A. Límites y continuidad

1.- Algunos expertos estimaron a comienzos de los años 90 que el sida crecía a razón del 20% anual. Si suponemos que en esa fecha, en una determinada ciudad, había 1000 enfermos de sida y la fórmula de crecimiento viene dada por $E(t)=1000(1+0{,}20)^{t}$, se pide:

a) ¿Cuántos enfermos habría a comienzos de 1993?
b) ¿Cuántos habrá a principios del 2000?
c) ¿Cuánto tardará en duplicarse el número de afectados?

Sol: a) 1728 b) 6192 c) aproximadamente 3'8 años

2.- Una empresa de montajes en cadena, ha determinado que el número de montajes realizados por un trabajador sin experiencia depende de los días de entrenamiento, de acuerdo con la función $M(t) = \dfrac{30t}{t+4}$ donde t es el tiempo en días.

a) ¿Cuántos montajes realizará el primer día? ¿Y el décimo?
b) ¿Qué ocurriría con el número de montajes, si nunca acabara el entrenamiento?
c) Dibuja la función.

Sol: a) 6; aproximadamente 21 b) como mucho 30 montajes.

3.- Las pérdidas o ganancias de una empresa,en cientos de millones de ptas, siguen una ley $y = \dfrac{2x-4}{x+2}$ siendo x los años de vida de la empresa.

a) Determina el año en que la empresa deja de tener pérdidas
b) ¿Están sus beneficios limitados? Si lo están, ¿cuál es su límite?

Sol: a) a los 2 años b) están limitados por 200 millones de ptas.

4.- Calcula los siguientes límites: a) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}}$ d) $\lim\limits_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x-3}\right)^{3x}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+3}{2x+5}\right)^{x}$

NOTA: Puedes ayudarte con calculadora.

Sol : a) 0 b) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$ *c) + ∞ d) 0 e)* e^{3} *f) 0.*

5.- Calcula los límites siguientes: a) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x}$ b) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{1+x}\right)$ c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{1+x}\right)$

Sol: a) e^3 b) -¥ c) 0

6.- Calcula el valor de los siguientes límites. Caso de no existir , explica por qué:

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+1}{1-x^2}\right)^{x}$ b) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{x^3}$ c) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3+1}{4x^3-2}\right)^{x^2-1}$ d) $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}$

Sol: a) No existe b) e c) 0 d) No existe.

7.- Realiza, con todos los pasos, los límites:

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{x}$ b) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2x}{x^2-1}\right)$ c) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x^2}{1+x^2}\right)^{x^2+7}$

Sol: a) e^2 b) $-\frac{1}{2}$ c) e^2

8.- Dada la función f(x)= $\begin{cases} x^2-1 & si \quad x<2 \\ 2x-3 & si \quad 2\le x<4 \\ 5 & si \quad x\ge 4 \end{cases}$

Dibuja la función y estudia su continuidad.

Sol: en x=2 discontinuidad no evitable de salto 2

9.- Considérese la función definida por $f(x)=\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$. Hallar los puntos de discontinuidad y clasificarlos.

Sol: x = 3 disc evitable y x = 2 disc. inevitable de salto infinito

10.-Dibuja y estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & si \quad x \le 0 \\ x^2 - 3x - 1 & si \quad 0 < x < 3 \\ \dfrac{2}{x-5} & si \quad x > 3 \end{cases}$$

Si la función es discontinua para algún valor de x, indica qué tipo de discontinuidad presenta y cómo se evitaría.

Sol: En x=3 no está definida la función y hay una discontinuidad evitable y en x=5 hay una discontinuidad inevitable.

11.- Sea f(x)=$\dfrac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^2 - 4x}$. Halla los puntos de discontinuidad, clasifícalos, halla las asíntotas y su posición respecto de la función.

Sol: Puntos de discontinuidad: x=0, x=4 ; en x=0 discont evitable; en x=4 discont no evitable asintótica (de salto ∞) ; asíntota vertical x=4 ; posición: a la derecha $+\infty$ y a la izquierda $-\infty$; asíntota oblicua y=x; posición: cuando x tiende a $+\infty$ la curva encima de la asíntota; cuando x tiende a $-\infty$, la curva debajo de la asíntota.

12.-a) Calcula las ecuaciones de las asíntotas de la función: f(x) = $\dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

b) Con las asíntotas y algún punto auxiliar dibuja aproximadamente su gráfica.

Sol: AV: x = -1 , x = 1 AH: y = 1

13.- Calcula los siguientes límites e interpreta gráficamente el resultado:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 4}{x - 2}$ b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$

Sol: a) No existe, los límites laterales son distintos; en x=2 hay una asíntota vertical
b) El límite es 4. En x=3 hay una discontinuidad evitable.

B. Derivadas y aplicaciones

1.-Aplicando la definición de derivada, halla la de la función: $f(x) = \frac{3}{x}$.

Sol: $f'(x) = \frac{-3}{x^2}$

2.-Dada la parábola $y = x^2 - 2x - 2$, se traza la cuerda que une los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = 3$. Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola, paralela a esta cuerda.

Sol: $y = 2x - 6$

3.- Dada la función $f(x) = \frac{2x}{1 - x^2}$

a) Hallar sus asíntotas verticales y horizontales.
b) Hallar la ecuación de la recta tangente en x = 2

Sol: a) $x = 1$, $x = -1$, $y = 0$ b) $y = \frac{10}{9}x - \frac{32}{9}$

4.- Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \ln \frac{2x^2}{x+1}$ en el punto de abscisa x =1.

Sol: $y = \frac{3}{2}(x - 1)$

5.- Calcular la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$ en x = 2

Sol: $y - 2 = -3(x - 2)$

6.- Sea la función f(x)=$\frac{(x-2)^2}{x-3}$ halla las asíntotas de la función y calcula la ecuación de la recta tangente en x=2.

