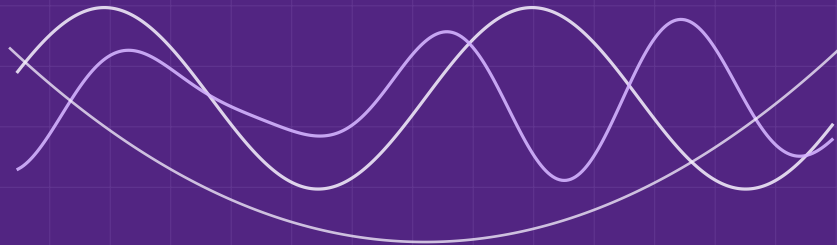


EXÁMENES DE LADIS

CURSO 2019–2020

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$



$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

“La matemática es la reina de las ciencias, y la teoría de números es la reina de la matemática.”

— Carl Friedrich Gauss

EXÁMENES DE LADIS

3º ESO APLICADAS

CURSO 2019–2020

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$a^n + b^n = c^n$$

*“He descubierto una demostración verdaderamente maravillosa,
pero este margen es demasiado estrecho para contenerla.”*

— Pierre de Fermat

Nº1.- Calcúlese

a) $4 \cdot 2 - 3 \cdot (4 - 2 \cdot 3 + (5 - 3) \cdot (-2)) - (5 \cdot 5)$

b) $-3 - 4 \cdot 5 \cdot (-2) - 42 - (3 - 2 \cdot 4)$
(2 puntos)

Nº2.- De los siguientes números, indica cuáles de ellos son naturales, enteros, racionales e irracionales:

$2,25; -\frac{3}{4}; -\frac{20}{5}; \sqrt{18}; \sqrt{9}$

(1 punto)

Nº3.- Calcula y aproxima el resultado final a las centésimas:

a) $(3,157 + 24,03 - 0,5176) : (26,67)$

b) $(34,47 \cdot 3,22) - 58,739$

(2 puntos)

Nº4.- Completa la siguiente tabla:

	3 758	69 300	7 254 702
Divisible por 2			
Divisible por 3			
Divisible por 5			
Divisible por 9			
Divisible por 11			

(1 punto)

Nº5.- Calcula el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de 48, 72 y 84.

(2 puntos)

Nº6.- En un albergue coinciden tres grupos de excursionistas de 40, 56 y 72 personas cada grupo. El camarero quiere organizar el comedor de forma que en cada mesa haya igual número de comensales y se reúna el mayor número de personas posible sin mezclar los grupos. ¿Cuántos comensales sentará en cada mesa?

(1 punto)

Nº7.- ¿Cuánto costará pintar las puertas y ventanas de un piso si tiene 9 ventanas y 8 puertas y el pintor cobra 10,5 euros por pintar una puerta y 7,35 euros por pintar una ventana?

(1 punto)

MATEMÁTICAS

Tema 1 — Soluciones Completas

EXAMEN 3º A ESO — 15 de octubre de 2019

“No hay camino real hacia la Geometría.”

— EUCLIDES de Alejandría (circa 300 a.C.)

ÍNDICE DE EJERCICIOS — SOLUCIONARIO

Contenidos del Solucionario

Nº	Ejercicio	Pág.
1	Cálculo con números enteros y orden de operaciones	2
2	Clasificación de números: naturales, enteros, racionales e irracionales	6
3	Cálculo decimal y aproximación a las centésimas	8
4	Tabla de criterios de divisibilidad	10
5	Mínimo Común Múltiplo y Máximo Común Divisor de 48, 72 y 84	13
6	Problema de excursionistas: organización del comedor	16
7	Problema de coste de pintura de puertas y ventanas	18

Puntuación del Examen

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Ej. 5	Ej. 6	Ej. 7	TOTAL
2 pts	1 pt	2 pts	1 pt	2 pts	1 pt	1 pt	10 pts



Ejercicio N° 1

(2 puntos)

Calcúlese:

a) $4 \cdot 2 - 3 \cdot (4 - 2 \cdot 3 + (5 - 3) \cdot (-2)) - (5 \cdot 5)$

b) $-3 - 4 \cdot 5 \cdot (-2) - 42 - (3 - 2 \cdot 4)$

Orden de Operaciones: Paréntesis $\rightarrow$ Potencias $\rightarrow \times$ y $\div$ $\rightarrow +$ y $-$



Regla PEMDAS / BODMAS: de izquierda a derecha dentro del mismo nivel

Apartado a) — Solución Completa

Expresión original:

$$4 \cdot 2 - 3 \cdot (4 - 2 \cdot 3 + (5 - 3) \cdot (-2)) - (5 \cdot 5)$$

Paso 1: Resolvemos el paréntesis más interno $(5 - 3)$:

$$(5 - 3) = 2$$

La expresión queda:

$$4 \cdot 2 - 3 \cdot (4 - 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-2)) - (5 \cdot 5)$$

Paso 2: Dentro del paréntesis grande, realizamos las **multiplicaciones primero**:

$$2 \cdot 3 = 6 \quad \text{y} \quad 2 \cdot (-2) = -4$$

El interior del paréntesis queda:

$$4 - 6 + (-4) = 4 - 6 - 4 = -6$$

Paso 3: Resolvemos el paréntesis $(5 \cdot 5)$:

$$(5 \cdot 5) = 25$$

La expresión queda:

$$4 \cdot 2 - 3 \cdot (-6) - 25$$

Paso 4: Realizamos las **multiplicaciones restantes**:

$$4 \cdot 2 = 8 \quad \text{y} \quad 3 \cdot (-6) = -18$$

La expresión queda:

$$8 - (-18) - 25 = 8 + 18 - 25$$

Paso 5: Realizamos las **sumas y restas** de izquierda a derecha:

$$8 + 18 = 26 \quad \Rightarrow \quad 26 - 25 = 1$$

$$4 \cdot 2 - 3 \cdot (4 - 2 \cdot 3 + (5 - 3) \cdot (-2)) - (5 \cdot 5) = \boxed{1}$$

Apartado b) — Solución Completa

Expresión original:

$$-3 - 4 \cdot 5 \cdot (-2) - 42 - (3 - 2 \cdot 4)$$

Paso 1: Resolvemos el paréntesis $(3 - 2 \cdot 4)$, primero la multiplicación:

$$2 \cdot 4 = 8 \quad \Rightarrow \quad 3 - 8 = -5$$

La expresión queda:

$$-3 - 4 \cdot 5 \cdot (-2) - 42 - (-5)$$

Paso 2: Realizamos las **multiplicaciones** de izquierda a derecha:

$$4 \cdot 5 = 20 \quad \text{luego} \quad 20 \cdot (-2) = -40$$

La expresión queda:

$$-3 - (-40) - 42 - (-5)$$

Paso 3: Simplificamos los signos dobles ($--$ se convierte en $+$):

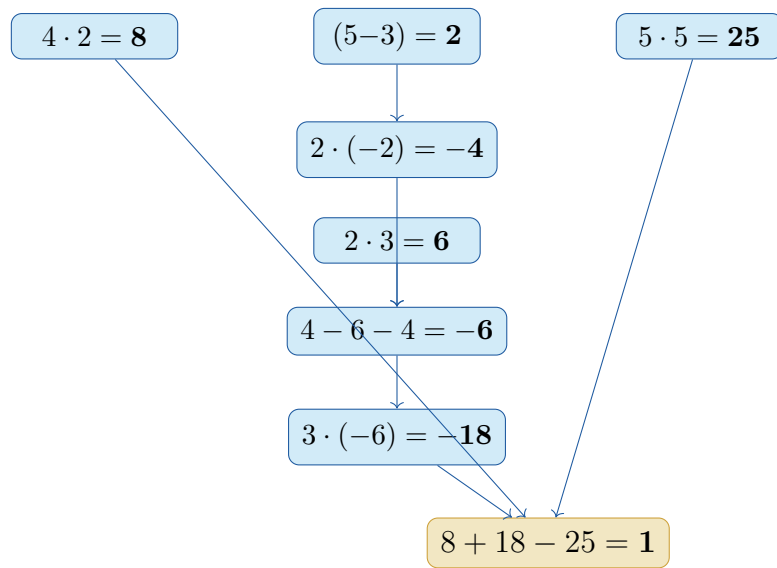
$$-3 + 40 - 42 + 5$$

Paso 4: Realizamos las **sumas y restas** de izquierda a derecha:

$$-3 + 40 = 37 \quad \Rightarrow \quad 37 - 42 = -5 \quad \Rightarrow \quad -5 + 5 = 0$$

$$\boxed{-3 - 4 \cdot 5 \cdot (-2) - 42 - (3 - 2 \cdot 4) = 0}$$

Árbol de cálculo — Apartado a)

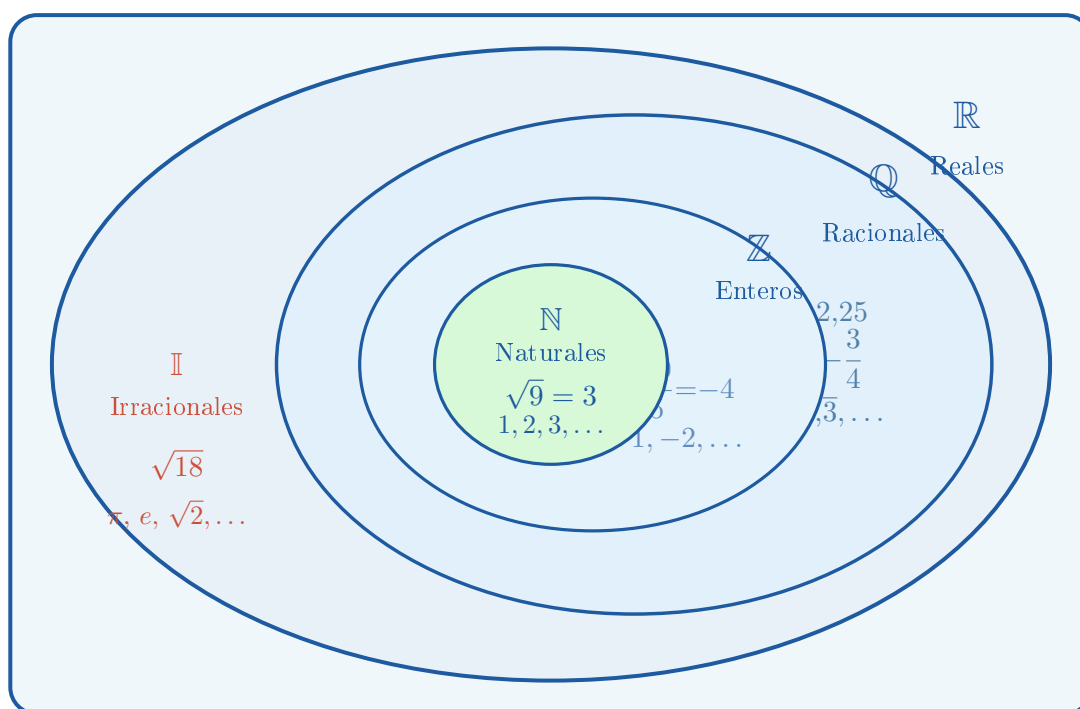


Ejercicio N° 2

(1 punto)

De los siguientes números, indica cuáles de ellos son naturales, enteros, racionales e irracionales:

$$2,25; \quad -\frac{3}{4}; \quad -\frac{20}{5}; \quad \sqrt{18}; \quad \sqrt{9}$$



Análisis de cada número

Antes de clasificar, simplificamos o calculamos cada número:

1. **2,25**: Es un número decimal exacto. $2,25 = \frac{225}{100} = \frac{9}{4}$. Se puede expresar como fracción $\Rightarrow$ **RACIONAL** ($\in \mathbb{Q}$). No es entero (no es un número sin decimales).
2. $-\frac{3}{4}$: Es una fracción negativa no simplificable. Ya está en forma de fracción $\Rightarrow$ **RACIONAL** ($\in \mathbb{Q}$). No es entero (denominador $\neq 1$).
3. $-\frac{20}{5}$: Simplificamos: $-\frac{20}{5} = -4$. Es un **entero negativo** $\Rightarrow$ **ENTERO** ($\in \mathbb{Z}$) y también **RACIONAL** ($\in \mathbb{Q}$). No es natural (es negativo).
4. $\sqrt{18}$: Calculamos: $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2} \approx 4,242\dots$. Es un decimal infinito no periódico. No se puede expresar como fracción $\Rightarrow$ **IRRACIONAL** ($\in \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$).
5. $\sqrt{9}$: Calculamos: $\sqrt{9} = 3$. Es un entero positivo $\Rightarrow$ **NATURAL** ($\in \mathbb{N}$), **ENTERO** ($\in \mathbb{Z}$) y **RACIONAL** ($\in \mathbb{Q}$).

Tabla Resumen de Clasificación

Número	Natural $\mathbb{N}$	Entero $\mathbb{Z}$	Racional $\mathbb{Q}$	Irracional $\mathbb{I}$
2,25	—	—	✓	—
$-\frac{3}{4}$	—	—	✓	—
$-\frac{20}{5} = -4$	—	✓	✓	—
$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$	—	—	—	✓
$\sqrt{9} = 3$	✓	✓	✓	—



Ejercicio N° 3

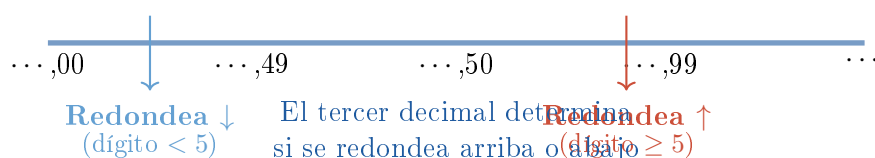
(2 puntos)

Calcula y aproxima el resultado final a las centésimas:

a) $(3,157 + 24,03 - 0,5176) : 26,67$

b) $(34,47 \cdot 3,22) - 58,739$

Regla de Redondeo a las Centésimas (2 decimales)



Apartado a) — Solución Completa

Expresión: $(3,157 + 24,03 - 0,5176) : 26,67$ **Paso 1:** Resolvemos el paréntesis — suma y resta de decimales (alineando la coma):

$$\begin{array}{r} 3,1570 \\ + 24,0300 \\ \hline 27,1870 \end{array} \quad \text{luego} \quad \begin{array}{r} 27,1870 \\ - 0,5176 \\ \hline 26,6694 \end{array}$$

Resultado del paréntesis: **26,6694****Paso 2:** Dividimos entre 26,67:

$$26,6694 \div 26,67 = 0,999977 \dots$$

Paso 3: Aproximamos a las **centésimas** (2 decimales). El tercer decimal es $9 \geq 5$, por lo que **redondeamos hacia arriba**:

$$0,999 \dots \approx 1,00$$

$$(3,157 + 24,03 - 0,5176) : 26,67 \approx \boxed{1,00}$$

Apartado b) — Solución Completa

Expresión: $(34,47 \cdot 3,22) - 58,739$

Paso 1: Resolvemos el paréntesis — multiplicación de decimales:

Para multiplicar $34,47 \times 3,22$, ignoramos la coma y multiplicamos como enteros, luego colocamos la coma ($2 + 2 = 4$ decimales en total):

$$3447 \times 322 = 3447 \times 300 + 3447 \times 22$$

$$3447 \times 300 = 1.034.100$$

$$3447 \times 22 = 3447 \times 20 + 3447 \times 2 = 68.940 + 6.894 = 75.834$$

$$3447 \times 322 = 1.034.100 + 75.834 = 1.109.934$$

Con 4 decimales: $34,47 \times 3,22 = 110,9934$

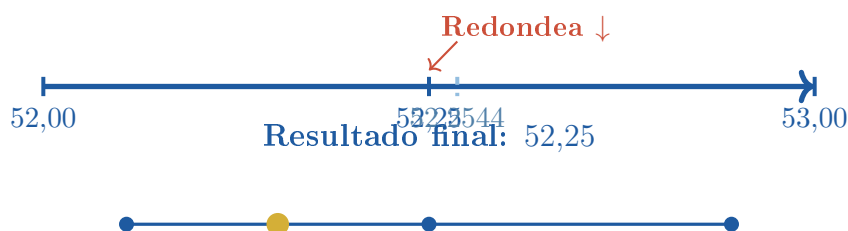
Paso 2: Restamos 58,739:

$$\begin{array}{r} 110,9934 \\ - 58,7390 \\ \hline 52,2544 \end{array}$$

Paso 3: Aproximamos a las **centésimas**. El tercer decimal es $4 < 5$, por lo que **redondeamos hacia abajo** (simplemente eliminamos el tercer y cuarto decimal):

$$52,2544 \approx 52,25$$

$$(34,47 \cdot 3,22) - 58,739 \approx \boxed{52,25}$$



Ejercicio N° 4**(1 punto)**

Completa la siguiente tabla de criterios de divisibilidad:

	3 758	69 300	7 254 702
Divisible por 2			
Divisible por 3			
Divisible por 5			
Divisible por 9			
Divisible por 11			

Criterios de Divisibilidad — Recordatorio

- 1. Divisible por 2:** El último dígito es par (0, 2, 4, 6 u 8).
- 2. Divisible por 3:** La suma de sus dígitos es divisible por 3.
- 3. Divisible por 5:** El último dígito es 0 ó 5.
- 4. Divisible por 9:** La suma de sus dígitos es divisible por 9.
- 5. Divisible por 11:** La suma alternada de dígitos (de derecha a izquierda: $d_1 - d_2 + d_3 - d_4 + \dots$) es divisible por 11.

Aplicación a cada número

Número: 3 758

- **Por 2:** Último dígito = 8 (par) $\Rightarrow$ **SÍ**
- **Por 3:** Suma de dígitos: $3 + 7 + 5 + 8 = 23$. $23 \div 3 = 7$ resto 2 $\Rightarrow$ **NO**
- **Por 5:** Último dígito = 8 $\neq 0, 5 \Rightarrow$ **NO**
- **Por 9:** Suma de dígitos = 23. $23 \div 9 = 2$ resto 5 $\Rightarrow$ **NO**
- **Por 11:** Suma alternada (de derecha a izq.): $8 - 5 + 7 - 3 = 7$. $7 \div 11$: no es divisible $\Rightarrow$ **NO**

Número: 69 300

- **Por 2:** Último dígito = 0 (par) $\Rightarrow$ **SÍ**
- **Por 3:** Suma de dígitos: $6 + 9 + 3 + 0 + 0 = 18$. $18 \div 3 = 6$ (exacto) $\Rightarrow$ **SÍ**
- **Por 5:** Último dígito = 0 $\Rightarrow$ **SÍ**
- **Por 9:** Suma de dígitos = 18. $18 \div 9 = 2$ (exacto) $\Rightarrow$ **SÍ**
- **Por 11:** Suma alternada (de derecha a izq.): $0 - 0 + 3 - 9 + 6 = 0$. 0 es divisible por 11 $\Rightarrow$ **SÍ**

Número: 7 254 702

- **Por 2:** Último dígito = 2 (par) $\Rightarrow$ **SÍ**
- **Por 3:** Suma de dígitos: $7 + 2 + 5 + 4 + 7 + 0 + 2 = 27$. $27 \div 3 = 9$ (exacto) $\Rightarrow$ **SÍ**
- **Por 5:** Último dígito = 2 $\neq 0, 5 \Rightarrow$ **NO**
- **Por 9:** Suma de dígitos = 27. $27 \div 9 = 3$ (exacto) $\Rightarrow$ **SÍ**
- **Por 11:** Suma alternada (de derecha a izq.): $2 - 0 + 7 - 4 + 5 - 2 + 7 = 15$. $15 \div 11$: no es divisible $\Rightarrow$ **NO**

Tabla Completa — Resultado Final

Criterio	3 758	69 300	7 254 702
Divisible por 2	SÍ	SÍ	SÍ
Divisible por 3	NO	SÍ	SÍ
Divisible por 5	NO	SÍ	NO
Divisible por 9	NO	SÍ	SÍ
Divisible por 11	NO	SÍ	NO

Criterio del 11 — Suma Alternada de Dígitos

69 300: $\begin{array}{c} \textcircled{6} \quad \textcircled{9} \quad \textcircled{3} \quad \textcircled{0} \quad \textcircled{0} \\ + \quad - \quad + \quad - \quad + \end{array} \Rightarrow 6 - 9 + 3 - 0 + 0 = 0 \Rightarrow 3 - 9 + 6 = 0 \Rightarrow \checkmark \text{ SÍ}$

3 758: $\begin{array}{c} \textcircled{3} \quad \textcircled{7} \quad \textcircled{5} \quad \textcircled{8} \\ + \quad - \quad + \quad - \end{array} \Rightarrow 3 - 7 + 5 - 8 = -7 \Rightarrow 8 - 5 + 7 - 3 = 7 \Rightarrow \times \text{ NO}$

*La suma alternada se calcula de derecha a izquierda, alternando signo positivo y negativo.



Ejercicio N° 5

(2 puntos)

Calcula el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de 48, 72 y 84.

Paso 1: Descomposición en factores primos

Descomponemos cada número en sus factores primos mediante divisiones sucesivas:

Descomposición de 48

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$48 = 2^4 \cdot 3$$

Descomposición de 72

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

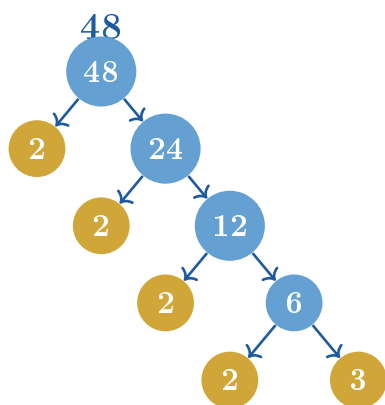
$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

Descomposición de 84

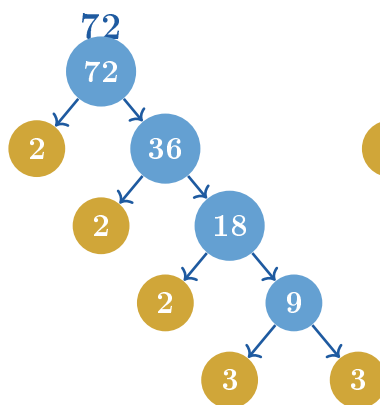
$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

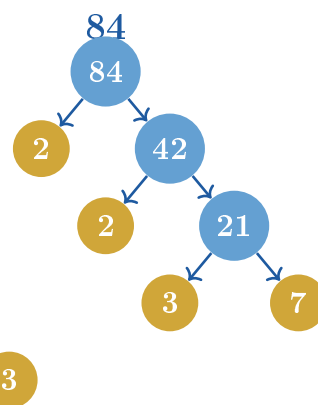
Árbol de Factores Primos



$$48 = 2^4 \cdot 3$$



$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$



$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

● Factor primo ● Número compuesto

Paso 2: Cálculo del MCD (Máximo Común Divisor)

Regla: El MCD se obtiene multiplicando los **factores comunes a todos los números**, tomando el de **menor exponente**.

Factor	En 48	En 72	En 84
2	2^4	2^3	2^2
3	3^1	3^2	3^1
7	—	—	7^1

Los factores **comunes a los tres** son: 2 y 3.

- Factor 2: menores exponentes $\Rightarrow 2^2 = 4$
- Factor 3: menor exponente $\Rightarrow 3^1 = 3$
- Factor 7: NO aparece en 48 ni en 72, así que **no se incluye** en el MCD.

$$\text{MCD}(48, 72, 84) = 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = \mathbf{12}$$

$$\text{MCD}(48, 72, 84) = \boxed{12}$$

Interpretación: 12 es el número más grande que divide exactamente a 48, a 72 y a 84. Verificación: $48 = 12 \times 4$, $72 = 12 \times 6$, $84 = 12 \times 7$. ✓

Paso 3: Cálculo del MCM (Mínimo Común Múltiplo)

Regla: El MCM se obtiene multiplicando **todos los factores que aparecen** (comunes o no), tomando el de **mayor exponente**.

- Factor 2: mayor exponente $\Rightarrow 2^4 = 16$ (de 48)
- Factor 3: mayor exponente $\Rightarrow 3^2 = 9$ (de 72)
- Factor 7: mayor exponente $\Rightarrow 7^1 = 7$ (de 84)

$$\text{MCM}(48, 72, 84) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 = 16 \cdot 9 \cdot 7$$

$$16 \cdot 9 = 144 \quad \Rightarrow \quad 144 \cdot 7 = 1.008$$

$$\text{MCM}(48, 72, 84) = \boxed{1.008}$$

Interpretación: 1.008 es el número más pequeño que es múltiplo de 48, de 72 y de 84. Verificación: $1.008 = 48 \times 21$, $1.008 = 72 \times 14$, $1.008 = 84 \times 12$. ✓



Ejercicio N° 6

(1 punto)

En un albergue coinciden tres grupos de excursionistas de 40, 56 y 72 personas cada grupo. El camarero quiere organizar el comedor de forma que en cada mesa haya igual número de comensales y se reúna el mayor número de personas posible sin mezclar los grupos. ¿Cuántos comensales sentará en cada mesa?

Análisis del problema

¿Qué nos pide el problema?

- En cada mesa debe haber **igual número de comensales**.
- No se pueden mezclar grupos en la misma mesa.
- Se quiere el **mayor número posible** de personas por mesa.

¿Qué operación aplicamos?

Buscamos el número más grande que divide exactamente a 40, a 56 y a 72. Esto es precisamente el **Máximo Común Divisor (MCD)**.

Por eso calculamos: $\text{MCD}(40, 56, 72)$

Organización del Comedor



Solución: Cálculo del MCD(40, 56, 72)

Paso 1: Descomponemos en factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \\ \hline 40 = 2^3 \cdot 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \\ \hline 56 = 2^3 \cdot 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \\ \hline 72 = 2^3 \cdot 3^2 \end{array}$$

Paso 2: El único factor **común a los tres** números es 2. El menor exponente es 2^3 :

$$\text{MCD}(40, 56, 72) = 2^3 = 8$$

Paso 3: Comprobación:

$$40 = 8 \times 5\checkmark \quad 56 = 8 \times 7\checkmark \quad 72 = 8 \times 9\checkmark$$

Respuesta

El camarero debe sentar **8** **comensales en cada mesa.**

Con esta organización:

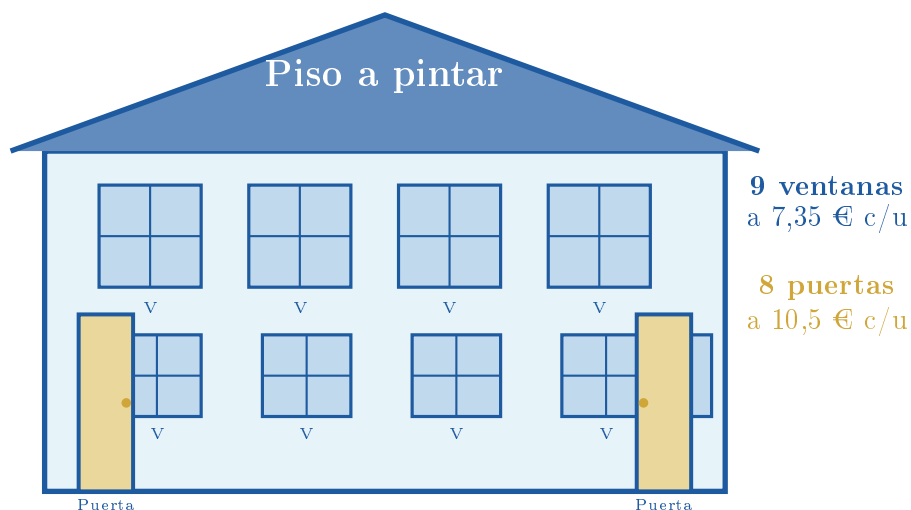
- Grupo de 40 personas $\Rightarrow 40 \div 8 = 5$ mesas.
- Grupo de 56 personas $\Rightarrow 56 \div 8 = 7$ mesas.
- Grupo de 72 personas $\Rightarrow 72 \div 8 = 9$ mesas.
- Total: $5 + 7 + 9 = 21$ mesas.



Ejercicio N^o 7

(1 punto)

¿Cuánto costará pintar las puertas y ventanas de un piso si tiene 9 ventanas y 8 puertas y el pintor cobra 10,5 euros por pintar una puerta y 7,35 euros por pintar una ventana?



Identificación de datos y planteamiento

Elemento	Cantidad	Precio unitario	Subtotal
Ventanas	9	7,35 €	$9 \times 7,35 = ?$
Puertas	8	10,50 €	$8 \times 10,50 = ?$
TOTAL			?

El coste total es:

$$\text{Coste total} = (\text{N}^{\circ}\text{ventanas} \times \text{precio ventana}) + (\text{N}^{\circ}\text{puertas} \times \text{precio puerta})$$

Cálculo detallado

Paso 1: Coste de pintar las **9 ventanas**:

$$9 \times 7,35 = 66,15 \text{ €}$$

Comprobación: $7,35 \times 9 = 7,35 \times 10 - 7,35 = 73,50 - 7,35 = 66,15 \checkmark$

Paso 2: Coste de pintar las **8 puertas**:

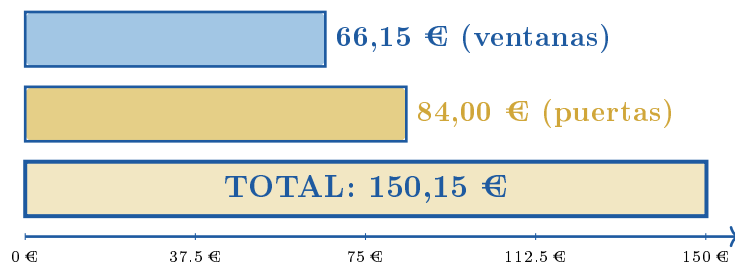
$$8 \times 10,50 = 84,00 \text{ €}$$

Comprobación: $10,50 \times 8 = 10 \times 8 + 0,50 \times 8 = 80 + 4 = 84,00 \checkmark$

Paso 3: Sumamos los dos costes parciales:

$$\text{Coste total} = 66,15 + 84,00 = 150,15 \text{ €}$$

Desglose del Coste Total



Respuesta

Pintar las 9 ventanas y 8 puertas costará **150,15 €**



Resumen Final de Resultados

Todas las respuestas del examen

Ejercicio	Enunciado resumido	Resultado
1a	Cálculo con enteros (a)	$\boxed{1}$
1b	Cálculo con enteros (b)	$\boxed{0}$
2	Clasificación de números	Ver tabla completa
3a	Cálculo decimal (a)	$\boxed{1,00}$
3b	Cálculo decimal (b)	$\boxed{52,25}$
4	Tabla de divisibilidad	Ver tabla completa
5	MCD y MCM de 48, 72, 84	MCD= $\boxed{12}$, MCM= $\boxed{1008}$
6	Comensales por mesa	$\boxed{8}$ personas
7	Coste de pintura	$\boxed{150,15 \text{ €}}$

“Las leyes de la naturaleza no son más que los pensamientos matemáticos de Dios.”

