TEMA 8 – GEOMETRÍA ANALÍTICA

RELACIÓN ENTRE PUNTOS DEL PLANO

<u>EJERCICIO 1</u> : Halla el punto medio del segmento de extremos $P(2, 1)$ y $Q(-4, 3)$.

Solución:
Las coordenadas del punto medio, M, son la semisuma de las coordenadas de los extremos:
$$M=\left(\frac{2+(-4)}{2}, \frac{1+3}{2}\right)=(-1, 2)$$

<u>EJERCICIO 2</u> : Halla el simétrico, A', del punto $A(-1, 0)$ respecto de $B(2, -8)$.

Solución:
Llamamos (x', y') a las coordenadas de A'. El punto medio del segmento de extremos A y A' es B.

Por tanto: $$\left.\begin{array}{l}\dfrac{-1+x'}{2}=2\\[2ex] \dfrac{0+y'}{2}=-8\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l}x'=5\\ y'=-16\end{array}\right\} \qquad A'(5, -16)$$

<u>EJERCICIO 3</u> : Determinar si los puntos A(3,1), B(5,2) y C(1,0) están alineados.

Solución: $$\left.\begin{array}{l}\mathrm{AB}=(5,2)\ \ (3,1)=(2,1)\\ \mathrm{AC}=(1,0)\ \ (3,1)=(-2,-1)\end{array}\right\}\rightarrow \frac{2}{-2}=\frac{1}{-1}$$ *Cierto ⇒ Están alineados*

<u>EJERCICIO 4</u> : Halla el valor de k para que los puntos $A(1, 1)$, $B(0, 3)$ y $C(2,k)$ estén alineados.

Solución:) $$\left.\begin{array}{l}\mathrm{AB}=(0,3)-(1,1)=(-1,2)\\ \mathrm{AC}=(2,\mathrm{k})-(1,1)=(1,\mathrm{k}-1)\end{array}\right\}\rightarrow \frac{-1}{1}=\frac{2}{\mathrm{k}-1}\rightarrow -\mathrm{k}+1=2\rightarrow \mathrm{k}=-1$$

ECUACIONES DE RECTAS

<u>EJERCICIO 5</u> :
a) Escribe la ecuación general de la recta, r, que pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(3, 6)$.
b) Halla la ecuación de la recta, s, paralela a $y=\frac{1}{2}x$ que pasa por el punto $(4, 4)$.
c) Obtén el punto de corte de las dos rectas anteriores.
Solución:

a) Pendiente $=\dfrac{6-0}{3-1}=\dfrac{6}{2}=3$

Ecuación: $y=0+3(x-1) \quad\rightarrow\quad y=3x-3 \quad\rightarrow\quad 3x-y-3=0$

b) Si son paralelas, tienen la misma pendiente: $m=\dfrac{1}{2}$.

Ecuación: $y=4+\dfrac{1}{2}(x-4) \quad\rightarrow\quad 2y=8+x-4 \quad\rightarrow\quad x-2y+4=0$

c) Es la solución del sistema siguiente:
$$\left.\begin{array}{r}3x-y-3=0\\ x-2y+4=0\end{array}\right\}\begin{array}{l}y=3x-3\\ x-2(3x-3)+4=0 \quad\rightarrow\quad x-6x+6+4=0 \quad\rightarrow -5x=-10 \quad\rightarrow\quad x=2 \quad\rightarrow\end{array}$$
$$\rightarrow\quad y=3 \qquad \text{Punto: } (2,3)$$

<u>EJERCICIO 6</u> :

a) Halla la ecuación de la recta, r, que pasa por (3, 2) y tiene como vector dirección $\vec{d}(1, 1)$.

b) Escribe la ecuación de la recta, s, que pasa por (5, 2) y es paralelo al eje X.

c) Obtén el punto de corte de las dos rectas anteriores.

Solución:

a) Pendiente $= \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow$ Ecuación: $y = 2 + 1\,(x - 3) \quad \rightarrow \quad y = 2 + x - 3 \quad \rightarrow \quad y = x - 1$

b) $y = 2$

c) Es la solución de este sistema: $\left.\begin{array}{l} y = x - 1 \\ y = 2 \end{array}\right\} x - 1 = 2 \quad \rightarrow \quad x = 3 \quad$ Punto: $(3, 2)$

<u>EJERCICIO 7</u> :

a) Halla la ecuación de la recta, r, que pasa por $(0, 0)$ y es paralela al vector $\vec{d}(3, 6)$.

b) Escribe la ecuación general de la recta, s, que pasa por (3, 4) y es perpendicular a $x + y - 5 = 0$.

c) Obtén el punto de intersección de las dos rectas anteriores.

