x-1)\Rightarrow x+2y-2=0$

18. La solución es:

a) $\left.\begin{array}{r} A[1,\ y(1)] \Rightarrow A(1,\ -12) \\ B[-2,\ y(-2)] \Rightarrow B(-2,\ -6k+6) \end{array}\right\}$

$y'(x) = 3kx^2 + 12x - k$

La pendiente de la recta tangente en A es: $m_A = y'(1) \Rightarrow m_A = 3k + 12 - k = 2k + 12$

La pendiente de la recta tangente en B es: $m_B = y'(-2) \Rightarrow m_B = 12k - 24 - k = 11k - 24$

Ambas rectas serán paralelas si $m_A = m_B$: $2k + 12 = 11k - 24 \Rightarrow k = 4$

b) Recta tangente en $A(1, -12)$ $m_A = 20$ y la recta queda: $y + 12 = 20(x-1) \Rightarrow 20x - y - 32 = 0$

Recta tangente en $B(-2, -18)$ $m_B = 20$ y la recta queda: $y + 18 = 20(x+2) \Rightarrow 20x - y + 22 = 0$

19. Queda:

a) Estudiamos la continuidad en $x = 30$:

$$T(30) = 5 \ ; \quad \lim_{x \to 30^+} \left[\frac{1\,125}{(x-5)(x-15)} + 2 \right] = 5 \ ;$$

$$\lim_{x \to 30^-} \left(\frac{300}{x+30} \right) = 5$$

$T(x)$ es continua en $[0, -\infty]$

Veamos su derivabilidad:

$$T'(x) = \begin{cases} \dfrac{-300}{(x+30)^2} & \text{si } 0 < x < 30; \ T'(30^-) = \dfrac{-1}{12} \\ \dfrac{-1\,125\,(2x-20)}{(x^2-20x+75)^2} & \text{si } x > 30; \ T'(30^+) = \dfrac{-8}{25} \end{cases}$$

$T(x)$ no es derivable en $x = 30$

Es derivable en $[0, +\infty) - \{30\}$

b) Ningún deportista tarda más de 10 minutos.

20. Queda:

$$y'(x) = \frac{2mx^2 + 2m^2x - 2}{(2x + m)^2}$$

$$y'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{(2m/4) + (2m^2/2) - 2}{(1 + m)^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2m^2 + m - 4}{2m^2 + 4m + 2} = +1 \Rightarrow m = -2$$

21. La solución es:

a) $y = f'(x) = \frac{2x}{3}$

b) La grafica B corresponde a la función: $y = f(x) = \frac{x^2}{3} - 3$

Unidad 7 – Aplicaciones de las derivadas

PÁGINA 165

cuestiones iniciales

1. En una noche oscura y lluviosa, la temperatura T (en °C) varió con el tiempo t (en horas) según la función:

$$T(t) = t^2 - 9t + 8, \quad 0 \le t \le 12$$

a) ¿Qué temperatura había a las 2 de la mañana?

b) ¿Cuál fue la temperatura máxima? ¿A qué hora se produjo?

c) ¿A qué hora hubo una temperatura de cero grados?

d) ¿Cuál fue el intervalo de variación de la temperatura desde las 0:00 h a las 12:00 h?

e) Dibuja la gráfica de la función en el intervalo [0, 12].

2. Expresa, en función de la longitud de la base, el área de un rectángulo cuyo perímetro vale 20. ¿Para qué valor de la base el área es máxima?

3. Dibuja una gráfica de una función que se ajuste a las siguientes características:

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{-3, 6\}$; Im $f = [-3, +\infty)$

b) Mínimo relativo en el punto $(1, -3)$ y en el punto $(-4, 1)$; máximo relativo en el punto $(3, 2)$.

SOLUCIONES

1. En cada caso:

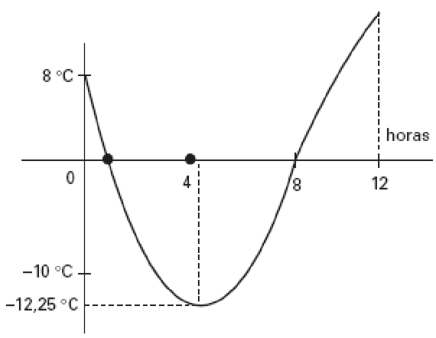
a) A las 2 había una temperatura de $-6\,C^{\underline{o}}$.

b) La temperatura máxima fue de $44\,C^{\underline{o}}$ y se produjo en las 12 horas.

c) Hubo $0\,C^{\underline{o}}$ a las 1 horas y a las 8 horas.

d) Bajo desde $8\,C^{\underline{o}}$ a las 0 horas hasta $-12{,}25\,C^{\underline{o}}$ a las 4, 5 horas hasta $44\,C^{\underline{o}}$ a las 12 horas.

e)



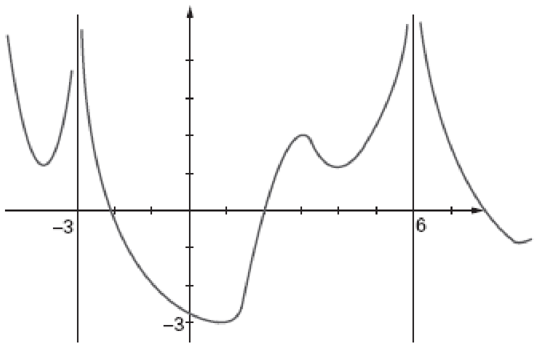
2. Llamando *x*, *y* a las longitudes de la base y de la altura del rectángulo obtenemos:

   $2x + 2y = 20 \Rightarrow x + y = 10$

   $A = x \cdot y = x(10 - x) = 10x - x^2$

   El área es máxima para $x = 5$ unidades.

3. La gráfica queda:



PÁGINA 177

ACTIVIDADES

■ Resuelve los siguientes problemas utilizando la estrategia de marcha atrás:

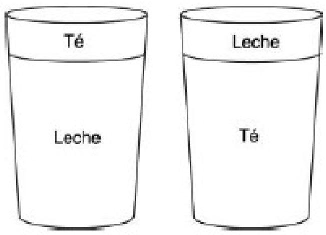
1. **Leche y té.** Un par de amigos se junta a merendar y uno de ellos pide un vaso de leche y el otro, un vaso de té. Deciden hacer mezclas del siguiente modo: toman una cucharada de leche y la echan en el té; después toman una cucharada del té donde pusieron una cucharada de leche y la echan en la leche. ¿Habrá más leche en el té o más té en la leche?

2. **Juego para dos.** Dos amigas dicen, alternativamente, un número natural del 1 al 10. La primera dice un número y la segunda dice otro, sumándole a este el que dijo la anterior, y así sucesivamente. Gana la partida la primera jugadora que consiga llegar a 100. Encuentra la estrategia ganadora para la primera jugadora y para la segunda.

3. **La sucesión de Fibonacci y las abejas.** Las abejas macho (zánganos) nacen de huevos no fecundados, es decir, sólo tienen madre. Las abejas hembra (obreras) nacen de huevos fecundados, es decir, tienen madre y padre. ¿Cuántos antecesores tiene un zángano en la décima generación anterior a él? ¿Cuántos antecesores, en total, tiene un zángano en la vigésima generación anterior a él?, y de estos, ¿cuántos son machos y cuántas son hembras? ¿En qué generación anterior a este zángano tiene 17 711 antecesores?

SOLUCIONES

1. La solución queda:



Como comenzamos con dos vasos llenos el uno de té y el otro de leche, al final la leche que hay en el té es la misma cantidad que el té que hay en la leche; como se puede ver en el siguiente dibujo.

2.Comenzando el juego desde el final, observamos que la 1ª jugadora (G) ganara siempre y cuando deje a la 2ª jugadora (P) con 89 en la penúltima jugada. Para ello, simulamos una partida.

$$1.^{a}\text{ jugada}\begin{cases}\text{G dice 2}\\\text{P lo que sea de 1 a 10}\end{cases}$$

$$2.^{a}\text{ jugada}\begin{cases}\text{G, el número necesario para sumar 12 o 23}\\\text{P, el número que sea de 1 a 10}\end{cases}$$

$$3.^{a}\text{ jugada}\begin{cases}\text{G, el número necesario para sumar 23 o 34}\\\text{P, el número que sea de 1 a 10}\end{cases}$$

...

Así sucesivamente G siempre tiene que decir el número necesario para sumar un múltiplo de 11 más 1: 12; 23; 34; 45; 56; 67; 78; 89.

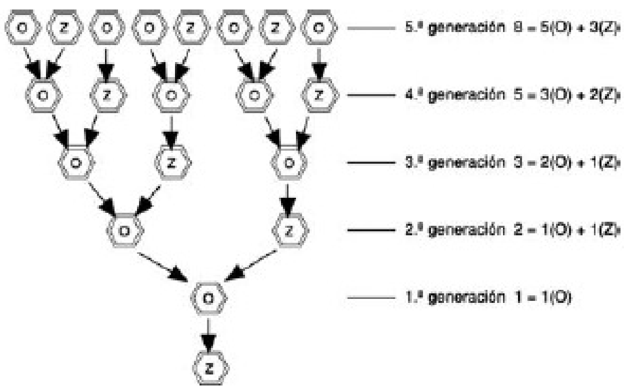
Penúltima jugada $\begin{cases} \text{G, dice el número necesario para sumar 89} \\ \text{P, el número que sea de 1 a 10} \end{cases}$

Última jugada {G dice un número de forma que obtiene 100}

Por lo tanto, la estrategia ganadora para el primer jugador es en la 1ª jugada decir cualquier número del 1 al 10 y en la siguiente jugada, a la vista de la suma que haya obtenido el 2º jugador, el 1er jugador debe decir un numero de modo que deje la suma en un múltiplo de 11 más 1, y así sucesivamente en las siguientes jugadas, hasta que en la penúltima deje al 2º jugador como resultado de la suma 89, de esta forma gana la partida.

La estrategia ganadora para el 2º jugador es la misma: ir diciendo números del 1 al 10 que dejen como resultado de la suma al 1er jugador un número que sea múltiplo de 11 más 1, así en todas las jugadas; en la penúltima debe dejar al 1er jugador como resultado de la suma 89 y de esta forma ganara la partida.

3. En el siguiente diagrama vemos la genealogía de las abejas. Designamos con Z a los zánganos y con O a las obreras.



Obtenemos la sucesión: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,… que es la sucesión de Fibonacci.

- En la décima generación anterior a él un zángano tiene 89 antecesores, de los cuales 34 son machos y 5 son hembras.

Generación	1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª	8.ª	9.ª	10.ª
Antecesores	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
Antecesores machos		1	1	2	3	5	8	13	21	34
Antecesores hembras	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Continuando las sucesiones, obtenemos:

- En la vigésima generación anterior a él tiene 10 946 antecesores, de los cuales 4 181 son machos y 6 765 son hembras.

En la vigésima primera generación anterior a él tiene 17 711 antecesores.

PÁGINA 182

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Estudia la monotonía de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 4x - x^2$ c) $f(x) = \frac{2}{x}$ e) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ g) $f(x) = x \cdot \ln x$

b) $f(x) = 2^{-x}$ d) $f(x) = e^{3x}$ f) $f(x) = \frac{x-3}{x+3}$ h) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

2. Estudia la monotonía de las siguientes funciones definidas a trozos:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \le 1 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si } 1 < x < 3 \\ x - 3 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x \le 0 \\ 1/x & \text{si } 0 < x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

3. En 1980 se fundó una asociación ecologista. Se sabe que el número de sus miembros ha variado con los años de acuerdo con la función: $N(x) = 50(2x^3 - 15x^2 + 36x + 2)$.

a) ¿Cuántos fueron los socios fundadores?

b) ¿En qué períodos de tiempo aumenta el número de sus socios?

4. Halla los extremos relativos de las siguientes funciones:

a) $y = -x^2 + 6x - 5$ c) $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 12$ e) $y = \frac{2}{1+x^2}$

b) $y = x \cdot \ln x$ d) $y = \frac{x}{e^x}$ f) $y = \frac{x^2+1}{x}$

5. Halla el valor de a para que la función $f(x) = x^2 - 6x + a$ tenga un mínimo de valor -1.

6. Halla b y c para que la curva $y = -x^2 + bx + c$ tenga un máximo relativo en el punto $(0, 4)$.

7. Halla a y b para que la función $f(x) = a \ln x + bx^2 + x$ tenga extremos en los puntos $x = 1$ y $x = 2$. Para estos valores de a y b, ¿qué tipo de extremos tiene la función en 1 y en 2?

8. El dueño de un manantial de agua llega a la conclusión de que, si el precio al que vende la caja de 10 botellas es de x euros, sus beneficios vendrán dados por la fórmula $B(x) = 10x - x^2 - 21$, en cientos de euros por día.

Representa la función precio-beneficio e indica cuál será el precio de la botella para obtener el beneficio máximo.

9. En su modelo para costes de almacenamiento y transporte de materiales para un proceso de manufactura, una empresa obtiene la siguiente función de coste:

$$C(x) = 100\left(100 + 9x + \frac{144}{x}\right)$$

donde $C(x)$ es el coste total (en euros) de almacenamiento y transporte (durante tres meses) de x toneladas de material. ¿Qué cantidades de material hacen que el coste sea mínimo?

SOLUCIONES

1. La solución queda:

   Hallamos la primera derivada, estudiamos su signo y obtenemos:

   a) La función es monótona creciente en $(-\infty, 2)$ y monótona decreciente en $(2, +\infty)$.
   b) La función es monótona decreciente para cualquier número real.
   c) La función es monótona decreciente para cualquier número real.
   d) La función es monótona creciente para cualquier número real.
   e) La función es monótona creciente en $(-\infty, 0)$ U $(2, +\infty)$ y monótona decreciente en (0, 2).
   f) La función es monótona creciente para cualquier número real.
   g) La función es monótona decreciente en (0, 1/e) y monótona creciente en $(1/e, +\infty)$.
   h) La función es monótona decreciente en $(-\infty, -3)$ y monótona creciente en $(3, +\infty)$.

2. La solución queda:

   a) $f(x)$ es estrictamente decreciente en $(-\infty,0)\cup(2,3)$

      $f(x)$ es estrictamente creciente en $(0,1)\cup(1,2)\cup(3,+\infty)$

   b) $g(x)$ es estrictamente creciente en $(-1,0)\cup(1,+\infty)$

      $g(x)$ es estrictamente decreciente en $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

3. La solución es:

   a) Tomando 1980 como año 0 es decir $x=0\Rightarrow$ el número de socios fundadores fue de 100.

   b) Aumenta el número de socios fundadores entre 1980 y a partir de 1983.

4. Estudiamos la primera y segunda derivada, obtenemos:

   a) En el punto (3, 3) la función tiene un máximo relativo.
   b) En el punto (1/e, - 1/e) la función tiene un mínimo relativo.
   c) En el punto (2, 16) tiene un máximo relativo y en el punto (3, 15) un mínimo relativo.
   d) En el punto (1, 1/e) la función tiene un máximo relativo.
   e) En el punto (0, 2) la función tiene un máximo relativo.
   f) En el punto (- 1, - 2) tiene un máximo relativo y en el punto (1, 2) un mínimo relativo.

5. Queda:

   $f(x)=x^2-6x+a \Rightarrow f'(x)=2x-6$ e imponiendo la condición $2x-6=0 \Rightarrow x=3$
   También debe ocurrir: $f'(x)=2 \Rightarrow f'(3)>0$
   La función tiene un mínimo relativo en el punto $(-3,1)$, luego, este punto debe verificar la función: $-1=9-18+a \Rightarrow a=8$

6. Queda:

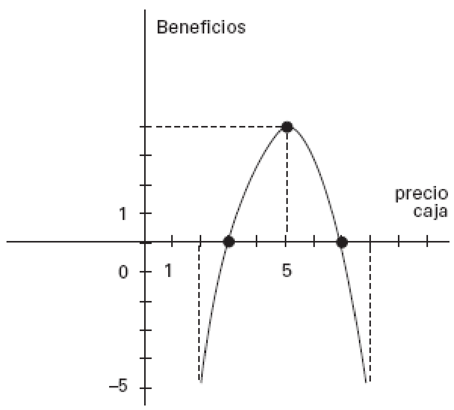
   Como la función tiene un máximo relativo en (0, 4) se cumple: $f(0)=4 \Rightarrow 4=c$
   Entonces: $f(0)=0 \Rightarrow f'(x)=-2x+b \Rightarrow f'(0)=b=0 \Rightarrow b=0$, luego $b=0$ y $c=4$

7. La solución es:
   $f'(x)=\frac{a}{x}+2bx+1$
   Si tiene extremos en $x=1$ y en $x=2$ se cumple:

   $$\left.\begin{array}{l} f'(1)=0 \Rightarrow a+2b+1=0 \\ f'(2)=0 \Rightarrow a/2+4b+1=0 \end{array}\right\} a=-\frac{2}{3} \quad b=-\frac{1}{6}$$

   La función tiene un máximo relativo en $x=2$ y tiene un mínimo relativo en $x=1$.

8. La solución es:



Obtiene el beneficio máximo en el punto (5, 4). Es decir cada caja la venderá a 5 euros y obtendrá unas ganancias de 400 euros/día. La botella la vende a 0, 5 €.

9. La solución es:
   Sea la función $C(x)=100\left(100+9x+\frac{144}{x}\right)$ y su derivada $C'(x)=100\left(9-\frac{144}{x^2}\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-4 \end{cases}$
   La segunda queda: $C''(x)=100 \cdot \left(\frac{288}{x^3}\right)$.
   Para $x=4 \Rightarrow C'(x)>0$ mínimo
   El coste es mínimo para 4 toneladas de material y asciende este coste mínimo a 172 dólares.

PÁGINA 183

10. Descompón el número 48 en dos sumandos tales que el quíntuplo del cuadrado del primero más el séxtuplo del cuadrado del segundo sea mínimo.

11. Halla el número positivo cuya suma, con 4 veces su recíproco, sea mínima.

12. Un rectángulo mide 8 dm de largo y 4 dm de ancho. De cada esquina se recorta un cuadrado de lado x con el fin de hacer una caja sin tapa. Halla x para que el volumen sea máximo.

13. Un fabricante de recipientes está diseñando una caja sin tapa y con base cuadrada que debe tener un volumen de 4 m^3. Para que la caja requiera una cantidad mínima de material, ¿qué dimensiones debe tener?

14. Encuentra entre todos los rectángulos de perímetro 200 centímetros el que tiene diagonal mínima.

15. Con un alambre de 10 metros de longitud queremos hacer un rectángulo. ¿Cuáles han de ser sus medidas para que tenga área máxima?

16. La producción de cierta hortaliza en un invernadero ($Q(x)$ en kg) depende de la temperatura (x en °C) según la función:

$$Q(x) = (x + 1)^2 (32 - x)$$

a) Calcula la temperatura óptima a mantener en el invernadero.

b) ¿Qué producción de hortaliza se obtendrá a esa temperatura?

17. Se desea construir una piscina de fondo cuadrado, con 32 m^3 de capacidad, de manera que la superficie total (de las paredes más el fondo) sea mínima. ¿Qué dimensiones debe tener la piscina?

18. Halla las dimensiones de una ventana de 6 metros de perímetro para que tenga la máxima superficie posible y, así, produzca la máxima luminosidad.

19. Estudia el tipo de concavidad y la existencia o no de puntos de inflexión en las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2$

b) $g(x) = \dfrac{2}{x}$

c) $h(x) = x^4 - 12x^2 + 8$

d) $i(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

e) $j(x) = x \cdot e^{-2x}$

f) $k(x) = \ln(x + 4)$

g) $l(x) = x^4 - x^2$

h) $m(x) = (x - 1)\, e^x$

i) $n(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 12x - 1$

20. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 6x^2 + 16x - 11$ en su punto de inflexión.

21. Dada la función $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 9x + 5$; halla a para que la citada función tenga un punto de inflexión en $x = 2$.

22. En la función $f(x) = ax^3 + bx + c$, halla a, b y c para que la función tenga un máximo relativo en $x = 1$ y un punto de inflexión en (0, 0).

23. Estudia los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las funciones:

a) $f(x) = x(x - 1)^3$

b) $f(x) = \dfrac{-2x}{x^2 + 1}$

c) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{3x^2 + 1}$

10. Sean x y 48 – x los numero que hemos de buscar. La función a optimizar es $S(x)=5x^2+6(48-x)^2 \Rightarrow S(x)=11x^2-576x+13\,824$

$$S'(x) = 22x - 576 \Rightarrow 22x - 576 = 0 \Rightarrow x = \frac{288}{11}$$

$$S''(x) = 22 \Rightarrow S''\left(\frac{288}{11}\right) > 0 \Rightarrow \text{en } x = \frac{288}{11}$$

La función S(x) presenta un mínimo.

Los números buscados son: $\frac{288}{11}$ y $\frac{240}{11}$.

11. La función a optimizar es:

$$S(x) = x + \frac{4}{x} = \frac{x^2+4}{x}$$

$$S'(x) = \frac{x^2-4}{x^2} \Rightarrow \frac{x^2-4}{x^2} = 0 \Rightarrow x_1 = 2;\ x_2 = -2$$

$$S''(x) = \frac{8}{x^3} \Rightarrow S''(2) > 0 \text{ y } S''(-2) < 0$$

La función s(x) presenta un mínimo en x= 2
El numero buscado es x = 2.

12. Llamando x al lado del cuadrado, la base de la caja es un rectángulo de las dimensiones siguientes: $(80-2x)$ y $(50-2x)$

La función a optimizar es: $V(x)=x(80-2x)(50-2x) \quad \Rightarrow \quad V(x)=4x^3-260x^2+4\,000x$

La derivada queda: $V'(x)=12x^2-520x+4\,000=0 \begin{cases} x=10 \\ x=\frac{100}{3} \end{cases}$

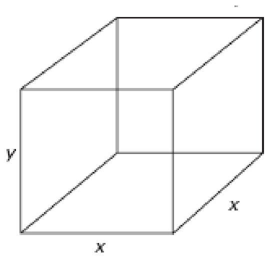
$V''(x)=24x-520$

$V''\left(\frac{100}{3}\right)>0$ Mínimo

$V''(10)<0$ Máximo.

Por tanto, para $x=10$ cm, el volumen es máximo.

13. La función a optimizar es: $x^2 \cdot y = 4 \Rightarrow y = \dfrac{4}{x^2}$



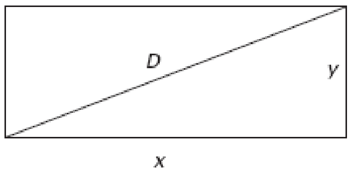
Área $= x^2 + 4x = x^2 + \dfrac{16}{x}$

$A' = 2x - \dfrac{16}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 2$

$A'' = 2 + \dfrac{32}{x^3}; A''(2) > 0$

Para que la cantidad de material sea mínima, la caja debe medir 2 cm en el lado de la base y 1 m de altura.

14. El área es:



Sean *x*, *y* las dimensiones de los lados del rectángulo: $2x + 2y = 200 \Rightarrow y = 100 - x$

$D = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2x^2 + 10\,000 - 200x}$

$D' = \dfrac{4x - 200}{2\sqrt{2x^2 + 10\,000 - 200x}} = \dfrac{2x - 100}{\sqrt{2x^2 + 10\,000 - 200x}} = 0 \Rightarrow x = 50$

$D''(50) > 0$ Luego el rectángulo de diagonal mínima mide 50 cm de base y 50 cm de altura, es decir, es un cuadrado de 50 cm de lado.

15. Sean *x*, *y* las medidas del rectángulo.

El perímetro es: $2x + 2y = 10 \Rightarrow y = 5 - x$

Área $= x \cdot y = x(5 - x) = 5x - x^2$

Las derivadas son: $A' = 5 - 2x = 0 \Rightarrow x = 2{,}5$ y $A'' = -2 \Rightarrow A'(2{,}5) < 0$

El área es máxima si el rectángulo es un cuadrado de 2, 5 m de lado.

16. La solución es:

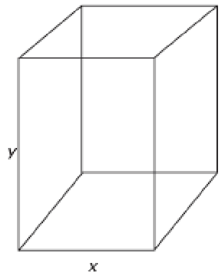
a) $Q'(x) = (x+1)(63 - 3x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 21 \end{cases}$

Si $Q''(x) = -6x + 60$, entonces $Q''(-1) > 0$ Mínimo; $Q''(-1) < 0$ Máximo.
La temperatura optima se obtiene a $21\ C^{º}$.

b) La producción de hortaliza para esta temperatura es de: $Q(21) = 5\,324$ kg.

17. Llamado x, y al lado de la base y a la altura de la piscina respectivamente obtenemos:

$x^2 \cdot y = 32 \Rightarrow y = \dfrac{32}{x^2}$



$A = x^2 + 4xy = x^2 + \dfrac{128}{x}$

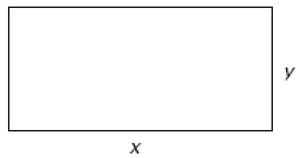
$A' = 2x - \dfrac{128}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 4$

$A'' = 2 + \dfrac{256}{x^3} \Rightarrow A''(4) > 0$

La piscina tendrá 4 m de lado de la base y 2 m de altura.

18. Llamando x e y a las dimensiones del ventanal, tenemos que la función a optimizar es: $A = x \cdot y$

Veamos la relación entre x e y:



$2x + 2y = 6 \Rightarrow y = 3 - x$

$A(x) = x(3 - x) = 3x - x^2$

$A'(x) = 3 - 2x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$ m

$A''(x) = -2 \Rightarrow A''(1{,}5) < 0$ Máximo

Por tanto, la máxima luminosidad se consigue con una ventana cuadrada de 1, 5 m de lado.

19. La solución es:

a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2$

$f'(x) = 6x^2 - 18x \Rightarrow f''(x) = 12x - 18$

$f''(x) = 12x - 18 > 0 \Rightarrow x > \dfrac{3}{2}$

$f''(x) = 12x - 18 < 0 \Rightarrow x < \dfrac{3}{2}$

f es cóncava hacia las y positivas en $\left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$ y cóncava hacia las y negativas en $\left(-\infty, \dfrac{3}{2},\right)$

En $x = 3$ presenta un punto de inflexión en $\left(\dfrac{3}{2}, f\left(\dfrac{3}{2}\right)\right) = \left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{27}{2}\right)$

b) $f(x) = \dfrac{2}{x}$

$f'(x) = -\dfrac{2}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \dfrac{4}{x^3}$

si $x > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f$ es cóncava hacia las y positivas en $(0, +\infty)$

si $x < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f$ es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 0)$

No existe punto de inflexión.

c) $f(x)=4x^4-12x^2+8$

$f'(x)=4x^3-24x \Rightarrow f''(x)=12x^2-24$

Estudiamos el signo de $f(x)=4x^4-12x^2+8$

$$\begin{array}{ccccc} + & & - & & + \\ & -\sqrt{2} & & +\sqrt{2} & \end{array}$$

F es cóncava hacia las y positivas en $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(+\sqrt{2},+\infty\right)$ y cóncava hacia las y negativas en $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$

Esta función tiene dos puntos de inflexión en $(\sqrt{2},-12-12)$.

d) $f(x)=\sqrt{x^2+4}$

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} \Rightarrow f''(x)=\frac{x}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$$

F es cóncava hacia las y positivas en toda la recta real, pues $f''(x)>0\,\forall\, x$

No existen puntos de inflexión.

e) $f(x)=x\cdot e^{-2x}$

$f'(x)=e^{-2x}-2x\cdot e^{-2x} \Rightarrow f''(x)=-4e^{-2x}+4xe^{-2x} \Rightarrow f''(x)=e^{-2x}(4x-4)$

F es cóncava hacia las y positivas en $(+1,+\infty)$ y cóncava hacia las y negativas en $(-\infty,1)$, f tiene un punto de inflexión en $(1,e^{-2})$.

f) $f(x)=\ln(x+4)$

$$f'(x)=\frac{1}{x+4} \Rightarrow f''(x)=\frac{-1}{(x+4)^2}$$

F es cóncava hacia las y negativas en toda la recta real, pues $f''(x)>0\,\forall\, x$

No existen puntos de inflexión.

g) $f(x)=x^4-x^2$; $f'(x)=4x^3-2x$; $f'(x)=12x^2-2$

F es cóncava hacia las y positivas en $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{6}},+\infty\right)$ y cóncava hacia las y negativas en $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

h) $f(x)=(x-1)e^{x}$; $f'(x)=x\cdot e^{x}$; $f''(x)=e^{x}(1+x)$

F es cóncava hacia las y positivas en $(-1,+\infty)$ y hacia las negativas en $(-\infty,-1)$.

i) $f(x)=\ln(x+4)$; $f'(x)=\dfrac{1}{x+4}$; $f''(x)=\dfrac{-1}{(x+4)^2}$

F es cóncava hacia las y negativas en $(-4,+\infty)$.

20. Hallemos el punto de inflexión de la curva.

$y=x^3-6x^2+16x-11$

$y'=3x^2-12x+16$

$y''=6x-12$; $y'''=6$

$6x-12=0 \Rightarrow x=2; y'''(2)\neq 0$

Luego el punto de inflexión es (2, 5)

La recta tangente en (2, 5) es: $y-5=y'(2)\cdot(x-2) \Rightarrow y-5=4(x-2) \Rightarrow 4x-y-3=0$

21. La solución queda:

$f(x) = x^3 - 3ax^2 + 9x + 5$

$f'(x) = 3x^2 - 6ax + 9$

$f''(x) = 6x - 6a$; $f''(2) = 0 \Rightarrow 12 - 6a = 0 \Rightarrow a = 2$

$f'''(x) = 6 \neq 0$

Luego $a = 2$ hace que $f(x)$ tenga un punto de inflexión en $x = 2$.

22. La solución es:

$f(x)=ax^3+bx+c$

$f'(x)=3ax^2+b$

$f''(x)=6ax$

$f'''(x)=6a$

Queremos:

- $f(x)$ tiene un máximo relativo en $x=1$ si $f'(1)=0 \Rightarrow 3a+b=0$
- $f(x)$ tiene un punto de inflexión en (0, 0) si $f(0)=0 \Rightarrow c=0$ y además $f'(0)=0 \Rightarrow 0=0$

Luego $c=0$ y $3a+b=0$ y para que tenga un máximo en $x=1 \Rightarrow f''(1)<0 \Rightarrow a$ debe ser negativo.

23. La solución es:

a) $f(x)=x(x-1)^3$

$$f'(x)=(x-1)^2(4x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=1/4 \end{cases}$$

$$f''(x)=(x-1)^2(12x-6)$$

$$f''\left(\frac{1}{4}\right)>0$$

$f(x)$ tiene un mínimo en $\left(\frac{1}{4},\frac{-27}{256}\right)$ y punto de inflexión en $\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{16}\right)$.

b) f(x) = $f(x)=\dfrac{-2x}{x^2+1}$

f ´(x) = $f'(x)=\dfrac{2x^2-2}{\left(x^2+1\right)^2}=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=1 \end{cases}$ Esta función tiene: Mínimo (1, -1) y Máximo (-1,1)

c) f(x) = $\dfrac{3x-1}{3x^2+1}$

$$y' = \frac{-9x^2+6x+3}{(3x^2+1)^2} = 0$$

$$9x^2-6x-3=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1/3 \end{cases}$$

$$y'' = \frac{54x^3-54x^2-54x+6}{(3x^2+1)^3}$$

$$y''(1) < 0 \Rightarrow \text{Máximo}\left(1, \frac{1}{2}\right)$$

$$y''\left(-\frac{1}{3}\right) > 0 \Rightarrow \text{Mínimo}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{3}{2}\right)$$

PÁGINA 184

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

24. De dos funciones *f* y *g* se sabe que la gráfica de sus funciones derivadas es una recta que pasa por los puntos (0, 2) y (2, 0) (para la derivada de *f*) y una parábola que corta a *OX* en (0, 0) y (4, 0) y tiene por vértice (2, 1) (para la derivada de *g*).

    a) Haz las gráficas de tales derivadas y encuentra su expresión.

    b) Estudia a partir de la gráfica el crecimiento y decrecimiento de *f* y *g*.

25. Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x-2}$.

26. Una productora de películas ha comprobado que el coste anual (en millones de euros) que le supone la contratación de actores secundarios para sus películas sigue una función del tipo:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 60x + 800}{100x},\ x > 0$$

donde x denota el número de actores secundarios contratados.

    a) ¿Qué número de actores secundarios contratados origina el coste anual mínimo?

    b) ¿Cuál sería el coste mínimo? Justifica las respuestas.

27. La suma de tres números positivos es 60. El primero más el doble del segundo más el triple del tercero suman 120. Halla los números que verifican estas condiciones y cuyo producto es máximo.

28. Un granjero dispone de 3 000 euros para cercar un campo rectangular adyacente a un río.

    El coste de la cerca paralela al río es de 5 euros por metro instalado, y el de la cerca para cada uno de los lados restantes es de 3 euros por metro instalado.

    Halla las dimensiones del área máxima que puede ser cercada.

29. Una empresa estima que los ingresos y los gastos anuales (en euros) que genera la fabricación y venta de x unidades de un determinado producto, vienen dados por las funciones:

Ingresos: $I(x) = 28x^2 + 36\,000x$ Gastos: $G(x) = 44x^2 + 12\,000x + 700\,000$

    a) Halla el número de unidades que ha de vender para que el beneficio sea máximo.

    b) Halla el valor de dicho beneficio máximo.

30. La función del coste total de producción de x unidades de un determinado producto es:

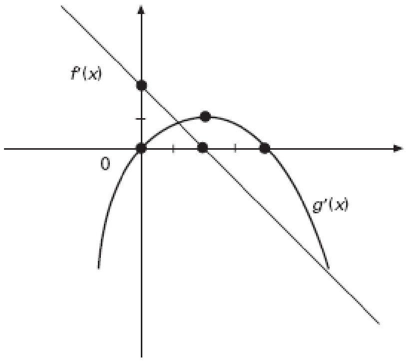
$$C(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 200$$

Definimos la función de coste medio por unidad: $\overline{C}(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

¿A qué nivel de producción será mínimo el coste medio por unidad?

24. En cada caso queda:

a)



$f'(x) \equiv y = -x + 2$

$g'(x) \equiv x^2 - 4x + 4y = 0$

b) A partir de la grafica de $f'(x)$ observamos que $f(x)$ es creciente de $(-\infty, 2)$ y decreciente $(2, +\infty)$. Del mismo modo $g(x)$ es creciente en (0, 4) y decreciente en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$.

25. Queda:

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x - 3}{(x^2 + x - 2)^2}$$

$$f'(x) < 0 \ \forall\, x \in Dom\, f$$

Esta función es decreciente en todo su dominio de definición.

$Dom\, f = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$, en este caso es decreciente $\forall\, x \in Dom\, f$

26. La solución es:

a) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 400}{50x^3} = 0 \Rightarrow x = \pm 20$

$f''(x) = \dfrac{16}{x^3}$ $\quad f''(20) > 0$ Mínimo

El coste mínimo se produce con 20 actores secundarios.

b) El coste mínimo es de: $C(20) = 1{,}4$ millones de euros.

27. Llamando x, y, z a los números buscados, tenemos que la función a optimizar es: $p = x \cdot y \cdot z$

Imponiendo las condiciones del problema, tenemos:

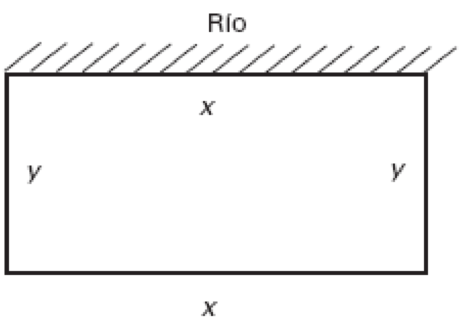
$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=60 \\ x+2y+3z=120 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y=60-2z \\ x=z \end{array}\right.$$

Por tanto:

$$p = z\,(60 - 2z) \cdot z = 60z^2 - 2z^3$$
$$p' = 120z - 6z^2 = 0 \Rightarrow z = 0;\ z = 20$$
$$p' = 120 - 12z$$
$$p''\ (0) > 0 \text{ Mímimo}$$
$$p''\ (20) < 0 \text{ Máximo}$$

Por tanto, el producto máximo para $x=20$; $y=20$; $z=20$.

28. El problema se explica:



$$5x+5x+3y+3y=3000 \;\Rightarrow\; 10x+6y=3000 \Rightarrow y=\frac{1500-5x}{3}$$

La función a optimizar es $A = x \cdot y$, es decir, $A = x \cdot \left(\frac{1500-5x}{3}\right) = \frac{1500x-5x^2}{3}$

$A' = \frac{1500-10x}{3} = 0 \Rightarrow x = 150$ m

$A'' = -10/3 \Rightarrow A''(150) < 0$ Máxima

La nave de área máxima tiene de dimensiones 150 m por 250 m.

29. La solución queda:

a) La función beneficio viene dada por:

$B(x) = I(x) - G(x) = -16x^2 + 24\,000 = 0 \Rightarrow x = 750$

b) $B''(x) = -32 \Rightarrow B''(750) < 0$ Máximo

El beneficio máximo se produce cuando se venden 750 unidades y este beneficio es el siguiente: $B(750) = 8\,300\,000$ euros.

30. La solución es:

$$C(x) = \frac{1/2\,x^2 + 3x + 200}{x} = \frac{1}{2}x + 3 + \frac{200}{x}$$

$$\overline{C}'(x) = \frac{1}{2} - \frac{200}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 20$$

$$\overline{C}''(x) = \frac{400}{x^3} \Rightarrow \overline{C}''(20) > 0 \text{ Mínimo.}$$

El coste medio es mínimo para $x = 20$ unidades.

Unidad 8 – Representación gráfica de funciones

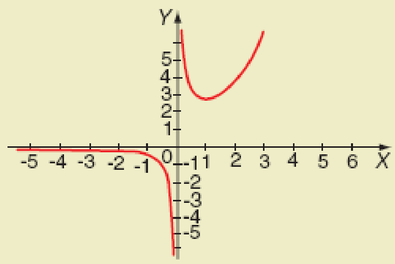
PÁGINA 187

cuestiones iniciales

1. En las siguientes funciones, estudia sus características: dominio, los puntos de corte con los ejes, las simetrías, la periodicidad, las asíntotas, la monotonía, los extremos relativos, el tipo de concavidad y la existencia o no de puntos de inflexión.

a) $y = 2x^2 - 8x$ b) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$

2. Estudia las características (dominio, recorrido, monotonía, extremos relativos, curvatura y asíntotas) de la función $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$, representada en la gráfica.



SOLUCIONES

1. Las funciones quedan:

   a) $f(x) = 2x^2 - 8x$

- Dominio: $Dom\, f = \mathbb{R}$
- Puntos de corte con el eje OX:

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x^2 - 8x \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} P(0,\ 0) \\ Q(4,\ 0) \end{array}$$

- Puntos de corte con el eje OY

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x^2 - 8x \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow P(0,\ 0)$$

- Simetrías:

  $f(x) = 2x^2 - 8x$

  $f(-x) = 2(-x)^2 - 8(-x) = 2x^2 + 8x$

  $f(x) \neq f(-x) \Rightarrow f$ no es simétrica respecto al eje OY

  $f(x) \neq -f(-x) \Rightarrow f$ no es simétrica respecto al origen de coordenadas.
- Periodicidad: f no es periódica

- Asuntotas: no tiene asuntotas.
- Monotonía: $f'(x)=4x-8$ y estudiamos el signo de $f'(x)$.