— Euclides de Alejandría



¡Matemáticas: el lenguaje universal del conocimiento!

Nº1.- Calcula el valor de x para que las fracciones sean equivalentes:

$$a) \frac{24}{36} = \frac{x}{3} \quad b) \frac{3}{x} = \frac{2}{6}$$

(1 PUNTO)

Nº2.- Ordena de menor a mayor las siguientes fracciones:

$$\frac{2}{3} \quad , \quad \frac{5}{6} \quad , \quad \frac{7}{12} \quad , \quad \frac{3}{4}$$

(1 PUNTO)

Nº3.- Resuelve las siguientes operaciones con fracciones y simplifica al máximo:

$$a) \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{13}{32} \quad b) \left(1 + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - \frac{59}{48}$$

$$c) 5 : \left(\frac{2}{4} + 1\right) - 3 : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{26}{3} \quad d) \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5} - 3\right) + \frac{29}{6} : 5$$

(2 PUNTOS)

Nº4.- De un depósito de 1500 litros se sacan $\frac{1}{6}$ del depósito y 750 litros más. ¿Qué fracción del total queda en el depósito? ¿Y qué cantidad es?

(2 PUNTOS)

Nº5.- Se vendieron las $\frac{3}{5}$ partes de un solar y, posteriormente $\frac{4}{5}$ partes de lo que quedaba.

a) ¿Qué fracción del solar queda sin vender?

b) Si el solar es de 1000 m² ¿Qué cantidad se traspasa en cada venta y cuánto queda?

(2 PUNTOS)

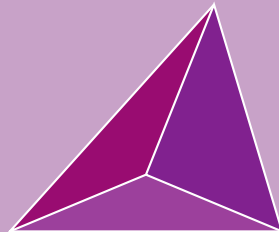
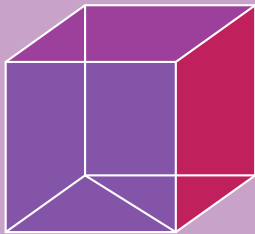
Nº6.- Escribe los números decimales siguientes en forma de fracción e indica de qué tipo son:

$$a) 2,019 \quad b) 3,\widehat{112} \quad c) -2,01\widehat{5} \quad d) 4,0$$

(2 PUNTOS)

SUERTE JÓVENES

MATEMÁTICAS



EXAMEN RESUELTO

3^o ESO - Curso 2019/2020

Tema: Operaciones con Fracciones

Fecha: 08 de noviembre de 2019

“Dadme un punto de apoyo y moveré el mundo”

— Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C.)

Centro IES Tovar
Junta de Castilla y León

Índice

1. Ejercicio 1: Fracciones Equivalentes	2
1.1. Enunciado	2
1.2. Ilustración del Concepto	2
1.3. Resolución Detallada	2
2. Ejercicio 2: Ordenación de Fracciones	4
2.1. Enunciado	4
2.2. Ilustración del Concepto	4
2.3. Resolución Detallada	4
2.4. Verificación con Decimales	5
3. Ejercicio 3: Operaciones con Fracciones	6
3.1. Enunciado	6
3.2. Ilustración del Concepto	6
3.3. Resolución Detallada	6
4. Ejercicio 4: Problema del Depósito	10
4.1. Enunciado	10
4.2. Ilustración del Problema	10
4.3. Resolución Detallada	10
4.4. Verificación	11
5. Ejercicio 5: Problema del Solar	12
5.1. Enunciado	12
5.2. Ilustración del Problema	12
5.3. Resolución Detallada	12
6. Ejercicio 6: Números Decimales a Fracciones	14
6.1. Enunciado	14
6.2. Ilustración del Concepto	14
6.3. Resolución Detallada	14
6.4. Resumen de Tipos de Decimales	17
Resumen de Soluciones	18

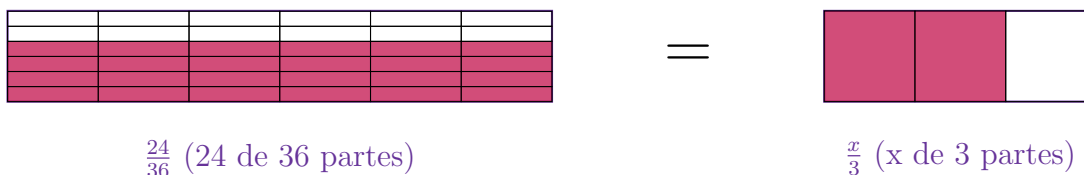
1. Ejercicio 1: Fracciones Equivalentes

1.1. Enunciado

Calcula el valor de x para que las fracciones sean equivalentes:

$$a) \quad \frac{24}{36} = \frac{x}{3} \qquad b) \quad \frac{3}{x} = \frac{2}{6}$$

1.2. Ilustración del Concepto



1.3. Resolución Detallada

Apartado a) $\frac{24}{36} = \frac{x}{3}$

Paso 1: Aplicamos la propiedad fundamental de las fracciones equivalentes. Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes si y solo si:

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Paso 2: Aplicamos esta propiedad a nuestras fracciones:

$$24 \cdot 3 = 36 \cdot x$$

Paso 3: Realizamos la multiplicación en el lado izquierdo:

$$72 = 36 \cdot x$$

Paso 4: Despejamos x dividiendo ambos lados entre 36:

$$x = \frac{72}{36}$$

Paso 5: Simplificamos la fracción dividiendo numerador y denominador entre su máximo común divisor (MCD = 36):

$$x = \frac{72 \div 36}{36 \div 36} = \frac{2}{1} = 2$$

Verificación: Comprobamos que $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

$$\frac{24}{36} = \frac{24 \div 12}{36 \div 12} = \frac{2}{3} \quad \checkmark$$

Respuesta apartado a)

$$x = 2$$

Apartado b) $\frac{3}{x} = \frac{2}{6}$

Paso 1: Aplicamos la propiedad de fracciones equivalentes:

$$3 \cdot 6 = x \cdot 2$$

Paso 2: Realizamos la multiplicación:

$$18 = 2x$$

Paso 3: Despejamos x dividiendo entre 2:

$$x = \frac{18}{2} = 9$$

Verificación: Comprobamos que $\frac{3}{9} = \frac{2}{6}$
Simplificamos ambas fracciones:

$$\frac{3}{9} = \frac{3 \div 3}{9 \div 3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{6} = \frac{2 \div 2}{6 \div 2} = \frac{1}{3} \quad \checkmark$$

Respuesta apartado b)

$$x = 9$$

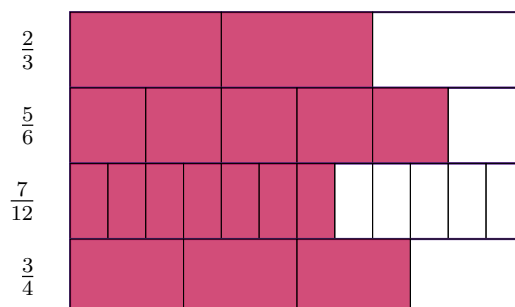
2. Ejercicio 2: Ordenación de Fracciones

2.1. Enunciado

Ordena de menor a mayor las siguientes fracciones:

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{5}{6}, \quad \frac{7}{12}, \quad \frac{3}{4}$$

2.2. Ilustración del Concepto



2.3. Resolución Detallada

Para ordenar fracciones con distintos denominadores, debemos convertirlas a fracciones con el mismo denominador. Calcularemos el **mínimo común múltiplo (mcm)** de los denominadores.

Paso 1: Identificamos los denominadores: 3, 6, 12, 4

Paso 2: Calculamos el mcm(3, 6, 12, 4):

Descomponemos en factores primos:

$$3 = 3$$

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

$$4 = 2^2$$

El mcm es el producto de los factores comunes y no comunes con mayor exponente:

$$\text{mcm}(3, 6, 12, 4) = 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$$

Paso 3: Convertimos cada fracción a denominador 12:

$$\blacksquare \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12} \text{ (multiplicamos por } \frac{4}{4} \text{)}$$

$$\blacksquare \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{10}{12} \text{ (multiplicamos por } \frac{2}{2} \text{)}$$

$$\blacksquare \frac{7}{12} = \frac{7}{12} \text{ (ya tiene denominador 12)}$$

$$\blacksquare \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12} \text{ (multiplicamos por } \frac{3}{3} \text{)}$$

Paso 4: Ordenamos las fracciones con igual denominador comparando los numeradores:

$$\frac{7}{12} < \frac{8}{12} < \frac{9}{12} < \frac{10}{12}$$

Paso 5: Sustituimos por las fracciones originales:

$$\frac{7}{12} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6}$$

2.4. Verificación con Decimales

Podemos verificar convirtiendo a decimales:

$$\begin{aligned}\frac{7}{12} &\approx 0,5833\dots \\ \frac{2}{3} &\approx 0,6666\dots \\ \frac{3}{4} &= 0,75 \\ \frac{5}{6} &\approx 0,8333\dots\end{aligned}$$

Confirmamos que: $0,5833 < 0,6666 < 0,75 < 0,8333$

Respuesta

$$\boxed{\frac{7}{12} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6}}$$

3. Ejercicio 3: Operaciones con Fracciones

3.1. Enunciado

Resuelve las siguientes operaciones con fracciones y simplifica al máximo:

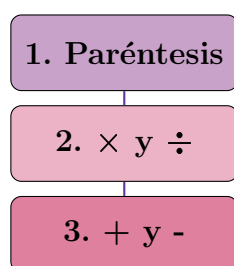
$$a) \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{13}{32}$$

$$b) \quad \left(1 + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - \frac{59}{48}$$

$$c) \quad 5 : \left(\frac{2}{4} + 1\right) - 3 : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{26}{3}$$

$$d) \quad \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5} - 3\right) + \frac{29}{6} : 5$$

3.2. Ilustración del Concepto



Se resuelven primero las operaciones entre paréntesis. Luego multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha. Finalmente sumas y restas de izquierda a derecha.

3.3. Resolución Detallada

Apartado a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{13}{32}$

Paso 1: Aplicamos la jerarquía de operaciones. Primero resolvemos la multiplicación:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 8} = \frac{1}{32}$$

Paso 2: Sustituimos en la expresión original:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{32} - \frac{1}{16} - \frac{13}{32}$$

Paso 3: Calculamos el mcm de los denominadores (2, 32, 16, 32):
Descomposición:

$$\begin{aligned} 2 &= 2 \\ 32 &= 2^5 \\ 16 &= 2^4 \end{aligned}$$

$$\text{mcm}(2, 32, 16, 32) = 2^5 = 32$$

Paso 4: Convertimos todas las fracciones a denominador 32:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= \frac{1 \cdot 16}{2 \cdot 16} = \frac{16}{32} \\ \frac{1}{32} &= \frac{1}{32} \\ \frac{1}{16} &= \frac{1 \cdot 2}{16 \cdot 2} = \frac{2}{32} \\ \frac{13}{32} &= \frac{13}{32}\end{aligned}$$

Paso 5: Realizamos las operaciones con el mismo denominador:

$$\frac{16}{32} - \frac{1}{32} - \frac{2}{32} - \frac{13}{32} = \frac{16 - 1 - 2 - 13}{32} = \frac{0}{32} = 0$$

Respuesta apartado a)

0

Apartado b) $\left(1 + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - \frac{59}{48}$

Paso 1: Resolvemos el primer paréntesis:

$$1 + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Paso 2: Resolvemos el segundo paréntesis ($\text{mcm}(4,2) = 4$):

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$$

Paso 3: Resolvemos el tercer paréntesis ($\text{mcm}(3,4) = 12$):

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}$$

Paso 4: Sustituimos los resultados:

$$\frac{4}{3} - \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{12} - \frac{59}{48}$$

Paso 5: Realizamos la multiplicación:

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{12} = \frac{5 \cdot 1}{4 \cdot 12} = \frac{5}{48}$$

Paso 6: Sustituimos:

$$\frac{4}{3} - \frac{5}{48} - \frac{59}{48}$$

Paso 7: Calculamos el mcm($3, 48$) = 48 y convertimos:

$$\frac{4}{3} = \frac{4 \cdot 16}{3 \cdot 16} = \frac{64}{48}$$

Paso 8: Operamos con denominador común:

$$\frac{64}{48} - \frac{5}{48} - \frac{59}{48} = \frac{64 - 5 - 59}{48} = \frac{0}{48} = 0$$

Respuesta apartado b)

0

Apartado c) $5 : \left(\frac{2}{4} + 1\right) - 3 : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{26}{3}$

Paso 1: Resolvemos el primer paréntesis:

$$\frac{2}{4} + 1 = \frac{2}{4} + \frac{4}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Paso 2: Resolvemos el segundo paréntesis (mcm($2,4$) = 4):

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Paso 3: Sustituimos en la expresión:

$$5 : \frac{3}{2} - 3 : \frac{1}{4} + \frac{26}{3}$$

Paso 4: Recordamos que dividir entre una fracción es multiplicar por su inversa:

$$5 : \frac{3}{2} = 5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 2}{3} = \frac{10}{3}$$

$$3 : \frac{1}{4} = 3 \cdot \frac{4}{1} = 3 \cdot 4 = 12 = \frac{12}{1}$$

Paso 5: Sustituimos:

$$\frac{10}{3} - 12 + \frac{26}{3}$$

Paso 6: Convertimos 12 a fracción con denominador 3:

$$12 = \frac{36}{3}$$

Paso 7: Operamos:

$$\frac{10}{3} - \frac{36}{3} + \frac{26}{3} = \frac{10 - 36 + 26}{3} = \frac{0}{3} = 0$$

Respuesta apartado c)

0

Apartado d) $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5} - 3 \right) + \frac{29}{6} : 5$

Paso 1: Resolvemos el paréntesis. Calculamos $\text{mcm}(3, 5) = 15$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} - \frac{3}{5} - 3 &= \frac{10}{15} - \frac{9}{15} - \frac{45}{15} \\ &= \frac{10 - 9 - 45}{15} = \frac{-44}{15} \end{aligned}$$

Paso 2: Realizamos la multiplicación:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{-44}{15} = \frac{-44}{30} = \frac{-22}{15}$$

(simplificamos dividiendo entre 2)

Paso 3: Realizamos la división:

$$\frac{29}{6} : 5 = \frac{29}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{29}{30}$$

Paso 4: Sustituimos en la expresión:

$$\frac{3}{2} + \frac{-22}{15} + \frac{29}{30}$$

Paso 5: Calculamos $\text{mcm}(2, 15, 30) = 30$:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} &= \frac{45}{30} \\ \frac{-22}{15} &= \frac{-44}{30} \\ \frac{29}{30} &= \frac{29}{30} \end{aligned}$$

Paso 6: Sumamos:

$$\frac{45}{30} + \frac{-44}{30} + \frac{29}{30} = \frac{45 - 44 + 29}{30} = \frac{30}{30} = 1$$

Respuesta apartado d)

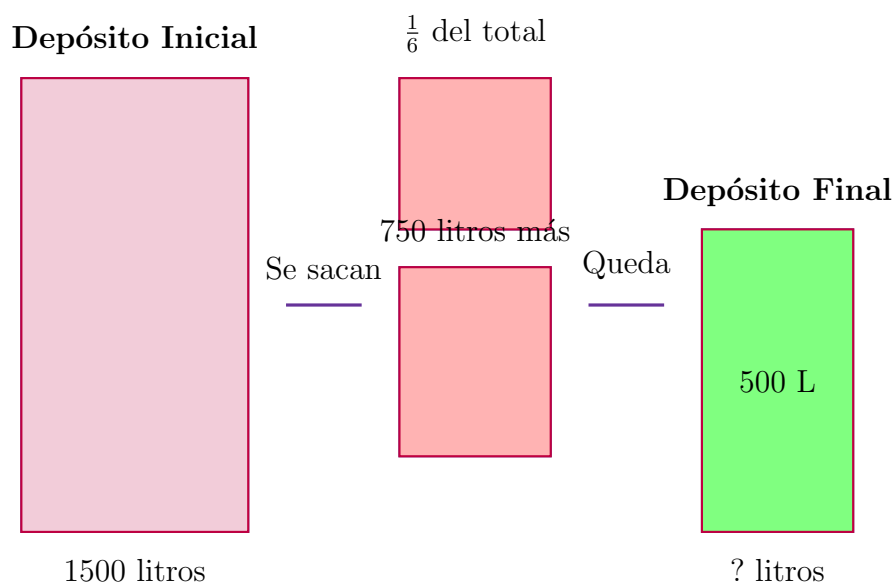
1

4. Ejercicio 4: Problema del Depósito

4.1. Enunciado

De un depósito de 1500 litros se sacan $\frac{1}{6}$ del depósito y 750 litros más. ¿Qué fracción del total queda en el depósito? ¿Y qué cantidad es?

4.2. Ilustración del Problema



4.3. Resolución Detallada

Datos del problema:

- Capacidad total del depósito: 1500 litros
- Se sacan: $\frac{1}{6}$ del depósito + 750 litros

Paso 1: Calculamos cuánto es $\frac{1}{6}$ del depósito:

$$\frac{1}{6} \text{ de } 1500 = \frac{1}{6} \cdot 1500 = \frac{1500}{6} = 250 \text{ litros}$$

Paso 2: Calculamos el total de litros que se sacan:

$$\text{Total sacado} = 250 + 750 = 1000 \text{ litros}$$

Paso 3: Calculamos los litros que quedan en el depósito:

$$\text{Litros que quedan} = 1500 - 1000 = 500 \text{ litros}$$

Paso 4: Calculamos qué fracción del total representa lo que queda:

$$\text{Fracción que queda} = \frac{\text{Litros que quedan}}{\text{Total del depósito}} = \frac{500}{1500}$$

Paso 5: Simplificamos la fracción. Calculamos el MCD(500, 1500):

$$\begin{aligned}500 &= 2^2 \cdot 5^3 \\1500 &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3\end{aligned}$$

$$\text{MCD}(500, 1500) = 2^2 \cdot 5^3 = 4 \cdot 125 = 500$$

$$\frac{500}{1500} = \frac{500 \div 500}{1500 \div 500} = \frac{1}{3}$$

4.4. Verificación

Comprobamos que $\frac{1}{3}$ de 1500 litros son 500 litros:

$$\frac{1}{3} \cdot 1500 = \frac{1500}{3} = 500 \text{ litros} \quad \checkmark$$

También verificamos la operación completa:

$$\text{Se saca: } \frac{1}{6} \cdot 1500 + 750 = 250 + 750 = 1000 \text{ L}$$

$$\text{Queda: } 1500 - 1000 = 500 \text{ L}$$

$$\text{Fracción: } \frac{500}{1500} = \frac{1}{3} \quad \checkmark$$

Respuesta

Fracción que queda: $\frac{1}{3}$ del depósito

Cantidad que queda: 500 litros

5. Ejercicio 5: Problema del Solar

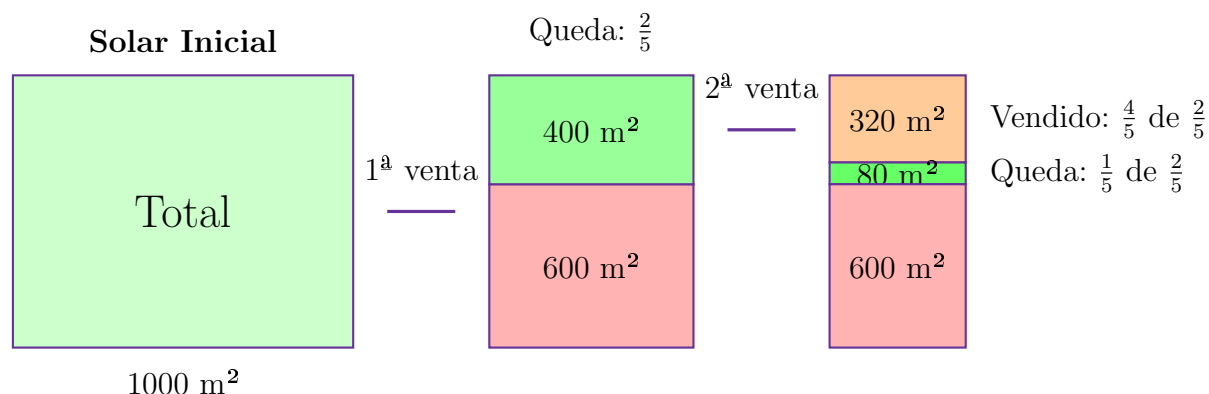
5.1. Enunciado

Se vendieron las $\frac{3}{5}$ partes de un solar y, posteriormente, $\frac{4}{5}$ partes de lo que quedaba.

a) ¿Qué fracción del solar queda sin vender?

b) Si el solar es de 1000 m^2 , ¿qué cantidad se traspasa en cada venta y cuánto queda?

5.2. Ilustración del Problema



5.3. Resolución Detallada

Apartado a) ¿Qué fracción del solar queda sin vender?

Paso 1: Analizamos la primera venta.

Se vende $\frac{3}{5}$ del solar total, por lo tanto queda:

$$\text{Fracción que queda} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{5}{5} - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

Paso 2: Analizamos la segunda venta.

Se vende $\frac{4}{5}$ de lo que quedaba, es decir, $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{5}$:

$$\text{Segunda venta} = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 5} = \frac{8}{25}$$

Paso 3: Después de la segunda venta, queda:

$$\text{Queda de la 2ª venta} = \frac{2}{5} - \frac{8}{25}$$

Para restar, necesitamos el mismo denominador. $\text{mcm}(5, 25) = 25$:

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 5}{5 \cdot 5} = \frac{10}{25}$$

$$\frac{10}{25} - \frac{8}{25} = \frac{2}{25}$$

Verificación: Comprobamos sumando todo lo vendido:

$$\text{Total vendido} = \frac{3}{5} + \frac{8}{25} = \frac{15}{25} + \frac{8}{25} = \frac{23}{25}$$

$$\text{Queda} = 1 - \frac{23}{25} = \frac{25}{25} - \frac{23}{25} = \frac{2}{25} \quad \checkmark$$

Respuesta apartado a)

Queda sin vender: $\boxed{\frac{2}{25}}$ del solar total

Apartado b) Si el solar es de 1000 m^2 , ¿qué cantidad se traspasa en cada venta y cuánto queda?

Dato: Superficie total del solar = 1000 m^2

Primera venta:

Se vende $\frac{3}{5}$ del total:

$$\text{Primera venta} = \frac{3}{5} \cdot 1000 = \frac{3000}{5} = 600 \text{ m}^2$$

Queda después de la primera venta:

$$\text{Queda} = 1000 - 600 = 400 \text{ m}^2$$

También podemos calcularlo directamente: $\frac{2}{5} \cdot 1000 = 400 \text{ m}^2$

Segunda venta:

Se vende $\frac{4}{5}$ de los 400 m^2 que quedaban:

$$\text{Segunda venta} = \frac{4}{5} \cdot 400 = \frac{1600}{5} = 320 \text{ m}^2$$

También podemos usar la fracción del total: $\frac{8}{25} \cdot 1000 = 320 \text{ m}^2$

Cantidad final que queda:

$$\text{Queda} = 400 - 320 = 80 \text{ m}^2$$

También: $\frac{2}{25} \cdot 1000 = 80 \text{ m}^2$

Verificación total:

$$600 + 320 + 80 = 1000 \text{ m}^2 \quad \checkmark$$

Respuesta apartado b)

Primera venta: $\boxed{600 \text{ m}^2}$

Segunda venta: $\boxed{320 \text{ m}^2}$

Queda sin vender: $\boxed{80 \text{ m}^2}$

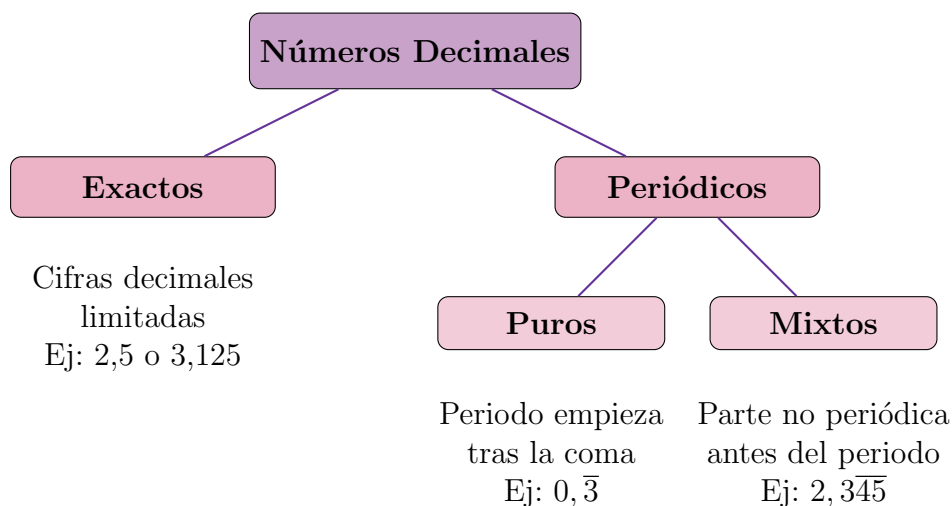
6. Ejercicio 6: Números Decimales a Fracciones

6.1. Enunciado

Escribe los números decimales siguientes en forma de fracción e indica de qué tipo son:

$$a) 2,019 \quad b) 3,\overline{112} \quad c) -2,\overline{015} \quad d) 4,0$$

6.2. Ilustración del Concepto



6.3. Resolución Detallada

Apartado a) 2,019

Este es un **número decimal exacto** porque tiene un número finito de cifras decimales (tres cifras después de la coma).

Método de conversión:

Paso 1: Escribimos el número sin la coma: 2019

Paso 2: Lo dividimos entre la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales haya (3 cifras $\rightarrow$ 1000):

$$2,019 = \frac{2019}{1000}$$

Paso 3: Verificamos si se puede simplificar calculando el MCD(2019, 1000):

Descomposición en factores primos:

$$2019 = 3 \cdot 673$$

$$1000 = 2^3 \cdot 5^3$$

Como no tienen factores comunes, $\text{MCD}(2019, 1000) = 1$, la fracción ya está simplificada.

Respuesta apartado a)

$$2,019 = \frac{2019}{1000}$$

Tipo: Decimal exacto o decimal finito

Apartado b) $3,\overline{112}$

Este es un **número decimal periódico puro** porque el periodo (112) empieza inmediatamente después de la coma decimal.

Método de conversión:

Para decimales periódicos puros se aplica la fórmula:

$$\text{Número} = \frac{\text{Parte entera y periodo} - \text{Parte entera}}{\text{Tantos nueves como cifras tiene el periodo}}$$

Paso 1: Identificamos:

- Parte entera: 3
- Periodo: 112 (tiene 3 cifras)

Paso 2: Aplicamos la fórmula:

$$3,\overline{112} = \frac{3112 - 3}{999} = \frac{3109}{999}$$

Paso 3: Verificamos si se puede simplificar:

Calculamos MCD(3109, 999):

$$3109 = 999 \cdot 3 + 112$$

$$999 = 112 \cdot 8 + 103$$

$$112 = 103 \cdot 1 + 9$$

$$103 = 9 \cdot 11 + 4$$

$$9 = 4 \cdot 2 + 1$$

$$4 = 1 \cdot 4 + 0$$

MCD(3109, 999) = 1, por lo que la fracción ya está en su forma más simple.

Verificación: Dividimos $3109 \div 999 = 3,112112112...$

Respuesta apartado b)

$$3,\overline{112} = \frac{3109}{999}$$

Tipo: Decimal periódico puro

Apartado c) $-2,0\overline{15}$

Este es un **número decimal periódico mixto** porque hay una parte decimal no periódica (0) antes del periodo (15).

Método de conversión:

Para decimales periódicos mixtos se aplica:

$$\text{Número} = \frac{\text{Todo sin coma} - \text{Parte no periódica sin coma}}{\text{Tantos nueves como cifras del periodo seguidos de tantos ceros como cifras no periódicas}}$$

Paso 1: Identificamos:

- Parte entera: -2
- Parte no periódica: 0 (1 cifra)
- Periodo: 15 (2 cifras)

Paso 2: Trabajamos primero con el valor positivo $2,0\overline{15}$:

Todo el número sin coma: 2015

Parte no periódica (entero + no periódica): 20

Denominador: 2 nueves (por el periodo de 2 cifras) + 1 cero (por la parte no periódica de 1 cifra) = 990

$$2,0\overline{15} = \frac{2015 - 20}{990} = \frac{1995}{990}$$

Paso 3: Simplificamos calculando MCD(1995, 990):

$$\begin{aligned} 1995 &= 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \\ 990 &= 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \end{aligned}$$

$$\text{MCD}(1995, 990) = 3 \cdot 5 = 15$$

$$\frac{1995}{990} = \frac{1995 \div 15}{990 \div 15} = \frac{133}{66}$$

Paso 4: Como el número original es negativo:

$$-2,0\overline{15} = -\frac{133}{66}$$

Verificación: $-133 \div 66 = -2,015151515\dots$

Respuesta apartado c)

$$-2,0\overline{15} = -\frac{133}{66}$$

Tipo: Decimal periódico mixto (negativo)

Apartado d) 4,0

Este es un **número decimal exacto** (de hecho, es un número entero).