Sol: Asíntotas $x = 3$; $y = x-1$ Ec. De la recta tangente: $y = 0$

7.- Derivar las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{3(2x - 7)^5}{5}$

b) $f(x) = 2 \ln \left(\dfrac{4x - 1}{x} \right)$

c) $f(x) = (1 - 5x) \cdot e^{3x}$

d) $f(x) = \sqrt{1 - x} \cdot \text{sen } x$

e) $f(x) = \dfrac{3x^2}{(2x - 3)^3}$

Sol: *a)* $y' = 6(2x - 7)^4$ *b)* $y' = \dfrac{2}{x(4x - 1)}$ *c)* $y' = -e^{3x}(15x + 2)$

d) $y' = \sqrt{1 - x} \cdot \cos x - \dfrac{\text{sen } x}{2\sqrt{1 - x}}$ *e)* $y' = -\dfrac{6x(x + 3)}{(2x - 3)^4}$

8.- Halla la derivada tercera de la función $y = \dfrac{2x + 1}{2x}$

Sol: $y''' = \dfrac{-3}{x^4}$

9.- Calcula las derivadas de las funciones:

a) $y = \text{sen}^2 5x$ en el punto $x = \dfrac{p}{4}$

b) $y = \sqrt{e^{\text{tg}\, x}}$ en el punto $x = p$

Sol: *a)* $y' = 5$ *b)* $y' = \dfrac{1}{2}$

10.- Calcula las siguientes derivadas:

a) $y = \text{sen}^3 (2x+1)^2$ b) $y = \ln \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$ c) $y = \dfrac{xe^x}{2^x}$

Sol: *a)* $12\,(2x+1)\, \text{sen}^2 (2x+1)^2 \cos (2x+1)^2$ *b)* $\dfrac{2}{3\left(x^2 - 1\right)}$ *c)* $\left(\dfrac{e}{2}\right)^x \left(1 + x \ln \dfrac{e}{2}\right)$

11. Derivar $y = e^{-x^2}(5\cos x + \text{sen}\, 3x) + \ln(1 - x)$

Sol: $y' = -2xe^{-x^2}(5\cos x + \operatorname{sen} 3x) + e^{-x^2}(-5\operatorname{sen} x + 3\cos 3x) - \dfrac{1}{1-x}$

12.- Deriva y simplifica las siguientes funciones:

a) $y=e^{3x}\operatorname{sen}^2 x$ b) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$

Sol: a) e^{3x} *sen x (3 sen x + 2 cos x)* *b)* $\dfrac{1}{\cos x}$

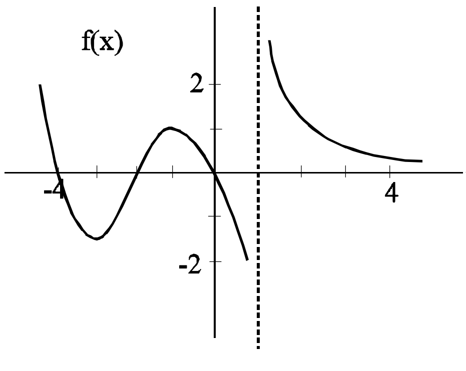
13. Calcular las derivadas: a) $y = (1-5x)\cdot\sqrt{1+2x}$ b) $y = 4\ln(x^2+1) + (\operatorname{sen} 3x)^2$

Sol: a) $y' = \dfrac{-4-15x}{\sqrt{1+2x}}$ *b)* $y' = \dfrac{8x}{x^2+1} + 6\operatorname{sen}(3x)\cos(3x)$

14. - Hallar asíntotas y máximos y mínimos y de $y = \dfrac{x^2}{x^2-9}$.

Sol: asíntotas: x = 3, x = -3, y = 1 máximo: (0,0)

15. Dada la gráfica de la función f(x) , se pide (justificando la respuesta)



a) Dominio de f(x)

b) ¿Qué puedes decir de:

¿ f´(0) , f´(-1) , f´(-2), f´´(-3), f´(1) ?

c) ¿ En algún punto *f´´(x) = 0* ?

d) Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Sol: a) Â - {1 } b) f´(0) < 0 , f´(-1) = 0 , f´(-2) >0 , f´´(-3) > 0 ,f´(1) no existe

c) Sí, aproximadamente en el (-2 , 0) d) 0 , + ¥ , no existe (1zda -¥ y derecha + ∞)

16.- Determinar los valores de **a** y **b** para que la función $f(x) = x^3 + ax + b$ tenga un mínimo en el punto (-1 , 4).

Sol: a=-3 , b=2

17.- Hallar a y b para que la función f (x) = x^3 + ax^2 +bx + 1 tenga un punto de inflexión en x = 3 y un mínimo relativo en x = 1.

Sol: a= -9 , b=15

18.- Hallar la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ en su punto de inflexión.

Sol: y = -3x+3

19.- La función f(x) = $3x^2$ + mx + 8 presenta un mínimo en x =1. Calcula m y el valor del mínimo.

Sol: m = -6; f (1)= 5

20.- La gráfica de la función $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ pasa por el punto (-1 , 0) y tiene un máximo en el punto (0 , 4). Hallar los coeficientes a , b y c.

Sol: a = -3 , b = 0 , c = 4

21.- Dada la función f (x) = a x^2 - 5x + b

a) Halla el valor de a y b sabiendo que f (0) = 6 y f ' (1) = - 3
b) ¿En qué punto la recta tangente a la gráfica de la función tiene pendiente 3 ?

Sol: a = 1 b = 6 , en el punto x = 4

22. La función $f(x) = x^3 - ax^2 + 4x + b$ corta al eje de abscisas en x = 3 y tiene un punto de inflexión en $x = \frac{2}{3}$. Hallar a y b.

Sol: a = 2 , b = -21

23.- Representa la función f(x)=$\begin{cases} x^2+1 & si\ x \geq 0 \\ x-1 & si\ x < 0 \end{cases}$

Estudia su continuidad y derivabilidad, su crecimiento, sus máximos y mínimos.