$f'(x) < 0$ en $(-\infty, 2)$

$f'(x) > 0$ en $(2, +\infty)$

f es estrictamente decreciente en $(-\infty, 2)$

f es estrictamente creciente en $(2, +\infty)$

- Extremos relativos:

$f'(x) = 4x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2.$

$f''(x) = 4 > 0$

f tiene un mínimo relativo en $(2, -8)$

- Concavidad: $f''(x)=4>0 \Rightarrow f$ es cóncava hacia las y positivas en todo $\mathbb{R}$
- No existen puntos de inflexión.

b) $g(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$

- Dominio: $Dom\, g=\mathbb{R}-\{+2,-2\}$
- Puntos de corte con el eje OX:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^3}{x^2-4} \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow P(0,\ 0)$$

- Puntos de corte con el eje OY:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^3}{x^2-4} \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow P(0,\ 0)$$

- Simetrías:

$g(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}; g(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-4}=-\dfrac{x^3}{x^2-4}$ como $-g(x)=+g(-x)$ la función g es simétrica respecto al origen de coordenadas.

- Periodicidad: g no es periódica

- Asíntotas:

Asíntotas verticales: las rectas de ecuaciones $x=2$ y $x=-2$
Asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{x^2-4} = -\infty; \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{x^2-4} = +\infty$$ no existen las asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y=mx+b$

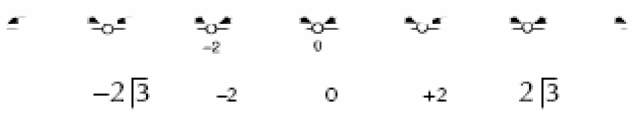
$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x(x^2-4)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-4} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-4} - x \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{x^2-4} = 0$$

La asíntota oblicua es la reta $y=x$

- Monotonía:

$$g'(x) = \frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2} \begin{cases} x^4-12x^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 2\sqrt{3} \end{cases} \\ x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2 \end{cases}$$



$g'(x) > 0$ en $(-\infty\ -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3},\ +\infty) \Rightarrow g$ es estrictamente creciente en $(-\infty\ -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3},\ +\infty)$

$g'(x) < 0$ en $(-2\sqrt{3},\ -2) \cup (-2,\ 0) \cup (0,\ 2) \cup (2,\ 2\sqrt{3}) \Rightarrow$
$\Rightarrow g$ es estrictamente decreciente en $(-2\sqrt{3},\ -2) \cup$
$\cup (-2,\ 0) \cup (0,\ 2) \cup (2,\ 2\sqrt{3})$

- Extremos relativos:

$$g'(x)=\frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2}=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 2\sqrt{3} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad g''(x)=\frac{8x^3+96x}{(x^2-4)^2}$$

$g''(2\sqrt{3})>0 \Rightarrow g$ tiene un mínimo relativo en el punto $(2\sqrt{3},3\sqrt{3})$
$g''(2\sqrt{3})<0 \Rightarrow g$ tiene máximo relativo en el punto $(-2\sqrt{3},-3\sqrt{3})$

- Concavidad:

$$g''(x)=\frac{8x^3+96x}{(x^2-4)^2}$$

$g''(x) < 0$ en $(-\infty, -2) \cup (0, +2) \Rightarrow g$ es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -2) \cup (0, +2)$.

$g''(x) > 0$ en $(-2, 0) \cup (2, +\infty) \Rightarrow g$ es cóncava hacia las y positivas en $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$.

- puntos de inflexión:

$$g''(x) = \frac{8x^3 + 96x}{(x^2-4)^3}; \quad 8x^3 + 96x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$g'''(x) = \frac{-24x^4 - 576x^2 - 384}{(x^2-4)^4}$$

$g'''(0) \neq 0$

Existe un punto de inflexión en el punto $(0, 0)$.

2. La función queda.
Dom f = $R-\{0\}$; Im f = $(-\infty,0)\cup[e,+\infty)$; Mínimo relativo $(1,e)$; Cóncava $(0,+\infty)$, Convexa $(-\infty,0)$; asíntotas las rectas x = 0 e y = 0.

PÁGINA 203

ACTIVIDADES

■ Reflexiona sobre las siguientes conjeturas:

1. **Primos gemelos.** Hay infinitos pares de números primos gemelos, es decir, de primos cuya diferencia es igual a 2. Ejemplo: 7 y 5 son primos gemelos, ya que 7 – 5 = 2. Encuentra cuatro pares de números primos gemelos.
2. **Números primos generados.** El polinomio $n^2 - n + 41$, cuya indeterminada n es entera, genera números primos cuando n va desde –40 hasta 40. Este polinomio, ¿genera primos para cualquier entero n?
3. **Número mágico.** Toma un número de tres cifras. Forma el número que se obtiene al escribir a la derecha del anterior el número repetido. Este número de 6 cifras lo dividimos por 7 y al cociente obtenido, por 11, y al último cociente, por 13. ¿Qué se observa?
4. **Conjetura de Collatz o ($3n + 1$).** Compruébala para los valores de n: 7, 12, 17 y 30.

SOLUCIONES

1. Ésta es una conjetura que esta sin demostrar. Hasta el número 100 podemos encontrar varios primos gemelos: 5 y 7; 11 y 13; 17 y 19; 29 y 31; 41 y 43; 71 y 73.

2. En efecto, el polinomio $n^2 - n + 41$ genera números primos para valores de n comprendidos entre -40 y 40.

   Por ejemplo: $n = 25 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 641$ que es un número primo.

   Para cualquier valor, de n no genera números primos, pues, por ejemplo, para:
   $n = 41 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$ que es un número compuesto, no es un número primo.

3. Tomamos un numero de tres cifras cualesquiera, 739, y le aplicamos lo que dice el problema:
   $\frac{739\,739}{7 \cdot 11 \cdot 13} = 739$, observamos que obtenemos el número de partida.

   Veamos que esto se cumple con cualquier número y para ello partimos de un número cualquiera xyz:

   $$xyzxyz = 100\,000x + 10\,000y + 1000z + 100x + 10y + z = 1001 \cdot (100x + 10y + z) = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot xyz$$

   Por tanto, al dividir xyzxyz por 7, por 11 y por 13, obtenemos el número de partida xyz.

4. Indicamos con $f^2(x) = f(f(x))$ y así sucesivamente por cuestiones de escritura.

Para n = 7

$f(7) = 22$; $f^2(7) = 11$; $f^3(7) = 34$; $f^4(7) = 17$; $f^5(7) = 52$; $f^6(7) = 26$; $f^7(7) = 13$; $f^8(7) = 40$; $f^9(7) = 20$; $f^{10}(7) = 10$; $f^{11}(7) =5$; $f^{12}(7) = 16$; $f^{13}(7) = 8$; $f^{14}(7) = 4$; $f^{15}(7) = 2$; $f^{16}(7) = 1$…

Para n = 12

$f(12) = 6$; $f^2(12) = 3$; $f^3(12) = 10$; $f^4(12) = 5$; $f^5(12) = 16$; $f^6(12) = 8$; $f^7(12) = 4$; $f^8(12) = 2$; $f^9(12) = 1$…

Para n = 17

$f(17) = 52$; $f^2(17) = 26$; $f^3(17) = 13$; $f^4(17) = 40$; $f^5(17) = 20$; $f^6(17) = 10$; $f^7(17) = 5$; $f^8(17) = 16$; $f^9(17) = 8$; $f^{10}(17) = 4$; $f^{11}(17) =2$; $f^{12}(17) = 1$ …

Para n = 30

$f(30) = 15$; $f^2(30) = 46$; $f^3(30) = 23$; $f^4(30) = 70$; $f^5(30) = 35$; $f^6(30) = 106$; $f^7(30) = 53$; $f^8(30) = 160$; $f^9(30) = 80$; $f^{10}(30) = 40$; $f^{11}(30) =20$; $f^{12}(30) = 10$; $f^{13}(30) = 5$; $f^{14}(30) = 16$; $f^{15}(30) = 8$; $f^{16}(30) = 4$; $f^{17}(30) = 2$; $f^{18}(30) = 1$ …

PÁGINA 208

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Encuentra las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-16}$ b) $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x-3}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{e^x+1}$

2. Sea la función $f(x) = 2x^3 + bx^2 + ax - 5$.

a) Halla los valores de a y b de forma que f tenga un máximo en $x = 1$ y un mínimo en $x = 2$.

b) Representa gráficamente la función.

3. El consumo de agua (expresado en millares de litros) en cierta población, en función de la hora del día, viene dado a través de la expresión:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le t < 6 \\ -5+t & \text{si } 6 \le t < 9 \\ At^2+Bt+C & \text{si } 9 \le t < 21 \\ 25-t & \text{si } 21 \le t < 24 \end{cases}$$

Sabiendo que es una función continua, y que a las 15 horas se alcanza el consumo máximo de 40 millares de litros:

a) Determina, justificando la respuesta, los valores de A, B y C.

b) Representa la función.

4. Un publicista diseña un panel publicitario que tiene la siguiente forma: base horizontal de 10 m de longitud y el resto del contorno limitado por la función:

$$g(x) = \begin{cases} -x^2+6x & \text{si } 0 \le x \le 5 \\ -x+10 & \text{si } 5 < x \le 10 \end{cases}$$

Dibuja la gráfica del recinto correspondiente al cartel publicitario.

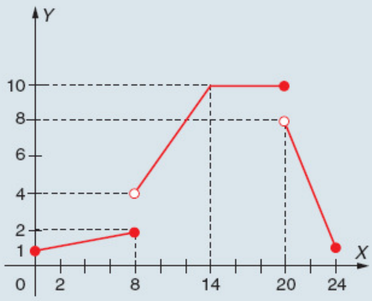
5. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = x(x+2)(x-2)$ c) $y = 2x^3 + 5x^2 - 4x$ e) $y = 3x - x^3 - 2$

b) $y = x^4 + 2x^2$ d) $y = |x^2 - 4x + 3|$ f) $y = x^4 - 2x^2 - 8$

6. La gráfica adjunta representa el consumo de electricidad (en miles de kWh) de una empresa en función de la hora del día.

Determina su expresión analítica.



7. La gráfica de la función $y = x^3 + ax^2 + bc + c$ tiene un punto de inflexión en $x = 1$ y un máximo en $(0, 4)$.

a) Halla los coeficientes a, b y c.

b) Halla los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión.

c) Representa la función.

SOLUCIONES

1. Las asíntotas quedan:

a) Las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2-16}$ son las rectas de ecuaciones $x=4$; $x=-4$ e $y=0$.

b) Las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{(x-2)^2}{x-3}$ son las rectas de ecuación $x=3$ e $y=x-1$.

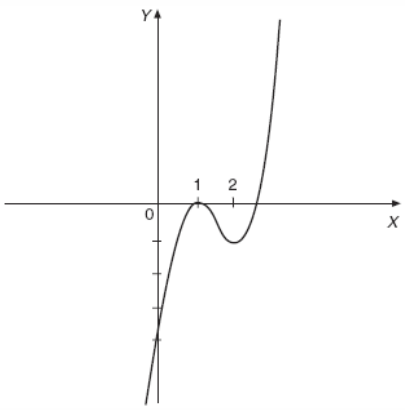
c) La asíntota de la función $f(x)=\dfrac{1}{e^x+1}$ es la recta de ecuación $y=0$.

2. La solución queda:

a) Calculamos *a* y *b*:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1)=0\Rightarrow 6+2b+a=0 \\ f'(2)=0\Rightarrow 24+4b+a=0 \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l} a=12 \\ b=-9 \end{array}\right.$$

b) La función es $y=2x^3-9x^2+12x-5$, esta función corta a los ejes $(0,-5)(1,0)$ y tiene un máximo en $(1,0)$ y un mínimo en $(2,-1)$.



3. La solución queda:

a) La derivada en el valor indicado:

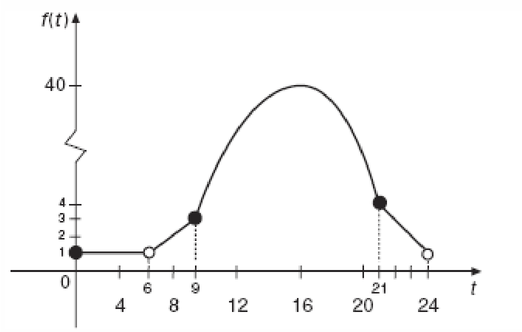
$$f'(t)=2At+B$$
$$f'(15)=0\Rightarrow 30A+B=0\Rightarrow B=-30A$$

Como $f(15)=40\Rightarrow 225A-450A+C=40$

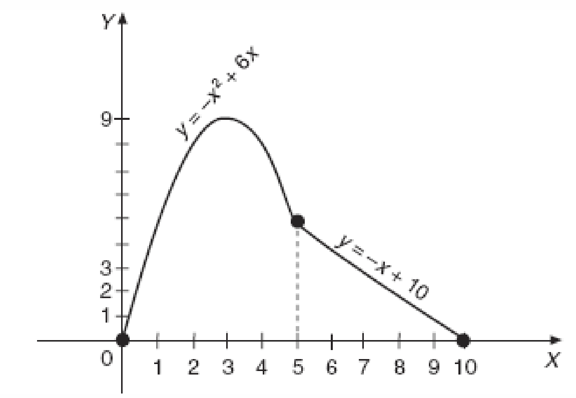
Como f es continua en 9 y $21=441A-630A+C=4 \quad \Rightarrow \left.\begin{array}{r} A=-1 \\ B=30 \\ C=-185 \end{array}\right\}$

La función queda: $f(t)=\begin{cases} 1 & \text{si } 0\le t< 6 \\ -5+t & \text{si } 6\le t< 9 \\ -t^2+30t-185 & \text{si } 9\le t<21 \\ 25-t & \text{si } 21\le t<24 \end{cases}$

b) La representación queda:



4. La representación queda:



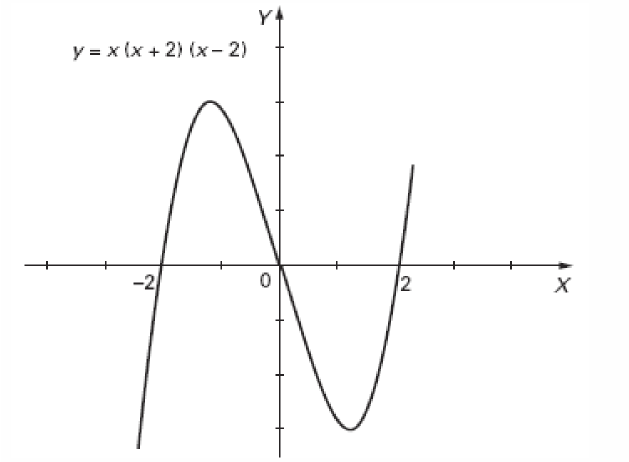
5. Las funciones quedan del siguiente modo:

a) $y=x(x+2)(x-2)=f(x)$

- Dominio: $Dom\, f=\mathbb{R}$
- Simetrías y periodicidad: es simétrica respecto al origen y no es periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0)$; $(-2,0)$; $(2,0)$.
- Asíntotas y ramas infinitas: no tiene asíntotas.
- Extremos: Mínimo $\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{-16}{3\sqrt{3}}\right)$ Máximo $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{16}{3\sqrt{3}}\right)$
- Puntos de inflexión: $(0,0)$

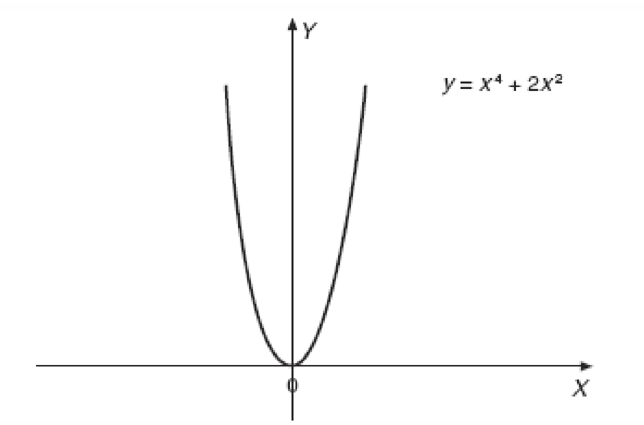
- Intervalos de signo constante:

f es negativa en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$.
f es positiva en $(-2, 0) \cup (2, \infty)$.



b) $y = x^4 + 2x^2$

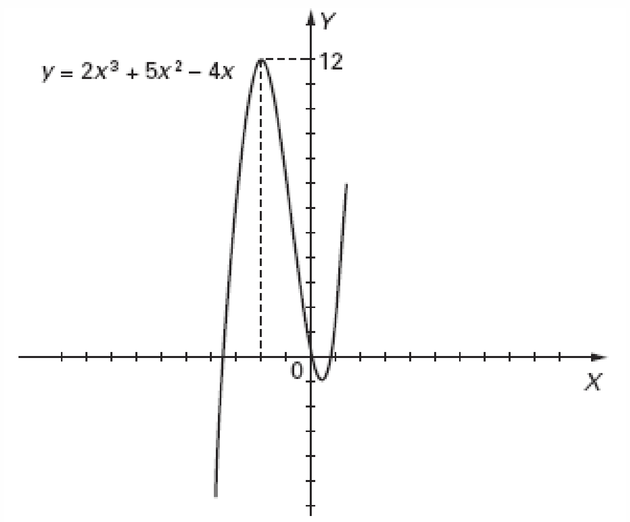
- Dominio: $Dom\, f = \mathbb{R}$
- Simetrías : simetrías respecto OY
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0)$.
- Asíntotas y ramas infinitas: no tiene asíntotas.
- Extremos: Mínimo $(0,0)$
- Intervalos de signo constante: f es positiva en todo $\mathbb{R}$



c) $y=2x^3+5x^2-4x=f(x)$

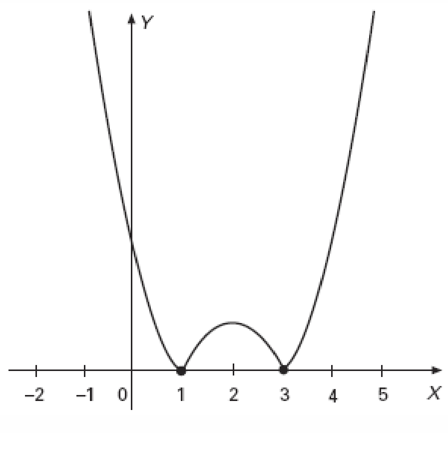
- Dominio: $Dom\,f=\mathbb{R}$
- simetrías y periodicidad: ni es simétrica ni periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0)\,(0,64;0)\,(-3,14;0)$
- Asíntotas y ramas infinitas: no tiene.
- Extremos: Máximo $(-2,12)$ Mínimo $\left(\frac{1}{3},\frac{-19}{27}\right)$
- Puntos de inflexión: $\left(-\frac{5}{6};5,65\right)$
- Intervalos de signo constante:

f es negativa en $(-\infty;\,-3,14)\cup(0;\,0,64)$.
f es positiva en $(-3,14;\,0)\cup(0,64;\,+\infty)$.



d) la función es $f(x)=\left|x^2-4x+3\right|$ y queda: $f(x)=\begin{cases}-x^2+4x-3 & si\ x\in(1,3)\\ x^2-4x+3 & si\ x(-\infty,1]\cup[3,+\infty)\end{cases}$

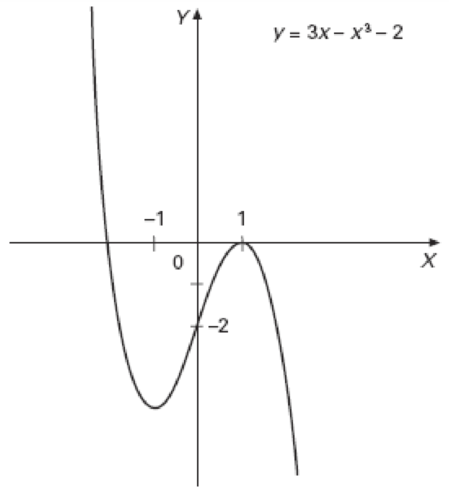
y su gráfica puede verse en el dibujo.



e) $y = 3x - x^3 - 2$

- Dominio: $Dom\, f = \mathbb{R}$
- Simetrías y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,-2)$; $(1,0)$; $(-2,0)$
- Asíntotas: no tiene.
- Extremos: Máximo $(1,0)$ Mínimo $(-1,-4)$
- Puntos de inflexión: $(0,-2)$
- Intervalos de signo constante:

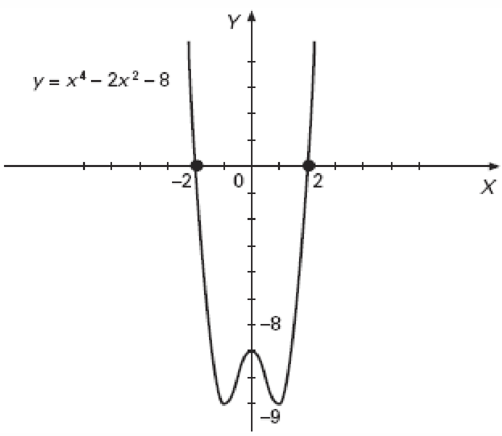
f es positiva en $(-\infty, -2)$ y negativa en $(-2, +\infty)$.



f) $y = x^4 - 2x^2 - 8 = f(x)$

- Dominio: $Dom\, f = \mathbb{R}$
- Simetrías y periodicidad: es simétrica respecto al eje de ordenadas y no es periódica..
- Puntos de corte con los ejes: $(0,-8)$; $(2,0)$; $(-2,0)$
- Asíntotas y ramas infinitas: no tiene.
- Extremos: Máximo $(0,-8)$ Mínimo $(-1,-9)$
- Puntos de inflexión: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-77}{9}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-77}{9}\right)$
- Intervalos de signo constante:

f es positiva en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.
f es negativa en $(-2, 2)$.



6. La expresión analítica queda:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \\ x - 4 & \text{si } 8 < x \leq 14 \\ 10 & \text{si } 14 < x \leq 20 \\ \frac{-7}{4}x + 43 & \text{si } 20 < x \leq 24 \end{cases}$$

7. Cada función queda:

a) La función y sus derivadas son:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$
$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$
$$f''(x) = 6x + 2a$$

Si tiene máximo en $(0,4) \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 4 \Rightarrow c = 4 \\ f'(0) = 0 \Rightarrow b = 0 \end{cases}$

Si tiene inflexión en $x = 1 \Rightarrow f''(1) = 0 \Rightarrow 6 + 2a = 0 \Rightarrow a = -3$

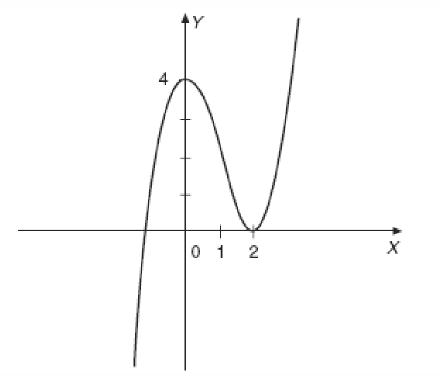
Luego la función queda: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

b) $f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0; x = 2$

$$f''(x) = 6x - 6 \begin{cases} f''(0) < 0 \;\; \textit{Máximo en}\,(0,4) \\ f''(2) > 0 \;\; \textit{Mínimo en}\,(2,0) \end{cases}$$
$$f'''(x) = 6$$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$ punto inflexión en (1,2

c) La gráfica es:



PÁGINA 209

■ 8. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{x^2}{4-x}$ b) $y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$ c) $y = \dfrac{x}{x+1}$

d) $y = \dfrac{x^2+1}{x}$ e) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ f) $y = \dfrac{x}{x^2-1}$

g) $y = \dfrac{4}{x^2-4}$ h) $y = \dfrac{8}{x^2+4}$ i) $y = \dfrac{x}{x+1} + 2$

■ 9. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = \ln(x-2)$ b) $y = e^{x^2}$

c) $y = \sqrt{x^2-1}$ d) $y = \dfrac{\ln x}{x}$

e) $y = x \cdot e^x$ f) $y = \dfrac{e^x}{e^x-1}$

■ 10. El rendimiento físico de un determinado esfuerzo muscular (evaluado en una escala de 0 a 100) de un cierto deportista de élite durante 60 minutos viene dado por:

$$f(t) = \begin{cases} -t(t-20) & \text{si } 0 \le t < 15 \\ 75 & \text{si } 15 \le t < 30 \\ 100 - \left(\dfrac{5}{6}\right)t & \text{si } 30 \le t < 60 \end{cases}$$

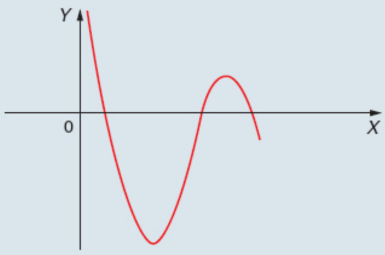
Representa gráficamete la función e interprétala.

■ 11. El esquema adjunto representa el gráfico de la función $y = f(x)$:

a) Haz otro esquema que represente el gráfico de la función $y = -f(x)$.

b) Haz otro esquema que represente conjuntamente las gráficas de $y = f(x)$ e $y = 2f(x)$.

Explica el fundamento para la construcción de estos esquemas.



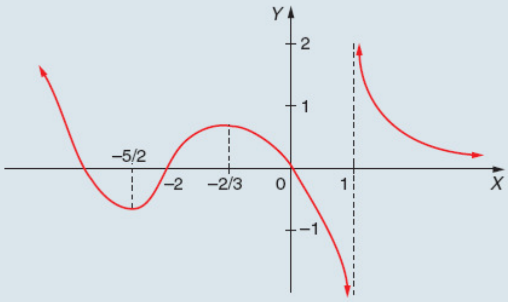
■ 12. Dada la gráfica de la función $f(x)$, que podemos ver en la imagen, halla (justificando la respuesta):

a) Dominio de $f(x)$.

b) Valores de x_0 que hacen $f'(x_0) = 0$.

c) Valores de x para los que $f'(x) > 0$.

d) Asíntotas de la función.



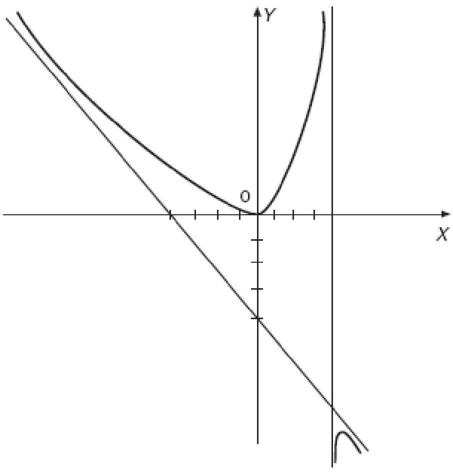
■ 13. A partir de la gráfica de la función $f(x) = \ln x$, dibuja de forma razonada las gráficas de las funciones:

a) $f(x) = \ln|x|$ b) $f(x) = |\ln x|$ c) $f(x) = \ln(x-2)$

8. Las gráfica quedan:

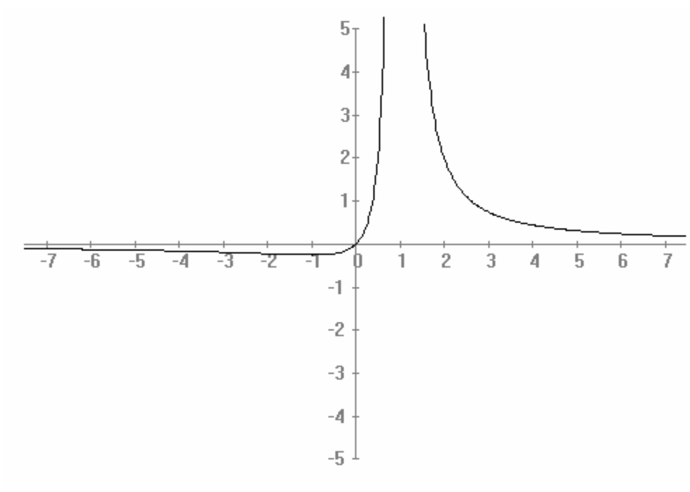
a) $y = \dfrac{x^2}{4 - x}$

- Dominio: $Dom\, f = \mathbb{R} - \{4\}$
- Simetrías y periodicidad: No simétrica.
- Puntos de corte con los ejes: (0,0).
- Asíntotas: $x = 4; y = -x - 4$.
- Extremos relativos: Mínimo (0,0); Máximo (8, -16).



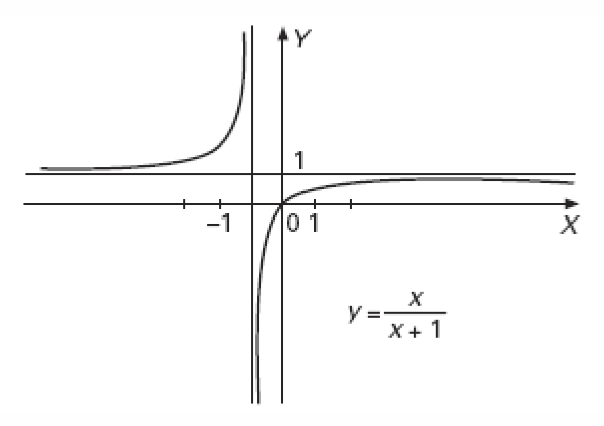
b) $y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

- Dominio $\mathbb{R} - \{1\}$
- Simetrías y periodicidad: No simétrica ni periódica.
- Puntos de corte con los ejes: (0,0)
- Asíntotas; $x = 1; y = 0$
- Extremos relativos: Mínimo $(-1, -1/4)$



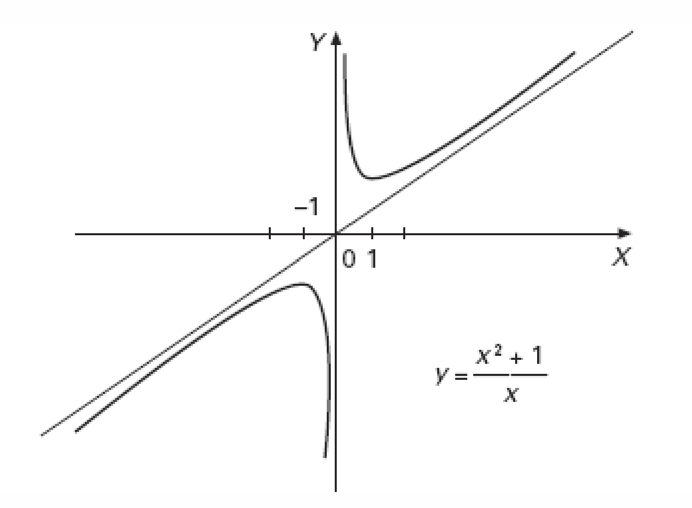
c) $y = \dfrac{x}{x+1}$

- Dominio: $Dom\,f = \mathbb{R} - \{-1\}$.
- Simetrías y periodicidad: No simétrica.
- Puntos de corte con los ejes: (0,0).
- Asíntotas: $x = -1$; $y = 1$.
- Extremos relativos: No tiene.
- Intervalos de signo constante: f es positiva en $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ y negativa en $(-1, 0)$.



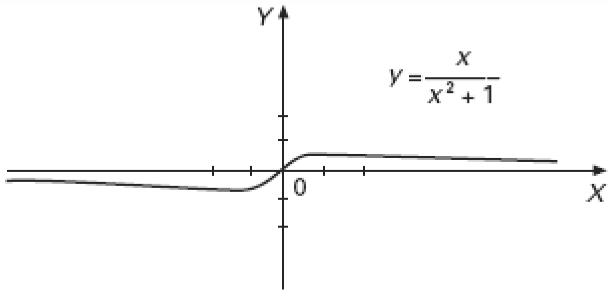
d) $y = \dfrac{x^2+1}{x}$

- Dominio: $Dom\,f = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Simetrías y periodicidad: Simétrica respecto al origen.
- Puntos de corte con los ejes: No tiene.
- Asíntotas: $y = x; x = 0$
- Extremos relativos: Máximo $(-1, -2)$, Mínimo (1,2).
- Intervalos de signo constante: f es positiva en $(0, +\infty)$ y negativa en $(-\infty, 0)$.



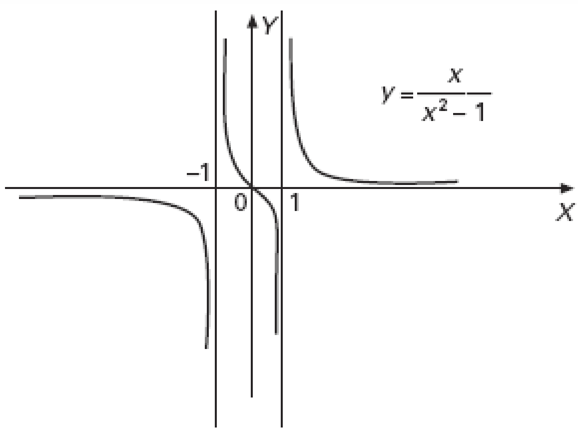
e) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$

- Dominio: $Dom\, f = \mathbb{R}$.
- Simetrías y periodicidad: Simétrica respecto al origen.
- Puntos de corte con los ejes: (0,0).
- Asíntotas: $y = 0$.
- Extremos relativos: *Máximo* $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$; *Mínimo* $\left(-1, \dfrac{-1}{2}\right)$.
- Intervalos de signo constante: f es positiva en $(0,+\infty)$ y negativa en $(-\infty,0)$.



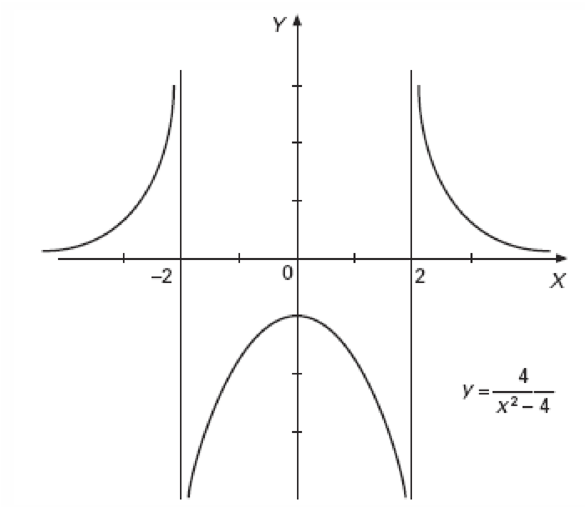
f) $y = \dfrac{x}{x^2-1}$

- Dominio: $Domf = \mathbb{R} - \{1,-1\}$.
- Simetrías y periodicidad: Simétrica respecto al origen.
- Puntos de corte con los ejes: (0,0).
- Asíntotas: $x = 1$; $x = -1$; $y = 0$.
- Extremos relativos: No tiente.
- Intervalos de signo constante: f es positiva en $(-1,0) \cup (1,+\infty)$ y negativa en $(-\infty,-1) \cup (0,1)$.



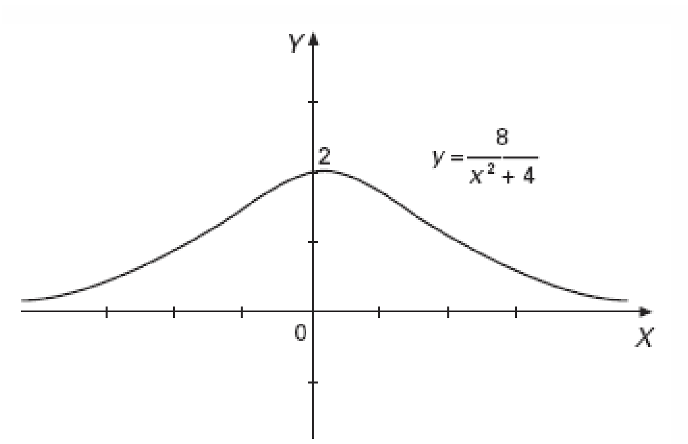
g) $y = \dfrac{4}{x^2 - 4} = f(x)$

- Dominio: $Dom\, f = \mathbb{R} - (+2, -2)$.
- Simetrías y periodicidad: Simétrica respecto OY y no periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0, -1)$.
- Asíntotas: $x = +2$; $x = -2$; $y = 0$.
- Extremos relativos: Máximo $(0, -1)$.
- Intervalos de signo constante: f es positiva en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. f es negativa en $(-2, 2)$.



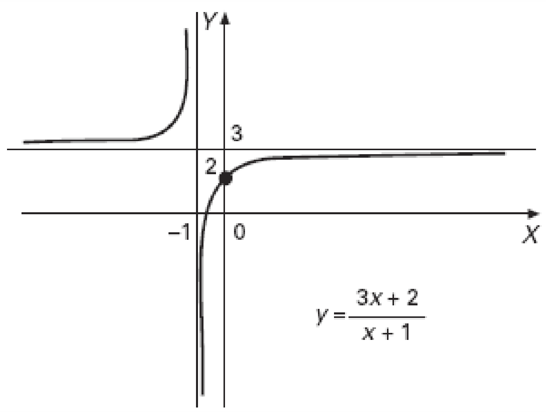
h) $y = \dfrac{8}{x^2+4} = f(x)$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R}$.
- Simetrías y periodicidad: Simétrica respecto a OY y no periódica.
- Puntos de corte con los ejes: (0,2).
- Asíntotas: y =0.
- Extremos relativos: Máximo (0,2).
- Intervalos de signo constante: f es positiva en todo su dominio.



i) $y=\frac{x}{x+1}+2=\frac{3x+2}{x+1}$

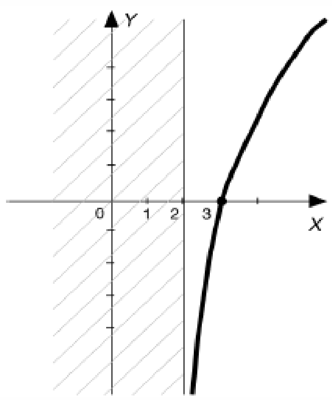
- Dominio: $Dom\, f=\mathbb{R}-\{-1\}$.
- Simetrías y periodicidad: No simétrica.
- Puntos de corte con los ejes: (0,2) ; $\left(\frac{-2}{3},0\right)$.
- Asíntotas: $x=-1$; $y=3$.
- Extremos relativos: No tiente.
- Intervalos de signo constante: f es positiva en $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$ y negativa en $(-1,0)$.



9. Las gráficas quedan:

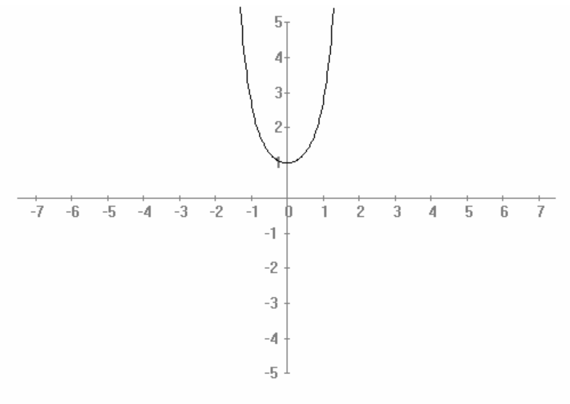
a) $y=\ln(x-2)=f(x)$

- Dominio: $Dom\, f=(2,+\infty)$.
- Simetrías y periodicidad: Ni simétrica ni periódica.
- Puntos de corte con los ejes: (3,0).
- Asíntotas: $x=2$.
- Extremos relativos: No tiene.
- Intervalos de signo constante: f es positiva en $(3,+\infty)$; f es negativa en (2,3).



