1ª Evaluación Mat.Apl.C.Soc.

A. Matrices y determinantes

1.- a) Averigua para qué valores de **t** la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & t & 3 \\ 4 & 1 & -t \end{pmatrix}$ no tiene inversa

b) Si se puede, calcula la inversa de **A** para t =2.

Sol: a) t=3 t=1 b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2.- Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Calcular, si es posible: a) $A + 6B^t$, b) $(A \cdot B) \cdot C$, c) $(B \cdot A) \cdot C$, d) C^4

Sol: a) $\begin{pmatrix} 9 & 48 & -2 \\ 1 & 13 & -6 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 11 & 9 \end{pmatrix}$ *c) (B · A) · C no se puede* *d)* $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

3. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de orden tres, cuyos elementos vienen dados por la expresión $a_{ij} = 2i - j - 2$. Calcular la inversa de A.

Sol: $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *No tiene inversa por ser çA ç= 0*

4.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Halla las matrices B que conmutan con A (es decir AB = BA)

Sol: $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ *con* $a, b \in R$

5.- Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & m \\ m & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Hallar los valores de m para los que la matriz A no es inversible.

b) Hallar la matriz X que es solución de la ecuación: X A + 2 B = I siendo A la matriz dada para m = 3

Sol: a) m = 1 ó m = - 2 ; b) $X = \dfrac{1}{20} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 8 & -10 \\ 51 & 2 & -45 \\ 30 & 0 & -50 \end{pmatrix}$

6.- a) Encuentre una matriz X que verifique la igualdad $A \cdot B - X = A^2$

Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Calcula el determinante de X

c) Calcula, si es posible, la inversa de X

Sol: a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *b) 1* *c)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

7.-Dadas la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & k \\ -6 & k & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Estudiar los valores de k para los cuales existe la matriz inversa de A.

b) Si k = -1, calcular si existe A^{-1}.

c) Resolver la ecuación matricial $X \cdot A - 2I = B^2$, siendo I la matriz identidad de orden 3 y A la matriz inicial para k = -1.

Sol: a) k ¹ 0 y k ¹ -2 *b)* $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ *c)* $X = \begin{pmatrix} -12 & -24 & -10 \\ 35 & 71 & 29 \\ 30 & 60 & 24 \end{pmatrix}$

8.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & -a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$, donde “a” es un número real:

a) Calcular el valor o los valores reales de “a” para los que A no tiene inversa.

b) Resolver la ecuación AX + B = I, donde A es la matriz inicial para a = 0, I es la matriz identidad y $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Sol: a) a=1 y a=-1 *b)* $X = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

9.- a) En la ecuación X A + B = C se sabe que:

A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ C = $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

1) Despejar X en esa ecuación. 2) Calcular X.

b) ¿Cuánto debe valer “*a*” en la matriz M = $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ para que M tenga inversa?

Sol: a) 1) $X=(C-B)\cdot A^{-1}$ *2)* $X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *b)* $a \neq -5$

10.- Determinar la matriz X que satisface la ecuación 3 X + I = A . B - A^2 siendo:

A = $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ e **I** la matriz unidad de orden 3.

Sol: $X = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{-8}{3} \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

11.-Determina la matriz desconocida **M** en el siguiente producto:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -14 & 0 \\ 16 & 22 \end{pmatrix}$$

Sol: $M = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

12.-Resolver la ecuación matricial: $\mathbf{AX + B^2 = 3\,I}$

siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *Sol:* $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

13.- Halla la matriz X que cumple la igualdad AX + B = 2C, sabiendo que:

$A=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Sol: $X=\begin{pmatrix} 7 & -30 & -13 \\ 3 & -13 & -6 \end{pmatrix}$

14.- Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valor del parámetro “a” la ecuación AX + B = 2C no tiene solución?.
b) Resolver la ecuación del apartado anterior para el valor a = 0.

Sol: a) a=-2 b) $X=\begin{pmatrix} 5/2 & -3/2 & 2 \\ 3/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

15.- Hallar una matriz X tal que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix} \bullet X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Sol: $X = \begin{pmatrix} -10 & 8 & 3 & 0 \\ 25 & -22 & -2 & 0 \\ -12 & 11 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

16.- Despeja X en esta ecuación matricial: AX + X - 3I = 0, sabiendo que A+I tiene inversa.

Sol: $X=(A+I)^{-1}3$

17.- En un colegio se imparten los cursos 1º,2º y 3º. Los profesores tienen asignado un número de horas de clase, tutorías y guardias de acuerdo con la siguiente matriz:

$$M=\begin{array}{c} \\ 1º \\ 2º \\ 3º \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Clase} & \text{Guardias} & \text{Tutorías} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 5 & 3 \\ 18 & 6 & 5 \\ 22 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

El colegio paga cada hora de clase a 2000 ptas., cada hora de guardia a 500 ptas. y cada hora de tutoría a 1000 ptas. según el vector: $C=\begin{pmatrix} 2000 \\ 500 \\ 1000 \end{pmatrix}$

El colegio dispone de 5 profesores para primer curso, 4 para segundo y 6 para tercero, representados por el vector P= (5 4 6).

