APUNTES DE MATEMÁTICAS

TEMA 7: FUNCIONES

1º BACHILLERATO

S3r4

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Concepto de función

El concepto más importante de todas las matemáticas es el concepto de función. En casi todas las ramas de las matemáticas modernas se usan y estudian funciones.

Definición de función

Una función es una colección de pares de números con la siguiente propiedad: Si (a,b) y (a,c) pertenecen ambos a la colección, entonces b=c; en otras palabras la colección no debe tener dos pares distintos con el mismo primer elemento.

f es una función de R en R (real de variable real) si a cada número real de . $x \in D$. la función le hace corresponder un único número real f(x).

$$D \subset R \qquad \begin{array}{l} Dom \to R \\ x \to f(x) \end{array}$$

2. Definición de Dominio

El conjunto D(dominio) es el conjunto de todos los a para los que existe un único b, de forma que (a,b)∈ f (al número b se le designa por f(a)

El conjunto de todos los valores f(a) donde a∈ Dominio se llama recorrido de la función

2.1. Cálculos de dominios

Razones por las cuales un dominio puede no ser todos los números reales.

La imposibilidad de realizar las operaciones indicadas por la definición de la función

Denominadores que se anulan

Raíces de índice par de números negativos

Logaritmos : Elargumento debe ser positivo, ya que no hay ninguna potencia tal que al elevar un número positivo elevado a ésta sea negativo o cero.

Ejemplo: $f(x) = \log(x+3)$ ➔Dom=(-3,+∞)

-Por el contexto del que se ha extraído la función

-Por la definición expresa de la función.

Ejemplos.

Calcular los dominios de $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

En este caso no tiene sentido hallar f de los valores para los que $x^2 - 1$<0, ya que no tiene sentido el radical cuadrático de esa expresión. Por lo tanto se debe averiguar en qué valores eso sucede.

Hallaremos los valores en los que $x^2 - 1 = 0$. Eso sucede en x=1 y en x=-1. Para cualquier valor x<-1 el valor f(x)>0 ; para cualquier valor de x >1 f(x)>0, y para cualquier valor entre -1 y 1 f(x)<0. Por lo tanto el dominio estará formado por $D = (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$.

$$y = \sqrt{7x - 2}$$

El índice de la raíz es par , por tanto debe suceder que 7x− 21 > = 0 despejando tenemos que x>=3 El dominio entonces será el conjunto de todos los reales en el intervalo [3,+∞)

Otras propiedades de las matemáticas nos pueden ayudar a obtener el dominio de una función es excluir puntos donde esta no está definida, por ejemplo, una función que tenga forma de fracción no estará definida cuando el denominador valga cero

Ejemplo la función $f(x) = \dfrac{7-3x}{10x-2}$ no estará definida cuando 10x− 2 = 0, despejando x= 1 / 5, es decir la variable x debe tener un valor diferente para poder existir, ya que en ese punto no está definida, por tanto el dominio de esta función será el conjunto de todos los reales menos

ese punto. Su notación será R-{1/5}, que se lee, el conjunto de todos los reales menos el punto x=0,20.
El grado de dificultad se incrementa cuando buscamos el dominio de una función con variable en el denominador contenida dentro de un radical de índice par o logaritmo, ya que esto nos traslada a resolver una desigualdad.

Ejemplo

Para evidenciar este caso veamos este problema. Hallar el dominio de la siguiente función:

$f(x) = \log\left(\frac{5x+1}{3x+2}\right)$ Para que esta función exista, necesariamente $\frac{5x+1}{3x+2} > 0$

Ya que no existe logaritmo de expresiones negativas ni de 0 y tampoco puedo dividir por un denominador 0:

cero	den
5x + 1 = 0	3x − 2 = 0
5x = − 1	3x = 2
x = − 1 / 5	x = 2 / 3

Ahora procedemos a crear una tabla o matriz, cuya primera fila son los intervalos abiertos del conjunto de soluciones posibles de menos infinito hasta más infinito. Nótese que se usan intervalos abiertos porque la desigualdad es estricta y no incluye al cero. En la primera columna vamos a colocar los valores obtenidos y vamos a evaluar en estos cada uno de los valores de los intervalos de conjunto de soluciones para ver su signo, así llenaremos el resto de la matriz, al final multiplicaremos los signos siguiendo la regla de los signos y los intervalos que cumplan con la restricción de mayores estrictos de cero conformaran la solución de la inecuación. Haciendo esto tenemos:

Obteniendo signos

x	(-∞, -1/5)	(-1/5, 2/3)	(2/3, ∞+)
(3x-2)	-	-	+
(5x+1)	-	+	+
	+	-	+

solución: (-∞, -1/5) U (2/3, +∞)
Ejemplos

3. Composición de funciones

Una función compuesta es una función formada por la composición o aplicación sucesiva de otras dos o más funciones. Para ello, se aplica sobre el argumento la función más próxima al mismo, y al resultado del cálculo anterior se le aplica finalmente la función restante.
Formalmente, dadas dos funciones f: X → Y y g: Y → Z, donde la imagen de f está contenida en el dominio de g, se define la función composición (g o f): X → Z como (g o f)(x) = g (f(x)), para todos los elementos x de X.

$$\begin{array}{ccccc} X & \rightarrow & Y & \rightarrow & Z \\ x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

A g o f se le llama composición de f y g. Nótese que se nombra no siguiendo el orden de escritura, sino el orden en que se aplican las funciones a su argumento.

