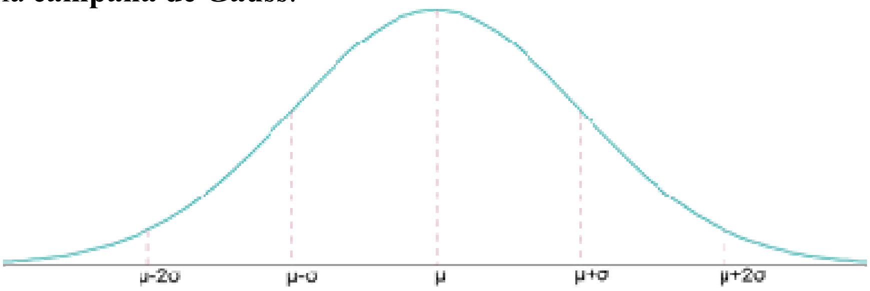
Distribución Normal: Ejemplos y ejercicios resueltos.

Una **distribución normal** de **media μ** y **desviación típica σ** se designa por **N (μ, σ)**. Su gráfica es la **campana de Gauss**:



El área del recinto determinado por la función y el eje de abscisas **es igual a la unidad**. Esto es porque la probabilidad de que un suceso ocurra entre todas las posibilidades es un 100%, o sea 1. La integral, entre menos y más infinito, de la función de densidad de probabilidad es 1.

Al ser **simétrica** respecto al eje que pasa por **x = μ**, deja un **área igual a 0.5 a la izquierda y otra igual a 0.5 a la derecha**.

Esta función de densidad de probabilidad tiene una expresión parecida a $g: g(x) = e^{-x^2}$.

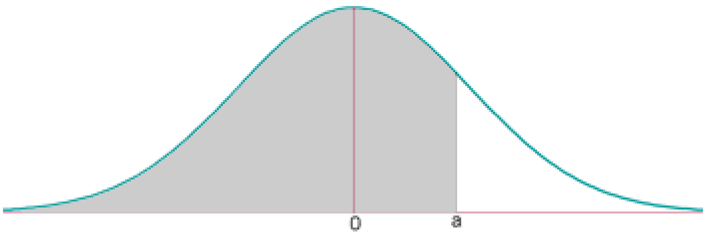
La distribución Normal o curva Normal de Gauss es $f: f(x) = C.e^{-½\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$.

En ésta función C es el valor que hace posible que se cumpla que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.

El valor de C es: $C = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

Entonces, para calcular la probabilidad de que ocurra un suceso, entre $-\infty$ y a, sólo hay que calcular: $P(x < a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-½\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx$

Esto representa el área debajo de la campana de Gauss para los valores menores que a.



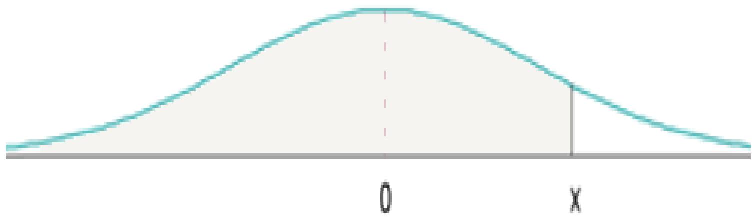
Podría suceder que no se quiera calcular esta integral en todos los ejercicios. Para evitar su cálculo, existen tablas donde la integral ya está calculada.

Pero para cada valor de la media μ y para cada valor de la desviación estándar σ se necesitarían tablas diferentes. Son demasiadas.

Para evitar esto, se hace una sustitución o cambio de variable. Eso lo veremos ahora.

Distribución normal estándar N (0, 1)

La **distribución normal estándar, o tipificada o reducida,** es aquella que tiene por **media** el valor **cero**, $\mu = 0$, y por **desviación típica la unidad,** $\sigma = 1$.



La probabilidad de la variable X dependerá del área del recinto sombreado en la figura. Y para calcularla utilizaremos una tabla, que se encuentra al final de este repartido.