Paso 1: Observamos que $4,0 = 4$ (el cero decimal no aporta valor)

Paso 2: Expresamos como fracción:

$$4,0 = 4 = \frac{4}{1}$$

También podríamos expresarlo como:

$$4,0 = \frac{40}{10} = \frac{4}{1}$$

Respuesta apartado d)

$$4,0 = \frac{4}{1} = 4$$

Tipo: Decimal exacto (número entero)

6.4. Resumen de Tipos de Decimales

Decimal	Fracción	Tipo
2,019	$\frac{2019}{1000}$	Exacto
3, $\overline{112}$	$\frac{3109}{999}$	Periódico puro
-2,0 $\overline{15}$	$-\frac{133}{66}$	Periódico mixto
4,0	$\frac{4}{1}$	Exacto (entero)

Resumen de Soluciones

Todas las Respuestas del Examen

Ejercicio 1: Fracciones Equivalentes

- a) $x = 2$
- b) $x = 9$

Ejercicio 2: Ordenación de Fracciones

$$\frac{7}{12} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6}$$

Ejercicio 3: Operaciones con Fracciones

- a) Resultado = 0
- b) Resultado = 0
- c) Resultado = 0
- d) Resultado = 1

Ejercicio 4: Problema del Depósito

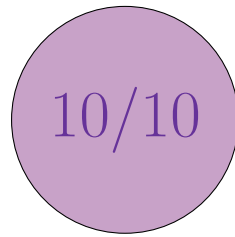
- Fracción que queda: $\frac{1}{3}$ del depósito
- Cantidad que queda: 500 litros

Ejercicio 5: Problema del Solar

- a) Fracción sin vender: $\frac{2}{25}$ del solar
- b) Primera venta: 600 m², Segunda venta: 320 m², Queda: 80 m²

Ejercicio 6: Decimales a Fracciones

- a) $2,019 = \frac{2019}{1000}$ (Decimal exacto)
- b) $3,\overline{112} = \frac{3109}{999}$ (Periódico puro)
- c) $-2,0\overline{15} = -\frac{133}{66}$ (Periódico mixto)
- d) $4,0 = \frac{4}{1}$ (Decimal exacto/entero)



¡Examen Completado con Éxito!

Nº1.- Utiliza las propiedades adecuadas para expresar el resultado de la siguiente operación como una única potencia:

$$\frac{4^2 \cdot 8^{-5}}{32^{-1} \cdot 16^2}$$

(1 PUNTO)

Nº2.- Expresa el resultado como potencia única:

a) $\left\{ \left[\left(\frac{3}{4} \right)^2 \right]^3 \right\}^4$ b) $\left(-\frac{2}{7} \right)^2 \cdot \left(-\frac{2}{7} \right)^{-5}$ c) $(-6)^3 : (-6)^{-4}$ d) $25^{-3} \cdot 5^{-6} \cdot 125$

(2 PUNTOS)

Nº3.- Escribe los siguientes números en notación científica e indica su orden de magnitud.

- a) 91.700.000.000
- b) 6.300.000.000.000
- c) 0,00000000134
- d) 0,071

(2 PUNTOS)

Nº4.- Realiza las siguientes operaciones, sin calculadora, expresando el resultado en notación científica:

- a) $(1,7 \cdot 10^{-9}) \cdot (2,1 \cdot 10^7)$
- b) $(6,0 \cdot 10^{-4}) : (1,5 \cdot 10^{-3})$
- c) $(2,37 \cdot 10^{12}) \cdot (3,97 \cdot 10^3)$
- d) $(4,5 \cdot 10^9) : (2,5 \cdot 10^{-3})$

(2 PUNTOS)

Nº5.- Opera y simplifica las máximo las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{300} - \sqrt{48} - 2\sqrt{27} + \sqrt{12} - 2\sqrt{3}$ b) $\sqrt{3 + \sqrt{1 + \sqrt{4 + \sqrt{25}}}}$

(2 PUNTOS)

Nº6.- Reduce a índice común y luego realiza las siguientes multiplicaciones:

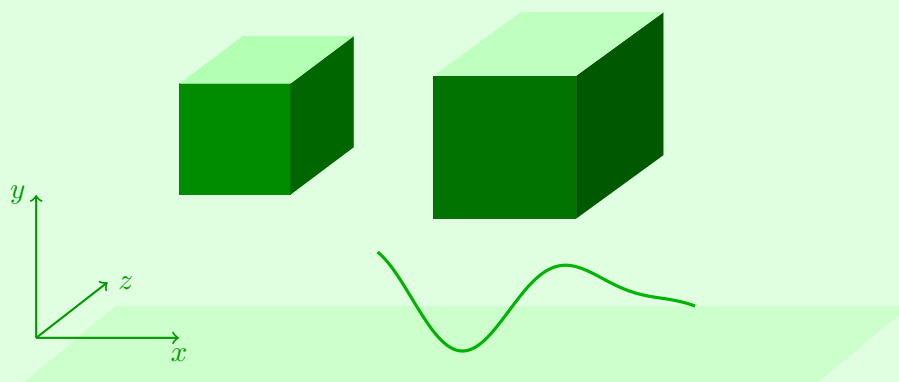
- a) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[6]{6} \cdot \sqrt[2]{2}$
- b) $\sqrt[12]{9} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[3]{2}$

(1 PUNTO)

SUERTE JÓVENES

Resolución rigurosa del Examen de Matemáticas (3º ESO)

Junta de Castilla y León – 11/12/2019



Frase de Hipatia de Alejandría:

«Defiende tu derecho a pensar, porque incluso pensar de manera errónea es mejor que no pensar.»

Datos del examen analizado

Se ha analizado el archivo `uploads/003.pdf`, correspondiente al examen de Matemáticas de 3º ESO (fecha 11/12/2019).

El examen contiene 6 ejercicios sobre:

1. Potencias y propiedades de exponentes.
2. Expresión de resultados como potencia única.
3. Notación científica y orden de magnitud.
4. Operaciones con notación científica.
5. Simplificación de radicales.
6. Reducción a índice común en radicales y multiplicación.

Índice de ejercicios ([hipervinculado](#))

1. Ejercicio 1. Operación con potencias y exponente negativo
2. Ejercicio 2. Expresar como potencia única
 - a) Apartado 2.a
 - b) Apartado 2.b
 - c) Apartado 2.c
 - d) Apartado 2.d
3. Ejercicio 3. Notación científica y orden de magnitud
 - a) Apartado 3.a
 - b) Apartado 3.b
 - c) Apartado 3.c
 - d) Apartado 3.d
4. Ejercicio 4. Operaciones en notación científica
 - a) Apartado 4.a
 - b) Apartado 4.b
 - c) Apartado 4.c
 - d) Apartado 4.d
5. Ejercicio 5. Simplificación de radicales
 - a) Apartado 5.a
 - b) Apartado 5.b
6. Ejercicio 6. Reducción a índice común y producto

a) Apartado 6.a

b) Apartado 6.b

Índice

Datos del examen analizado	1
Índice de ejercicios (hipervinculado)	1
1. Ejercicio 1. Operación con potencias	4
2. Ejercicio 2. Expresa el resultado como potencia única	5
3. Ejercicio 3. Notación científica y orden de magnitud	7
4. Ejercicio 4. Operaciones en notación científica	8
5. Ejercicio 5. Simplificar radicales	9
6. Ejercicio 6. Reducir a índice común y multiplicar	10
Comprobación del índice e hipervínculos	11

1. Ejercicio 1. Operación con potencias

Enunciado:

$$\frac{4^2 \cdot 8^{-5}}{32^{-1} \cdot 16^{-2}}$$

Resolución rigurosa paso a paso:

Primero escribimos todas las bases como potencia de 2:

$$4 = 2^2, \quad 8 = 2^3, \quad 16 = 2^4, \quad 32 = 2^5.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 4^2 &= (2^2)^2 = 2^4, & 8^{-5} &= (2^3)^{-5} = 2^{-15}, \\ 32^{-1} &= (2^5)^{-1} = 2^{-5}, & 16^{-2} &= (2^4)^{-2} = 2^{-8}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión original:

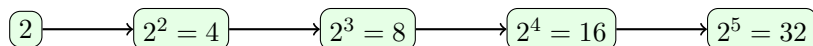
$$\frac{2^4 \cdot 2^{-15}}{2^{-5} \cdot 2^{-8}} = \frac{2^{4-15}}{2^{-13}} = \frac{2^{-11}}{2^{-13}}.$$

Usando la propiedad del cociente de potencias de la misma base, $\frac{2^a}{2^b} = 2^{a-b}$:

$$\frac{2^{-11}}{2^{-13}} = 2^{-11-(-13)} = 2^2 = 4.$$

Resultado final: $\boxed{4}$.

Dibujo representativo (jerarquía de potencias base 2):



2. Ejercicio 2. Expresa el resultado como potencia única

2.a) $\left\{ \left[\left(\frac{3}{4} \right)^2 \right]^3 \right\}^4$

Aplicamos la propiedad $(a^m)^n = a^{mn}$ de forma sucesiva:

$$\left\{ \left[\left(\frac{3}{4} \right)^2 \right]^3 \right\}^4 = \left(\frac{3}{4} \right)^{2 \cdot 3 \cdot 4} = \left(\frac{3}{4} \right)^{24}.$$

Resultado: $\boxed{\left(\frac{3}{4} \right)^{24}}.$

2.b) $\left(-\frac{2}{7} \right)^2 \cdot \left(-\frac{2}{7} \right)^{-5}$

Producto de potencias de igual base: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$:

$$\left(-\frac{2}{7} \right)^2 \cdot \left(-\frac{2}{7} \right)^{-5} = \left(-\frac{2}{7} \right)^{2+(-5)} = \left(-\frac{2}{7} \right)^{-3}.$$

Si se desea exponente positivo:

$$\left(-\frac{2}{7} \right)^{-3} = \left(-\frac{7}{2} \right)^3.$$

Potencia única: $\boxed{\left(-\frac{7}{2} \right)^3}.$

2.c) $(-6)^3 : (-6)^{-4}$

Cociente de potencias de igual base: $a^m : a^n = a^{m-n}$:

$$(-6)^3 : (-6)^{-4} = (-6)^{3-(-4)} = (-6)^7.$$

Resultado: $\boxed{(-6)^7}.$

2.d) $25^3 \cdot 5^{-6} \cdot 125$

Escribimos todo en base 5:

$$25^3 = (5^2)^3 = 5^6, \quad 125 = 5^3.$$

Entonces:

$$25^3 \cdot 5^{-6} \cdot 125 = 5^6 \cdot 5^{-6} \cdot 5^3 = 5^{6-6+3} = 5^3.$$

Resultado: $\boxed{5^3}.$

Dibujo representativo (reglas de exponentes):

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

todas convierten expresiones a una sola potencia

3. Ejercicio 3. Notación científica y orden de magnitud

Recordatorio: en notación científica, un número se escribe como $a \times 10^n$, con $1 \leq a < 10$.

3.a) 91.700.000.000.000

Movemos la coma 13 lugares a la izquierda:

$$91.700.000.000.000 = 9,17 \times 10^{13}.$$

Orden de magnitud: 10^{13} .

3.b) 6.300.000.000.000

$$6.300.000.000.000 = 6,3 \times 10^{12}.$$

Orden de magnitud: 10^{12} .

3.c) 0,0000000134

Desplazamos la coma 8 lugares a la derecha para obtener mantisa entre 1 y 10:

$$0,0000000134 = 1,34 \times 10^{-8}.$$

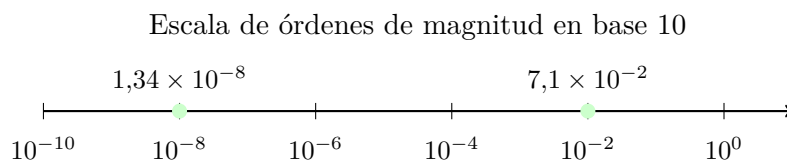
Orden de magnitud: 10^{-8} .

3.d) 0,071

$$0,071 = 7,1 \times 10^{-2}.$$

Orden de magnitud: 10^{-2} .

Dibujo representativo (desplazamiento de coma decimal):



4. Ejercicio 4. Operaciones en notación científica

4.a) $(1,7 \cdot 10^{-3}) \cdot (2,1 \cdot 10^7)$

Agrupamos mantisas y potencias de 10:

$$(1,7 \cdot 10^{-3})(2,1 \cdot 10^7) = (1,7 \cdot 2,1) \cdot 10^{-3+7} = 3,57 \cdot 10^4.$$

Mantisa ya entre 1 y 10. **Resultado:** $3,57 \cdot 10^4$.

4.b) $(6,0 \cdot 10^{-4}) : (1,5 \cdot 10^3)$

$$\frac{6,0 \cdot 10^{-4}}{1,5 \cdot 10^3} = \left(\frac{6,0}{1,5}\right) \cdot 10^{-4-3} = 4 \cdot 10^{-7}.$$

Resultado: $4 \cdot 10^{-7}$.

4.c) $(2,37 \cdot 10^{12}) \cdot (3,97 \cdot 10^3)$

$$(2,37 \cdot 10^{12})(3,97 \cdot 10^3) = (2,37 \cdot 3,97) \cdot 10^{15} = 9,4089 \cdot 10^{15}.$$

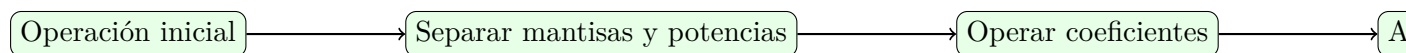
Resultado: $9,4089 \cdot 10^{15}$.

4.d) $(4,5 \cdot 10^9) : (2,5 \cdot 10^3)$

$$\frac{4,5 \cdot 10^9}{2,5 \cdot 10^3} = \left(\frac{4,5}{2,5}\right) \cdot 10^{9-3} = 1,8 \cdot 10^6.$$

Resultado: $1,8 \cdot 10^6$.

Dibujo representativo (flujo de cálculo en notación científica):



5. Ejercicio 5. Simplificar radicales

5.a) $\sqrt{300} - \sqrt{48} - 2\sqrt{27} + \sqrt{12} - 2\sqrt{3}$

Extraemos cuadrados perfectos:

$$\sqrt{300} = \sqrt{100 \cdot 3} = 10\sqrt{3}, \quad \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3},$$

$$\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}, \quad \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}.$$

Sustituimos:

$$10\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 2(3\sqrt{3}) + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}.$$

Operamos coeficientes:

$$(10 - 4 - 6 + 2 - 2)\sqrt{3} = 0 \cdot \sqrt{3} = 0.$$

Resultado: $\boxed{0}$.

5.b) $\sqrt{3 + \sqrt{1 + \sqrt{4 + \sqrt{25}}}}$

Se evalúa de dentro hacia fuera:

$$\sqrt{25} = 5, \quad \sqrt{4 + \sqrt{25}} = \sqrt{4 + 5} = \sqrt{9} = 3,$$

$$\sqrt{1 + \sqrt{4 + \sqrt{25}}} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2,$$

$$\sqrt{3 + \sqrt{1 + \sqrt{4 + \sqrt{25}}}} = \sqrt{3 + 2} = \sqrt{5}.$$

Resultado: $\boxed{\sqrt{5}}$.

Dibujo representativo (radicales anidados):



6. Ejercicio 6. Reducir a índice común y multiplicar

6.a) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt[5]{2}$

Índices: 4, 2, 5. El mínimo común múltiplo es:

$$\text{mcm}(4, 2, 5) = 20.$$

Pasamos cada radical a índice 20:

$$\sqrt[4]{3} = \sqrt[20]{3^5}, \quad \sqrt{6} = \sqrt[20]{6^{10}}, \quad \sqrt[5]{2} = \sqrt[20]{2^4}.$$

Entonces:

$$\sqrt[20]{3^5} \cdot \sqrt[20]{6^{10}} \cdot \sqrt[20]{2^4} = \sqrt[20]{3^5 \cdot 6^{10} \cdot 2^4}.$$

Como $6^{10} = (2 \cdot 3)^{10} = 2^{10} 3^{10}$:

$$\sqrt[20]{3^5 \cdot 2^{10} 3^{10} \cdot 2^4} = \sqrt[20]{2^{14} \cdot 3^{15}}.$$

No hay factores con exponente múltiplo de 20 para extraer.

Resultado: $\boxed{\sqrt[20]{2^{14} \cdot 3^{15}}}$.

6.b) $\sqrt[12]{9} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[3]{2}$

Índices: 12, 4, 3.

$$\text{mcm}(12, 4, 3) = 12.$$

Convertimos:

$$\sqrt[12]{9} = \sqrt[12]{3^2}, \quad \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{3^3}, \quad \sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{2^4}.$$

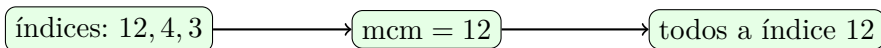
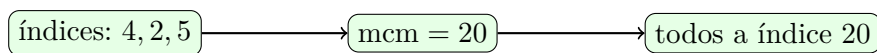
Multiplicamos:

$$\sqrt[12]{3^2} \cdot \sqrt[12]{3^3} \cdot \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[12]{3^{2+3} \cdot 2^4} = \sqrt[12]{3^5 \cdot 2^4}.$$

Tampoco hay extracción posible por no alcanzar exponentes 12.

Resultado: $\boxed{\sqrt[12]{2^4 \cdot 3^5}}$.

Dibujo representativo (reducción de índices al m.c.m.):



Comprobación del índice e hipervínculos

Se ha construido un índice específico de ejercicios con enlaces directos a cada ejercicio y a cada subapartado (a, b, c, d).

La estructura de etiquetas usada (por ejemplo, `ej:2c`, `ej:4d`, `ej:6b`) garantiza que cada entrada del índice apunta exactamente al destino correcto.

Además, se incluye la tabla de contenidos general del documento para navegación adicional.

- Nº1.- Un campamento de 45 alumnos tiene provisiones para 16 días, ¿cuántos días podrá durar el campamento si fuesen 15 alumnos más?
- Nº2.- En 6 días, Sergio tradujo un libro de 30 páginas trabajando 2 horas diarias. ¿Cuántas horas diarias tendrá que trabajar para terminar un libro de 40 páginas en 4 días, si continua con el mismo ritmo de trabajo?
- Nº3.- En la clase de 3ºA de la ESO somos 30 personas, el 40% chicos y el resto chicas. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas hay en mi clase?
- Nº4.- Un cultivo de bacterias de un laboratorio tiene 120 000 bacterias y adquiere una enfermedad que produce la muerte del 16% de la población. Tratadas las bacterias supervivientes con un producto muy eficaz se consigue aumentar la población en un 14%. ¿Cuántas bacterias forman la población finalmente?
- Nº5.- Un artículo que vale 120 euros, ante la excesiva demanda, sube un 20%. Luego, cuando se reduce la demanda, se rebaja un 20%. ¿Cuál es su precio final? ¿Sigue valiendo lo mismo que antes?

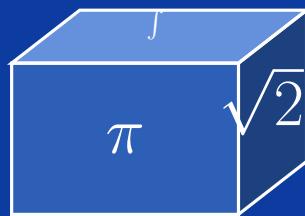
NOTA: Todos los problemas valen 2 puntos

SUERTE JOVENES

EXAMEN DE MATEMÁTICAS

3º ESO — Resolución completa

Fecha del examen: 23-1-2020



“Defiende tu derecho a pensar, porque incluso pensar de manera errónea es mejor que no pensar.”

— Hipatia de Alejandría

Documento LaTeX con índice enlazado e ilustraciones didácticas (TikZ).

Índice

Índice de ejercicios (con hipervínculos)	2
Ejercicio 1. Provisiones de un campamento	3
Ejercicio 2. Ritmo de traducción: páginas, días y horas	5
Ejercicio 3. Porcentajes: chicos y chicas	7
Ejercicio 4. Porcentajes sucesivos: bacterias	9
Ejercicio 5. Subida y bajada del 20 %: ¿se anulan?	12
Fin del documento	15

Índice de ejercicios (con hipervínculos)

- [Ejercicio 1. Proporcionalidad inversa: provisiones y alumnos](#)
- [Ejercicio 2. Ritmo de trabajo: páginas, días y horas](#)
- [Ejercicio 3. Porcentajes: reparto chicos/chicas](#)
- [Ejercicio 4. Porcentajes sucesivos: disminución y aumento](#)
- [Ejercicio 5. Subir y bajar porcentajes: no se anulan](#)

Ejercicio 1. Provisiones de un campamento

Enunciado

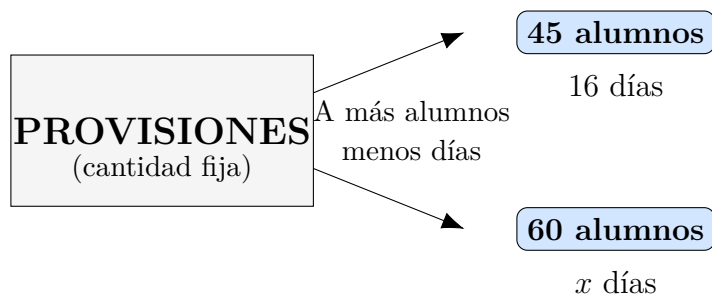
Un campamento de 45 alumnos tiene provisiones para 16 días. ¿Cuántos días podrá durar el campamento si fuesen 15 alumnos más?

Idea matemática clave

Si la cantidad total de provisiones es fija, entonces:

- Si hay más alumnos, las provisiones se consumen más rápido.
- Por tanto, el número de días es **inversamente proporcional** al número de alumnos.

Dibujo representativo (TikZ)



Resolución paso a paso

Paso 1: Identificar los datos

- Alumnos iniciales: 45.
- Días iniciales: 16.
- Alumnos nuevos: $45 + 15 = 60$.
- Días nuevos: x (esto es lo que queremos calcular).

Paso 2: Plantear la proporcionalidad inversa

Con provisiones fijas, el producto:

$$(\text{alumnos}) \times (\text{días})$$

se mantiene constante, porque representa el total de “alumno-días” que se puede alimentar con esas provisiones.

Por tanto:

$$45 \cdot 16 = 60 \cdot x$$

Paso 3: Calcular el valor numérico

Primero calculamos $45 \cdot 16$:

$$45 \cdot 16 = 45 \cdot (10 + 6) = 45 \cdot 10 + 45 \cdot 6 = 450 + 270 = 720$$

Así que la ecuación queda:

$$720 = 60x$$

Ahora despejamos x dividiendo ambos lados entre 60:

$$x = \frac{720}{60}$$

Calculamos la división:

$$\frac{720}{60} = \frac{72}{6} = 12$$

Resultado

$$x = 12 \text{ días}$$

Comprobación lógica

- Antes: 45 alumnos duraban 16 días.
- Ahora hay más alumnos (60), por tanto debe durar menos de 16 días.
- El resultado es 12 días, que es menor que 16, así que tiene sentido.

Ejercicio 2. Ritmo de traducción: páginas, días y horas

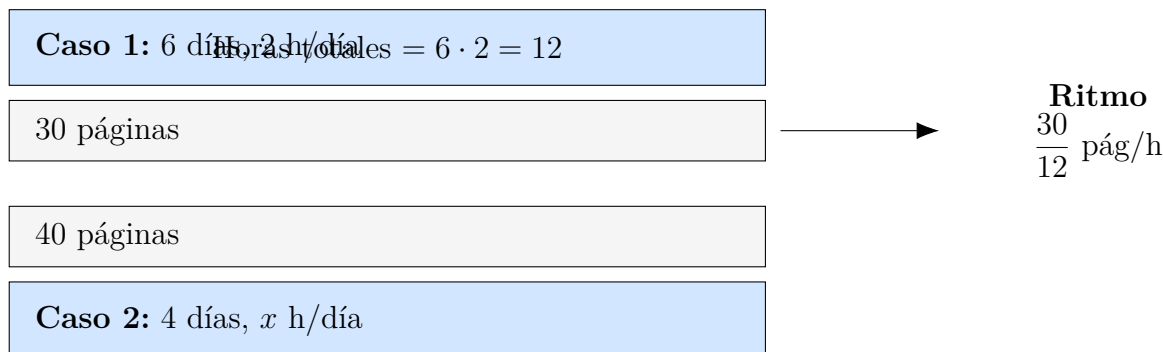
Enunciado

En 6 días, Sergio tradujo un libro de 30 páginas trabajando 2 horas diarias. ¿Cuántas horas diarias tendrá que trabajar para terminar un libro de 40 páginas en 4 días, si continúa con el mismo ritmo de trabajo?

Idea matemática clave

- “Mismo ritmo” significa **misma productividad**: páginas por hora constante.
- Primero calculamos cuántas páginas traduce por hora.
- Después calculamos cuántas horas totales necesita para 40 páginas.
- Finalmente repartimos esas horas en 4 días para obtener horas por día.

Dibujo representativo (TikZ)



Resolución paso a paso

Paso 1: Horas totales del primer caso

Trabajó:

$$6 \text{ días} \times 2 \text{ horas/día} = 12 \text{ horas}$$

En esas 12 horas tradujo 30 páginas.

Paso 2: Calcular el ritmo (páginas por hora)

El ritmo es:

$$\text{ritmo} = \frac{30 \text{ páginas}}{12 \text{ horas}}$$

Simplificamos la fracción dividiendo numerador y denominador entre 6:

$$\frac{30}{12} = \frac{30 \div 6}{12 \div 6} = \frac{5}{2}$$

Por tanto:

$$\text{ritmo} = \frac{5}{2} \text{ páginas/hora} = 2,5 \text{ páginas/hora}$$

Paso 3: Calcular cuántas horas necesita para 40 páginas

Si traduce $\frac{5}{2}$ páginas cada hora, entonces en 1 hora hace $\frac{5}{2}$ páginas. Para averiguar las horas necesarias para 40 páginas, planteamos:

$$\left(\frac{5}{2} \frac{\text{pág}}{\text{h}}\right) \cdot H = 40 \text{ pág}$$

donde H es el número total de horas necesarias.

Despejamos H dividiendo ambos lados entre $\frac{5}{2}$:

$$H = \frac{40}{\frac{5}{2}}$$

Dividir entre una fracción es multiplicar por su inversa:

$$H = 40 \cdot \frac{2}{5}$$

Multiplicamos:

$$40 \cdot \frac{2}{5} = \frac{40 \cdot 2}{5} = \frac{80}{5} = 16$$

Por tanto:

$$H = 16 \text{ horas}$$

Paso 4: Repartir las horas totales en 4 días

Ahora debe hacer esas 16 horas en 4 días. Si trabaja x horas cada día:

$$4 \cdot x = 16$$

Despejamos:

$$x = \frac{16}{4} = 4$$

Resultado

$$\boxed{x = 4 \text{ horas al día}}$$

Comprobación lógica

- Antes hacía 30 páginas en 6 días a 2 h/día.
- Ahora quiere hacer más páginas (40) en menos días (4), así que debe trabajar más horas al día.
- El resultado (4 h/día) es mayor que 2 h/día, tiene sentido.

Ejercicio 3. Porcentajes: chicos y chicas

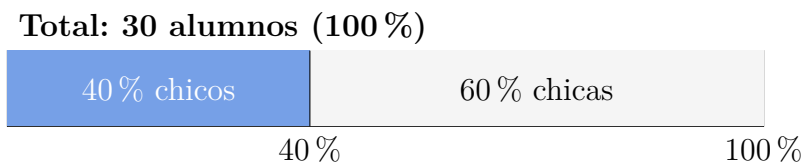
Enunciado

En la clase de 3ºA de la ESO somos 30 personas, el 40 % chicos y el resto chicas. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas hay en mi clase?

Idea matemática clave

- Un porcentaje es una fracción sobre 100.
- 40 % significa 40 de cada 100.
- Primero calculamos el 40 % de 30.
- Luego, las chicas son el resto: total menos chicos.

Dibujo representativo (TikZ): barra de porcentaje



Resolución paso a paso

Paso 1: Calcular el 40 % de 30

El 40 % se expresa como fracción:

$$40 \% = \frac{40}{100}$$

Entonces, el 40 % de 30 es:

$$\frac{40}{100} \cdot 30$$

Multiplicamos:

$$\frac{40}{100} \cdot 30 = \frac{40 \cdot 30}{100} = \frac{1200}{100} = 12$$

Por tanto, hay:

12 chicos

Paso 2: Calcular el resto (chicas)

Si el total es 30 y 12 son chicos, las chicas son:

$$30 - 12 = 18$$

Resultado

12 chicos y 18 chicas

Comprobación

- Si hay 12 chicos de 30, el porcentaje sería $\frac{12}{30} \cdot 100 = 40\%$.
- Calculamos: $\frac{12}{30} = 0,4$, y $0,4 \cdot 100 = 40$.
- Coincide, por tanto está correcto.

Ejercicio 4. Porcentajes sucesivos: bacterias

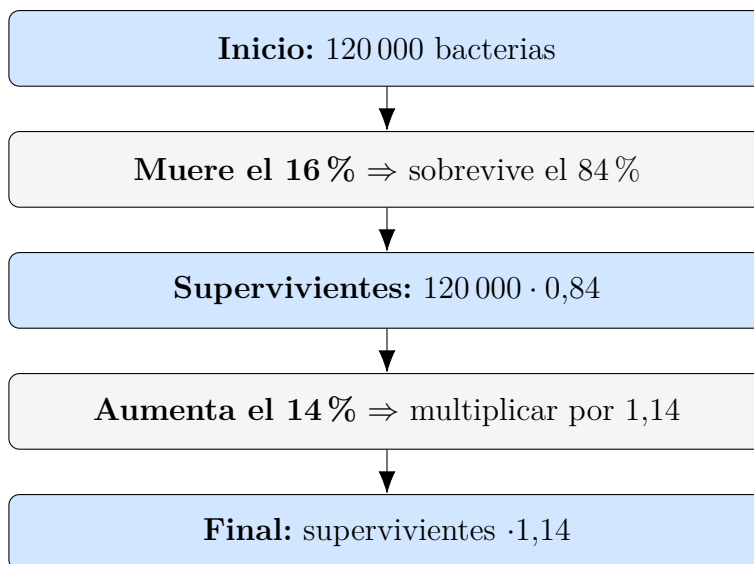
Enunciado

Un cultivo de bacterias de un laboratorio tiene 120 000 bacterias y adquiere una enfermedad que produce la muerte del 16 % de la población. Tratadas las bacterias supervivientes con un producto muy eficaz se consigue aumentar la población en un 14 %. ¿Cuántas bacterias forman la población finalmente?

Idea matemática clave

- Primero se aplica una disminución del 16 % (muere el 16 %).
- Sobre lo que queda (supervivientes) se aplica un aumento del 14 %.
- Son **dos cambios porcentuales consecutivos** sobre bases distintas (primero sobre 120 000; luego sobre el resultado intermedio).

Dibujo representativo (TikZ): flujo de población



Resolución paso a paso

Paso 1: Calcular cuántas bacterias mueren (16 % de 120 000)

El 16 % se escribe como fracción:

$$16\% = \frac{16}{100}$$

Entonces, bacterias que mueren:

$$\frac{16}{100} \cdot 120\,000$$

Multiplicamos:

$$\frac{16}{100} \cdot 120\,000 = \frac{16 \cdot 120\,000}{100}$$

Calculamos $16 \cdot 120\,000$:

$$16 \cdot 120\,000 = (10 \cdot 120\,000) + (6 \cdot 120\,000)$$

$$10 \cdot 120\,000 = 1\,200\,000$$

$$6 \cdot 120\,000 = 720\,000$$

$$1\,200\,000 + 720\,000 = 1\,920\,000$$

Ahora dividimos entre 100:

$$\frac{1\,920\,000}{100} = 19\,200$$

Mueren:

19 200 bacterias

Paso 2: Calcular bacterias supervivientes

Supervivientes:

$$120\,000 - 19\,200 = 100\,800$$

(Alternativa equivalente, explicada para comprender la idea de “porcentaje que queda”):
Si muere el 16 %, sobrevive el:

$$100\% - 16\% = 84\%$$

y entonces:

$$120\,000 \cdot \frac{84}{100} = 120\,000 \cdot 0,84 = 100\,800$$

Coincide.