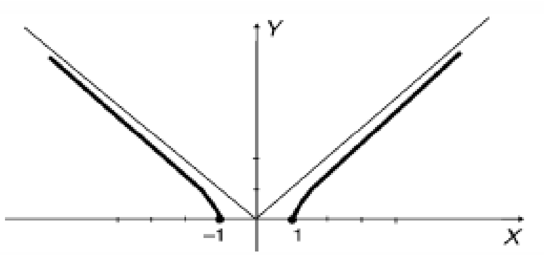
b) $y = e^{x^2}$

- Dominio $\mathbb{R}$
- Simetrías y periodicidad: Simétrica respecto a OY. No periódica.
- Puntos de corte con los ejes: (0,1)
- Asíntotas: No tiene
- Extremos relativos: Mínimo (0, 1)



c) $y = +\sqrt{x^2 - 1} = f(x)$

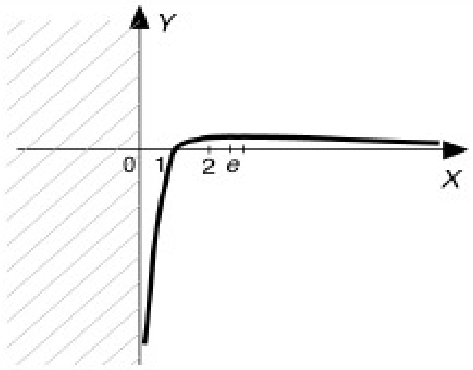
- Dominio: $Dom\, f = (-\infty, -1] \cup [+1, +\infty)$.
- Simetrías y periodicidad: Es simétrica respecto al eje OY y no es periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(1,0)$ $(-1,0)$.
- Asíntotas: $y = x$; $y = -x$.
- Extremos relativos: No tiente.
- Intervalos de signo constante: f es positiva en todo su dominio.



d) $y = \dfrac{\ln x}{x} = f(x)$

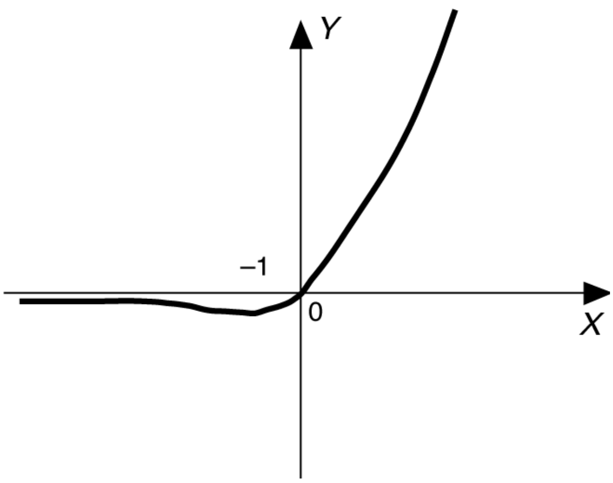
- Dominio: $Dom\, f = (0, +\infty)$.
- Simetrías y periodicidad: No tiene.
- Puntos de corte con los ejes: (1,0).
- Asíntotas: $x = 0$, pues $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$ e $y = 0$, pues $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

- Extremos relativos: Máximo $\left(e,\dfrac{1}{e}\right)$.
- Intervalos de signo constante: f es negativa en (0,1) y f es positiva en $(1,+\infty)$.



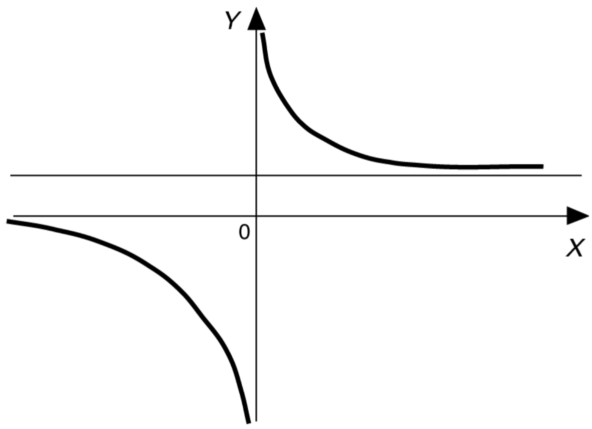
e) $y=x\cdot e^x=f(x)$

- Dominio: $Dom\,f=\mathbb{R}$.
- Simetrías y periodicidad: No tiene.
- Puntos de corte con los ejes: (0,0).
- Asíntotas: $y=0$, pues $\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot e^x=0$
- Extremos relativos: Mínimo $\left(-1,-\dfrac{1}{e}\right)$.
- Intervalos de signo constante: f es negativa en $(-\infty,0)$, f es positiva en $(0,+\infty)$

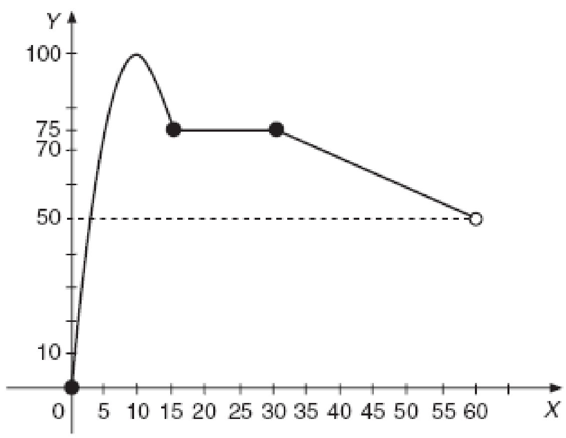


f) $y=\dfrac{e^{x}}{e^{x}-1}=f(x)$

- Dominio: $Dom\,f=\mathbb{R}-\{0\}$.
- Simetrías y periodicidad: No tiene.
- Puntos de corte con los ejes: No tiene.
- Asíntotas: $x=0$; $y=1$, pues $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{e^{x}-1}=1$; $y=0$, pues $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{e^{x}-1}=1$
- Extremos relativos: No tiene.
- Intervalos de signo constante: f es negativa en $(-\infty,0)$; f es positiva en $(o,+\infty)$.



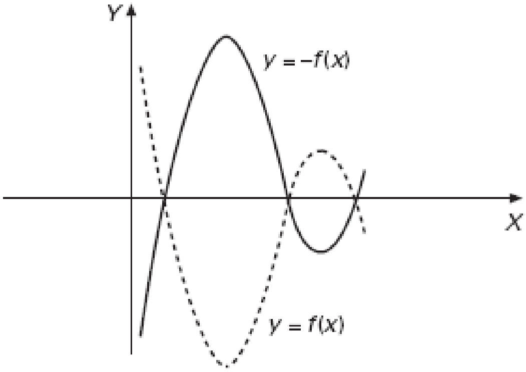
10. Queda:



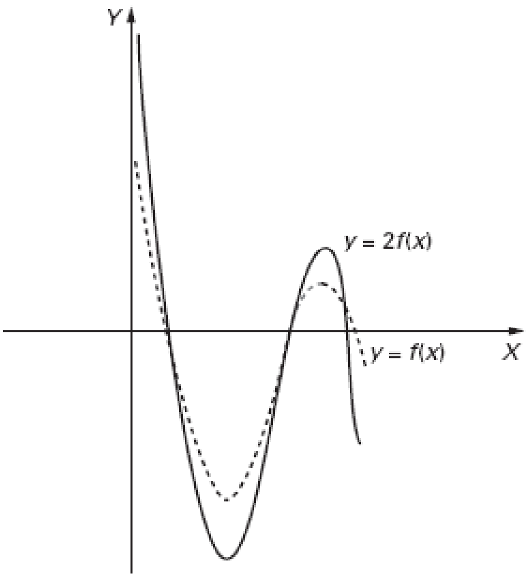
Es una función continua en $[0,60)$.

11. Las funciones quedan:

a) El gráfico de la función $y = -f(x)$ se obtiene al aplicar al gráfico de la función $y = f(x)$ una simetría de eje el eje de abscisas.



b) El gráfico de la función $y = 2 \cdot f(x)$ se obtiene duplicando las ordenadas correspondientes a cada valor de la abscisa en la gráfica de la función $y = f(x)$.



12. En cada caso:

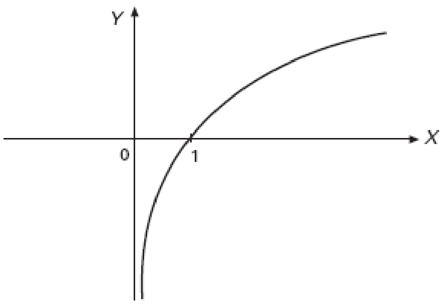
a) $Dom\, f = \mathbb{R} - \{1\}$

b) $f'(x) = 0$ para $x_0 = -\dfrac{5}{2}$ y $x_0 = -\dfrac{2}{3}$

c) $f'(x) > 0$ en $\left(-\dfrac{5}{2}, -\dfrac{2}{3}\right)$

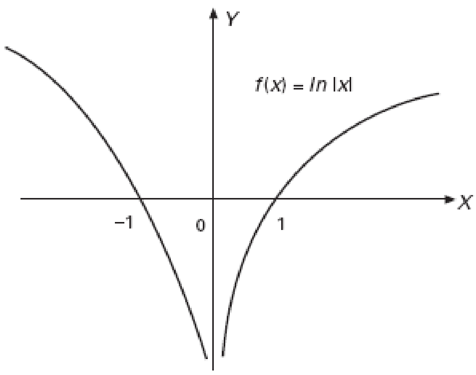
d) Asíntota vertical $x = 1$; asíntota horizontal $y = 0$ cuando $x \to +\infty$.

13. La gráfica de la función $f(x) = \ln x$ es:

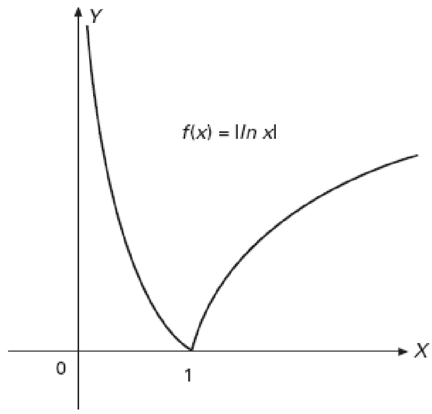


Las gráficas a representar son:

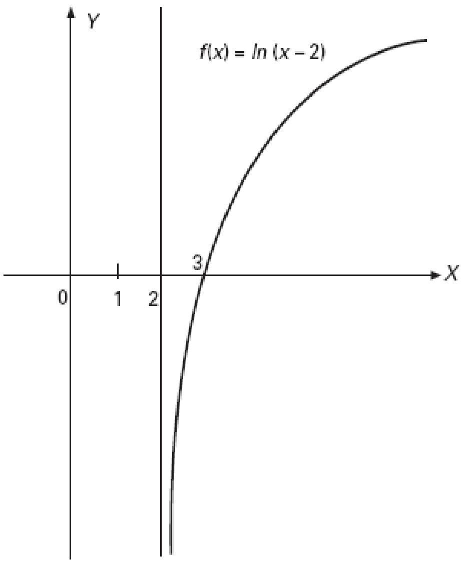
a)



b)



c)



PÁGINA 210

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

14. Dada la función $y = |x^2 - 7|$:

    a) Represéntala gráficamente.

    b) Calcula la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$.

    c) Halla sus máximos y mínimos relativos.

15. Una fábrica arroja diariamente material contaminante a una balsa según el ritmo dado por la siguiente función:

$$m(t) = 0{,}01t^3 - 0{,}2t^2 + t + 1$$

siendo m la cantidad de material en kilogramos y t la hora del día.

    a) ¿A qué hora del día arroja la mínima cantidad?

    b) Representa gráficamente la función.

16. La siguiente función indica el comportamiento de los beneficios obtenidos por una empresa desde el momento en que va a comenzar:

$$f(x) = \frac{60x}{x^2 + 9}$$

donde $f(x)$ representa los beneficios de la empresa en millones de euros; x los años y $x = 0$ indica el momento de constitución de la empresa.

    a) Haz una representación gráfica aproximada de la función e indica el dominio matemático y el dominio válido en el contexto del problema.

    b) ¿Al cabo de cuánto tiempo obtiene la empresa el beneficio máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

    c) ¿Perderá dinero la empresa en algún momento? ¿Es posible que llegue un momento en que no obtenga beneficios ni pérdidas? Razona las respuestas.

17. Se considera la función $f(x) = xe^{-ax}$ siendo a un parámetro real:

    a) Determina el valor del parámetro a para que $f(x)$ tenga un máximo en $x = 1$.

    b) Representa gráficamente la función resultante al sustituir el valor del parámetro obtenido en el apartado anterior.

18. Las pérdidas o ganancias, y, de una empresa, siguen una ley: $y = \dfrac{2x - 4}{x + 2}$, en la cual x representa los años de vida de la empresa.

    a) Determina el año en que la empresa deja de tener pérdidas.

    b) ¿Están sus beneficios limitados? Si lo están, ¿cuál es su límite?

19. Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{2x + 1}$.

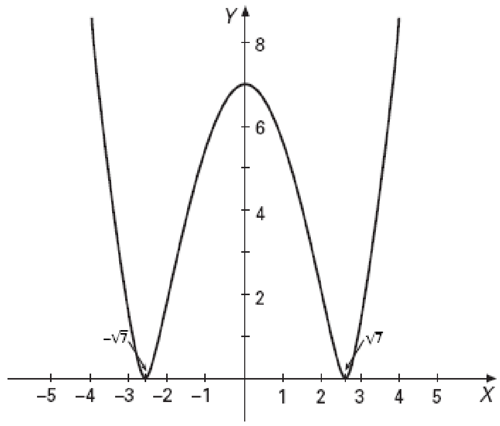
    a) Calcula sus asíntotas.

    b) Calcula sus máximos y mínimos.

    c) Represéntala gráficamente.

14. Los apartados quedan:

a) La representación gráfica es la siguiente:



La función se puede poner como: $f(x)=\begin{cases} x^2-7 \text{ si } x\in\left(-\infty,-\sqrt{7}\right]\cup\left[\sqrt{7},+\infty\right) \\ -x^2+7 \text{ si } x\in\left(-\sqrt{7},\sqrt{7}\right)\end{cases}$

b) La ecuación de la recta tangente en $x=1$ se calcula de la forma siguiente:

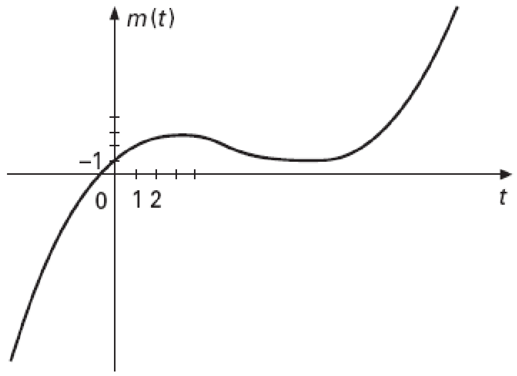
$$\left.\begin{array}{l} f'(1)=-2\cdot 1=-2 \\ f'(x)=-2x \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y-f(1)=f'(1)(x-1) \\ y-6=-2(x-1)\Rightarrow y=-2x+8 \end{array}$$

c) Máximo y mínimos relativos. Existe un máximo relativo en el punto (0,7) y sendos mínimos relativos en los puntos $\left(-\sqrt{7},0\right)$ y $\left(\sqrt{7},0\right)$.

15. La solución queda:

a) La mínima cantidad la arrojó a las 10 horas y fue de 1 Kg.

b) La gráfica de esta función es la del dibujo, aunque en la realidad del problema sólo tiene sentido a partir del $t = 0$.

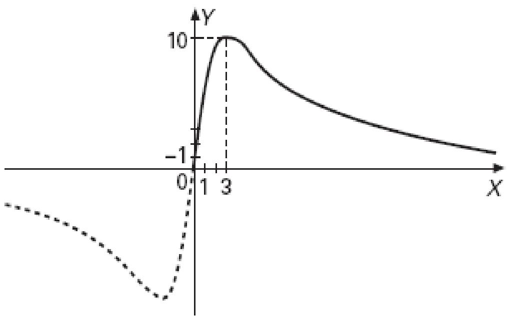


16. La solución es:

a) $Dom\, f = \mathbb{R}$. El dominio válido en el contexto del problema es $[0, +\infty)$.

b) La empresa obtiene beneficios máximos a los 3 años y éstos son de 10 millones de euros.

c) No pierde dinero y sí puede llegar a no obtener beneficios ni pérdidas al cabo de muchos años.



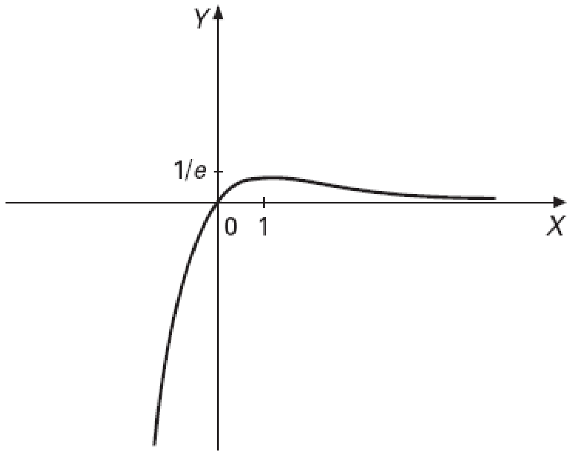
17. Queda:

a) Tiene un máximo en $x = 1$ *si* $f'(1) = 0$ *y* $f''(1) < 0$

$f'(x) = e^{-ax}(1 - ax) \Rightarrow f'(1) = e^{-a}(1 - a) = 0 \Rightarrow a = 1$

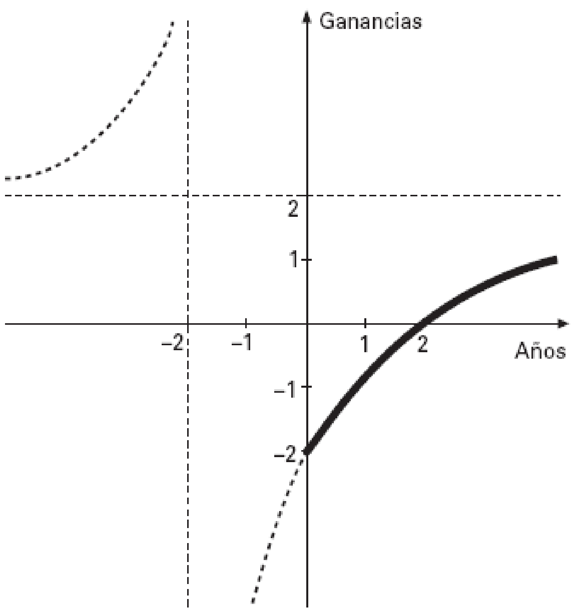
Para $a = 1$, $f(x)$ tiene un máximo en $\left(1, \frac{1}{e}\right)$

b) Representamos la función $y = x \cdot e^{-x}$



18. La solución es:

a) La gráfica de la función $y = \dfrac{2x-4}{x+2}$ es la que presentamos:



De toda ella tiene sentido real la parte que aparece con trozo grueso.
La empresa deja de tener pérdidas al cabo del segundo año, según apreciamos en la gráfica.

b) Los beneficios están limitados por 2, pues $y = 2$ es una asíntota horizontal: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-4}{x+2} = 2$

19. La solución es:

a) Asíntotas:

Horizontales: no tiene.

Verticales: la recta de ecuación es $x=-\dfrac{1}{2}$, pues: $\lim\limits_{x\to(-1/2)^+}\dfrac{x^2+2}{2x+1}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to(-1/2)^-}\dfrac{x^2+2}{2x+1}=-\infty$

Asíntotas oblicuas: $y=mx+b$

$$\left.\begin{array}{l} m=\underset{x\to\pm\infty}{\text{lím}}\dfrac{f(x)}{x}=\underset{x\to\pm\infty}{\text{lím}}\dfrac{x^2+2}{2x+1}=\dfrac{1}{2} \\ b=\underset{x\to\pm\infty}{\text{lím}}\left[f(x)-mx\right]=\underset{x\to\pm\infty}{\text{lím}}\left[\dfrac{x^2+2}{2x+1}-\dfrac{1}{2}x\right]=\underset{x\to\pm\infty}{\text{lím}}\dfrac{2x^2+4-2x^2-x}{2(2x+1)}=-\dfrac{1}{4} \end{array}\right\}\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}$$

b) Máximos y mínimos.

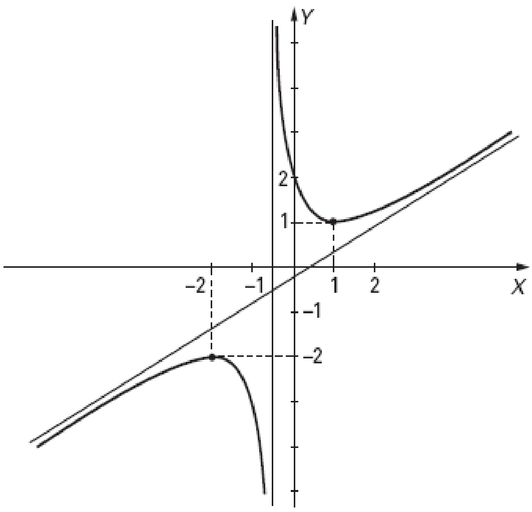
Las dos primeras derivadas son: $f'(x)=\dfrac{2\left(x^2+x-2\right)}{(2x+1)^2}$ y $f''(x)=\dfrac{18}{(2x+1)^3}$

Anulando $f'(x)=0$, se obtiene: $x=1$ y $x=-2$

$f''(1)>0\Rightarrow$ Mínimo en $\left[1,f(1)\right]=(1,1)$

$f''(-2)<0\Rightarrow$ Máximo en $\left[-2,f(-2)\right]=(-2,-2)$

c) Teniendo en cuenta los datos anteriores, la representación gráfica es la que aparece en el dibujo.



Unidad 9 – Integrales indefinidas

PÁGINA 213

cuestiones iniciales

1. Una función F es primitiva de otra f siempre y cuando la derivada de F sea f, es decir:

$$F \text{ es primitiva de } f \iff F' = f$$

Encuentra dos primitivas de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x$

b) $f(x) = \text{sen } x$

c) $f(x) = e^{-x}$

d) $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$

2. Comprueba, en cada caso, que F es primitiva de f:

a) $F(x) = \sqrt[4]{x^4 - 2} - 287;\quad f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt[4]{(x^4-2)^3}}$

b) $F(x) = \dfrac{1}{1+x} + \ln\left(\dfrac{1}{1+x}\right);\quad f(x) = \dfrac{-x-2}{(1+x)^2}$

SOLUCIONES

1. La solución es:

a) $F(x) = x^2 + 8; F(x) = x^2 - 3,5$

b) $F(x) = -\cos x - 2; F(x) = -\cos x + \dfrac{1}{3}$

c) $F(x) = -e^{x} + \sqrt{2}; F(x) = -e^{-x}$

d) $F(x) = 3\ln(x+2) + 5; F(x) = 3\ln(x+2) - 1$

2. La solución en cada caso:

a) $F'(x) = \dfrac{4x^3}{4\sqrt[4]{(x^4-2)^3}} = \dfrac{x^3}{\sqrt[4]{(x^4-2)^3}} = f(x)$, por tanto $F(x)$ es primitiva de $f(x)$.

b) $F'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2} + \dfrac{-1}{1+x} = \dfrac{-1-1-x}{(1+x)^2} = \dfrac{-2-x}{(1+x)^2} = f(x)$, por tanto $F(x)$ es primitiva de $f(x)$.

c) $F'(x) = 4\cdot \text{sen}\,2x \cdot \cos 2x + 4\cdot \cos 2x \cdot \text{sen}\,2x = 8\cdot \text{sen}\,2x\cdot \cos 2x = f(x)$

PÁGINA 225

ACTIVIDADES

- Utiliza el lenguaje matemático en la resolución de los siguientes problemas:

  1. **Números impares.** Demuestra que la suma de dos números naturales impares es un número par.
  2. **Números cuadrados.** Demuestra que si *a*, *b*, *c* y *d* son números naturales, tales que

     $$P = a^2 + b^2 \qquad \text{y} \qquad Q = c^2 + d^2$$

     entonces el producto *PQ* es también suma de los cuadrados de dos números naturales.

SOLUCIONES

1. Los números de la forma $2n+1$ y $2n+3$ son números impares. Su suma es: $(2n+1)+(2n+3)=4n+4=4(n+1)$ que es un número par.

2. $P \cdot Q=(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2=(ac+bd)^2+(ac-bd)^2$

PÁGINA 230

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Halla tres primitivas de cada una de las siguientes funciones:

a) $f_1(x) = x$ b) $f_2(x) = 4x^3 - 5$ c) $f_3(x) = 2$ d) $f_4(x) = e^{2x}$

2. Halla la primitiva de la función $f(x) = \frac{1}{x+1}$ que valga 3 para $x = 0$.

3. Encuentra una función $y = f(x)$ cuya derivada sea $f'(x) = 3x^2$ y pase por el punto (2, 10).

4. Calcula las siguientes integrales, cuyas funciones primitivas son potenciales:

a) $\int 5x^7\, dx$ e) $\int (3x - 2)\, dx$ i) $\int \frac{1}{(2x+1)^2}\, dx$

b) $\int \frac{2}{x^6}\, dx$ f) $\int x^5(x^2 - 1)\, dx$ j) $\int \text{sen } x \cdot \cos x\, dx$

c) $\int \sqrt[3]{x^4}\, dx$ g) $\int (5x - 3)^{12}\, dx$ k) $\int \frac{\text{tg}\, x}{\cos^2 x}\, dx$

d) $\int \frac{x^{-2}}{x^3}\, dx$ h) $\int \sqrt{6 - 9x}\, dx$ l) $\int 4x^2\, \sqrt{1 - x^3}\, dx$

5. Calcula las siguientes integrales, cuyas funciones primitivas son exponenciales:

a) $\int 3^{2x}\, dx$ c) $\int 4^{x^2+1} \cdot x\, dx$ e) $\int \frac{e^{\ln x}}{x}\, dx$

b) $\int e^{\text{sen } x} \cdot \cos x\, dx$ d) $\int 2^{x/2}\, dx$ f) $\int e^{-x}\, dx$

6. Calcula las siguientes integrales, cuyas funciones primitivas son logarítmicas:

a) $\int \frac{2}{3x+5}\, dx$ c) $\int \frac{3x+6}{x^2+4x+5}\, dx$ e) $\int \frac{e^x}{2e^x - 3}\, dx$

b) $\int \text{tg}\, x\, dx$ d) $\int \frac{2x^2}{3x^3 - 7}\, dx$ f) $\int \frac{5}{x \ln x}\, dx$

7. Calcula las siguientes integrales, cuyas funciones primitivas son trigonométricas:

a) $\int \text{sen}\,(3x + 1)\, dx$ c) $\int [1 + \text{tg}^2\, e^x] \cdot e^x\, dx$ e) $\int 5 \cdot \text{sen}\, 2x \cdot dx$

b) $\int 2x \cdot \cos\,(3x^2)\, dx$ d) $\int \frac{3x}{\cos^2 x^2}\, dx$ f) $\int \frac{\text{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

SOLUCIONES

1. Las primitivas quedan:

a) $F_1(x) = \frac{x^2}{2}$; $F_2(x) = \frac{x^2}{2} - 5$; $F_3(x) = \frac{x^2}{2} + 7$

b) $F_1(x) = x^4 - 5x$; $F_2(x) = x^4 - 5x + 4$; $F_3(x) = x^4 - 5x + \frac{1}{3}$

c) $F_1(x) = 2x - 7$; $F_2(x) = 2x + 4$; $F_3(x) = 2x - \frac{2}{5}$

d) $F_1(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 3$; $F_2(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$; $F_3(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \sqrt{2}$

2. Todas las primitivas son de la forma de $f(x) = \frac{1}{x+1}$ son de la forma $F(x) = \ln|x+1| + C$.

   La que vale 3 para $x = 0$ es: $F(x) = \ln|x+1| + 3$

3. La función buscada es: $f(x) = x^3 + 2$

4. Las primitivas quedan:

a) $\frac{5x^8}{8} + C$

b) $-\frac{2}{5x^5} + C$

c) $\frac{3\sqrt[3]{x^7}}{7} + C$

d) $\frac{1}{-4x^4} + C$

e) $\frac{3x^2}{2} - 2x + C$

f) $\frac{x^8}{8} - \frac{x^6}{6} + C$

g) $\frac{1}{65} \cdot (5x-3)^{13} + C$

h) $-\frac{2 \cdot \sqrt{(6-9x)^3}}{27} + C$

i) $-\frac{1}{2(2x+1)} + C$

j) $\frac{(sen\ x)^2}{2} + C$

k) $\frac{(\operatorname{tg} x)^2}{2} + C$

l) $\frac{-8}{9}\sqrt{(1-x^3)^3} + C$

5. La integrales quedan:

a) $\frac{3^{2x}}{2 \cdot \ln 3} + C$

b) $e^{sen\ x} + C$

c) $\frac{4^{x^2+1}}{2\ \ln 4} + C$

d) $\frac{2 \cdot 2^{x/2}}{\ln 2} + C$

e) $e^{\ln x} + C$

f) $-e^{-x} + C$

6. Las integrales quedan:

a) $\frac{2}{3}\ ln\ |3x + 5| + C$ b) $-ln\ |cos\ x| + C$

c) $\frac{3}{2}\ ln\ |x^2 + 4x + 5| + C$ d) $\frac{2}{9}\ ln\ |3x^3 - 7| + C$

e) $\frac{1}{2}\ ln\ |2 \cdot e^x - 3| + C$ f) $5 \cdot ln\ |ln\ x| + C$

7. Las integrales quedan:

a) $-\frac{1}{3}\ cos(3x + 1) + C$ b) $\frac{1}{3}\ sen(3x^2) + C$

b) $tg\ e^x + C$ d) $\frac{3}{2}\ tg(x^2) + C$

c) $-\frac{5}{2}\ cos\ (2x) + C$ f) $-2 \cdot cos\sqrt{x} + C$

PÁGINA 231

8. Calcula las siguientes integrales, cuyas funciones primitivas son inversas de las funciones trigonométricas:

a) $\int \frac{5}{1+9x^2}\,dx$ c) $\int \frac{3x}{16+9x^4}\,dx$ e) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

b) $\int \frac{7}{\sqrt{1-25x^2}}\,dx$ d) $\int \frac{8}{\sqrt{4-9x^2}}\,dx$ f) $\int \frac{-14}{4x^2+7}\,dx$

9. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de integrales inmediatas:

a) $\int (2x^2-4x+5)\,dx$ e) $\int \left(2\sqrt[4]{x^3}-\frac{5}{x}\right)dx$ i) $\int \frac{3x}{x^2+16}\,dx$

b) $\int \left(3x+\frac{1}{x^2}\right)dx$ f) $\int \left[\frac{x^4-3x\sqrt{x}+2}{x}\right]dx$ j) $\int (2x^2-3)^2\,5x\,dx$

c) $\int (x^2-4x+4)^2\,dx$ g) $\int \frac{x+1}{2x^2+4x-7}\,dx$ k) $\int \frac{2}{x^3}\cdot\left(x^2-\frac{5}{3}x+\frac{7}{5}\right)dx$

d) $\int \frac{4e^x}{3-2e^x}\,dx$ h) $\int (\sqrt{9x}-x^3)\,dx$ l) $\int \frac{5x^2}{x^3+8}\,dx$

10. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración por partes:

a) $\int \ln x \cdot dx$ d) $\int (1-3x)3^x\,dx$ g) $\int x^2 \cos x\,dx$

b) $\int x^3 \cdot \ln x\,dx$ e) $\int x^2 \cdot e^{-x} \cdot dx$ h) $\int (x-2)\cdot \text{sen}\,2x \cdot dx$

c) $\int 5x \cdot e^x\,dx$ f) $\int (2x+5)\cdot \text{sen}\,x \cdot dx$ i) $\int e^x \cdot \text{sen}\,x\,dx$

11. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de funciones racionales:

a) $\int \frac{3x}{x-2}\,dx$ c) $\int \frac{-x^3}{x^2+4}\,dx$ e) $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx$

b) $\int \frac{4}{x^2-3x+2}\,dx$ d) $\int \frac{x^3+x+3}{x^2+1}\,dx$ f) $\int \frac{4x^2-3x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx$

12. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de cambio de variable:

a) $\int x\sqrt{x^2-1}\,dx$ d) $\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}+1}\,dx$ g) $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$

b) $\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$ e) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx$ h) $\int \frac{dx}{e^x-3}$

c) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}\,dx$ f) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$ i) $\int \frac{x}{1-\sqrt{x+1}}\,dx$

SOLUCIONES

8. Las integrales quedan:

a) $\frac{5}{3}\ arc\ tg(3x) + C$ b) $\frac{7}{5}\ arc\ sen(5x) + C$

b) $\frac{1}{8}\ arc\ tg\left(\frac{3x^2}{4}\right) + C$ d) $\frac{8}{3}\ arc\ sen\left(\frac{3x}{2}\right) + C$

c) $arc\ tg(e^x) + C$ f) $-\sqrt{7} \cdot arc\ tg\left(\frac{2x}{\sqrt{7}}\right) + C$

9. Las integrales quedan:

a) $\int (2x^2 - 4x + 5)\,dx = \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 5x + C$ b) $\int \left(3x + \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{x} + C$

c) $\int (x^2 - 4x + 4)\,dx = \frac{(x-2)^5}{5} + C$ d) $\int \frac{4e^x}{3 - 2e^x}\,dx = -2\ln|3 - 2e^x| + C$

e) $\int \left(2\sqrt[4]{x^3} - \frac{5}{x}\right) dx = \frac{8\sqrt[4]{x^7}}{7} - 5\ln|x| + C$ f) $\int \frac{x^4 - 3x\sqrt{x} + 2}{x}\,dx = \frac{x^4}{4} - 2\sqrt{x^3} + 2\ln|x| + C$

g) $\int \frac{x+1}{2x^2 + 4x - 7}\,dx = \frac{1}{4}\ln|2x^2 + 4x - 7| + C$ h) $\int \left(\sqrt{9x} - x^3\right) dx = 2\sqrt{x^3} - \frac{x^4}{4} + C$

i) $\int \frac{3x}{x^2 + 16}\,dx = \frac{3}{2}\ln(x^2 + 16) + C$ j) $\int (2x^2 - 3)^2\, 5x \cdot dx = \frac{5(2x^2 - 3)^3}{12} + C$

k) $\int \frac{2}{x^3}\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{7}{5}\right) dx = 2\ln|x| + \frac{5}{3x} + \frac{7}{10x^2} + C$ l) $\int \frac{5x^2}{x^3 + 8}\,dx = \frac{5}{3}\ln|x^3 + 8| + C$

10. Las integrales quedan:

a) $\int ln\ x \cdot dx = x\ ln\ x - x + C$

b) $\int x^3 \cdot ln\ x \cdot dx = \frac{x^4}{4}\ ln\ x - \frac{x^4}{16} + C$

c) $\int 5x \cdot e^x\, dx = 5x\, e^x - 5e^x + C$

d) $\int (1-3x)\cdot 3^x \cdot dx = \dfrac{(1-3x)\cdot 3^x}{ln\ 3} + \dfrac{3^{x+1}}{(ln\ 3)^2} + C$

e) $\int x^2 \cdot e^{-x}\, dx = -x^2 \cdot e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$

f) $\int (2x+5)\ \text{sen}\ x \cdot dx = 2\ \text{sen}\ x - (2x+5)\cdot \cos x + C$

g) $\int x^2 \cdot \cos x \cdot dx = x^2 \cdot \text{sen}\ x + 2x \cdot \cos x - 2\ \text{sen}\ x + C$

h) $\int (x-2)\ \text{sen}\ 2x\ dx =$

$= \dfrac{1}{4}\ \text{sen}\ 2x - \dfrac{1}{2}\ (x-2)\ \cos 2x + C$

i) $\int e^x \cdot \text{sen}\ x\ dx = \dfrac{e^x \cdot \text{sen}\ x - e^x \cdot \cos x}{2} + C$

11. Las integrales quedan:

a) $\int \dfrac{3x}{x-2} dx = 3x + 6\ln|x-2| + C$

b) $\int \dfrac{4}{x^2-3x+2} dx = 4\ln|x-2| - 4\ln|x-1| + C$

c) $\int \dfrac{-x^3}{x^2+4} dx = -\dfrac{x^2}{2} + 2\ln(x^2+4) + C$

d) $\int \dfrac{x^3+x+3}{x^2+1} dx = \dfrac{x^2}{2} + 3\ \text{arctg}\ x + C$

e) $\int \dfrac{x^2+1}{x^2-1} dx = x + \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1} + C\right|$

f) $\int \dfrac{4x^2-3x+1}{x^3-2x^2+x} dx = \ln|x| + 3\ln|x-1| - \dfrac{2}{x-1} + C$

12. Las integrales quedan:

a) Cambio de variable $(x^2 - 1 = t^2)$

$$\int x\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{(x^2-1)^{3/2}}{3} + C$$

b) Cambio $(e^{-x} = t)$;

$$\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = -ln|1+e^{-x}| + C$$

c) Cambio $(1+\ln x = t^3)$;

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+ln\,x}}{x}\,dx = \frac{3(1+ln\,x)^{4/3}}{4} + C$$

d) Cambio $(2x-3=t^2)$;

$$\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}+1}\,dx = x - \sqrt{2x-3} + ln(\sqrt{2x-3}+1) + C$$

e) Cambio $(x^2+1=t^2)$;

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx = \sqrt{x^2+1} + ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right| + C$$

f) Cambio $(\ln x = t)$;

$$\int \frac{dx}{x \cdot ln^2 x} = -\frac{1}{ln\,x} + C$$

g) Cambio $(x=t^2)$;

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx = 2\,ln(\sqrt{x}+1) + C$$

h) Cambio $(e^x = t^2)$;

$$\int \frac{dx}{e^x-3} = \frac{ln(e^x-3)}{3} - \frac{x}{3} + C$$

i) Cambio $(x+1=t^2)$;

$$\int \frac{x}{1-\sqrt{x+1}}\,dx = x - \frac{2(x+1)^{3/2}}{3} + C$$

PÁGINA 232

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

13. Determina la función $f(x)$ sabiendo que su gráfica pasa por el punto (2, 4) y su derivada es:

$$f'(x) = \frac{1}{x^4} + 2x$$

14. Calcula $\int \sqrt{x}\,(x^2 + 2x)\,dx$.

15. Halla una función cuya segunda derivada es $6x^2 + 2x + 2$, tal que en $x = 0$ vale 5 y su primera derivada pasa por (–1, 0).

16. Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int (x-1)(2x-3)\,dx$

b) $\int \frac{2x}{x^2+5}\,dx$

c) $\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$

d) $\int \frac{x^2}{4-x}\,dx$

17. Sabiendo que la función $y = f(x)$ es continua, que $f(0) = 0$ y, además, que su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Calcula $f(x)$.

b) Esboza su gráfica.

18. Encuentra la primitiva de la función $f(x) = (x-2)\,e^{2x}$ que se anule para $x = 2$.

19. Una función $f(x)$ tiene como derivada $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ y verifica $f(0) = 3$.

Encuentra la función $f(x)$.

20. Una función $f(x)$ verifica $f''(x) = 2$. Halla $f(x)$ sabiendo que su gráfica pasa por (2, 0) y la pendiente de la tangente en (2, 0) es 10.