Tipificación de la variable

Para poder utilizar la tabla tenemos que transformar la variable **X** que sigue una distribución **N(μ, σ)** en otra variable **Z** que siga una distribución **N(0, 1)**.

$$\boxed{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}}$$

cambio de variable.

	X	Z
Promedio o media	μ	0
1 desviación standard	$\mu + \sigma$	1
2 desviaciones standard	$\mu + 2\sigma$	2
3 desviaciones standard	$\mu + 3\sigma$	3
1 desviación standard	$\mu - \sigma$	-1
2 desviaciones standard	$\mu - 2\sigma$	-2

Por ejemplo, hagamos el cambio de variable para $X = \mu + 3\sigma$ entonces queda:

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{(\mu+3\sigma)-\mu}{\sigma}=\frac{3\sigma}{\sigma}=3$$

Si tenemos un ejercicio con valores de X, μ y σ hacemos el cambio de variable y encontramos Z, luego vamos a la tabla y con el valor de Z hallamos la probabilidad = área.

Con los datos

x μ σ

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

Con Z vamos a la tabla y hallamos la probabilidad.

Cálculo de probabilidades en distribuciones normales

La **tabla** (al final de este repartido) nos da las **probabilidades de P(z ≤ k)**, siendo **z** la variable tipificada. Estas probabilidades nos dan la **función de distribución Φ(k)**.

Φ(k) = P(z ≤ k)

En la tabla de valor de k se ubican las unidades y décimas en la columna de la izquierda y las centésimas en la fila de arriba.

Ejemplo 1. La temperatura durante setiembre está distribuida normalmente con media 18,7ºC y desviación standard 5ºC. Calcule la probabilidad de que la temperatura durante setiembre esté por debajo de 21ºC.

Resolución. $\mu = 18{,}7$ºC $\sigma = 5$ºC X = 21ºC

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{21-18{,}7}{5}=\frac{2{,}3}{5}=0{,}46$$

Ahora vamos a la tabla y para el valor de $Z = 0{,}46$ tenemos que la probabilidad es de $0{,}6772$.

0,46

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	[illegible]8238	0,8264	[illegible]	0,8315	0,8340	[illegible]	0,8389
	0,00	0,01	[illegible]		0,04		0,06	0,07		0,09
[illegible]	0,8413	[illegible]			[illegible]		[illegible]8554	[illegible]		[illegible]621

¿Pero que probabilidad es que hemos averiguado de la tabla?

Justamente, esta tabla nos proporciona la probabilidad desde que ocurran sucesos menores que Z = 0,46. Esto es, la probabilidad de que ocurran sucesos desde menos infinito hasta el valor de Z de 0,46 es 0,6772. Esto es, un 67,72 %.

Sucesos menores que Z = 0,46 es lo mismo que decir que la temperatura sea menor que 21ºC. Con la variable X hablamos de temperatura, con la variable estándar hablamos de Z.

Ejemplo 2. La temperatura durante setiembre está distribuida normalmente con media 18,7ºC y desviación standard 5ºC. Calcule la probabilidad de que la temperatura durante setiembre esté por encima de 21ºC.

Resolución: Primero, hay que leer bien el ejercicio. ¿Se ha fijado, querido estudiante, que este ejercicio 2 es diferente al ejercicio 1? Léalo de nuevo.

Este ejercicio es el complementario del anterior. Si en el ejercicio 1 vimos que la probabilidad de que ocurran temperaturas menores que 21ºC es de 0,6772, entonces ahora la probabilidad de que ocurran temperaturas mayores será: 1 - 0,6772 = 0,3228. Esto es un 32,28%.

Ejemplo 3. ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura sea de 21ºC ?

Ahora se pide averiguar la probabilidad de que la temperatura sea exactamente de 21ºC.

Ayuda 1: lea el teórico ……

Ayuda 2: La probabilidad de que la temperatura sea mayor de 21 es de 67,72 %. La probabilidad de que la temperatura sea menor de 21 es de 32,28 %. Y la temperatura puede ser menor, mayor o igual que 21ºC. Entonces lo que falta es la respuesta.