Solución:

a) Pendiente $= \frac{6}{3} = 2$

Ecuación: $y = 2x$

b) Pendiente de $x + y - 5 = 0 \quad \rightarrow \quad y = -x + 5 \quad \rightarrow \quad m = -1$

Pendiente de la perpendicular $= \frac{-1}{m} = \frac{-1}{-1} = 1$

Ecuación de s: $y = 4 + 1(x - 3) \quad \rightarrow \quad y = 4 + x - 3 \quad \rightarrow \quad x - y + 1 = 0$

c) Es la solución del siguiente sistema: $\left.\begin{array}{l} y = 2x \\ x - y + 1 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x - 2x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1 \quad \rightarrow \quad y = 2 \\ \text{Punto: } (1, 2) \end{array}$

<u>EJERCICIO 8</u> :

a) Obtén la ecuación de la recta, r, que pasa por $(3, -1)$ y tiene pendiente $\frac{-1}{2}$.

b) Escribe la ecuación de la recta, s, perpendicular a $x + 3y = 2$ que pasa por $(2, -4)$.

c) Halla el punto de intersección de las rectas r y s.

Solución:

a) $y = -1 - \frac{1}{2}(x - 3) \quad \rightarrow \quad 2y = -2 - x + 3 \quad \rightarrow \quad x + 2y - 1 = 0$

b) Pendiente de $x + 3y = 2 \quad \rightarrow \quad y = \frac{-x + 2}{3} = \frac{-1}{3}x + \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad m = \frac{-1}{3}$

Pendiente de la perpendicular $= \frac{-1}{m} = \frac{-1}{-1/3} = 3$

Ecuación: $y = -4 + 3(x - 2) \quad \rightarrow \quad y = -4 + 3x - 6 \quad \rightarrow \quad y = 3x - 10$

c) Es la solución del siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y - 1 = 0 \\ y = 3x - 10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x + 2(3x - 10) - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x + 6x - 20 - 1 = 0 \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad 7x = 21 \quad \rightarrow \quad x = 3 \quad \rightarrow \quad y = -1 \qquad \text{Punto: } (3, -1) \end{array}$$

<u>EJERCICIO 9</u> :

a) Escribe la ecuación general de la recta, r, que pasa por los puntos (0, 5) y (1, 2).

b) Obtén la ecuación de la recta, s, paralela a $2x + y = 3$ que pasa por el punto (1, 1).

c) Halla el punto de corte de las dos rectas anteriores.

Solución:

a) Pendiente $= \frac{2 - 5}{1 - 0} = \frac{-3}{1} = -3 \Rightarrow$ Ecuación: $y = 5 - 3(x - 0) \quad \rightarrow \quad y = 5 - 3x \quad \rightarrow \quad 3x + y - 5 = 0$

b) Si son paralelas, tienen la misma pendiente: $2x + y = 3 \quad \rightarrow \quad y = -2x + 3 \quad \rightarrow \quad m = -2$
Ecuación: $y = 1 - 2(x - 1) \quad \rightarrow \quad y = 1 - 2x + 2 \quad \rightarrow \quad y = -2x + 3$

c) Es la solución del sistema siguiente: $\left.\begin{array}{l} 3x + y - 5 = 0 \\ y = -2x + 3 \end{array}\right\} 3x - 2x + 3 - 5 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2 \quad \rightarrow \quad y = -1$ Punto: $(2, -1)$

<u>EJERCICIO 10</u> :

a) Escribe la ecuación de la recta que pasa por (2, 1) y es paralela a $y = \frac{1}{2}x + 3$.

b) Halla la ecuación de la recta que pasa por $(0, -2)$ y es perpendicular a $2x + y = -3$.

Solución:

a) Si son paralelas, tienen la misma pendiente: $y = \frac{1}{2}x + 3 \quad \rightarrow \quad m = \frac{1}{2}$

Ecuación: $y = 1 + \frac{1}{2}(x - 2) \quad \rightarrow \quad 2y = 2 + x - 2 \quad \rightarrow \quad 2y = x \quad \rightarrow \quad y = \frac{x}{2}$

b) Pendiente de $2x + y = -3 \quad \rightarrow \quad y = -2x - 3 \quad \rightarrow \quad m = -2$

Pendiente de la perpendicular $= \frac{-1}{m} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

Ecuación: $y = -2 + \frac{1}{2}x \quad \rightarrow \quad 2y = -4 + x \quad \rightarrow \quad x - 2y - 4 = 0$