Calcula cada uno de los siguientes productos de matrices e interpreta los resultados:

a) PM b) MC c) PMC

Sol: a) $PM=\begin{pmatrix} CLASE & GUARD & TUTOR \\ 304 & 55 & 47 \end{pmatrix}$ *Representan las horas totales de: clases, guardias y tutorías.*

b) $MC=\begin{pmatrix} 45500 \\ 44000 \\ 46500 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \rightarrow\ 1º\ \textit{curso} \\ \rightarrow\ 2º\ \textit{curso} \\ \rightarrow\ 3º\ \textit{curso} \end{array}$ *Representa el precio total de cada curso.*

c) PMC= 682500 ptas. Es el precio total de todas las actividades de todos los cursos.

18.-La cadena de hoteles NH posee tres hoteles en una ciudad: Excelsior, Paraíso y Oasis. Cada hotel dispone de tres tipos de habitaciones: de lujo, doble e individual. El Excelsior posee 6 habitaciones de lujo, 30 dobles y 10 individuales. El Paraíso 4, 50 y 10 respectivamente y el Oasis 4, 50 y 8. El precio por habitación y noche es 10.000 ptas. la de lujo, 7.000 ptas. la doble y 5.000 ptas. la individual.

a) Recoge estos datos en dos matrices indicando qué significa cada fila y columna.

b) Suponiendo que estuvieran completos una noche, expresar mediante una matriz los ingresos obtenidos por cada hotel.

Sol: a) A matriz que indica el nº de habitaciones de cada hotel. B matriz que indica el precio por habitación .

b) A . B matriz que indica los ingresos obtenidos por cada hotel.

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} L & D & I \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6 & 30 & 10 \\ 4 & 50 & 10 \\ 4 & 50 & 8 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ Exc. \\ Par. \\ Oas. \end{array} \qquad B=\begin{array}{c} Ptas \\ \begin{pmatrix} 10000 \\ 7000 \\ 5000 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ Lujo \\ Doble \\ Indiv. \end{array} \qquad A\cdot B=\begin{array}{c} Ptas \\ \begin{pmatrix} 320000 \\ 440000 \\ 430000 \end{pmatrix} \end{array}$$

19.- En un centro educativo los datos de matrícula por cursos son: 3º de secundaria: 50 alumnos y 70 alumnas; 4º de secundaria: 65 alumnos y 50 alumnas; 1º de bachillerato: 35 alumnos y 38 alumnas; y en 2º de bachillerato: 32 alumnos y 30 alumnas.

Un estudio realizado en el centro indica que cada alumno/a de 3º lee por año 2 libros de novela, ninguno de poesía y un libro de otros temas. Cada alumno/a de 4º lee 3 novelas, 1 de poesía y 2 de otros temas. Un alumno/a de 1º lee sólo 4 novelas, y un alumno/a de 2º lee 4 novelas, 3 de poesía y 4 de otros temas.

a) Disponer la información acerca de matrícula y lectura en dos matrices.
b) Explica qué representan cada uno de los elementos de la matriz producto de las dos matrices anteriores.
c) ¿Cuántos libros de novela leen por curso todas las alumnas matriculadas en el centro?

Sol: *a)* $M = \begin{pmatrix} 50 & 65 & 35 & 32 \\ 70 & 50 & 38 & 30 \end{pmatrix}$ $\quad L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $M\,L = \begin{pmatrix} 563 & 161 & 308 \\ 562 & 140 & 290 \end{pmatrix}$

c) 562, ya que el elemento a_{21} de la matriz producto representa el nº de libros de novela que leen entre todas las alumnas por año

20.- La carne que se consume en dos residencias A y B consiste en hamburguesas y pollo. Los precios por Kg. de ambos productos en el hipermercado durante los meses de octubre y noviembre fueron:

$$\begin{array}{cc} & \text{Pollo} \quad \text{Hamb.} \\ \begin{array}{c} \text{oct} \\ \text{nov} \end{array} & \begin{pmatrix} 150 & 200 \\ 160 & 190 \end{pmatrix} \end{array}$$

El consumo mensual de las dos residencias en carne fué:

$$\begin{array}{cc} & \text{Kg pollo} \quad \text{Kg hamb} \\ \begin{array}{c} \text{resid A} \\ \text{resid B} \end{array} & \begin{pmatrix} 800 & 600 \\ 700 & 400 \end{pmatrix} \end{array}$$

Mediante operaciones con las matrices anteriores, encuentra una matriz que exprese el gasto de ambas residencias en carne durante los dos meses.

Sol:
$$\begin{array}{cc} & \quad oct \qquad\quad nov \\ \begin{array}{c} \mathrm{Res}A \\ \mathrm{Res}B \end{array} & \begin{pmatrix} 240000 & 242000 \\ 185000 & 188000 \end{pmatrix} \end{array}$$

B. Sistemas de ecuaciones lineales. Problemas

1.- Resolver el sistema:
$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - 6z = 24 \\ -3x + 5y + 9z = 40 \\ x + 2y - 3z = 16 \end{array}\right\}$$

Sol: $x = 3a$, $y = 8$, $z = a$ con a Î Â

2.- a) Resuelve y clasifica el sistema de ecuaciones lineales :
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -2x + y = -6 \\ 3y - 6x = -3 \end{cases}$$

b) Representa gráficamente el sistema e interpreta la solución.