21. Calcula $\int \frac{x+1}{x^2-x}\,dx$.

22. Halla $f(x)$ si sabemos que $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$ y $f''(x) = 3x$.

23. Calcula una función real $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumple las condiciones siguientes:

$$f'(0) = 5, \quad f''(0) = 1, \quad f(0) = 0 \quad \text{y} \quad f'''(x) = 24x - 12$$

24. Halla dos primitivas de la siguiente función:

$$f(x) = e^x \cdot \sqrt{(1+e^x)^3}$$

13. Queda:

$$f(x)=\int\left(\frac{1}{x^4}+2x\right)dx=\frac{1}{-3x^3}+x^2+C$$

Si la grafica de esta función pasa por (2, 4) se verifica: $4=-\frac{1}{24}+4+C\Rightarrow C=\frac{1}{24}$

La función pedida es $f(x)=-\frac{1}{-3x^3}+x^2+\frac{1}{24}$

14. Queda:

$$\int\sqrt{x}(x^2+2x)\,dx=\int(x^{5/2}+2x^{3/2})\,dx=\frac{2x^{7/2}}{7}+\frac{4x^{5/2}}{5}+C$$

15. La solución es:

$f''(x)=6x^2+2x+2$

$f'(x)=2x^3+x^2+2x+C$ Por pasar por $(-1,0)\Rightarrow C=3$

Luego $f'(x)=2x^3+x^2+2x+3$

$f(x)=\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}+x^2+3x+C$

Imponiendo que pase por (0, 5) obtenemos $C=5$ luego $f(x)=\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}+x^2+3x+5$.

16. Las integrales quedan:

a) Es inmediata $\int\left(2x^2-5x+3\right)dx=\frac{2x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+3x+C$

b) Es inmediata $\int\frac{2x}{x^2+5}dx=\ln(x^2+5)+C$

c) Por cambio de variable $(x+1=t)$ obtenemos:

$$\int\frac{x}{(x+1)^2}\,dx=ln\,|x+1|+\frac{1}{x+1}+C$$

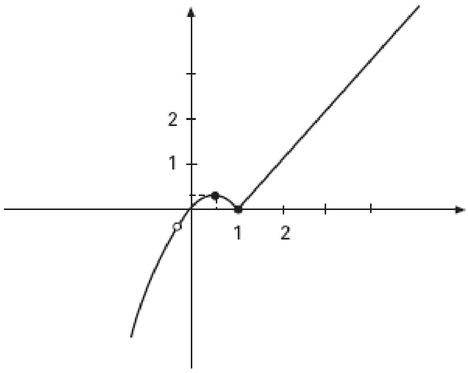
d) Es racional

$$\int\frac{x^2}{4-x}\,dx=\frac{-x^2}{2}-4x-16\,ln\,|x-4|+C$$

17. En cada apartado:

a) $f(x) = \begin{cases} x - x^2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

b) Su gráfica es:



18. La solución:

Por partes: $\displaystyle\int (x-2)e^{2x}\,dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{5}{4}\right)e^{2x} + C$

Para que se anule en $x=2$ se debe verificar:

$$\left(1 - \frac{5}{4}\right)e^4 + C = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{4}e^4$$

Por tanto la primitiva buscada es:

$$f(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{5}{4}\right)e^{2x} + \frac{1}{4}e^4$$

19. La solución:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int (1-x^2)^{-1/2} \cdot x\,dx = -\sqrt{1-x^2} + C$$

$$f(x) = -\sqrt{1-x^2} + C$$

$$f(0) = 3 \Rightarrow -1 + C = 3 \Rightarrow C = 4$$

Por tanto, la función buscada es:

$$f(x) = -\sqrt{1-x^2} + 4$$

20. Queda:

Como $f''(x)=2 \Rightarrow f'(x)=2x+C \Rightarrow f(x)=x^2+Cx+D$
Como $f''(x)$ pasa por (2, 0) : $0=4+2C+D$
Como $f'(2)=10$: $4+C=10$
Entonces: $C=6$; $D=-16$

La función buscada es: $f(x)=x^2+6x-16$

21. La solución de la integral racional es:

$$\int \frac{x+1}{x^2-x}dx=\int \frac{-1}{x}dx+\int \frac{2}{x-1}dx=\ln|x|+2\ln|x-1|+C$$

22. La solución es:

$f''(x)=3x \Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2}{2}+C$. Como $f'(0)=2 \Rightarrow C=2$

Luego $f'(x)=\frac{3x^2}{2}+2$, por tanto $f(x)=\frac{x^3}{2}+2x+1$

23. Queda:

$f'''(x) = 24x - 12 \;\Rightarrow\; f''(x) = 12x^2 - 12x + C$
Como $f''(0) = 1 \;\Rightarrow\; C = 1 \;\Rightarrow\; f''(x) = 12x^2 - 12x + 1$
$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + x + D$. Como $f'(0) = 5 \;\Rightarrow\; D = 5$
Luego $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + x + 5$
Por tanto $f(x) = x^4 - 2x^3 + \frac{x^2}{2} + 5x + K$.
Como $f(0) = 0 \;\Rightarrow\; K = 0$
$f(x) = x^4 - 2x^3 + \frac{x^2}{2} + 5x$

24. La integral queda:

Todas las primitivas de $f(x)$ son $F(x)=\frac{2(1+e^x)^{5/2}}{5}+C$

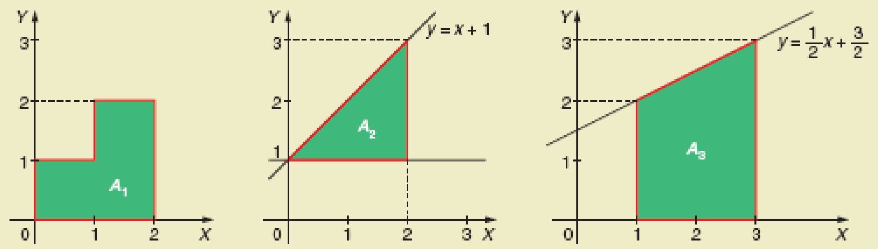
Dos primitivas son: $F_1(x)=\frac{2(1+e^x)^{5/2}}{5}+7$ y $F_2(x)=\frac{2(1+e^x)^{5/2}}{5}-12$

Unidad 10 – Integrales definidas. Aplicaciones

PÁGINA 235

cuestiones iniciales

1. Calcula el área de los recintos planos A_1, A_2 y A_3:



2. Halla el área del recinto limitado por las rectas de ecuaciones: $y = -x - 3$; $x = 1$; $x = 4$; $y = -2$.

SOLUCIONES

1. Las áreas quedan:

$$A_1 = 1^2 + 1 \cdot 2 = 3u^2 \qquad A_2 = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2u^2 \qquad A_3 = \frac{2+3}{2} \cdot 2 = 5u^2$$

2. El área del recinto viene dada por :

$$\text{Área} = \left| \int_1^4 (-x-3) - (-2)\, dx \right| = 10{,}5\, u^2$$

PÁGINA 249

ACTIVIDADES

■ Utiliza los conceptos asociados a los teoremas en la resolución de los siguientes problemas:

1. **Teoremas.** A partir del siguiente enunciado, que es un teorema directo, enuncia el recíproco, el contrario y el contrarrecíproco:

   «La suma de dos números naturales impares es un número par.»

2. **Desigualdad.** Demuestra que si a y b son dos números reales positivos, entonces se verifica la siguiente desigualdad:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab}$$

SOLUCIONES

1. La solución queda:

   Directo: Si sumamos dos números impares entonces, obtenemos un número par.

   Este resultado es verdadero: $(2n+1)+(2m+1)=2(n+m+1)$ número par

   Recíproco: Si obtenemos un número par, entonces, sumamos dos números impares.
   Este resultado es falso. Podemos obtener un número par de la suma de dos pares.

   Contrario: Si no sumamos dos números impares, entonces, no obtenemos un número par.
   Este resultado es falso. De la suma de dos números pares se obtiene un número par.

   Contrarecíproco: Si no obtenemos un número par, entonces, no sumamos dos números impares.

   Este resultado es verdadero. Si no obtenemos un número par, estamos obteniendo un número impar. Este resultado proviene de sumar un número impar y otro número par; por tanto, no sumamos dos números impares.

2. Como en la hipótesis nos dicen que a y b son dos números reales positivos, podemos poner $m=\sqrt{a}$ y $n=\sqrt{b}$; así la desigualdad dada quedaría de la forma:

   $\frac{2}{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}} \le m{\cdot}n$ Operando en esta desigualdad obtenemos $\frac{2m^2n^2}{m^2+n^2} \le m{\cdot}n$ o lo que es lo mismo, vamos a demostrar que $m{\cdot}n - \frac{2m^2n^2}{m^2+n^2} \ge 0$.

   Operando, convenientemente, en la primera expresión obtenemos:

   $m{\cdot}n\left[\frac{m^2+n^2-2mn}{m^2+n^2}\right] = m{\cdot}n\frac{(m-n)^2}{m^2+n^2}$ y como m y n son números reales positivos queda probado que esta expresión es mayor o igual que cero que es lo que queríamos demostrar.

PÁGINA 254

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Se considera la función $f(x) = 16 - x^2$ en el intervalo $I = [-1, 4]$ y la partición de dicho intervalo dada por $P = \{-1, 0, 2, 4\}$.

   Encuentra de forma razonada el valor de las sumas superior e inferior correspondientes a f y a dicha partición P.

2. Una función creciente verifica que $f(1) = 1$, $f(2) = 3$ y $f(13) = 10$. Halla de forma razonada la suma superior y la inferior correspondientes a la función f en el intervalo $[1, 3]$ respecto a la partición $P = \{1, 2, 3\}$.

3. Calcula las siguientes integrales definidas:

   a) $\int_1^6 \frac{4\,dx}{\sqrt{x+3}}$

   b) $\int_{-2}^2 3x \cdot \sqrt[3]{x^2 - 3}dx$

   c) $\int_3^5 \frac{\ln x}{x}dx$

   d) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+2}dx$

   e) $\int_{-1}^1 \frac{4x}{(x^2+2)^4}dx$

   f) $\int_2^4 \frac{2x+4}{x^2-1}\,dx$

   g) $\int_2^5 \frac{x^2+1}{x^3-x}dx$

   h) $\int_0^4 \sqrt{9+4x}\,dx$

   i) $\int_0^b \frac{dx}{x+b}$ con $b > 0$

   j) $\int_{-1}^2 \frac{x}{x+2}\,dx$

   k) $\int_0^2 4x^2 (1 + x^3)^5\,dx$

   l) $\int_{-50}^{50} (x^{63} + x^{11})\,dx$

   m) $\int_0^1 24 \cdot 2^x\,dx$

   n) $\int_{-1}^0 x \cdot e^x\,dx$

   ñ) $\int_2^3 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$

4. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, halla $\int_{-1}^{\sqrt{3}} f(x)\,dx$.

5. El polinomio de grado dos $P(x) = x^2 + Ax + B$ verifica que se anula para $x = 2$ y, además, se sabe que $\int_0^1 P(x)\,dx = 4$. Halla los coeficientes A y B razonadamente.

6. Calcula las siguientes integrales definidas; puedes ayudarte de las representaciones gráficas:

   a) $\int_0^2 3 \cdot dx$

   b) $\int_0^3 2x \cdot dx$

   c) $\int_1^3 2x \cdot dx$

   d) $\int_{-2}^2 |x| \cdot dx$

   e) $\int_0^{2\pi} \text{sen}\, x \cdot dx$

   f) $\int_{-3}^3 x^3\,dx$

7. Sea la función $F(x) = x^4 + ax^3 + bx$. Calcula a y b sabiendo que:

   - El punto $(1, 2)$ pertenece a la gráfica de $F(x)$.
   - $F(x)$ es función primitiva de cierta función $f(x)$ cuya integral en el intervalo $[1, 2]$ es igual a 10.

SOLUCIONES

1. Las sumas quedan:

La suma superior es: $S(P)=(0-(-1))\cdot 16+(2-0)\cdot 16+(4-2)\cdot 12=16+32+24=72$.

La suma inferior es: $s(P)=(0-(-1))\cdot 15+(2-0)\cdot 12+(4-2)\cdot 0=15+24+0=39$.

2. Las sumas quedan:

La suma superior es: $S(P)=(2-1)\cdot 3+(3-2)\cdot 10=3+10=13$.

La suma inferior es: $s(P)=(2-1)\cdot 1+(3-2)\cdot 3=1+3=4$.

3. Las integrales definidas quedan:

a) $\int_1^6 \frac{4}{\sqrt{x+3}}\,dx$ Calculamos la integral indefinida como integral inmediata, haciendo $C=0$ y aplicando la regla de Barrow obtenemos: $\left[8\sqrt{x+3}\right]_1^6=24-16=8$

b) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+2}\,dx$ Calculamos la integral indefinida como integral inmediata, haciendo $C=0$ y aplicando la regla de Barrow obtenemos: $\left[\ln\left(e^x+2\right)\right]_0^1=\ln\frac{e+2}{3}=0,45$

c) $\int_3^5 \frac{\ln x}{x}\,dx$ Calculamos la integral indefinida como integral inmediata, haciendo $C=0$ y aplicando la regla de Barrow obtenemos: $\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_3^5=\frac{(\ln 5)^2}{2}-\frac{(\ln 3)^2}{2}=0,69$

d) $\int_2^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ Calculamos la integral indefinida como integral inmediata, haciendo $C=0$ y aplicando la regla de Barrow obtenemos: $\left[\operatorname{arctg} x\right]_2^{\sqrt{3}}=\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}2=-0,06\,rad$

e) $\int_{-1}^1 \frac{4x}{\left(x^2+2\right)^4}\,dx$ Calculamos la integral indefinida como integral inmediata, haciendo $C=0$ y aplicando la regla de Barrow obtenemos: $\left[\frac{-2}{3\left(x^2+2\right)^3}\right]_{-1}^1=0$

f) $\int_2^4 \frac{2x+4}{x^2-1}\,dx$ Resolvemos la integral indefinida por el método de integración de funciones racionales, descomponiendo la fracción dada en suma de fracciones simples.
Después hacemos $C=0$ y aplicando la regla de Barrow obtenemos el resultado de la integral pedida:

$$\int \frac{2x+4}{x^2-1}dx=\int \frac{3}{x-1}dx-\int \frac{1}{x+1}dx \quad \Rightarrow$$

$$\int_2^4 \frac{2x+4}{x^2-1}\,dx\ \int_2^4 \frac{2x+4}{x^2-1}\,dx=\left[\ln\frac{(x-1)^3}{x+1}\right]_2^4=\ln\frac{81}{5}=2{,}79$$

g) $\int_2^5 \frac{x^2+1}{x^3-x}\,dx$ Calculamos la primitiva por descomposición en fracciones simples, aplicamos la regla de Barrow y obtenemos:

$$\int_2^5 \frac{x^2+1}{x^3-x}\,dx=-\int_2^5 \frac{1}{x}\,dx+\int_2^5 \frac{1}{x-1}\,dx+\int_2^5 \frac{1}{x+1}\,dx=$$

$$=[-\ln x+\ln(x-1)+\ln(x+1)]_2^5=\ln\frac{16}{5}=1{,}1632$$

h) $\int_0^4 \sqrt{9+4x}dx$ Calculamos la integral indefinida como integral inmediata, haciendo $C=0$ y aplicando la regla de Barrow obtenemos: $\left[\frac{\sqrt{(9+4x)^3}}{6}\right]_0^4=\frac{125}{6}-\frac{27}{6}=\frac{49}{3}$

i) $\int_0^b \frac{dx}{x+b}$ Calculamos la integral indefinida como integral inmediata, haciendo $C=0$ y aplicando la regla de Barrow obtenemos: $\left[\ln(x+b)\right]_0^b=\ln\frac{2b}{b}=\ln 2=0{,}69$

j) $\int_{-1}^2 \frac{x}{x+2}\,dx$ Resolvemos la integral indefinida por el método de integración de funciones racionales, dividiendo numerador por denominador. Después hacemos $C=0$ y aplicando la regla de Barrow obtenemos el resultado de la integral pedida:

$$\int \frac{x}{x+2}dx=\int dx-\int \frac{2}{x+2}dx=x-\ln|x+2|+C \quad \Rightarrow \quad \int_{-1}^2 \frac{x}{x+2}\,dx=3-\ln 4=1{,}61$$

k) $\int_0^2 4x^2\left(1+x^3\right)^5 dx$ Calculamos la integral indefinida como integral inmediata, haciendo $C=0$ y aplicando la regla de Barrow obtenemos: $\left[\frac{2\left(1+x^3\right)^6}{9}\right]_0^2=118097{,}8$

l) $\int_{-50}^{50}\left(x^{63}+x^{11}\right)dx$ Calculamos la integral indefinida como integral inmediata, haciendo $C=0$ y aplicando la regla de Barrow obtenemos: $\left[\frac{x^{64}}{64}+\frac{x^{12}}{12}\right]_{-50}^{50}=0$

m) $\int_0^1 24\cdot 2^x\cdot dx$ Calculamos la integral indefinida como integral inmediata, haciendo $C=0$ y aplicando la regla de Barrow obtenemos: $\left[\frac{24\cdot 2^x}{\ln 2}\right]_0^1=\frac{24}{\ln 2}$

n) $\int_{-1}^0 x\cdot e^{2x}\cdot dx$ Calculamos la integral indefinida por el método de integración por partes. Después haciendo $C=0$ y aplicando la regla de Barrow obtenemos:

$$\int x\cdot e^{2x}dx=\frac{1}{2}x\cdot e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C \quad \Rightarrow \quad \int_{-1}^0 x\cdot e^{2x}\cdot dx=\left[\frac{1}{2}x\cdot e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}\right]_{-1}^0=0{,}15$$

ñ) $\int_2^3 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ Resolvemos esta integral por el método de cambio de variable. Para ello hacemos $x+1=t^2$ y obtenemos una integral racional que hemos de descomponer en suma de fraccionas simples.

$$\int \frac{2tdt}{\left(t^2-1\right)t}=\int\frac{1}{t-1}dt-\int\frac{1}{t+1}dt=\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|$$

Después aplicamos la regla de Barrow y calculamos el valor de la integral definida dada:

$$\int_2^3 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}=\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|_2^3=0{,}218$$

4. La integral queda:

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} f(x)\,dx=\int_{-1}^0(1-x)\,dx+\int_0^{\sqrt{3}}x^2\,dx=\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0+\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}}=\frac{3}{2}+\sqrt{3}$$

5. Como $P(2)=0\Rightarrow 4+2A+B=0$

Como $\int_0^{-1}P(x)\,dx=4\Rightarrow\left[\frac{x^3}{3}+\frac{Ax^2}{2}+Bx\right]_0^1=4\Rightarrow 3A+6B=22$

Resolviendo el sistema formado por las dos condiciones obtenemos:

$$\begin{cases}2A+B=-4\\3A+6B=22\end{cases}\Rightarrow A=-\frac{46}{9}\ \text{Y}\ B=\frac{56}{9}.$$

6. Las integrales quedan:

a) $\int_0^{-2} 3 \cdot dx = [3x]_0^{-2} = 6$

b) $\int_0^{-3} 2x \cdot dx = \left[x^2\right]_0^3 = 9$

c) $\int_1^{-3} 2x \cdot dx = \left[x^2\right]_1^3 = 8$

d) $\int_{-2}^{-2} |x| \cdot dx = \int_{-2}^{0} -x \cdot dx + \int_0^{-2} x \cdot dx = 4$

e) $\int_0^{-2\pi} sen\, x \cdot dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = 0$

f) $\int_{-3}^{-3} x^3 \cdot dx = \left[\dfrac{x^4}{4}\right]_{-3}^{3} = \dfrac{81}{2} = 40,5$

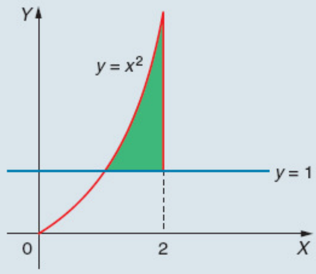
7. Hallamos la función del modo siguiente:

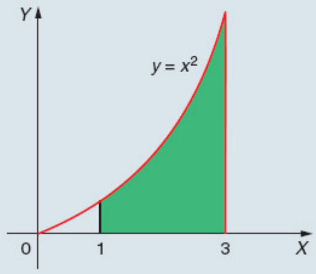
i) Como $(1,2) \in F(x) \Rightarrow 2 = 1 + a + b$

ii) $\int_1^{-3} f(x)\ dx = 10 \Rightarrow [x^4 + ax^3 + bx]_1^2 = 10 \Rightarrow 7a + b = -5$ Por tanto: $\begin{cases} a + b = 1 \\ 7a + b = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$

PÁGINA 255

8. Obtén el área de cada una de las siguientes regiones sombreadas:





9. Halla el área del recinto limitado por la recta $y = 3x + 2$, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 3$. Comprueba el resultado por métodos geométricos.

10. Calcula el área del recinto limitado por la parábola $y = x^2 - 4x$ y el eje OX.

11. Calcula el área del recinto limitado por la parábola $y = 4x - x^2$ y el eje OX.

12. Halla el área de la región limitada por la curva $y = x^3 - 8x^2 + 7x$, el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 7$.

13. Calcula el área de la región limitada por la hipérbola $xy = 36$, el eje OX y las rectas de ecuaciones $x = 6$ y $x = 12$.

14. Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las siguientes funciones:

a) $y = x^2$, $y = 16$

b) $y = 6x - x^2$, $y = x^2 - 2x$

c) $y = |x^2 - 4|$, $y = 4$

d) $y = 4 - x^2$, $y = x + 2$

e) $y = x^2$, $y = 2x$

f) $y = x^3$, $y = -x^2 + 2x$

15. Calcula la superficie de un panel publicitario que tiene la siguiente forma: base horizontal de 10 metros de longitud y resto del contorno limitado por la función:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 6x & \text{si } 0 \le x \le 5 \\ -x + 10 & \text{si } 5 < x \le 10 \end{cases}$$

16. La parábola $y = a(x^2 - 2x)$, con $a > 0$, delimita con el eje OX un recinto de 12 unidades de superficie. Halla el valor de a.

17. La entrada de un nuevo producto alimenticio en el mercado crece de forma exponencial de modo que la cantidad, en gramos, vendida diariamente en un establecimiento se ajusta a la función:

$$f(t) = 100 \cdot e^{\frac{t}{30}}$$

en la cual t representa el tiempo, en días, desde que el producto es lanzado al mercado. Calcula el total de gramos vendidos en los 90 primeros días, es decir:

$$\int_0^{90} f(t)\, dt$$

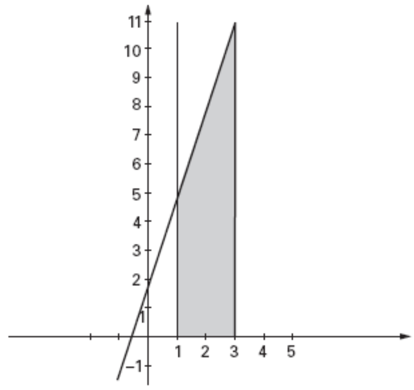
8. El área queda:

a) $\int_1^{-2} (x^2-1)\ dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 = \frac{4}{3} u^2 = 1{,}3\, u^2$ b) $\int_1^{-3} x^2 \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{26}{3} u^2 = 8{,}7\, u^2$

9. La solución queda:

El área del recinto sombreado viene dada por:

$$\int_1^3 (3x+2)\ dx = \left[\frac{3x^2}{2} + 2x\right]_1^3 = \left(\frac{27}{2}+6\right) - \left(\frac{3}{2}+2\right) = 16\, u^2$$



Directamente este recinto es un trapecio y su área vale:

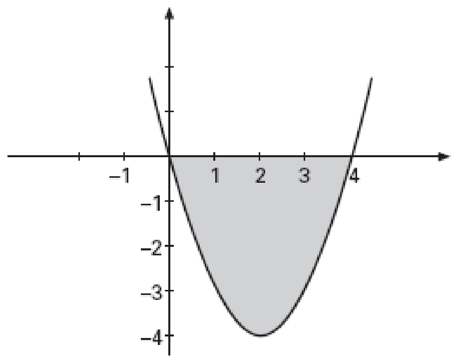
$$A = \frac{B+b}{2} \cdot h = \frac{11+5}{2} \cdot 2 = 16\, u^2$$

Con lo que queda comprobado el resultado anterior.

10. El área del recinto sombreado es:

$$Área = -\int_1^4 (x^2-4x)\ dx = -\left[\left(\frac{x^3}{2} - 2x^2\right)\right]_0^4 =$$

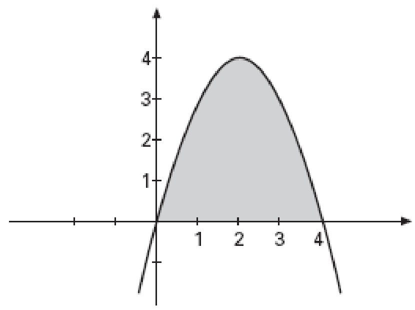
$$= -\left[\frac{64}{3} - 32\right] = \frac{32}{3} u^2 = 10{,}7\, u^2$$



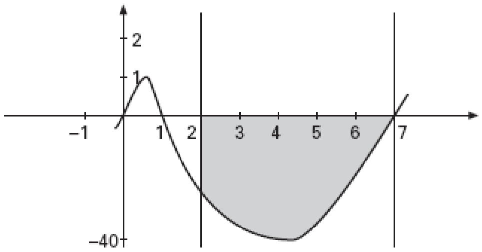
11. La solución es el recinto sombreado:

$$Área = -\int_0^4 (4x-x^2)\ dx = \left[\left(2x^2 - \frac{x^3}{2}\right)\right]_0^4 =$$

$$= 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3} = 10{,}7\, u^2$$



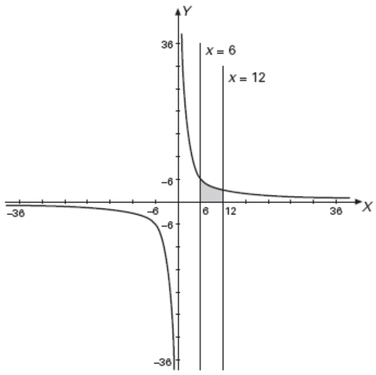
12. El área pedida es la del recinto sombreado.



$$Área=-\int_2^7 (x^3-8x^2+7x)\,dx=-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{8x^3}{3}+\frac{7x^2}{2}\right]_0^7=$$

$$=-\left[\left(\frac{2\,401}{4}-\frac{2\,744}{3}+\frac{343}{2}\right)-\left(4-\frac{64}{3}+14\right)\right]=139,58\,u^2$$

13. El área del recinto sombreado buscado vale:



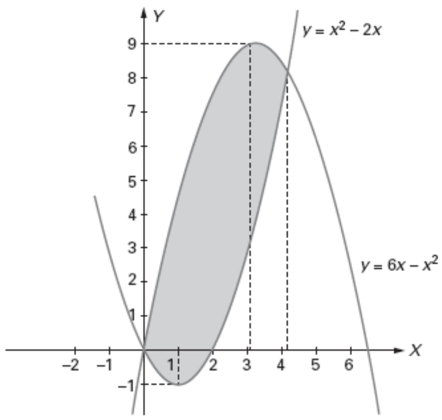
$$Área=-\int_6^{12}\frac{36}{x}\,dx=[36\ln x]_6^{12}=$$

$$=36\ln\frac{12}{6}=36\ln 2=24,95\,u^2$$

14. Las diversas áreas quedan:

a) $Área=2\int_0^4 (16-x^2)\,dx=\frac{256}{3}u^2$

b) Estas curvas se cortan en los puntos solución del sistema:



$$\left.\begin{array}{l} y=6x-x^2 \\ y=x^2-2x \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} x=0 & y=0 & P(0,\ 0) \\ x=4 & y=8 & Q(4,\ 8) \end{array}\right.$$

$$\text{Área}=\int_2^0 (x^2-2x)\,dx+\int_0^4 (6x-x^2)\,dx-\int_2^4 (x^2-2x)\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_2^0+\left[3x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^4-\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_2^4=$$

$$=\left(\frac{-8}{3}+4\right)+\left(48-\frac{64}{3}\right)-\left[\left(\frac{64}{3}-16\right)-\left(\frac{8}{3}-4\right)\right]=$$

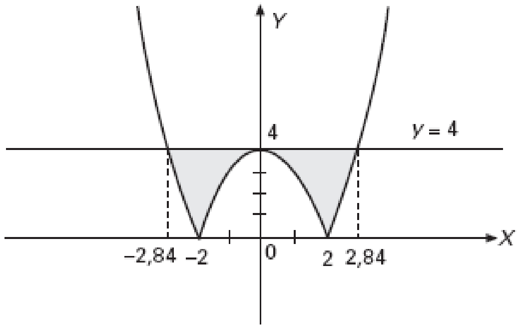
$$=\frac{-8}{3}+4+48-\frac{64}{3}-\frac{64}{3}+16+\frac{8}{3}-4=$$

$$=64-\frac{128}{3}=21,3\ \text{u}^2$$

c) La función es:

$$y = |x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si} \quad x \leq -2 \ \text{ o } \ x \geq 2 \\ 4 - x^2 & \text{si} \quad -2 < x < 2 \end{cases}$$

El área de la zona sombreada es:



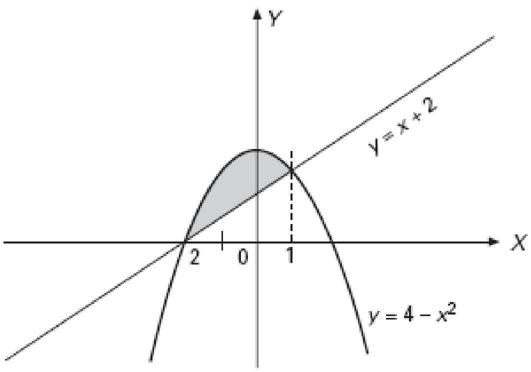
$$A = \int_0^2 [4 - (4 - x^2)]\, dx + \int_2^{2,84} (x^2 - 4)\, dx =$$

$$= \int_0^2 x^2\, dx + \int_2^{2,84} (x^2 - 4)\, dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_2^{2,84} =$$

$$= \frac{8}{3} + \left(\frac{2,84^3}{3} - 4 \cdot 2,84\right) - \left(\frac{8}{3} - 8\right) = 4,275 \text{ u}^2$$

d) La gráfica queda:

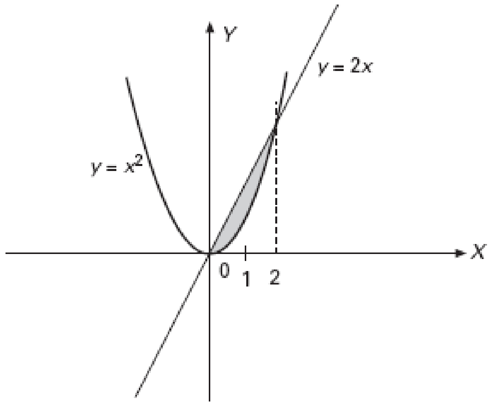


El área sombreada es:

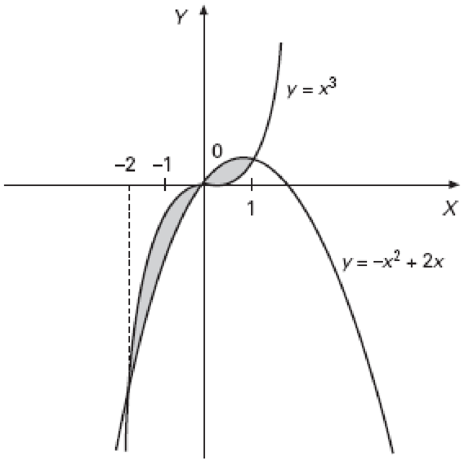
$$A = \int_{-2}^{1} [(4 - x^2) - (x + 2)]\, dx = \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)\, dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1} = 4,5\, u^2$$

e) La gráfica queda y el área sombreada quedan:

$$A=\int_0^{-2}(2x-x^2)\,dx=\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{4}{3}u^2$$



f) La gráfica queda y el área sombreada quedan:



$$A=\int_{-2}^{0}[x^3-(-x^2+2x)]\,dx+\int_0^1-(-x^2+2x-x^3)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{x^3}{3}+x^2-\frac{x^4}{4}\right]_0^1=$$

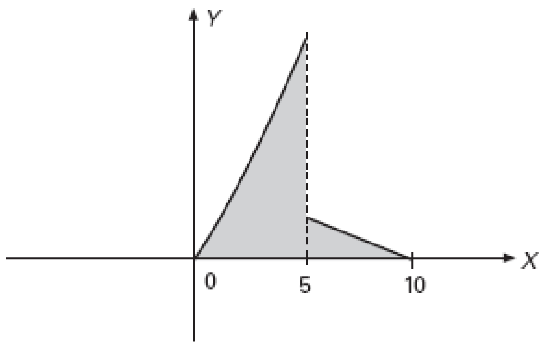
$$=\frac{8}{3}+\frac{5}{12}=\frac{37}{12}u^2=3.08\,u^2$$

15. La gráfica y la superficie quedan:

$$A=\int_0^5(x^2+6x)\,dx+\int_5^{10}(-x+10)\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+3x^2\right]_0^5+\left[-\frac{x^2}{2}+10x\right]_5^{10}=$$

$$=\frac{350}{3}+\frac{25}{2}=\frac{775}{6}=129,\ 17\ \mathrm{u}^2$$

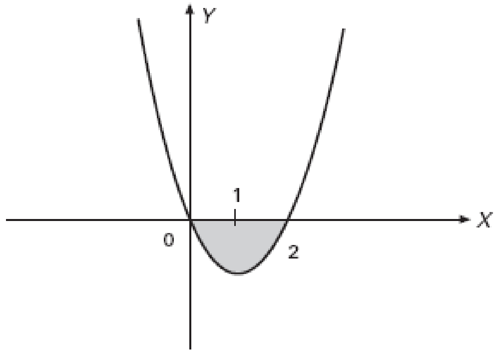


16. La solución queda:

$$\int_2^0 a(x^2-2x)\,dx=12$$

$$\left[a\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\right]_2^0=12$$

$$\frac{4}{3}a=12\Rightarrow a=9$$



17. La solución queda:

$\int_0^{90} 100\cdot e^{t/30}\,dt=[3\,000\,e^{t/3}]_0^{90}=3\,000e^3-3\,000=57\,256,61$ gramos en total se vendieron los 90 primeros días.

PÁGINA 256

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

18. Calcula el valor de a para que se cumpla $\int_0^{\pi/2} (x + a) \cos x \, dx = \frac{\pi}{2} - 1$.

19. Dada la función $f(x) = 4x^3 + 10x + 8$:

a) Calcula una primitiva $F(x)$ que cumpla la condición $F(1) = 20$.

b) Enuncia la regla de Barrow y aplícala para calcular la integral de la función $f(x)$ en el intervalo $[1, 2]$.

20. Dada la función $f(x) = ax^3 + bx + c$, calcula los valores de a, b y c sabiendo que:

I) $F(x) = x^4 - 2x^2 + cx$ es una primitiva de $f(x)$.

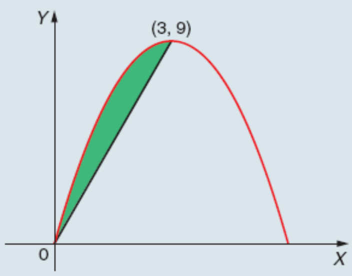
II) La integral de $f(x)$ en el intervalo $[0, 1]$ es igual a 1.

21. Durante un cierto período de tiempo, las hojas de una especie vegetal transpiran a razón de 2 miligramos de agua por centímetro cuadrado. Los bordes de una de dichas hojas coinciden con los del recinto acotado del plano limitado por las curvas de ecuaciones:

$$y = \sqrt{5x} \qquad\qquad y = \frac{1}{5}x^2$$

donde x e y están expresados en centímetros. Calcula la cantidad total de agua transpirada por esa hoja en el período de tiempo citado.

22. La gráfica adjunta representa una función polinómica de grado 2 con máximo en $(3, 9)$. Determina la expresión de la función y calcula el área del recinto sombreado.



23. Dada la función $f(x) = a \cdot e^{\frac{x}{3}} + \frac{1}{x^2}$ ($x \neq 0$ y a constante):

a) Calcula $\int_1^2 f(x)\, dx$. ¿Qué representa geométricamente su valor absoluto?

b) Se sabe que F es una primitiva de f. Calcula a si $F(1) = 0$ y $F(2) = \frac{1}{2}$.

24. Halla el área limitada por $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 4$, siendo:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < -\dfrac{1}{2} \\ -x^2 + 3x & \text{si } -\dfrac{1}{2} \le x \le 3 \\ |x + 3| & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

25. Los vértices de una ventana rectangular tienen, respecto a un sistema de ejes cartesianos, las siguientes coordenadas: $A(-4, 0)$, $B(-4, 3)$, $C(4, 3)$ y $D(4, 0)$. La sustituimos por una ventana de forma parabólica, tal que la parábola de segundo grado que la define pasa por los puntos $A = (-4, 0)$ y $D(4, 0)$ y es tal que su tangente en el punto $E(0, 3)$ es horizontal. Determina:

a) La ecuación de la parábola que define la ventana.

b) El porcentaje de luminosidad que hemos perdido si la luminosidad viene definida por el área de la ventana.