Sol: Discont y no derivable en x = 0 , siempre creciente, ni máximos ni mínimos

24.- Sea f(x)=$\begin{cases} x^2-1 & si & x<2 \\ 2x-3 & si & 2 \leq x < 4 \\ 5 & si & x \geq 4 \end{cases}$

a) Estudia su continuidad y su derivabilidad
b) Dibuja su gráfica

Sol: Discont y por tanto no derivable en x =2 , continua y no derivable en x = 4

25.- a) Escribe una función que sea discontinua evitable en el punto x = 1 y discontinua no evitable en x = -2. Represéntala gráficamente.
b) Pon un ejemplo de función que sea continua pero no derivable en el punto x = 3, y dibuja su gráfica.

26.- La función $f(x) = |\ x+1\ |$ ¿presenta un mínimo relativo en algún punto?. ¿En qué puntos es derivable? Razónalo.

Sol: Mínimo (-1,0). Derivable: R-$\{-1\}$

27.-Estudia la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & si\ x \leq 0 \\ 1-x^2 & si\ 0 < x \leq 1 \\ x & si\ x > 1 \end{cases}$$

Si la función es discontinua para algún valor de x, indica qué tipo de discontinuidad presenta y cómo se evitaría. Si en algún punto la función no fuese derivable indica la razón.

28.- Estudiar la derivabilidad de la función $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & \text{si } x<0 \\ x^2+x+1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

Sol.: x = 0 único punto en el que no es derivable

29.- Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x<1 \\ 2x+1 & \text{si } 1\leq x\leq 3 \\ 7 & \text{si } 3<x \end{cases}$$

Sol: Continua en R - {1} , derivable en R - {1,3}

30.- Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases} e^{2x} & \text{si } x\leq 0 \\ 1-x^2 & \text{si } 0<x<2 \\ -3 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

Sol: x=2 discontinuidad evitable (por lo tanto no derivable). En x = 0 continua pero no derivable. En los demás puntos continua y derivable.

31.- Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases} 9x+8 & \text{si } x\leq 1 \\ 3x^3-10 & \text{si } 1<x\leq 2 \\ 2x^2+3x & \text{si } 2<x \end{cases}$$

Sol: Continua en R - {1}. Discontinuidad inevitable de salto finito en x=1. Derivable en R-$\{1,2\}$

32- Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x+1} & si \quad x \le 0 \\ e^x & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Sol: f(x) es discontinua no evitable con salto infinito en x = -1
f(x) es discontinua no evitable con salto finito en x = 0
f(x) no es derivable en x = -1 ni en x = 0 por no ser continua.

33. - Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x+1} & si \quad x \le 1 \\ 2x^3 - 1 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

a) ¿En qué punto o puntos es discontinua?. ¿De qué tipo?
b) ¿Es derivable en x=1?. ¿Y en x = -1?. ¿Por qué?

Sol: a) Continua en x=1. Discontinua no evitable en x=-1.
b) No derivable en x=-1 por no ser continua.
No derivable en x=1 por ser $f'(1^-) \neq f'(1^+)$

34.- Dada la función: $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}} & si \quad x < 1 \\ \dfrac{x-1}{x+1} & si \quad x \ge 1 \end{cases}$

a) ¿Es continua en x=1?. ¿Por qué?.
b) ¿Es derivable en x=1?. ¿Por qué?.
c) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en x=2.

Sol: a) f(x) es continua en x = 1. b) f(x) no es derivable en x=1. c) $y - \frac{1}{3} = \frac{2}{9}(x-2)$

35.- Dada la función: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

a)Estudiar su crecimiento/decrecimiento. ¿Tiene algún máximo o mínimo relativo?. ¿En qué punto o puntos?
b)Estudiar su concavidad. ¿Tiene algún punto de inflexión?. ¿En qué punto?
c)Representarla gráficamente.

Sol: a)Creciente en (-∞,0) y en (2, +∞). Máximo (0,4). Mínimo (2,0)
b)Abierta hacia abajo en (-∞,1), abierta hacia arriba en (1,+∞).
Punto de inflexión: (1,2)

36.- Estudia y representa la función $y = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$

Sol: corta a los ejes en (0,0) , asíntota vertical x = 1, asíntota horizontal y = 1.
No tiene simetrías, mínimo en (0,0) , pto inflex en $\left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{1}{9}\right)$

37.- Estudia y representa $y = \dfrac{x^2}{x-1}$

Sol: Corta a los ejes en (0,0) asíntota vertical x = 1, asíntota oblicua y = x+1, no simetrías, máximo en (0,0) , mínimo en (2,4). Sin puntos inflexión.

38.- Estudia y representa $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 1}$

Sol: Corta al eje OX en (-2,0) y al eje OY en (0,4); asíntota y=1, máximo en ($\frac{1}{2}$,5) *y mínimo en (-2,0)*

39. Estudiar y representar gráficamente la función $f(x) = \dfrac{x^2}{4 - x^2}$

Sol: AV: x = -2 y x = 2 , AH: y = -1 , mín: (0 , 0)

40.- a) Estudiar y representar gráficamente la función $f(x) = \dfrac{x^2}{1 - x}$

b)¿ En qué puntos de la función anterior la recta tangente es paralela al eje de abscisas?. Escribir la ecuación de dicha recta tangente en los puntos obtenidos.

Sol: a) AV : x = 1 , AO: y = -x-1 , máx : (2 , -4) , mín: (0 , 0).
b) En P (2 , -4) , ec. recta tg: y = -4 y en Q (0 , 0) , ec. de recta tg: y = 0

41.- Estudiar y representar gráficamente la función $f(x) = \dfrac{2x^2}{x+1}$

Sol: máx (-2 , -8) , min (0 , 0) ; AV : x = -1 ; AO : y = 2x- 2

42.- Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{4-x}$

a) Calcula las ecuaciones de sus asíntotas y determina su posición respecto a la gráfica.

b) Estudia su crecimiento. ¿Tiene extremos relativos?. ¿Dónde?.

c) Estudia su concavidad. ¿Tiene inflexiones?. ¿Dónde?.

d) Con los datos anteriores, representa gráficamente f(x).