Sol: Sistema incompatible. Dos rectas son paralelas y la otra las corta.

3.- Clasifica y resuelve los siguientes sistemas:

a) $$\left.\begin{array}{l} 3x + y - z = 6 \\ x - 2y + z = 3 \\ 2x + 3y - 4z = -9 \end{array}\right\}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} 3x - 2y - 2z = -2 \\ x + y - 2z = -4 \\ x - 4y + 2z = 6 \end{array}\right\}$$

Sol: a) compatible determinado: $x = 3$, $y = 3$, $z = 6$

b) compatible indeterminado: $x = \dfrac{6a - 10}{5}$, $y = \dfrac{4a - 10}{5}$, $z = a$ con a Î Â

4.- Interpreta gráficamente y resuelve el sistema:
$$\left.\begin{array}{r} x + 3y = -3 \\ 5x + y = 13 \\ 3x - 5y = 11 \end{array}\right\}$$

Sol: Sistema incompatible. Son tres rectas que se cortan dos a dos.

5.- Resuelve este sistema:
$$\left.\begin{array}{l} x + y - 2z = 1 \\ 2x - y + 4z = 7 \\ 4x + y = 9 \end{array}\right\}$$

Sol: Sist. compat. Indet. $x = \dfrac{8 - 2w}{3}$, $y = \dfrac{-5 + 8w}{3}$, $z = w$ con w Î Â

6.- Resuelve el sistema: $\left.\begin{array}{l} x+2y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ x-4y+z=1 \end{array}\right\}$

Sol: Sistema compatible indeterminado de solución (1-a, a/3, a) con a Î Â.

7.- Resuelve y clasifica el siguiente sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} x+2y+3z=0 \\ 2x-y-z=2 \\ 3x+y+2z=2 \end{array}\right\}$

Sol: Sistema compatible indeterminado de solución ($\frac{4-z}{5}$ *, -* $\frac{7z+2}{5}$ *, z) con z Î Â*

8.- Los 32 alumnos de una clase tienen edades de 18, 19 y 20 años. Si la media de sus edades es de 18,5 años.¿ Cuántos alumnos hay de cada edad si de 18 años hay 6 más que entre 19 y 20 años?

Sol: 19 de 18 años, 10 de 19 años y 3 de 20 años

9.- Los estudiantes de cierto curso venden camisetas, gorros y banderines para ayudarse a pagar un viaje. Cada camiseta se vende a 800 ptas, cada gorra a 120 ptas. y cada banderín a 200 ptas. Los costes de cada prenda son de 300 ptas. por camiseta, 20 ptas. por gorra y 80 ptas. por banderín.

El beneficio neto obtenido es de 67400 ptas. y el gasto total es de 34600 ptas. Sabiendo que se han vendido un total de 270 unidades , calcúlese cuántas se han vendido de cada clase.

Sol: 100 camisetas, 150 gorros y 20 banderines.

10- Nuestro proveedor de pilas nos cobra por una pequeña, dos medianas y una grande, 305 ptas. En otra ocasión, por dos pequeñas, tres medianas y dos grandes, 540 ptas.

a) ¿Cuánto nos cuestan 5 pequeñas, 9 medianas y 5 grandes?
b) ¿Cuál es el precio de una pila mediana?
c) ¿Cuánto vale una pequeña más una grande?
d) ¿Podemos calcular el precio de una pila pequeña?
e) Si añadimos la condición que una grande vale el doble de una pequeña, ¿cuál es el precio de cada uno de los tipos de pilas?

Sol: a) 1455 ptas. b) 70 ptas. c) 165 ptas. d) no podemos e) 110 ptas. la pila grande y 55 ptas. la pila pequeña.

11.- Una empresa cinematográfica dispone de tres salas A , B , y C. Los precios de entrada a cada una de estas salas son 100 , 200 y 300 ptas., respectivamente. Un día, la recaudación conjunta de las tres salas fue de 42.500 ptas. y el número total de espectadores que acudieron fue de 200. Si los espectadores de la sala A hubiesen asistido a la sala B y los de la sala B a la sala A, se obtendría una recaudación total de 40.000 ptas. Calcula el número de espectadores que acudió a cada sala.

Sol: 50 espectadores a la sala A, 75 a la sala B y 75 a la sala C

12.- Un fabricante de espárragos de Navarra fabrica tres clases de latas: lata de calidad extra de 1kg a 500 ptas, lata de calidad suprema de 500 gr. a 300 ptas. y lata de calidad primera de 250 gr a 100 ptas.

Tiene un pedido de un cliente de 300 kg por valor de 150.000 ptas, si se utilizan para envasarlo 700 latas, calcular cuántos envases de cada tipo se necesitan.

Sol: 100 latas extra, 200 latas calidad suprema y 400 latas calidad primera

13.- Una tienda posee tres tipos de conservas A,B y C. El precio medio de las tres conservas es de 150 pts. Un cliente compra 30 unidades de A, 20 de B y 10 de C, debiendo abonar 8400 pts.Otro compra 20 unidades de A y 25 de C y abona 6900 pts. Calcula el precio de una unidad de A, otra de B y otra de C.

Sol: A: 120 pts, B: 150 pts y C: 180 pts.