Paso 3: Aumentar los supervivientes en un 14 %

Aumentar un 14 % significa:

- La población final es el $100\% + 14\% = 114\%$ de la población inicial (en esta fase).
- En forma decimal: $114\% = 1,14$.

Por tanto:

$$\text{Final} = 100\,800 \cdot 1,14$$

Como $1,14 = \frac{114}{100}$:

$$100\,800 \cdot 1,14 = 100\,800 \cdot \frac{114}{100}$$

Primero multiplicamos $100\,800 \cdot 114$:

$$100\,800 \cdot 114 = 100\,800 \cdot (100 + 10 + 4)$$

$$100\,800 \cdot 100 = 10\,080\,000$$

$$100\,800 \cdot 10 = 1\,008\,000$$

$$100\,800 \cdot 4 = 403\,200$$

Sumamos:

$$10\,080\,000 + 1\,008\,000 = 11\,088\,000$$

$$11\,088\,000 + 403\,200 = 11\,491\,200$$

Ahora dividimos entre 100:

$$\frac{11\,491\,200}{100} = 114\,912$$

Resultado

114 912 bacterias (población final)

Comprobación aproximada

- Tras morir el 16 % queda el 84 %: $120\,000 \cdot 0,84 = 100\,800$.
- Luego sube 14 %: $100\,800 \cdot 1,14 \approx 100\,800 + 14\% \text{ de } 100\,800$.
- El 14 % de 100 800 es aproximadamente 14 000 (más exactamente 14 112).
- Entonces $100\,800 + 14\,112 = 114\,912$.
- Coincide exactamente.

Ejercicio 5. Subida y bajada del 20 %: ¿se anulan?

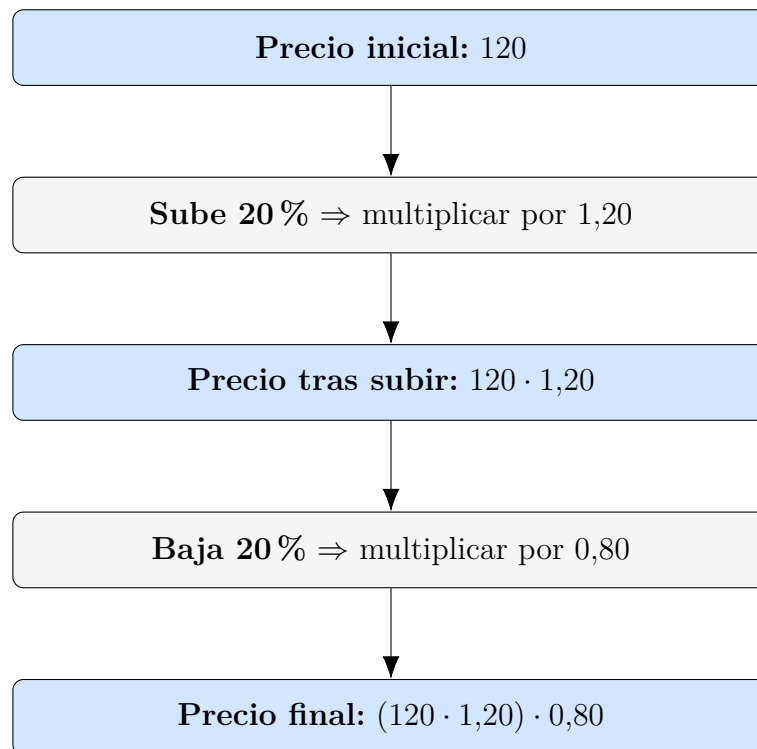
Enunciado

Un artículo que vale 120 euros, ante la excesiva demanda, sube un 20 %. Luego, cuando se reduce la demanda, se rebaja un 20 %. ¿Cuál es su precio final? ¿Sigue valiendo lo mismo que antes?

Idea matemática clave

- Subir un 20 % equivale a multiplicar por 1,20.
- Bajar un 20 % equivale a multiplicar por 0,80.
- Hacer ambas cosas seguidas equivale a multiplicar por $1,20 \cdot 0,80$.
- Muy importante: el 20 % de subida se calcula sobre el precio inicial, pero el 20 % de bajada se calcula sobre el precio ya subido (una base diferente).

Dibujo representativo (TikZ): escalera de precios



Nota: subir 20 % y luego bajar 20 %
no devuelve al precio inicial.

Resolución paso a paso

Paso 1: Calcular el precio tras subir un 20 %

Subir un 20 % significa sumar al precio el 20 % de ese precio. Podemos hacerlo de dos maneras (las dos son correctas):

Método A (sumar el 20 %): El 20 % de 120 es:

$$20 \% = \frac{20}{100}$$

$$\frac{20}{100} \cdot 120 = \frac{20 \cdot 120}{100} = \frac{2400}{100} = 24$$

Entonces el nuevo precio es:

$$120 + 24 = 144$$

Precio tras la subida:

$$144$$

Método B (multiplicar por 1,20): Subir un 20 % equivale a quedarse con el 120 %:

$$120 \% = \frac{120}{100} = 1,20$$

Entonces:

$$120 \cdot 1,20 = 144$$

Coincide con el método anterior.

Paso 2: Calcular el precio tras rebajar un 20 % (sobre 144)

Ahora se rebaja un 20 % el precio **actual** (144), no el inicial.

Rebajar un 20 % equivale a quedarse con el 80 %:

$$80 \% = \frac{80}{100} = 0,80$$

Entonces:

$$144 \cdot 0,80$$

Como $0,80 = \frac{80}{100}$:

$$144 \cdot \frac{80}{100} = 144 \cdot \frac{8}{10}$$

Calculamos:

$$144 \cdot \frac{8}{10} = \frac{144 \cdot 8}{10} = \frac{1152}{10} = 115,2$$

Por tanto, el precio final es:

$$115,2$$

Resultado

$\text{Precio final} = 115,20$

¿Sigue valiendo lo mismo que antes?

El precio inicial era 120 , y el final es 115.20 . Comparamos:

$$115,20 < 120$$

Por tanto:

No, no vale lo mismo. Ahora es más barato que antes.

Explicación extra (por qué no se anulan)

Si subimos un 20 % y luego bajamos un 20 %, el factor total es:

$$1,20 \cdot 0,80 = 0,96$$

Eso significa que el precio final es el 96 % del precio inicial:

$$120 \cdot 0,96 = 115,2$$

Se pierde un 4 % respecto al precio inicial, porque los porcentajes se aplican sobre bases distintas.

Fin del documento

Nº1.- Indica si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas, geométricas o ninguna de las dos, indicando, en su caso la diferencia o la razón y su término general:

- a) 2,7,12,17,.....
- b) 1,1,2,3,5,8,13,.....
- c) -2,4,-8,16,-32
- d) 3,2,1,0,-1,-2,.....
- e) 3,6,12,24,48,.....

Nº2.- Asocia cada término de la primera columna con el término general de la sucesión de la que forman parte de la segunda columna:

a) $a_5 = 3$	1) $a_n = n^2 - 9n + 20$
b) $a_4 = 0$	2) $a_n = n + 4$
c) $a_7 = 11$	3) $a_n = n^2 - 2n - 12$
d) $a_3 = 72$	4) $a_n = n^3 + 5n^2$

Nº3.- Calcula los cinco primeros términos de las sucesiones:

$$\text{a) } a_n = 1 - n^2 \qquad \text{b) } \begin{cases} b_1 = 10 \\ b_n = b_{n-1} + n \end{cases}$$

Nº4.- Calcula la suma de los 15 primeros términos de una progresión aritmética en la que $a_3 = 1$ y $a_7 = -7$.

Nº5.- El alquiler de una bicicleta cuesta 5 € la primera hora y 2 € más cada nueva hora.

- a) ¿Cuál es el precio total de alquiler de 7 horas?
- b) Halla una fórmula que nos dé el precio total de alquiler de n horas.
- c) Si un día me han cobrado 21 € ¿cuántas horas he tenida alquilada la bicicleta?

(TODOS LOS PROBLEMAS VALEN 2 PUNTOS)

SUERTE JÓVENES

MATEMÁTICAS

Tema 5 — Sucesiones y Series

EXAMEN 3º A ESO — 18 de febrero de 2020

*“Las matemáticas son el alfabeto con
el que Dios ha escrito el universo.
La secuencia que lleva mi nombre revela
la geometría oculta de la naturaleza.”*
— LEONARDO de PISA (FIBONACCI), *Liber Abaci* (1202)

ÍNDICE DE EJERCICIOS — SOLUCIONARIO COMPLETO

Contenidos del Examen — Tema 5: Sucesiones y Series

Nº	Ejercicio	Pág.
1	Clasificación de sucesiones (aritmética, geométrica o ninguna), diferencia/razón y término general	2
2	Asociación de términos con su sucesión por término general	6
3	Cálculo de los cinco primeros términos de dos sucesiones	9
4	Suma de los 15 primeros términos de una progresión aritmética con $a_3 = 1$ y $a_7 = -7$	12
5	Problema de alquiler de bicicleta: precio, fórmula general e inversión de la progresión	15

Puntuación del Examen

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Ej. 5	TOTAL
2 pts	2 pts	2 pts	2 pts	2 pts	10 pts

Formulario de Referencia — Sucesiones y Series

Progresión Aritmética (P.A.):

- Término general: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$
- Diferencia: $d = a_{n+1} - a_n$
- Suma de n términos: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$
- Alternativamente: $S_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$

Progresión Geométrica (P.G.):

- Término general: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$
- Razón: $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$
- Suma de n términos: $S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$

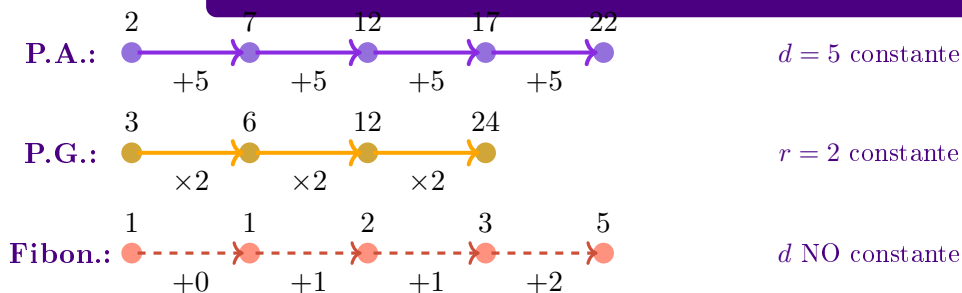
Ejercicio N° 1

(2 puntos)

Indica si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas, geométricas o ninguna de las dos, indicando en su caso la diferencia o la razón y su término general:

- a) 2, 7, 12, 17, ...
- b) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...
- c) -2, 4, -8, 16, -32
- d) 3, 2, 1, 0, -1, -2, ...
- e) 3, 6, 12, 24, 48, ...

Clasificación de Sucesiones — Criterios Visuales



Apartado a) — 2, 7, 12, 17, ...

Paso 1: Calculamos las diferencias entre términos consecutivos:

$$7 - 2 = 5 \quad 12 - 7 = 5 \quad 17 - 12 = 5$$

Paso 2: La diferencia es **constante e igual a 5**, por lo que es una **Progresión Aritmética** con:

$$a_1 = 2 \quad d = 5$$

Paso 3: Término general de una P.A.: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

$$a_n = 2 + (n - 1) \cdot 5 = 2 + 5n - 5 = 5n - 3$$

Verificación: $a_1 = 5(1) - 3 = 2✓$, $a_2 = 5(2) - 3 = 7✓$, $a_3 = 5(3) - 3 = 12✓$, $a_4 = 5(4) - 3 = 17✓$

Progresión Aritmética. $d = 5$ $a_n = 5n - 3$

Apartado b) — 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Paso 1: Comprobamos si es P.A. calculando diferencias:

$$1 - 1 = 0 \quad 2 - 1 = 1 \quad 3 - 2 = 1 \quad 5 - 3 = 2 \quad 8 - 5 = 3 \quad 13 - 8 = 5$$

Las diferencias NO son constantes $\Rightarrow$ **no es P.A.**

Paso 2: Comprobamos si es P.G. calculando razones:

$$\frac{1}{1} = 1 \quad \frac{2}{1} = 2 \quad \frac{3}{2} = 1,5 \quad \frac{5}{3} \approx 1,67 \quad \frac{8}{5} = 1,6$$

Las razones NO son constantes $\Rightarrow$ **no es P.G.**

Paso 3: Observamos el patrón: cada término es la **suma de los dos anteriores**:

$$1 + 1 = 2, \quad 1 + 2 = 3, \quad 2 + 3 = 5, \quad 3 + 5 = 8, \quad 5 + 8 = 13$$

Esta es la **sucesión de Fibonacci**, definida por la recurrencia:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 3)$$

NINGUNA de las dos. Es la **sucesión de Fibonacci**.
No tiene forma cerrada elemental en término general estándar.

Nota: Su término general exacto es la fórmula de Binet: $F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$, donde $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$ (razón áurea) y $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Apartado c) — -2, 4, -8, 16, -32

Paso 1: Comprobamos diferencias (P.A.):

$$4 - (-2) = 6 \quad -8 - 4 = -12 \quad 16 - (-8) = 24 \quad -32 - 16 = -48$$

Las diferencias NO son constantes $\Rightarrow$ **no es P.A.**

Paso 2: Calculamos razones entre términos consecutivos:

$$\frac{4}{-2} = -2 \quad \frac{-8}{4} = -2 \quad \frac{16}{-8} = -2 \quad \frac{-32}{16} = -2$$

La razón es **constante e igual a -2** $\Rightarrow$ **Progresión Geométrica** con:

$$a_1 = -2 \quad r = -2$$

Paso 3: Término general de una P.G.: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$$a_n = (-2) \cdot (-2)^{n-1} = (-2)^1 \cdot (-2)^{n-1} = (-2)^n$$

Verificación: $a_1 = (-2)^1 = -2\checkmark$, $a_2 = (-2)^2 = 4\checkmark$, $a_3 = (-2)^3 = -8\checkmark$, $a_4 = (-2)^4 = 16\checkmark$, $a_5 = (-2)^5 = -32\checkmark$

Progresión Geométrica. $r = -2$ $a_n = (-2)^n$

Apartado d) — 3, 2, 1, 0, -1, -2, ...

Paso 1: Calculamos las diferencias entre términos consecutivos:

$$2 - 3 = -1 \quad 1 - 2 = -1 \quad 0 - 1 = -1 \quad -1 - 0 = -1 \quad -2 - (-1) = -1$$

La diferencia es **constante e igual a -1** $\Rightarrow$ **Progresión Aritmética** con:

$$a_1 = 3 \quad d = -1$$

Paso 2: Término general:

$$a_n = 3 + (n - 1) \cdot (-1) = 3 - n + 1 = 4 - n$$

Verificación: $a_1 = 4 - 1 = 3\checkmark$, $a_2 = 4 - 2 = 2\checkmark$, $a_3 = 4 - 3 = 1\checkmark$, $a_4 = 4 - 4 = 0\checkmark$, $a_5 = 4 - 5 = -1\checkmark$, $a_6 = 4 - 6 = -2\checkmark$

Progresión Aritmética. $d = -1$ $a_n = 4 - n$

Apartado e) — 3, 6, 12, 24, 48, ...

Paso 1: Comprobamos diferencias:

$$6 - 3 = 3 \quad 12 - 6 = 6 \quad 24 - 12 = 12 \quad 48 - 24 = 24$$

Las diferencias NO son constantes $\Rightarrow$ **no es P.A.**

Paso 2: Calculamos razones:

$$\frac{6}{3} = 2 \quad \frac{12}{6} = 2 \quad \frac{24}{12} = 2 \quad \frac{48}{24} = 2$$

La razón es **constante e igual a 2** $\Rightarrow$ **Progresión Geométrica** con:

$$a_1 = 3 \quad r = 2$$

Paso 3: Término general:

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

Verificación: $a_1 = 3 \cdot 2^0 = 3\checkmark$, $a_2 = 3 \cdot 2^1 = 6\checkmark$, $a_3 = 3 \cdot 2^2 = 12\checkmark$, $a_4 = 3 \cdot 2^3 = 24\checkmark$, $a_5 = 3 \cdot 2^4 = 48\checkmark$

Progresión Geométrica. $r = 2$ $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

Tabla Resumen Ejercicio 1

Apart.	Sucesión	Tipo	d o r	Término general
a)	2, 7, 12, 17, ...	P.A.	$d = 5$	$a_n = 5n - 3$
b)	1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...	Ninguna (Fibonacci)	—	recurrencia $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
c)	-2, 4, -8, 16, -32	P.G.	$r = -2$	$a_n = (-2)^n$
d)	3, 2, 1, 0, -1, -2, ...	P.A.	$d = -1$	$a_n = 4 - n$
e)	3, 6, 12, 24, 48, ...	P.G.	$r = 2$	$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$



Ejercicio N° 2

(2 puntos)

Asocia cada término de la primera columna con el término general de la sucesión de la que forman parte:

Términos dados	Términos generales
a) $a_5 = 3$	1) $a_n = n^2 - 9n + 20$
b) $a_4 = 0$	2) $a_n = n + 4$
c) $a_7 = 11$	3) $a_n = n^2 - 2n - 12$
d) $a_3 = 72$	4) $a_n = n^3 + 5n^2$

Estrategia: Sustituir n en cada fórmula y buscar el valor pedido

Valor dado: $a_k = v$

Sustituir $n = k$

Comparar con v

Evaluación completa de las cuatro fórmulas en los cuatro valores

Calculamos el valor de cada fórmula para cada valor de n pedido:

Fórmula	$n = 5$	$n = 4$	$n = 7$	$n = 3$
$a_n = n^2 - 9n + 20$	$25 - 45 + 20 = \mathbf{0}$	$16 - 36 + 20 = \mathbf{0} \checkmark$	$49 - 63 + 20 = \mathbf{6}$	$9 - 27 + 20 = \mathbf{2}$
$a_n = n + 4$	$5 + 4 = \mathbf{9}$	$4 + 4 = \mathbf{8}$	$7 + 4 = \mathbf{11} \checkmark$	$3 + 4 = \mathbf{7}$
$a_n = n^2 - 2n - 12$	$25 - 10 - 12 = \mathbf{3} \checkmark$	$16 - 8 - 12 = \mathbf{-4}$	$49 - 14 - 12 = \mathbf{23}$	$9 - 6 - 12 = \mathbf{-9}$
$a_n = n^3 + 5n^2$	$125 + 125 = \mathbf{250}$	$64 + 80 = \mathbf{144}$	$343 + 245 = \mathbf{588}$	$27 + 45 = \mathbf{72} \checkmark$

Desarrollo detallado de cada cálculo:

Fórmula 1: $a_n = n^2 - 9n + 20$

- Para $n = 5$: $5^2 - 9(5) + 20 = 25 - 45 + 20 = 0$
- Para $n = 4$: $4^2 - 9(4) + 20 = 16 - 36 + 20 = 0 \quad \leftarrow \text{Coincide con b) } a_4 = 0 \checkmark$
- Para $n = 7$: $7^2 - 9(7) + 20 = 49 - 63 + 20 = 6$
- Para $n = 3$: $3^2 - 9(3) + 20 = 9 - 27 + 20 = 2$

Fórmula 2: $a_n = n + 4$

- Para $n = 5$: $5 + 4 = 9$
- Para $n = 4$: $4 + 4 = 8$
- Para $n = 7$: $7 + 4 = 11 \quad \leftarrow \text{Coincide con c) } a_7 = 11 \checkmark$
- Para $n = 3$: $3 + 4 = 7$

Fórmula 3: $a_n = n^2 - 2n - 12$

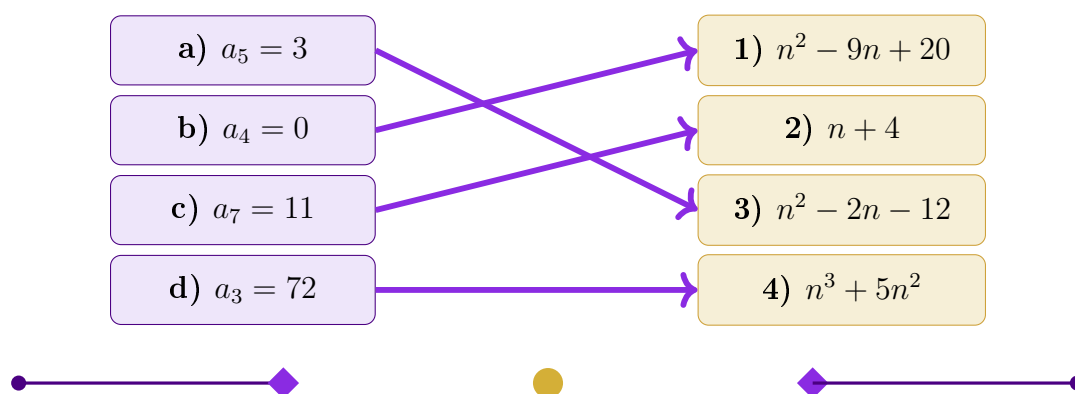
- Para $n = 5$: $25 - 10 - 12 = 3 \quad \leftarrow \text{Coincide con a) } a_5 = 3 \checkmark$
- Para $n = 4$: $16 - 8 - 12 = -4$
- Para $n = 7$: $49 - 14 - 12 = 23$
- Para $n = 3$: $9 - 6 - 12 = -9$

Fórmula 4: $a_n = n^3 + 5n^2$

- Para $n = 5$: $125 + 125 = 250$
- Para $n = 4$: $64 + 80 = 144$
- Para $n = 7$: $343 + 245 = 588$
- Para $n = 3$: $27 + 45 = 72 \quad \leftarrow \text{Coincide con d) } a_3 = 72 \checkmark$

Resultado de la Asociación

- a) $a_5 = 3 \longleftrightarrow$ 3) $a_n = n^2 - 2n - 12$ (pues $5^2 - 10 - 12 = 3$)
 b) $a_4 = 0 \longleftrightarrow$ 1) $a_n = n^2 - 9n + 20$ (pues $16 - 36 + 20 = 0$)
 c) $a_7 = 11 \longleftrightarrow$ 2) $a_n = n + 4$ (pues $7 + 4 = 11$)
 d) $a_3 = 72 \longleftrightarrow$ 4) $a_n = n^3 + 5n^2$ (pues $27 + 45 = 72$)



Ejercicio N^o 3

(2 puntos)

Calcula los cinco primeros términos de las sucesiones:

a) $a_n = 1 - n^2$

b) $\begin{cases} b_1 = 10 \\ b_n = b_{n-1} + n \end{cases}$

Definición explícita

$$a_n = f(n)$$

Se puede calcular cualquier término directamente sin conocer los anteriores

Definición

vs

Definición recurrente

$$b_n = g(b_{n-1}, n)$$

Cada término depende del anterior.
Hay que calcular en orden $b_1, b_2, b_3, \dots$

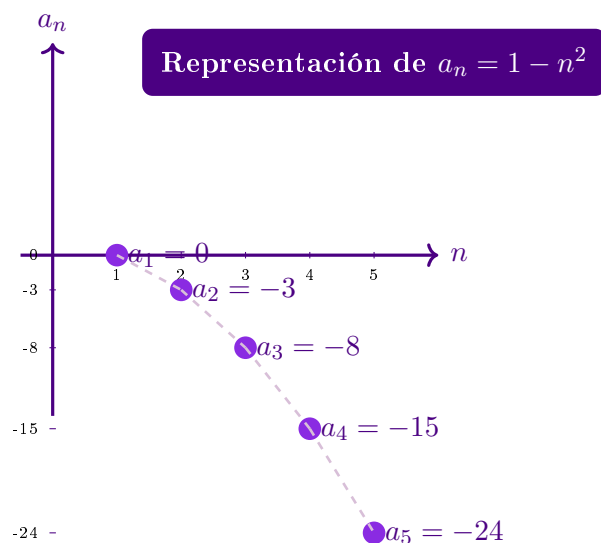
Apartado a) — $a_n = 1 - n^2$ (definición explícita)

Sustituimos $n = 1, 2, 3, 4, 5$ directamente en la fórmula:

n	Cálculo	Resultado
$n = 1$	$a_1 = 1 - 1^2 = 1 - 1 = 0$	$a_1 = \mathbf{0}$
$n = 2$	$a_2 = 1 - 2^2 = 1 - 4 = -3$	$a_2 = \mathbf{-3}$
$n = 3$	$a_3 = 1 - 3^2 = 1 - 9 = -8$	$a_3 = \mathbf{-8}$
$n = 4$	$a_4 = 1 - 4^2 = 1 - 16 = -15$	$a_4 = \mathbf{-15}$
$n = 5$	$a_5 = 1 - 5^2 = 1 - 25 = -24$	$a_5 = \mathbf{-24}$

Los cinco primeros términos son: **0, -3, -8, -15, -24**

Nota: La sucesión es decreciente porque $1 - n^2$ se hace cada vez más negativo. Las diferencias son -3, -5, -7, -9, que forman a su vez una P.A. con $d = -2$.



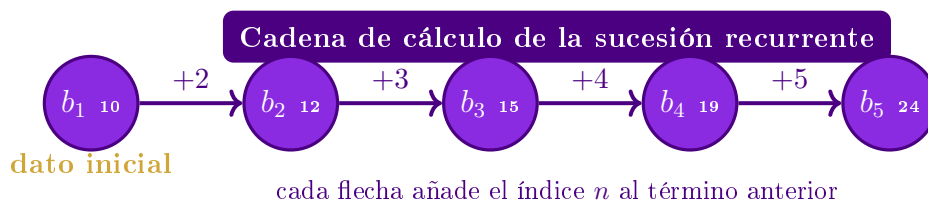
Apartado b) — Sucesión recurrente $b_1 = 10$, $b_n = b_{n-1} + n$

En una sucesión recurrente, **calculamos cada término a partir del anterior**. Partimos de $b_1 = 10$ y aplicamos la fórmula sucesivamente:

n	Cálculo (usando $b_n = b_{n-1} + n$)	Resultado
$n = 1$	$b_1 = 10$ (dato inicial)	$b_1 = 10$
$n = 2$	$b_2 = b_1 + 2 = 10 + 2 = 12$	$b_2 = 12$
$n = 3$	$b_3 = b_2 + 3 = 12 + 3 = 15$	$b_3 = 15$
$n = 4$	$b_4 = b_3 + 4 = 15 + 4 = 19$	$b_4 = 19$
$n = 5$	$b_5 = b_4 + 5 = 19 + 5 = 24$	$b_5 = 24$

Observación adicional: Las diferencias entre términos consecutivos son 2, 3, 4, 5, ... (crecen en 1 cada vez), por lo que **no es una P.A.** (las diferencias no son constantes).

Los cinco primeros términos son: **10, 12, 15, 19, 24**



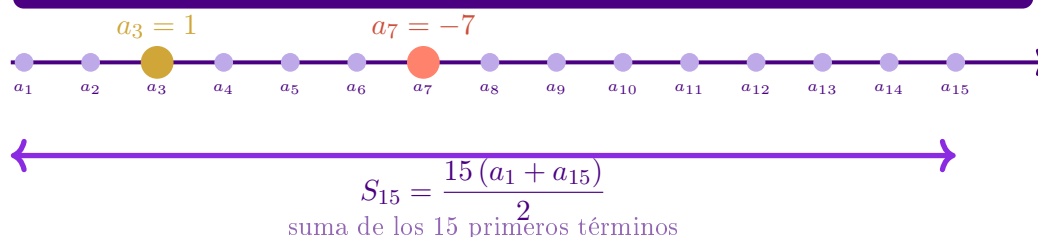


Ejercicio N° 4

(2 puntos)

Calcula la suma de los 15 primeros términos de una progresión aritmética en la que $a_3 = 1$ y $a_7 = -7$.

Esquema de la Progresión Aritmética — 15 primeros términos



Paso 1: Plantear el sistema de ecuaciones

En una P.A., el término general es $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$.

Aplicamos esta fórmula a los dos términos conocidos:

$$\begin{cases} a_3 = a_1 + (3 - 1) \cdot d = a_1 + 2d = 1 & \text{— Ecuación (I)} \\ a_7 = a_1 + (7 - 1) \cdot d = a_1 + 6d = -7 & \text{— Ecuación (II)} \end{cases}$$

Tenemos un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas (a_1 y d).

Paso 2: Resolver el sistema — hallar la diferencia d

Restamos la ecuación (I) de la ecuación (II) para eliminar a_1 :

$$(a_1 + 6d) - (a_1 + 2d) = -7 - 1$$

$$a_1 + 6d - a_1 - 2d = -8$$

$$4d = -8$$

$$\boxed{d = -2}$$

La diferencia de la progresión es $d = -2$.