4. Función recíproca o inversa

Sea f una función real [inyectiva](), cuyo dominio sea el conjunto X y cuya imagen sea el conjunto Y. Entonces, la **función recíproca o inversa** de f, denotada f^{-1}, es la función de dominio Y e imagen X definida por la siguiente regla:

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

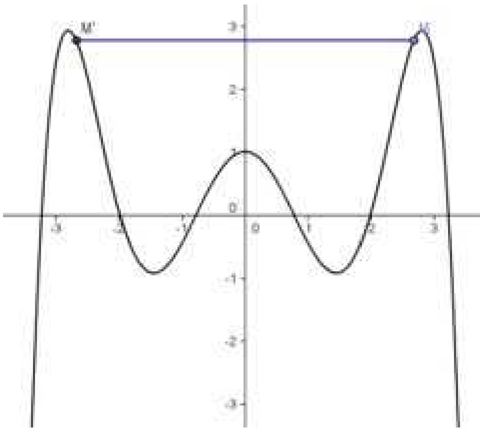
5. SIMETRÍA DE FUNCIONES

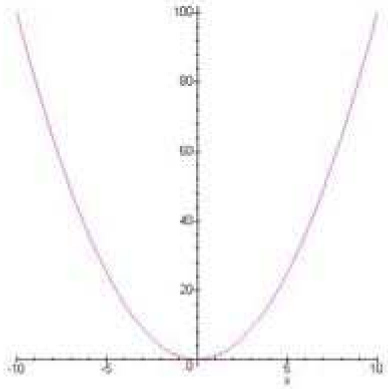
Una función f es PAR cuando: $f(-x) = f(x); \forall x \in Dom$

Las funciones pares son simétricas respecto del eje de ordenadas (eje OY).

Cualquier función polinómica que sólo tenga términos de grado par es una función par, como $f(x)=0.25x^4-2x^2$; $f(x)=x^2-1$. También son pares las funciones $f(x)=(x^3-5x)/(x^3-2x)$, $f(x)=\cos(x)$

Ejemplos de gráfica de función PAR





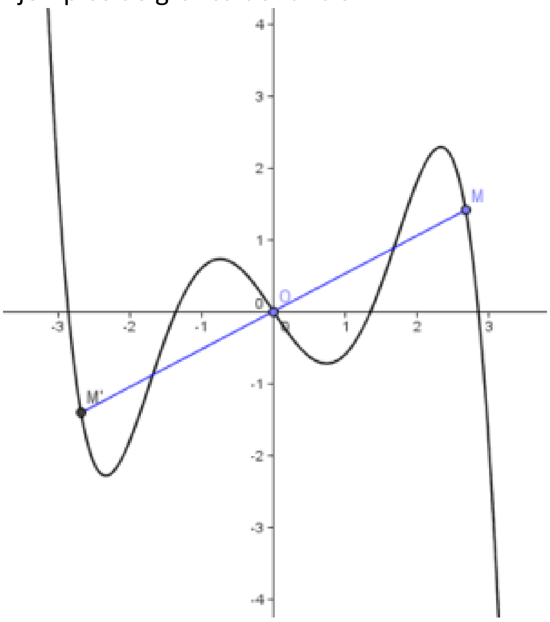
Una función f es IMPAR cuando:

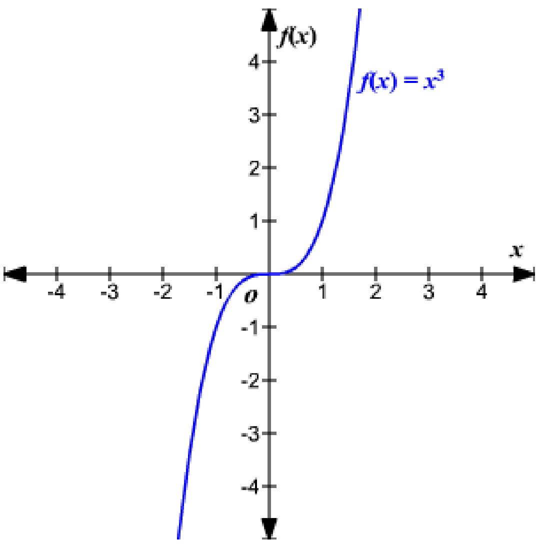
$$f(-x) = -f(x); \forall x \in Dom$$

Las funciones impares son simétricas respecto del origen de coordenadas.