14.- La suma de las edades de tres personas es, en el momento actual, 73 años. Dentro de diez años la edad de la mayor de ellas será el doble de la edad de la persona más joven. Hace doce años la persona con edad intermedia tenía el doble de años que la más joven. Hallar las edades de las tres personas.

Sol: 40, 18 y 15 años

15.- Un capitán tiene tres compañías: una de suizos, otra de zuavos y una tercera de sajones. Al asaltar una fortaleza el capitán promete una recompensa de 901 escudos que se repartirán de la siguiente forma: el soldado que primero suba y todos los de su compañía recibirán un escudo, el resto de la recompensa se repartirá a partes iguales entre el resto de los soldados. Sabiendo que si el primero que sube es un suizo, los de las demás compañías reciben medio escudo; si el primero es zuavo, los restantes reciben un tercio de escudo y si el primero es sajón, un cuarto de escudo, ¿cuántos hombres hay en cada compañía?

Sol: 265 suizos, 583 zuavos y 689 sajones

16.- Alfredo va al mercado y compra naranjas, plátanos y berenjenas. Si el peso total de la compra es 6 kg. , y sabemos que, compra 1 kg. más de naranjas que de plátanos, que los precios son 120, 250 y 90 por kg. de naranjas, plátanos y berenjenas respectivamente, y que en total ha pagado 950 ptas., calcula las cantidades respectivas de los productos adquiridos.

Sol: 3 kg. de naranjas, 2 kg. de plátanos y 1 kg. de berenjena.

17.- A Victoria le van a confeccionar su vestido de novia, por el que tendrá que pagar 174200 ptas. En la confección se utilizan 15 metros entre raso, seda y pasamanería bordada. Los metros de raso serán el doble que los de seda. Los precios del raso, seda y pasamanería son 5500, 6200 y 6800 ptas. el metro respectivamente. Si del precio total 50000 ptas. se destinan a la mano de obra y 35000 ptas. para beneficio del comerciante, ¿cuántos metros de cada material serán necesarios?

Sol: 8 m de raso, 4 m de seda y 3 m de pasamanería.

18.- Juan y Pedro invierten 2000000 de ptas. cada uno. Juan coloca una cantidad A al 4% de interés, una cantidad B al 5% y el resto al 6%. Pedro invierte la misma cantidad A al 5%, la B al 6% y el resto al 4%. Determinar la cantidad B, sabiendo que Juan obtiene unos intereses de 105000 ptas. y Pedro de 95000 ptas.

Sol: A=500.000 , B=500.000 y C=1.000.000

19.- Ayer se agotaron en la Oficina de Turismo todos los folletos que quedaban. Había folletos en español, francés e inglés, en total 80. Se sabe que si en español hubiese habido 10 folletos menos y en francés 20 más hubiera habido el mismo número en los dos idiomas. Por otra parte, con el mismo número de folletos que los que había, tanto en español como en inglés, pero doble número de folletos en francés, el número de folletos en inglés hubiese sido exactamente un tercio del total. Queremos calcular cuántos folletos había exactamente en cada idioma al comienzo del día. Plantea el sistema adecuado y resuélvelo.

Sol: 40 en español, 30 en inglés y 10 en francés.

C. Cuestiones teórico-prácticas

1.- a) Forma un sistema de dos ecuaciones que tenga como solución $x=2$, $y=-1$, $z=3$

b) Encuentra todas las soluciones del anterior sistema.

c) Forma un sistema homogéneo de tres ecuaciones que tenga como solución:

$x=2$, $y=-1$, $z=3$

d) Resuelve dicho sistema.

2.- Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) Si una matriz tiene tres filas menos que columnas, ¿cuál tiene mayor dimensión $(A \cdot A^t)$ ó $(A^t \cdot A)$?

b) Poner un ejemplo de dos matrices A y B de forma que el multiplicar $(B \cdot A)$ el resultado sea una matriz cuadrada de orden (1x1)

c) ¿Cómo debe ser una matriz A para que se cumpla: $A + A^t = I$?.

Sol: a) mayor dimensión $A^t \cdot A$ b) B dimensión 1xn y A nx1 c) A cuadrada $a_{ii}=1/2$ y los $a_{ij}=-a_{ji}$

3.- Comentar brevemente estas frases:

a) El producto de dos matrices diagonales M y N es una matriz diagonal y MN=NM

b) Los productos AA^t y A^tA siempre se pueden realizar y tienen el mismo orden.

c) Todo sistema homogéneo es compatible.

d) El determinante de una matriz de orden tres es igual que el determinante de su opuesta.

Sol: a) cierto b) Los productos siempre se pueden realizar pero no tienen el mismo orden más que cuando A es cuadrada. c)Verdadero d) *Falso. Los determinantes son también opuestos.*

4.-Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) ¿Puede ocurrir que dos matrices se puedan sumar pero no se puedan multiplicar?.

b) Todo sistema homogéneo es compatible determinado. ¿Verdadero o falso?.

c) Dada una matriz A de dimensión (mxn) siendo $m \neq n$, ¿se puede calcular la expresión: $A \cdot A^t - A^t \cdot A$?.