18. Resolvemos la integral indefinida por el método de partes:

$$\int (x+a)\cos x\,dx=(x+a)\cdot sen\,x-\int sen\,x\,dx=(x+a)\,sen\,x+\cos x+C.$$

$$\left.\begin{array}{l} x+a=u \\ \cos x\,dx=dv \end{array}\right\| \begin{array}{l} du=dx \\ v=sen\,x \end{array}$$

Calculamos la integral definida aplicando la regla de Barrow:

$$\int (x+a)\cos x\,dx=[(x+a)\,sen\,x+\cos x]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}+a-1$$

Luego imponiendo la igualdad de enunciado obtenemos: $\frac{\pi}{2}+a-1=\frac{\pi}{2}-1\Rightarrow a=0$

19. La solución es:

a) Todas las primitivas de $f(x)$ vienen dadas por su integral indefinida:

$$\int (4x^3+10x+8)\,dx=x^4+5x^2+8x+C$$

Por tanto: $F(x)=x^4+5x^2+8x+C$

Calculamos la primitiva que cumple $F(1)=20$: $1+5+8+C=20\Rightarrow C=6$

La primitiva buscada es: $F(x)=x^4+5x^2+8x+6$

b) $f(x)\int_1^2 (4x^3+10x+8)\,dx=[x^4+5x^2+8x]_1^2=(16+20+16)-(1+5+8)=38$

20. Queda:

i) $F'(x)=f(x)\Rightarrow 4x^3-4x+c=ax^3+bx+c\Rightarrow\begin{cases} a=4 \\ b=-4 \end{cases}$

ii) $\int_0^1 (ax^3+bx+c)\,dx=1\Rightarrow\int_0^1 (4x^3+4x+c)\,dx=[x^4-2x^2+cx]_0^1=c-1$

Como $c-1=1\Rightarrow c=2$

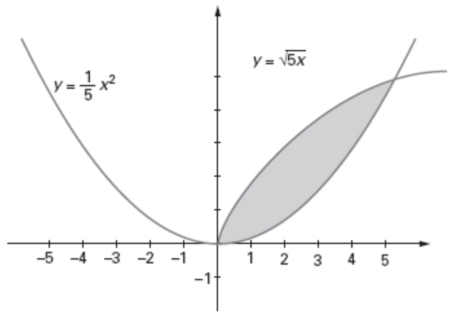
21. Las curvas dadas se cortan en los puntos solución del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y=\sqrt{5x} \\ y=\frac{1}{5}x^2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x=0 \\ x=5 \end{array}$$

Área sombreada: $= \int_0^5 \left[\sqrt{5x} - \frac{x^2}{5}\right] dx = \left[\frac{2\sqrt{5x^3}}{3} - \frac{x^3}{15}\right]_0^5 = \frac{25}{3}\ \text{cm}^2$

Por tanto, la cantidad de agua transpirada por la hoja en ese periodo de tiempo es:

$$C=\frac{25}{3}\cdot 2=\frac{50}{3}=16{,}7\ \text{mg}$$



22. La función polinómica es de la forma: $f(x)=ax^2+bx+c$

Como pasa por $(0,0)\Rightarrow 0=c$

Como pasa por $(3,0)\Rightarrow 9=9a+3b+c$

Como tiene un máximo en $(3,9)\Rightarrow 0=6a+b$

Siendo $\begin{cases} c=0 \\ a=-1 \\ b=6 \end{cases}$ la función queda: $f(x)=-x^2+6x$

La recta pasa por $(0,0)$ y $(3,9)$ tiene de ecuación: $y=3x$

$$Área=\int_0^3 [(-x^2+6x)-(3x)]\,dx=\int_0^3 (-x^2+3x)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_0^3=\frac{9}{2}u^2$$

23. La solución queda:

a) $\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2\left(e^{x/3}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[3ae^{x/3}-\frac{1}{x}\right]_1^2=\left(3ae^{2/3}-\frac{1}{2}\right)-(3ae^{1/3}-1)=3a(e^{2/3}-e^{1/3})+\frac{1}{2}$

su valor absoluto representa el área del recinto limitado por la grafica de la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x=1$ y $x=2$.

b) Si F es primitiva de f, imponiendo las condiciones tenemos que:

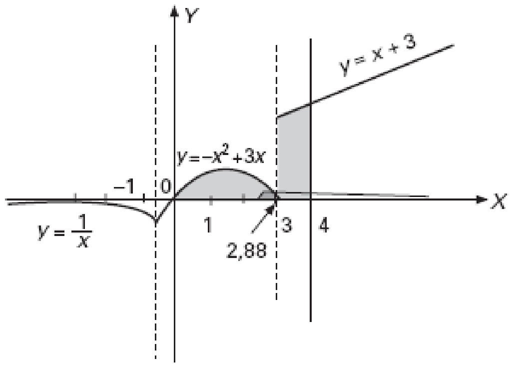
$$\int_1^2 f(x)\,dx = F(2) - F(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow 3a(e^{2/3} - e^{1/3}) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 0$$

24. El área del recinto sombreado es:

$$A = \int_0^3 (-x^2 + 3x)\,dx + \int_3^4 (x+3)\,dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^3 + \left[\frac{x^2}{2} + 3x\right]_3^4 =$$

$$= \frac{9}{2} + \frac{13}{2} = 11 \text{ u}^2$$

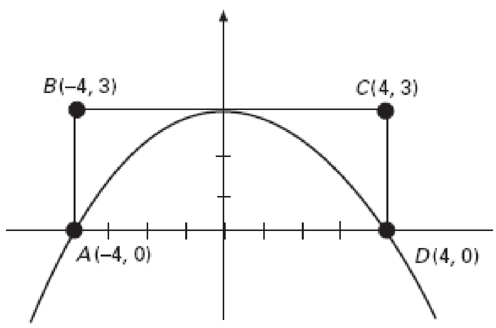


25. La solución es:

a) La ecuación de la parábola que pasa por los puntos $A(-4,0)$ y $D(4,0)$ y tiene el vértice en $E(0,3)$ es: $y = -\frac{3}{16}x^2 + 3$

b) El are de la ventana rectangular es 24 u^2.

El área de la ventana parabólica es:



$$A = 2\int_0^4 \left(-\frac{3}{16}x^2 + 3\right)dx = 2\left[-\frac{x^3}{16} + 3x\right]_0^4 = 16 \text{ u}^2$$

Luego hemos perdido un 33,3% de luminosidad.

Unidad 11 – Formas de contar. Números para contar

PÁGINA 259

cuestiones iniciales

1. Un sistema de señales marino se desarrolla utilizando banderas. ¿Cuántas señales se pueden hacer izando cinco banderas diferentes si pueden enarbolarse simultáneamente cualquier número de ellas?
2. ¿Cuántos números capicúas hay de ocho cifras?
3. Una familia formada por los padres y cuatro hijos van al cine. Se sientan en seis butacas consecutivas. ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse? ¿Y si los padres se sientan en los extremos? ¿Y si los padres deciden no sentarse en los extremos?

SOLUCIONES

1. Utilizando una bandera, podemos hacer 5 señales diferentes.
   Utilizando dos banderas, podemos hacer $5 \cdot 4 = 20$ señales distintas.

   De igual forma, para tres, cuatro y cinco banderas se tendrán: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$, $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ y $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$, $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ señales distintas, respectivamente.

   En total, se podrán hacer: $5 + 20 + 60 + 120 + 120 = 325$ señales distintas.

2. Los números de ocho cifras son de la forma ABCDDCBA. La cifra A puede ser ocupada por cualquier cifra que no sea cero. Las cifras BCD pueden ser cualesquiera. Por el principio de multiplicación, se pueden formar $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ números capicúas de ocho cifras.

3. Las seis personas en las seis butacas pueden sentarse de $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ maneras diferentes.

   Si los padres se sientan en los extremos, pueden hacerlo de 2 formas y dejan cuatro butacas para cuatro personas que las pueden ocupar de $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ formas distintas. Por el principio de multiplicación, habrá $2 \cdot 24 = 48$ formas distintas de sentarse si los padres lo hacen en los extremos.

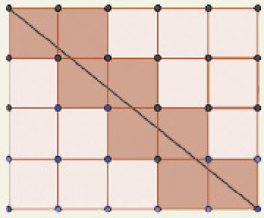
   Si los padres no se sientan en los extremos, deben hacerlo en las cuatro butacas centrales. En estas butacas pueden hacerlo de $4 \cdot 3 = 12$ formas. En cada una de estas dejan cuatro butacas que son ocupadas por los hijos de $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ formas. En total, podrán sentarse en esta nueva disposición de $12 \cdot 24 = 288$ formas distintas.

PÁGINA 271

A C T I V I D A D E S

- Utiliza los dos tipos de razonamiento en la resolución de las siguientes situaciones matemáticas:

  1. **Diagonal y cuadrados.** En el rectángulo del dibujo, de orden 5 × 4, la diagonal corta en 8 cuadrados pequeños. ¿Podrías enunciar una ley que determine el número de cuadrados que cortará la diagonal de un rectángulo de orden *a* × *b*?
  2. **Producto de tres números.** Demuestra que el producto de tres números naturales consecutivos no puede ser el cubo de un número natural.



SOLUCIONES

1. En el rectángulo del dibujo, de orden 5 x 4, la diagonal corta en 8 cuadrados pequeños. ¿Podrías enunciar una ley que determine el número de cuadrados que cortará la diagonal de un rectángulo de orden a x b?

   Experimentamos con los casos particulares más sencillos y ordenamos los resultados. Llamando *a* (altura) y *b* (base) a las dimensiones del rectángulo, podemos construir la tabla.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	4	4	6	6
3	3	4	3	6	7	6
4	4	4	6	4	8	8
5	5	6	7	8	5	10
6	6	6	6	8	10	6

   En el elemento en el que se cruzan la fila *a* con la columna *b* aparece el número de cuadrados pequeños atravesados por la diagonal, para un rectángulo de dimensión *a* x *b*. Por ejemplo, la fila 4 y la columna 3 se cruzan en el número 6, luego, en un rectángulo de orden 4 x 3 la diagonal atraviesa 6 cuadrados.

   Si analizamos los valores de la tabla anterior podemos plantear la siguiente conjetura:

   El **número de cuadrados pequeños** que atraviesa la diagonal de un rectángulo de orden *a* x *b* es igual a:

   $a+b-1$**, si *a* y *b* son primos entre si;**

   si los números *a* y *b* no son primos entre sí, entonces el número es:

   $a+b-da$, siendo d el máximo común divisor de *m* y *n*.

2. El producto de tres números naturales consecutivos no puede ser un cubo perfecto ya que si lo fuese se tendría: $k^3 = n(n+1)(n+2)$

   Por otra parte son válidas las siguientes desigualdades: $n^3 < n(n+1)(n+2) < (n+1)^3$

   La desigualdad primera $n^3 < n(n+1)(n+2) \Rightarrow n^3 < n^3 + 3n^2 + 2n$, es inmediata.

   Para probar la segunda $n(n+1)(n+2) < (n+1)^3$, basta comprobar que: $n(n+2) < (n+1)^2$

   Pero esto también es inmediato porque: $n(n+2) = n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

   Luego el número $n(n+1)(n+2)$ no puede ser un cubo perfecto ya que se encuentra comprendido entre dos cubos perfectos consecutivos.

PÁGINA 276

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Una urna contiene 10 bolas numeradas del 1 al 10. Sacamos dos bolas a la vez y sumamos los valores de los números marcados. ¿De cuántas formas se pueden obtener nueve, diez u once?

2. En el lanzamiento de tres dados, ¿de cuántas formas diferentes se pueden tener siete o doce puntos?

3. Las matrículas de los vehículos de un determinado país están formadas por dos letras seguidas de cuatro números, por ejemplo, BP-0441. ¿Cuántas placas distintas se pueden formar por este procedimiento?

4. ¿Cuántos números naturales existen mayores que 5 000 y menores que 10 000 en los siguientes casos?:

   a) Con todas las cifras diferentes.

   b) Se pueden repetir cifras.

5. ¿De cuántas formas diferentes se puede responder a un test de 20 preguntas, sabiendo que cada respuesta admite tres variantes: sí, no, no lo sé?

6. El alfabeto Morse utiliza los símbolos punto (•) y raya (–) para formar palabras y números. ¿Cuántas palabras diferentes de 6 letras podemos formar?

7. Con los dígitos impares, ¿cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar? ¿Cuántos de ellos serán múltiplos de 5?

8. Si con los 7 colores del arco iris construimos banderas con tres franjas horizontales de colores diferentes, ¿cuántas banderas podemos formar?

9. ¿De cuántas maneras pueden ser perseguidos 5 ratones por 5 gatos? ¿Y si el gato pequeño siempre persigue al ratón pequeño?

10. Un concesionario de coches expone en línea recta 12 coches. ¿De cuántas formas diferentes puede colocarlos?

11. A ocho personas les han tocado en un sorteo 3 viajes a Londres, 2 viajes a Roma y 3 viajes a Viena. ¿De cuántas formas diferentes se los pueden repartir?

12. ¿Cuántos banderines diferentes se pueden pintar con 3 franjas verdes, 2 rojas y 1 azul?

13. Una colección de tebeos está formada por 12 números. Si solo disponemos de dinero para comprar tres de ellos, ¿de cuántas formas diferentes podemos hacerlo?

14. ¿Cuántas pesadas diferentes podemos hacer con 8 pesas distintas?

15. En un plano tenemos 9 puntos, de los cuales nunca hay 3 en línea recta. ¿Cuántos triángulos diferentes podemos formar?

16. Un heladero dispone de 12 tipos de sabores distintos. Si vende helados de 2 sabores, ¿cuántos helados diferentes puede vender? ¿Y si fuesen de 1 o 3 sabores?

SOLUCIONES

1. Asociando a cada extracción una pareja de números que se correspondan con los números obtenidos en las bolas y llamando A, B y C a los conjuntos de los resultados que dan nueve, diez u once, tenemos:

   $A = \{(1, 8), (2, 7), (3, 0), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2), (8, 1)\}$

   $B = \{(1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (6, 4), (7, 3), (8, 2), (9, 1)\}$

   $C = \{(1, 10), (2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 6), (6, 5), (7, 4), (8, 3),$
   $(9, 2), (10, 1)\}$

   Utilizando el principio de adición, las formas de obtener nueve, diez u once es: $8+8\ 10=26$

2. Realizando un recuento exhaustivo, se obtiene:

   - Las puntuaciones que sumadas permiten obtener siete son: 511, 421 331, 322, y son 15.
   - Las puntuaciones que sumadas dan once puntos son: 651, 642, 633, 552, 543, 444 y son 25.

3. Teniendo en cuenta que existen 27 letras y 10 dígitos, pueden formarse como combinación de todas ellas: $27\times27\times10\times10\times10\times10=7\,290\,000$ placas distintas.

4. Serán números de 4 cifras que pueden empezar por 5, 6, 7, 8, 9.

   a) Si las cifras son diferentes hay $5\cdot V_{9,3}=2\,520$

   b) Si las cifras se pueden repetir hay $5\cdot V^{R}{}_{10,3}=5\,000$

5. $VR_{3,20}=3^{20}$ formas distintas.

6. Podemos formar $VR_{2,6}=2^{6}=64$ palabras diferentes.

7. Podemos formar $V_{5,3}=60$ los números de tres cifras distintas. Serán múltiplos de 5 los que terminen en 5, es decir $V_{4,2}=12$ números.

8. Podemos formar $V_{7,3}=210$ banderas diferentes.

9. 5 ratones pueden ser perseguidos por 5 gatos de $P_5=5!=120$ formas distintas. Si el gato pequeño persigue al ratón pequeño son $P_4=4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ formas distintas.

10. Puede colocarlo de 12! formas distintas suponiendo que los coches sean diferentes entre sí.

11. Se los pueden repartir de: $P_8^{3,2,3} = \dfrac{8!}{3!\cdot 2!\cdot 3!} = 560$ formas diferentes

12. Se pueden pintar: $P_6^{3,2,1} = \dfrac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!} = 60$ banderines diferentes.

13. Podemos hacerlo de $C_{12,3} = \binom{12}{3} = 220$ formas diferentes.

14. Si las tomamos de 1 en 1 podemos hacer $C_{8,1} = 8$ pesadas diferentes; de 2 en 2: $C_{8,2} = 28$ pesadas diferentes; de 3 en 3: $C_{8,3} = 56$; de 4 en 4: $C_{8,4} = 70$; de 5 en 5: $C_{8,1} = 56$; de 6 en 6: $C_{8,6} = 28$; de 7 en 7: $C_{8,7}$ y de 8 en 8: $C_{8,8} = 1$. En total: $8+28+56+70+56+28\ 8+1=255$ pesadas diferentes.

15. Podemos formar $C_{9.3} = 84$ triángulos diferentes.

16. En cada caso queda:

- Puede vender $C_{12,2} = 66$ helados diferentes de 2 sabores.

- Puede vender $C_{12,1} + C_{12,2} + C_{12,3} = 12 + 66 + 220 = 298$ helados diferentes de 1, 2 o 3 sabores.

PÁGINA 277

17. Para formar un equipo de baloncesto de 5 jugadores disponemos de 10 jugadores. ¿Cuántos equipos distintos podemos formar? ¿Cuántos si solo uno de ellos es el capitán y ha de jugar siempre?

18. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $V_{n,2} + V_{n-2,2} + V_{n-4,2} = 98$

b) $V_{x,2} = 190 + C_{x,2}$

c) $\binom{9}{n+4} = \binom{9}{2n-1}$

d) $16 + V_{n,2} = V_{n+1,2}$

e) $P_x = 6 \cdot P_{x-1}$

f) $\binom{3n-1}{10} = \binom{3n-1}{16}$

19. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuántos números pares de tres cifras se pueden formar usando las cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6?

b) ¿Cuántos números de cuatro cifras pueden formarse con las cifras 1, 5, 6 y 7?

c) ¿Cuántos números de dos cifras, con ambas pares, existen?

20. En una final olímpica de 100 metros lisos participan 8 atletas. No consideramos llegadas simultáneas.

a) ¿Cuántas clasificaciones posibles puede haber?

b) ¿De cuántas maneras diferentes se pueden repartir las medallas de oro, plata y bronce?

c) Si de los 8 atletas 5 son americanos y 3 europeos, ¿cuántas clasificaciones posibles se pueden hacer, si solo tenemos en cuenta la nacionalidad de los participantes?

d) ¿Cuántas clasificaciones diferentes puede haber si han de llegar seguidos los de la misma nacionalidad?

21. Un estudiante tiene que responder a 8 de 10 preguntas de un examen.

a) ¿De cuántas formas distintas puede contestar?

b) ¿De cuántas, si las tres primeras son obligatorias?

c) ¿De cuántas, si de las cuatro primeras ha de contestar a 2?

22. Con los alumnos de una clase hemos formado todos los grupos posibles de dos alumnos; si en total obtenemos 378 grupos, ¿cuántos alumnos hay en esa clase?

23. Con las letras de la palabra *MATEMÁTICAS,* ¿cuántas palabras distintas, entrando todas las letras, se pueden formar? ¿Cuántas de ellas empiezan por consonante? Si ordenamos todas las palabras por orden alfabético, ¿qué lugar ocupa la palabra dada?

24. En una clase de 30 alumnos hay 12 chicos y 18 chicas. Se quiere formar un grupo de cinco personas para hablar con el jefe de estudios.

a) ¿Cuántos grupos distintos se pueden hacer?

b) ¿Cuántos, si en cada uno de ellos han de entrar 2 chicos y 3 chicas?

25. ¿De cuántas formas distintas se pueden ordenar, en una fila, 4 botellas de agua mineral, 3 de refresco de naranja y 2 de refresco de limón?

SOLUCIONES

17. Podemos formar $C_{10,5} = 252$ equipos distintos. Cuando uno es el capitán y debe jugar siempre, entonces podemos formar $C_{9,4} = 126$ equipos distintos.

18. En cada caso:

a) $n(n-1)+(n-2)(n-3)+(n-4)(n-5)=96 \Rightarrow n^2-5n-24=0 \Rightarrow n=8$

b) $16+n(n-1)=(n+1)\cdot n \Rightarrow n=8$

c) $x(x-1)=190+\dfrac{x(x-1)}{2} \Rightarrow x^2-x-380=0 \Rightarrow x=20$

d) $x!=6\cdot(x-1)! \Rightarrow x=6$

e) Por la segunda propiedad de los números combinatorios podemos escribir la igualdad:

$n+4+2n-1=9 \Rightarrow n=2$

f) Por la misma propiedad del apartado anterior: $10+16=3n-1 \Rightarrow n=9$

19. Queda:

a) Podemos formar $6\cdot 7\cdot 4=168$ números.

b) Podemos formar $4\cdot 4\cdot 4\cdot 4 = 256$ números.

c) Existen $4\cdot 5=20$ números.

20. Queda:

a) Puede haber $P_8 = 8! = 40\,320$ clasificaciones diferentes.

b) Se pueden repartir de $V_{8,3} = 8\cdot 7\cdot 6 = 336$ maneras diferentes.

c) Existen $P_8^{5,3} = \dfrac{8!}{5!\cdot 3!} = 56$ clasificaciones diferentes.

d) Puede haber $P_5 \cdot P_3 \cdot P_2 = 1440$ clasificaciones diferentes.

21. Queda:

a) Tiene $C_{10,8} = 45$ formas distintas de contestar.

b) En este caso $C_{7,5} = 21$ formas distintas.

c) $C_{4,2} \cdot C_{6,6} = 6$ formas distintas.

22. Llamando x a los alumnos: $C_{x,2} = 378 \Rightarrow \frac{x(x-1)}{2} = 378 \Rightarrow x = 28$ Hay 28 alumnos en clase.

23. La solución es:

- Podemos formar $P_{11}^{2,3,2.1,1,1,1} = 1663\,200$ palabras distintas.
- Empiezan por consonante las que empiezan por M que son $P_{10}^{1,3,2.1,1,1,1} = 302\,400$, por T que son $P_{10}^{2,3,1.1,1,1,1} = 320\,400$, por C que son $P_{10}^{2,3,2.1,1,1} = 151200$ y por S que son $P_{10}^{2,3,2.1,1,1} = 151200$. En total empiezan por consonante 907 200 palabras.
- Delante de MATEMATICAS están:

Las que empiezan por A: $P_{10}^{2,2,2,1,1,1,1} = 453\ 600$
» » » por C: 151 200
» » » por E: 151 200
» » » por I: 151 200
» » » por MAA: $P_8^{1,1,2,1,1,1,1} = 20\ 160$
» » » por MAC: $P_8^{1,2,2,1,1,1} = 10\ 080$
» » » por MAE: 10 080
» » » por MAI: 10 080
» » » por MAM: $P_8^{2,2,1,1,1,1} = 10\ 080$
» » » por MAS: 10 080
» » » por MATA: $P_7 = 5\ 040$
» » » por MATC: $P_7^{2,1,1,1,1,1} = 2\ 520$
» » » por MATEA: $P_6 = 720$
» » » por MATEC: $P_6^{2,1,1,1,1} = 360$
» » » por MATEI: 360
» » » por MATEMAA: $P_4 = 24$
» » » por MATEMAC: $P_4 = 24$
» » » por MATEMAI: $P_4 = 24$
» » » por MATEMAS: 24
» » » por MATEMATA: $P_3 = 6$
» » » por MATEMATC: 6
» » » por MATEMATIA: $P_2 = 2$

La siguiente ya es MATEMATICAS.

Por tanto ocupa el lugar:

$$453\,600+3\cdot 151\,200+20\,160+5\cdot 10\,080+5\,040+2\,520+720+2\cdot 360+4\cdot 24+2\cdot 6+2+1=986\,871$$

El lugar será el **986 871.**

24. Queda:

a) Se pueden formar $C_{30,5}=142\,506$ grupos distintos

b) Si han de entrar 2 chicos y 3 chicas se pueden formar: $C_{12,2}\cdot C_{18,3}=53\,856$

25. De $P_9=362\,880$ formas distintas suponiendo que las botellas son diferentes. Si son iguales son $P^{4,3,2}{}_9=1260$ formas distintas.

PÁGINA 278

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

26. ¿Cuántos números enteros del 1 al 1 000 no son divisibles por 3, 7 u 11?

27. Un *byte* es una secuencia de 8 dígitos que son ceros o unos. ¿Cuántos *bytes* distintos se pueden formar? ¿Cuántos tendrán 6 ceros y 2 unos?

28. A un congreso internacional asisten 4 franceses, 3 ingleses y 5 españoles. Para hacerse una foto se colocan en línea recta.
   a) ¿Cuántas fotos diferentes se pueden hacer?
   b) ¿Cuántas, si han de estar juntos los de la misma nacionalidad?
   c) ¿Cuántas, si los españoles han de estar juntos?

29. Un examen consta de doce preguntas y en cada pregunta se contesta con verdadero, *V*, o falso, *F*. ¿De cuántas formas distintas se puede contestar el examen?

30. A la cumbre de una montaña conducen 8 caminos distintos. ¿De cuántas formas distintas podemos hacer el ascenso y el descenso?

31. Con los diez dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 formamos números de seis cifras. ¿Cuántos de ellos tienen alguna cifra repetida? ¿Cuántos tienen las cifras distintas y terminan y empiezan en cifra impar?

32. ¿De cuántas formas diferentes podemos ver un dado cúbico apoyado sobre una mesa?

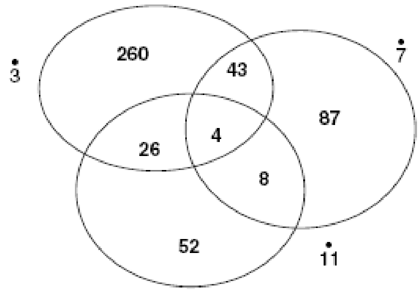
33. Tenemos tres números distintos positivos y dos distintos negativos.
   a) ¿Cuántos productos diferentes de tres factores podemos formar?
   b) ¿Cuántos de ellos serán negativos?
   c) ¿Cuántos productos positivos de cuatro factores se pueden formar?

34. A un congreso internacional asisten 20 ingleses, 12 franceses y 18 españoles. Si se quiere formar un comité en el que entren 3 ingleses, 2 franceses y 4 españoles, ¿cuántos comités distintos se pueden formar?

35. Todas las casas de una urbanización están comunicadas entre sí por medio de un camino. Si en total hay 153 caminos, ¿cuántas casas tiene la urbanización?

36. Para hacer una apuesta de la Lotería Primitiva hay que marcar con cruces 6 números de un boleto en el que figuran números del 1 al 49. ¿Cuántas apuestas diferentes se pueden hacer?

26. Hay 333 múltiplos de 3; 142 múltiplos de 7; 90 múltiplos de 11; 47 múltiplos de 3 y 7; 30 múltiplos de 3 y 11; 12 múltiplos de 7 y 11; 4 múltiplos de 3, 7 y 11. Por tanto utilizando diagramas de Venn obtenemos:



Hay 480 números enteros del 1 al 1 000 que son múltiplos de 3, 7, 11, luego no son múltiplos 520.

27. Se pueden formar $VR_{2,8} = 256$ bytes distintos. Tendrán 6 ceros y 2 unos: $P_8^{6,2} = 28$ bytes distintos.

28. En cada caso:

a) Se pueden hacer $P_{12} = 12!$ fotos distintas.

b) Se pueden hacer $P_4 \cdot P_3 \cdot P_5 \cdot P_3 = 103\,680$ fotos distintas.

c) Se pueden hacer $P_5 \cdot P_7 = 604\,800$ fotos distintas.

29. Podemos contestar de $VR_{2,12} = 2^{12} = 4\,096$ formas distintas.

30. De $V_{8,2} = 56$ formas distintas.

31. Tienen alguna cifra repetida $9 \cdot VR_{10,5} = 9 \cdot 10^5$ números de seis cifras.

Tienen cifras distintas y terminan y empiezan en cifra impar: $20 \cdot V_{8,4} = 33\,600$ números.

32. Podemos distinguir que:

- Veamos 1 sola cara y hay 6 formas distintas.
- Si vemos 2 caras hay 12 formas distintas que son:
- $(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)(2,3)(2,4)(2,6)(3,5)(3,6)(4,5)(4,6)(5,6)$
- De 8 formas distintas si vemos 3 caras que son:

  $(6,2,3)(6,2,4)(6,5,3)(5,1,3)(5,1,4)(4,1,2)(3,2,1)(6,5,4)$

  Luego en total hay 26 formas distintas de ver el dado.

33. queda en cada caso:

a) Podemos formar $C_{5,3} = 10$ productos diferentes.

b) Serán negativos los productos en los que entre un numero negativo, es decir: $C_{2,1} \cdot C_{3,2} = 6$

c) Serán positivos si entran 2 positivos y 2 negativos $C_{3,2} \cdot C_{2,2} = 3$ productos distintos.

34. Se pueden formar: $C_{20,3} \cdot C_{12,2} \cdot C_{18,4} = 230\,400$ comités diferentes.

35. Llamando x al número de casas de la urbanización obtenemos:

$$C_{x,2} = 153 \Rightarrow \frac{x(x-1)}{2} = 153$$

$$x^2 - x - 306 = 0 \Rightarrow x = 18$$

La urbanización tiene 18 casas.

36. Podemos hacer $C_{49,6} = 13\,983\,816$ apuestas diferentes.

Unidad 12 – Probabilidad

PÁGINA 281

cuestiones iniciales

1. Estás jugando a cara o cruz con una moneda y las diez últimas tiradas han salido cara. ¿Por qué resultado apostarías en la próxima tirada? Razona la respuesta.

2. La probabilidad de que nazca un varón es 1/2. ¿Cuál es la probabilidad de que, entre cuatro nacimientos, dos sean niñas?

a) 1/2 b) 3/8 c) 3/4 d) No puede saberse

3. En un experimento se lanzan al aire cuatro monedas juntas. Si el experimento se repite muchas veces, ¿cuál de los siguientes resultados se producirá más a menudo?

a) 2 caras y 2 cruces b) 1 cara y 3 cruces c) 3 caras y 1 cruz

4. María y Carlos juegan con un dado. María gana un euro si sale 2, 3, 4 o 5. Si sale un 1, gana Carlos. ¿Cuánto debería ganar Carlos, cuando obtiene un 1, para que el juego sea justo?

SOLUCIONES

1. Ninguno de los dos resultados tiene mayor probabilidad de salir, ya que el azar no tiene memoria.

2. La probabilidad es: $\binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$

3. El resultado más probable es 2 caras y 2 cruces y se presentara 6 veces de cada 16, por término medio.

4. Si el juego es justo, las esperanzas deben ser iguales. Llamando x a lo que gana Carlos, se tiene: $1\cdot\frac{4}{6}=x\cdot\frac{1}{6}$, luego, $x=4$.

PÁGINA 295

A C T I V I D A D E S

- Utiliza el método de demostración por reducción al absurdo para resolver las siguientes actividades:

  1. **Número irracional.** Demuestra que $\sqrt{3}$ es un número irracional.
  2. **Implicación lógica.** Demuestra que si $P \Rightarrow Q$ entonces no $P \Rightarrow$ no Q.

SOLUCIONES

1. Supongamos que $\sqrt{3}$ no es irracional, por tanto $\sqrt{3}$ será racional, con lo que se puede poner en forma de fracción de este modo: $\sqrt{3}=\frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ y primos entre sí.

   De esta igualdad obtenemos: $a=\sqrt{3}\,b$

   Elevando ambos miembros al cuadrado nos queda: $a^2=3b^2$

   De aquí deducimos que a^2 es múltiplo de 3. Si a^2 es múltiplo de 3 entonces *a* también lo es.

   Podemos escribir: $a=3m$ con m $\in \mathbb{Z}$ y sustituyendo en la igualdad $a^2=3b^2$ obtenemos la siguiente expresión: $(3m)^2=3b^2$ y queda $9m^2=3b^2$ siendo también $3m^2=b^2$.

   Con lo que b^2 es múltiplo de 3 y, por tanto, *b* también lo es.

   Con esto hemos llegado a que *a* y *b* son múltiplo de 3. Este resultado contradice el hecho de que *a* y *b* son primos entre sí. Por tanto, hemos llegado a una contradicción o absurdo, por lo que concluimos afirmando que $\sqrt{3}$ no es un número racional, es decir, es un número irracional.

2. Tiene que ser no *P* pues si fuera *P* entonces sería *Q* y como dice no *Q* no puede ser *P*.

PÁGINA 300

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Describe el espacio muestral asociado a cada uno de los siguientes experimentos aleatorios:

   a) Se lanzan al aire 3 monedas y se anotan los resultados de las caras obtenidas.

   b) Se lanzan 3 dados y se anota la suma de los puntos de las caras superiores.

   c) Se lanzan al aire 2 dados y se anota la suma de los puntos de las caras superiores.

   d) Extracción de dos bolas en una urna que contiene 5 bolas blancas, 6 negras y 7 verdes, si la extracción se efectúa con reemplazamiento o sin reemplazamiento.

   e) Sacar, con y sin reposición, 3 cartas de una baraja española de 40 cartas.

2. Consideramos el fenómeno aleatorio extraer una carta de una baraja de cuarenta y anotarla, y los sucesos A = {sacar oro}, B = {sacar rey}, C = {sacar el rey de bastos}. Determina los sucesos siguientes:

   a) $A \cap \overline{C}$ b) $A \cap B \cap C$ c) $A \cup B \cup C$ d) $A \cup B$

3. Sea E un espacio muestral con cuatro elementos, $E = \{A, B, C, D\}$. ¿Cuál de las siguientes funciones es una probabilidad?

   a) $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$, $P(C) = 1/4$, $P(D) = 1/5$

   b) $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/4$, $P(C) = -1/4$, $P(D) = 1/5$

   c) $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/4$, $P(C) = 1/8$, $P(D) = 1/8$

4. Sea el espacio muestral $E = \{A, B, C, D\}$ y P una función de probabilidad sobre E. Calcula $P(A)$ en los casos siguientes:

   a) $P(B) = 1/3$, $P(C) = 1/6$ y $P(D) = 1/9$

   b) $P(\{B, C\}) = 2/3$, $P(\{B, D\}) = 1/2$ y $P(B) = 1/3$

   c) $P(A) = 3P(B)$, $P(B) = 2P(C)$ y $P(D) = 2P(B)$

   d) $P(B) = P(A)$, $P(C) = 2P(A)$ y $P(D) = 4P(A)$

5. Considera el espacio muestral $E = \{a, b, c, d\}$ en el que los cuatro sucesos tienen la misma probabilidad. Sean $S_1 = \{a, b\}$ y $S_2 = \{a, c\}$.

   a) ¿Son S_1 y S_2 sucesos incompatibles?

   b) Calcula la probabilidad del suceso $S_1 \cup S_2$ y la probabilidad del suceso contrario de S_2.

6. Dados dos sucesos A y B, si $P(A) = 0,4$ y $P(B) = 0,5$, ¿es posible que $P(A \cup B) = 0,7$? Razona la respuesta.

7. Sabemos que la diferencia de dos sucesos A y B se define como $A - B = A \cap \overline{B}$. Consideramos A y B dos sucesos tales que $P(A \cup B) = P(A \cap B)$. ¿Cuánto valen $P(A - B)$ y $P(B - A)$?

   Si $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$, ¿cuánto valen $P(A)$ y $P(B)$?

8. Una moneda está fabricada de manera que la probabilidad de obtener cara es triple que la de obtener cruz. Calcula la probabilidad de obtener cara y de obtener cruz en el lanzamiento de dicha moneda.

9. En el lanzamiento de cuatro monedas, calcula la probabilidad de que:

   a) Salga, al menos, una cruz.

   b) Dos sean caras y dos cruces.

SOLUCIONES

1. Las soluciones quedan:

   a) El espacio muestral tiene $2^3 = 8$ elementos y son:

   $E = \{(CCC)(CCX)(CXC)(XCC)(CXX)(XCX)(XXC)(XXX)\}$

   b) El espacio muestral está formado por 16 resultados comprendidos entre suma 3, suma 4, …, suma 18.

   c) El espacio muestral está formado por 11 resultados comprendidos entre suma 2, suma 3, …, suma 12.

   d) Llamando B a sacar bola blanca, N bola negra y V bola verde, se obtiene:

   $E = \{BB, BN, BV, NB, NN, NV, VB, VN, VV\}$

   Tanto si la extracción se efectúa con o sin reemplazamiento.

   e) Con reemplazamiento el espacio muestral consta de $40 \cdot 40 \cdot 40 = 64\,000$ resultados posibles.

   Sin reemplazamiento el espacio muestra consta de $40 \cdot 39 \cdot 38 = 59\,280$ resultados.

2. Los sucesos del enunciado son:

   $A \cap \overline{C}$ = {sacar oros y no sacar el rey de bastos} = = {sacar oros}

   $A \cap B \cap C$ = {sacar oros y sacar rey y sacar rey de bastos} = $\{\Phi\}$
   Este suceso es imposible

   $A \cup B \cup C$ = {sacar oros o sacar rey o sacar rey de bastos}

   $A \cup B$ = {sacar oros o sacar rey}

3. En cada caso queda:

a) No es una probabilidad pues $P(A)+P(B)+P(C)=\frac{77}{60}>1$.

b) No es una probabilidad pues $P(C)<0$.

c) Es una probabilidad pues $P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=1$ y todas ellas son positivas y menores que 1.

4. Cada apartado queda:

a) Como sabemos que $P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=1 \Rightarrow P(A)+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=1 \Rightarrow P(A)=\frac{7}{18}$

b) Queda:

$$P(\{B,\ C\})=\frac{2}{3} \Rightarrow P(C)=\frac{1}{3}$$

$$P(\{B,\ D\})=\frac{1}{2} \Rightarrow P(D)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

Aplicando que $P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=1$ obtenemos: $P(A)+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1 \Rightarrow P(A)=\frac{1}{6}$

c) Sustituyendo las relaciones dadas en la igualdad $P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=1$ obtenemos:

$$P(A)+\frac{1}{3}P(A)+\frac{1}{6}P(A)+\frac{2}{3}P(A)=1 \Rightarrow P(A)=\frac{6}{13}$$

d) Sustituyendo las relaciones dadas en la igualdad $P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=1$ obtenemos:

$$P(A)+P(B)+2P(A)+4P(A)=1 \Rightarrow P(A)=\frac{1}{8}$$

5. Queda:

a) Como $S_1 \cap S_2=\{a\}$, los sucesos S_1 y S_2 no son incompatibles.

b) $P(S_1 \cup S_2)=P(S_1)+P(S_2)-P(S_1 \cap S_2)=\frac{2}{4}+\frac{2}{4}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ $\quad P(\overline{S_2})=1-P(S_2)=1-\frac{2}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

6. Sabemos que $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, luego sí es posible siempre y cuando se dé que $P(A\cap B)=0,2$.

7. Sabiendo que: $P(A-B)=P(A\cap \overline{B})$ y utilizando las siguientes igualdades:

$$\left.\begin{array}{l} P(A)=P(A\cap\overline{B})+P(A\cap B) \\ P(A\cup B)=P(B)+P(A\cap\overline{B}) \end{array}\right\}\Rightarrow P(A\cap\overline{B})=\frac{1}{2}[P(A)-P(B)]$$

Del mismo modo: $P(B-A)=P(B\cap\overline{A})=\frac{1}{2}[P(A)-P(B)]$

En el caso de que: $P(B-A)=P(B\cap\overline{A})=\frac{1}{2}=P(A\cap B)$

Obtenemos: $P(A\cup B)=P(A\cap B)=P(A)+P(B)\Rightarrow P(A)+P(B)=1$

En este caso $A=B$ y $P(A)=\frac{1}{2}=P(B)$

8. Llamando C a salir cara y X a salir cruz, tenemos:

$$P(C)=3P(X)\ y\ P(C)+P(X)=1\Rightarrow P(C)=\frac{3}{4}\ y\ P(X)=\frac{1}{4}$$

9. El espacio muestral consta de $2^4=16$ elementos.

a) $P(\text{ al menos una cruz })=1-P(\text{ todas caras })=\frac{15}{16}$

b) $P(\text{ 2 caras y 2 cruces })=\frac{6}{16}$

PÁGINA 301

■ 10. Resuelve las cuestiones siguientes referidas al lanzamiento de dados:

a) Se lanzan tres dados. Halla la probabilidad de obtener por lo menos un cuatro.

b) Se lanzan dos dados. Halla la probabilidad de que la suma de los puntos sea menor que seis.

c) ¿Por qué es más frecuente, en el lanzamiento de tres dados, obtener suma 10 que suma 9?

■ 11. Se lanzan dos dados una sola vez en un juego en el que participan dos jugadores. El primer jugador gana cuando la suma de las puntuaciones en las caras superiores de los dados es igual a un número impar, mientras que el segundo jugador gana cuando la citada suma es un número par múltiplo de 3. Halla:

a) Probabilidad de que gane el primer jugador

b) Probabilidad de que gane el segundo jugador.

c) Probabilidad de que ninguno gane.

■ 12. De una baraja española de 40 cartas se extrae una al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea bastos o menor de cinco?

■ 13. De una baraja de 40 cartas se extraen 3 naipes consecutivamente sin reemplazamiento. Calcula la probabilidad de obtener la secuencia sota, caballo, rey.

■ 14. De una urna que contiene 8 bolas rojas, 5 amarillas y 7 verdes se extrae una bola al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) Sea una bola roja. b) Sea una bola verde. c) Sea una bola roja o verde. d) No sea roja.

■ 15. De una urna que contiene 9 bolas rojas y 5 negras se extraen, sucesivamente, dos bolas. Halla la probabilidad de que sean:

a) Las dos negras.

b) Las dos rojas.

c) La primera roja y la segunda negra.

d) Una roja y otra negra.

■ 16. Una urna contiene 5 bolas blancas y 7 negras. Se sacan al azar tres bolas. Calcula la probabilidad de que, al menos, una sea blanca.

■ 17. Se tienen dos urnas. La primera contiene 6 bolas blancas y 8 negras, y la segunda, 4 blancas y 12 negras. Se extrae al azar una bola de cada urna. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?

■ 18. Ana, Juan y Raúl, que están esperando para realizar una consulta médica, deciden sortear el orden en que van a entrar.

a) Calcula la probabilidad de que los dos últimos en entrar sean hombres.

b) Determina si son independientes los sucesos S_1 y S_2, siendo:

S_1: «la mujer entra antes que alguno de los hombres».

S_2: «los dos hombres entran consecutivamente».

■ 19. Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = 1/2$ y $P(B) = 3/5$. Calcula, razonadamente, para qué valor de $P(A \cup B)$ los sucesos A y B son independientes.

■ 20. ¿Son independientes los sucesos de sacar múltiplo de tres y sacar múltiplo de cuatro al lanzar al aire un dado en forma de dodecaedro regular?