Sol: a) Asíntota vertical: x = 4. Asíntota horizontal: y = -1.
b) f(x) es creciente en todo su dominio.
c) Cóncava abierta hacia arriba en ($-\infty$,4); abierta hacia abajo en (4,$+\infty$).

43.- Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $y = \dfrac{2x^2}{9-x^2}$

¿Tiene máximos o mínimos esta función? Razona tu respuesta.

Sol: Mn (0,0) Creciente: (0,3) $\cup (3,\infty)$ *Decreciente:* $(-\infty,-3) \cup (-3,0)$

44.- Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{4-x}$, determinar:

a) Dominio y asíntotas.

b) Intervalos de crecimiento-decrecimiento. Extremos relativos.

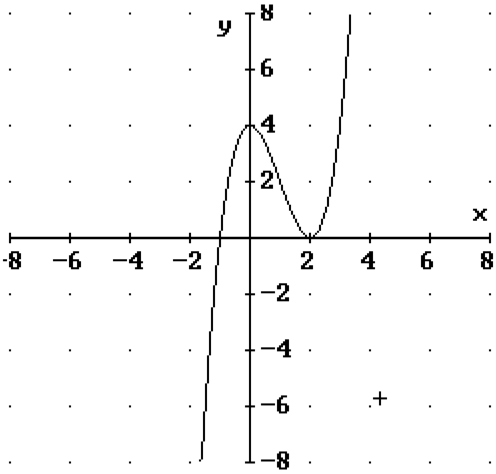
Sol: a) Dominio: R - {4} ; asíntota vertical x=4, asíntota oblicua y =-x-4
b) Crece:(0 , 4) È (4 , 8) ; decrece:(-¥ , 0) È (8 , +¥) ; máx (8 , -16) ; mín (0 , 0)

45.- Representa la función $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

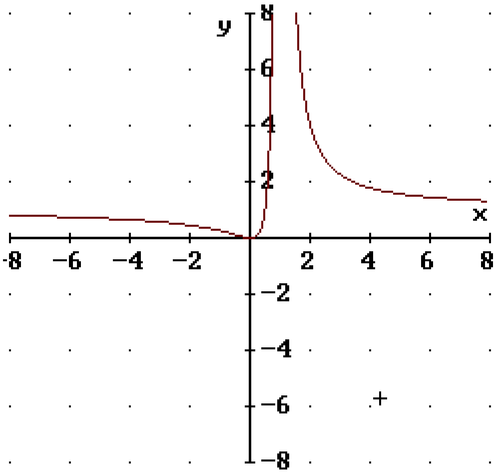
46.- Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{2x^2 - 8}$ calcula: el dominio, las asíntotas, los cortes con los ejes, los intervalos de crecimiento-decrecimiento y los extremos relativos.

Sol: Dominio R- {-2, 2} asíntotas x=2 x=-2 y = $\dfrac{1}{2}$ *cortes (0,0) y (1,0)*
Máximo (0,55 , 0,03) mínimo (7,45 , 0'466)