Sol: a) Sí , b) falso , c) no se puede calcular puesto que m ¹ n

5.- Razonar las respuestas:

a) Si tenemos un sistema compatible indeterminado de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. ¿Se puede obtener un sistema incompatible añadiendo una tercera ecuación?

b) Pon un ejemplo de sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas que sea incompatible.

c) Al aplicar el método de Gauss a tres sistemas de ecuaciones lineales he obtenido estas situaciones :

$$\text{i)}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & | & 4 \\ 0 & 2 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ii)}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2 & | & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{iii)}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Clasifica estos sistemas en función del nº de soluciones.

Sol: a) Sí . La interpretación gráfica del sistema dado son dos rectas coincidentes, para que sea incompatible basta añadir una ecuación cuya representación gráfica sea una recta paralela a las anteriores.

b) Imposible pues todo sistema homogéneo es compatible pues tiene por lo menos la solución trivial (0,0,0)

c) i) Compatible determinado ii) Incompatible iii) Compatible indeterminado

6.- a) Sea A una matriz de 3 filas y 4 columnas y C una matriz de dimensión 2x3 ¿Cuántas filas y columnas tiene B sabiendo que existe la matriz $A\cdot B\cdot C$?. ¿ Qué dimensión tiene la matriz $A\cdot B\cdot C$?.

b) Sea D una matriz tal que al multiplicarla por su traspuesta da una matriz de dimensión 1x1 y el producto de la traspuesta de D por D es 3x3. Calcular la dimensión de la matriz D . ¿ Tiene D inversa ?

c) Siendo $E^t = (\ 1\ \ 2\ \ 3\ )$ la traspuesta de la matriz E. Calcular el determinante de la matriz $E\cdot E^t$

d) Sean A y B dos matrices cuadradas cualesquiera de orden 2. ¿ Es cierta la igualdad siguiente: $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

Sol: a) B tiene 4 filas y 2 columnas. $A\cdot B\cdot C$ es de dimensión 3 x 3 .

b) D es de dimensión 1 x 3. Como no es cuadrada no tiene inversa.

c) Cero.

d) No.(No se cumple la propiedad conmutativa en el producto de matrices).

7.-Decir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones y poner un ejemplo o contraejemplo:

a) Un sistema de ecuaciones lineales con más ecuaciones que incógnitas, puede ser incompatible.
b) Si a un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas que es compatible indeterminado, le añadimos una nueva ecuación el nuevo sistema será siempre compatible determinado.

Sol: a) Verdad, b) Falso

8.- Escribe un sistema homogéneo de tres ecuaciones que tenga como solución:

x = 1 , y = 2 , z = -1

Sol: Hay infinitas soluciones, por ejemplo $\begin{cases} x+y+3z=0 \\ 2x-y=0 \\ y+2z=0 \end{cases}$

9.- Sean A una matriz de dimensión 5x4, B una matriz de dimensión mxn y C de dimensión 3x7. Si se sabe que se puede obtener la matriz producto ABC, ¿cuál es la dimensión de la matriz B? ¿Y la de la matriz ABC?

Sol: B dimensión 4x3 y ABC dimensión 5x7

10.- Si tenemos un sistema compatible indeterminado de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. ¿Se puede conseguir un sistema incompatible añadiendo una tercera ecuación?

Sol: sí

11.- Sean A, B y C matrices cuadradas de orden n. Si AB = AC ¿se puede concluir que B = C ?

Sol: si A tiene inversa sí, en general NO

12.- Dado el sistema $\left.\begin{array}{r} 3x-2y+z=5 \\ 2x-3y+z=4 \end{array}\right\}$

a) Añadir una ecuación lineal al sistema dado, de modo que el sistema resultante sea incompatible.

b) Añadir una ecuación lineal al sistema dado, de modo que el sistema resultante sea compatible e indeterminado. Resolver el sistema así formado

Sol: a) hay infinitas, por ejemplo 2x - 3y = 7 b) $\left(\frac{7-z}{5}, \frac{z-2}{5}, z\right)$ *con z Î Â*

13.- El siguiente sistema de ecuaciones lineales es compatible determinado $S \equiv \begin{cases} x+2y+z=0 \\ x+y-z=4 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$

a) Si se elimina en el sistema S una de las ecuaciones ¿cómo es el sistema que resulta?

b) ¿Qué ecuación debe quitarse a S para que x = 0, y = 0, z = 0 sea una solución del nuevo sistema.

c) Si se añade una ecuación a S, el sistema resultante ¿puede ser....

i) ...compatible determinado?

ii)....compatible indeterminado?

iii) ...incompatible?

Justificar las respuestas y poner un ejemplo si es posible.

Sol: a) compatible indeterminado b) x+ y - z = 4
c) compatible determinado o incompatible

14.- Sean S y S' dos sistemas de ecuaciones lineales de 3 ecuaciones y 3 incógnitas, con la misma matriz de coeficientes.

a) Justifica con un ejemplo que uno de los sistemas puede ser compatible y otro incompatible.

b) Si ambos son compatibles, ¿puede uno ser determinado y otro indeterminado?