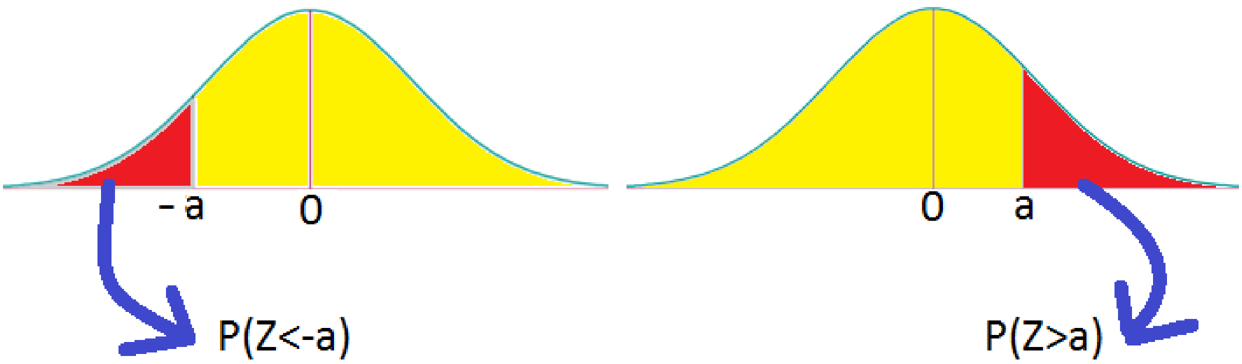
Ejemplo 4. La media de los pesos de 5000 estudiantes de un colegio es 70 kg y la desviación típica 3 kg. Suponiendo que los pesos se distribuyen normalmente, "hallar cuántos estudiantes" pesan menos de 60 kg.

Resolución. $\mu = 70$Kg. $\sigma = 3$ Kg. $X = 60$Kg.

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{60-70}{3} = \frac{-10}{3} = -3{,}33$$

¿Y cómo buscamos en la tabla un número negativo?

El valor negativo sólo nos está diciendo que estamos por debajo de la media. Pero en la tabla todos los valores de Z son positivos. ¿Entonces?



La probabilidad de que Z sea menor que -a, en el dibujo de la izquierda, es **igual** que la probabilidad de que Z sea mayor que a , en el dibujo de la derecha.

Pero nuestra tabla sólo nos proporciona la probabilidad de que $Z <$ algo. Entonces, mirando el dibujo de la derecha, buscamos la probabilidad de que $Z<a$, que es la parte amarilla, y luego calculamos su complemento, con 1 – (resultado anterior).

Mirando la tabla para $Z = 3.33$, queda que la probabilidad es de 0,9996.

Entonces, $P(Z>3{,}33) = 1 - 0{,}9996 = 0{,}0004. = P\ (Z < -\ 3{,}33)$

Esto es, el 0,04 % de los 5000 estudiantes pesan menos de 60 Kg. Son 2 estudiantes.

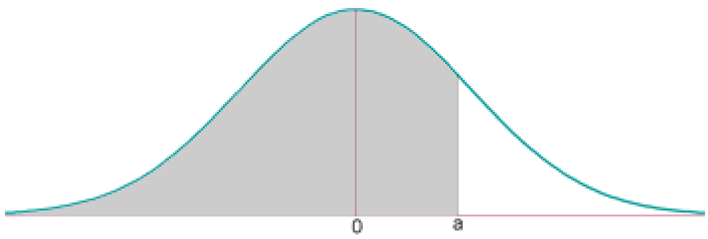
Observación: ¿Qué opina respecto a la pregunta: "calcular el número de estudiantes"?