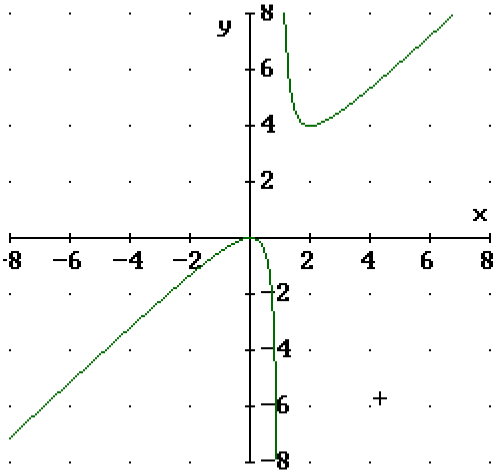
GRÁFICAS DE FUNCIONES



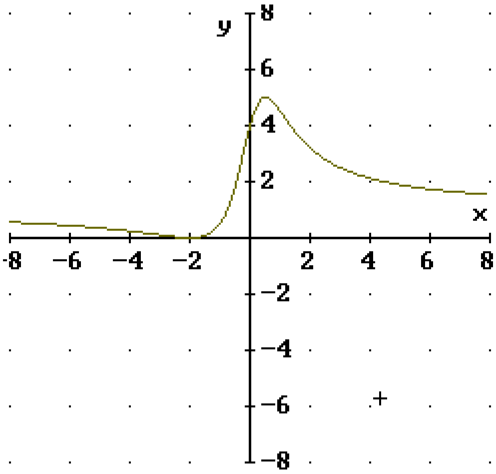
Ejercicio 35



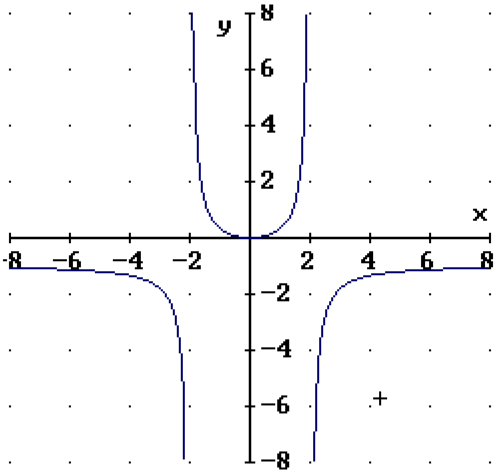
Ejercicio 36



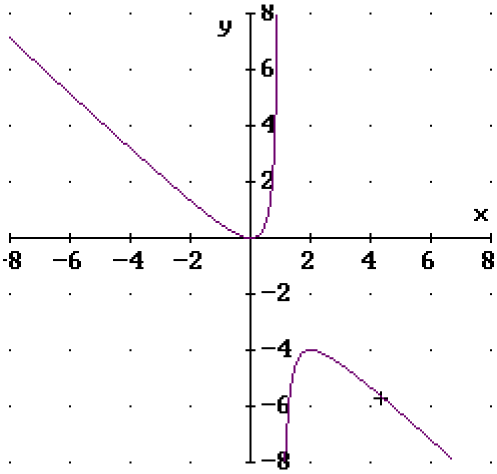
Ejercicio 37



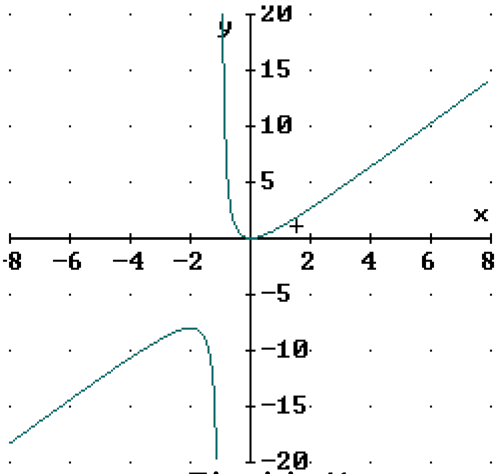
Ejercicio 38



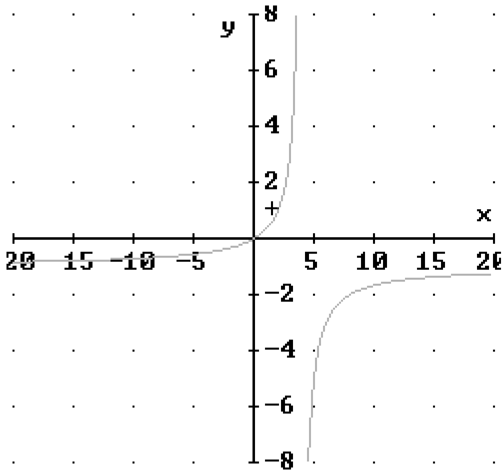
Ejercicio 39



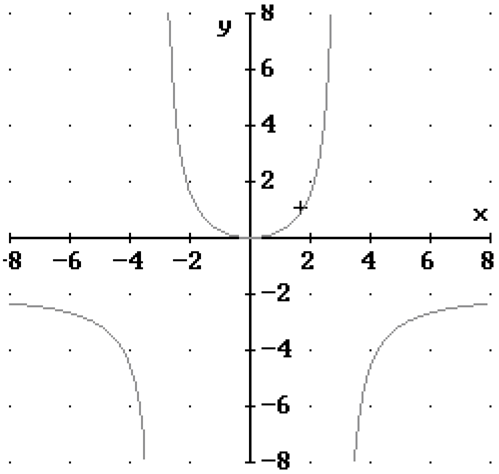
Ejercicio 40



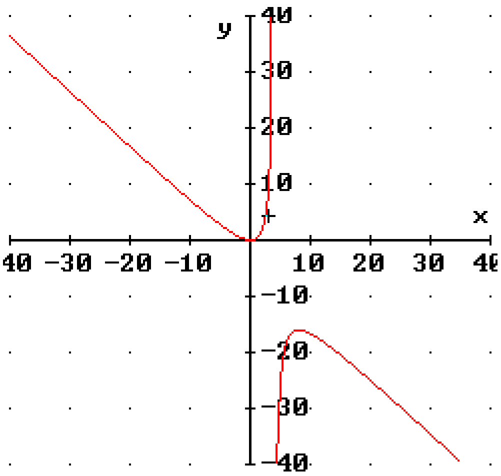
Ejercicio 41



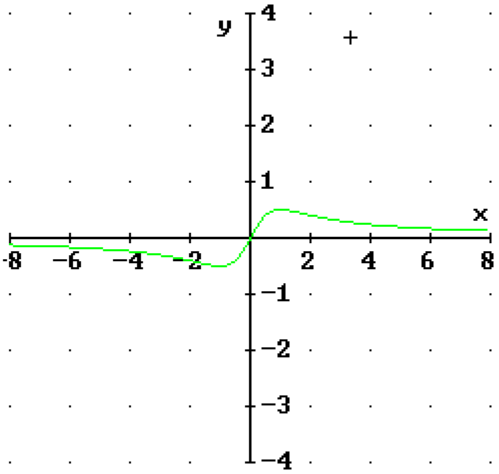
Ejercicio 42



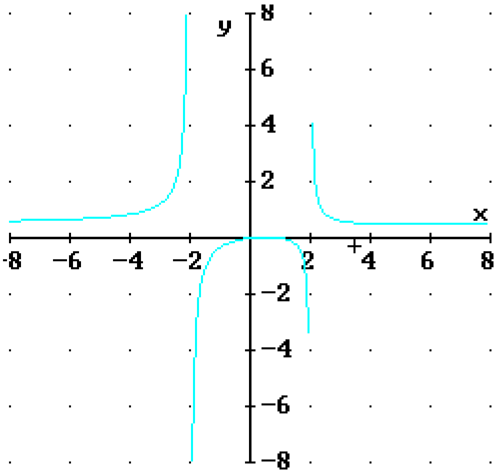
Ejercicio 43



Ejercicio 44



Ejercicio 45



Ejercicio 46

C. Cuestiones de tipo test sobre funciones

01.- La ecuación $x^2 + y^2 = 9$

- ☐ corresponde a una función de dominio R
- ☐ corresponde a una función de dominio [-3,3]
- ☐ corresponde a una función de dominio $\{x \in R / 0 \leq x \leq 3\}$
- ☐ no corresponde a una función

02.- El dominio de las funciones $f(x) = Lx$, $g(x) = e^x$

- ☐ es R para las dos
- ☐ es $[0,+\infty]$ para la 1ª y R para la 2ª
- ☐ es $[0,+\infty]$ para la 1ª y R para la 2ª
- ☐ es $[0,+\infty]$ para las dos

03.- La función $f(x) = \dfrac{x(x-2)}{(x-2)(x+3)}$

- ☐ es discontinua en x = 2 y en x = -3 y tiene límite finito en x = 2
- ☐ es discontinua en x = -3 solamente
- ☐ es continua en todo R
- ☐ es discontinua en x = 2 y en x = -3 y no tiene límite en esos puntos

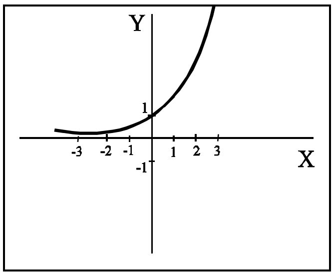
04.- El límite cuando $x \to 3$ de la función $f(x) = \dfrac{2-\sqrt{x+1}}{x-3}$

☐ vale $\dfrac{-1}{4}$ ☐ es ∞ ☐ vale $\dfrac{1}{4}$ ☐ no existe

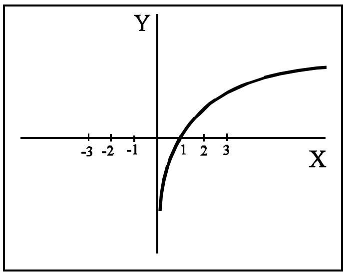
05.- ¿Qué función de las siguientes corresponde a cada gráfica?