Sol: b) No

D. Programación lineal

1.- Maximiza y minimiza la función $p = x + 2y - 3$ con las siguientes

$$\text{restricciones:} \left.\begin{array}{l} 2x - 3y \geq 0 \\ 5y \leq 9 \\ 3x \leq 2 \end{array}\right\}$$

Sol: Máximo (2/3,4/9) y no existe mínimo

2.- En la región determinada por $x + y \geq 2$, $x \leq y$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ halla el punto en el que la función $f(x, y) = 3x + 4y$ alcanza su valor mínimo. ¿Puede alcanzar su máximo en esa región?

Sol: Mínimo (1 , 1). No hay máximo

3.- Una persona tiene 500.000 ptas. para invertir en dos tipos de acciones A y B. El tipo A tiene bastante riesgo con un interés anual del 10 % y el tipo B es bastante seguro con un interés anual del 7 %. Decide invertir como máximo 300.000 ptas. en A y como mínimo 100.000 ptas. en B, e invertir en A por lo menos tanto como en B. ¿Cómo deberá invertir su dinero para maximizar sus intereses anuales? ¿A cuánto ascenderán éstos?

Sol: El máximo lo obtendrá invirtiendo 300.000 ptas. en acciones tipo A y 200.000 ptas. en acciones tipo B. Ascenderá a 44.000 ptas.

4.- Una fábrica textil elabora prendas de punto de calidades A y B. Las de calidad A se fabrican con 1 unidad de lana y 2 unidades de fibra sintética y las de calidad B con 2 unidades de lana y 1 de fibra sintética. Los beneficios obtenidos en la venta de las prendas son de 1500 ptas. para las de calidad A y 1000 ptas. para las de calidad B. Sabiendo que sólo se dispone de 180 unidades de lana y 240 de fibra sintética, se pide:

a) Determinar cuántas prendas de cada tipo deben elaborarse para obtener un beneficio máximo si la producción no puede ser superior a 1000 prendas.
b) ¿A cuánto ascenderá dicho beneficio?. Justificar las respuestas.

Sol: Se deben elaborar 100 prendas de calidad A y 40 de calidad B. Los beneficios serán 190.000 pesetas.

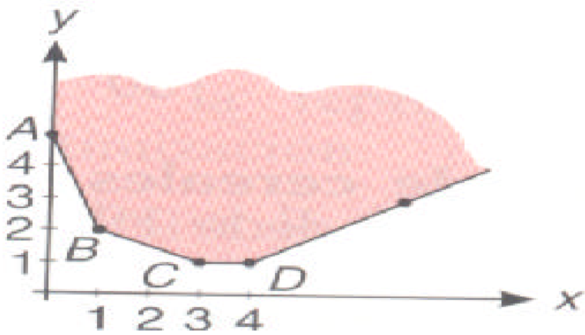
5.- Un joyero produce dos modelos de pulseras: el modelo MODERN y el modelo CLASSIC. En su producción se utilizan tres tipos de máquinas, P, Q y R. El siguiente cuadro especifica cuánto tiempo (en horas) necesita cada una de las máquinas para fabricar cada uno de los modelos:

	P	Q	R
MODERN	2	3	1
CLASSIC	4	1	5

Cada máquina puede trabajar un máximo de 60 horas semanales. Si sabemos que por cada una de las pulseras del modelo MODERN obtiene un beneficio de 10000 ptas. y por cada una de las del modelo CLASSIC un beneficio de 12000 ptas. ¿cuántas ha de fabricar de cada modelo para maximizar su beneficio?

Sol: 18 modern y 6 classic.

6.- Dadas las funciones $f(x , y) = 2x + 7y$ $g(x , y) = 2x - y$ $h(x , y) = y - x$ $i(x , y) = x - 4y$ $j(x , y) = x + 2y$
¿en qué puntos se dan el máximo y mínimo, si existen, de cada una de esas funciones en la región factible de la figura?



Sol: a) mínimo en C b) ni máximo ni mínimo c) ni máximo ni mínimo d) máximo en D e) todos los puntos del segmento BC son mínimos

7.- Un orfebre fabrica dos tipos de joyas. La joya del primer tipo se hace con 1 g de oro y 1,5 g de plata y se vende a 4000 ptas. La del segundo tipo se vende a 5000 ptas. Y lleva 1,5 g de oro y 1 g de plata.
Si sólo dispone de 750 g de cada metal ¿cuántas joyas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

Sol: 300 de cada tipo.

8.- Una ganadería desea proporcionar a su ganado una dieta que contenga un mínimo de 24 unidades del pienso A y un mínimo de 25 unidades del pienso B. En el mercado se comercializan dos tipos de compuestos: C1 y C2, elaborados con ambos piensos. El paquete de C1 contiene 1 unidad de A y 5 de B, siendo su precio de 100 ptas., y el de C2 contiene 4 unidades de A y 1 de B, siendo su precio 300 ptas.
¿ Qué cantidades de C1 y de C2 deberá emplear la ganadería para preparar su dieta con el mínimo coste?

Sol: 4 paquetes de C1 y 5 de C2

9 .- Una empresa fabrica dos tipos de componentes para ordenador A y B que vende a 3'2 euros y 1'8 euros respectivamente. El coste de fabricación es de 2 euros la componente A y 1 euro la B. La empresa dispone de 3.000 euros para la producción diaria de ambas componentes, y puede almacenar, como mucho, 2.000 componentes. Halla el número de componentes de cada tipo que deberá producir al día para obtener el máximo beneficio.

