

TEMA 12 – INICIACIÓN AL CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIONES

12.1 – CRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO

TASA DE VARIACIÓN MEDIA

Definición

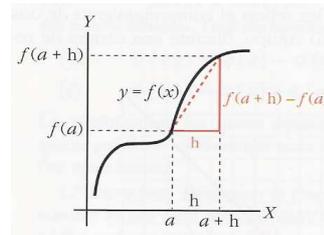
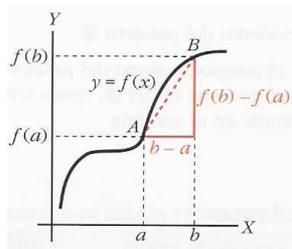
Se llama **tasa de variación media (T.V.M.)** de una función, $y = f(x)$ en un intervalo

$[a,b]$ al cociente:
$$\text{T.V.M.}[a,b] = \frac{\text{Variación de } f(x)}{\text{Variación de } x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

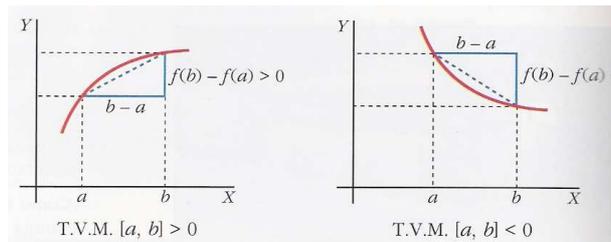
Y es la pendiente del segmento que une los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$

Con frecuencia, el intervalo se le designa mediante la expresión $[a, a+h]$, nombrando, así, a un extremo del intervalo a , y a su longitud, h . En tal caso, la tasa de variación

media se obtiene :
$$\text{T.V.M. } [a, a+h] = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



Si una función es creciente en $[a,b]$, su tasa de variación media es positiva; y si es decreciente, negativa.



TASA DE VARIACIÓN INSTANTÁNEA

Definición: Se llama **tasa de variación instantánea (T.V.I)** de una función, $y = f(x)$ en un punto a

$$\text{T.V.I.}(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Y es la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $x = a$.

Significado:

Si es positiva \Rightarrow La función es creciente en el punto a

Si es negativa \Rightarrow La función es decreciente en el punto a

12.2 – DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

DEFINICIÓN

Llamaremos **derivada de una función $y = f(x)$ en el punto $x = a$** a la tasa de variación instantánea de dicha función en el punto a , y se designa por $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

SIGNIFICADO

La derivada de la función $y = f(x)$ en el punto $x = a$ es **la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $x = a$**

Por tanto la ecuación de la recta tangente a una curva en el punto $x = a$:

$$y - f(a) = f'(a) (x - a)$$

APLICACIONES

- Si $f'(a) > 0 \Rightarrow$ La función es creciente en el punto $x = a$
- Si $f'(a) < 0 \Rightarrow$ La función es decreciente en el punto $x = a$
- Si hay un máximo o mínimo relativo en $x = a \Rightarrow f'(a) = 0$

12.3 – FUNCIÓN DERIVADA DE OTRA

Se llama **función derivada de f** (o simplemente **derivada de f**) a una función f' que asocia a cada abscisa, x , la derivada de f en ese punto, $f'(x)$, es decir, la pendiente de la curva $y = f(x)$ en ese punto. A la derivada de f la llamaremos f' o Df :

$$Df(x) = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

12.4 – REGLAS PARA OBTENER LAS DERIVADAS DE ALGUNAS FUNCIONES

OPERACIONES CON DERIVADAS

- Multiplicación por un número : $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$
- Suma y resta : $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
- Producto : $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- Cociente : $\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
- Composición : $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

REGLAS DE DERIVACIÓN

FUNCIÓN	DERIVADA	FUNCIÓN	DERIVADA
$y = k$	$y' = 0$		
$y = x$	$y' = 1$		
$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$	$y = f^n(x)$	$y' = n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{f(x)}$	$y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y = \sqrt[n]{f(x)}$	$y' = \frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{f^{n-1}(x)}}$
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \text{Ln } a$	$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)} \cdot \text{Ln } a \cdot f'(x)$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \cdot \text{Ln } a}$	$y = \log_a f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x) \cdot \text{Ln } a}$
$y = \text{Ln } x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \text{Ln } f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
$y = \text{sen } x$	$y' = \text{cos } x$	$y = \text{sen } f(x)$	$y' = \text{cos } f(x) \cdot f'(x)$
$y = \text{cos } x$	$y' = -\text{sen } x$	$y = \text{cos } f(x)$	$y' = -\text{sen } f(x) \cdot f'(x)$
$y = \text{tag } x$	$y' = 1 + \text{tag}^2 x = \frac{1}{\text{cos}^2 x}$	$y = \text{tag } f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{\text{cos}^2 f(x)} = [1 + \text{tag}^2 f(x)] \cdot f'(x)$
$y = \text{arcsen } x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \text{arcsen } f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
$y = \text{arccos } x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \text{arccos } f(x)$	$y' = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
$y = \text{arctag } x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = \text{arctag } f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$

12.5 – UTILIDAD DE LA FUNCIÓN DERIVADA**CALCULAR LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN VARIOS PUNTOS**

Para hallar $f'(a)$ se calcula la expresión general de la derivada $f'(x)$ y luego se sustituye en la derivada la x por a .