$f_1(x) = 1 + \sqrt{x+2}$ $\qquad$ $f_2(x) = (x + 2)^2 + 1$ $\qquad$ $f_3(x) =$ sen x

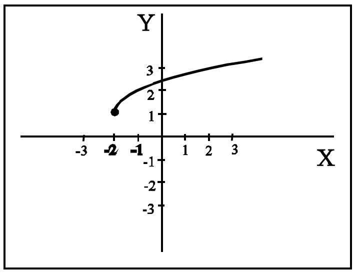
$f_4(x) = e^x$ $\qquad$ $f_5(x) = |x(x-2)|$ $\qquad$ $f_6(x) = \ln x$ $\qquad$ $f_7(x) = \dfrac{2}{x}$



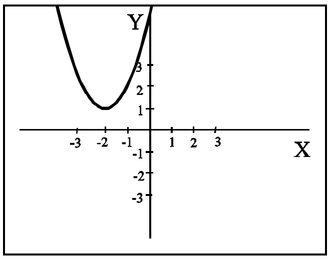
a)



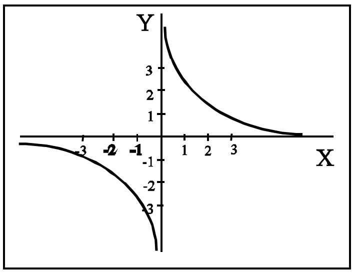
b)



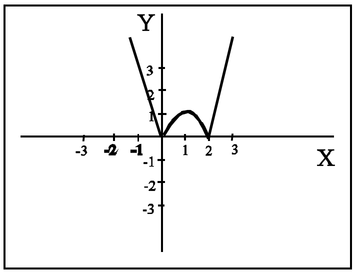
c)



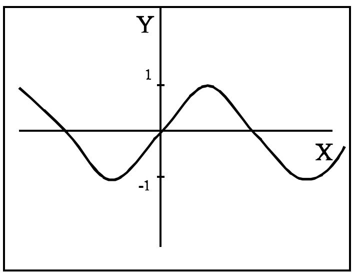
d)



e)



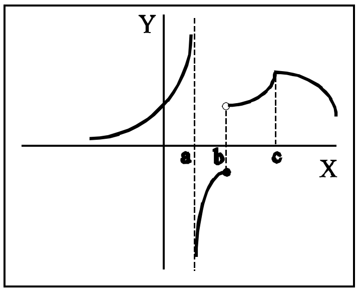
f)



g)

06.- Dibuja (en rojo) el dominio y (en azul) el recorrido de las funciones anteriores. Escribe simbólicamente el dominio y el recorrido de esas funciones.

07.- Sea f(x) una función cuya gráfica es la que aparece en la figura:



- ☐ f(x) es discontinua en a, b y c
- ☐ f(x) es discontinua en a y b, pero no en c
- ☐ f(x) es discontinua en b y en c, pero no en a
- ☐ f(x) es discontinua en b, pero no en a ni en c

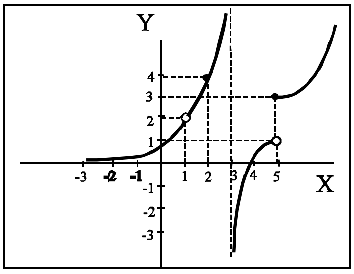
08.- Para la misma función f(x) anterior:

- ☐ f(x) no es derivable en a ni en b ni en c
- ☐ f(x) no es derivable en a ni en b pero sí en c
- ☐ f(x) no es derivable en b ni en c, pero sí en a
- ☐ f(x) no es derivable en a, pero sí lo es en b y en c

09.- Para la misma función f(x) de las dos cuestiones anteriores:

- ☐ f(x) no tiene ninguna asíntota
- ☐ f(x) sólo tiene una asíntota vertical
- ☐ f(x) sólo tiene una asíntota horizontal
- ☐ f(x) tiene una asíntota vertical y otra horizontal

10- Sea g(x) la función cuya gráfica aparece en la figura. El símbolo o representa un "agujero" en la gráfica, es decir, un punto en el que no está definida la función. Escribe el valor de los siguientes límites (finitos o infinitos) de g(x) en caso de que existan y pon una N si no existen:



a) Cuando $x \to 1^-$:	g) Cuando $x \to 3^-$:
b) Cuando $x \to 1^+$:	h) Cuando $x \to 3^+$:
c) Cuando $x \to 1$:	i) Cuando $x \to 3$:
d) Cuando $x \to 2^-$:	j) Cuando $x \to 5^-$:
e) Cuando $x \to 2^+$:	k) Cuando $x \to 5^+$:
f) Cuando $x \to 2$:	l) Cuando $x \to 5$:

11- Dí si la misma función g(x) de la pregunta anterior es continua (C), discontinua evitable (DE) o discontinua no evitable (NE) en los siguientes puntos:

en x = 1 : en x = 2 : en x = 3 : en x = 5 :

12- La función f(x) = $\left|x^2 - 9\right|$

- ☐ es continua y derivable en x = -3 y en x = 3
- ☐ es discontinua pero derivable en x = -3 y en x = 3
- ☐ no es continua ni derivable en x = -3 ni en x = 3
- ☐ es continua pero no derivable en x = -3 y en x = 3

13.- ¿En qué punto tiene la función $f(x) = x^3 - x + 2$ una tangente paralela a la recta $2x - y + 2 = 0$?