Cualquier función polinómica con sólo términos de grado impar como $f(x)=5x^3-5x$ es función impar. También son impares $f(x)=x^3/(x^2+1)$; $f(x)=\text{sen}(x)$; $f(x)=\text{tg}(x)$

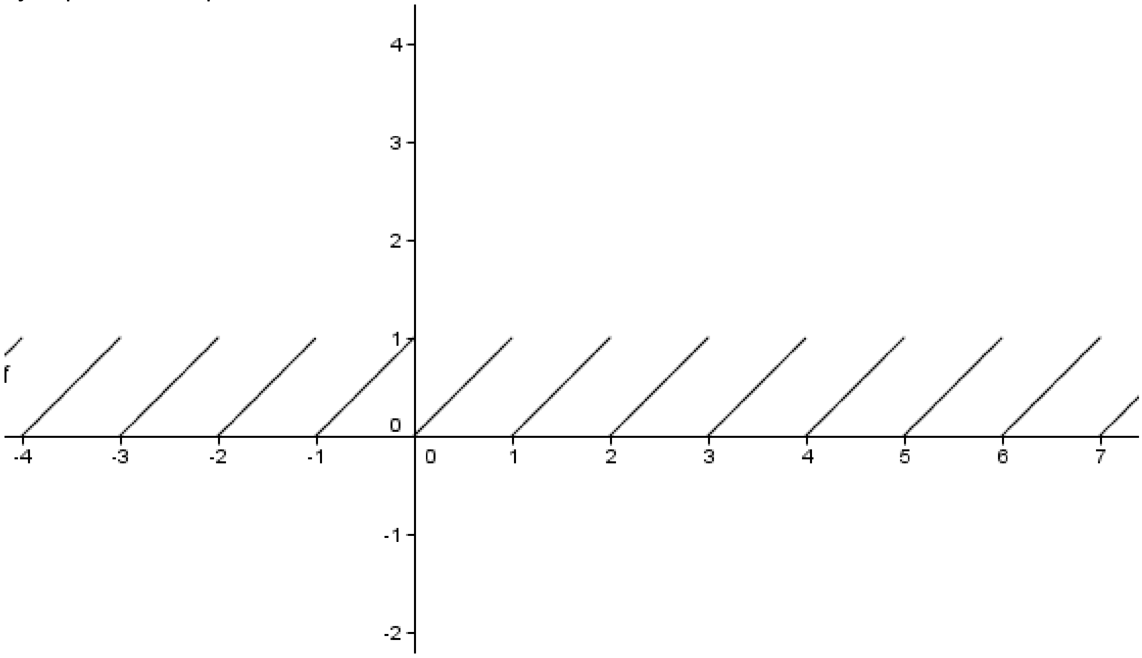
Ejemplos de gráfica de función IMPAR





6. PERIODICIDAD

Una función f es PERIÓDICA cuando existe un número $p \in R$ tal que:
$f(x+p) = f(x), \forall x \in D$ (los valores de la función se repiten de p en p).El número p se llama periodo.
Ejemplo función periódica: La función Parte decimal de x



Parte decimal =x-Entero(x); f(0,5)=0,5; f(1,9)=0,9 f(3,7)=0,7 etc..
f(-0,7)=-0,7-(-1)=0,3 f(-1,6)=-1,6-(-2)=0,4
Ejemplos de función periódica

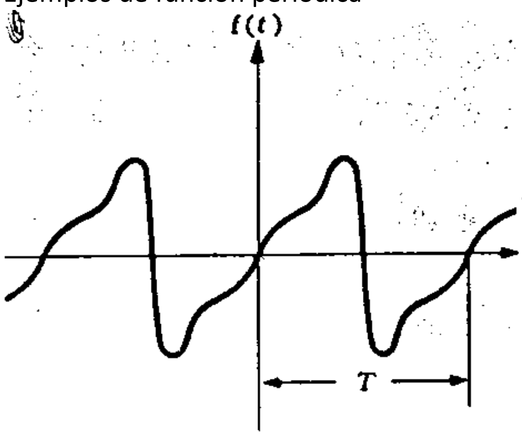
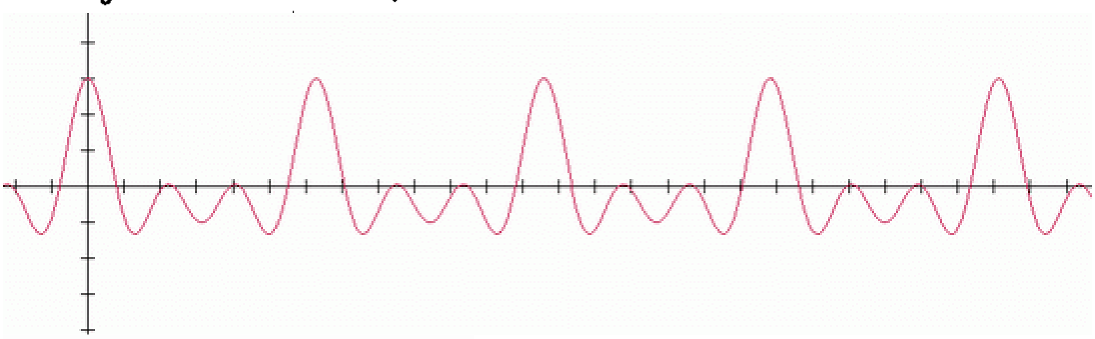