Paso 3: Hallar el primer término a_1

Sustituimos $d = -2$ en la ecuación (I):

$$a_1 + 2 \cdot (-2) = 1 \quad \Rightarrow \quad a_1 - 4 = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_1 = 5}$$

Comprobación con la ecuación (II): $a_1 + 6d = 5 + 6 \cdot (-2) = 5 - 12 = -7 \checkmark$

Paso 4: Verificar los términos conocidos y hallar a_{15}

Con $a_1 = 5$ y $d = -2$, el término general es:

$$a_n = 5 + (n - 1) \cdot (-2) = 5 - 2n + 2 = 7 - 2n$$

Verificamos: $a_3 = 7 - 2(3) = 7 - 6 = 1 \checkmark$ $a_7 = 7 - 2(7) = 7 - 14 = -7 \checkmark$

Calculamos el término número 15:

$$a_{15} = 7 - 2(15) = 7 - 30 = -23$$

Los primeros términos de la progresión son:

5, 3, 1, -1, -3, -5, -7, -9, -11, -13, -15, -17, -19, -21, -23

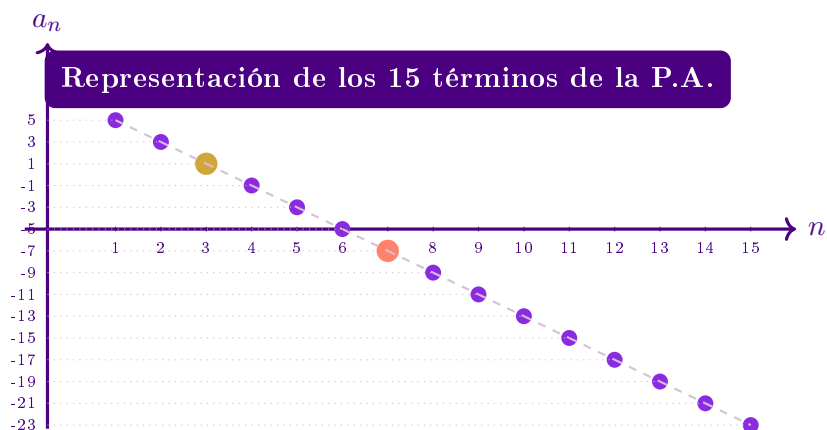
Paso 5: Calcular la suma de los 15 primeros términos

Aplicamos la fórmula de la suma de una P.A.:

$$S_{15} = \frac{15(a_1 + a_{15})}{2} = \frac{15(5 + (-23))}{2} = \frac{15 \cdot (-18)}{2} = \frac{-270}{2} = -135$$

Comprobación alternativa usando la otra fórmula:

$$S_{15} = \frac{15(2a_1 + (15 - 1) \cdot d)}{2} = \frac{15(2 \cdot 5 + 14 \cdot (-2))}{2} = \frac{15(10 - 28)}{2} = \frac{15 \cdot (-18)}{2} = -135 \checkmark$$



$$a_1 = 5, \quad d = -2, \quad a_n = 7 - 2n$$

$$S_{15} = \frac{15 \cdot (5 + (-23))}{2} = \frac{15 \cdot (-18)}{2} = \boxed{-135}$$

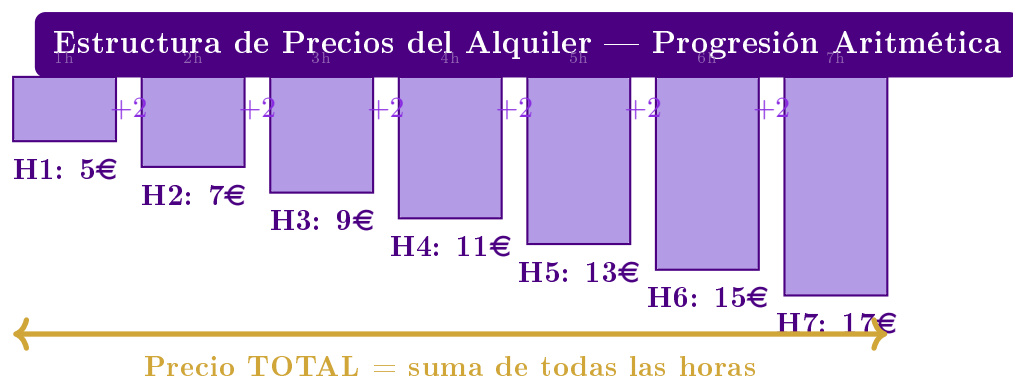


Ejercicio N^o 5

(2 puntos)

El alquiler de una bicicleta cuesta 5€ la primera hora y 2€ más cada nueva hora.

- ¿Cuál es el precio total de alquiler de 7 horas?
- Halla una fórmula que nos dé el precio total de alquiler de n horas.
- Si un día me han cobrado 21€ ¿cuántas horas he tenido alquilada la bicicleta?



Análisis del problema: identificación de la P.A.

El precio por hora forma una **Progresión Aritmética**:

Hora	1	2	3	4	5	6	7
Precio hora (€)	5	7	9	11	13	15	17

- Primer término: $a_1 = 5€$ (precio de la primera hora)
- Diferencia: $d = 2€$ (cada nueva hora cuesta 2€ más que la anterior)
- Término general (precio de la hora n -ésima): $a_n = 5 + (n - 1) \cdot 2 = 5 + 2n - 2 = 2n + 3$

Apartado a) — Precio total de 7 horas

El precio total de 7 horas es la **suma de los 7 primeros términos** de la P.A.

Paso 1: Calculamos a_7 (precio de la séptima hora):

$$a_7 = 2(7) + 3 = 14 + 3 = 17 \text{ €}$$

Paso 2: Aplicamos la fórmula de la suma de una P.A.:

$$S_7 = \frac{7(a_1 + a_7)}{2} = \frac{7(5 + 17)}{2} = \frac{7 \cdot 22}{2} = \frac{154}{2} = 77 \text{ €}$$

Comprobación sumando directamente:

$$5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 = 77 \text{ €} \checkmark$$

El precio total de alquiler de 7 horas es **77 €**

Apartado b) — Fórmula general para n horas

El precio total de n horas es la suma de los n primeros términos:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Sustituimos $a_1 = 5$ y $a_n = 2n + 3$:

$$S_n = \frac{n(5 + 2n + 3)}{2} = \frac{n(2n + 8)}{2} = \frac{2n(n + 4)}{2} = n(n + 4)$$

Simplificando:

$$S_n = n^2 + 4n$$

Verificación para $n = 7$: $S_7 = 7^2 + 4 \cdot 7 = 49 + 28 = 77 \text{ €} \checkmark$

Verificación para $n = 1$: $S_1 = 1 + 4 = 5 \text{ €} \checkmark$

La fórmula del precio total de n horas es: **$S_n = n^2 + 4n$** (en euros)

Apartado c) — ¿Cuántas horas si cobran 21€?

Debemos encontrar n tal que $S_n = 21$.

Paso 1: Planteamos la ecuación usando la fórmula del apartado b):

$$n^2 + 4n = 21$$

Paso 2: Reordenamos para obtener una ecuación de segundo grado:

$$n^2 + 4n - 21 = 0$$

Paso 3: Resolvemos usando la fórmula cuadrática ($a = 1$, $b = 4$, $c = -21$):

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 84}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-4 \pm 10}{2}$$

Dos soluciones:

$$n_1 = \frac{-4 + 10}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{y} \quad n_2 = \frac{-4 - 10}{2} = \frac{-14}{2} = -7$$

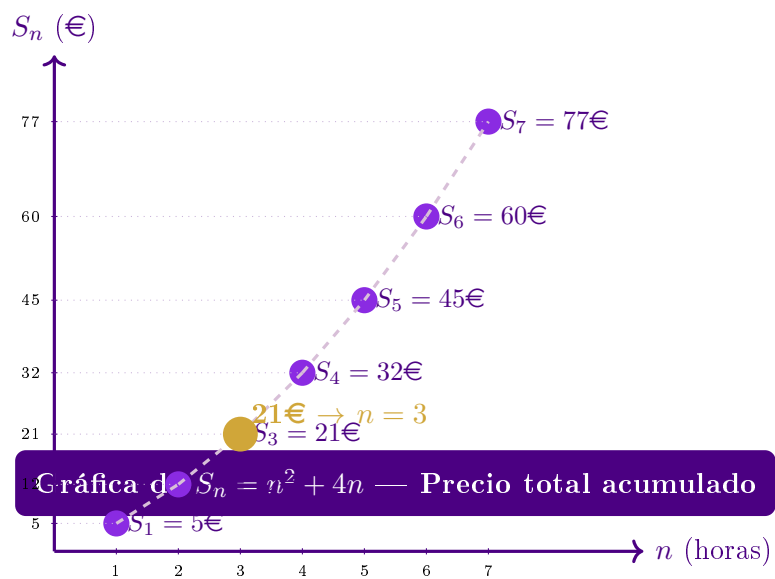
Paso 4: Descartamos la solución negativa porque el número de horas debe ser un número natural positivo. Por tanto $n_2 = -7$ **no tiene sentido en el contexto del problema.**

$$n = 3 \text{ horas}$$

Paso 5: Comprobación: $S_3 = 3^2 + 4 \cdot 3 = 9 + 12 = 21$ €✓

O bien: el precio de cada hora es 5, 7, 9 y $5 + 7 + 9 = 21$ €✓

Si han cobrado 21€, la bicicleta ha estado alquilada **3 horas**
(Hora 1: 5€; Hora 2: 7€; Hora 3: 9€; Total: 21€)



Resumen Ejercicio 5 — Alquiler de Bicicleta

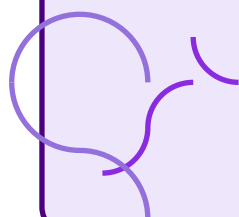
Apartado	Pregunta	Resultado
a)	Precio total de 7 horas	$S_7 = \frac{7(5+17)}{2} = 77 \text{ €}$
b)	Fórmula general para n horas	$S_n = n^2 + 4n$
c)	Número de horas si cobran 21€	$n^2 + 4n = 21 \Rightarrow n = 3 \text{ horas}$



Resumen Final — Todos los Resultados del Examen

Respuestas del Examen — Tema 5: Sucesiones y Series

Ej.	Enunciado resumido	Resultado
1a	2, 7, 12, 17, ...	P.A., $d = 5$, $a_n = 5n - 3$
1b	1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...	NINGUNA (Fibonacci)
1c	-2, 4, -8, 16, -32	P.G., $r = -2$, $a_n = (-2)^n$
1d	3, 2, 1, 0, -1, -2, ...	P.A., $d = -1$, $a_n = 4 - n$
1e	3, 6, 12, 24, 48, ...	P.G., $r = 2$, $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
2	Asociación términos-fórmula	a)→3, b)→1, c)→2, d)→4
3a	$a_n = 1 - n^2$ (5 primeros)	0, -3, -8, -15, -24
3b	Recurrente $b_1 = 10$, $b_n = b_{n-1} + n$	10, 12, 15, 19, 24
4	Suma 15 términos ($a_3 = 1$, $a_7 = -7$)	$a_1 = 5$, $d = -2$, $S_{15} = -135$
5a	Precio 7 horas de bicicleta	$S_7 = 77$ €
5b	Fórmula precio total n horas	$S_n = n^2 + 4n$
5c	Horas para 21€	$n = 3$ horas



*“Calcular es descubrir
que los números tienen
una belleza oculta que sólo*

— LEONARDO PISA (Fibonacci)

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

La sucesión más famosa de las Matemáticas



Nº1.- Dados los polinomios: $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$ y $Q(x) = 2x^2 - 3$.
Calcúlese:

a) $P(x)+Q(x)$ b) $P(x)-2Q(x)$ c) $P(x) \cdot Q(x)$

(1,5 PUNTOS)

Nº2.- Desarrolla las siguientes identidades notables:

a) $(2x + y)^2$ b) $(x - 3y)^2$ c) $(2x + 3y) \cdot (2x - 3y)$

(1 PUNTO)

Nº3.- Realiza la siguiente división utilizando la regla de Ruffini. Indica el polinomio cociente. ¿Cuál es el resto?

$$(x^5 - 3x^4 + 3x^2 - 1) : (x - 1)$$

(1 PUNTO)

Nº4.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2(x - 3) - 5(1 + 4x) = 5x - (-15 - 3x)$ b) $\frac{7x - 2}{4} = \frac{3x}{2}$

(1 PUNTO)

Nº5.- En un zoológico el número de monos es el doble que el de leones menos 5. Si entre monos y leones hay 34 animales, ¿cuántos monos y cuántos leones hay?

(1,5 PUNTOS)

Nº6.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 3x - 10 = 0$ b) $x^2 - 4 = 0$ c) $3x^2 - 6x = 0$

(1,5 PUNTOS)

Nº7.- De rectángulo sabemos que su base es el doble que la altura y su perímetro es 42 cm. ¿Cuál es la medida de sus lados?

(1,5 PUNTOS)

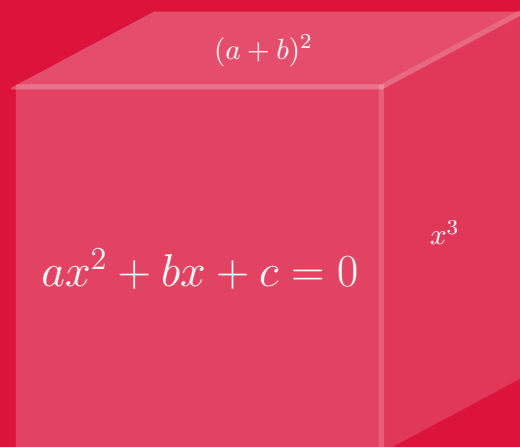
Nº8.- Inventa una ecuación de 2º grado que tenga como soluciones $x = -5$ y $x = 2$

(1 PUNTO)

SUERTE JÓVENES

MATEMÁTICAS

ECUACIONES Y POLINOMIOS



EXAMEN 3º A ESO

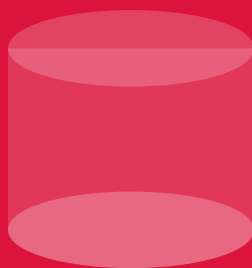
13 de marzo de 2020



“Cogito, ergo sum”

(Pienso, luego existo)

— **René Descartes** (1596-1650)
Matemático, físico y filósofo francés



Índice

1. Ejercicio 1: Operaciones con Polinomios	2
1.1. Enunciado	2
1.2. Resolución Detallada	2
1.2.1. Apartado a) $P(x) + Q(x)$	2
1.2.2. Apartado b) $P(x) - 2Q(x)$	2
1.2.3. Apartado c) $P(x) \cdot Q(x)$	3
1.3. Ilustración: Representación Gráfica de Polinomios	4
2. Ejercicio 2: Identidades Notables	5
2.1. Enunciado	5
2.2. Fórmulas de las Identidades Notables	5
2.3. Resolución Detallada	5
2.3.1. Apartado a) $(2x + y)^2$	5
2.3.2. Apartado b) $(x - 3y)^2$	6
2.3.3. Apartado c) $(2x + 3y) \cdot (2x - 3y)$	6
2.4. Ilustración: Interpretación Geométrica	7
3. Ejercicio 3: División por Ruffini	8
3.1. Enunciado	8
3.2. Teoría: Regla de Ruffini	8
3.3. Resolución Detallada	8
3.3.1. Paso 1: Identificar los coeficientes	8
3.3.2. Paso 2: Aplicar la Regla de Ruffini	8
3.3.3. Paso 3: Interpretar el resultado	9
3.4. Verificación del Resultado	9
3.5. Teorema del Resto	9
3.6. Ilustración: Esquema de Ruffini	9
4. Ejercicio 4: Ecuaciones Lineales	10
4.1. Enunciado	10
4.2. Resolución Detallada	10
4.2.1. Apartado a) $2(x - 3) - 5(1 + 4x) = 5x - (-15 - 3x)$	10
4.2.2. Apartado b) $\frac{7x - 2}{4} = \frac{3x}{2}$	11
4.3. Ilustración: Balanza de Ecuaciones	12
5. Ejercicio 5: Problema de Monos y Leones	13
5.1. Enunciado	13
5.2. Resolución Detallada	13
5.2.1. Paso 1: Identificar las incógnitas	13
5.2.2. Paso 2: Traducir el enunciado a ecuaciones	13
5.2.3. Paso 3: Resolver el sistema de ecuaciones	13
5.2.4. Paso 4: Verificación	14
5.3. Respuesta Final	14
5.4. Ilustración: Representación Visual del Problema	14

6. Ejercicio 6: Ecuaciones de Segundo Grado	16
6.1. Enunciado	16
6.2. Fórmula General de la Ecuación de Segundo Grado	16
6.3. Resolución Detallada	16
6.3.1. Apartado a) $x^2 + 3x - 10 = 0$	16
6.3.2. Apartado b) $x^2 - 4 = 0$	17
6.3.3. Apartado c) $3x^2 - 6x = 0$	18
6.4. Ilustración: Representación Gráfica de las Parábolas	18
6.5. Resumen de Soluciones	19
7. Ejercicio 7: Problema del Rectángulo	20
7.1. Enunciado	20
7.2. Resolución Detallada	20
7.2.1. Paso 1: Identificar las incógnitas y datos	20
7.2.2. Paso 2: Plantear la ecuación	20
7.2.3. Paso 3: Resolver la ecuación	20
7.2.4. Paso 4: Verificación	21
7.3. Respuesta Final	21
7.4. Cálculos Adicionales	21
7.5. Ilustración: Rectángulo con Medidas	22
8. Ejercicio 8: Crear Ecuación de Segundo Grado	23
8.1. Enunciado	23
8.2. Teoría: Construcción de Ecuaciones a partir de las Raíces	23
8.3. Resolución Detallada	23
8.3.1. Datos del problema	23
8.3.2. Método 1: Forma factorizada	23
8.3.3. Método 2: Fórmula directa	24
8.3.4. Otras ecuaciones válidas	24
8.4. Verificación	24
8.5. Relación con las Fórmulas de Viète	25
8.6. Ilustración: Gráfica de la Parábola	25

1. Ejercicio 1: Operaciones con Polinomios

1.1. Enunciado

Dados los polinomios:

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$$

$$Q(x) = 2x^2 - 3$$

Calcúlese:

a) $P(x) + Q(x)$

b) $P(x) - 2Q(x)$

c) $P(x) \cdot Q(x)$

1.2. Resolución Detallada

1.2.1. Apartado a) $P(x) + Q(x)$

Para sumar polinomios, sumamos los coeficientes de los términos del mismo grado.

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (x^3 - 2x^2 + x - 3) + (2x^2 - 3) \\ &= x^3 + (-2x^2 + 2x^2) + x + (-3 - 3) \\ &= x^3 + 0x^2 + x - 6 \\ &= \boxed{x^3 + x - 6} \end{aligned}$$

Explicación paso a paso:

- Identificamos términos semejantes (mismo grado)
- x^3 : solo aparece en $P(x)$, se mantiene
- x^2 : tenemos $-2x^2$ de $P(x)$ y $+2x^2$ de $Q(x)$, suman 0
- x : solo aparece en $P(x)$, se mantiene
- Término independiente: $-3 + (-3) = -6$

1.2.2. Apartado b) $P(x) - 2Q(x)$

Primero calculamos $2Q(x)$ y luego restamos:

$$\begin{aligned} 2Q(x) &= 2(2x^2 - 3) \\ &= 4x^2 - 6 \end{aligned}$$

Ahora restamos:

$$\begin{aligned}P(x) - 2Q(x) &= (x^3 - 2x^2 + x - 3) - (4x^2 - 6) \\&= x^3 - 2x^2 + x - 3 - 4x^2 + 6 \\&= x^3 + (-2x^2 - 4x^2) + x + (-3 + 6) \\&= x^3 - 6x^2 + x + 3 \\&= \boxed{x^3 - 6x^2 + x + 3}\end{aligned}$$

Observación importante: Al restar un polinomio, cambiamos el signo de todos sus términos.

1.2.3. Apartado c) $P(x) \cdot Q(x)$

Multiplicamos cada término de $P(x)$ por cada término de $Q(x)$ aplicando la propiedad distributiva:

$$P(x) \cdot Q(x) = (x^3 - 2x^2 + x - 3) \cdot (2x^2 - 3)$$

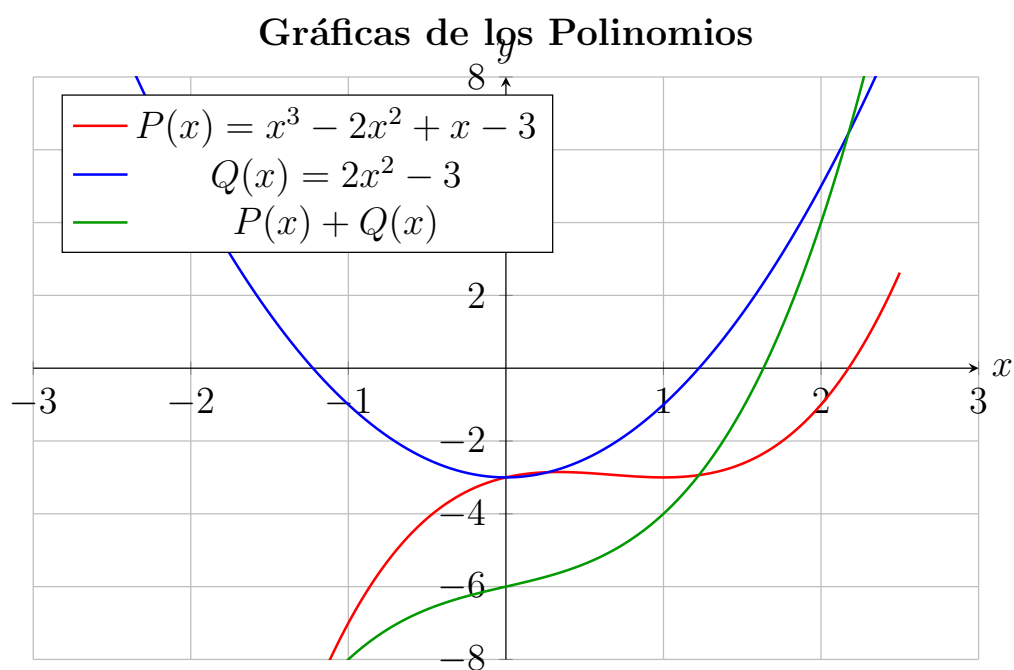
Desarrollamos multiplicando término a término:

$$\begin{aligned}&= x^3 \cdot (2x^2 - 3) - 2x^2 \cdot (2x^2 - 3) + x \cdot (2x^2 - 3) - 3 \cdot (2x^2 - 3) \\&= (2x^5 - 3x^3) + (-4x^4 + 6x^2) + (2x^3 - 3x) + (-6x^2 + 9) \\&= 2x^5 - 4x^4 + (-3x^3 + 2x^3) + (6x^2 - 6x^2) - 3x + 9 \\&= 2x^5 - 4x^4 - x^3 + 0x^2 - 3x + 9 \\&= \boxed{2x^5 - 4x^4 - x^3 - 3x + 9}\end{aligned}$$

Verificación de grados:

- Grado de $P(x)$: 3
- Grado de $Q(x)$: 2
- Grado del producto: $3 + 2 = 5$

1.3. Ilustración: Representación Gráfica de Polinomios



2. Ejercicio 2: Identidades Notables

2.1. Enunciado

Desarrolla las siguientes identidades notables:

a) $(2x + y)^2$

b) $(x - 3y)^2$

c) $(2x + 3y) \cdot (2x - 3y)$

2.2. Fórmulas de las Identidades Notables

Las identidades notables son productos que se repiten frecuentemente y cuyo resultado se puede obtener sin realizar la multiplicación paso a paso:

Identidades Notables Fundamentales

1. **Cuadrado de una suma:** $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. **Cuadrado de una diferencia:** $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. **Suma por diferencia:** $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

2.3. Resolución Detallada

2.3.1. Apartado a) $(2x + y)^2$

Aplicamos la fórmula del cuadrado de una suma: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Identificamos: $a = 2x$ y $b = y$

$$\begin{aligned}(2x + y)^2 &= (2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot y + y^2 \\ &= 4x^2 + 4xy + y^2 \\ &= \boxed{4x^2 + 4xy + y^2}\end{aligned}$$

Detalle del cálculo:

- $(2x)^2 = 2^2 \cdot x^2 = 4x^2$
- $2 \cdot (2x) \cdot y = 4xy$
- $y^2 = y^2$

Verificación multiplicando:

$$\begin{aligned}(2x + y)^2 &= (2x + y)(2x + y) \\ &= 2x \cdot 2x + 2x \cdot y + y \cdot 2x + y \cdot y \\ &= 4x^2 + 2xy + 2xy + y^2 \\ &= 4x^2 + 4xy + y^2 \quad \checkmark\end{aligned}$$

2.3.2. Apartado b) $(x - 3y)^2$

Aplicamos la fórmula del cuadrado de una diferencia: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Identificamos: $a = x$ y $b = 3y$

$$\begin{aligned}(x - 3y)^2 &= x^2 - 2 \cdot x \cdot (3y) + (3y)^2 \\ &= x^2 - 6xy + 9y^2 \\ &= \boxed{x^2 - 6xy + 9y^2}\end{aligned}$$

Detalle del cálculo:

- $x^2 = x^2$
- $-2 \cdot x \cdot 3y = -6xy$
- $(3y)^2 = 3^2 \cdot y^2 = 9y^2$

Error común a evitar: $(x - 3y)^2 \neq x^2 - 9y^2$ (falta el término central $-6xy$)

2.3.3. Apartado c) $(2x + 3y) \cdot (2x - 3y)$

Aplicamos la fórmula de suma por diferencia: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Identificamos: $a = 2x$ y $b = 3y$

$$\begin{aligned}(2x + 3y)(2x - 3y) &= (2x)^2 - (3y)^2 \\ &= 4x^2 - 9y^2 \\ &= \boxed{4x^2 - 9y^2}\end{aligned}$$

Detalle del cálculo:

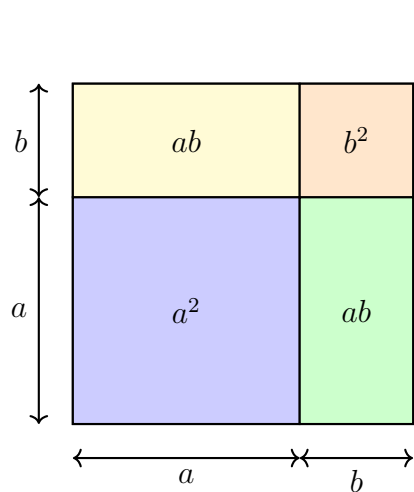
- $(2x)^2 = 4x^2$
- $(3y)^2 = 9y^2$
- Resultado: $4x^2 - 9y^2$ (diferencia de cuadrados)

Verificación multiplicando:

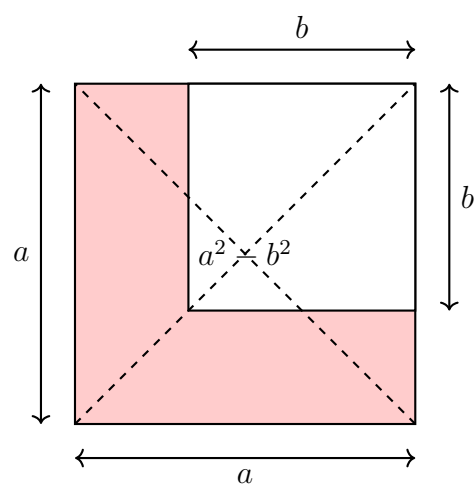
$$\begin{aligned}(2x + 3y)(2x - 3y) &= 2x \cdot 2x + 2x \cdot (-3y) + 3y \cdot 2x + 3y \cdot (-3y) \\ &= 4x^2 - 6xy + 6xy - 9y^2 \\ &= 4x^2 + 0xy - 9y^2 \\ &= 4x^2 - 9y^2 \quad \checkmark\end{aligned}$$

Observamos que los términos centrales se cancelan: $-6xy + 6xy = 0$

2.4. Ilustración: Interpretación Geométrica



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

3. Ejercicio 3: División por Ruffini

3.1. Enunciado

Realiza la siguiente división utilizando la regla de Ruffini. Indica el polinomio cociente. ¿Cuál es el resto?

$$(x^5 - 3x^4 + 3x^2 - 1) : (x - 1)$$

3.2. Teoría: Regla de Ruffini

La regla de Ruffini es un método simplificado para dividir un polinomio $P(x)$ entre un binomio de la forma $(x - a)$.

Pasos:

1. Escribir los coeficientes del dividendo (completando con ceros los términos que falten)
2. Escribir el valor a del divisor $(x - a)$ a la izquierda
3. Aplicar el algoritmo: bajar, multiplicar, sumar

3.3. Resolución Detallada

Dividendo: $P(x) = x^5 - 3x^4 + 3x^2 - 1$

Divisor: $x - 1$, por tanto $a = 1$

3.3.1. Paso 1: Identificar los coeficientes

El polinomio completo es:

$$P(x) = x^5 - 3x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x - 1$$

Coefficientes: 1, -3, 0, 3, 0, -1

3.3.2. Paso 2: Aplicar la Regla de Ruffini

	1	-3	0	3	0	-1
1	1	-2	-2	1	1	
	1	-2	-2	1	1	0

Desarrollo detallado:

1. Bajamos el primer coeficiente: 1
2. Multiplicamos $1 \times 1 = 1$ y sumamos: $-3 + 1 = -2$
3. Multiplicamos $-2 \times 1 = -2$ y sumamos: $0 + (-2) = -2$
4. Multiplicamos $-2 \times 1 = -2$ y sumamos: $3 + (-2) = 1$
5. Multiplicamos $1 \times 1 = 1$ y sumamos: $0 + 1 = 1$
6. Multiplicamos $1 \times 1 = 1$ y sumamos: $-1 + 1 = 0$

3.3.3. Paso 3: Interpretar el resultado

Los números de la última fila (excepto el último) son los coeficientes del cociente:

$$C(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1$$

El último número es el resto:

$$R = 0$$

3.4. Verificación del Resultado

Como el resto es 0, significa que $(x - 1)$ es un divisor exacto de $P(x)$, es decir:

$$P(x) = (x - 1) \cdot C(x)$$

Podemos verificar que $P(1) = 0$:

$$\begin{aligned} P(1) &= 1^5 - 3(1)^4 + 3(1)^2 - 1 \\ &= 1 - 3 + 3 - 1 \\ &= 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Esto confirma que $x = 1$ es una raíz del polinomio $P(x)$.

3.5. Teorema del Resto

Teorema del Resto

El resto de dividir un polinomio $P(x)$ entre $(x - a)$ es igual a $P(a)$.