☐ en x=-1 y en x=1 ☐ en ningún punto ☐ sólo en x=1 ☐ en el punto (0,2)

SOLUCIONES A LAS CUESTIONES.

01: 4ª 02: 2ª 03: 1 04: $-\frac{1}{4}$ 05: c) e) f) a) g) b) d)

07: 2ª 08: 1ª 09: 4ª

10: a): 2 b): 2 c): 2 d): 4 e): 4 f): 4 g): $+\infty$ h): $-\infty$ i): N j): 1 k): 3 l): N

11: en x = 1: DE, en x = 2: C, en x = 3: NE, en x = 5: NE.

12: 4ª 13: 1ª

D. Problemas de máximos y mínimos

1.- La función f(x) = $\frac{1}{90}(-x^2 + 100\,x - 1600)$ representa el beneficio, expresado en millones de pesetas, que obtiene una empresa por la fabricación de x unidades de un determinado producto.

a) Representa gráficamente dicha función.
b) ¿ Cuántas unidades hay que fabricar para que no se produzcan pérdidas?
c) ¿ Cuál es el mayor beneficio posible?

Sol: b) 20 <x<80 c) 50 unidades

2.- Deseamos comprar 18 ordenadores y en el mercado hay de dos tipos. Sabemos que el beneficio que podemos obtener de su uso está dado por el producto del número de ordenadores del primer tipo que se compra por el cuadrado del número de ordenadores del otro tipo que se adquiere. Determinar el número de ordenadores de cada tipo que debemos adquirir para que el beneficio sea máximo.

Sol: 6 del primer tipo y 12 del segundo

3.- Una compañía de transportes ha comprobado que el número de viajeros diarios depende del precio del billete según la función: n(p)=3000-6p donde n(p) es el número de viajeros cuando p es el precio del billete. Obtener:

a) La función que expresa los ingresos diarios (I) de esta empresa en función del precio del billete (p).
b) El precio del billete que hace máximos dichos ingresos.
c) ¿ A cuánto ascenderán dichos ingresos máximos?

Sol: a) $I=3000p-6p^2$ b) p=250 c) 375000

4.- En su modelo para los costes de almacenamiento y transporte de materiales para un proceso de manufactura, Lancaster obtuvo la siguiente función de coste:

$$C(x) = 100\left(100 + 9x + \frac{144}{x}\right)$$

Donde C(x) es el coste total (en dólares) de almacenamiento y transporte durante tres meses de x toneladas de material. ¿Qué cantidad de materiales hace que el coste sea mínimo? ¿Cuál es el valor de dicho coste?

Sol: 4 tm de materiales y 17200 $.

5.- Un club deportivo cuenta con un número de socios que viene dado en miles de personas por la función : s(x) = $2x^3 - 15x^2 + 24x + 26$ donde x indica el número de años desde la última remodelación.

a) Hállese el año en que el club ha tenido el mayor número de socios.
b) El cuarto año se remodeló de nuevo. Estudiar si esta remodelación tuvo éxito o no.

Sol: a) 1 año después de la remodelación b) Sí tuvo éxito

6.- El propietario de un inmueble tiene alquilados 40 pisos del mismo a 30.000 ptas. al mes cada uno. Por cada mil pesetas de aumento en el precio del alquiler pierde un inquilino, que se traslada a otro piso más económico. ¿Cuál es el alquiler que más beneficios produce al propietario?

Sol: 35.000 pesetas

7.- Se sabe que el rendimiento, r en % de un estudiante que realiza un examen de una hora viene dado por $r(t) = 300t(1-t)$ siendo $0 \leq t \leq 1$, t en horas. Explica cuándo aumenta y cuándo disminuye el rendimiento. ¿Cuándo se anula?. ¿Cuándo es máximo?.

Sol: Aumenta de 0 a 1/2 , disminuye de 1/2 a 1. Se anula en 0 y 1. Es máximo en 1/2.

8.- Un banco lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad R(x) en miles de pesetas, viene dada en función de la cantidad que se invierte x, en miles de pesetas, por la siguiente expresión: $R(x) = -0.001x^2 + 0.4x + 3.5$

a) Deduce y razona qué cantidad de dinero convendrá invertir en ese plan.
b) ¿Qué rentabilidad se obtendrá?

Sol: a) 200.000 ptas. b) 43.500 ptas.

9.- Un estudio acerca de la presencia de gases contaminantes en la atmósfera de una gran ciudad en los últimos años, indica que la concentración de estos viene dada por la función:

C(x)= $-0.2x^2 + 5x + 30$ (x en años a partir del 1-1-1990)

a) Halla la tasa media de variación entre enero de 1991 y enero de 1995.
b) Según su estudio, ¿en qué año se alcanzará un máximo en el nivel de contaminación?
c) ¿En el año 1997 era creciente C(x)?
d) Halla la pendiente de la recta tangente a esta función en x = 8. Interpreta el resultado obtenido.

Sol: a) 3.8 b) A mediados del 2002 c) Sí d) 1.8. La concentración de gases contaminantes era creciente en 1998

10.- Una empresa ha realizado un estudio acerca de los costes de producción, llegando a la conclusión de que producir x unidades de un objeto dado tiene un coste expresado por

$$f(x)= 0.25x^2 - 25x + 25$$

La venta de x unidades de ese producto proporciona unos ingresos dados por la expresión:

$i(x)= (30 + 0.125x)x$, siendo x el nº de unidades producidas.

Se pide:

a) Hallar el número de unidades que se deben producir para que los costes sean mínimos.
b) Hallar la expresión de los beneficios obtenidos en función de x, suponiendo que se venden las x unidades producidas.
c) Hallar el número de unidades que se deben producir y vender para obtener el máximo beneficio.