Figura 1.1 **Una función periódica.**

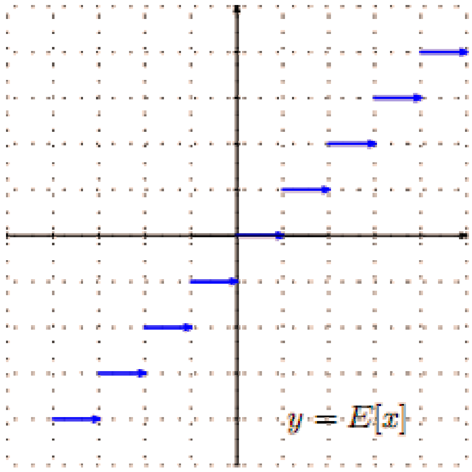


$y = \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x)$

7. ALGUNAS Funciones IMPORTANTES

7.1. Función Parte Entera

Estudiar y representar la función y = E[x] donde E[x] se lee como la parte entera de un número y se refiere al mayor entero menor o igual que x.



Solución: Damos algunos valores a x

E[3,99] = 3

E[2,51] = 2

E[0,01] = 0

E[−0,33] = − 1

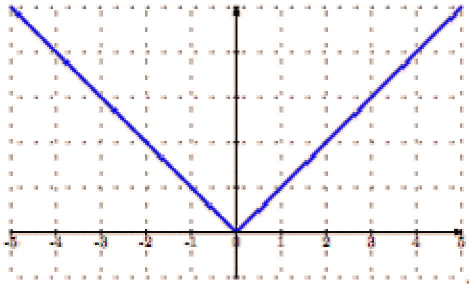
E[−1,08] = −

Función Parte decimal

Función Valor absoluto

De forma general con el valor absoluto las funciones quedan definidas a trozos

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & si \quad x < 0 \\ x & si \quad x > 0 \end{cases}$$



7.2. Funciones polinómicas

7.2.1. FUNCIONES LINEALES

Una función y = f(x) decimos que es lineal cuando $f(x) = ax + b$. f(x) es un polinomio de grado 1.

Ejemplos de funciones lineales son las siguientes:

y = x − 3 y = 2x + 3 y = −x + 3 y = −2x + 1

7.2.2. FUNCIONES CUADRÁTICAS

Una función y = f(x) decimos que es cuadrática cuando

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

f(x) es un polinomio de segundo grado .

Ejemplos de funciones cuadráticas son las siguientes: $y = x^2$ $y = -x^2 + 1$ $y = x^2 - 6x + 8$

7.2.3. FUNCIONES RACIONALES

Una función y = f(x) decimos que es racional cuando

$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es un cociente de polinomios P (x) y Q(x). Al ser un cociente su dominio son todos los números reales menos los números que anulan el denominador

Dom = R − {raíces del denominador}

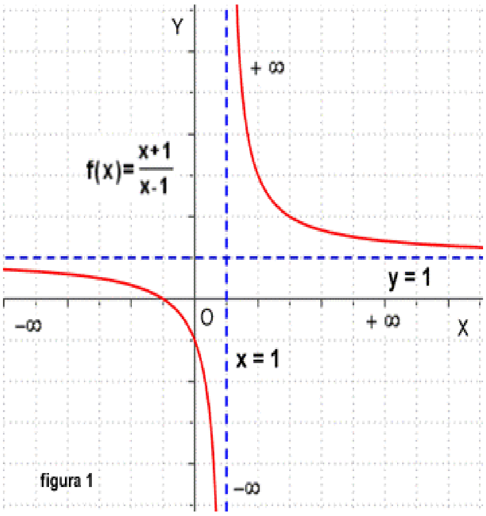
Ejemplos de funciones racionales y sus dominios son las siguientes:

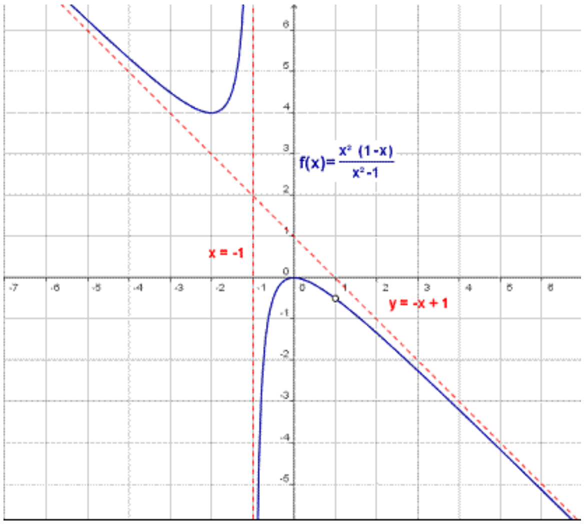
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ Dom=R-{0} $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$ Dom=R-[1}

$f(x) = \dfrac{`x+1}{x-2}$ Dom = R − {2} $f(x) = \dfrac{2}{x^2-1}$ Dom = R − {±1}