En este caso: Resto = $P(1) = 0$

3.6. Ilustración: Esquema de Ruffini

	x^5	x^4	x^3	x^2	x	1
1	1	-3	0	3	0	-1
	↓	1	-2	-2	1	1
	1	-2	-2	1	1	0

Cociente: $x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1$

Resto: 0

4. Ejercicio 4: Ecuaciones Lineales

4.1. Enunciado

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2(x - 3) - 5(1 + 4x) = 5x - (-15 - 3x)$

b) $\frac{7x - 2}{4} = \frac{3x}{2}$

4.2. Resolución Detallada

4.2.1. Apartado a) $2(x - 3) - 5(1 + 4x) = 5x - (-15 - 3x)$

Paso 1: Eliminar paréntesis aplicando la propiedad distributiva

$$\begin{aligned} 2(x - 3) - 5(1 + 4x) &= 5x - (-15 - 3x) \\ 2x - 6 - 5 - 20x &= 5x + 15 + 3x \end{aligned}$$

Detalle:

- $2(x - 3) = 2 \cdot x + 2 \cdot (-3) = 2x - 6$
- $-5(1 + 4x) = -5 \cdot 1 + (-5) \cdot 4x = -5 - 20x$
- $-(-15 - 3x) = +15 + 3x$ (menos por menos da más)

Paso 2: Simplificar ambos lados

Lado izquierdo:

$$\begin{aligned} 2x - 6 - 5 - 20x &= (2x - 20x) + (-6 - 5) \\ &= -18x - 11 \end{aligned}$$

Lado derecho:

$$\begin{aligned} 5x + 15 + 3x &= (5x + 3x) + 15 \\ &= 8x + 15 \end{aligned}$$

La ecuación queda:

$$-18x - 11 = 8x + 15$$

Paso 3: Agrupar términos con x a la izquierda y términos independientes a la derecha

$$\begin{aligned} -18x - 8x &= 15 + 11 \\ -26x &= 26 \end{aligned}$$

Paso 4: Despejar x

$$x = \frac{26}{-26}$$

$$x = \boxed{-1}$$

Verificación (sustituyendo $x = -1$ en la ecuación original):

$$\begin{aligned}\text{Izquierda: } & 2(-1 - 3) - 5(1 + 4(-1)) \\ &= 2(-4) - 5(1 - 4) \\ &= -8 - 5(-3) \\ &= -8 + 15 \\ &= 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Derecha: } & 5(-1) - (-15 - 3(-1)) \\ &= -5 - (-15 + 3) \\ &= -5 - (-12) \\ &= -5 + 12 \\ &= 7 \quad \checkmark\end{aligned}$$

4.2.2. Apartado b) $\frac{7x - 2}{4} = \frac{3x}{2}$

Paso 1: Eliminar denominadores multiplicando ambos lados por el m.c.m.(4, 2) = 4

$$\begin{aligned}4 \cdot \frac{7x - 2}{4} &= 4 \cdot \frac{3x}{2} \\ 7x - 2 &= \frac{4 \cdot 3x}{2} \\ 7x - 2 &= \frac{12x}{2} \\ 7x - 2 &= 6x\end{aligned}$$

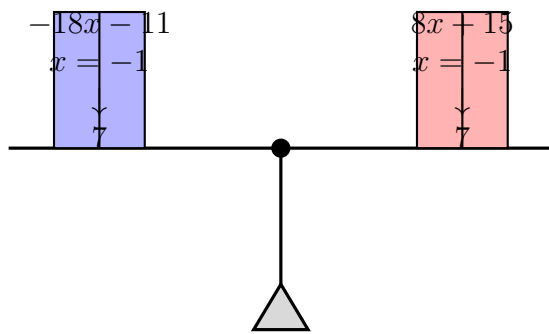
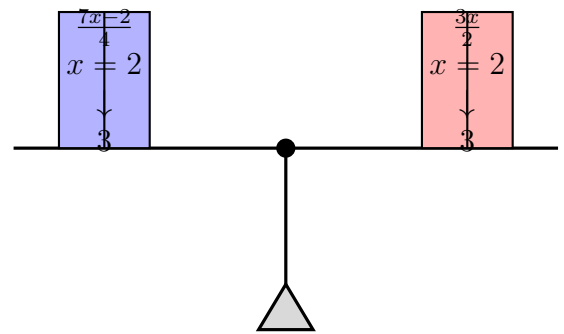
Paso 2: Agrupar términos con x a la izquierda

$$\begin{aligned}7x - 6x &= 2 \\ x &= \boxed{2}\end{aligned}$$

Verificación (sustituyendo $x = 2$ en la ecuación original):

$$\begin{aligned}\text{Izquierda: } & \frac{7(2) - 2}{4} = \frac{14 - 2}{4} = \frac{12}{4} = 3 \\ \text{Derecha: } & \frac{3(2)}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \checkmark\end{aligned}$$

4.3. Ilustración: Balanza de Ecuaciones

Ecuación a): $x = -1$ Ecuación b): $x = 2$

5. Ejercicio 5: Problema de Monos y Leones

5.1. Enunciado

En un zoológico el número de monos es el doble que el de leones menos 5. Si entre monos y leones hay 34 animales, ¿cuántos monos y cuántos leones hay?

5.2. Resolución Detallada

5.2.1. Paso 1: Identificar las incógnitas

Llamamos:

- L = número de leones
- M = número de monos

5.2.2. Paso 2: Traducir el enunciado a ecuaciones

Del enunciado extraemos dos condiciones:

Condición 1: “El número de monos es el doble que el de leones menos 5”

$$M = 2L - 5$$

Condición 2: “Entre monos y leones hay 34 animales”

$$M + L = 34$$

5.2.3. Paso 3: Resolver el sistema de ecuaciones

Tenemos el sistema:

$$\begin{cases} M = 2L - 5 \\ M + L = 34 \end{cases}$$

Método de sustitución:

Sustituimos la primera ecuación en la segunda:

$$(2L - 5) + L = 34$$

$$2L - 5 + L = 34$$

$$3L - 5 = 34$$

$$3L = 34 + 5$$

$$3L = 39$$

$$L = \frac{39}{3}$$

$$L = \boxed{13 \text{ leones}}$$

Ahora calculamos el número de monos sustituyendo $L = 13$ en la primera ecuación:

$$M = 2(13) - 5$$

$$M = 26 - 5$$

$$M = \boxed{21 \text{ monos}}$$

5.2.4. Paso 4: Verificación

Comprobamos que las soluciones cumplen ambas condiciones:

Condición 1: ¿Es $M = 2L - 5$?

$$21 \stackrel{?}{=} 2(13) - 5$$

$$21 \stackrel{?}{=} 26 - 5$$

$$21 = 21 \quad \checkmark$$

Condición 2: ¿Es $M + L = 34$?

$$21 + 13 \stackrel{?}{=} 34$$

$$34 = 34 \quad \checkmark$$

5.3. Respuesta Final

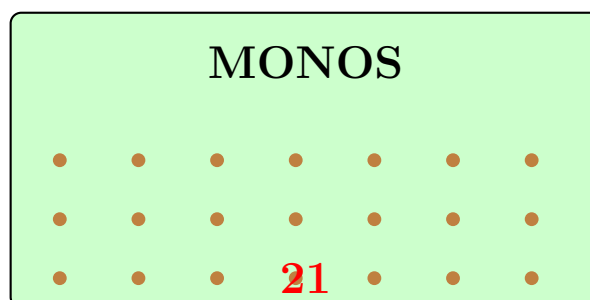
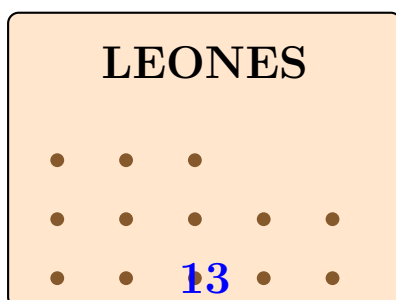
Solución

En el zoológico hay:

- 13 leones
- 21 monos

Total: 34 animales

5.4. Ilustración: Representación Visual del Problema

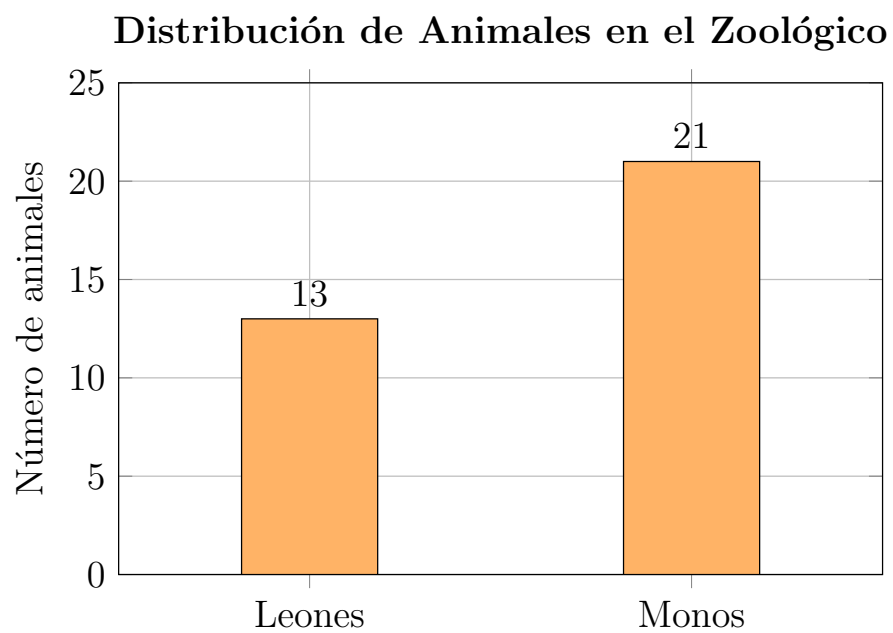


$M = 2L$
(el doble)

$$L = 13$$

$$M = 21 = 2(13) - 5$$

TOTAL: 34 animales



6. Ejercicio 6: Ecuaciones de Segundo Grado

6.1. Enunciado

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 3x - 10 = 0$

b) $x^2 - 4 = 0$

c) $3x^2 - 6x = 0$

6.2. Fórmula General de la Ecuación de Segundo Grado

Para una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, las soluciones vienen dadas por:

Fórmula General

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde:

- $\Delta = b^2 - 4ac$ es el **discriminante**
- Si $\Delta > 0$: dos soluciones reales distintas
- Si $\Delta = 0$: una solución real doble
- Si $\Delta < 0$: no hay soluciones reales

6.3. Resolución Detallada

6.3.1. Apartado a) $x^2 + 3x - 10 = 0$

Identificamos los coeficientes:

$$a = 1, \quad b = 3, \quad c = -10$$

Paso 1: Calcular el discriminante

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 3^2 - 4(1)(-10) \\ &= 9 + 40 \\ &= 49\end{aligned}$$

Como $\Delta = 49 > 0$, la ecuación tiene **dos soluciones reales distintas**.

Paso 2: Aplicar la fórmula general

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\
 &= \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2(1)} \\
 &= \frac{-3 \pm 7}{2}
 \end{aligned}$$

Paso 3: Calcular ambas soluciones

$$x_1 = \frac{-3 + 7}{2} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$$

$$x_2 = \frac{-3 - 7}{2} = \frac{-10}{2} = \boxed{-5}$$

Verificación para $x_1 = 2$:

$$2^2 + 3(2) - 10 = 4 + 6 - 10 = 0 \quad \checkmark$$

Verificación para $x_2 = -5$:

$$(-5)^2 + 3(-5) - 10 = 25 - 15 - 10 = 0 \quad \checkmark$$

Factorización: La ecuación se puede escribir como:

$$x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5) = 0$$

6.3.2. Apartado b) $x^2 - 4 = 0$

Esta es una **ecuación incompleta** (falta el término en x).

Método 1: Despeje directo

$$\begin{aligned}
 x^2 - 4 &= 0 \\
 x^2 &= 4 \\
 x &= \pm\sqrt{4} \\
 x &= \pm 2
 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\boxed{x_1 = 2} \quad \text{y} \quad \boxed{x_2 = -2}$$

Método 2: Diferencia de cuadrados

Reconocemos la identidad notable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$:

$$\begin{aligned}
 x^2 - 4 &= x^2 - 2^2 \\
 &= (x + 2)(x - 2) = 0
 \end{aligned}$$

Aplicando la ley del producto nulo:

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Verificación:

$$2^2 - 4 = 4 - 4 = 0 \quad \checkmark$$

$$(-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0 \quad \checkmark$$

6.3.3. Apartado c) $3x^2 - 6x = 0$

Esta es una **ecuación incompleta** (falta el término independiente).

Método: Sacar factor común

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(x - 2) = 0$$

Aplicando la ley del producto nulo, uno de los factores debe ser cero:

$$3x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Por tanto:

$$\boxed{x_1 = 0} \quad \text{y} \quad \boxed{x_2 = 2}$$

Verificación:

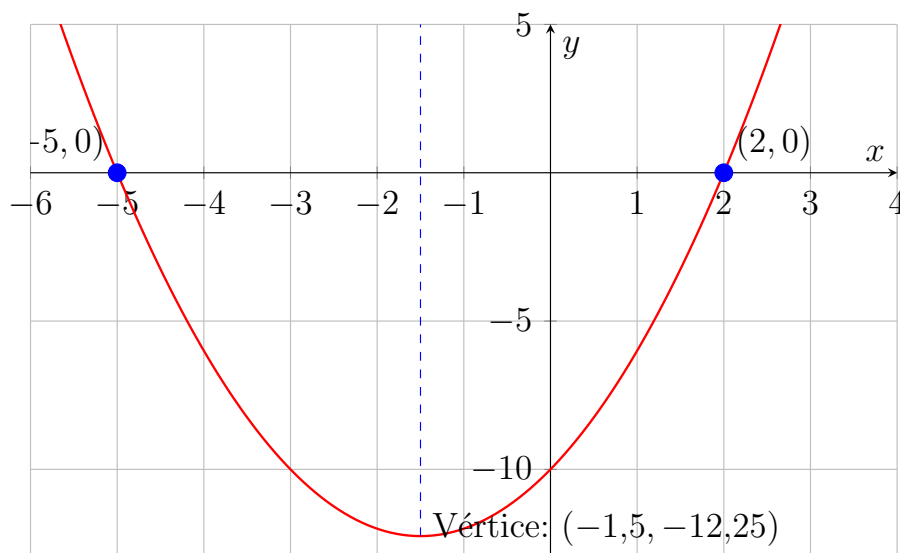
$$\text{Para } x = 0 : \quad 3(0)^2 - 6(0) = 0 - 0 = 0 \quad \checkmark$$

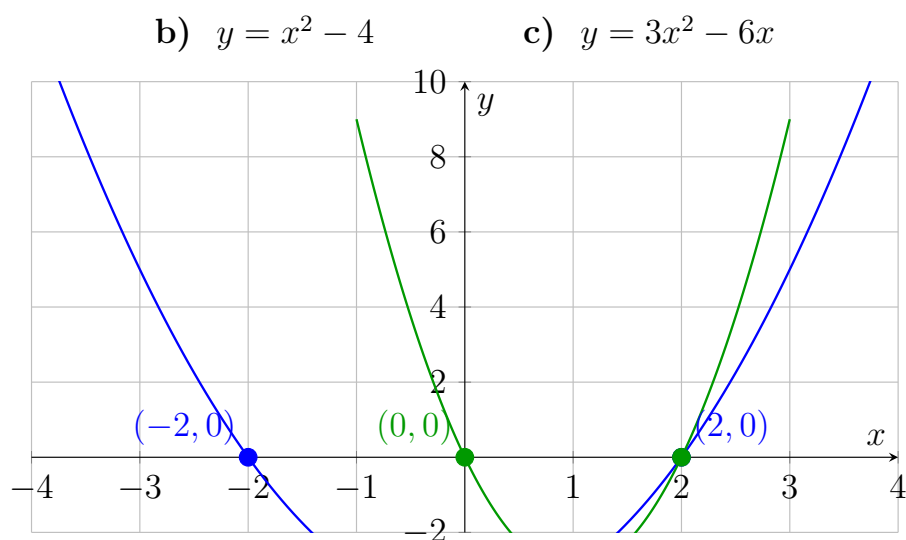
$$\text{Para } x = 2 : \quad 3(2)^2 - 6(2) = 12 - 12 = 0 \quad \checkmark$$

Observación importante: En ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$ (sin término independiente), una solución siempre es $x = 0$.

6.4. Ilustración: Representación Gráfica de las Parábolas

a) $y = x^2 + 3x - 10$





6.5. Resumen de Soluciones

Ecuación	Soluciones	Método
$x^2 + 3x - 10 = 0$	$x = 2, x = -5$	Fórmula general
$x^2 - 4 = 0$	$x = 2, x = -2$	Diferencia de cuadrados
$3x^2 - 6x = 0$	$x = 0, x = 2$	Factor común

7. Ejercicio 7: Problema del Rectángulo

7.1. Enunciado

De un rectángulo sabemos que su base es el doble que la altura y su perímetro es 42 cm. ¿Cuál es la medida de sus lados?

7.2. Resolución Detallada

7.2.1. Paso 1: Identificar las incógnitas y datos

Llamamos:

- h = altura del rectángulo (en cm)
- b = base del rectángulo (en cm)

Datos del problema:

- La base es el doble que la altura: $b = 2h$
- El perímetro es 42 cm: $P = 42$ cm

7.2.2. Paso 2: Plantear la ecuación

El perímetro de un rectángulo es:

$$P = 2b + 2h$$

Sustituyendo $P = 42$ y $b = 2h$:

$$\begin{aligned}2b + 2h &= 42 \\2(2h) + 2h &= 42 \\4h + 2h &= 42 \\6h &= 42\end{aligned}$$

7.2.3. Paso 3: Resolver la ecuación

$$\begin{aligned}6h &= 42 \\h &= \frac{42}{6} \\h &= \boxed{7 \text{ cm}}\end{aligned}$$

Ahora calculamos la base:

$$\begin{aligned}b &= 2h \\b &= 2(7) \\b &= \boxed{14 \text{ cm}}\end{aligned}$$

7.2.4. Paso 4: Verificación

Comprobamos que el perímetro es 42 cm:

$$\begin{aligned}P &= 2b + 2h \\&= 2(14) + 2(7) \\&= 28 + 14 \\&= 42 \text{ cm} \quad \checkmark\end{aligned}$$

También verificamos que la base es el doble que la altura:

$$\begin{aligned}b &= 2h \\14 &= 2(7) \\14 &= 14 \quad \checkmark\end{aligned}$$

7.3. Respuesta Final

Solución

Las medidas del rectángulo son:

- Base: 14 cm
- Altura: 7 cm
- Perímetro: 42 cm

7.4. Cálculos Adicionales

Podemos calcular también el **área** del rectángulo:

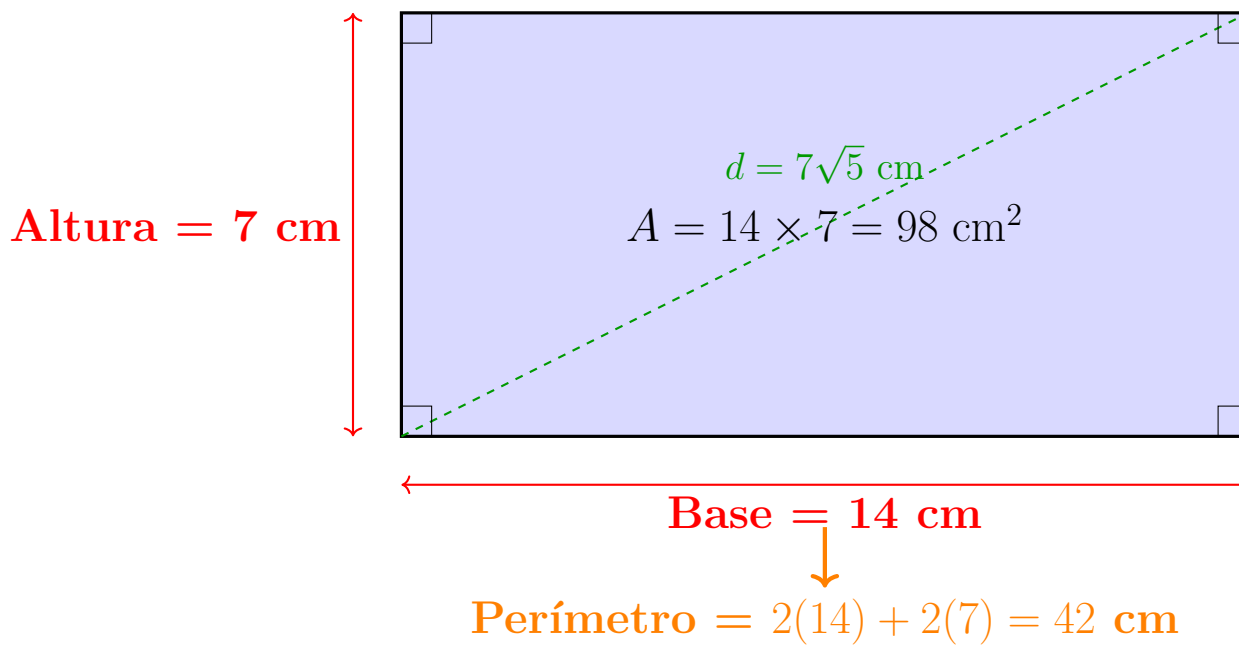
$$\begin{aligned}A &= b \times h \\&= 14 \times 7 \\&= \boxed{98 \text{ cm}^2}\end{aligned}$$

Y la **diagonal** usando el teorema de Pitágoras:

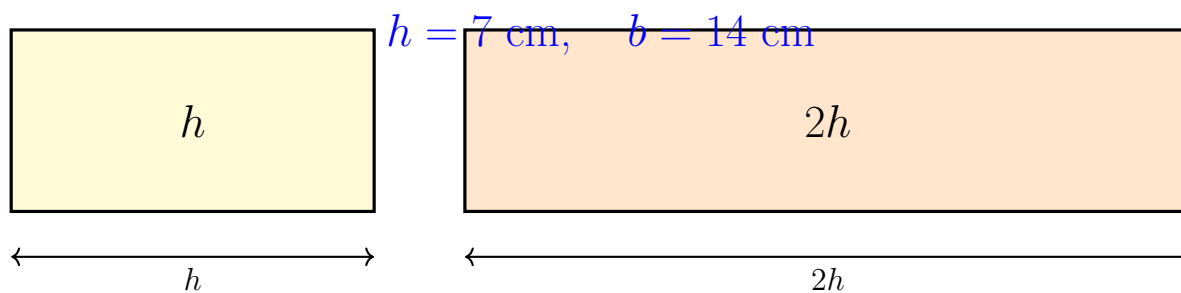
$$\begin{aligned}d &= \sqrt{b^2 + h^2} \\&= \sqrt{14^2 + 7^2} \\&= \sqrt{196 + 49} \\&= \sqrt{245} \\&= \sqrt{49 \cdot 5} \\&= 7\sqrt{5} \\&\approx \boxed{15,65 \text{ cm}}\end{aligned}$$

7.5. Ilustración: Rectángulo con Medidas

$$b = 2h \Rightarrow 14 = 2(7)$$



$$P = 2(2h) + 2h = 6h = 42$$



Base es el doble que la altura

8. Ejercicio 8: Crear Ecuación de Segundo Grado

8.1. Enunciado

Inventa una ecuación de 2^º grado que tenga como soluciones $x = -5$ y $x = 2$.

8.2. Teoría: Construcción de Ecuaciones a partir de las Raíces

Si conocemos las raíces x_1 y x_2 de una ecuación de segundo grado, podemos construir la ecuación usando la forma factorizada:

Forma Factorizada

Si x_1 y x_2 son las soluciones, entonces la ecuación es:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

O en forma desarrollada:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

8.3. Resolución Detallada

8.3.1. Datos del problema

Las soluciones son:

$$x_1 = -5 \quad \text{y} \quad x_2 = 2$$

8.3.2. Método 1: Forma factorizada

La ecuación en forma factorizada es:

$$\begin{aligned}(x - x_1)(x - x_2) &= 0 \\(x - (-5))(x - 2) &= 0 \\(x + 5)(x - 2) &= 0\end{aligned}$$

Desarrollamos el producto:

$$\begin{aligned}(x + 5)(x - 2) &= x \cdot x + x \cdot (-2) + 5 \cdot x + 5 \cdot (-2) \\&= x^2 - 2x + 5x - 10 \\&= x^2 + 3x - 10 \\&= 0\end{aligned}$$

Por tanto, una ecuación que tiene como soluciones $x = -5$ y $x = 2$ es:

$$\boxed{x^2 + 3x - 10 = 0}$$

8.3.3. Método 2: Fórmula directa

Usando la fórmula $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$:

Calculamos la suma de las raíces:

$$x_1 + x_2 = -5 + 2 = -3$$

Calculamos el producto de las raíces:

$$x_1 \cdot x_2 = (-5) \cdot 2 = -10$$

Sustituimos en la fórmula:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$x^2 - (-3)x + (-10) = 0$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$\boxed{x^2 + 3x - 10 = 0}$$

8.3.4. Otras ecuaciones válidas

Cualquier múltiplo de la ecuación también es válido. Si multiplicamos por un número $k \neq 0$:

- Multiplicando por 2: $\boxed{2x^2 + 6x - 20 = 0}$

- Multiplicando por 3: $\boxed{3x^2 + 9x - 30 = 0}$

- Multiplicando por -1: $\boxed{-x^2 - 3x + 10 = 0}$

Todas estas ecuaciones tienen las mismas soluciones $x = -5$ y $x = 2$.

8.4. Verificación

Comprobamos que $x = -5$ y $x = 2$ son efectivamente soluciones de $x^2 + 3x - 10 = 0$:

Para $x = -5$:

$$\begin{aligned} (-5)^2 + 3(-5) - 10 &= 25 - 15 - 10 \\ &= 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Para $x = 2$:

$$\begin{aligned} 2^2 + 3(2) - 10 &= 4 + 6 - 10 \\ &= 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

8.5. Relación con las Fórmulas de Viète

Las **fórmulas de Viète** relacionan las raíces con los coeficientes de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$:

Fórmulas de Viète

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Para nuestra ecuación $x^2 + 3x - 10 = 0$ (donde $a = 1, b = 3, c = -10$):

$$x_1 + x_2 = -\frac{3}{1} = -3$$

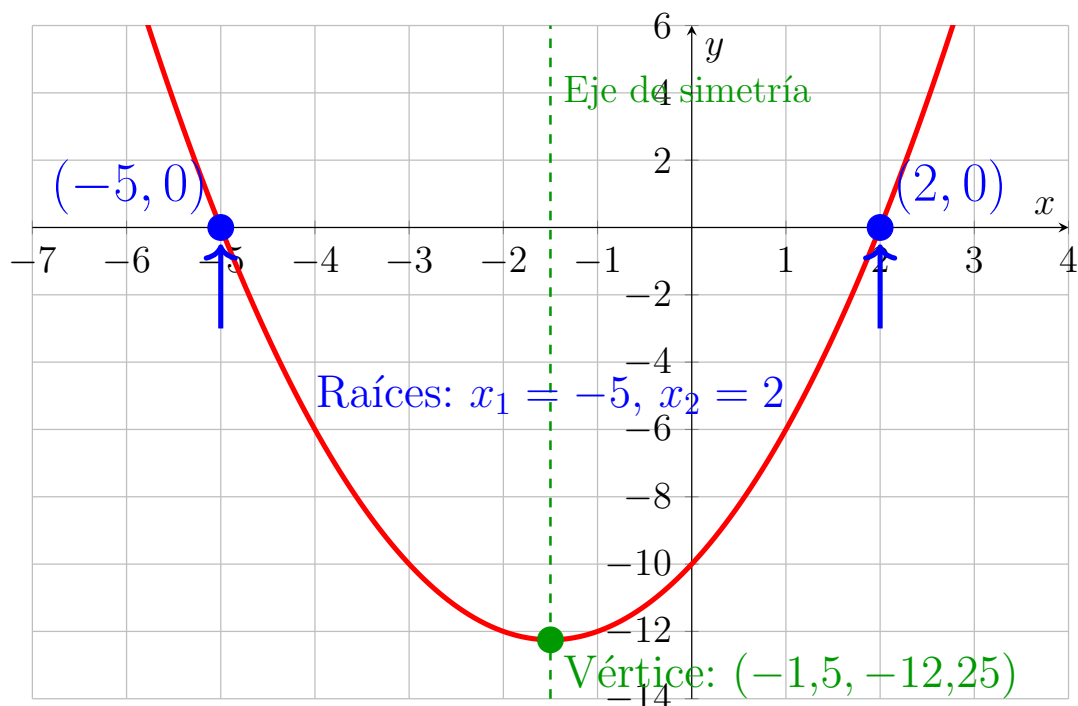
$$-5 + 2 = -3 \quad \checkmark$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-10}{1} = -10$$

$$(-5) \cdot 2 = -10 \quad \checkmark$$

8.6. Ilustración: Gráfica de la Parábola

Ecuación: $y = x^2 + 3x - 10$



Conclusión

Este examen ha cubierto los siguientes temas fundamentales de matemáticas de 3º ESO:

1. **Operaciones con polinomios:** suma, resta y multiplicación
2. **Identidades notables:** cuadrados de sumas y diferencias, suma por diferencia
3. **División de polinomios:** regla de Ruffini y teorema del resto
4. **Ecuaciones lineales:** resolución con paréntesis y denominadores
5. **Problemas de sistemas:** traducción de enunciados a ecuaciones
6. **Ecuaciones de segundo grado:** fórmula general y casos particulares
7. **Problemas geométricos:** aplicación de ecuaciones a figuras
8. **Construcción de ecuaciones:** a partir de las soluciones dadas

**¡FELICITACIONES POR COMPLETAR
EL EXAMEN!**

“Las matemáticas son el alfabeto con el cual Dios ha escrito el universo”

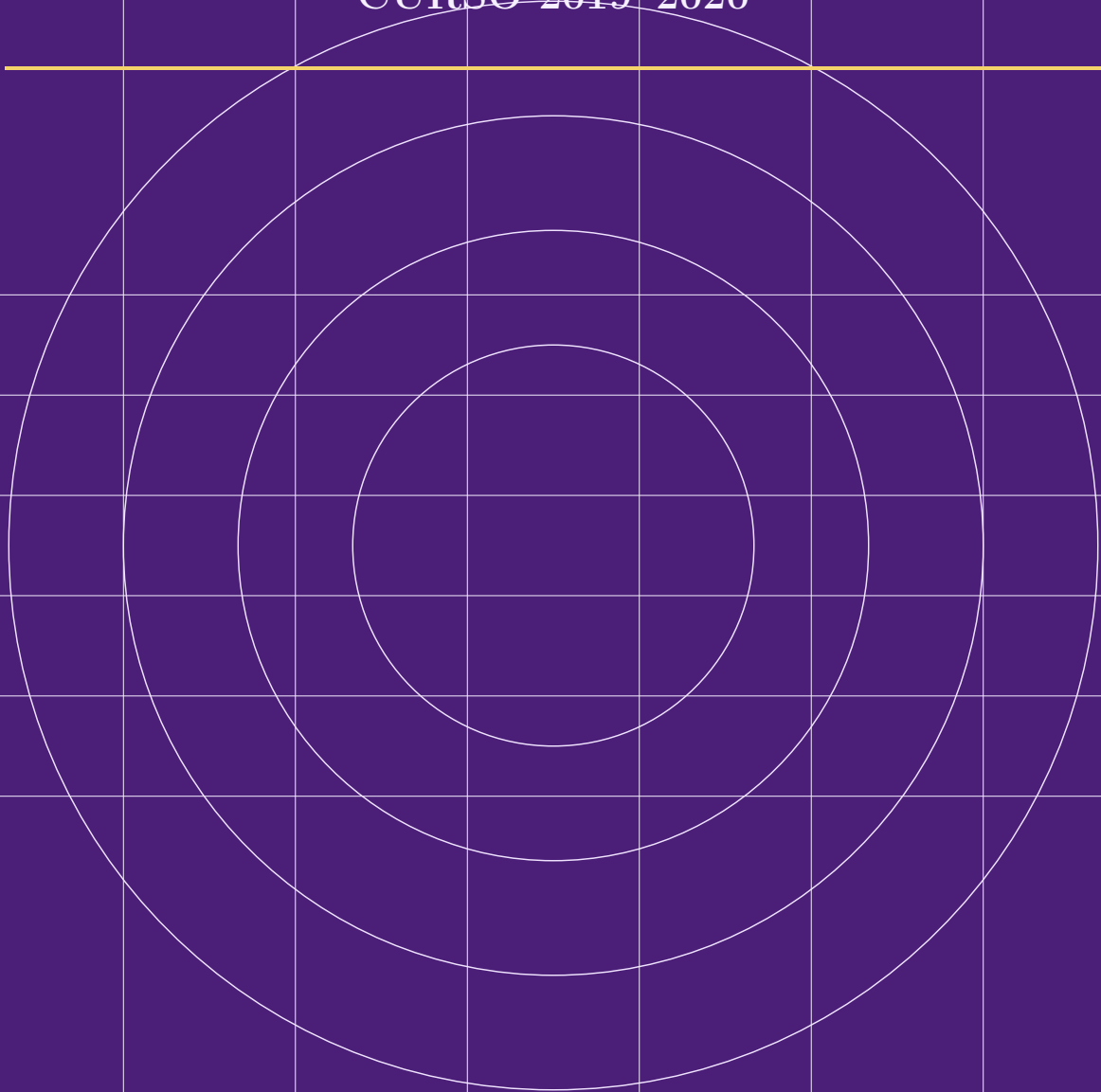
— Galileo Galilei

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

EXÁMENES DE LADIS

4º ESO APLICADAS

CURSO 2019-2020



“Las matemáticas son la reina de las ciencias y la aritmética es la reina de las matemáticas.”