■ 21. Determina si son dependientes o independientes, compatibles o incompatibles, los sucesos A y B que cumplen las condiciones siguientes:

a) $P(A) = 1/4$, $P(B) = 1/2$, $P(A \cup B) = 5/8$

b) $P(A) = 1/6$, $P(B) = 1/3$, $P(A \cup B) = 1/2$

10. En cada caso queda:

a) Los casos posibles son: $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

Los casos favorables son:

- Un cuatro: $(4,-,-),(-,4,-),(-,-,4)$; $3 \cdot 5 \cdot 5 = 75$
- Dos cuatros: $(4,4,-),(4,-,4),(-,4,4)$; $3 \cdot 5 = 15$
- Tres cuatros: $(4,4,4);1$

En total : $75+15+1=91$, por tanto la probabilidad es de $\frac{91}{216}=0,42$

b) Los casos posibles son:

Suma 2:1 Suma 4:3 Suma 3:2 Suma 5:4

En total: 10 y la probabilidad de obtener suma menor que seis es de $\frac{10}{36}=0,28$

c) Ya que obtenemos:

Suma 9

Resultados	Posibilidades
(3, 3, 3)	1
(4, 3, 2)	6
(4, 4, 1)	3
(5, 3, 1)	6
(5, 2, 2)	3
(6, 2, 1)	6
En total	25

Suma 10

Resultados	Posibilidades
(4, 4, 2)	3
(4, 3, 3)	3
(5, 4, 1)	6
(5, 3, 2)	6
(6, 3, 1)	6
(6, 2, 2)	3
En total	27

11. Queda:

a) $P(\text{gana } 1^{\text{o}}) = P(\text{suma impar}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

b) $P(\text{gana } 2^{\text{o}}) = P(\text{suma múltiplo}) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

$\{\text{suma}\,\dot{3}\} =$
$= \{(12)(21)(15)(24)(33)(42)(51)(36)(45)(54)(63)(66)\}$

c) $P(\text{ninguno gana}) = P(\text{ni suma par ni múltiplo de 3}\} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

12. $P(\text{bastos o menor de 5}) = P(\text{bastos}) + P(<5) - P(\text{bastos y } <5) = \frac{10}{40} + \frac{16}{40} - \frac{4}{40} = \frac{22}{40} = \frac{11}{20}$

13. Queda: $P(\text{sota, caballo y rey}) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{4}{38} = \frac{4}{3705}$

14. En cada caso:

a) $P(\text{roja}) = \frac{8}{20} = 0{,}4$

b) $P(\text{verde}) = \frac{7}{20} = 0{,}35$

c) $P(\text{roja o verde}) = \frac{15}{20} = 0{,}75$

d) $P(\text{no roja}) = \frac{12}{20} = 0{,}6$

15. Las probabilidades son:

a) $P(\text{dos negras}) = \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} = \frac{10}{91} = 0{,}11$

b) $P(\text{dos rojas}) = \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13} = \frac{36}{91} = 0{,}396$

c) $P(1^{\text{a}} \text{ roja y } 2^{\text{a}} \text{ negra}) = \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} = \frac{45}{182} = 0{,}25$

d) $P(\text{una roja y una negra}) = \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} \cdot 2 = \frac{45}{91} = 0{,}495$

16. $P(\text{ al menos una blanca }) = 1 - P(\text{ las tres negras }) = 1 - \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} = \frac{37}{44} = 0{,}841$

En este caso hemos supuesto que no reemplazamos las bolas de la urna.

En caso de reemplazar las bolas la probabilidad pedida es: $1 - \left(\frac{7}{12}\right)^3 = \frac{1385}{1728} = 0{,}802$

17. La probabilidad queda: $P(\text{ igual color }) = P(BB) + P(NN) = \frac{6}{14} \cdot \frac{4}{16} + \frac{8}{14} \cdot \frac{12}{16} = \frac{15}{28} = 0{,}54$

18. La solución es:

a) Casos posibles $P_3 = 6$ .casos favorables en los que los dos últimos son los hombres son 2 luego la probabilidad pedida es $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

b) Puede decirse:

$$P(S_1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(S_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(S_1 \cap S_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(S_1) \cdot \mathrm{P}(S_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

Por tanto: $P(S_1 \cap S_2) \neq P(S_1) \cdot \mathrm{P}(S_2) \Rightarrow$ no independientes

19. Los sucesos A y B son independientes si cumplen:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

En este caso : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{5} - \frac{3}{10} = \frac{4}{5}$

20. Queda:

Múltiplos de 3 = {3,6,9,12} $P(\dot{3}) = \dfrac{4}{12}$

Múltiplos de 4 = {4,8,12} $P(\dot{4}) = \dfrac{3}{12}$

Múltiplos de 3 y de 4 = {12} $P(\dot{3} \cap \dot{4}) = \dfrac{1}{12}$

Por tanto los sucesos son independientes pues se cumple que $P(\dot{3} \cap \dot{4}) = \dfrac{1}{12} = P(\dot{4}) \cdot P(\dot{3})$

21. Utilizando la igualdad $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Obtenemos:

a) $P(A \cap B) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{8} = \dfrac{1}{8}$ Como $P(A \cap B) \neq 0$ los sucesos son compatibles y como ocurre lo siguiente $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, entonces los sucesos son independientes.

b) $P(A \cap B) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} = 0$ Como $P(A \cap B) = 0$ los sucesos son incompatibles y como $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, entonces los sucesos son dependientes.

PÁGINA 302

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

22. La probabilidad de que un alumno apruebe Matemáticas es de 0,6, la de que apruebe Lengua es de 0,5 y la de que apruebe las dos es de 0,2.
    a) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe al menos una asignatura?
    b) ¿Y de que no apruebe ninguna?
    c) ¿Y la de que apruebe Matemáticas y no Lengua?

23. Se lanza un dado dos veces. Calcula la probabilidad de que en la segunda tirada se obtenga un número mayor que en la primera.

24. Un estudiante se presenta a un examen tipo test compuesto por cien preguntas, cada una de las cuales va acompañada de cuatro respuestas (y sólo una es correcta).
    Sesenta de las preguntas corresponden a la parte del programa que el alumno ha preparado y en las que tiene una probabilidad del 80 % de contestar acertadamente. En el resto de las preguntas contestará al azar. Si elige al azar una pregunta, ¿cuál es la probabilidad de que la respuesta sea correcta?

25. Dos personas piensan cada una en un número del 0 al 9. Calcula la probabilidad de que las dos personas no piensen el mismo número.

26. Se escuchan tres CD de música y se guardan al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los CD haya sido guardado en su caja?

27. Con las cifras 1, 2, 3, 4 y 5 se forman todos los números posibles de tres cifras distintas. ¿Cuál es la probabilidad de que uno de ellos, elegido al azar, sea múltiplo de 4?

28. En un centro escolar los alumnos de segundo de Bachillerato pueden optar por cursar como lengua extranjera inglés o francés. En un determinado curso, el 90 % de los alumnos estudia inglés y el resto francés. El 30 % de los que estudian inglés son chicos y de los que estudian francés son chicos el 40 %. Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?

29. En una universidad en la que sólo hay estudiantes de Arquitectura, Ciencias y Letras, terminan la carrera el 5 % de Arquitectura, el 30 % de Ciencias y el 50 % de Letras. Elegido un estudiante al azar, se pide:
    a) Probabilidad de que sea de Arquitectura y haya terminado.
    b) Probabilidad de que haya terminado sus estudios.

30. Se tienen dos urnas U_1 y U_2 cuyo contenido es: en la urna U_1, 4 bolas azules, 3 bolas rojas y 3 verdes; en la urna U_2, 4 rojas, 5 azules y 1 verde.
    Se lanzan tres monedas y si se obtienen exactamente dos caras se extrae una bola de la urna U_1, en otro caso se extrae de la urna U_2.
    a) Haz un diagrama para el experimento aleatorio de lanzar tres monedas.
    b) Calcula la probabilidad de que la bola extraída sea azul.

31. Se consideran dos sucesos, A y B, asociados a un experimento aleatorio, con $P(A) = 0{,}7$, $P(B) = 0{,}9$ y $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0{,}58$. ¿Son independientes A y B?

22. La solución en cada caso es:

a) $P(\text{apruebe al menos una}) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}9$

b) $P(\text{no apruebe ninguna}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

c) $P(\text{apruebe Matemáticas y no Lengua}) =$
$= 0{,}6 - 0{,}2 = 0{,}4$

23. La probabilidad es: $\frac{15}{36} = 0{,}4167$

24. La probabilidad es:

$$P(\text{ respuesta correcta}) = \frac{60}{100} \cdot \frac{80}{100} + \frac{40}{100} \cdot \frac{1}{4} = \frac{58}{100} = 0{,}58$$

25. En cada caso es:

$$P(\text{ piensen el mismo numero}) = \frac{10}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$$

$$P(\text{ no piensen el mismo número}) = 1 - P(\text{ piensen el mismo numero}) 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} = 0{,}9$$

26. La probabilidad es:

$$P(\text{ al menos 1 en su caja}) = P(\text{ todos}) + P(\text{ solo uno}) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0{,}67$$

27. Casos posibles son $V_{5,3} = 60$

Casos favorables son los números que terminen en 12, en 32, en 52 y en 24 en total 12 números.

La probabilidad pedida es $\frac{12}{60} = 0{,}2$.

28. La probabilidad es:

$$P(\text{chica}) = 0{,}9 \cdot 0{,}7 + 01 \cdot 0{,}6 = 0{,}69$$

29. Suponemos que el porcentaje de alumnos que cursan cada una de las carreras es el mismo. En este supuesto se tiene:

a) P (sea de Arquitectura y haya terminado) =

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{100} = 0{,}0167$$

b) P (haya terminado) =

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{30}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{50}{100} =$$

$$= \frac{85}{300} = 0{,}2833$$

30. En cada caso:

a) El espacio muestral asociado al experimento de lanzar tres monedas.

$$E = \{(CCC)(CCX)(CXC)(XCC)$$
$$(XXC)(XCX)(CXX)(XXX)\}$$

b) En este caso:

P(bola azul) = P(sacar 2 caras) · P(bola azul de U_1) +
+ P(no 2 caras) · P(bola azul de U_2) =

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} + \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{10} = \frac{37}{80} = 0{,}4625$$

31. Se tiene que:

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$$

Por tanto:

$$P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - 0{,}58 = 0{,}42$$

Además: $P(\text{A}) \cdot P(\text{B}) = 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}63$

Como: $P(A \cap B) \neq P(\text{A}) \cdot P(\text{B})$

se tiene que A y B no son independientes.

Unidad 13 – Probabilidad condicionada

PÁGINA 305

cuestiones iniciales

1. En una bolsa hay 4 canicas rojas, 4 azules y 2 verdes. Se agita bien la bolsa y se sacan 3 canicas: 2 rojas y 1 azul. Después se extrae otra canica. ¿De qué color es más probable que sea? Elige la respuesta correcta:

   a) Roja. b) Azul. c) Verde.

   d) Todos los colores son igualmente probables.

2. Calcula el valor de la probabilidad del siguiente suceso: «La suma de las caras de dos dados es 10, 11 o 12 habiendo salido 6 en el primer dado».

3. Extraemos dos cortes de una baraja de 40 cartas. Halla la probabilidad:

   a) De sacar dos copas.

   b) De sacar dos cartas de palos distintos.

   NOTA: Considera los dos problemas con reemplazamiento de la primera carta y sin reemplazamiento.

4. Se tienen dos cajas, la primera con 4 bolas blancas y 2 rojas y la segunda con 3 bolas blancas y 3 rojas. Se abre una caja al azar y se extrae una bola. Calcula:

   a) La probabilidad de que la caja sea la segunda y la bola blanca.

   b) La probabilidad de que la caja sea la primera sabiendo que la bola es blanca.

SOLUCIONES

1. La composición de la bolsa queda con 2 canicas rojas, 3 azules y 2 verdes. Por tanto, el color más probable de las que quedan dentro es azul.

2. La probabilidad es $\frac{1}{2}$.

3. En cada caso:

   a) Con reemplazamiento la probabilidad es $\frac{10}{40}\cdot\frac{10}{40}=\frac{1}{16}$

   Sin reemplazamiento la probabilidad es $\frac{10}{40}\cdot\frac{9}{39}=\frac{3}{52}$

b) Con reemplazamiento $\frac{3}{4}$

Sin reemplazamiento $\frac{30}{39}=\frac{10}{13}$

4. Las probabilidades son:

a) $P(\text{ caja segunda y bola blanca })=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$

b) $P(\text{ caja primera y bola blanca })=\frac{\text{caja primera y bola blanca}}{P(\mathit{bola\,blanca})}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6}}=\frac{4}{7}$

PÁGINA 315

A C T I V I D A D E S

Utiliza el método de inducción para resolver las siguientes actividades:

1. Matrices. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Demuestra que $A^n = 3^{n-1} \cdot A$.

2. Múltiplo de 5. Demostrar que $n^5 - n$ es múltiplo de 5 para cualquier valor de n.

3. Suma de cubos. Demuestra que para cualquier número natural n se verifica: $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

SOLUCIONES

1. Siguiendo el método de inducción y sabiendo que la igualdad es cierta para valores pequeños de n, damos por supuesto que es cierta para un valor cualquiera y demostramos que también lo es para el siguiente:

- Para $n=1$ vemos que la igualdad es cierta pues $A=3^0 \cdot A$
- Para $n=2$ calculamos $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot A$
- Suponemos que es cierta para $n=p$, es decir: $A^p = 3^{p-1} \cdot A$
- Hemos de ver que también es cierta para $n=p+1$, es decir hemos de probar que ocurre lo siguiente: $A^{p+1} = 3^p \cdot A$.

Para ello calculamos esta matriz $A^{p+1} = A^p \cdot A = 3^{p-1} \cdot A \cdot A = 3^p \cdot A$ que es lo que queríamos demostrar.

Con esto hemos demostrado que la igualdad es cierta para $p+1$. Por tanto podemos afirmar que es cierta $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

2. Siguiendo el método de inducción y sabiendo que $n^5 - n$ es múltiplo de 5 es cierto para valores pequeños de *n*, damos por supuesto que es cierto para un valor cualquiera y demostramos que también lo es para el siguiente.

- Para $n=1$ vemos que la igualdad es cierta pues 15 – 1 = múltiplo de 5
- Para $n=2$ 25 – 2 = 30 = múltiplo de 5
- Suponemos que es cierta para $n=p$, es decir: $p^5 - p$ es múltiplo de 5.
- Hemos de ver que también es cierta para $n=p+1$, es decir hemos de probar que se cumple la siguiente expresión: $(p+1)^5 - (p+1)$ es múltiplo de 5.

Para ello operamos y obtenemos:
$(p+1)^5 - (p+1) = p^5 + 5p^4 + 10p^3 + 10p^2 + 5p + 1 - p - 1 = (p^5 - p) + 5(p^4 + 2p^3 + 2p^2 + p)$ que es una expresión que resulta múltiplo de 5 + múltiplo de 5 = múltiplo de 5, que es lo que queríamos demostrar.
Con esto hemos demostrado que la igualdad es cierta para $p+1$. Por tanto podemos afirmar que es cierta $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

3. Siguiendo el método de inducción y sabiendo que la igualdad es cierta para valores pequeños de *n*, damos por supuesto que es cierta para un valor cualquiera y demostramos que también lo es para el siguiente.

- Para $n=1$ la igualdad es cierta $1 = \dfrac{1(1+1)^2}{4}$
- Para $n=2$ la igualdad es cierta pues $13 + 23 = \dfrac{2^2(2+1)^2}{4}$
- Suponemos que es cierta para $n=p$, es decir: $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + p^3 = \dfrac{p^2(p+1)^2}{4}$
- Hemos de ver que también es cierta para $n=p+1$, es decir hemos de probar que se da la siguiente expresión: $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + p^3 + (p+1)^3 = \dfrac{(p+1)^2(p+2)^2}{4}$

Para ello utilizando lo anterior obtenemos:

$$\frac{p^2(p+1)^2}{4} + (p+1)^3 = (p+1)^2\left(\frac{p^2}{4} + p + 1\right) = \frac{(p+1)^2(p+2)^2}{4}$$

que es lo que queríamos demostrar.

Con esto hemos demostrado que la igualdad es cierta para $p+1$. Por tanto podemos afirmar que es cierta $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

PÁGINA 320

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Se supone que 25 de cada 100 hombres y 600 de cada 1 000 mujeres usan gafas. Si el número de mujeres es cuatro veces superior al de hombres, calcula la probabilidad de encontrarnos:

   a) con una persona sin gafas;
   b) con una mujer con gafas.

2. Se lanza un dado numerado de 1 a 6:

   a) Encuentra la probabilidad de que salga 3, si se sabe que salió impar.
   b) Calcula la probabilidad de que salga par, si se sabe que salió mayor que tres.

3. A un congreso asiste el mismo número de hombres que de mujeres. El 60% de los hombres tiene 40 años o más y el 30% de las mujeres tiene menos de 40 años.

   a) Si se elige al azar una persona que asiste al congreso, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?
   b) Si se elige al azar una persona que asiste al congreso, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 40 años?
   c) Si se elige un asistente al azar y se observa que tiene más de 40 años, ¿cuál es la probabilidad de que dicha persona sea mujer?

4. En una ciudad en la que hay doble número de hombres que de mujeres, hay una epidemia. El 6% de los hombres y el 11% de las mujeres están enfermos. Se elige al azar un individuo. Calcula la probabilidad de que:

   a) sea hombre;
   b) esté enfermo;
   c) sea hombre, sabiendo que está enfermo.

5. Un estudiante hace dos pruebas en un mismo día. La probabilidad de que pase la primera prueba es del 0,6. La probabilidad de que pase la segunda es del 0,8 y la de que pase ambas es del 0,5. Se pide:

   a) La probabilidad de que pase, al menos, una prueba.
   b) La probabilidad de que no pase ninguna prueba.
   c) ¿Son las pruebas independientes?
   d) La probabilidad de que pase la segunda prueba en el caso de no haber superado la primera.

6. La producción de una empresa la realizan a partes iguales tres turnos, de los que dos son diurnos y uno nocturno. El porcentaje de piezas defectuosas producidas en cada turno diurno es el 2%, en tanto que el porcentaje de piezas defectuosas producidas por el turno nocturno es del 8%.

   a) Si se toma una pieza al azar de un turno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?
   b) Si se toma una pieza al azar de un turno al azar y resulta ser defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que la pieza haya sido fabricada en el turno nocturno? ¿Y cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en el turno diurno?

7. Una fábrica de coches tiene tres cadenas de producción, *A*, *B* y *C*. La cadena *A* fabrica el 50% del total de coches producidos, la *B* el 25% y la *C* el resto. La probabilidad de que un coche resulte defectuoso es: en la cadena *A*, 1/2; en la *B*, 1/4 y en la *C*, 1/6.

   Calcula razonadamente:

   a) La probabilidad de que un coche sea defectuoso y haya sido fabricado por la cadena *A*.
   b) La probabilidad de que un coche sea defectuoso.
   c) Si un coche no es defectuoso, ¿cuál es probabilidad de que haya sido producido por la cadena *C*?

SOLUCIONES

1. Las probabilidades son:

   a) $P(\text{ una persona sin gafas }) = \frac{1}{5} \cdot \frac{75}{100} + \frac{4}{5} \cdot \frac{40}{100} = \frac{235}{500} = 0,47$

   b) $P(\text{ una mujer con gafas }) = \frac{4}{5} \cdot \frac{60}{100} = \frac{240}{500} = 0,48$

2. Quedan:

   $P(\text{ salga 3/salió impar }) = \frac{1}{3}$

   $P(\text{ par/mayor que 3 }) = \frac{2}{3}$

3. La solución es:

   a) $P(\text{ mujer }) = \frac{1}{2}$

   b) $P(\text{ menos de 40 años }) = 0,5 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,3 = 0,35$

   c) $P(\text{ mujer/mas de 40 años }) = \frac{0,7}{0,7 + 0,6} = 0,5385$

4. Queda:

   a) $P(\text{ hombre }) = \frac{2}{3}$

   b) $P(\text{ este enfermo }) = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{11}{100} = \frac{23}{300} = 0,0767$

   c) $P(\text{ hombre/esta enfermo }) = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{100}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{100} + \frac{11}{100} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{12}{23} = 0,52$

5. Sean A y B, respectivamente, la primera y la segunda de las pruebas. Tenemos:

$$P(\mathrm{A}) = 0{,}6,\ P(\mathrm{B}) = 0{,}8 \text{ y } P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0{,}5$$

a) $P(\text{ pase al menos una }) = P(A \cup B) = 0{,}6 + 0{,}8 - 0{,}5 = 0{,}9$

b) $P(\text{ no pase ninguna }) = 1 - P(\text{ no pase ninguna }) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

c) No son independientes, ya que $P(A \cap B) = 0{,}5$ *y* $P(A) \cdot P(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48$ son diferentes.

d) Queda:

$$P(\mathrm{B}/\overline{\mathrm{A}}) = \frac{P(\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{A}})}{P(\overline{\mathrm{A}})} = \frac{P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\overline{\mathrm{A}})} =$$

$$= \frac{0{,}8 - 0{,}5}{1 - 0{,}6} = \frac{0{,}3}{0{,}4} = 0{,}75$$

6. Las probabilidades son:

a) La probabilidad es: $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{100} = \frac{1}{25} = 0{,}04$

b) $P(\text{ nocturna/defectuosa }) = \dfrac{\frac{1}{3} \cdot \frac{8}{100}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{8}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{100}} = \frac{2}{3} = 0{,}67$

7. La solución en cada caso:

a) $P(\text{ defectuoso y de A }) = \frac{50}{100} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}25$

b) $P(\text{ defectuoso }) = \frac{50}{100} \cdot \frac{1}{2} + \frac{25}{100} \cdot \frac{1}{4} + \frac{25}{100} \cdot \frac{1}{6} = \frac{17}{48} = 0{,}35$

c) $P(\text{ C/no defectuoso }) = \dfrac{\frac{25}{100} \cdot \frac{5}{6}}{\frac{25}{100} \cdot \frac{5}{6} + \frac{50}{100} \cdot \frac{1}{2} + \frac{25}{100} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{10}{31} = 0{,}32$

PÁGINA 321

■ 8. En un hospital, la probabilidad de que un enfermo tenga fiebre es 0,76 y de que tenga tensión alta es 0,58. Además, se sabe que la probabilidad de que tenga fiebre o tensión alta es 0,62. Halla la probabilidad de que un enfermo de ese hospital:

a) Tenga fiebre y tensión alta.

b) No tenga ni fiebre ni tensión alta.

■ 9. ¿Son independientes los sucesos de sacar una figura (sota, caballo o rey) y sacar un oro al tomar una carta de una baraja española?

■ 10. Se consideran dos sucesos, A y B, asociados a un experimento aleatorio, con $P(A) = 0{,}2$; $P(B) = 0{,}6$; $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0{,}7$. ¿Son independientes A y B? Calcula $P(A \cup B)$.

■ 11. La ruleta de un casino consta de 40 casillas, numeradas de 1 a 40. Los números acabados en 1, 2, 3, 4 o 5 son rojos, y el resto negros. Puesta en marcha la ruleta, se consideran los sucesos siguientes: A = {el resultado es un número de la primera decena}, B = {el resultado es un número par}, C = {el resultado es un número rojo}. Averigua:

a) La probabilidad $P(C - A)$.

b) La probabilidad de que el número sea de la primera decena, sabiendo que es rojo.

c) ¿Son independientes los sucesos A y B? ¿Y los sucesos A y C?

■ 12. Una urna contiene 5 bolas rojas y 3 blancas. Se selecciona una bola al azar, se descarta y se colocan dos bolas del otro color en la urna. Luego, se saca una segunda bola. Determina la probabilidad de que:

a) la segunda sea roja;

b) ambas bolas sean del mismo color;

c) la primera sea roja, si la segunda lo es.

■ 13. Un empresario tiene dos negocios en funcionamiento, N_1 y N_2. El primero produce pérdidas en el 20% de sus balances y el segundo, sólo en el 4%. Suponiendo que el volumen de negocios es el mismo para N_1 y N_2 y que analizando un balance al azar arrojó pérdidas, ¿cuál es la probabilidad de que sea del primer negocio?

■ 14. Se sabe que, en cierta población, la probabilidad de ser hombre daltónico es de un doceavo y la probabilidad de ser mujer y daltónica es de un veinticincoavo. La proporción de personas de ambos sexos es la misma. Se elige una persona al azar.

a) Si la persona elegida es hombre, halla la probabilidad de que sea daltónica.

b) Si la persona elegida es mujer, halla la probabilidad de que sea daltónica.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida padezca daltonismo?

■ 15. De todos los alumnos del último curso de bachillerato de una ciudad, el 80% cursa inglés y el 20%, francés. Se sabe, además, que el 53% de dichos alumnos son mujeres. Se elige al azar uno de dichos alumnos de último curso y resulta ser mujer. ¿Cuál es la probabilidad de que esta alumna curse francés?

8. Queda:

P(Fiebre y Tensión alta) = 0,76 + 0,58 – 0,62 = 0,72

$P\left(\overline{F} \cap \overline{T}\right) = P\left(\overline{F \cup T}\right)$ = 1 – 0,62 = 0,38

9. Se dice:

$P(\text{ figura}) = \dfrac{12}{40} = 0{,}3$ $\qquad P(\text{oro}) = \dfrac{10}{40} = 0{,}25$ $\qquad P(\text{ figura de oros}) = \dfrac{3}{40} = 0{,}075$

Al ser $P(\text{ figura de oros}) = P(\textit{figura}) \cdot P(\text{ oros})$, los sucesos son independientes.

10. Queda:

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 0{,}7 \Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}3$

Como $P(A) \cdot P(B) \neq P(A \cap B)$ no son independientes los sucesos A y B.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}2 + 0{,}6 - 0{,}7 = 0{,}1$

11. La solución:

a) $P(C - A) = \dfrac{15}{40} = 0{,}375$

b) $P(\text{ primera decena/rojo}) = \dfrac{P(\textit{primera decena / rojo})}{P(\textit{rojo})} = \dfrac{5/40}{20/40} = \dfrac{5}{20} = 0{,}25$

c) Veamos si los sucesos A y B son independientes.

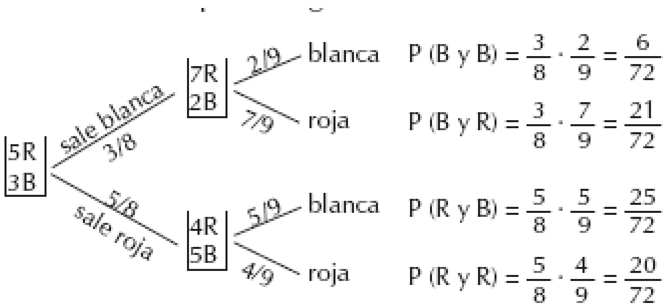
$$P(\mathrm{A}) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} \qquad P(\mathrm{B}) = \frac{1}{2}$$

$$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

Al ser $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, los sucesos son independientes.

Lo mismo ocurre para los sucesos A y C.

12. Obsérvese el esquema siguiente:



a) $P(\text{ segunda roja }) = \frac{21}{72} + \frac{20}{72} = \frac{41}{72}$

b) $P(\text{ ambas del mismo color }) = \frac{6}{72} + \frac{20}{72} = \frac{26}{72}$

c) $P(\text{ 1ª roja/2ª roja }) = \frac{P(\text{1ª roja y 2ª roja})}{P(\text{2ª roja})} = \frac{20/72}{41/72} = \frac{20}{41}$

13. La probabilidad pedida es:

$$P(N_1 / \text{pérdidas}) = \frac{P(N_1 \; y \, \text{pérdidas})}{P(\text{pérdidas})} = \frac{0,20 \cdot 1/2}{0,20 \cdot 1/2 + 0,04 \cdot 1/2} = \frac{0,20}{0,24} = \frac{5}{6}$$

14. Queda:

a) $P(\text{ daltónica/hombre }) = \frac{P(\text{daltónica/hombre})}{P(\text{hombre})} = \frac{1/12}{1/2} = \frac{2}{12} = 0,1667$

b) $P(\text{ daltónica/mujer }) = \frac{1/25}{1/2} = \frac{2}{25} = 0,08$

c) $P(\text{ daltónica }) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{25} = 0,0617$

15. La probabilidad es:

$$P(\text{ cursa francés/es mujer }) = \frac{P(\text{cursa francés y es mujer})}{P(\text{mujer})} = \frac{0,2 \cdot 0,53}{0,53} = 0,2$$

PÁGINA 322

ACTIVIDADES FINALES

16. Una fábrica tiene tres máquinas, *A*, *B* y *C*, que producen tornillos. Del total de tornillos se producen, respectivamente, el 50%, 30% y el 20%.

    La máquina *A* produce un 5% de tornillos defectuosos, la *B* un 4% y la *C* un 2%.

    a) Calcula la probabilidad de que un tornillo, elegido al azar, sea defectuoso.

    b) Si un tornillo elegido al azar resulta defectuoso, calcula la probabilidad de que lo haya producido la máquina *C*.

17. El 25% de las familias de cierta comunidad autónoma no sale fuera de la misma durante las vacaciones de verano. El 65% veranea por el resto de España y el 10% restante se va al extranjero. De los que se quedan en la comunidad, sólo un 10% no utiliza el coche en sus desplazamientos. Esta cantidad aumenta al 30% en los que salen por el resto de España y al 90% entre los que viajan al extranjero.

    a) Calcula el porcentaje de familias de esa comunidad que utiliza el coche en sus desplazamientos de vacaciones de verano.

    b) Una familia no usa coche en sus vacaciones de verano. ¿Cuál es la probabilidad de que salga de su comunidad moviéndose por el resto de España?

18. En el tribunal *X* se examinan el instituto *A*, con 123 alumnos, y el colegio *B*, con 77. De *A* aprueba el 75% y de *B* el 67%. El alumno *Y* no ha aprobado. Halla qué probabilidad hay de que pertenezca a cada uno de los centros examinados por el tribunal.

19. Una urna contiene 2 bolas blancas y 2 rojas, y otra urna 3 blancas y 2 rojas. Se pasa una bola de la primera a la segunda urna y después se extrae una bola de la segunda urna, que resulta ser blanca. Determina la probabilidad de que la bola trasladada hubiese sido blanca.

20. Se tienen dos urnas, una con 8 bolas blancas y 4 verdes; la otra, con 6 blancas y 10 verdes. Se extrae una bola de cada urna. Calcula la probabilidad de que sean del mismo color.

21. Un joyero compra los relojes a dos casas proveedoras. La primera le sirve el 60% de los relojes, de los cuales el 0,4% es defectuoso. La segunda le proporciona el resto, siendo defectuoso el 1,5%. Un día, el joyero, al vender un reloj, observa que este no funciona. Halla la probabilidad de que el reloj proceda de la primera casa proveedora.

22. Una urna contiene 5 bolas rojas y 8 verdes. Se extrae una bola y se reemplaza por dos del mismo color. A continuación, se extrae una segunda bola. Calcula:

    a) La probabilidad de que la segunda bola sea verde.

    b) La probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color.

23. En una bolsa *A* hay 4 bolas negras y 5 blancas. En otra bolsa *B* hay 2 negras y 3 blancas. Se elige al azar una bolsa y se extrae de ella una bola.

    a) Halla la probabilidad de que la bola extraída sea negra.

    b) Halla la probabilidad de que la bola extraída sea blanca.

24. Una urna contiene 3 bolas rojas y 1 blanca; otra urna contiene 4 bolas rojas y 2 blancas, y una tercera contiene 1 roja y 2 blancas. Se extrae una bola de una de ellas y se comprueba que es roja. Halla la probabilidad de que haya sido extraída de la primera urna.

16. Las soluciones quedan:

a) $P(\text{ defectuoso }) = \frac{50}{100}\cdot\frac{5}{100}+\frac{30}{100}\cdot\frac{4}{100}+\frac{20}{100}\cdot\frac{2}{100}=0,41$

b) $P(\text{ C/defectuoso }) = \dfrac{\frac{20}{100}\cdot\frac{2}{100}}{\frac{20}{100}\cdot\frac{2}{100}+\frac{50}{100}\cdot\frac{5}{100}+\frac{30}{100}\cdot\frac{4}{100}}=\frac{4}{41}=0,98$

17. La probabilidad viene dada por:

a) $\frac{25}{100}\cdot\frac{90}{100}+\frac{65}{100}\cdot\frac{70}{100}+\frac{10}{100}\cdot\frac{10}{100}=0,69$ Luego el 69% de las familias utiliza coche.

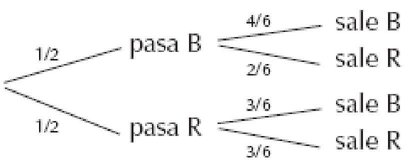
b) $P(\text{ resto España/ no coche }) = \dfrac{\frac{65}{100}\cdot\frac{30}{100}}{\frac{65}{100}\cdot\frac{30}{100}+\frac{25}{100}\cdot\frac{10}{100}+\frac{10}{100}\cdot\frac{90}{100}}=\frac{39}{62}=0,629$

18. En cada caso:

$$P(\text{ pertenezca a A / no ha aprobado }) = \dfrac{\frac{123}{200}\cdot\frac{25}{100}}{\frac{123}{200}\cdot\frac{25}{100}+\frac{77}{200}\cdot\frac{33}{100}}=\frac{3075}{5616}=0,5475$$

$$P(\text{ pertenezca a B / no ha aprobado }) = \dfrac{\frac{77}{200}\cdot\frac{33}{100}}{\frac{123}{200}\cdot\frac{25}{100}+\frac{77}{200}\cdot\frac{33}{100}}=\frac{2541}{5616}=0,4525$$

19. Observa el diagrama resultante:



La probabilidad es:

$$P(\text{ pasa blanca/sale blanca }) = \frac{P(\text{pasa blanca y sale blanca})}{P(\text{sale blanca})}=\frac{1/2\cdot 1/4}{1/2\cdot 1/4+1/2\cdot 3/6}=\frac{4}{7}$$

20. La probabilidad es: $P(\text{ mismo color}) = \frac{8}{12} \cdot \frac{6}{16} + \frac{4}{12} \cdot \frac{10}{16} = \frac{88}{192} = 0,4583$

21. Queda:

$$P(\text{ de la 1ª casa/no funciona}) = \frac{\text{P(de la 1ª casa y no funciona)}}{\text{P(no funciona)}} =$$

$$= \frac{0,6 \cdot 0,004}{0,6 \cdot 0,004 + 0,4 \cdot 0,015} = \frac{0,0024}{0,0084} = 0,2857$$

22. Quedan:

a) $P(\text{ 2ª verde}) = \frac{8}{13} \cdot \frac{7}{14} + \frac{5}{13} \cdot \frac{10}{14} = \frac{53}{91} = 0,58$

b) $P(\text{ igual color}) = \frac{8}{13} \cdot \frac{7}{14} + \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{14} = \frac{38}{91} = 0,42$

23. En cada caso:

a) $P(\text{negra}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{19}{45} = 0,42$

b) $P(\text{negra}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{26}{45} = 0,58$

24. La probabilidad queda:

$$P(\text{1ª urna / roja}) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{3}{7} = 0,43$$

PÁGINA 323

25. En una empresa de auditoría se ha contratado a tres personas para revisar la contabilidad de unas empresas bancarias. La primera de ellas se encarga de efectuar el 30% de los controles, la segunda el 45% y la tercera el 25% restante. Se ha comprobado que de las inspecciones realizadas por la primera persona, el 1% son erróneas; la segunda comete errores en el 3% de los casos y la tercera en el 2% de los casos.

a) Calcula la probabilidad de que, al elegir una inspección, esta sea errónea.

b) Al elegir una inspección correcta, ¿cuál es la probabilidad de que la haya realizado la segunda persona?

26. Dados dos sucesos aleatorios A y B, se sabe que:

$$P(\overline{B}) = \frac{3}{4} \qquad P(A) = P(A/B) = \frac{1}{3}$$

a) Razona si los sucesos A y B son independientes.

b) Calcula $P(A \cup B)$.

c) Determina $P(A/\overline{B})$.

27. La plantilla de empleados de unos grandes almacenes está formada por 200 hombres y 300 mujeres. La cuarta parte de los hombres y la tercera parte de las mujeres solo trabajan en el turno de mañana. Elegido uno de los empleados al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre o solo trabaje en el turno de mañana?

b) Sabiendo que no solo trabaja en el turno de mañana, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

28. Se sabe que dado A, la probabilidad de que ocurra B es 0,3; es decir, $P(B/A) = 0,3$. ¿Cuánto vale la probabilidad de que dado A no ocurra B: $P(\overline{B}/A)$?

29. Un test para detectar si una persona es portadora del virus de la varicela da positivo en el 86% de los que la padecen y da negativo en el 92% de los que no la padecen.

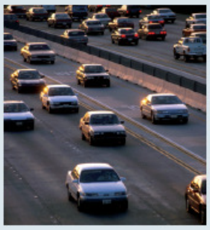
Se sabe que un 2% es portador del virus. Una persona se somete a un test. Halla:

a) La probabilidad de que el test le dé positivo.

b) La probabilidad de que sea portadora del virus de la varicela sabiendo que el test le ha dado positivo.

30. Dos sucesos A y B se sabe que son independientes, que la probabilidad de que ocurra alguno de ellos es 5/6 y que la probabilidad de que ocurran ambos simultáneamente es 1/3. Halla las probabilidades de A y de B.

31. En un grupo de personas, al 50% les han puesto alguna vez una multa de tráfico. Por otro lado, al 12,5% no les han puesto nunca una multa, pero sí han sufrido alguna vez un accidente. Finalmente, al 60% de quienes nunca han tenido un accidente no les han puesto nunca una multa.



a) ¿Qué porcentaje no ha tenido nunca un accidente ni le han puesto nunca una multa?

b) ¿Qué porcentaje no ha tenido nunca un accidente?

c) Entre las personas que nunca les han puesto una multa, ¿qué porcentaje no ha tenido nunca un accidente?

32. En una asignatura de primer curso de universidad, asisten a clase, regularmente, 210 alumnos, de los 300 que hay matriculados. Además, se sabe que aprueban el 80% de los alumnos que asisten a clase y el 50% de los que no asisten.

a) Se elige al azar un alumno matriculado. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya asistido a clase y haya aprobado?

b) Se elige al azar un alumno de entre los que han aprobado. ¿Cuál es la probabilidad de que haya asistido a clase?