$f(x) = \dfrac{3}{x^2+1}$ Dom = R

Ejemplos de funciones racionales



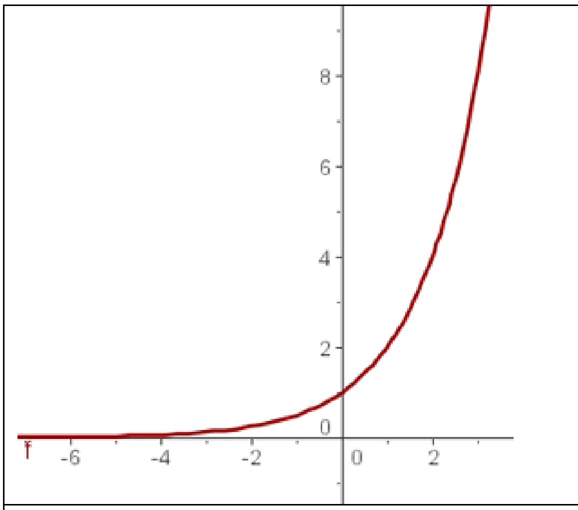


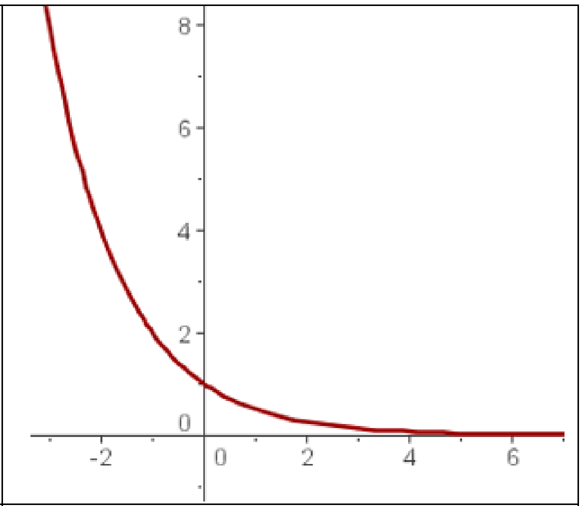
8. Funciones trascendentes

8.1. Funciones exponenciales.

La función exponencial es del tipo: $f(x) = a^x$, donde a>0

Sea a un número real positivo. La función que a cada número real x le hace corresponder la potencia a^x se llama función exponencial de base a y exponente x.



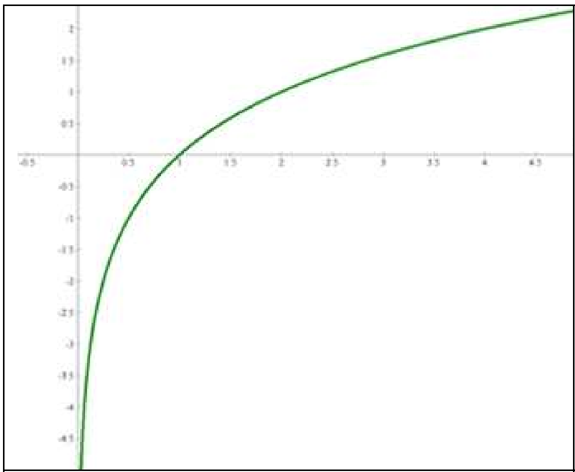
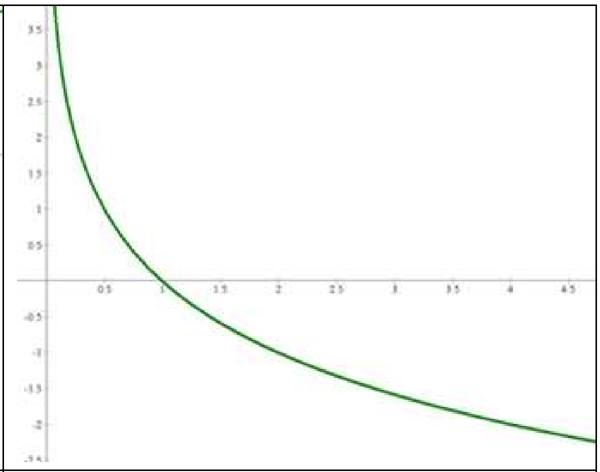


$f(x) = 2^x$ Dominio: $\mathbb{R}$. Recorrido: $\mathbb{R}^+$. Es continua. Los puntos (0, 1) y (1, 2) pertenecen a la gráfica. Es inyectiva(ninguna imagen tiene más de un original). Creciente .	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ Dominio: $\mathbb{R}$. Recorrido: $\mathbb{R}^+$. Es continua. Los puntos (0, 1) y (1, 1/2) pertenecen a la gráfica. Es inyectiva $\forall$ a ≠ 1(ninguna imagen tiene más de un original). Decreciente

8.2. Funciones logarítmicas.

La función logarítmica en base a es la función inversa de la exponencial en base a.