<u>EJERCICIO 11</u> : Dados los puntos $A\ (2, -1)$ y $B\ (3, 4)$, halla las ecuaciones de las dos rectas siguientes:

a) r: pasa por A y es paralela a AB **b) s: pasa por B y es paralela a AB**

Solución: $\overrightarrow{AB} = (1, 5)$

- Recta r: $m = \frac{5}{1}$. Ecuación: $y = -1 + 5(x - 2) \quad \rightarrow \quad y = -1 + 5x - 10 \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad 5x - y - 11 = 0$

- Recta s: $m' = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{5} = -\frac{1}{5} \Rightarrow$ Ecuación: $y = 4 - \frac{1}{5}(x - 3) \quad \rightarrow \quad 5y = 20 - x + 3 \quad \rightarrow \quad x + 5y - 23 = 0$

<u>EJERCICIO 12</u> :

a) Obtén la ecuación de la recta paralela al eje X que pasa por el punto $(5, -1)$.

b) Halla la ecuación general de la recta perpendicular a $3x - y = 1$ que pasa por el punto $(0, 1)$.

Solución: a) $y = -1$

b) Pendiente de $3x - y = 1 \quad \rightarrow \quad y = 3x - 1 \quad \rightarrow \quad m = 3$

Pendiente de la perpendicular $= \frac{-1}{m} = \frac{-1}{3}$

Ecuación: $y = 1 - \frac{1}{3}x \quad \rightarrow \quad 3y = 3 - x \quad \rightarrow \quad x + 3y - 3 = 0$

<u>EJERCICIO 13</u> :

a) Halla la ecuación de la recta, r, paralela a $2x - 3y + 4 = 0$, que pasa por $(-1, 2)$.

b) Halla la ecuación de la recta perpendicular a $y - 1 = 0$ que pasa por $(3, 2)$.

Solución:

a) Puesto que son paralelas, tienen la misma pendiente:

$2x - 3y + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad y = \frac{2x + 4}{3} = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \quad \rightarrow \quad m = \frac{2}{3}$

Ecuación de r: $y = 2 + \frac{2}{3}(x + 1) \quad \rightarrow \quad 3y = 6 + 2x + 2 \quad \rightarrow \quad 2x - 3y + 8 = 0$

b) La recta $y - 1 = 0$ es paralela al eje X; por tanto, la que buscamos, es paralela al eje Y. Su ecuación será $x = 3$.

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

<u>EJERCICIO 14</u> : Calcula la distancia que hay entre los puntos $A(8, 10)$ y $B(-2, -14)$.

Solución: $dist(A, B) = \sqrt{(-2-8)^2 + (-14-10)^2} = \sqrt{10^2 + 24^2} = \sqrt{100+576} = \sqrt{676} = 26$

<u>EJERCICIO 15</u> : Halla la distancia entre los puntos $P(6, -2)$ y $Q(0, 6)$.

Solución: $dist(P, Q) = \sqrt{(0-6)^2 + (6-(-2))^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$

ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA

<u>EJERCICIO 16</u> : Halla la ecuación de la circunferencia de centro $(4, -2)$ y radio 5.

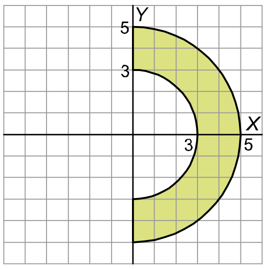
Solución: La ecuación es: $\sqrt{(x-4)^2 + (y+2)^2} = 5.$

<u>EJERCICIO 17</u> : Escribe la ecuación de la circunferencia de centro $(3, -4)$ y radio 4.

Solución: La ecuación es: $\sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2} = 4$

REGIONES EN EL PLANO

<u>EJERCICIO 18</u> :¿Cuáles de los siguientes sistemas de inecuaciones corresponden a este recinto?



a) $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2 \geq 25 \\ x^2+y^2 \leq 9 \end{array}\right\}$

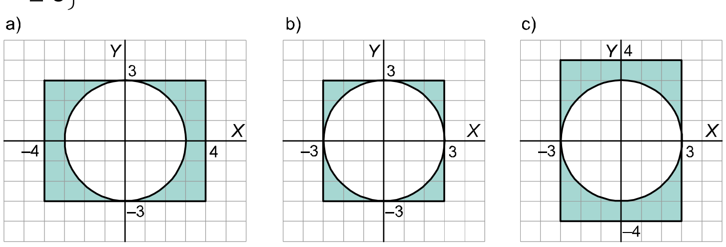
b) $\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ x^2+y^2 \leq 25 \\ x^2+y^2 \leq 9 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2 \geq 9 \\ x^2+y^2 \leq 25 \\ x \geq 0 \end{array}\right\}$

Solución:

c) Las dos curvas dadas corresponden a dos semicircunferencias de centro (0, 0) y radios 3 y 5, respectivamente. Los puntos señalados corresponderán a semicircunferencias de radio entre 3 y 5, esto es: $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2 \geq 9 \\ x^2+y^2 \leq 25 \\ x \geq 0 \end{array}\right\}$