3,33

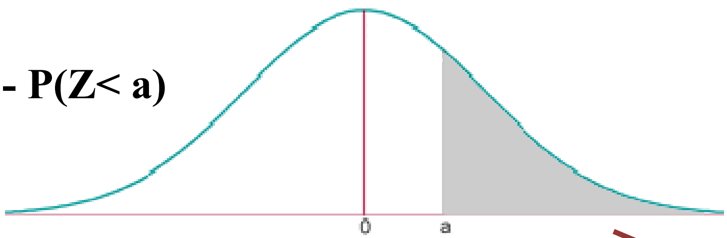
Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
2,7	0,9965	[illegible]	0,9967	0,9968	[illegible]	0,9970	0,9971	0,9972	[illegible]	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Distribución Normal: Repaso y ejemplos. .

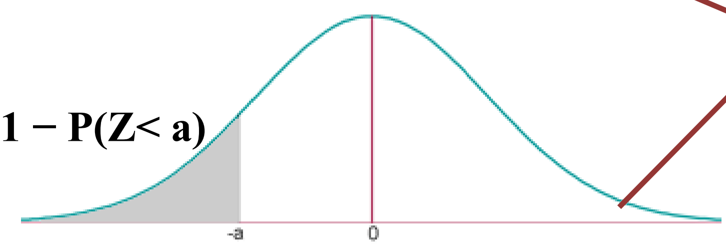
P(Z < a)



P(Z > a) = 1 - P(Z< a)

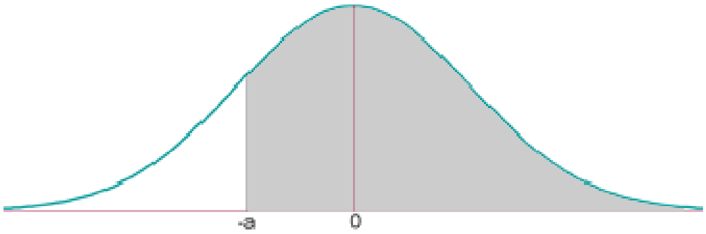


P(Z < −a) = 1 − P(Z< a)

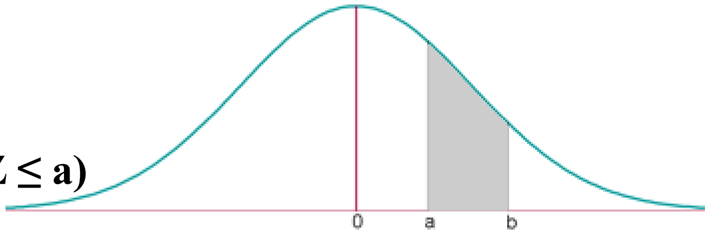


Tienen la misma área, entonces la probabilidad es la misma.

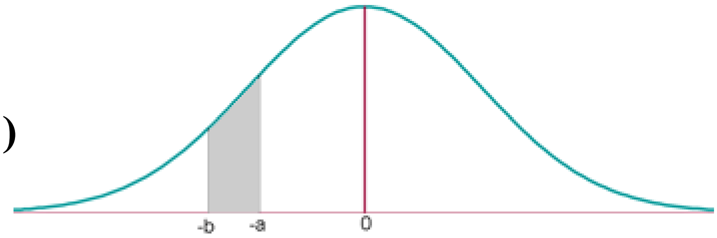
$$P(Z > -a) = P(Z \leq a)$$



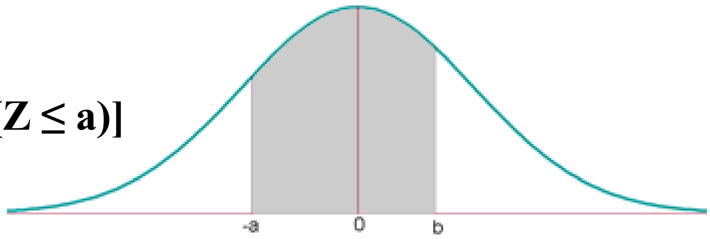
$$P(a < Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a)$$



$$P(-b < Z \leq -a) = P(a < Z \leq b)$$



$$P(-a < Z \leq b) = P(Z \leq b) - [\,1 - P(Z \leq a)]$$



Ejercicios resueltos.