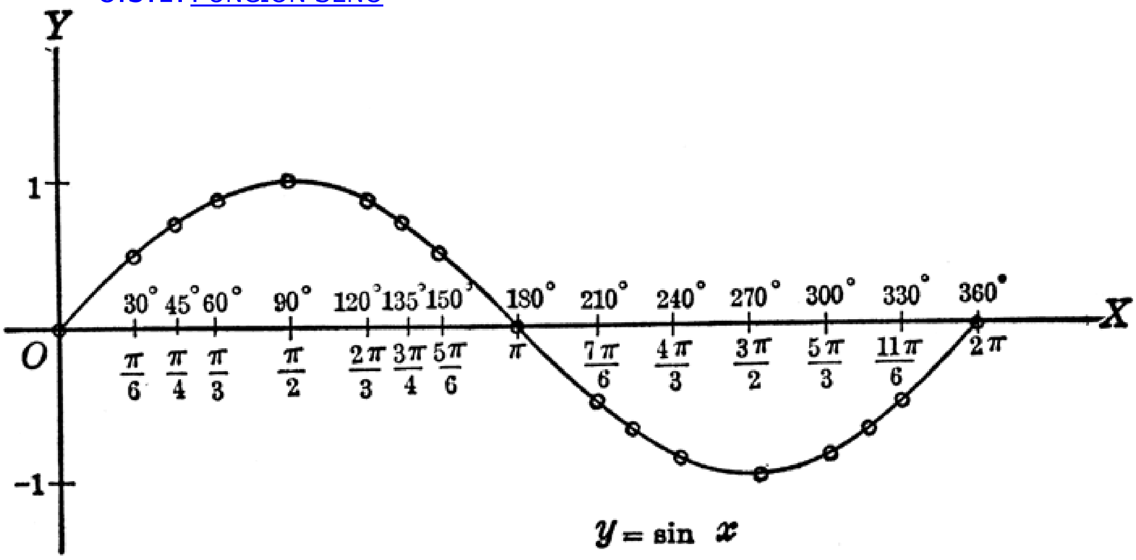
$f(x) = \log_a x \qquad a > 0; a \neq 1$

	
$f(x) = \log_2 x$	$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

Dominio: $\mathbb{R}^+$
Recorrido: $\mathbb{R}$
Es continua.
Los puntos (1, 0) y (a, 1) pertenecen a la gráfica.
Es inyectiva (ninguna imagen tiene más de un original).
Creciente si a>1.(a es la base del logaritmo)
Decreciente si a<1.

8.3. Funciones trigonométricas.

8.3.1. FUNCIÓN SENO



Propiedades de la función seno

Dominio: $\mathbb{R}$ — Recorrido: [-1, 1]

Período: 2π rad — Continuidad: Continua en $\forall x \in \mathbb{R}$

Creciente en: $\ldots \cup (-\pi/2, \pi/2) \cup (3\pi/2, 5\pi/2) \cup \ldots$

Decreciente en: $\ldots \cup (\pi/2, 3\pi/2) \cup (5\pi/2, 7\pi/2) \cup \ldots$

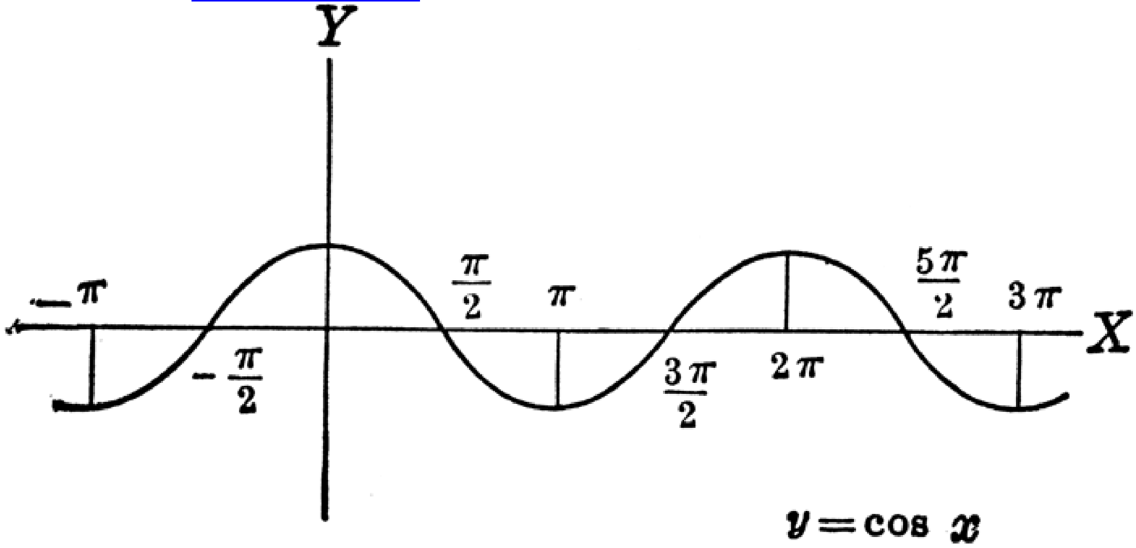
Máximos: $(\pi/2 + 2\pi \cdot k, 1)$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

Mínimos: $(3\pi/2 + 2\pi \cdot k, -1)$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

Impar: sen(-x) = -sen x (simétrica respecto el origen)