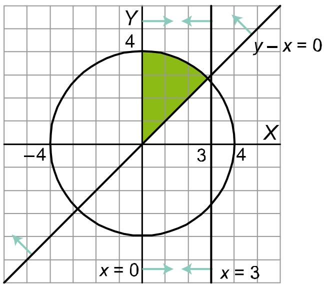
<u>EJERCICIO 19 :</u> Indica cual de los siguientes recintos corresponde a este sistema de inecuaciones: $\left.\begin{array}{l} -3 \leq x \leq 3 \\ -4 \leq y \leq 4 \\ x^2+y^2 \geq 9 \end{array}\right\}$



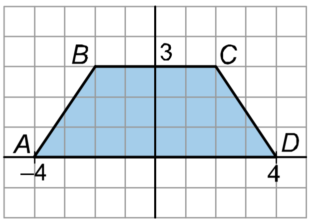
Solución:
Le corresponde el recinto c).
$x = 3$ y $x = -3$ son rectas paralelas al eje Y que pasan, por ejemplo, por (3, 0) y (–3, 0) respectivamente.
$y = 4$ e $y = -4$ son rectas paralelas al eje X que pasan, por ejemplo, por (0, 4) y (0, –4).
$x^2 + y^2 = 9$ es una circunferencia de centro (0, 0) y radio 3; los puntos que cumplen $x^2 + y^2 \geq 9$ pertenecen a la circunferencia o están fuera de ella.

EJERCICIO 20 : Representa gráficamente el siguiente recinto: $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq 16 \\ y - x \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 3 \end{array}\right\}$

Solución:
$x^2 + y^2 \leq 16$ es la inecuación que describe la circunferencia de centro (0, 0) y radio 4, y el interior de dicha circunferencia.
$y - x = 0 \rightarrow y = x$ (bisectriz del 1er y 3er cuadrante).
Para saber que parte del plano corresponde a la inecuación $y - x > 0$ tomamos, por ejemplo, el punto (3, 1) y lo sustituimos en $y - x \rightarrow 1 - 3 = -2 < 0$.
Por tanto, el semiplano en el que no esta el punto (3, 1) es el que corresponde a la inecuación $y - x > 0$.
$x = 0$, $x = 3$ son rectas paralelas al eje Y.
La representación gráfica correspondiente será:



EJERCICIO 21 : Describe, mediante un sistema de inecuaciones, el siguiente recinto:



Solución:
Hallamos las ecuaciones de las rectas AB, BC, CD y DA.

– AB es la recta que pasa por $A(-4, 0)$ y tiene pendiente $m = \frac{3}{2}$.

La ecuación será: $y = \frac{3}{2}(x + 4) \rightarrow 2y - 3x - 12 = 0$

Tomamos un punto cualquiera del recinto, por ejemplo (1, 2), y lo sustituimos en la ecuación anterior: $2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 - 12 = -11 < 0$. Por tanto, el semiplano buscado es $-3x + 2y - 12 \leq 0$.

– BC es paralela al eje X y pasa por (0, 3) $\rightarrow y = 3$
El semiplano buscado es $y \leq 3$.

– CD es la recta que pasa por $D(4, 0)$ y tiene pendiente $m = -\frac{3}{2}$.

La ecuación será: $y = \frac{-3}{2}(x-4) \rightarrow 2y = -3x + 12 \rightarrow 3x + 2y - 12 = 0$

Sustituimos el punto $(1, 2) \rightarrow 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 12 = -5 < 0$

El semiplano buscado es $3x + 2y - 12 \le 0$.

– DA es el eje $X \rightarrow y = 0$. El semiplano será $y \ge 0$.

El recinto, pues, es la solución del sistema: $\begin{cases} -3x + 2y - 12 \le 0 \\ 3x + 2y - 12 \le 0 \\ 0 \le y \le 3 \end{cases}$

REPASO

EJERCICIO 22 :

¿Cuál de las rectas $r: y - 3 = 5(x-1)$, $s: y = \frac{2}{5}x$ y $t: \frac{x+1}{5} = \frac{1-y}{2}$ es paralela a la recta $2x - 5y + 4 = 0$?

Solución:

Dos rectas son paralelas cuando tienen la misma pendiente.