25. En cada caso queda:

a) La probabilidad pedida es una probabilidad total:

$$P(Errónea) = P(Errónea / 1^{a}\ persona) + P(Errónea / 2^{a}\ persona) + P(Errónea / 3^{a}\ persona) =$$
$$= 0{,}3 \cdot 0{,}01 + 0{,}45 \cdot 0{,}03 + 0{,}02 \cdot 0{,}25 = 0{,}0155$$

b) Utilizando el teorema de Bayes, obtenemos:

$$P(2^{a}\ persona / correcta) = \frac{P(2^{a}\ persona\ y\ correcta)}{P(correcta)} =$$
$$= \frac{0{,}45\ x\ 0{,}97}{0{,}30\ x\ 0{,}99 + 0{,}45\ x\ 0{,}97 + 0{,}25\ x\ 0{,}98} = \frac{0{,}4365}{0{,}2970 + 0{,}4365 + 0{,}2450} = \frac{0{,}4365}{0{,}9785} = 0{,}4461$$

26. Queda:

a) A y B son independientes puesto que P(A) = P(A/B), es decir B no influye en la probabilidad de A.

b) Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Si $P(\overline{B}) = \frac{3}{4}$ entonces $P(B) = \frac{1}{4}$, por ser A y B independientes:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{12} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}.$$

27. Decimos:

	Hombres	Mujeres	TOTAL
Sólo mañanas	50	100	150
No sólo mañanas	150	200	350
TOTAL	200	300	500

A partir de la tabla obtenemos:

a) La probabilidad de que sea hombre o sólo trabaje en el turno de mañana es la expresada a continuación: $\frac{200}{500} + \frac{150}{500} - \frac{50}{500} = \frac{300}{500} = \frac{3}{5}$

b) $P(\text{Mujer/no solo mañanas}) = \frac{200}{350} = \frac{4}{7}$

28. Como $P(B/A) + P(\overline{B}/A) = 1$ y $P(B/A) = 0{,}3$; entonces $P(\overline{B}/A) = 0{,}7$.

29. Expresamos la información del enunciado en una tabla de contingencia:

	Mayores de 45 años	Menores de 45 años	Totales
Directivo	6	2	8
No directivo	14	78	92
Totales	20	80	100

Observando los valores de la tabla, respondemos a las preguntas:

a) El porcentaje de los trabajadores que tiene más de 45 años y no desempeña ningún cargo directivo es el 14%.

b) El porcentaje de los trabajadores que no es directivo y no es mayor de 45 años es el 78%.

c) El porcentaje de trabajadores que son directivos y no tienen más de 45 años es el 2%. El 2% de 150 trabajadores es 3.

30. Como A y B son independientes entonces $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow \quad P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3}$

Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ obtenemos: $P(A) + P(B) = \frac{7}{6}$.

Resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} P(A) + P(B) = \frac{7}{6} \\ P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \end{cases}$

Las soluciones son:

- Si $P(B) = \frac{2}{3}$ $\quad P(A) = \frac{1}{2}$.
- Si $P(B) = \frac{1}{2}$ $\quad P(A) = \frac{2}{3}$.

31. Construimos una tabla de contingencia con los datos que aparecen en el enunciado. Calculamos los valores de cada una de las casillas en tantos por ciento.

	Multa	No Multa	Totales
Accidenta	25	12,5	37,5
No Accidente	25	37,5	62,5
Totales	50	50	1

Observando la tabla respondemos a las cuestiones del enunciado:

a) El porcentaje que no ha tenido nunca un accidente ni les han puesto nunca una multa es el 37,5%.

b) El porcentaje que no ha tenido nunca un accidente es 62,5%.
Este valor de 62,5% se calcula : El 60% de x es 37,5% y se obtiene x= 62,5%

c) Entre las personas que no han tenido nunca una multa 50% del total es decir un 0,50, el porcentaje de las que no han tenido nunca un accidente 37,5% del total, es decir un 0,375, es el 75% de ese valor.

32. Hacemos una tabla de contingencia con los datos del problema y obtenemos:

	Asisten	No Asisten	Totales
Aprueban	168	45	213
No Aprueban	42	45	87
Totales	210	90	300

Las probabilidades pedidas son:

a) La probabilidad de que no haya asistido a clase y haya aprobado es $\frac{45}{300} = 0{,}15$

b) Entre los que han aprobado la probabilidad de haya asistido a clase es $\frac{168}{300} = 0{,}789$

También podíamos haberlo hecho por el teorema de Bayes:

$$P(Asiste/Aprueba) = \frac{\frac{210}{300} \cdot 0{,}8}{\frac{210}{300} \cdot 0{,}8 + \frac{90}{300} \cdot 0{,}5} = \frac{0{,}56}{0{,}71} = 0{,}789$$

PÁGINA 324

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

33. Si se lanzan dos dados, calcula la probabilidad de que la suma de los puntos obtenidos sea par, condicionado a que en uno de los dados el resultado obtenido haya sido el número tres.

34. Una urna contiene 25 bolas blancas sin marcar, 75 bolas blancas marcadas, 125 bolas negras sin marcar y 175 bolas negras marcadas. Se extrae al azar una bola.
   a) Calcula la probabilidad de que sea blanca.
   b) Se extrae al azar una bola y está marcada. ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?

35. En el lanzamiento de un dado se consideran los tres sucesos siguientes: A, sale un número impar; B, sale un número par; C, sale el 1 o el 2. Se pide:
   a) ¿Son independientes A y B?
   b) ¿Son independientes A y C?
   c) Calcula $P(A/C)$.

36. Una bolsa contiene tres monedas, una de las cuales está acuñada con dos caras, mientras que las otras dos monedas son normales. Se escoge una moneda al azar y se lanza sucesivamente obteniéndose cuatro caras. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda elegida sea la de dos caras?

37. En una ciudad el 55% de los habitantes consume pan integral, el 30% pan multicereales y el 20% ambos. Se pide:
   a) Sabiendo que un habitante consume pan integral, ¿cuál es la probabilidad de que coma pan multicereales?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de esa ciudad no consuma ninguno de estos panes?

38. Una urna contiene dos bolas. Se sabe que la urna se llenó tirando una moneda al aire dos veces y poniendo una bola blanca en la urna por cada cara y una negra por cada cruz. Se extrae una bola de la urna y resulta ser blanca. Calcula la probabilidad de que la otra bola de la urna sea también blanca.

39. Tenemos tres cajas, una verde, una roja y una amarilla y, en cada caja, hay una moneda. La de la caja verde está trucada y la probabilidad de que salga cara es doble de la probabilidad de que salga cruz; la moneda de la caja roja tiene dos caras y la de la caja amarilla no está trucada. Se toma una caja al azar y se lanza la moneda que está en esa caja. Calcula razonadamente:
   a) La probabilidad de que salga cara.
   b) La probabilidad de que, sabiendo que ha salido cara, se haya lanzado la moneda de la caja roja.

40. Una fábrica produce tres tipos diferentes de bolígrafos, A, B y C. El número total de unidades producidas de cada uno de ellos es el mismo (un tercio del total). Salen defectuosos, sin embargo, un 15‰ de todos los del tipo A, un 3‰ de todos los del tipo B y un 7‰ de todos los del tipo C. En un control de calidad se detectan el 70% de todos los bolígrafos defectuosos de tipo A, el 80% de los del tipo B y el 90% de los de tipo C. Los bolígrafos defectuosos detectados en dicho control se tiran. Si se saca al azar uno de estos bolígrafos defectuosos que se han tirado, calcula la probabilidad de que sea de tipo A.

41. Tres cajas idénticas contienen cada una dos fichas. En una, las fichas son blancas; en otra, de color rojo, y en la tercera, una roja y otra blanca. Se extrae una ficha, que resulta ser blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que la otra ficha que queda en la caja escogida sea también blanca?

33. $P(\text{ suma par/ha salido tres }) = \frac{5}{11}$

34. La solución es:

a) $P(\text{ blanca }) = \frac{25+75}{25+75+125+175} = \frac{100}{400} = 0{,}25$

b) $P(\text{blanca/marcada}) = \frac{\text{P(blanca y marcada)}}{P(\text{marcada})} = \frac{75}{75+175} = 0{,}3$

35. Queda:

a) $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = 0$

Como $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, estos sucesos no son independientes.

b) $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap C) = \frac{1}{6}$

Como $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
estos sucesos son independientes.

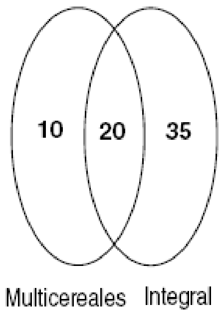
c) $P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{1/6}{1/3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

36. Queda:

$$P(\text{moneda de 2 caras / han salido 4 caras}) = \frac{P(\text{obtener 4 caras con moneda de 2 caras})}{P(\text{obtener 4 caras})} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{16}} = \frac{1}{1+\frac{1}{8}} = \frac{1}{\frac{9}{8}} = \frac{8}{9} = 0{,}8889$$

37. En el diagrama de Venn podemos ver los datos del problema:

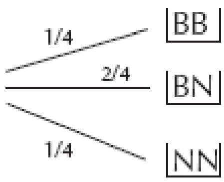


a) $P(\text{multic./integral}) = \dfrac{20}{55} = 0{,}36$

b) $P(\text{ninguno de estos panes}) =$

$= \dfrac{35}{100} = 0{,}35$

38. Las posibles configuraciones de la urna pueden verse en el dibujo adjunto.



$$P(\text{ segunda blanca/primera blanca }) = \frac{\text{P(blanca y blanca)}}{P\text{(primera blanca)}} = \frac{\frac{1}{4}\cdot 1}{\frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

39. En cada caso:

a) $P(\text{ cara }) = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}\cdot 1 + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{13}{18} = 0{,}72$

b) $P(\text{ roja/cara }) = \dfrac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \dfrac{6}{13} = 0{,}46$

40. La solución es:

$$P(A/\text{detectado defectuoso}) = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{15}{1000}\cdot\frac{70}{100}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{15}{1000}\cdot\frac{70}{100} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{1000}\cdot\frac{80}{100} + \frac{1}{3}\cdot\frac{7}{1000}\cdot\frac{90}{100}} =$$

$$= \frac{1050}{1050+240+630} = \frac{1050}{1920} = 0{,}5469$$

41. Queda:

$$P(\text{ segunda blanca/primera blanca }) = \frac{\text{P(blanca y blanca)}}{P\text{(primera blanca)}} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{2}{3} = 0{,}67$$

Unidad 14 – Estadística inferencial. Muestreo. Estimación puntual

PÁGINA *327*

cuestiones iniciales

1. ¿Cómo elegirías una muestra de 50 alumnos entre los 1 500 alumnos de un centro escolar con el fin de hacer un sondeo sobre las elecciones al Consejo Escolar?

2. En un centro de la UNED se sabe que el 30% de los alumnos tiene entre 18 y 22 años; el 45% entre 22 y 40 años, y el resto más de 40 años. ¿Cómo extraeríamos una muestra de 150 alumnos para hacer una estadística sobre el número semanal de horas que dedican al estudio?

3. Una máquina realiza piezas de precisión con un diámetro medio de 8 mm y una desviación típica de 0,5 mm. Suponiendo que la distribución es normal, calcula la probabilidad de que una pieza tomada al azar tenga un diámetro:
   a) Mayor que 8,5 mm.
   b) Menor que 7,5 mm.
   c) Comprendido entre 7 y 9 mm.

4. Un agente de seguros vende pólizas a cinco individuos, todos de la misma edad. De acuerdo con las tablas actuales, la probabilidad de que un individuo con esa edad viva 30 años más es de 3/5. Determina la probabilidad de que dentro de 30 años vivan:
   a) Los cinco individuos.
   b) Al menos tres.
   c) Solo dos.

SOLUCIONES

1. Mediante muestreo aleatorio simple asignando un numero desde el 0000; 0001; 0002, …, 1 499 para cada uno de los 1 500 alumnos y después tomando en una tabla de números aleatorios los alumnos que corresponden a los 50 números primeros seleccionados y estos formaran la muestra buscada.

2. Elegimos la muestra mediante muestreo estratificado. Los estratos son los alumnos entre 18 y 22 años, los alumnos entre 22 y 40 y los alumnos de más de 40 años.
   El tamaño muestral de cada estrato será proporcional al tamaño de estos.

$$\frac{x}{30}=\frac{y}{45}=\frac{z}{25}=\frac{150}{100}\Rightarrow$$

   $x=45$ alumnos entre 18 y 22 años.

   $y=67{,}5$ alumnos entre 22 y 40 años.

   $z=37{,}5$ alumnos con más de 40 años.

3. Las probabilidades pedidas son:

   a) $P(X>8{,}5)=P\left(Z>\dfrac{8{,}5-8}{0{,}5}\right)=P(Z>1)=1-P(Z<1)=0{,}1587$

   b) $P(X<7{,}5)=P\left(Z<\dfrac{7{,}5-8}{0{,}5}\right)=P(Z<-1)=1-P(Z<1)=0{,}1587$

   c) $P(7<X<9)=P(X<9)-P(X<7)=P(Z<2)-P(Z<-2)-1=0{,}9544$

4. Es una distribución binomial $B\left(5;\dfrac{3}{5}\right)$. Las probabilidades pedidas son:

   a) $P(X=5)=\binom{5}{5}\left(\dfrac{3}{5}\right)^5\cdot\left(\dfrac{2}{5}\right)^0=0{,}07776$

   b) $P(X\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=$

$$=\binom{5}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2+\binom{5}{4}\left(\frac{3}{5}\right)^4\cdot\frac{2}{5}+$$

$$+\binom{5}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^5\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^0=0{,}6826$$

   c) $P(X=2)=\binom{5}{2}\left(\dfrac{3}{5}\right)^2\cdot\left(\dfrac{2}{5}\right)^3=0{,}2304$

PÁGINA 343

ACTIVIDADES

■ Utiliza el principio de distribución de Dirichlet en la resolución de los problemas que siguen.

1. **Iniciales repetidas.** ¿Cuántos habitantes debe tener una ciudad para asegurar que hay al menos dos habitantes cuyas tres iniciales, del nombre y de los dos apellidos, coinciden? Suponemos que sólo se considera el primer nombre propio y 26 letras del alfabeto.

2. **Correspondencia.** Diecisiete personas mantienen correspondencia por carta, cada una con todas las demás. En sus cartas solamente tratan 3 temas. Cada par de personas trata en sus cartas sólo uno de estos temas. Demuestra que hay, al menos, 3 personas que se escriben sobre el mismo tema.

SOLUCIONES

1. Puesto que tanto el nombre de pila como los dos apellidos pueden comenzar por cualquiera de las 26 letras del alfabeto, por el principio de multiplicación de la combinatoria tenemos $26 \cdot 26 \cdot 26 = 17\,576$, conjuntos ordenados distintos de tres iniciales.

   Por el principio de distribución, el número mínimo de habitantes necesarios para garantizar que existen dos con las mismas iniciales será 17 577.

   En esta situación los nidos son $r = 17\,576$, es decir, los conjuntos ordenados distintos de tres iniciales; y las palomas son el número mínimo de habitantes, $n = 17\,577$

2. Seleccionemos una persona, digamos A. Mantiene correspondencia con las 16 restantes. Como solamente hay tres temas, según el principio del palomar, debe escribirse al menos con seis de ellas sobre el mismo tema.

   Para fijar ideas, supongamos que A se escribe al menos con 6 de las restantes 16 sobre el tema I. Si alguna de estas seis se escribe con otra sobre el tema I, entonces ya hay tres escribiéndose sobre el tema I.

   Supongamos que estas seis personas se escriben sobre los temas II y III. Si B es una de estas seis, entonces, por el principio del palomar, debe escribirse al menos con tres de las otras 5 sobre uno de los dos temas, por ejemplo el tema II.

   Ahora hay dos posibilidades para estas últimas tres personas. Si alguna se escribe con otra sobre el tema II, ya hemos encontrado tres personas que se escriben sobre el tema II. Si, por el contrario, ninguna de las tres se escribe con las otras sobre el tema II, entonces las tres deben escribirse entre sí sobre el tema III, con lo que está probada la afirmación del enunciado.

PÁGINA *348*

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Toma tu libro de texto y considera el número de páginas que tiene. Utiliza la tabla de números aleatorios para seleccionar una muestra de 15 páginas en el libro.

2. A un centro de enseñanza asisten 500 alumnos y se desea extraer una muestra aleatoria de tamaño 25. Describe la elección de dicha muestra en los casos de utilizar el muestreo aleatorio.

3. En cierto centro de enseñanza se va a realizar un estudio para conocer el tipo de actividades extraescolares que gustan más a los alumnos. Para ello, van a ser encuestados 60 alumnos elegidos al azar. Al centro asisten 250 alumnos de 3º de ESO, 200 de 4º de ESO, 100 de 1º de Bachillerato y 50 de 2º de Bachillerato. Se decide elegir la muestra utilizando muestreo estratificado. Define los estratos y determina el tamaño muestral de cada estrato.

4. Una población está formada por solo seis elementos, con valores 2, 4, 6, 8, 10 y 12. Consideramos todas las muestras de tamaño 2 con reemplazamiento que pueden extraerse de esta población. Calcula:
   a) La media de la población.
   b) La desviación típica de la población.
   c) La media de la distribución muestral de medias.
   d) La desviación típica de la distribución muestral de medias.

5. Una biblioteca pública está organizada en 5 secciones, en cada una de las cuales hay un determinado número de libros, como muestra la tabla:

Sección	Sección 1	Sección 2	Sección 3	Sección 4	Sección 5
Nº libros	500	860	1 200	700	740

   Con objeto de estimar el porcentaje de libros de edición española se quiere seleccionar una muestra del 5% del número total de libros a través del muestreo estratificado aleatorio considerando como estratos cada una de las secciones. Determina el número de libros a seleccionar en cada sección.

6. Se toma una muestra aleatoria de 64 personas en una población de 100 000, de forma que una de sus características se distribuye normalmente con media $\mu = 10$ y desviación típica $\sigma = 3$. Calcula:
   a) La probabilidad de que la media de la muestra esté comprendida entre 9 y 11.
   b) La probabilidad de que la media de la muestra sea mayor que 11.

7. Si se sabe que la distribución muestral de medias para muestras de tamaño 36 tiene varianza 8, ¿cuál será la desviación típica de la población original?

8. Ciertas pilas eléctricas fabricadas por una compañía tienen una duración media de 900 horas y una desviación típica de 80 horas. La compañía vende todas las semanas 1 000 lotes de 100 pilas cada uno. Calcula:
   a) ¿En cuántos lotes cabe esperar que la media de las duraciones sobrepase las 910 horas?
   b) La probabilidad de que una muestra al azar de 64 pilas tenga una duración media mayor de 910 horas.

SOLUCIONES

1. Conociendo el número total de páginas se asigna un número a cada una de ellas y se extraen las 15 de la muestra mediante la tabla de números aleatorios siguiendo un muestreo aleatorio simple.

2. En cada caso queda:

   - Si elegimos la muestra por medio del muestreo aleatorio simple procedemos como en el problema anterior.
   - Si elegimos la muestra por medio del muestreo aleatorio sistemático elegimos al azar un elemento de la muestra y a partir de él de 20 en 20 tomamos los 24 restantes pues $\frac{500}{20}=20$.

3. Los estratos los forman los distintos cursos.

   El tamaño de cada estrato será proporcional al tamaño de estos. Así:

   $\frac{x}{250}=\frac{y}{200}=\frac{z}{100}=\frac{t}{50}=60/600$

   $x=25$ Alumnos de 2º de ESO;

   $y=20$ Alumnos de 4º de ESO;

   $z=10$ Alumnos de 1º de Bachillerato;

   $t=5$ De 2º de Bachillerato.

4. La solución es:

a) La media de la población es $\mu = 7$.

b) La desviación típica de la población es $\sigma = 3{,}41$

c) La distribución de las medias de las 36 muestras con reemplazamiento de tamaño 2 es:

$\overline{x_i}$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
fi	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

La media de la distribución muestral de medias es:

$$u_{\bar{x}} = \frac{252}{36} = 7 = \mu$$

d) La desviación típica de la distribución muestral de medias es:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1\,974}{36} - 7^2} = 2{,}42$$

5. Queda:

Considerando los estratos como cada una de las secciones obtenemos:

$$\frac{x}{500} = \frac{y}{860} = \frac{z}{1200} = \frac{t}{700} = \frac{k}{740} = \frac{200}{4\,000}$$

Luego en la muestra habrá:

$x = 25$ Libros de la sección 1

$y = 43$ Libros de la sección 2.

$z = 60$ Libros de la sección 3

$t = 35$ Libros de la sección 4.

$k = 37$ Libros de la sección 5.

6. Queda:

   La distribución muestral de medias es normal y viene dada por $N\left(10;\frac{3}{\sqrt{64}}\right)$. Las probabilidades pedidas son:

   a) $P(9<\overline{X}<11)=P(-2,67<Z<2,67)=$
   $=2\ P(Z<2,67)-1=0,9924$

   b) $P(\overline{X}>11)=P(Z>2,67)=1-P(Z\leq 2,67)=0,0038$

7. Si la varianza es 8, la desviación típica es $\sqrt{8}$ y $\sqrt{8}=\frac{\sigma}{\sqrt{36}}\Rightarrow\sigma=12\sqrt{2}=16,97$

8. La duración media de las pilas es normal $N(900;80)$. La distribución muestral de medias también es normal $N\left(900;\frac{80}{\sqrt{100}}\right)\Rightarrow N(900;8)$.

   a) $P(\overline{X}>910)=P(Z>1,25)=1-P(Z\leq 1,25)=0,1056$

   b) si la muestra es de 64 pilas, la distribución muestral de medias es $N(900;10)$.

   $P(\overline{X}>910)=P(Z>1)=0,1587$

PÁGINA 349

■ 9. La estatura media de la población, comprendida entre 20 y 30 años, de cierto barrio, es de 176 cm, con desviación típica de 10 cm.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra de 36 personas tenga una estatura media de 176 cm o más?

b) ¿Y cuál es la probabilidad de que la media de esta muestra sea menor de 170 cm?

■ 10. Sabiendo que de cada cinco accidentes de tráfico, uno es de moto, calcula la probabilidad de que en los próximos 200 accidentes:

a) Sean de moto menos del 30%.

b) Sean de moto más del 80%.

c) El número de accidentes de moto esté comprendido entre el 40% y el 60%.

■ 11. Se sabe que el 60% de los adultos de un área geográfica asiste regularmente a programas culturales. Se obtiene una muestra aleatoria de 150 adultos. Se desea conocer cuál es la probabilidad de que la proporción muestral esté comprendida entre los valores 0,5 y 0,7.

■ 12. De un grupo de 120 estudiantes, la proporción de que tengan dos o más hermanos es de 48/120. Encuentra los parámetros de la distribución a la que se ajustarán las muestras de tamaño 40.

■ 13. Los resultados de una elección mostraron que un cierto candidato obtuvo el 46 % de los votos. Halla la probabilidad de que de 1 000 individuos elegidos al azar de entre la población votante se obtuviera mayoría de votos para dicho candidato.

■ 14. Las calificaciones en los exámenes de Geología que se han realizado los últimos 25 años en cierta facultad siguen una distribución normal con media 53 y desviación típica 12.

a) Calcula la media y la desviación típica de la distribución muestral de las muestras de tamaño 30 que se pueden obtener.

b) Halla la probabilidad de que una muestra de tamaño 100 tenga la media entre 53 y 57.

■ 15. Se toman muestras de tamaño 50 de una población normal de media 18,1 y desviación típica 2,3. Halla la probabilidad de obtener:

a) Una muestra cuya media no sea inferior a 16.

b) Una muestra cuya media sea inferior a 16 o superior a 19.

■ 16. El cociente intelectual de los estudiantes de un instituto se distribuye con media 110 y desviación típica desconocida σ. Si se sabe que el 25,46% de las muestras de 36 alumnos tienen un cociente intelectual medio superior a 112, halla el valor de σ.

9. La distribución muestral de medias es normal $N\left(176;\frac{10}{\sqrt{36}}\right) \Rightarrow N(176;1,67)$

Las probabilidades pedidas son:

a) $P(\overline{X} \geq 176) = P(Z \geq 0) = 0,5$

b) $P(\overline{X} < 170) = P(Z < -3,6) = P(Z > 3,6) = 0,0002$

10. La probabilidad de que el accidente no sea de moto es $\frac{4}{5} = 0,8$.

La distribución muestral de proporciones es normal $N\left(0,8;\sqrt{\frac{0,8 \cdot 0,2}{200}}\right) \Rightarrow N(0,8;0,028)$.

Las probabilidades pedidas son:

a) $P(\hat{p} < 0,30) = P(z < -17,86) = 0$

b) $P(\hat{p} > 0,80) = P(z > 0) = 0,5$

c) $P(0,4 < \hat{p} < 0,6) = P(z < 10,7) - P(z < 3,57) = 0$

11. La solución es:

La distribución muestral de proporciones es normal $N\left(0,6;\sqrt{\frac{0,6 \cdot 0,4}{150}}\right) \Rightarrow N(0,6;0,04)$

La probabilidad pedida es:

$P(0,5 < \hat{p} < 0,7) = P(-2,5 < z < 2,5) = 0,9876$

12. Los parámetros de la distribución muestral de proporciones son:

$$\hat{p} = \frac{48}{120} \qquad \sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\frac{48}{120} \cdot \frac{72}{120}}{40}} = 0,077$$

13. Queda:

La distribución de proporciones es normal $N\left(0,46;\sqrt{\frac{0,46\cdot 0,54}{1000}}\right)\Rightarrow N(0,46;0,016)$

La probabilidad pedida es:

$$P(\hat{p} > 0,5) = P(z > 2,5) = 1 - P(z \leq 2,5) = 0,0062$$

14. La solución en cada caso:

a) La distribución muestral de medias tiene por media $\mu_x = 53$ y desviación típica $\sigma_x = \frac{12}{\sqrt{30}} = 2,19$

b) La distribución muestral de medias en muestras de tamaño 100 es normal $N(53;1,2)$. La probabilidad pedida es:

$$P(53 < \overline{x} < 57) = P(0 < z < 3,3) = 0,4995$$

15. Queda:

La distribución muestral de medias es normal y viene dada por $N\left(18,1;\frac{2,3}{\sqrt{50}}\right)\Rightarrow N(18,1;0,33)$

Las probabilidades pedidas son:

a) $P(\overline{X} \geq 16) = P(Z \geq -6,36) = 1$

b) $P(\overline{X} < 16) + P(\overline{X} > 19) = P(Z < -6,36) + P(Z > 2,7) =$
$= 1 - 0,9965 = 0,0035$

16. La solución:

Sabemos que $P(\overline{X} > 112) = 0,2546$

$$P(\overline{X} > 112) = P\left(Z > \frac{112-110}{\sigma_x}\right) = 0,2546 \Rightarrow \frac{2}{\sigma_x} = 0,66 \Rightarrow \sigma_{\overline{x}} = 3. \text{ Como } \sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{36}} \Rightarrow \sigma = 18.$$

PÁGINA 350

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

17. Supongamos que una población se compone de 5 niños de edades 2, 3, 6, 8 y 11 años. Considera todas las muestras posibles de 3 niños, con reemplazamiento, que puedan formarse. Halla:

   a) La media y la desviación típica de la población.

   b) La media y la desviación típica de la distribución muestral de medias.

   c) ¿Qué relaciones hay entre los resultados obtenidos en los apartados a) y b)?

18. Suponiendo que las puntuaciones de un test de inteligencia se distribuyen según una normal $N(100, 15)$, calcula la probabilidad de que una muestra de tamaño 49, extraída de esa población, tenga una media inferior a 98. Calcula la probabilidad de que una muestra de tamaño 81, extraída de esa población, tenga una media superior a 105.

19. El diámetro medio interior de una muestra de 200 tubos producidos por una máquina es de 0,502 cm y la desviación típica es de 0,05 cm. El uso de los tubos permite una tolerancia en el diámetro de 0,496 a 0,508 cm; de otro modo se considerarán defectuosos. Determina el porcentaje de tubos defectuosos, supuesto que los tubos producidos por esa máquina están normalmente distribuidos.

20. Se ha tomado una muestra de los precios de un mismo producto alimenticio en 16 comercios, elegidos al azar en un barrio de una ciudad, y se han encontrado los siguientes precios:

   95; 108; 97; 112; 99; 106; 105; 100; 99; 98; 104; 110; 107; 111; 103; 110

   Suponiendo que los precios de este producto se distribuyen normalmente según una ley de varianza 25 y media desconocida, ¿cuál es la distribución de la media muestral?

21. Se supone que la estatura de los jóvenes de 18 años de cierta población sigue una distribución normal de media 162 cm y desviación típica 12 cm. En una muestra, tomada al azar, de 100 de estos jóvenes encuestados:

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que esta media esté entre 159 y 165 cm?

   b) ¿Cuántos de estos jóvenes tienen su estatura entre esos valores?

22. En una determinada población se sabe que el 20% de las personas usan gafas graduadas y el resto no. Tomamos una muestra de 256 personas. ¿Cuál es la probabilidad de que el porcentaje de personas que usan gafas graduadas esté entre el 15% y el 25%?

23. Se sabe que el tiempo de retraso de los trenes de largo recorrido con llegada a una determinada estación sigue una distribución normal de media 15 minutos y desviación típica 3 minutos, y para los trenes de corto recorrido la media es de 25 minutos y la desviación típica de 5 minutos. En muestras de 150 trenes tomadas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la diferencia en los tiempos medios de retraso no supere los 9 minutos?

24. En una prueba de aptitud, la puntuación media de los estudiantes era de 72 puntos, con una desviación típica de 8 puntos. ¿Cuál es la probabilidad de que dos grupos de estudiantes, formados por 50 y 70 estudiantes, respectivamente, difieran su media entre 3 y 5 puntos?

17. Queda:

a) La media y la desviación típica de la población son: $\mu = 6; \sigma = 3,2863$.

b) Podemos formar $C_{5,3} = 10$ muestras posibles sin reemplazamientos y obtenemos:

Elementos	2 3 6	2 3 8	2 3 11	3 6 8	3 6 11	6 8 11	2 6 8	2 6 11	2 8 11	3 8 11
Media de la muestra	3,6	4,33	5,33	5,66	6,66	8,33	5,33	6,33	7	7,33

La media de la distribución muestral de medias es:

$$\mu_{\bar{x}} = 3,6 \cdot \frac{1}{10} + 4,33 \cdot \frac{1}{10} + 5,33 \cdot \frac{1}{10} + 5,66 \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{10} + 6,66 \cdot \frac{1}{10} + 8,33 \cdot \frac{1}{10} + 5,33 \cdot \frac{1}{10} \cdot$$

$$\cdot 6,33 \cdot \frac{1}{10} + 7 \cdot \frac{1}{10} + 7,33 \cdot \frac{1}{10} =$$

$= 5,99 \cong 6 = \mu \qquad \sigma_{\bar{x}} = 1,35$

c) Se verifica que $\mu_{\bar{x}} = \mu$ y $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}} = 1,341$

18. La solución es:

La distribución muestral de medias es normal $N\left(100;\dfrac{15}{\sqrt{49}}\right) \Rightarrow N(100;2,14)$

La probabilidad pedida es:

$$P(\overline{X} < 98) = P(Z < -0,93) = P(Z > 0,93) =$$
$$= 1 - P(Z \leq 0,93) = 0,1762$$

En el segundo caso si $n = 81$, la distribución muestral de medias es

$$N\left(100;\ \frac{15}{\sqrt{81}}\right) \Rightarrow N(100;\ 1,7) \text{ y } P(\overline{X} > 105) =$$
$$= P(Z > 2,94) = 1 - P(Z \leq 2,94) = 0,016$$

19. Queda:

La distribución muestral de medias es normal $N\left(0,502;\dfrac{0.05}{\sqrt{200}}\right) \Rightarrow N(0,502;0,0035)$

$P(0,496 < 0,508) = P(-1,714 < Z < 1,714) = 0,9128$

Es decir el $91,28\,\%$ no son defectuosos, por lo tanto el $8,72\,\%$ de los tubos son defectuosos.

20. Queda:

De la muestra obtenemos: $\overline{x} = 104$ y $\sigma_{\overline{x}} = 5$.

Los precios se distribuyen según la normal $N\left(\mu;\dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}}\right)$ es decir la distribución muestral de medias se ajusta a la normal $N(104;1,25)$.

21. La solución es:

La distribución muestral de medias es normal $N\left(162;\dfrac{12}{\sqrt{100}}\right) \Rightarrow N(162;1,2)$

La probabilidad pedida viene dada por: $P(159 < \overline{X} < 164) = P(-2,5 < Z < 2,5) = 0,9876$

Luego el $98,76\,\%$ de los chicos tiene su estatura entre 159 y 164 cm.

22. Queda:

La distribución muestral de proporciones viene dada por: $N\left(0,2;\sqrt{\dfrac{0,2\cdot 0,8}{256}}\right) \Rightarrow N(0,2;0,025)$

La probabilidad pedida es:

$$P(0,15 < \hat{p} < 0,25) = P(-2 < z < 2) = 0,9544$$

23. Queda:

La distribución muestral de diferencia de medias entre los trenes de corto y largo recorrido está caracterizada por: $\mu_{\bar{x}_C} = 25 \quad \sigma_{\bar{x}_C} = 5 \;;\quad \mu_{\bar{x}_L} = 15 \quad \sigma_{\bar{x}_L} = 3$

La distribución muestral admite como parámetros:

$$\mu_c - \mu_L = 10 \quad \text{y} \quad \sigma = \sqrt{\frac{5^2}{10} + \frac{3^2}{10}} = 1,84$$

La probabilidad es:

$$P(\overline{x}_c - \overline{x}_L < 9) = P(z < -0,54) = 0,2946$$

24. La solución es:

La distribución muestral de diferencia de medias es:

$$\mu_A - \mu_B = 0 \;;\; \sigma = \sqrt{\frac{8^2}{50} + \frac{8^2}{70}} = 1,48$$

La probabilidad pedida es:

$$P(3 < \overline{X}_A - \overline{X}_B < 5) = P(2,03 < z < 3,38) = 0,0208$$

Unidad 15 – Estadística inferencial.

Estimación por intervalos. Pruebas de hipótesis

PÁGINA 353

cuestiones iniciales

1. Una confitura puede ser calificada de almíbar si contiene entre 420 y 520 gramos de azúcar por kilo de confitura. Un fabricante comprueba 200 botes de confitura de 1 kilogramo. Encuentra que el peso medio de azúcar es de 465 gramos con una desviación típica de 30 gramos. Sabiendo que el contenido de azúcar se distribuye normalmente, calcula el porcentaje de la producción del fabricante que no debe llevar la mención de almíbar, considerando la muestra como representativa de la producción total.

2. Se tira al aire 400 veces una moneda equilibrada. Sea X el número de veces que en la moneda se obtiene cara. Se pide:

a) Halla la ley de probabilidad de X. Calcula su esperanza matemática y su varianza.

b) Aproxima las probabilidades de la variable X mediante una distribución normal.

c) Calcula las probabilidades $P(X > 220)$ y $P(180 < X < 220)$.

d) Calcula las probabilidades $P(X = 220)$ y $P(X = 190)$.

SOLUCIONES

1. El peso de azúcar por confitura se distribuye según la normal $N(465;30)$.

   Veamos el porcentaje que puede considerarse como almíbar:

$$P(420 < \overline{X} < 520) =$$

$$= P\left(Z < \frac{520-465}{30}\right) - P\left(Z < \frac{420-465}{30}\right) =$$

$$= P(Z < 1{,}83) - P(Z < -1{,}5) = 0{,}8996$$

   Luego el 89, 96% lleva el nombre de almíbar, es decir 179, 92 botes son almíbar y no llevan la mención de almíbar el 10, 04% es decir 20, 08 botes.

2. Queda:

a) El número de caras obtenidas al tirar una moneda sigue una distribución binomial $B(400;0,5)$.

La esperanza matemática es $\mu = 400 \cdot 0,5 = 200$

La varianza es $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q = 400 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 100$.

b) La distribución binomial anterior la podemos aproximar a la normal $N(200;10)$

c) $P(X > 220) = P(X \geq 220,5) = P(Z \geq 2,05) 1 - P(Z < 2,05) = 0,0202$

$P(180 < X < 220) = P(179,5 \leq X \leq 220,5) = P(Z \leq 2,05) - P(Z \leq -2,05) = 2P(Z \leq 2,05) - 1 = 0,9596$

d) $P(X = 220) = P(219,5 < X < 220,5) = P(1,95 < Z < 2,05) = 0,0054$

$P(X = 190) = P(189,5 < X < 190,5) = P(-1,05 < Z < -0,95) = P(0,95 < Z < 1,05) = 0,0242$

PÁGINA 369

ACTIVIDADES

■ Resuelve los siguientes problemas:

1. Negativo y positivo. Analiza la última falacia y encuentra el error que nos lleva a la igualdad $-1 = 1$.

2. El mismo número. Analiza el razonamiento siguiente para demostrar: «todos los números son el mismo», y encuentra el error:

$$\boldsymbol{a \neq b} \Leftrightarrow a + b = t \Leftrightarrow (a+b)\cdot(a-b) = t\cdot(a-b) \Leftrightarrow a^2 - b^2 = ta - tb \Leftrightarrow a^2 - ta = b^2 - tb \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 - ta + \frac{t^2}{4} = b^2 - tb + \frac{t^2}{4} \Leftrightarrow \left(a - \frac{t}{2}\right)^2 = \left(b - \frac{t}{2}\right)^2 \Leftrightarrow a - \frac{t}{2} = b - \frac{t}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{a = b}$$

SOLUCIONES

1. El error cometido está en el paso:

   $2 \cos 21^{\circ} \cdot \cos 90^{\circ} = 2 \cos 90^{\circ} \cdot \cos(-30^{\circ}) \Leftrightarrow \cos 210^{\circ} = \cos 30^{\circ}$

   Simplificamos o dividimos por $\cos 90^{\circ} = 0$. Esta simplificación nos puede conducir a cualquier resultado, ya que:

   Sí $a \cdot 0 = b \cdot 0$ y simplificamos por cero, entonces, $a = b$.

2. En este caso el error lo cometemos en el paso

   $$\left(a - \frac{t}{2}\right)^2 = \left(b - \frac{t}{2}\right)^2 \Leftrightarrow a - \frac{t}{2} = b - \frac{t}{2}$$

   La raíz cuadrada de una expresión tiene dos raíces, opuestas, y tomamos la que nos conviene para crear el error.

PÁGINA 374

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. La vida media y la desviación típica de los diámetros de una muestra de 250 remaches manufacturados por una empresa son 0,7264 y 0,00058 cm, respectivamente. Halla los límites de confianza al 90% para el diámetro medio de los remaches producidos.

2. En una muestra de tamaño 30 hay 12 estudiantes con dos o más hermanos. Halla un intervalo de confianza del 75% para la proporción de dichos estudiantes en la población.

3. Doscientos votantes fueron seleccionados aleatoriamente y 110 se mostraron favorables al candidato *A*. Estima la proporción porcentual al candidato *A* en dicha población usando un intervalo de confianza con un nivel de confianza del 95%.

4. Se desea comparar dos métodos de enseñanza: el método *A*, tradicional, y el *B*, basado en sistemas audiovisuales. Para ello, se toman dos muestras aleatorias de 100 estudiantes cada una. Al cabo de un año de aprendizaje, se somete a los estudiantes a la misma prueba de aptitud. Los resultados son, para los estudiantes del sistema *A*: media 5, desviación típica 1; para los del sistema *B*, media 5,5, desviación típica 2. Al nivel de confianza del 99%, ¿tienen los métodos la misma eficacia?

5. Un estudio realizado sobre 40 aviones comerciales revela que la antigüedad media de estos es de 13,41 años con una desviación típica de 8,28 años. Calcula:
   a) ¿Entre qué valores, con un 90% de confianza, se encuentra la antigüedad media de la flota?
   b) Si se quisiera obtener un nivel de confianza del 95% cometiendo el mismo error de estimación que en el apartado anterior y suponiendo también que la desviación típica es de 8,28 años, ¿cuántos elementos deberían formar la muestra?

6. Se desea hacer un estudio de mercado para conocer el precio medio de los libros científicos. Para ello, se elige una muestra aleatoria formada por 34 libros y se determina que la media muestral es de 20 euros con una desviación típica de 3 euros.
   Halla el intervalo de confianza para el precio medio de los libros científicos al nivel del 99%.

7. Se ha medido la longitud de una muestra escogida al azar de 400 piezas de precisión hechas por una determinada máquina. Resultó una media de 1,3 cm y una desviación típica de 0,25 cm.
   a) Halla el intervalo de confianza para la media con un nivel de confianza del 95%.
   b) Con un nivel de confianza del 99%, calcula el intervalo de confianza para la media.

8. En una encuesta realizada a 50 personas, se ha encontrado que la proporción de una determinada característica es 0,25. Determina el intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 95%, para la proporción de la misma característica de la población, supuesta muy grande.