Cortes con el eje OX: $x = \{0 + \pi \cdot k\}$

8.3.2. Función coseno



Dominio: $\mathbb{R}$

Recorrido: [-1, 1]

Período: 2π *rad*

Continuidad: Continua en $\forall x \in \mathbb{R}$

Creciente en: $\ldots \cup (-\pi, 0) \cup (\pi, 2\pi) \cup \ldots$

Decreciente en: $\ldots \cup (0, \pi) \cup (2\pi, 3\pi) \cup \ldots$

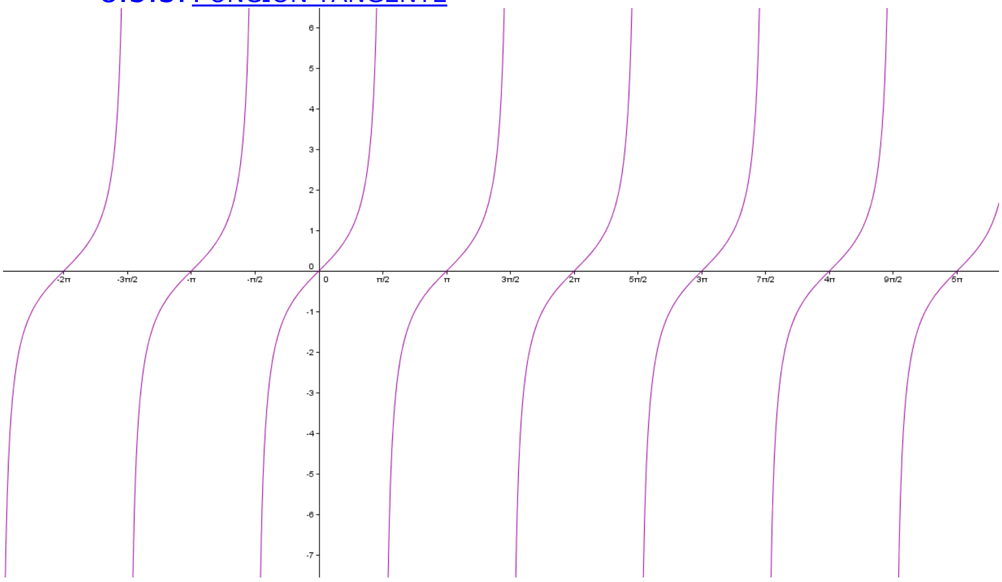
Máximos: $(2\pi \cdot k, 1)$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

Mínimos: $(\pi \cdot (2k+1), -1)$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

Par: cos(-x) = cos x (simétrica respecto el eje Y)

Cortes con el eje OX: $x = \{\pi/2 + k\}$

8.3.3. FUNCIÓN TANGENTE



Propiedades de la función tangente

Dominio: $\mathbb{R} - \{(2k+1)\cdot \pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} - \{\ldots,-\pi/2,\ \pi/2, 3\pi/2,\ \ldots\}$

Recorrido: $\mathbb{R}$

Continuidad: Continua en $\forall x \in \mathbb{R} - \{(\pi/2 + \pi\cdot k)\}$

Período: $\pi\ rad$

Creciente en: $\mathbb{R}$

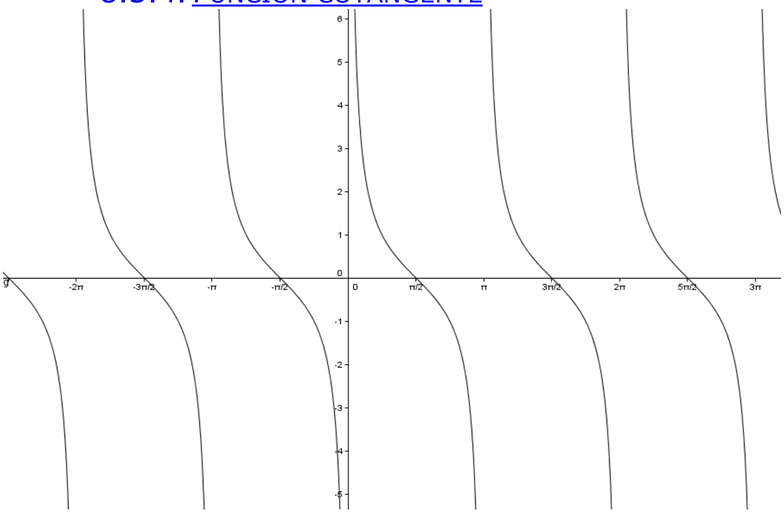
Máximos: No tiene.

Mínimos: No tiene.