Pendiente de $r \rightarrow m = 5$

Pendiente de $s \rightarrow m = \frac{2}{5}$

Pendiente de $t: \frac{x+1}{5} = \frac{1-y}{2} \rightarrow \frac{2}{5}(x+1) = 1 - y \rightarrow y = 1 - \frac{2}{5}(x+1) \rightarrow$

$\rightarrow y = -\frac{2}{5}x + 1 - \frac{2}{5} \rightarrow y = -\frac{2}{5}x + \frac{3}{5} \rightarrow m = -\frac{2}{5}$

La pendiente de $2x - 5y + 4 = 0$ es $m = \frac{2}{5}$. Luego s es la recta paralela a $2x - 5y + 4 = 0$.

EJERCICIO 23 : Dada la recta $ax + by = 0$, indica qué relación debe haber entre a y b para que el punto $P(-2, 6)$ pertenezca a la recta.

Solución:

El punto $P(-2, 6)$ pertenecerá a la recta $ax + by = 0$ si se cumple:

$a \cdot (-2) + b \cdot 6 = 0 \rightarrow -2a + 6b = 0 \rightarrow -a + 3b = 0 \rightarrow a = 3b$

Luego, $P(-2, 6)$ pertenecerá a dicha recta si a es el triple de b.

EJERCICIO 24 : Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) $x^2 + (y-3)^2 + 9 = 0$ es la ecuación de una circunferencia.

b) La recta de ecuación $ax + c = 0$ es una recta paralela al eje Y $(a, c \in \mathbb{R})$.

c) Si m_1 y m_2 son las pendientes de dos rectas paralelas se cumple que $m_1 - m_2 = 0$.

d) La pendiente de una recta perpendicular a $r: ax + by + c = 0$ es $\frac{a}{b}$.

Solución:

a) FALSO.

La ecuación de una circunferencia de centro $C(a, b)$ y radio r es: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

En este caso: $(x-0)^2 + (y-3)^2 = -9$, pero r^2 no puede ser negativo; luego la ecuación dada no es la ecuación de una circunferencia.

b) VERDADERO.

$ax + c = 0 \;\rightarrow\; x = -\dfrac{c}{a}$ constante $\rightarrow$ recta paralela al eje Y que pasa por $\left(-\dfrac{c}{a}, 0\right)$

c) VERDADERO.

Por ser paralelas las rectas $\rightarrow\; m_1 = m_2 \;\rightarrow\; m_1 - m_2 = 0$

d) FALSO.

La pendiente de r es $m = \dfrac{-a}{b}$ $\left(y = \dfrac{-a}{b}x - \dfrac{c}{b}\right)$ $\rightarrow$ la pendiente de la recta perpendicular a r es $m' = \dfrac{-1}{m} = \dfrac{b}{a}$.

<u>EJERCICIO 25 :</u> ¿Qué relación habrá entre a y b para que las rectas $r: ax + 3y = 6$ y $s: bx + y = 5$ sean paralelas? ¿Y para que sean perpendiculares?

Solución:

r y s son paralelas si la pendiente de ambas coincide.

Pendiente de r $\rightarrow\; 3y = 6 - ax \;\rightarrow\; y = -\dfrac{a}{3}x + 2 \;\rightarrow\; m_r = -\dfrac{a}{3}$

Pendiente de s $\rightarrow\; y = -bx + 5 \;\rightarrow\; m_s = -b$

$m_r = m_s \;\rightarrow\; -\dfrac{a}{3} = -b \;\rightarrow\; a = 3b$

Por tanto, r y s serán paralelas cuando a sea el triple de b.

Para que r y s sean perpendiculares $\rightarrow\; m_r = -\dfrac{1}{m_s} \;\rightarrow\; -\dfrac{a}{3} = \dfrac{-1}{-b} \;\rightarrow\; ab = -3$

<u>EJERCICIO 26 :</u> Halla el valor de m para que las rectas $r: y - x + 3 = 0$ y $s: mx + 3y - 1 = 0$ no se corten.

Solución:

Para que r y s no se corten, el valor de m buscado será aquel que haga que r y s sean paralelas, es decir, tengan la misma pendiente.

Pendiente de r $\rightarrow\; y = x - 3 \;\rightarrow\; m_r = 1$

Pediente de s $\rightarrow\; 3y = 1 - mx \;\rightarrow\; y = -\dfrac{m}{3}x + \dfrac{1}{3} \;\rightarrow\; m_s = -\dfrac{m}{3}$

$m_r = m_s \;\rightarrow\; 1 = -\dfrac{m}{3} \;\rightarrow\; -3 = m$

<u>EJERCICIO 27 :</u> Dadas las rectas $r: ax + c = 0$ y $s: a'x + c' = 0$:

a) ¿Son paralelas?

b) ¿Qué condición se ha de cumplir para que sean coincidentes?

c) Escribe la ecuación de la recta perpendicular a r y s que pase por el punto (2, –3).