Sol: a) 50 unidades b) $B(x)= - 0.125x^2 +55x-25$ c)220 unidades

11.- Un fabricante estima que si se usan x máquinas el coste del proceso de producción será: $C(x) = 20x+2000/x$ euros. Esboza la porción relevante de esta función de coste y estima cuántas máquinas deberá usar el fabricante para minimizar el coste.

Sol: Deberá usar 10 máquinas para minimizar el coste.

12.- Al comercializar cierto producto, una empresa ha descubierto que el precio de venta por unidad viene dado por:

$P(x) = 50/x^{1/2}$ (siendo x en nº de unidades vendidas)

Si el coste de producción de x unidades es $C(x) = 0'5x + 500$ euros, calcula el precio unitario que proporciona el máximo beneficio.

Sol: x = 2500 unidades. Precio unitario 1 euro.

13.- Un fabricante puede producir juguetes (no bélicos) a un coste de 20 euros cada uno. Se estima que si los juguetes se venden a x euros cada uno, los usuarios comprarán (120-x) de ellos al mes. Expresa el beneficio mensual del fabricante como una función del precio, dibuja esta función y utiliza el gráfico para estimar el precio óptimo de venta.

Sol: 70 euros.

14.- La demanda de consumo para un cierto artículo es D(p) = -200p+12000 unidades por mes cuando el precio de mercado es de p dólares por unidad.

a) Dibuja esta función de demanda.
b) Expresa el gasto total mensual de los consumidores como una función de p.
c) Dibuja la función de gasto total mensual.
d) Discute el significado económico de la p-intersección de la función de gasto.
e) Usa el gráfico de la parte c) para estimar el precio de mercado que genera el mayor gasto de consumo.

Sol: El mayor gasto de consumo lo genera un precio de 30 $ la unidad.

15.- Un vendedor de bolígrafos ha observado que si los vende a 10 céntimos de euro es capaz de vender 1000 unidades diarias, pero por cada unidad monetaria de aumento en el precio, disminuye en 100 unidades la venta diaria de bolígrafos. Por otra parte, a él le cuesta fabricar un bolígrafo 5 u.m. Averigua el precio de venta para que se maximice el beneficio.

Sol: 12'5 céntimos de euro.

16.- Un granjero tiene un cerdo de 150 kg., cuya alimentación le supone un gasto de 36u.m./día. El cerdo engorda 3 kg/día. En este momento podría venderlo a 120u.m./kg, pero está bajando el precio a razón de 2u.m. por día y kilogramo. ¿Cuánto tiempo deberá esperar el granjero para vender el cerdo, con objeto de obtener el máximo beneficio? Comprueba la solución.

Sol: deberá esperar 2 días.

17.- Una compañía de autobuses alquila uno de 50 plazas a grupos de 35 o más personas. Si un grupo contiene exactamente 35 personas, cada persona paga 60 dólares. En grupos mayores, la tarifa de todos se reduce en un dólar por cada persona que sobrepase de las 35. Determina el tamaño del grupo para el cual los ingresos de la compañía serán mayores. ¿Cuáles son dichos ingresos?.

Sol: 47 ó 48 personas. Ingresos 2256 $

18.- Una huerta tiene actualmente 25 árboles que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. Calcular:

a) La producción actual de la huerta.
b) La producción que se obtendría de cada árbol si se plantan **x** árboles más.
c) La producción que se obtendría en total de la huerta si se plantan **x** árboles más.
d) ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima?. Interpretar el resultado.

Sol: a) 15000 b) 600 - 15x c) P (x) = (25 + x) · (600 - 15x)
d) Solución matemática: nº de árboles 32 ó 33 produciendo 15840 frutos
Solución real 32 árboles, ya que ocasionan menos gastos y menos trabajo.

19.- Cierta empresa vende bombillas a 70 ptas./unidad. A este precio una cadena de supermercados le compra 6.000 bombillas cada mes. El fabricante desea elevar el precio de la bombilla y estima que por cada peseta de aumento en el precio, su cliente comprara 80 unidades menos cada mes. Sabiendo que el precio de coste de una bombilla es de 30 ptas. ¿A qué precio debe venderlas el fabricante para ganar el mayor beneficio posible?.

Sol: 87,5 ptas.

20.- A un vendedor de ordenadores le cuesta 140.000 ptas. cada modelo PCHE-COMPR. Ha comprobado que, al precio de 240.000 ptas./unidad, vende 30 ordenadores mensualmente y que, por cada 2.000 ptas. de descuento en el precio puede vender 3 unidades más al mes. Calcular a qué precio debe venderlos para obtener el máximo beneficio posible?. ¿Cuál es el beneficio?.

Sol: precio 200.000 ptas. con beneficio de 5.400.000 ptas.

21.- Los ingresos de una fábrica de abono dependen del número de kilogramos producidos y vienen dados por la siguiente función: $I(x) = x^2 - 6x$, siendo x el número de kilogramos producidos.

En la misma fábrica los costos de producción, en cientos de pesetas vienen dados por la función: $C(x) = \frac{7}{4}x + 2$

a) ¿Qué cantidad de producción debe existir para que los ingresos sean crecientes?.
b) ¿Con qué cantidad de producción se obtienen los mínimos ingresos?. ¿Y los máximos?
c) ¿Cuándo se producen los costos mínimos?. ¿Y los máximos?.
d) ¿Para alguna producción se produce el equilibrio?. (los ingresos coinciden con los costos?
e) ¿Cuál es la función beneficio?. ¿Cuál es el mínimo beneficio?. ¿Y el máximo?

Sol: a) $x > 3$
b) mínimos con $x = 3$ y máximo no hay (aumentan cuanto más se produce)
c) costos mínimos con $x = 0$, máximos no hay (aumentan cuanto más se produce)
d) $x = 182,098$ kg
e) $B(x) = x^2 - 181x - 200$
Mínimo beneficio matemático (- 8389,8 ptas.). Realmente no fabricando nada el beneficio mínimo sería (- 200 ptas.)
Máximo no hay (aumentan cuanto más se produce)