Impar: tg(−x) = −tg x

Cortes con el eje OX: $x = \{0 + \pi\cdot k\}$

8.3.4. FUNCIÓN COTANGENTE



Propiedades de la función cotangente

Dominio: $\mathbb{R} - \{k\cdot\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} - \{\ldots,-\pi,\ 0,\ \pi,\ \ldots\}$

Recorrido: $\mathbb{R}$

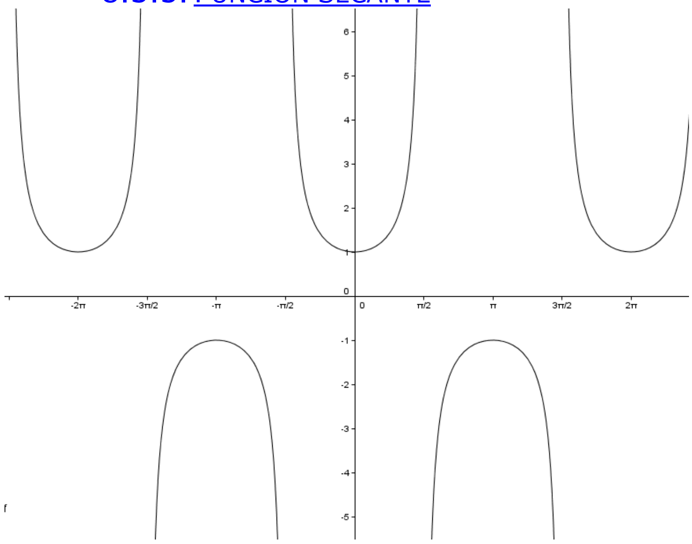
Continuidad: Continua en $x \in \mathbb{R} - \{\pi\cdot k,\ k \in \mathbb{Z}\}$

Período: $\pi\ rad$

Decreciente en: $\mathbb{R}$
Máximos: No tiene.
Mínimos: No tiene.
Impar: cotg(−x) = −cotg x

Cortes con el eje OX: $x = \{\pi/2 + k\}$

8.3.5. FUNCIÓN SECANTE



Propiedades de la función secante

Dominio: $\mathbb{R} - \{(2k+1)\cdot\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} - \{\ldots,-\pi/2,\ \pi/2, 3\pi/2,\ \ldots\}$

Recorrido: (- ∞, -1] $\cup$[1, ∞)

Período: 2π *rad*

Continuidad: Continua en $\forall x \in \mathbb{R} - \{(\pi/2 + \pi\cdot k)\}$

Creciente en: $\ldots\cup\ (0,\ \pi/2)\ \cup\ (\pi/2,\ \pi)\ \cup\ldots$

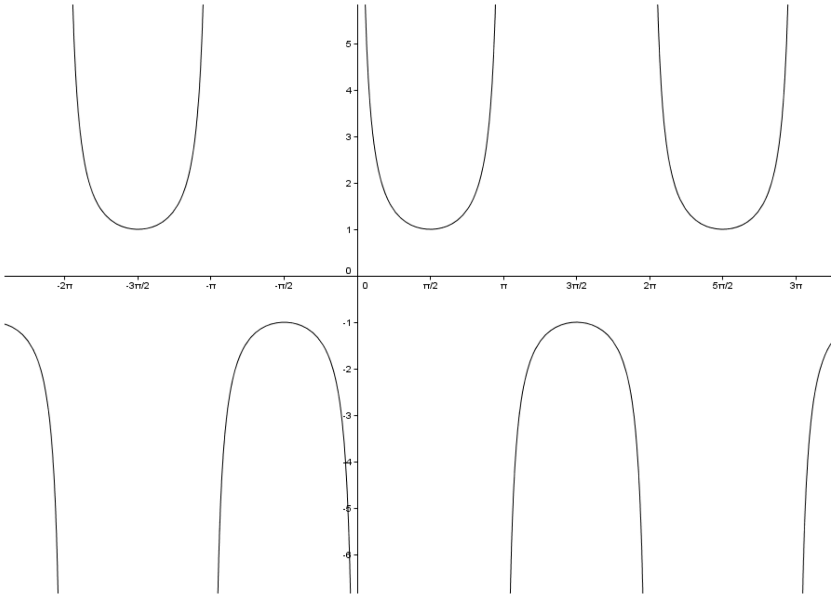
Decreciente en: $\ldots\cup\ (\pi,\ 3\pi/2)\ \cup\ (3\pi/2,\ 2\pi)\ \cup\ldots$

Máximos: $(\ 2\pi\cdot k,\ -1)\qquad k \in \mathbb{Z}$

Mínimos: $(\pi\cdot(2k+1),\ -1)\qquad k \in \mathbb{Z}$

Par: sec(-x) = sec x
Cortes con el eje OX: No corta

8.3.6. FUNCIÓN COSECANTE



Propiedades de la función cosecante

Dominio: $\mathbb{R} - \{k \cdot \pi \text{ , } k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} - \{\ldots, -\pi, 0, \pi, \ldots\}$

Recorrido: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

Período: 2π rad

Continuidad: Continua en $x \in \mathbb{R} - \{\pi \cdot k \text{ , } k \in \mathbb{Z}\}$

Creciente en: $\ldots \cup (\pi/2, \pi) \cup (\pi, 3\pi/2) \cup \ldots$

Decreciente en: $\ldots \cup (0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi) \cup \ldots$

Máximos: $(3\pi/2 + 2\pi \cdot k, -1)$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

Mínimos: $(\pi/2 + 2\pi \cdot k, -1)$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

Impar: cosec(-x) = -cosec x

Cortes con el eje OX: No corta