Solución:

a) Sí. Son rectas de la forma $x = k$, es decir, rectas paralelas al eje Y.

b) Para que sean coincidentes $\dfrac{c}{a} = \dfrac{c'}{a'}$.

c) Una recta perpendicular a r y s es de la forma $y = k'$, recta paralela al eje X. Como tiene que pasar por el punto (2, –3), entonces la recta buscada es $y = -3$.

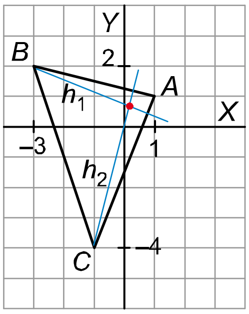
EJERCICIO 28 : En el triángulo de vértices $A(1, 1)$, $B(-3, 2)$ y $C(-1, -4)$ halla:

a) La ecuación de la altura h_1 que parte de B.

b) La ecuación de la altura h_2 que parte de C.

c) El ortocentro del triángulo (punto de intersección de las alturas).

Solución:



a) La altura h_1 es perpendicular al lado AC.

Pendiente de $AC \rightarrow m_1 = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$

Pendiente de $h_1 \rightarrow m_1' = -\frac{2}{5}$

La recta h_1 pasa por B y su pendiente es $-\frac{2}{5}$; luego su ecuación es:

$y = 2 - \frac{2}{5}(x+3) \rightarrow 5y = 10 - 2x - 6 \rightarrow 5y + 2x - 4 = 0$

b) La altura h_2 es perpendicular al lado AB.

Pendiente de $AB \rightarrow m_2 = \frac{-1}{4}$

Pendiente de $h_2 \rightarrow m_2' = 4$

La recta h_2 pasa por C y su pendiente es 4; su ecuación es:

$y = -4 + 4(x + 1) \rightarrow y = -4 + 4x + 4 \rightarrow y - 4x = 0$

c) Par calcular el ortocentro, resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de h_1 y h_2 :

$$\left.\begin{array}{l} 5y + 2x - 4 = 0 \\ y - 4x = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow 5\cdot(4x) + 2x - 4 = 0 \rightarrow 20x + 2x - 4 = 0 \rightarrow 22x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{22} = \frac{2}{11} \\ \rightarrow y = 4x \end{array}$$

$y = 4x = 4\cdot\frac{2}{11} = \frac{8}{11} \Rightarrow$ El ortocentro es el punto $\left(\frac{2}{11}, \frac{8}{11}\right)$.

EJERCICIO 29 : Calcula el valor de a y de b para que las rectas $r: ax - 3y + 2 = 0$ y $s: bx + 9y - 5 = 0$ sean paralelas y, además, r pase por el punto $P(1, 2)$.

Solución:

Pendiente de $r: ax + 2 = 3y \rightarrow y = \frac{a}{3}x + \frac{2}{3} \rightarrow m_r = \frac{a}{3}$

Pendiente de $s: bx - 5 = -9y \rightarrow y = -\frac{b}{9}x + \frac{5}{9} \rightarrow m_s = -\frac{b}{9}$

Para que r y s sean paralelas, las pendientes han de coincidir:

$m_r = m_s \rightarrow \frac{a}{3} = -\frac{b}{9} \rightarrow 3a = -b \rightarrow b = -3a$

Calculamos a sabiendo que $P(1, 2)$ pertenece a la recta r:

$a\cdot 1 - 3\cdot 2 + 2 = 0 \rightarrow a - 6 + 2 = 0 \rightarrow a = 4 \Rightarrow$ Por tanto, $a = 4$ y $b = -3\cdot 4 = -12$.

EJERCICIO 30 : Las rectas $r: 3x - y - 4 = 0$, $s: 3x - 4y + 11 = 0$ y $t: 3x + 2y - 1 = 0$ forman un triángulo ABC. Calcula los vértices y el ortocentro del triángulo.

Solución:

Calculamos los vértices resolviendo los siguientes sistemas:

$$\left.\begin{array}{l} 3x - y - 4 = 0 \\ 3x - 4y + 11 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{r} 3x - y - 4 = 0 \\ -3x + 4y - 11 = 0 \\ \hline 3y - 15 = 0 \end{array} \rightarrow y = 5$$

$$3x - 5 - 4 = 0 \rightarrow 3x = 9 \rightarrow x = 3$$

Luego $A(3, 5)$.

$$\left.\begin{array}{l} 3x - y - 4 = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{r} -3x + y + 4 = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \\ \hline 3y - 3 = 0 \end{array} \rightarrow y = -1$$

$$3x + 1 - 4 = 0 \rightarrow 3x = 3 \rightarrow x = 1$$

Por tanto $B(1, -1)$.