Sol: 1.000 componentes de cada clase

10.- Un comerciante dispone de 500 jamones, 400 botellas de vino y 225 bolas de queso con los que quiere preparar dos tipos de lotes.
El lote A consta de un jamón y 2 botellas de vino; el lote B consta de 2 jamones, una botella de vino y una bola de queso. Por cada lote tipo A obtiene un beneficio de 2000 ptas. y 3000 ptas. por cada uno tipo B.
¿Cuántos lotes de cada tipo debe preparar para maximizar sus ganancias? . ¿Cuál es el beneficio máximo?.

Sol: 100 lotes tipo A y 200 lotes tipo B
Beneficio máximo 800.000 ptas.

11.- Una empresa de aviación comercial tiene que atender una línea que presenta una demande de 800 plazas diarias para un determinado trayecto. Para atenderla tiene 8 aviones de 80 plazas y 7 aviones de 100 plazas. Además dispone de 9 tripulaciones. El coste por avión pequeño es de 600.000 ptas. y por avión grande de 800.000 ptas. Calcula cuántos aviones grandes y cuántos pequeños debe disponer diariamente para que el coste sea mínimo.

Sol: 5 aviones de 80 plazas y 4 aviones de 100 plazas

12.- Determina el máximo y el mínimo valor de la función f (x,y) = 5x + 2y sujeta a las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} x - y \geq 0 \\ x + 2y \leq 12 \\ x \leq 4y \\ x \geq 3 \\ y \geq 2 \end{array}\right\}$$

Sol: mínimo valor de 19 en x = 3 y = 2
máximo valor de 44 en x = 8 y = 2

13.- Un atleta debe tener al día al menos doce vitaminas del tipo A, cuatro del B y ocho del tipo C. Para ello dispone de dos tipos de comprimidos C1 y C2, cada uno de los cuales contiene las siguientes unidades de estas vitaminas:

	A	B	C
C1	3	2	4
C2	4	1	3

Si cada comprimido C1 cuesta 10pts. y cada comprimido C2 5pts., ¿cuántos comprimidos de cada clase debe tomar al día para obtener las vitaminas indicadas al mínimo coste?

Sol: segmento de recta 2x + y = 4 comprendido entre x=0 y x= 4/5

14.- Una fábrica de juguetes produce dos tipos de coches teledirigidos. A y B. Por razones comerciales, las unidades producidas de A y B están limitadas, respectivamente, a 200 y 300.
La empresa dispone de 1800 horas de trabajo para fabricar los juguetes y conoce que la producción de cada unidad de A precisa de 3 horas de trabajo y reporta unos beneficios de 1500pts., mientras que cada unidad de tipo B consume 6 horas de trabajo y supone un beneficio de 2300pts.
Determinar, justificando la respuesta, los niveles óptimos de producción de A y B de manera que el beneficio global sea máximo.

Sol: 200 unidades de cada tipo

15.- Se considera la región del plano determinada por las inecuaciones:

$$x+3 \geq y \;\; ; \;\; 8 \geq x+y \;\; ; \;\; y \geq x-3 \;\; ; \;\; x \geq 0 \;\; ; \;\; y \geq 0$$

a) Dibujar la región que definen y calcular sus vértices.

b) Hallar el punto de esta región en el que la función F(x,y) = 6x + 4y alcanza el valor máximo y calcular dicho valor.

Sol. a) (3 ,0) , (5'5 , 2'5) , (2'5 , 5'5) , (0 , 3) , (0 , 0)
b) máximo valor de 43 en el vértice (5'5 , 2'5)

16.- Una fábrica de carrocerías de coches y camiones tiene dos naves. En la nave A, para fabricar la carrocería de un camión se invierten 7 días/operario y para fabricar la de un coche 2 días/operario. En la nave B se invierte 3 días/operario tanto en carrocerías de camiones como de coches. Por limitaciones de mano de obra y maquinaria, la nave A dispone de 300 días/operario, y la B de 270 días/operario. Si los beneficios que se obtienen por cada camión son de 6 millones de pesetas y por cada coche de 2 millones de pesetas. ¿Cuántas unidades de cada uno se deben producir para maximizar las ganancias?

Sol: 66 automóviles y 24 camiones

17.- Un hipermercado necesita como mínimo 16 cajas de langostinos, 5 cajas de nécoras y 20 de percebes. Dos mayoristas, A y B, se ofrecen al hipermercado para satisfacer sus necesidades, pero sólo venden dicho marisco en contenedores completos. El mayorista A envía en cada contenedor 8 cajas de langostinos, 1 de nécoras y 2 de percebes, y el B envía 2, 1 y 7 cajas respectivamente. Cada contenedor que suministra A cuesta 210000 ptas. Y cada uno de los que suministra B 300000 ptas. ¿Cuántos contenedores debe pedir el hipermercado a cada mayorista para satisfacer sus necesidades mínimas con el menor coste?

Sol: 3 contenedores al A y 2 al B
Coste mínimo de 1.230.000 ptas.