SOLUCIONES

1. El estimador muestral es la media $\overline{X} = 0,7264$. La desviación típica de la distribución muestral de medias es $\sigma_{\overline{x}} = \dfrac{0,00058}{\sqrt{250}} = 0,00037$.

   Al nivel de confianza del 90 % le corresponde un crítico $z_{\alpha/2} = 1,645$.

   El intervalo de confianza en el que se encuentra el diámetro medio de los remaches es:

   $$\mu \in (0,7264 - 1,645 \cdot 0,000037;\\ 0,7264 + 1,645 \cdot 0,000037)$$

   Es decir,

   $$\mu \in (0,7263 \ ; \ 0,7265).$$

2. El estimador muestral es la proporción $\hat{p} = \dfrac{12}{30} = 0,4$.

   La desviación típica de la distribución muestral de proporciones es $\sigma(\hat{p}) = \sqrt{\dfrac{0,4 \cdot 0,6}{30}} = 0,089$.

   Al nivel de confianza del 75 % le corresponde un crítico $z_{\alpha/2} = 1,15$.

   La proporción de alumnos de la población con dos o más hermanos se encuentra dentro del siguiente intervalo de confianza:

   $$P \in (0,4 - 1,15 \cdot 0,089 ; 0,4 + 1,15 \cdot 0,089) \Rightarrow P \in (0,2977 ; 0,5024)$$

3. El estimador muestral es la proporción $\hat{p} = \dfrac{110}{200}$.

   La desviación típica de la distribución muestra de proporciones es: $\sigma(\hat{p}) = \sqrt{\dfrac{\frac{110}{200} \cdot \frac{90}{200}}{200}} = 0,035$

   Al nivel de confianza del 95 % le corresponde un crítico $z_{\alpha/2} = 1,96$.

   El intervalo de confianza en el que se encuentra la proporción de votantes de la población es:

   $$P \in \left(\frac{110}{200} - 1,96 \cdot 0,035 \ ; \ \frac{110}{200} + 1,96 \cdot 0,035 \right) \Rightarrow P \in (0,4814 ; 0,6186)$$

4. La distribución muestral de diferencia de medias es normal:

$$N\left(5\ 5,5;\sqrt{\frac{1^2}{100}+\frac{2^2}{100}}\right)=N(-0,5\ ;\ 0,2236)$$

Para un nivel de confianza del 99 % le corresponde un crítico $z_{\alpha/2}=2,58$.

El intervalo de confianza para la diferencia de medias es:

$\mu_A-\mu_B\in(-0,5-2,58\cdot 0,2236\ ;\ -0,5+2,58\cdot 0,2236)$ es decir $(-1,077\ ;\ 0,769)$. La diferencia de medias nula esta dentro del intervalo por lo que no podemos decir que un método sea más eficaz que otro.

5. La solución queda:

a) La distribución muestral de medias es normal $N\left(13,41;\frac{8,28}{\sqrt{40}}\right)\Rightarrow N(13,41\ ;\ 1,31)$

A un nivel de confianza del 90 % le corresponde un crítico $z_{\alpha/2}=1,645$.

La antigüedad media de la flota μ se encuentra en el intervalo

$(13,41-1,645\cdot 1,31\ ;13,41+1,645\cdot 1,31)=(11,26\ ;\ 15,56)$

b) El error de estimación es $1,645\cdot 1,31=2,155$.

Al nivel de confianza del 95 % le corresponde un crítico $z_{\alpha/2}=1,96$.

$$n=\left(\frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2=\left(\frac{1,96\cdot 8,28}{2,155}\right)^2=56,71$$

La muestra debe contener al menos 57 aviones.

6. La distribución muestral de medias es normal $N\left(20;\frac{3}{\sqrt{34}}\right)\Rightarrow N(20\ ;\ 0,51)$

A un nivel de confianza de 99 % le corresponde un crítico $z_{\alpha/2}=2,58$

El precio medio de los libros de texto se encuentra en el intervalo:

$\mu\in(20-2,58\cdot 0,51\ ;\ 20+2,58\cdot 0,51)=(18,68\ ;\ 21,32)$

7. La distribución muestral de medias es normal $N\left(1,3;\frac{0,25}{\sqrt{400}}\right)\Rightarrow N(1,3;\ 0,0125)$

a) Al nivel de confianza del 95 % le corresponde un crítico $z_{\alpha/2}=1,96$ .el intervalo buscado es:

$\mu\in(1,3-0,0125\cdot 1,96\ ;\ 1,3+0,0125\cdot 1,96)\Rightarrow\mu\in(1,28\ ;\ 1,32)$

b) A un nivel de confianza del 99 % le corresponde un crítico $z_{\alpha/2} = 2,58$ .el intervalo buscado es:

$\mu \in (1,3 - 0,0125 \cdot 2,98 \ ; \ 1,3 + 0,0125 \cdot 2,58) \Rightarrow \mu \in (1,268 \ ; \ 1,332)$

8. La distribución muestral de medias es normal $N\left(0,25 ; \sqrt{\dfrac{0,25 \cdot 0,75}{50}}\right) \Rightarrow N(0,25 ; \ 0,0612)$

Al nivel de confianza del 95 % le corresponde un crítico $z_{\alpha/2} = 1,96$ .el intervalo viene dado por:

$P \in (0,25 - 0,0612 \cdot 1,96 \ ; \ 0,25 + 0,0612 \cdot 1,96) \Rightarrow (0,13 \ ; \ 0,37)$

PÁGINA 375

9. Se quiere conocer la permanencia media de pacientes en un hospital. Se tienen datos referidos a la estancia, expresada en días, de 800 pacientes, de donde se han sacado los resultados siguientes:

$$\bar{x} = 8{,}1 \text{ días}, \qquad s = 9 \text{ días}$$

Halla un intervalo de confianza del 95% para la estancia media.

10. Se ha tomado una muestra de los precios de un mismo producto alimenticio en 16 comercios, elegidos al azar en un barrio de una ciudad, y se han encontrado los siguientes precios:

95, 108, 97, 112, 99, 106, 105, 100, 99, 98, 104, 110, 107, 111, 103, 110

Suponiendo que los precios de este producto se distribuyen según una ley normal de varianza 25 y media desconocida:

a) ¿Cuál es la distribución de la media muestral?

b) Determina el intervalo de confianza al 95% para la media poblacional.

11. Se seleccionó al azar una muestra de 100 personas cuya media de ingresos anual fue de 22 675 euros, en un determinado sector de población de Madrid, y la desviación típica de 1 600 euros. Halla el intervalo de confianza para la media con un nivel de confianza del 95%.

12. Una variable sigue una distribución normal de media 20 y desviación típica 5 en una determinada población. Halla el tamaño de una muestra extraída de la población de tal modo que se tenga la probabilidad del 95% de que la media de la muestra $\bar{x}$ vaya a estar entre 19 y 21.

13. Un granjero estima que el peso medio de los pollos de su granja sigue una distribución normal con desviación típica 0,2 kg. Halla el tamaño mínimo de la muestra que debe tomar para que pueda estimar el peso medio con un nivel de confianza del 95% y un error máximo de 0,03.

14. Una muestra de 100 votantes elegidos aleatoriamente entre todos los de un distrito indicó que el 55% de ellos estaba a favor de un determinado candidato. Halla los intervalos de confianza correspondientes a los niveles de confianza del 95%, 99% y 99,73%, respectivamente, para la proporción de todos los votantes que estaban a favor de este candidato.

15. ¿Qué tamaño de muestra debe tomarse en la actividad anterior para que la confianza de que el candidato sea elegido sea del 95%, con un error máximo de 0,04?

16. Se sabe que 25 de cada 1 000 piezas elaboradas por una empresa son defectuosas. ¿De qué tamaño conviene tomar la muestra para que la proporción estimada de piezas defectuosas no difiera de la verdadera en más de un 5% con un nivel de confianza del 99%?

17. Un fabricante de electrodomésticos sabe que la vida media de estos sigue una distribución normal con media $\mu = 100$ meses y desviación típica $\sigma = 12$ meses. ¿Cuál es el mínimo tamaño muestral que garantiza, con una probabilidad de 0,98, que la vida media de los electrodomésticos en dicha muestra se encuentra entre 90 y 110 meses?

9. La distribución muestral de medias es normal $N\left(8,1;\frac{9}{\sqrt{800}}\right)\Rightarrow N(8,1;\ 0,032)$

   Al nivel de confianza del 95 % le corresponde un crítico $z_{\alpha/2}=1,96$.

   La estancia media en el hospital se encuentra en el intervalo:

   $\mu\in(8,1-0,032\cdot 1,96\ ;\ 8,1+0,032\cdot 1,96)\Rightarrow\mu\in(7,4728\ ;\ 8,7272)$

10. Los estadísticos correspondientes a esta muestra son: $\overline{x}=104\ \ y\ \ s=5$

    a) La distribución muestral de medias sigue la normal $N\left(104;\frac{5}{\sqrt{16}}\right)\Rightarrow N(104;\ 1,25)$

    b) A un nivel de confianza del 95 % le corresponde un crítico $z_{\alpha/2}=1,96$.

    El intervalo de confianza para la media poblacional es:

    $$\mu\in(104-1,25\cdot 1,96\ ;\ 104+1,25\cdot 1,96)\Rightarrow\mu\in(101,55\ ;\ 106,45)$$

11. La distribución muestra de medias sigue la normal $N\left(22675;\frac{1600}{\sqrt{100}}\right)\Rightarrow N(22675;\ 160)$

    A un nivel de confianza del 95 % le corresponde un crítico $z_{\alpha/2}=1,96$.

    La media de ingresos anuales se encuentra en el intervalo:

    $\mu\in(22675-1,60\cdot 1,96\ ;\ 22675+1,60\cdot 1,96)=(22361,4\ ;\ 22988,6)$

12. A un nivel de confianza del 95 % le corresponde un crítico $z_{\alpha/2}=1,96$.

    $P(19<\overline{X}<21)=0,95\Rightarrow 19=20-\frac{5}{\sqrt{n}}\cdot 1,96\Rightarrow 9,8=\sqrt{n}\Rightarrow n>49$

    Al menos 50 individuos deben formar la muestra.

13. A un nivel de confianza del 95 % le corresponde un crítico $z_{\alpha/2}=1,96$.
    El tamaño de la muestra viene dado por:

    $n=\left(\frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2=\left(\frac{1,96\cdot 0,2}{0,03}\right)^2=170,74$

    El tamaño mínimo de la muestra es de 171 pollos.

14. La distribución muestral de proporciones es normal $N(0,55;0,05)$

Los intervalos pedidos son:

$P \in (0,55 - 0,05 \cdot 1,96 \ ; \ 0,55 + 0,05 \cdot 1,96) = (0,452 \ ; \ 0,648)$

$P \in (0,55 - 0,05 \cdot 2,58 \ ; \ 0,55 + 0,05 \cdot 2,58) = (0,421 \ ; \ 0,679)$

$P \in (0,55 - 0,05 \cdot 3 \ ; \ 0,55 + 0,05 \cdot 3) = (0,4 \ ; \ 0,7)$

15. El tamaño de la muestra es:

$$n = \frac{z^2_{\alpha/2} \cdot p \cdot q}{E^2} = \frac{1,96^2 \cdot 0,55 \cdot 0,45}{0,04^2} = 594,25$$

Al menos se debe tomar 595 votantes.

16. A un nivel de confianza del 99 % le corresponde un crítico $z_{\alpha/2} = 2,58$.

El tamaño de la muestra viene dado por: $n = \dfrac{z^2_{\alpha/2} \cdot p \cdot q}{E^2} = \dfrac{2,58^2 \cdot \frac{25}{1000} \cdot \frac{975}{1000}}{0,05^2} = 64,89$

Al menos se han de tomar 65 piezas.

17. El error viene dado por $E = \dfrac{110 - 90}{2} = 10$.

El nivel de confianza del 98 % le corresponde un crítico $z_{\alpha/2} = 2,33$.

El mínimo tamaño muestral viene dado por: $n = \left(\dfrac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2 = \left(\dfrac{2,33 \cdot 12}{10} \right)^2 = 7,82$

Debemos tomar al menos 8 electrodomésticos.

PÁGINA 376

ACTIVIDADES FINALES

18. Comprueba los valores críticos, que aparecen en esta tabla, para pruebas unilaterales y bilaterales para los niveles de confianza o significación dados en ella.

Nivel de confianza N_c	Nivel de significación N_s	Valores críticos z_α para pruebas unilaterales	Valores críticos $z_{\alpha/2}$ para pruebas bilaterales
90%	10%	–1,28 o 1,28	–1,645 y 1,645
95%	5%	–1,645 o 1,645	–1,96 y 1,96
99%	1%	–2,33 o 2,33	–2,58 y 2,58
99,9%	0,1%	–3,09 o 3,09	–3,295 y 3,295

19. La vida media de las lámparas de 60 vatios está garantizada por lo menos en 800 horas, con una desviación típica de 120 horas.

Si se escoge al azar una muestra de 25 lámparas de un grupo y después de comprobarla se calcula una vida media de la muestra de 750 horas, para un nivel de significación del 0,05, ¿habría que rechazar el grupo por no cumplir las garantías?

20. Una empresa especializada en temas militares ha realizado una encuesta a 500 personas. Se obtuvo que el 83% de dichas personas era contraria a la guerra, frente a un 17% que mostraba su aceptación.

¿Podemos interpretar a la luz de estos resultados y con un nivel de confianza del 99% que la situación ha cambiado significativamente respecto a estudios anteriores que registraron en torno al 78% las personas no partidarias?

21. Una fábrica produce 1 000 unidades por semana de cierto artículo y está satisfecha si, por término medio, el 3% de los artículos es defectuoso en una inspección. En una determinada semana, 38 artículos son rechazados por la inspección. Al nivel de significación del 5%, ¿habría que proceder a un examen de la cadena de producción o podría considerarse el excesivo número de rechazos dentro de los límites del azar que acompaña a las condiciones de trabajo normales?

22. Hace 10 años, el 52% de los ciudadanos estaba en contra de una ley. Recientemente, se ha elaborado una encuesta a 400 personas y 184 se mostraron contrarios a la misma ley. Con estos datos y con un nivel de significación del 0,01, ¿podemos afirmar que la proporción de contrarios a la ley ha disminuido?

23. El porcentaje de calificaciones sobresalientes dado en una asignatura de Matemáticas de un determinado centro de enseñanza, durante un largo período de tiempo, fue del 10%. En un determinado período de cursos hubo 40 sobresalientes en un grupo de 300 estudiantes. Decide la significación de estos resultados a los niveles de 0,05 y 0,01, respectivamente.

24. Una moneda se lanza 6 veces y se obtiene 6 veces cara. ¿Puede deducirse que a los niveles de significación 0,05 y 0,01, respectivamente, la moneda está trucada? Considera pruebas unilaterales y bilaterales.

25. Una muestra de 100 lámparas de una factoría *A* resultó con una duración media de 1 190 horas y una desviación típica de 90 horas. Una muestra de 75 lámparas de otra factoría *B* ofreció una duración media de 1230 horas con una desviación típica de 120 horas. ¿Hay diferencias entre duraciones medias de las lámparas de las dos factorías al nivel de significación del 0,05 o 0,01, respectivamente?

18. Para un nivel de confianza del 90 % o un nivel de significación del 10 % los valores críticos para pruebas unilaterales z_α ó bilaterales $z_{\alpha/2}$ los hallamos utilizando la tabla de a distribución normal $N(0,1)$ y mediante las siguientes expresiones:

$P(z \leq z_\alpha) = 0,90 \Rightarrow z_\alpha = 1,28$

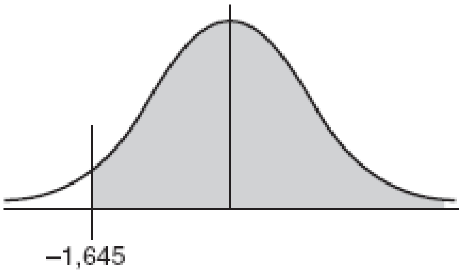
$P(-z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}) = 0,90 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,645$

Del mismo modo obtenemos los valores críticos para los restantes niveles de confianza.

19. Las hipótesis son:

H_0: $\mu \geq 800$
H_1: $\mu < 800$

Es unilateral y para un nivel de significación del 5 % le corresponde un crítico $z_\alpha = -1,645$.



En la grafica hemos sombreado la zona de aceptación de la hipótesis nula H_0.

La distribución muestral de medias se ajusta a la normal $N\left(800; \frac{120}{\sqrt{25}}\right) = (800; 24)$

El intervalo de confianza para el nivel de significación dado es:

$(800 - 1,645 \cdot 24 \ ; \ 800 + 1,645 \cdot 24) = (760,52 \ ; \ 839,48)$

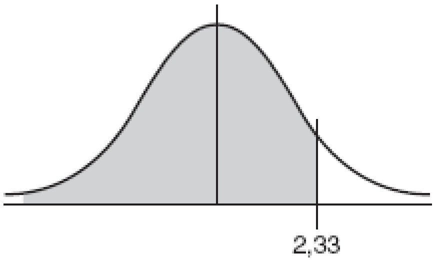
Como la media $\overline{x} = 750$ está fuera del intervalo rechazamos la hipótesis nula, es decir, aceptamos que la vida media es menor de 800 horas.

Otra forma de resolver el problema es viendo que la variable tipificada:

$z = \frac{750 - 800}{24} = -2,083$ cae dentro de la zona de rechazo, por tanto, rechazamos la hipótesis nula de que la vida media es mayor de 800 horas.

20. Las hipótesis son:

$H_0 : p \leq 0,78$
$H^1 : p > 0,78$



La prueba es unilateral y al nivel de confianza del 99 % le corresponde un crítico $z_{\alpha} = 2,33$.

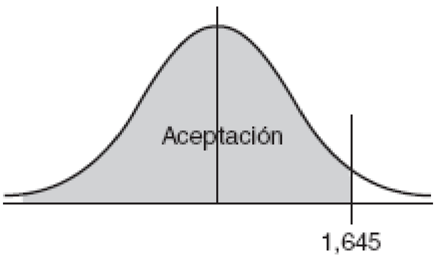
La distribución muestral de proporciones es normal $N(0,78 \; ; \; 0,019)$.

El valor tipificado: $z = \dfrac{0,83 - 0,78}{0,019} = 2,63$

Como z cae fuera de la zona sombreada de aceptación rechazamos la hipótesis nula y podemos afirmar que la situación ha cambiado.

21. Las hipótesis son:

$H_0 : p \leq 0,03$
$H^1 : p > 0,03$



La prueba es unilateral y al nivel de significación del 5 % le corresponde un crítico $z_{\alpha} = 1,645$.

La distribución muestral de proporciones es normal $N(0,03 \; ; \; 0,054)$.

El valor tipificado viene dado por: $z = \dfrac{0,038 - 0,03}{0,0054} = 1,48$

Como este valor cae en la zona de aceptación, aceptamos H_0.

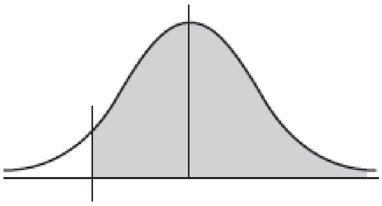
22. La solución queda:

$p=0,52$

$n=400$; $\hat{p}=\dfrac{184}{400}=0,46$

Las hipótesis son $\begin{cases} H_0 : p \geq 0,52 \\ H^1 : p < 0,52 \end{cases}$

Es unilateral, al nivel de significación del 1% corresponde un crítico $z_\alpha = -2,33$ que nos da lugar a una zona de rechazo y una sombreada de aceptación.



La distribución muestral de proporciones es normal $N(0,52 ; 0,025)$.

Luego $z=\dfrac{0,046-0,52}{0,025}=-2,4 \in$ zona rechazo

Por tanto rechazamos H_0 y podemos afirmar que la proporción ha disminuido.

23. En cada caso:

a) Para el nivel de significación del 5 % las hipótesis son: $H_0 : p \leq 0,1$; $H_1 : p > 0,1$ .la prueba es unilateral con un crítico $z_\alpha = 1,645$ y tenemos una zona de aceptación en el intervalo $(-\infty; 1,645)$.

$$z=\frac{\frac{400}{300}-0,1}{0,017}=-1,96$$

Como z cae fuera del intervalo de aceptación rechazamos H_0 y aceptamos la hipótesis alternativa H_1.

b) Para el nivel de significación del 1 % y las mismas hipótesis, la prueba es unilateral con el intervalo de aceptación $(-\infty; 2,33)$.

En este caso $z = 1,96$ cae dentro del intervalo y aceptamos la hipótesis nula H_0.

24. En cada caso la solución queda:

- Pruebas unilaterales

Formulamos las hipótesis $H_0: p \leq \frac{1}{2}$; $H_1: p > \frac{1}{2}$.

La distribución muestral de proporciones es normal $N(0,5\ ;\ 0,02)$.

El valor tipificado es $z = \frac{1-0,5}{0,2} = 2,5$.

a) Para $N_s = 0,05 \Rightarrow z_\alpha = 1,645$. la zona de aceptación es $(-\infty;\ 1,645)$.

Como $z \notin (-\infty;\ 1,645)$ rechazamos la hipótesis nula.

b) Para $N_s = 0,01 \Rightarrow z_\alpha = 2,33$. la zona de aceptación es $(-\infty;\ 2,33)$.

Como el valor $z = 2,5$ cae fuera de este intervalo rechazamos la hipótesis nula.

- Pruebas bilaterales

Formulamos las hipótesis $H_0: p = \frac{1}{2}$; $H_1: p \neq \frac{1}{2}$.

La distribución muestral de proporciones es normal $N(0,5\ ;\ 0,02)$. El valor tipificado es $z = 2,5$.

c) Para $N_s = 0,05 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$. la zona de aceptación es $(-1,96;\ 1,96)$. Como el valor z cae fuera de esta zona rechazamos la hipótesis nula H_0.

d) Para $N_s = 0,01 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,58$. la zona de aceptación es $(-2,58;\ 2,58)$. Como el valor $z = 2,5$ cae dentro de esta zona aceptamos la hipótesis nula H_0.

25. Formulamos la hipótesis:

$H_0: \mu_A = \mu_B$; $H_1: \mu_A \neq \mu_B$

La distribución muestral de diferencia de medias es normal:

$$N\left(1190 - 1230;\sqrt{\frac{90^2}{100}+\frac{120^2}{75}}\right) = (-40;\ 16,52)$$

La prueba es bilateral y $z = \frac{-40}{16,52} = -2,42$

a) Para un nivel de significación del 5 % le corresponde un crítico $z_{\alpha/2} = 1{,}96$. La zona de aceptación del intervalo $(-1{,}96;\, 1{,}96)$. Como z cae fuera de este intervalo rechazamos H_0 y aceptamos que hay diferencias entre las duraciones medias de las lámparas.

b) Para un nivel de significación del 1 % le corresponde un crítico $z_{\alpha/2} = 2{,}58$. El intervalo de aceptación es $(-2{,}58;\, 2{,}58)$. Como z cae dentro de este intervalo aceptamos H_0 que no hay diferencias entre las vidas medias.

PÁGINA 377

26. Un fabricante de pilas alcalinas sabe que el tiempo de duración, en horas, de las pilas que fabrica sigue una distribución normal de media desconocida y varianza 3600. Con una muestra de su producción, elegida al azar, y un nivel de significación del 95%, ha obtenido para la media el intervalo de confianza (372,6; 392,2). Calcula:

a) El valor que obtuvo para la media de la muestra y el tamaño muestral utilizado.

b) El error de su estimación, si hubiese utilizado una muestra de tamaño 225 y un nivel de confianza del 86,9%.

27. Se supone que la altura de los bebés de una determinada población sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 6 cm. Para estimar la altura media se quiere utilizar una muestra de tamaño n. Calcula el valor mínimo de n de modo que, con un nivel de confianza del 99%, el error en la estimación sea menor que 1 cm.

28. Las tensiones de ruptura de los cables fabricados por una empresa tienen media de 1800 N y una desviación típica de 100 N. Se desea comprobar si un nuevo proceso de fabricación modifica dicha tensión media de ruptura. Para ello se toma una muestra de 50 cables y se encuentra que su tensión media de ruptura es de 1850 N. ¿Se puede afirmar que el nuevo proceso ha modificado la tensión media de ruptura, al nivel de significación del 5%?

29. En una población escolar se ha comprobado que la estatura sigue un modelo normal de probabilidad. A partir de una muestra de 81 escolares de dicha población se ha calculado una estatura media de 159 cm y una desviación típica de 12,9 cm. Teniendo en cuenta esta información:

a) Determina el error máximo que cometeríamos, con una confianza del 99%, si estimamos en 159 cm la estatura media de esa población escolar.

b) ¿Podríamos rechazar, con un nivel de confianza del 95%, la hipótesis de que la estatura media en esa población es de 160 cm?

30. Se conoce que cierta enfermedad del ganado afecta anualmente al 10% de las vacas de cierta zona. Para evaluar una nueva vacuna, se inyecta a 100 vacas, resultando que ese año solo 5 de ellas adquieren la enfermedad. Usando la aproximación normal, comprueba, al nivel de significación del 5%, si este resultado proporciona evidencia de que, tras la vacuna, la incidencia anual de la enfermedad no es del 10%.

31. El director de recursos humanos de una compañía afirma que las edades de sus empleados tienen una media de 40 años y una desviación típica de 5 años. Si se pregunta la edad a 25 empleados elegidos al azar y se observa que la media de las edades de esta muestra es de 41,35 años, ¿se puede aceptar la hipótesis de que la edad media de los empleados es de 40 años con un nivel de significación del 5%, o, más bien, nos debemos inclinar por aceptar que la edad media es mayor de 40 años?

32. Un electricista afirma que el 40% de las bombillas que ha comprado a un fabricante en una promoción son defectuosas. El fabricante eligió una muestra de 100 bombillas y observó que 30 tenían algún defecto. A un nivel de confianza del 95%, ¿se puede aceptar la hipótesis del electricista?

33. El peso medio de una muestra aleatoria de 100 naranjas de una determinada variedad es de 272 g. Se sabe que la desviación típica poblacional es de 20 g. A un nivel de significación de 0,05, ¿hay suficiente evidencia para refutar la afirmación de que el peso medio poblacional es de 275 g?

26. En cada caso:

a) El intervalo de confianza para la media es de la forma: $\left(\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Al nivel de confianza del 95% le corresponde un $z_{\alpha/2}$ = 1,96; lo que nos permite escribir el sistema:

$$\begin{cases} \overline{x} - 1{,}96 \cdot \frac{60}{\sqrt{n}} = 372{,}6 \\ \overline{x} + 1{,}96 \cdot \frac{60}{\sqrt{n}} = 392{,}2 \end{cases}$$

Obtenemos: $\overline{x} = 382{,}4$; n = 144.

b) El error de estimación viene dado por: $E^2 = \frac{\sigma^2 \cdot z^2{}_{\alpha/2}}{n}. = \frac{3600 \cdot 1{,}51^2}{225} \Rightarrow E = \pm 6{,}04$

27. Para un nivel de confianza del 99%, le corresponde $z_{\alpha/2}$ = 2,575.

El tamaño mínimo viene dado por: $n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2{,}575 \cdot 6}{1}\right)^2 = 238{,}7$

El valor de n debe ser, al menos, 239.

28. Es un intervalo de confianza para la proporción $\hat{p} = 0{,}45$ por ser el valor medio del intervalo (0,42; 0,48).

El intervalo de confianza para la proporción tiene la forma: $\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}},\ \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}\right)$

Sustituyendo los valores dados obtenemos: $\begin{cases} 0{,}45 - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{0{,}45 \cdot 0{,}55}{1056}} = 0{,}42 \\ 0{,}45 + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{0{,}45 \cdot 0{,}55}{1056}} = 0{,}48 \end{cases}$

$z_{\alpha/2} = 1{,}96$ A este valor le corresponde un nivel de confianza del 95%.

29. Se trata de un test de hipótesis bilateral para la media:

H_0: μ = 1800

H_1: μ ≠ 1800

A un nivel de significación del 0,05 le corresponde un $z_{\alpha/2} = 1,96$.

La zona de aceptación es, por tanto:

$$\left(1800 - 1,96 \cdot \frac{100}{\sqrt{50}}; 1800 + 1,96 \cdot \frac{100}{\sqrt{50}}\right) = (1772,28; 1827,72)$$

Como 1850 no pertenece a la zona de aceptación, podemos decir que el nuevo proceso ha modificado la tensión media de ruptura con un nivel de significación del 5%.

30. La solución es:

a) A un nivel de confianza del 99% le corresponde un $z_{\alpha/2} = 2,575$. Calculamos el error máximo mediante la expresión: $E^2 = \frac{\sigma^2 \cdot z^2_{\alpha/2}}{n} . = \frac{12,92^2 \cdot 2,575^2}{81} \Rightarrow E = \pm 3,698$

b) Hacemos un test de hipótesis bilateral para la media:

H_0: μ = 160

H_1: μ ≠ 160

A un nivel de confianza del 95% le corresponde un $z_{\alpha/2} = 1,96$

La zona de aceptación es: $\left(160 - 1,96 \cdot \frac{12,92}{9}; 160 + 1,96 \cdot \frac{12,92}{9}\right) = (157,18; 162,28)$

Como $159 \in (157,18; 162,28)$ queda dentro de la zona de aceptación no podemos rechazar la hipótesis de que la estatura media es de 160 cm.

31. Se trata de un test de hipótesis bilateral para la proporción:

H_0: p = 0,1

H_1: p ≠ 0,1

A un nivel de significación del 0,05 le corresponde un $z_{\alpha/2} = 1,96$.

La zona de aceptación es: $\left(0,1 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,1 \cdot 0,9}{100}};\ 0,1 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,1 \cdot 0,9}{100}}\right) = (0,0412; 0,1588)$

Como 0,05 ∈ (0,412; 0,1588) no podemos rechazar la hipótesis nula y podemos decir que la nueva vacuna no cambia la proporción de enfermos.

32. Hacemos un test de hipótesis bilateral para la media:

H_0: μ = 40

H_1: μ ≠ 40

Para un nivel de significación del 0,05 le corresponde un $z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

La zona de aceptación es: $\left(40 - 1{,}96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}};\ 40 + 1{,}96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}}\right) = (38{,}04;\ 41{,}96)$

Como 41,35 ∈ (38,04; 41,96) aceptamos la hipótesis de que la edad media de los empleados es de 40 años.

Para la otra pregunta consideramos un test de hipótesis unilateral para la media:

H_0: μ ≥ 40

H_1: μ < 40

La zona de aceptación es: $\left(40 - 1{,}645 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}};\ +\infty\right) = (38{,}355;\ +\infty)$.

En este caso $41{,}35 \in (38{,}355;\ +\infty)$. Con lo que aceptamos la hipótesis de que la edad media es mayor o igual de 40 años.

33. Hacemos un test de hipótesis bilateral para la proporción:

H_0: p = 0,4

H_1: p ≠ 0,4

A un nivel de confianza del 95% le corresponde un $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

La zona de aceptación es:

$$\left(0{,}4 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{100}};\ 0{,}4 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{100}}\right) = (0{,}3040;\ 0{,}4960)$$

Como 0,30 cae fuera de la zona de aceptación rechazamos la hipótesis nula que es la que afirma el electricista.

PÁGINA 378

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

34. En una encuesta de opinión, durante una campaña electoral de una ciudad, se preguntó a una muestra aleatoria de 400 personas a cuál de los dos candidatos pensaban votar. Declararon 160 que votarían a un determinado partido. Obtén un estimador puntual y un intervalo de confianza del 95% para la proporción de la población de la ciudad que votará al citado partido en las elecciones.

35. La edad media de esperanza de vida de una población es de 50 años, con una desviación típica $\sigma = 10$ años. Una compañía de seguros quiere determinar el número de individuos de la muestra para que la estimación difiera del valor 50, en al menos un 2% de este valor, tomando como nivel de confianza el 95%. Calcula el tamaño de dicha muestra.

36. Un experto, basándose en anteriores comicios, sostiene que si se celebran elecciones generales en este momento tan solo acudiría a votar el 48% de la población. No obstante, en un sondeo electoral realizado recientemente entre 1500 personas, 800 tienen intención de votar. ¿Supone esto, con un nivel de significación del 1%, que el experto se equivoca y la intención es mayor?

37. La desviación típica de la altura de los habitantes de un país es de 10 cm. Calcula el tamaño mínimo que ha de tener una muestra de habitantes de dicho país para que el error cometido al estimar la altura media sea inferior a 1 cm con un nivel de confianza del 99%.

38. El estudio de un test revela que la nota media que se obtiene es de 5,7 puntos con una desviación típica de 0,5.

    A 100 usuarios de la zona de influencia *A* y a 49 de la zona *B* se les pasa el test obteniéndose puntuaciones medias de 5,6 y 5,85 respectivamente. Con una confianza del 95%, ¿se puede afirmar que las diferencias entre las medias de cada muestra y de la población son debidas al azar, o se puede afirmar que son diferentes la nota media de la población y de la muestra?

    Formula las hipótesis y define error de tipo I y error de tipo II.

39. La nota obtenida en Estadística por los alumnos de una determinada facultad sigue una distribución normal. Seleccionados 125 alumnos al azar se observa que su nota media es 9 con una varianza de 9. Verifica con una confianza del 99% la hipótesis de que la nota media de dichos alumnos es inferior a 9,5.

40. La estatura media de los niños de 10 años en España es de 135 cm con una desviación típica de 8 cm. Calcula el tamaño de muestra necesario para que el intervalo de confianza al 95% de la media muestral tenga una amplitud de 2 cm.

41. Se realizan 64 lanzamientos de un dado. ¿Cuántos cincos debemos obtener, como mínimo y como máximo, para aceptar que el dado no está trucado con un nivel de confianza del 95%?

42. Según la ley electoral de cierto país, para obtener representación parlamentaria, un partido político ha de conseguir, en las elecciones, al menos un 5% de los votos. Próximas las elecciones, una encuesta realizada sobre 1000 ciudadanos elegidos al azar revela que 36 de ellos votarán a un partido determinado. ¿Puede estimarse con un nivel de significación del 5% que ese partido tendrá representación parlamentaria?

34. El estimador puntual puede ser la proporción $\hat{p}=\dfrac{160}{400}=0,4$

Al nivel de confianza del 95 % le corresponde un crítico $z_{\alpha/2}=1,96$.

La distribución muestral de proporciones es normal $N\left(0,4;\sqrt{\dfrac{0,4\cdot 0,6}{400}}\right)=(0,4;\,0,0245)$

El intervalo de confianza pedido es: $P\in(0,4-1,96\cdot 0,0245;0,4+1,96\cdot 0,0245)=(0,352;0,448)$

35. El error cometido es: $E=\dfrac{2}{100}\cdot 50=1$ año.

Al nivel de confianza del 95 % le corresponde $z_{\alpha/2}=1,96$.

El tamaño de la muestra viene dado por: $n=\left(\dfrac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2=\left(\dfrac{1,96\cdot 10}{1}\right)^2=384,16$

Al menos se deben tomar 385 individuos.

36. Formulamos las siguientes hipótesis: $\begin{cases} H_0: p\le 0,48 \\ H_1: p> 0,48 \end{cases}$

La prueba es unilateral y aun nivel de significación del 1 % le corresponde un crítico $z_{\alpha}=2,33$.

La zona de aceptación es el intervalo $(-\infty;2,33)$.

La distribución muestral de proporciones es normal $N(0,48\;;\,0,013)$.

La variable tipificada es: $z=\dfrac{\dfrac{800}{1500}-0,48}{0,013}=4,10$

Como z cae fuera de la zona de aceptación rechazamos la hipótesis nula H_0 con una probabilidad del 1 % de equivocarnos y creemos que la intención de voto es mayor.

37. Al nivel de confianza del 99 % le corresponde un crítico $z_{\alpha/2}=2,58$.

El tamaño mínimo ha de ser: $n=\left(\dfrac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2=\left(\dfrac{2,58\cdot 10}{1}\right)^2=665,64$

Es decir, la muestra debe de ser al menos de 666 personas.

38. En cada uno de los casos:

- Zona A

La distribución muestral de medias es normal $N\left(5{,}7; \frac{0{,}5}{\sqrt{100}}\right) = (5{,}7;\, 0{,}05)$

Formulamos las hipótesis: $H_0: \mu \geq 5{,}7 \quad H_1: \mu < 5{,}7$

La prueba es unilateral y al nivel de confianza del 85 % le corresponde un crítico $z_\alpha = 1{,}645$.

La zona de aceptación es el intervalo $(-1{,}645; +\infty)$.

El valor tipificado $z = \frac{5{,}6 - 5{,}7}{0{,}05} = -2$ cae fuera de la zona de aceptación por tanto rechazamos H_0 y podemos aceptar que las medidas son diferentes.

- Zona B

La distribución muestral de medias es $N\left(5{,}7; \frac{0{,}5}{\sqrt{49}}\right) = (5{,}7;\, 0{,}07)$

Formulamos las hipótesis: $H_0: \mu \leq 5{,}7 \quad H_1: \mu > 5{,}7$

La prueba es unilateral y la zona de aceptación es el intervalo $(-\infty; 1{,}645)$.

El valor tipificado $z = \frac{5{,}85 - 5{,}7}{0{,}07} = 2{,}14$ cae fuera de la zona de aceptación y rechazamos H_0.

La definición de los errores tipo I y tipo II puede verse en la página 352 del libro de texto.

39. Formulamos las hipótesis: $H_0: \mu \geq 9{,}5 \quad H_1: \mu < 9{,}5$

La distribución muestral de medias es $N\left(9; \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{125}}\right) = (9;\, 0{,}27)$

A un nivel de confianza de 99 % le corresponde un crítico, en esta prueba unilateral, de $z_\alpha = 2{,}33$. La zona de aceptación es el intervalo $(-2{,}33; +\infty)$.

La variable tipificada es: $z = \frac{9 - 9{,}5}{0{,}27} = -1{,}85$. Como el valor $z = -1{,}85$ cae dentro de la zona de aceptación, aceptamos la hipótesis nula H_0.

40. El tamaño mínimo de la muestra es: $n=\left(\frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2$

Al nivel de confianza del 95 % le corresponde $z_{\alpha/2}=1{,}96$.

Por tanto: $n=\left(\frac{1{,}96\cdot 8}{1}\right)^2=245{,}86$.

Se han de tomar al menos 246 niños.

41. Al nivel de confianza del 95 % le corresponde $z_{\alpha/2}=1{,}96$.

La distribución muestral de proporciones es normal $N\left(\frac{1}{6};\sqrt{\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{64}}\right)=(\frac{1}{6};\,0{,}047)$

La proporción esta en el intervalo: $P\in\left(\frac{1}{6}-1{,}96\cdot 0{,}047\ ;\ \frac{1}{6}+1{,}96\cdot 0{,}047\right)=(0{,}0745\quad 0{,}2588)$

Como mínimo debemos obtener $64\cdot 0{,}0745\cong 5$ cincos.

Como máximo $64\cdot 0{,}02588\cong 17$ cincos.

42. Formulamos las hipótesis: $\begin{cases} H_0\ : p\geq\ 0{,}05 \\ H_1 : p\ <\ 0{,}05 \end{cases}$

Es unilateral y al nivel de significación del 5 % le corresponde un crítico $z_\alpha=1{,}645$.

La zona de aceptación es el intervalo $(-1{,}645\ ;\ +\infty)$.

La distribución muestral de proporciones es normal $N(0{,}05;0{,}007)$.

La variable $z=\frac{0{,}036-0{,}05}{0{,}007}=-2$ como cae fuera de la zona de aceptación rechazamos H_0 y el partido no obtiene respuesta.