Ejercicio 1) En una ciudad se estima que la temperatura máxima en el mes de junio sigue una distribución normal, con media 23° y desviación típica 5°. Calcular el número de días del mes en los que se espera alcanzar máximas entre 21° y 27°.

$$p[21 < X \leq 27] - p\left(\frac{21-23}{5} < Z \leq \frac{27-23}{5}\right) -$$

$$= p(-0.4 < Z \leq 0.8) = p(Z \leq 0.8) - [1 - p(Z \leq 0.4)] =$$

$$= 0.7881 - (1 - 0.6554) = 0.4425 \cdot 30 = 13$$

¿Qué opina de este último renglón? ¿Cómo se puede escribir de forma correcta?

(Aclaración: el resultado es el correcto, pero algo está mal escrito……..)

Ejercicio 2) La media y los que de los pesos de 500 estudiantes de un colegio es 70 kg y la desviación típica 3 kg. Suponiendo que los pesos se distribuyen normalmente, hallar cuántos estudiantes pesan:

i). Entre 60 kg y 75 kg.

$$p[60 < X \leq 75] = p\left(\frac{60-70}{3} < Z \leq \frac{75-70}{3}\right) =$$ f

$$= p(-3.33 < Z \leq 1.67) = p(Z \leq 1.67) - [1 - p(Z \leq 3.33)] =$$

$$= 0.9525 - (1 - 0.9996) = 0.9521 \cdot 500 = 476$$

ii) .Más de 90 kg.

$$p(X > 90) = p\left(Z > \frac{90-70}{3}\right) = p(Z > 6.67) =$$

$$= 1 - p(Z < 6.67) = 1 - 1 = 0 \cdot 500 = 0$$

iii) Menos de 64 kg.

$$p(X < 64) = p\left(Z < \frac{64-70}{3}\right) = p(Z < -2) = 1 - p(Z \leq 2) =$$

$$= 1 - 0.7772 = 0.02128 \cdot 500 = 11$$ (hay algo mal escrito…..)

iv) 64 kg exactamente.

$$p(X=64)=p\left(Z=\frac{64-70}{3}\right)=p(Z=-2)=0\cdot 500=0$$

v) 64 kg o menos.

$$p(X\le 64)=p(X<64)=11$$

Ejercicio 3)

Se supone que los resultados de un examen siguen una distribución normal con media 78 y desviación típica 36. Se pide:

a). ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que se presenta el examen obtenga una calificación superior a 72?

$$p(X>72)=p\left(Z>\frac{72-78}{36}\right)=$$

$$=p(Z>-0.16)=p(Z<0.16)=0.5636$$

b) Calcular la proporción de estudiantes que tienen puntuaciones que exceden por lo menos en cinco puntos de la puntuación que marca la frontera entre el Apto y el No-Apto (son declarados No-Aptos el 25% de los estudiantes que obtuvieron las puntuaciones más bajas).

$$p(X\le N)=0.25\Rightarrow p\left(Z\le\frac{N-78}{36}\right)=0.25$$

$$\frac{N-78}{36}<0 \qquad 1-p\left(Z\le\frac{N-78}{36}\right)=0.25$$

$$p\left(Z\le\frac{N-78}{36}\right)=0.75\Rightarrow\frac{N-78}{36}=0.68 \qquad N=54$$

$$p(X>54+5)=p(X>59)=p\left(Z>\frac{59-78}{36}\right)=$$

$$p(Z>-0.53)=p(Z<0.53)=0.7019=70.19\%$$

c) Si se sabe que la calificación de un estudiante es mayor que 72 ¿cuál es la prioridad de que su calificación sea, de hecho, superior a 84?