— Carl Friedrich Gauss

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Nº1.- Resolver las siguientes operaciones con fracciones, simplificando en todo momento los pasos intermedios y el resultado

$$a) \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{6}{10} \right) - \frac{1}{3} \cdot \left(3 - \frac{1}{5} \right) - \frac{4}{5} \quad b) \frac{3}{30} \cdot 5 + \frac{4}{7} : \frac{2}{14} - \frac{1}{5} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2}$$

(2 PUNTOS)

Nº2.- Calcula el valor de las expresiones:

$$a) 3^{-2} \cdot 3 \cdot 3^4 \quad b) \frac{2^{-3} \cdot 10^3}{5^3 \cdot 2 \cdot 3^{-2}}$$

(2 PUNTOS)

Nº3.- a) Indica el conjunto de números más pequeño al que pertenecen los siguientes números:

$$0,25 \quad \sqrt{7} \quad \frac{15}{3} \quad 12,4\overline{2} \quad 1,278787878 \dots \dots \dots$$

b) Escribe la fracción generatriz de los que sean racionales

(2 PUNTOS)

Nº4.- Si calculamos 2^{-20} con la calculadora, obtenemos en pantalla:

$$9.536743164^{-07}$$

a) Expresa el número anterior en notación científica y en forma decimal.

b) Aproxima el resultado anterior dando 9 cifras decimales. Calcúlese el error absoluto y el error relativo cometidos al hacer la aproximación

(2 PUNTOS)

Nº5.- Representa en la recta real los siguientes intervalos, y escríbelos en forma de desigualdad:

$$a) (-1, 3]$$

$$b) [2, +\infty)$$

(1 PUNTO)

Nº6.- Una agencia propone un viaje al instituto Antonio Tovar. Inicialmente interesa el viaje a una octava parte de los alumnos. Cuando se concreta el precio se retiran $\frac{3}{5}$ de los que pensaban ir. Si al final van 30 alumnos. ¿Cuántos alumnos forman parte del centro?

(1 PUNTO)

SUERTE JÓVENES

MATEMÁTICAS

Fracciones · Potencias

· Números Reales

EXAMEN 4º A ESO — 23 de octubre de 2019

*“Las matemáticas son el campo más bello y poderoso
de la creación humana. La mente que no ha sido
iluminada por ellas permanece en la oscuridad.”*

— BLAISE PASCAL (1623–1662), *Pensaments*

ÍNDICE DE EJERCICIOS — SOLUCIONARIO COMPLETO

Contenidos del Examen — 4º A ESO

Nº	Ejercicio	Pág.
1	Operaciones con fracciones: orden de operaciones, simplificación de pasos intermedios y resultado final	3
2	Cálculo de expresiones con potencias: leyes de los exponentes, simplificación con exponentes negativos	6
3	Clasificación de números en conjuntos ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$) y fracción generatriz	8
4	Notación científica, forma decimal, aproximación, error absoluto y error relativo	12
5	Representación de intervalos en la recta real y escritura como desigualdad	15
6	Problema de fracciones: viaje al instituto Antonio Tovar — cálculo del número total de alumnos	17

Puntuación del Examen

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Ej. 5	Ej. 6	TOTAL
2 pts	2 pts	2 pts	2 pts	1 pt	1 pt	10 pts

Formulario de Referencia

Leyes de Potencias:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $(ab)^n = a^n \cdot b^n$

Errores de Aproximación:

- $\varepsilon_A = |x - \tilde{x}|$
- $\varepsilon_R = \frac{\varepsilon_A}{|x|}$
- $\varepsilon_R \% = \varepsilon_R \times 100$

Fracción generatriz: $0, \overline{a_1 \dots a_k} =$
cifras – no periód.

$$\underbrace{9 \dots 9}_k \underbrace{0 \dots 0}_m$$

Ejercicio N° 1

(2 puntos)

Resolver las siguientes operaciones con fracciones, simplificando en todo momento los pasos intermedios y el resultado:

$$a) \quad \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{6}{10} \right) - \frac{1}{3} \cdot \left(3 - \frac{1}{5} \right) - \frac{4}{5} \qquad b) \quad \frac{3}{30} \cdot 5 + \frac{4}{7} : \frac{2}{14} - \frac{1}{5} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2}$$

Regla de Orden de Operaciones con Fracciones

1. Paréntesis

2. $\times$ y $\div$

3. $+$ y $-$

Dentro de cada nivel: de izquierda a derecha. Simplificar al obtener cada resultado parcial.

Apartado a) $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{6}{10} \right) - \frac{1}{3} \cdot \left(3 - \frac{1}{5} \right) - \frac{4}{5}$

Paso 1: Simplificamos $\frac{6}{10}$ antes de operar:

$$\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Paso 2: Resolvemos el primer paréntesis $\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5} \right)$ (m.c.m. de 3 y 5 es 15):

$$\frac{1}{3} - \frac{3}{5} = \frac{5}{15} - \frac{9}{15} = \frac{5-9}{15} = -\frac{4}{15}$$

Paso 3: Resolvemos el segundo paréntesis $\left(3 - \frac{1}{5} \right)$ (m.c.m. de 1 y 5 es 5):

$$3 - \frac{1}{5} = \frac{15}{5} - \frac{1}{5} = \frac{15-1}{5} = \frac{14}{5}$$

Paso 4: La expresión queda (sustituimos los paréntesis):

$$\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{4}{15} \right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{14}{5} - \frac{4}{5}$$

Paso 5: Realizamos las **multiplicaciones**:

$$\frac{1 \cdot (-4)}{2 \cdot 15} = -\frac{4}{30} = -\frac{2}{15} \quad \text{y} \quad \frac{1 \cdot 14}{3 \cdot 5} = \frac{14}{15}$$

La expresión queda:

$$-\frac{2}{15} - \frac{14}{15} - \frac{4}{5}$$

Paso 6: Sumamos y restamos (m.c.m. de 15 y 5 es 15):

$$-\frac{2}{15} - \frac{14}{15} - \frac{12}{15} = \frac{-2-14-12}{15} = -\frac{28}{15}$$

Paso 7: Comprobamos que $-\frac{28}{15}$ no se simplifica: $\text{mcd}(28, 15) = 1$ ($28 = 2^2 \cdot 7$; $15 = 3 \cdot 5$). No hay factores comunes.

$$-\frac{28}{15}$$

Apartado b) $\frac{3}{30} \cdot 5 + \frac{4}{7} : \frac{2}{14} - \frac{1}{5} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2}$

Paso 1: Simplificamos las fracciones antes de operar:

$$\frac{3}{30} = \frac{1}{10} \quad \text{y} \quad \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$$

La expresión queda:

$$\frac{1}{10} \cdot 5 + \frac{4}{7} : \frac{1}{7} - \frac{1}{5} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2}$$

Paso 2: Realizamos las **multiplicaciones y divisiones** de izquierda a derecha.

Primera operación: $\frac{1}{10} \cdot 5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

Segunda operación (división de fracciones, multiplicamos por el inverso):

$$\frac{4}{7} : \frac{1}{7} = \frac{4}{7} \cdot \frac{7}{1} = \frac{4 \cdot 7}{7 \cdot 1} = \frac{28}{7} = 4$$

Tercera y cuarta operaciones (de izquierda a derecha):

$$\frac{1}{5} \cdot 5 = \frac{5}{5} = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

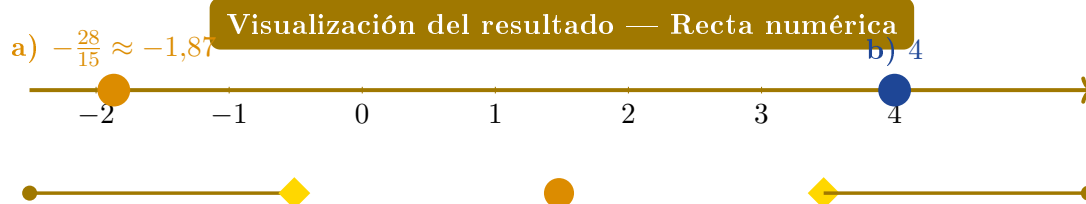
La expresión queda:

$$\frac{1}{2} + 4 - \frac{1}{2}$$

Paso 3: Realizamos las **sumas y restas** (m.c.m. de 2 y 1 es 2):

$$\frac{1}{2} + \frac{8}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1 + 8 - 1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

4



Ejercicio N° 2

(2 puntos)

Calcula el valor de las expresiones:

a) $3^{-2} \cdot 3 \cdot 3^4$

b) $\frac{2^{-3} \cdot 10^3}{5^3 \cdot 2 \cdot 3^{-2}}$

Leyes de los Exponentes — Recordatorio Visual

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Ej: $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ej: $\frac{3^5}{3^2} = 3^3$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ej: $2^{-3} = \frac{1}{8}$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Ej: $(2 \cdot 5)^3 = 8 \cdot 125$

Apartado a) $3^{-2} \cdot 3 \cdot 3^4$

Paso 1: Reconocemos que los tres factores tienen la **misma base** (3). Aplicamos la ley $a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}$:

Recordamos que $3 = 3^1$.

$$3^{-2} \cdot 3^1 \cdot 3^4 = 3^{(-2)+1+4} = 3^3$$

Paso 2: Calculamos 3^3 :

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 9 \times 3 = 27$$

$$3^{-2} \cdot 3 \cdot 3^4 = 3^3 = \mathbf{27}$$

Apartado b) $\frac{2^{-3} \cdot 10^3}{5^3 \cdot 2 \cdot 3^{-2}}$

Paso 1: Descomponemos 10^3 en sus factores primos:

$$10^3 = (2 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 5^3$$

La expresión queda:

$$\frac{2^{-3} \cdot 2^3 \cdot 5^3}{5^3 \cdot 2^1 \cdot 3^{-2}}$$

Paso 2: Agrupamos potencias de la misma base en numerador y denominador:

$$= \frac{2^{-3+3} \cdot 5^3}{5^3 \cdot 2^1 \cdot 3^{-2}} = \frac{2^0 \cdot 5^3}{5^3 \cdot 2^1 \cdot 3^{-2}}$$

Recordamos que $2^0 = 1$:

$$= \frac{1 \cdot 5^3}{5^3 \cdot 2^1 \cdot 3^{-2}} = \frac{5^3}{5^3 \cdot 2 \cdot 3^{-2}}$$

Paso 3: Simplificamos $\frac{5^3}{5^3} = 5^{3-3} = 5^0 = 1$:

$$= \frac{1}{2 \cdot 3^{-2}}$$

Paso 4: Aplicamos $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$:

$$\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{9}} = \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$$

Alternativamente, con la ley $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$:

$$\frac{1}{2 \cdot 3^{-2}} = \frac{3^2}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\frac{2^{-3} \cdot 10^3}{5^3 \cdot 2 \cdot 3^{-2}} = \frac{9}{2}$$

Diagrama de Simplificación — Apartado b)

$$\frac{2^{-3} \cdot 10^3}{5^3 \cdot 2 \cdot 3^{-2}} \xrightarrow{10^3 = 2^3 \cdot 5^3} \frac{2^{-3} \cdot 2^3 \cdot 5^3}{5^3 \cdot 2 \cdot 3^{-2}} \xrightarrow{\text{simplif.}}$$

$$\frac{9}{2}$$

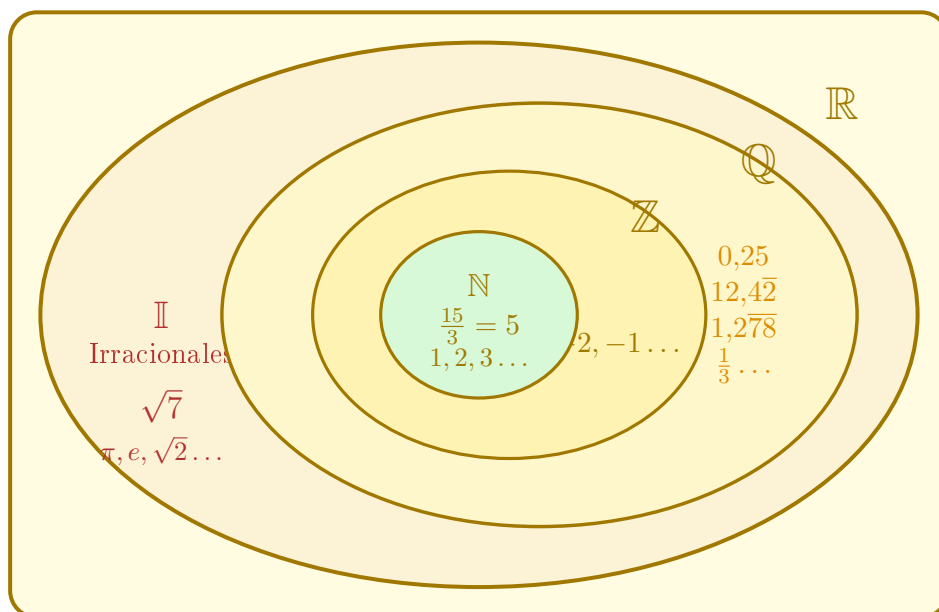
Ejercicio N° 3

(2 puntos)

a) Indica el conjunto de números más pequeño al que pertenecen los siguientes números:

$$0,25 \quad \sqrt{7} \quad \frac{15}{3} \quad 12,4\bar{2} \quad 1,278787878\dots$$

b) Escribe la fracción generatriz de los que sean racionales.



Apartado a) — Análisis de cada número

1. **0,25**: Es un decimal exacto (finito). $0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$. Se puede expresar como fracción $\Rightarrow$ **RACIONAL** ($\in \mathbb{Q}$). No es entero ni natural.

2. **$\sqrt{7}$** : Calculamos: $\sqrt{7} \approx 2,6457513\dots$ Es un decimal infinito no periódico. No se puede expresar como fracción $\Rightarrow$ **IRRACIONAL** ($\in \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$).

Demostración: 7 es primo y no es un cuadrado perfecto, por lo que $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$.

3. **$\frac{15}{3}$** : Simplificamos: $\frac{15}{3} = 5$. Es un número **natural positivo** $\Rightarrow$ **NATURAL** ($\in \mathbb{N}$). También pertenece a $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$.

4. **$12,4\bar{2}$** : Es $12,4222\dots$ Es un decimal con parte entera 12, una cifra no periódica (4) y un periodo (2). Es un **decimal periódico mixto** $\Rightarrow$ **RACIONAL** ($\in \mathbb{Q}$). No es entero ni natural.

5. **$1,278787878\dots$** : Es $1,2\overline{78}$ (periodo 78 de longitud 2, precedido de una cifra no periódica: el 2). Es un **decimal periódico mixto** $\Rightarrow$ **RACIONAL** ($\in \mathbb{Q}$).

Tabla Resumen de Clasificación

Número	N	Z	Q	I	Conj. más peq.
0,25	—	—	✓	—	Q
$\sqrt{7}$	—	—	—	✓	I
$\frac{15}{3} = 5$	✓	✓	✓	—	N
12,4 $\overline{2}$	—	—	✓	—	Q
1,2 $\overline{78}$	—	—	✓	—	Q

Apartado b) — Fracción generatriz de los racionales

1. Fracción generatriz de 0,25:

0,25 es un decimal exacto con 2 cifras decimales:

$$0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

Verificación: $1 \div 4 = 0,25 \checkmark$

2. Fracción generatriz de $\frac{15}{3}$:

$\frac{15}{3}$ ya es una fracción (simplificada: $\frac{15}{3} = 5 = \frac{5}{1}$). La fracción generatriz es $\frac{15}{3}$ (o en su forma simplificada, $\frac{5}{1}$).

3. Fracción generatriz de $12,4\bar{2}$:

Es un decimal periódico **mixto**: parte no periódica “4” (1 cifra), periodo “2” (1 cifra).

Llamamos $x = 12,4222\dots$

Multiplicamos por 10 para llevar el periodo al inicio:

$$10x = 124,222\dots$$

Multiplicamos también por 100 para tener un periodo completo desplazado:

$$100x = 1242,222\dots$$

Restamos $100x - 10x$:

$$100x - 10x = 1242,222\dots - 124,222\dots$$

$$90x = 1118$$

$$x = \frac{1118}{90}$$

Simplificamos con $\text{mcd}(1118, 90)$: $1118 = 2 \cdot 559$; $90 = 2 \cdot 45$. $\text{mcd} = 2$:

$$x = \frac{1118}{90} = \frac{559}{45}$$

Verificación: $559 \div 45 = 12,4\bar{2} \checkmark$

4. Fracción generatriz de $1,2\overline{78}$:

Es un decimal periódico **mixto**: parte no periódica “2” (1 cifra), periodo “78” (2 cifras).

Llamamos $x = 1,2787878\dots$

Multiplicamos por 10 (para llevar al inicio de la parte periódica):

$$10x = 12,787878\dots$$

Multiplicamos por 1000 (para desplazar un periodo completo):

$$1000x = 12\overline{78},787878\dots$$

Restamos $1000x - 10x$:

$$990x = 1278,787878\dots - 12,787878\dots = 1266$$



Ejercicio N° 4

(2 puntos)

Si calculamos 2^{-20} con la calculadora, obtenemos en pantalla:

$$9,536743164^{-07}$$

- a) Expresa el número anterior en notación científica y en forma decimal.
b) Aproxima el resultado anterior dando 9 cifras decimales. Calcúlese el error absoluto y el error relativo cometidos al hacer la aproximación.

Notación Científica: $a \times 10^n$ con $1 \leq |a| < 10$, $n \in \mathbb{Z}$

CALCULATOR DISPLAY

$$9.536743164^{-07}$$

$$\longrightarrow 9,536743164 \times 10^{-7}$$

La calculadora usa notación " a^{-07} " para indicar $a \times 10^{-07}$. El superíndice NO es una potencia de a .

Apartado a) — Notación científica y forma decimal

Paso 1: Interpretamos la pantalla de la calculadora.
La calculadora muestra $9,536743164^{-07}$, que significa:

$$9,536743164 \times 10^{-7}$$

La mantisa $9,536743164$ ya cumple $1 \leq 9,536743164 < 10$.

Por tanto, la notación científica es:

$$2^{-20} = 9,536743164 \times 10^{-7}$$

Paso 2: Convertimos a forma decimal.

$10^{-7} = \frac{1}{10^7} = \frac{1}{10000000}$. Movemos la coma decimal 7 posiciones a la izquierda:

$$9,536743164 \times 10^{-7} = 0,0000009536743164$$

Con detalle (rellenamos con ceros):

$$\underbrace{0,000000}_{6 \text{ ceros}} \underbrace{9536743164}_{\text{dígitos de la mantisa}}$$

Notación científica: $2^{-20} = 9,536743164 \times 10^{-7}$

Forma decimal: $2^{-20} = 0,0000009536743164$

Apartado b) — Aproximación, error absoluto y error relativo

Valor exacto:

$$x = 2^{-20} = \frac{1}{2^{20}} = \frac{1}{1048576} = 0,00000095367431640625$$

(Valor exacto porque 2^{-20} es un decimal exacto — potencia de 2.)

Paso 1: Aproximamos a **9 cifras decimales**.

Escribimos las primeras 9 cifras decimales del número:

$$x = 0,000000953 \quad \underbrace{6743164\dots}_{\text{a partir del décimo decimal}}$$

La décima cifra decimal es **6**. Como $6 \geq 5$, **redondeamos hacia arriba** la novena cifra:

$$\tilde{x} = 0,000000954$$

En notación científica: $\tilde{x} = 9,54 \times 10^{-7}$.

Paso 2: Calculamos el **error absoluto** $\varepsilon_A = |x - \tilde{x}|$:

$$\varepsilon_A = |0,00000095367431640625 - 0,000000954|$$

$$\varepsilon_A = |0,00000095367431640625 - 0,00000095400000000000|$$

$$\varepsilon_A = |-0,00000000032568359375|$$

$$\varepsilon_A = 0,00000000032568\dots \approx 3,26 \times 10^{-10}$$

Paso 3: Calculamos el **error relativo** $\varepsilon_R = \frac{\varepsilon_A}{|x|}$:

$$\varepsilon_R = \frac{3,2568 \times 10^{-10}}{9,5367 \times 10^{-7}} = \frac{3,2568}{9,5367} \times 10^{-10+7} = 0,3415 \times 10^{-3} = 3,415 \times 10^{-4}$$

Expresado en porcentaje:

$$\varepsilon_R \% = 3,415 \times 10^{-4} \times 100 = 3,415 \times 10^{-2} \% \approx 0,034 \%$$

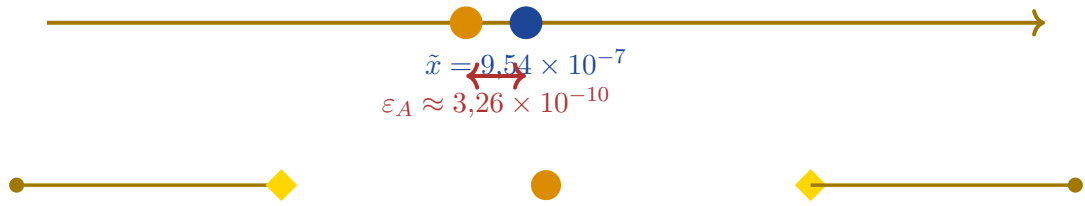
Aproximación a 9 decimales: $\tilde{x} = 0,000000954$

Error absoluto: $\varepsilon_A \approx 3,26 \times 10^{-10}$

Error relativo: $\varepsilon_R \approx 3,42 \times 10^{-4} \approx 0,034 \%$

Visualización del error de aproximación

$$x = 9,5367 \dots \times 10^{-7}$$



Ejercicio N° 5

(1 punto)

Representa en la recta real los siguientes intervalos, y escríbelos en forma de desigualdad:

a) $(-1, 3]$

b) $[2, +\infty)$

Tipos de Intervalos — Recordatorio

Notación	Extremo izq.	Extremo der.	Significado
(a, b)	abierto •	abierto •	$a < x < b$
$[a, b]$	cerrado •	cerrado •	$a \leq x \leq b$
$(a, b]$	abierto •	cerrado •	$a < x \leq b$
$[a, b)$	cerrado •	abierto •	$a \leq x < b$
$[a, +\infty)$	cerrado •	abierto $(+\infty)$	$x \geq a$
$(-\infty, b]$	abierto $(-\infty)$	cerrado •	$x \leq b$

Nota: El extremo **abierto** se dibuja con un círculo vacío $\circ$ (no incluido). El extremo **cerrado** se dibuja con un punto relleno $\bullet$ (incluido). El infinito **siempre** es abierto.

Apartado a) — Intervalo $(-1, 3]$

Tipo de intervalo: semiabierto por la izquierda, cerrado por la derecha.

- Paréntesis (: el extremo -1 queda **excluido** $\Rightarrow$ círculo vacío $\circ$.
- Corchete]: el extremo 3 queda **incluido** $\Rightarrow$ punto relleno $\bullet$.

Desigualdad:

$$-1 < x \leq 3$$

Representación en la recta real:



$(-1, 3]$ en desigualdad: $-1 < x \leq 3$

Apartado b) — Intervalo $[2, +\infty)$

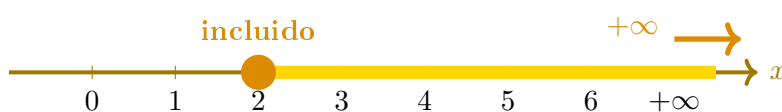
Tipo de intervalo: semirrecta cerrada hacia la derecha (hasta $+\infty$).

- Corchete $[$: el extremo 2 queda **incluido** $\Rightarrow$ punto relleno $\bullet$.
- Paréntesis $)$: $+\infty$ queda **excluido** (el infinito no es un número real, nunca se puede “llegar” a él).

Desigualdad:

$$x \geq 2$$

Representación en la recta real:



$[2, +\infty)$ en desigualdad: $x \geq 2$

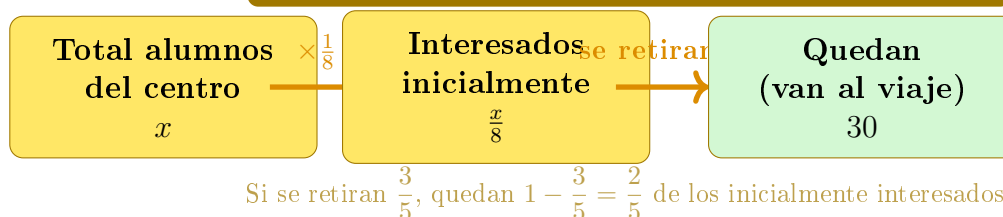


Ejercicio N° 6

(1 punto)

Una agencia propone un viaje al instituto Antonio Tovar. Inicialmente interesa el viaje a una octava parte de los alumnos. Cuando se concreta el precio se retiran $\frac{3}{5}$ de los que pensaban ir. Si al final van 30 alumnos, ¿cuántos alumnos forman parte del centro?

Esquema del Problema — Reducción Sucesiva



Identificación de datos y planteamiento

Datos del problema:

- Llamamos x al total de alumnos del centro (incógnita).
- Interesados inicialmente: $\frac{x}{8}$ (una octava parte del total).
- Se retiran $\frac{3}{5}$ de los interesados.
- Los que finalmente van: 30 alumnos.

Fracción que finalmente va:

Si se retiran $\frac{3}{5}$ de los interesados, la fracción que **permanece** es:

$$1 - \frac{3}{5} = \frac{5}{5} - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

Por tanto, de la octava parte inicial, quedan $\frac{2}{5}$ de ellos.

Planteamiento y resolución de la ecuación

La cantidad de alumnos que finalmente van es:

$$\underbrace{\frac{2}{5}}_{\text{fraction que queda}} \cdot \underbrace{\frac{x}{8}}_{\text{interesados}} = 30$$

Operamos:

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{x}{8} = 30$$

$$\frac{2x}{40} = 30$$

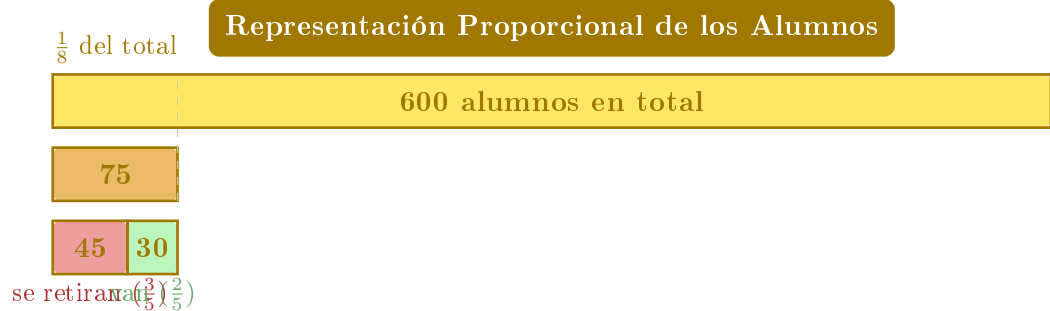
$$\frac{x}{20} = 30$$

Despejamos x :

$$x = 30 \times 20 = 600$$

Comprobación:

- Interesados inicialmente: $\frac{600}{8} = 75$ alumnos.
- Se retiran $\frac{3}{5}$ de 75: $\frac{3}{5} \times 75 = \frac{225}{5} = 45$ alumnos.
- Quedan: $75 - 45 = 30$ alumnos. ✓



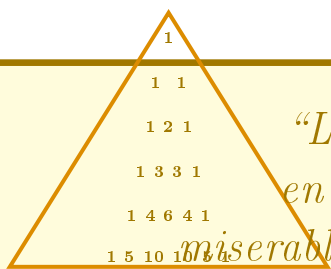
El instituto Antonio Tovar tiene **600 alumnos**.



Resumen Final — Todos los Resultados del Examen

Respuestas del Examen — 4º A ESO

Ej.	Enunciado	Resultado
1a	Operaciones con fracciones (a)	$-\frac{28}{15}$
1b	Operaciones con fracciones (b)	4
2a	Potencias $3^{-2} \cdot 3 \cdot 3^4$	27
2b	Potencias $\frac{2^{-3} \cdot 10^3}{5^3 \cdot 2 \cdot 3^{-2}}$	$\frac{9}{2}$
3a	Clasificación numérica	Ver tabla (p. 8)
3b	Fracciones generatrices	$\frac{1}{4}, \frac{5}{1}, \frac{559}{45}, \frac{211}{165}$
4a	Notación científica y decimal	$9,536743164 \times 10^{-7}$
4b	Error absoluto y relativo	$\varepsilon_A \approx 3,26 \times 10^{-10}; \varepsilon_R \approx 0,034\%$
5a	Intervalo $(-1, 3]$	$-1 < x \leq 3$
5b	Intervalo $[2, +\infty)$	$x \geq 2$
6	Alumnos del centro (viaje)	600 alumnos



*“La grandeza del hombre es grande
en cuanto que se conoce a sí mismo
miserable. Un árbol no sabe que es miserable.”*
— **BLAISE PASCAL (1623–1662)**

1 1 2 3 5 8 13 21 ...