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 4y + 11 = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{r} -3x + 4y - 11 = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \\ \hline 6y - 12 = 0 \end{array} \rightarrow y = 2$$

$$3x - 8 + 11 = 0 \rightarrow 3x = -3 \rightarrow x = -1$$

Luego $C(-1, 2)$.

Para calcular el ortocentro del triángulo hallamos las ecuaciones de dos alturas y resolvemos el sistema formado por ellas:

– Altura h_1 que parte de A $\rightarrow$ es perpendicular a BC

Pendiente de $BC: m_1 = -\frac{3}{2} \rightarrow$ pendiente de $h_1: m_1' = \frac{2}{3}$

Ecuación de $h_1: y = 5 + \frac{2}{3}(x - 3) \rightarrow 3y = 15 + 2x - 6 \rightarrow 3y - 2x - 9 = 0$

– Altura h_2 que parte de B $\rightarrow$ es perpendicular a AC

Pendiente de $AC: m_2 = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4} \rightarrow$ pendiente de $h_2: m_2' = -\frac{4}{3}$

Ecuación de $h_2: y = -1 - \frac{4}{3}(x - 1) \rightarrow 3y = -3 - 4x + 4 \rightarrow 3y + 4x - 1 = 0$

Resolvemos el sistema: $\left.\begin{array}{l} 3y - 2x - 9 = 0 \\ 3y + 4x - 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{r} -3y + 2x + 9 = 0 \\ 3y + 4x - 1 = 0 \\ \hline \end{array}$

$$6x + 8 = 0 \rightarrow x = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$$

$$3y + \frac{8}{3} - 9 = 0 \rightarrow 3y - \frac{19}{3} = 0 \rightarrow y = \frac{19}{9}$$

El ortocentro es $\left(-\frac{4}{3}, \frac{19}{9}\right)$.

EJERCICIO 31 :

La recta $r: x - y + 1 = 0$ es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ del que conocemos $A(3, 2)$.

Halla:

a) El punto de intersección de r con la perpendicular a r trazada desde A.

b) El punto B.

Solución:

a) Pendiente de $r: y = x + 1 \rightarrow m = 1$

Pendiente de la perpendicular a r : $m' = -1$

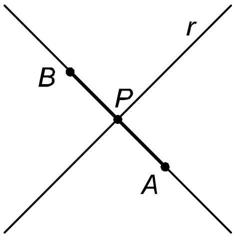
Ecuación de la perpendicular: $y = 2 - 1\,(x - 3) = 5 - x$

Punto de corte:

$$\left.\begin{array}{l} x - y + 1 = 0 \\ y = 5 - x \end{array}\right\} \rightarrow x - 5 + x + 1 = 0 \rightarrow x = 2$$

$y = 5 - x = 5 - 2 \rightarrow y = 3 \Rightarrow$ Por tanto, $P(2, 3)$.

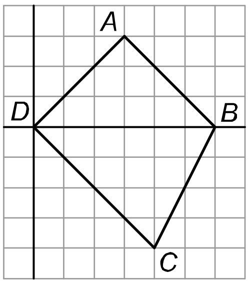
b) El punto $B(x, y)$ es el simétrico de A respecto de P :



$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+3}{2} = 2 \rightarrow x = 1 \\ \dfrac{y+2}{2} = 3 \rightarrow y = 4 \end{array}\right\} \rightarrow B(1, 4)$$

EJERCICIO 32 : Comprueba que el cuadrilátero de vértices $A(3, 3)$, $B(6, 0)$, $C(4, -4)$ y $D(0, 0)$ es un trapecio rectángulo y halla su área.

Solución:



Para ver que es un trapecio rectángulo, comprobamos que un lado (DA) es perpendicular a otros dos (CD y AB):

DA es la bisectriz del primer cuadrante $\rightarrow m = 1$

AB y CD tienen pendiente -1

Luego DA es perpendicular a AB y CD $\rightarrow$ el trapecio es rectángulo.

Calculamos el área hallando las siguientes distancias:

$$dist(A, B) = \sqrt{(6-3)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

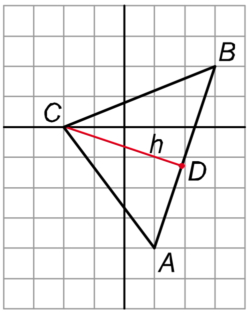
$$dist(C, D) = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$dist(D, A) = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \quad \text{(altura del trapecio)}$$

$$\text{Área} = \frac{\left(\overline{AB} + \overline{CD}\right)\cdot\overline{DA}}{2} = \frac{\left(3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\right)\cdot 3\sqrt{2}}{2} = \frac{\left(7\sqrt{2}\right)\cdot\left(3\sqrt{2}\right)}{2} = = \frac{21\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2}{2} = \frac{21\cdot 2}{2} = 21\ \text{u}^2$$

EJERCICIO 33 : Calcula el área del triángulo de vértices $A(1, -4)$, $B(3, 2)$ y $C(-2, 0)$.