OBTENER LAS ABCISAS EN LAS CUALES LA DERIVADA TIENE UN CIERTO VALOR

Para averiguar los valores de x para los cuales $f'(x) = k$, se calcula la expresión de la derivada en general $f'(x)$, se iguala a k y se resuelve la ecuación.

OBTENER LAS ABCISAS DE LOS PUNTOS SINGULARES

Se llaman **puntos singulares** a los puntos de tangente horizontal, es decir, a los puntos en los que la derivada es cero. Entre ellos están los máximos y mínimos relativos, pero puede haber otros.

Las abscisas de los puntos singulares son las soluciones de la ecuación : $f'(x) = 0$

OBTENER LOS TRAMOS DONDE LA CURVA CRECE O DECRECE

Si $f'(x) > 0$ la función es creciente y si $f'(x) < 0$ la curva es decreciente. Por tanto, resolviendo tales inecuaciones se obtienen los intervalos donde la curva crece o decrece.

12.6 – ESTUDIO Y REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

DOMINIO

- Polinomio : $D = \mathbb{R}$
- Cocientes : $D = \mathbb{R} - \{\text{puntos que anulan el denominador}\}$
- Raíces de índice par : $D = \{\text{Lo de dentro de la raíz} \geq 0\}$
- Raíces de índice impar : $D = \mathbb{R}$
- Logaritmos : $D = \{\text{Lo de dentro del logaritmo} > 0\}$
- Exponenciales : $D = \mathbb{R}$
- Trigonómicas : Seno y coseno $D = \mathbb{R}$; El resto se estudia como un cociente
- Arcos : $D = \{-1 \leq \text{Lo de dentro del arco} \leq 1\}$

PUNTOS DE CORTE

- Con el eje OX : $y = 0 \Rightarrow x = x_0 \Rightarrow P(x_0, 0)$
- Con el eje OY : $x = 0 \Rightarrow y = y_0 \Rightarrow P(0, y_0)$

SIMETRÍA

- Simétrica respecto del OY o par: $f(-x) = f(x)$
- Simétrica respecto del Origen o impar : $-f(-x) = f(x)$

SIGNO DE LA FUNCIÓN

- Se calculan los puntos que no pertenecen al dominio $\Rightarrow x = a, \dots$
- Se resuelve la ecuación $f(x) = 0 \Rightarrow x = x_0, x = x_1, \dots$
- Estos puntos dividen la recta real en partes, tomando un punto en cada intervalo y sustituyendo en $y = f(x)$ se obtiene el signo de la función

ASÍNTOTAS

- Asíntotas verticales: Puntos donde la función se va al infinito: $y \Rightarrow \infty$, $x = a$
 - Cocientes: Puntos que anulan el denominador
 - Logaritmos : Puntos que anulan lo de dentro del logaritmo
 - Aproximación a la asíntota : Calcular límites laterales
- Asíntotas horizontales : Puntos donde la x se va al infinito : $x \Rightarrow \infty$, $y = b$
 - Cálculo : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \Rightarrow y = b$
 - Aproximación(en $x = \pm 100$): $\begin{cases} f(x) > b \Rightarrow \text{La función por encima de la asíntota} \\ f(x) < b \Rightarrow \text{La función por debajo de la asíntota} \end{cases}$
- Asíntotas oblicuas
 - Cálculo : $y = mx + n$; $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$; $n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$
 - Aproximación(en $x = \pm 100$): $\begin{cases} f(x) > \text{Asint}(x) \Rightarrow \text{La función por encima de la asíntota} \\ f(x) < \text{Asint}(x) \Rightarrow \text{La función por debajo de la asíntota} \end{cases}$

MONOTONIA Y PUNTOS CRÍTICOS

- Se calculan los puntos que no pertenecen al dominio $\Rightarrow x = a, \dots$
- Se resuelve la ecuación $f'(x) = 0 \Rightarrow x = x_0, x = x_1, \dots$
- Estos puntos dividen la recta real en partes, tomando un punto en cada intervalo y sustituyendo en $y = f'(x)$ se obtiene el signo de la función
- Si $f'(a) > 0$ la función es creciente en dicho intervalo, y si es < 0 es decreciente.
- Máximo relativo : $P(a, f(a))$: $x = a$ es el punto del dominio donde la función pasa de creciente a decreciente.
- Mínimo relativo : $P(a, f(a))$: $x = a$ es el punto del dominio donde la función pasa de decreciente a creciente.

CURVATURA Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

- Se calculan los puntos que no pertenecen al dominio $\Rightarrow x = a, \dots$
- Se resuelve la ecuación $f''(x) = 0 \Rightarrow x = x_0, x = x_1, \dots$
- Estos puntos dividen la recta real en partes, tomando un punto en cada intervalo y sustituyendo en $y = f''(x)$ se obtiene el signo de la función
- Si $f''(a) > 0$ la función es convexa en dicho intervalo, y si es < 0 es concava.
- Puntos de inflexión : $P(a, f(a))$: $x = a$ es el punto del dominio donde la función cambia la curvatura.

TABLA DE VALORES

Dando valores a la “x” se calculan los correspondientes de la “y” sustituyendo en la función

REPRESENTACIÓN GRÁFICA