18.- Una empresa de productos químicos elabora dos productos A y B. El producto A lleva un 10% de fósforo, un 20% de potasio y el resto de agua. El producto B lleva un 30% de fósforo, un 10% de potasio y el resto de agua. Disponen de 1800 kg. de fósforo y de 1600 kg. de potasio. Por otra parte la empresa no debe fabricar una cantidad del producto B que sea más del doble de la cantidad que fabrique del A. La empresa vende el producto A a 75 ptas/kg. y el producto B a 150 ptas/kg. ¿Cuántos Kg de cada producto ha de fabricar para que el importe de la venta sea máximo?

Sol: 6.000 del tipo A y 4.000 del B

19.- Un pastelero tiene 150 kg. de harina, 22 kg. de azúcar y 27,5 kg. de mantequilla para hacer dos tipos de pasteles P_1 y P_2 . Para hacer una docena de pasteles de tipo P_1 necesita 3 kg. de harina, 1 kg. de azúcar y 1 kg. de mantequilla y para hacer una docena del tipo P_2 necesita 6 kg. de harina, 0,5 kg. de azúcar y 1 kg. de mantequilla. El beneficio que obtiene por una docena de tipo P_1 es 20 y por una docena de tipo P_2 es 30. Halla el número de docenas que tiene que hacer de cada clase para que el beneficio sea máximo.

Sol: 5 docenas del tipo P_1 y 22 docenas y media del tipo P_2.

20.- Minimizar y maximizar la función f (x , y) = x + y en la región determinada por las

inecuaciones siguientes $\begin{cases} x + 2y \geq 80 \\ 3x + 2y \geq 160 \\ 5x + 2y \geq 200 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{cases}$

Sol: Mínimo (40 , 20) y no hay máximo.

21.- Un almacén de confección que dispone de 70 camisetas, 120 camisas y 110 pantalones, hace liquidación de existencias. Quiere ponerlo a la venta en dos tipos de lotes: el lote A, formado por 2 camisas, 1 pantalón y 1 camiseta se venderá a 600 ptas. ; el lote B, formado por 1 camisa, 2 pantalones y 1 camiseta, se venderá a 700 ptas. Calcula cuántos lotes conviene que hagan de cada clase para obtener el máximo de ganancias y cuanto dinero ingresarán.

sol: x = 30 y = 40 El dinero que se ingresa es 46.000 ptas.

22.- En una fábrica se construyen sillas grandes y pequeñas. Las sillas grandes necesitan $4m^2$ de madera y las pequeñas 3 m^2. El fabricante necesita construir al menos tres sillas grandes y al menos el doble de pequeñas que de grandes. Se dispone de 60 m^2 de madera y los beneficios son de 200 ptas. y 300 ptas. por silla pequeña y grande respectivamente. ¿ Cuántas sillas de cada tipo se deben fabricar para obtener el beneficio máximo?.

Sol: Deben fabricarse 6 sillas grandes y 12 pequeñas
Beneficio máximo 4200 ptas.

23.- Una ganadería desea proporcionar a su ganado una dieta que contenga un mínimo de 24 unidades del pienso A y un mínimo de 24 unidades del pienso B. En el mercado se comercializan dos tipos de compuesto: C1 y C2, elaborados con ambos piensos. El paquete de C1 contiene 1 unidad de A y 5 de B, siendo su precio 100 ptas., y el de C2 contiene 4 unidades de A y 1 de B, siendo su precio 300 ptas. ¿ Qué cantidades de C1 y C2 deberá emplear la ganadería para preparar su dieta con el mínimo coste?

Sol: Deben fabricarse 4 paquetes de C1 y 5 de C2
El coste mínimo es 1900 ptas.

24.- Se quiere elaborar una dieta diaria para ganado que satisfaga unas condiciones mínimas de contenidos vitamínicos al día: 2 mg de vitamina A , 3 mg de vitamina B , 30 de la C y 2 de la D. Para ello se van a mezclar piensos de dos tipos , P y Q , cuyo precio por kg. para ambos es de 30 ptas. y cuyo contenido vitamínico por kg. es el siguiente:

	A	B	C	D
P	1 mg	1 mg	20 mg	2 mg
Q	1 mg	3 mg	7,5 mg	0 mg

¿ Cómo deben mezclarse los piensos para que el gasto sea mínimo? ¿ Cuál es este gasto mínimo?

Sol: El mínimo gasto lo dan todos los puntos del segmento que une
$$\left(\frac{6}{5} , \frac{4}{5}\right) \text{ con } \left(\frac{3}{2} , \frac{1}{2}\right)$$
Ese gasto mínimo es de 60 ptas.

25.- Un comerciante desea comprar dos tipos de frigoríficos, F1 y F2. Los del tipo F1 cuestan 30.000 ptas. y los del tipo F2 cuestan 50.000 ptas. Sólo dispone sitio para 20 frigoríficos y de 700.000 ptas. para hacer las compras. ¿ Cuántos frigoríficos ha de comprar de cada tipo para obtener beneficios máximos con su venta posterior, sabiendo que en cada frigorífico gana el 30% del precio de compra?.

Sol.: Todos los puntos del segmento (0,14) al (15,5) de coordenadas enteras.
Es decir: ***0*** *del tipo F1 y* ***14*** *del tipo F2* ***10*** *del tipo F1 y* ***8*** *del tipo F2*
5 *del tipo F1 y* ***11*** *del tipo F2* ***15*** *del tipo F1 y* ***5*** *del tipo F2*