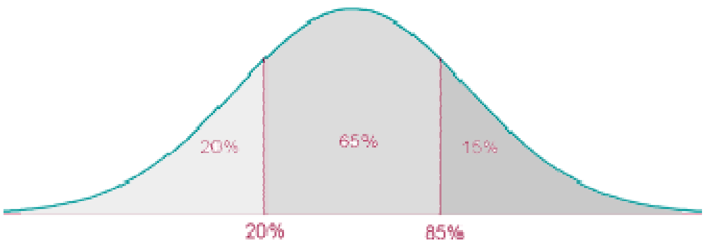
$$p(X>84)=p\left(Z>\frac{84-78}{36}\right)=p(Z>0.16)=$$

$$=1-p(Z<0.16)=1-0.5636=0.4364$$

$$p(x>84/x>72)=\frac{p[x>84\cap x>72]}{p(x>72)}=$$

$$=\frac{p(x>84)}{p(x>72)}=\frac{0.4364}{0.5636}=0.774$$

Ejercicio 4) Tras un test de cultura general se observa que las puntuaciones obtenidas siguen una distribución una distribución N(65, 18). Se desea clasificar a los examinados en tres grupos (de baja cultura general, de cultura general aceptable, de excelente cultura general) de modo que hay en el primero un 20% la población, un 65% el segundo y un 15% en el tercero. ¿Cuáles han de ser las puntuaciones que marcan el paso de un grupo al otro?



$p(Z\leq z_1)=0.2$ $\quad$ $p(Z\leq -z_1)=0.8$

$-z_1=0.84$ $\quad$ $z=-0.84$

$\frac{X_1-65}{18}=-0.84$ $\quad$ $X_1=49.88$

$p(Z\leq z_2)=0.2$ $\quad$ $z_2=1.04$

$\frac{X_2-65}{18}=1.04$ $\quad$ $X_2=83.72$

Baja cultura hasta 49 puntos.

Cultura aceptable entre 50 y 83.

Excelente cultura a partir de 84 puntos.

Ejercicio 5) Varios test de inteligencia dieron una puntuación que sigue una ley normal con media 100 y desviación típica 15.

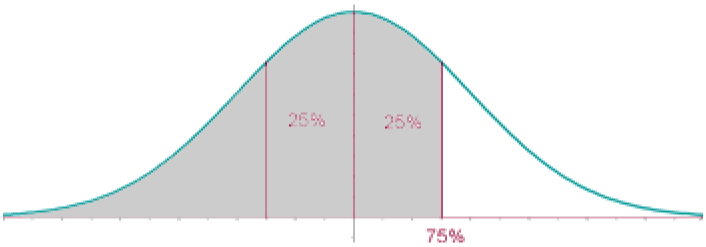
a) Determinar el porcentaje de población que obtendría un coeficiente entre 95 y 110.

$$p(95 < X \leq 110) = p\left(\frac{95-100}{15} < Z \leq \frac{110-100}{15}\right) =$$

$$= p(0.33 < Z \leq 0.67) = p(Z \leq 0.67) - [1 - p(Z \leq 0.33)] =$$

$$= 0.7486 - (1 - 0.6293) = 0.3779$$

b) ¿Qué intervalo centrado en 100 contiene al 50% de la población?



$p = 0.75$ $\qquad$ $z = 0.675$

$\frac{X-100}{15} = 0.675$ $\qquad$ $X = 110$

$(90,\ 110)$

c) En una población de 2500 individuos ¿cuántos individuos se esperan que tengan un coeficiente superior a 125?

$$p(X > 125) = p\left(Z > \frac{125-100}{15}\right) = p(Z > 1.67) =$$

$$= 1 - p(Z < 1.67) = 1 - 0.9525 = 0.0475 \cdot 2500 = 119$$ (Hay algo mal escrito…..)

Algunas partes de este repartido fueron tomadas del sitio web http://www.vitutor.net/1/55.html el día 26/08/2015.

Tabla de Distribución Normal Standard = Áreas bajo la Curva Normal

Z	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
	0,00	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
	0,00	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
	0,00	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Tabla tomada del sitio web http://www.vitutor.net/1/56.html el 26/08/2015.