Solución:



$$\text{Área del triángulo } = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{2}$$

Llamamos h a la altura que parte del vértice C.

$$\overline{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{2^2+6^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$$

La altura h es perpendicular al lado AB:

Pendiente de $AB: m = \frac{6}{2} = 3 \quad \rightarrow \quad$ ecuación de $AB: y = 2 + 3(x-3) \quad \rightarrow \quad 3x - y - 7 = 0$

Pendiente de $h: m' = -\frac{1}{3}$

La recta h pasa por C y su pendiente es $-\frac{1}{3}$.

$$h: y = -\frac{1}{3}(x+2) \quad \rightarrow \quad 3y = -x-2 \quad \rightarrow \quad x + 3y + 2 = 0$$

Buscamos el punto de intersección, D, de la recta h con el lado AB:

$$\left.\begin{array}{l} 3x - y - 7 = 0 \\ x + 3y + 2 = 0 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 9x - 3y - 21 = 0 \\ \underline{x + 3y + 2 = 0} \\ 10x - 19 = 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad x = \frac{19}{10}$$

$$\frac{19}{10} + 3y + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad 3y = -\frac{39}{10} \quad \rightarrow \quad y = -\frac{13}{10}$$

Por tanto, $D\left(\frac{19}{10}, \frac{-13}{10}\right)$.

$$\overline{CD} = \sqrt{\left(\frac{19}{10}+2\right)^2 + \left(-\frac{13}{10}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{39}{10}\right)^2 + \left(\frac{13}{10}\right)^2} = \frac{1}{10}\sqrt{1690}$$

$$\text{Área } = \frac{\sqrt{40}\cdot\frac{1}{10}\sqrt{1690}}{2} = \frac{\sqrt{67\,600}}{20} = \frac{260}{20} = 13 \text{ u}^2$$

EJERCICIO 34 : Calcula los puntos de corte de la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$ con la recta $y + x - 1 = 0$.

Solución:

Los puntos de corte son las soluciones del sistema que forman sus ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 5 \\ y + x - 1 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \quad x^2 + (1-x)^2 = 5 \quad \rightarrow \quad x^2 + 1 - 2x + x^2 = 5 \quad \rightarrow \quad 2x^2 - 2x - 4 = 0 \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad y = 1 - x \end{array}$$

$\rightarrow\ x^2 - x - 2 = 0 \ \rightarrow\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} 2 \ \rightarrow\ y = 1 - x = 1 - 2 = -1 \\ -1 \ \rightarrow\ y = 1 - x = 1 + 1 = 2 \end{cases}$

Los puntos de corte son (2, −1) y (−1, 2).

EJERCICIO 35 : Dos de los vértices del triángulo *ABC* son *A*(1, 7) y *B*(5, 2).

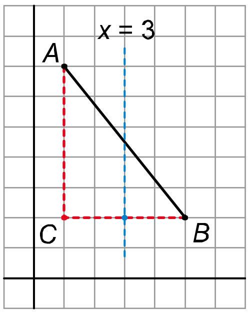
a) Calcula las coordenadas de *C* sabiendo que la recta $x - 3 = 0$ es la mediatriz del segmento *BC*.

b) Calcula la ecuación de la altura *h* que parte de *C*.

Solución:

a) La mediatriz del segmento *BC* es perpendicular a dicho segmento. Si la recta mediatriz es $x = 3$, la recta perpendicular a ella que pasa por *B*(5, 2) es $y = 2$.
Por tanto, el punto medio del segmento *BC* es (3, 2).

Llamamos $C\,(a, b)$: $\left.\begin{array}{l} \dfrac{a+5}{2} = 3 \ \rightarrow\ a + 5 = 6 \ \rightarrow\ a = 1 \\ \dfrac{b+2}{2} = 2 \ \rightarrow\ b + 2 = 4 \ \rightarrow\ b = 2 \end{array}\right\} \rightarrow\ C(1, 2)$



b) La altura *h* que parte de *C* es perpendicular al segmento *AB*.

Pendiente de AB : $m = \dfrac{-5}{4}$

Pendiente de h : $m' = \dfrac{4}{5}$

La recta h que pasa por $C(1, 2)$ y tiene de pendiente $\dfrac{4}{5}$ es :

$y = 2 + \dfrac{4}{5}(x - 1) \ \rightarrow\ 5y = 10 + 4x - 4 \ \rightarrow\ 4x - 5y + 6 = 0$