Triángulo de Pascal: cada elemento es la suma de los dos superiores
Solucionario — Matemáticas 4º A ESO — IES Tovar — 23/10/2019

Nº1.- a) Un campamento de 45 alumnos tiene provisiones para 16 días, ¿cuántos días podrá durar el campamento si fuesen 15 alumnos más?

b) En 6 días, Sergio tradujo un libro de 30 páginas trabajando 2 horas diarias. ¿Cuántas horas diarias tendrá que trabajar para terminar un libro de 40 páginas en 4 días, si continua con el mismo ritmo de trabajo?

Nº2.- El monitor de senderismo de los cursos A, B y C de 4º de Secundaria les ha dado a los alumnos una bolsa de etiquetas para identificar las plantas. Si la bolsa tiene 624 etiquetas y los cursos tienen 11, 13 y 15 alumnos, respectivamente, ¿cuántas le tocan a cada uno si cada alumno debe recibir la misma cantidad? ¿Y a cada grupo?

Nº3.- Un comerciante tiene dos clases de aceite, la primera de 6 euros/litro y la segunda de 7.2 euros/litro. ¿Cuántos litros de cada clase hay que poner para obtener 60 litros de mezcla a 7 euros/litro?

Nº4.- a) Un apartamento está valorado en 80 000 euros. Está previsto que se revalorice su precio un 5% por año. ¿Cuánto valdrá dentro de 3 años?

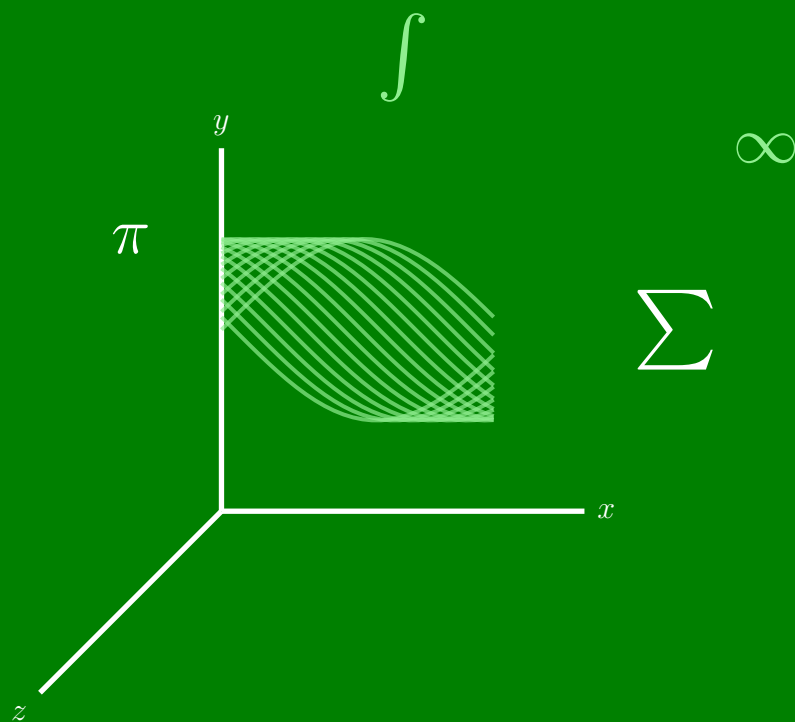
b) Un cultivo de bacterias de un laboratorio tiene 120 000 bacterias y adquiere una enfermedad que produce la muerte del 16% de la población. Tratadas las bacterias supervivientes con un producto muy eficaz se consigue aumentar la población en un 14%. ¿Cuántas bacterias forman la población finalmente?

Nº5.- Un artículo que vale 120 euros, ante la excesiva demanda, sube un 20%. Luego, cuando se reduce la demanda, se rebaja un 20%. ¿Sigue valiendo lo mismo que antes?

NOTA: Todos los problemas valen 2 puntos

SUERTE JOVENES

EXAMEN DE MATEMÁTICAS



4^º A ESO

28 de Noviembre de 2019

*“Si he visto más lejos es porque
estoy sentado sobre los hombros de gigantes.”*

— Sir Isaac Newton

Soluciones Completas y Detalladas

Índice

1. Ejercicio 1: Proporcionalidad	2
1.1. Apartado a) Campamento y provisiones	2
1.2. Apartado b) Traducción de libros	5
2. Ejercicio 2: Reparto Proporcional	8
3. Ejercicio 3: Sistema de Ecuaciones - Mezclas	11
4. Ejercicio 4: Porcentajes y Crecimiento	14
4.1. Apartado a) Revalorización del apartamento	14
4.2. Apartado b) Cultivo de bacterias	17
5. Ejercicio 5: Porcentajes Sucesivos	20
Resumen de Respuestas	23

1. Ejercicio 1: Proporcionalidad

1.1. Apartado a) Campamento y provisiones

Enunciado: Un campamento de 45 alumnos tiene provisiones para 16 días, ¿cuántos días podrá durar el campamento si fuesen 15 alumnos más?

Solución Completa del Ejercicio 1a**Paso 1: Identificación del tipo de proporcionalidad**

Este es un problema de **proporcionalidad inversa**. A mayor número de alumnos, menor duración de las provisiones (si la cantidad de provisiones permanece constante).

Paso 2: Establecimiento de las magnitudes

Sean:

- $A_1 = 45$ alumnos (cantidad inicial)
- $D_1 = 16$ días (duración inicial de las provisiones)
- $A_2 = 45 + 15 = 60$ alumnos (cantidad final)
- $D_2 = ?$ días (duración final de las provisiones)

Paso 3: Planteamiento de la relación de proporcionalidad inversa

En una proporcionalidad inversa, el producto de las magnitudes relacionadas permanece constante:

$$A_1 \times D_1 = A_2 \times D_2$$

Esta ecuación expresa que la cantidad total de provisiones (medida en “alumno-días”) permanece constante.

Paso 4: Sustitución de valores conocidos

$$45 \times 16 = 60 \times D_2$$

Paso 5: Cálculo del producto

$$720 = 60 \times D_2$$

Paso 6: Despeje de D_2

$$D_2 = \frac{720}{60}$$

Paso 7: Simplificación de la fracción

Podemos simplificar dividiendo numerador y denominador por 60:

$$D_2 = \frac{720 \div 60}{60 \div 60} = \frac{12}{1} = 12$$

También podemos verificar la división:

$$720 \div 60 = 12$$

Paso 8: Verificación de la solución

Comprobamos que el producto se mantiene constante:

$$A_1 \times D_1 = 45 \times 16 = 720 \text{ alumno-días}$$

$$A_2 \times D_2 = 60 \times 12 = 720 \text{ alumno-días}$$

Como ambos productos son iguales, la solución es correcta.

Paso 9: Interpretación del resultado

Las provisiones durarán 12 días cuando haya 60 alumnos en el campamento. Esto representa una reducción de $16 - 12 = 4$ días respecto a la duración original.

Paso 10: Análisis adicional

El porcentaje de reducción en la duración es:

Respuesta: Las provisiones durarán 12 días

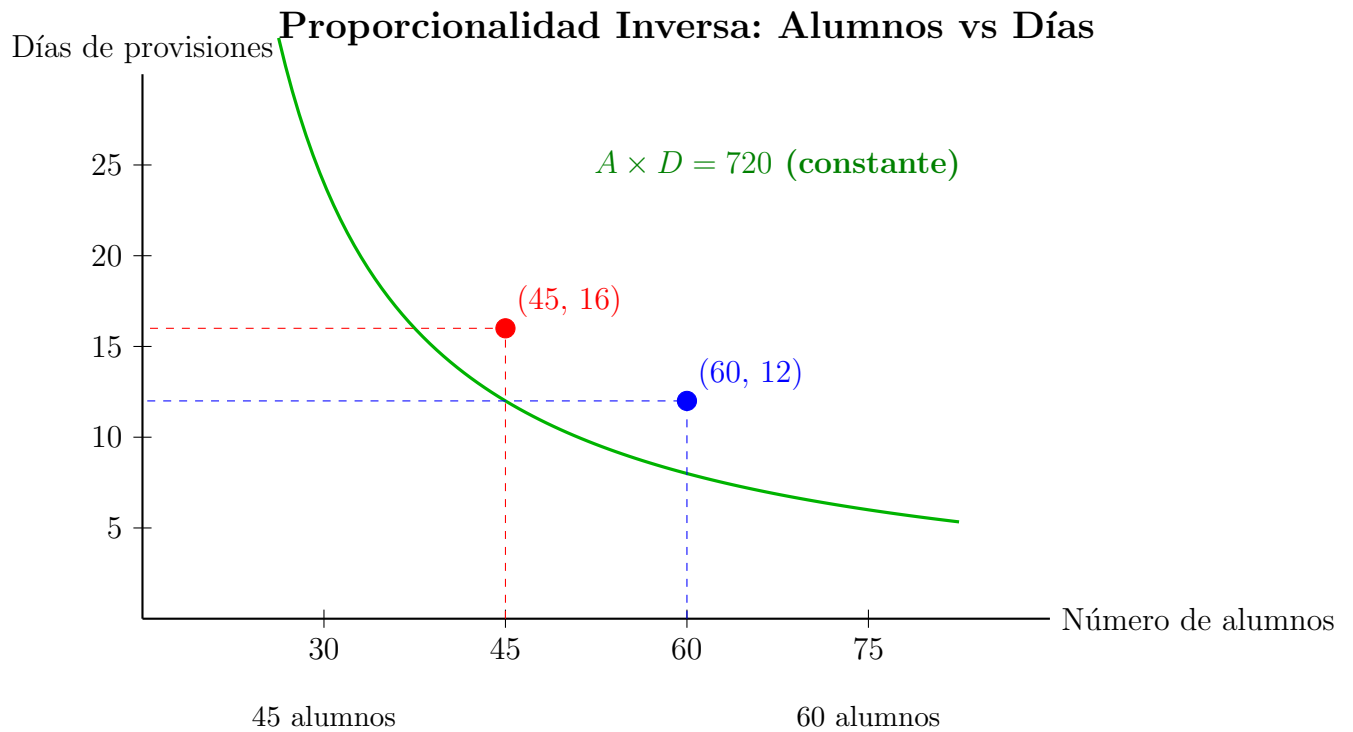


Figura 1: Representación gráfica de la proporcionalidad inversa entre alumnos y días de provisiones

1.2. Apartado b) Traducción de libros

Enunciado: En 6 días, Sergio tradujo un libro de 30 páginas trabajando 2 horas diarias. ¿Cuántas horas diarias tendrá que trabajar para terminar un libro de 40 páginas en 4 días, si continua con el mismo ritmo de trabajo?

Solución Completa del Ejercicio 1b**Paso 1: Identificación de las magnitudes involucradas**

Este es un problema de **proporcionalidad compuesta**, ya que intervienen tres magnitudes:

- Número de páginas a traducir
- Número de días disponibles
- Horas de trabajo diarias

Paso 2: Establecimiento de los datos del problema**Situación 1 (conocida):**

- Páginas: $P_1 = 30$ páginas
- Días: $D_1 = 6$ días
- Horas diarias: $H_1 = 2$ horas/día

Situación 2 (a determinar):

- Páginas: $P_2 = 40$ páginas
- Días: $D_2 = 4$ días
- Horas diarias: $H_2 = ?$ horas/día

Paso 3: Cálculo del ritmo de trabajo

Primero, calculamos la productividad de Sergio (ritmo de trabajo constante).
El trabajo total realizado en la primera situación, medido en horas, es:

$$\text{Horas totales}_1 = D_1 \times H_1 = 6 \times 2 = 12 \text{ horas}$$

La productividad o ritmo de trabajo es:

$$\text{Ritmo} = \frac{\text{Páginas traducidas}}{\text{Horas totales}} = \frac{P_1}{D_1 \times H_1} = \frac{30}{12} = 2,5 \text{ páginas/hora}$$

Paso 4: Planteamiento de la ecuación para la segunda situación

Como el ritmo de trabajo permanece constante, para la segunda situación:

$$\text{Ritmo} = \frac{P_2}{D_2 \times H_2}$$

Igualando ambas expresiones del ritmo:

$$\frac{30}{6 \times 2} = \frac{40}{4 \times H_2}$$

Paso 5: Simplificación de la primera fracción

$$\frac{30}{12} = \frac{40}{4 \times H_2}$$

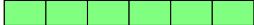
Simplificando $\frac{30}{12}$:

$$\frac{30}{12} = \frac{30 \div 6}{12 \div 6} = \frac{5}{2} = 2,5$$

Por lo tanto:

Respuesta: Sergio tendrá que trabajar 4 horas diarias

Proporcionalidad Compuesta: Traducción de Libros


 $6 \text{ días} \times 2 \text{ h/día} = 12 \text{ horas}$

 $4 \text{ días} \times 4 \text{ h/día} = 16 \text{ horas}$

Situación 1 (Conocida)	Situación 2 (A determinar)
Páginas: 30	Páginas: 40
Días: 6	Días: 4
Horas/día: 2	Horas/día: ?
Total horas: 12	Total horas: ?
Ritmo: 2.5 pág/hora	Ritmo: 2.5 pág/hora

Mismo ritmo

$$\text{Ritmo} = \frac{\text{Páginas}}{\text{Días} \times \text{Horas/día}} = 2,5 \frac{\text{pág}}{\text{hora}}$$

$$\frac{30}{6 \times 2} = \frac{40}{4 \times H_2} \Rightarrow H_2 = 4 \text{ horas/día}$$

Figura 2: Esquema de la proporcionalidad compuesta en la traducción de libros

2. Ejercicio 2: Reparto Proporcional

Enunciado: El monitor de senderismo de los cursos A, B y C de 4º de Secundaria les ha dado a los alumnos una bolsa de etiquetas para identificar las plantas. Si la bolsa tiene 624 etiquetas y los cursos tienen 11, 13 y 15 alumnos, respectivamente, ¿cuántas le tocan a cada uno si cada alumno debe recibir la misma cantidad? ¿Y a cada grupo?

Solución Completa del Ejercicio 2**Paso 1: Identificación del tipo de problema**

Este es un problema de **reparto directamente proporcional**. Las etiquetas deben repartirse proporcionalmente al número de alumnos en cada curso.

Paso 2: Establecimiento de los datos

- Total de etiquetas: $E_{total} = 624$
- Alumnos del curso A: $a_A = 11$
- Alumnos del curso B: $a_B = 13$
- Alumnos del curso C: $a_C = 15$

Paso 3: Cálculo del número total de alumnos

Sumamos los alumnos de todos los cursos:

$$\begin{aligned} a_{total} &= a_A + a_B + a_C \\ &= 11 + 13 + 15 \\ &= 39 \text{ alumnos} \end{aligned}$$

Paso 4: Cálculo de etiquetas por alumno

Como cada alumno debe recibir la misma cantidad, dividimos el total de etiquetas entre el total de alumnos:

$$\begin{aligned} \text{Etiquetas por alumno} &= \frac{E_{total}}{a_{total}} \\ &= \frac{624}{39} \end{aligned}$$

Paso 5: Realización de la división

Efectuamos la división $624 \div 39$:

$$\begin{array}{r} 624 \div 39 = ? \\ \hline \text{Probamos: } 39 \times 10 = 390 \\ 624 - 390 = 234 \\ \text{Probamos: } 39 \times 6 = 234 \\ \text{Por tanto: } 39 \times 16 = 624 \end{array}$$

Verificación:

$$39 \times 16 = 39 \times 10 + 39 \times 6 = 390 + 234 = 624 \quad \checkmark$$

Por lo tanto:

$$\text{Etiquetas por alumno} = \frac{624}{39} = 16 \text{ etiquetas}$$

Paso 6: Cálculo de etiquetas para cada grupo

Ahora calculamos cuántas etiquetas recibe cada curso multiplicando el número de alumnos por las etiquetas por alumno.

Curso A:

$$\begin{aligned} E_A &= a_A \times \text{Etiquetas por alumno} \\ &= 11 \times 16 = 176 \\ &= 176 \text{ etiquetas} \end{aligned}$$

Desglose del cálculo:

Respuestas:
 Cada alumno recibe: 16 etiquetas
 Curso A: 176 etiquetas
 Curso B: 208 etiquetas
 Curso C: 240 etiquetas

Reparto Proporcional de Etiquetas

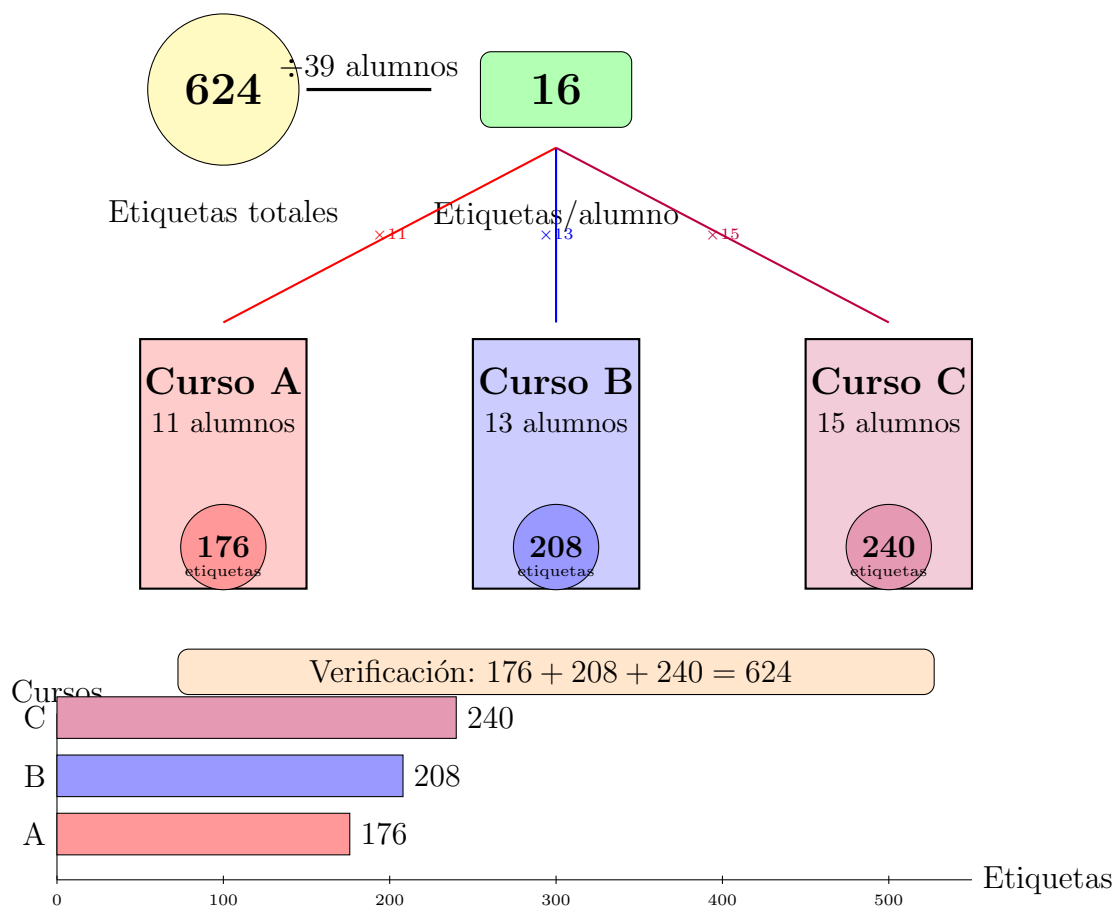


Figura 3: Distribución proporcional de etiquetas entre los tres cursos

3. Ejercicio 3: Sistema de Ecuaciones - Mezclas

Enunciado: Un comerciante tiene dos clases de aceite, la primera de 6 euros/litro y la segunda de 7.2 euros/litro. ¿Cuántos litros de cada clase hay que poner para obtener 60 litros de mezcla a 7 euros/litro?

Solución Completa del Ejercicio 3**Paso 1: Identificación de las incógnitas**

Definimos las variables:

- x = litros de aceite de la primera clase (6 €/litro)
- y = litros de aceite de la segunda clase (7.2 €/litro)

Paso 2: Establecimiento de las ecuaciones

Tenemos dos condiciones que nos permiten plantear dos ecuaciones:

Ecuación 1 - Volumen total:

La suma de los litros de ambas clases debe ser 60 litros:

$$x + y = 60$$

Ecuación 2 - Coste total:

El coste total de la mezcla debe ser igual a la suma de los costes de cada tipo de aceite.

Coste del aceite de primera clase: $6x$ euros

Coste del aceite de segunda clase: $7,2y$ euros

Coste de la mezcla (60 litros a 7 €/litro): $60 \times 7 = 420$ euros

Por tanto:

$$6x + 7,2y = 420$$

Paso 3: Planteamiento del sistema de ecuaciones

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y = 60 \\ 6x + 7,2y = 420 \end{cases}$$

Paso 4: Resolución por el método de sustitución

Despejamos y de la primera ecuación:

$$\begin{aligned} x + y &= 60 \\ y &= 60 - x \end{aligned}$$

Sustituimos esta expresión de y en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} 6x + 7,2y &= 420 \\ 6x + 7,2(60 - x) &= 420 \end{aligned}$$

Paso 5: Desarrollo de la ecuación

Aplicamos la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned} 6x + 7,2 \times 60 - 7,2 \times x &= 420 \\ 6x + 432 - 7,2x &= 420 \end{aligned}$$

Calculamos $7,2 \times 60$:

$$7,2 \times 60 = 7,2 \times 6 \times 10 = 43,2 \times 10 = 432$$

Paso 6: Simplificación y agrupación de términos

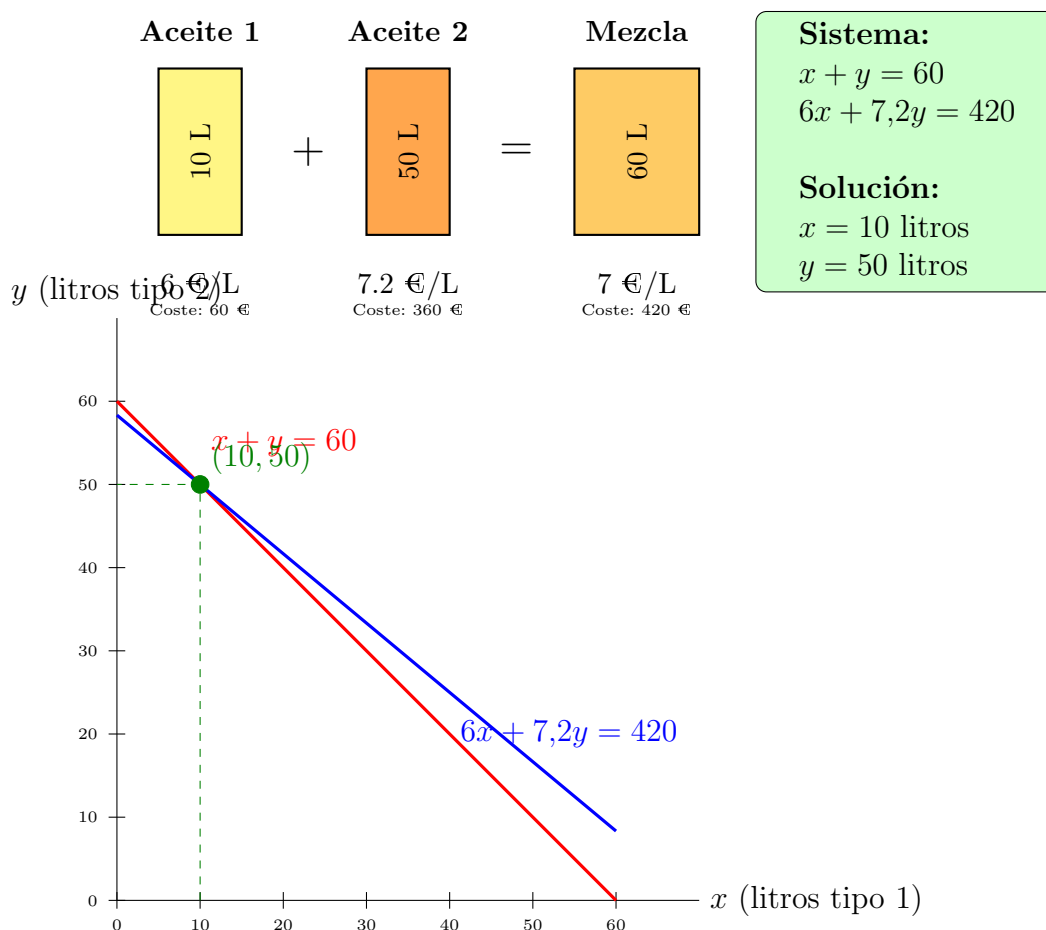
Agrupamos los términos con x :

$$6x - 7,2x + 432 = 420$$

$$1,2x + 432 = 420$$

Respuestas:
 Aceite de 6 €/litro: 10 litros
 Aceite de 7.2 €/litro: 50 litros

Mezcla de Aceites - Sistema de Ecuaciones



Composición de la mezcla:



Figura 4: Representación gráfica del problema de mezclas y sistema de ecuaciones

4. Ejercicio 4: Porcentajes y Crecimiento

4.1. Apartado a) Revalorización del apartamento

Enunciado: Un apartamento está valorado en 80 000 euros. Está previsto que se revalorice su precio un 5 % por año. ¿Cuánto valdrá dentro de 3 años?

Solución Completa del Ejercicio 4a**Paso 1: Identificación del tipo de problema**

Este es un problema de **crecimiento porcentual compuesto**. El valor del apartamento aumenta cada año aplicando el porcentaje sobre el valor del año anterior, no sobre el valor inicial.

Paso 2: Establecimiento de los datos

- Valor inicial: $V_0 = 80\,000 \text{ €}$
- Tasa de revalorización anual: $r = 5\% = 0,05$
- Tiempo: $t = 3 \text{ años}$
- Valor final: $V_f = ?$

Paso 3: Fórmula del interés compuesto

Para el crecimiento porcentual compuesto, utilizamos la fórmula:

$$V_f = V_0 \times (1 + r)^t$$

Donde:

- V_f = valor final
- V_0 = valor inicial
- r = tasa de crecimiento (en forma decimal)
- t = número de períodos (años)

Paso 4: Sustitución de valores

$$\begin{aligned} V_f &= 80\,000 \times (1 + 0,05)^3 \\ &= 80\,000 \times (1,05)^3 \end{aligned}$$

Paso 5: Cálculo de $(1,05)^3$

Calculamos paso a paso:

Primer año:

$$1,05^1 = 1,05$$

Segundo año:

$$\begin{aligned} 1,05^2 &= 1,05 \times 1,05 \\ &= 1,1025 \end{aligned}$$

Detalle del cálculo:

$$\begin{aligned} 1,05 \times 1,05 &= (1 + 0,05) \times (1 + 0,05) \\ &= 1 \times 1 + 1 \times 0,05 + 0,05 \times 1 + 0,05 \times 0,05 \\ &= 1 + 0,05 + 0,05 + 0,0025 \\ &= 1,1025 \end{aligned}$$

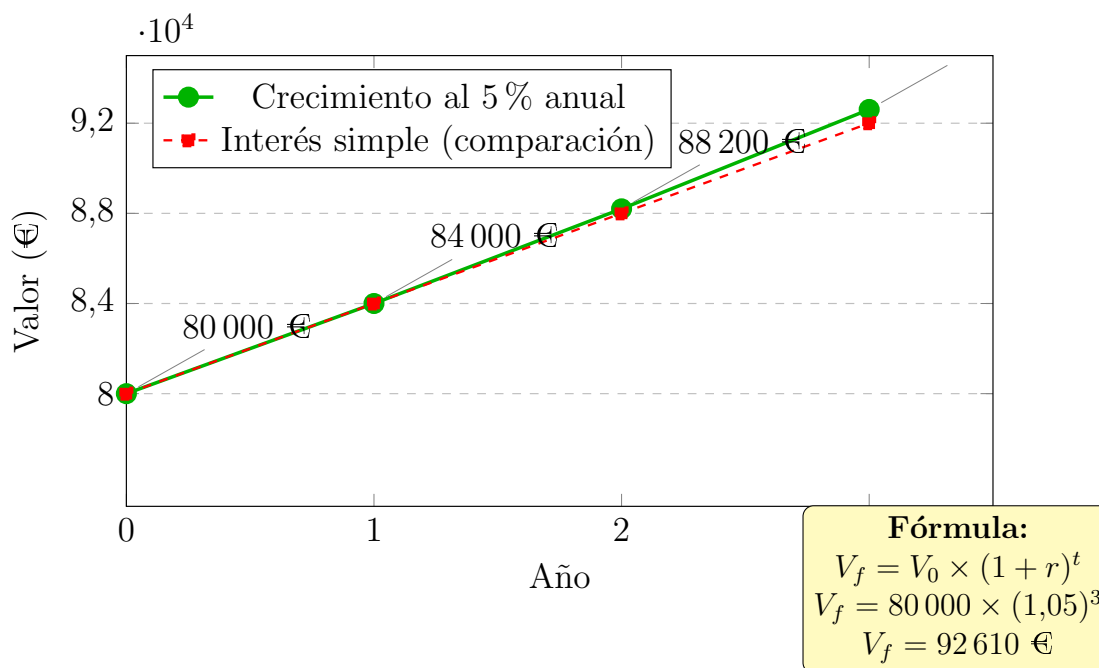
Tercer año:

$$15$$

$$\begin{aligned} 1,05^3 &= 1,05^2 \times 1,05 \\ &= 1,1025 \times 1,05 \end{aligned}$$

Respuesta: El apartamento valdrá 92 610 euros dentro de 3 años

Revalorización del Apartamento - Crecimiento Compuesto



Incrementos anuales:

4 000 €	4 200 €	4 410 €
Año 1	Año 2	Año 3
Total: 12 610 € (+15.76 %)		

Figura 5: Evolución del valor del apartamento con crecimiento compuesto del 5 % anual

4.2. Apartado b) Cultivo de bacterias

Enunciado: Un cultivo de bacterias de un laboratorio tiene 120 000 bacterias y adquiere una enfermedad que produce la muerte del 16 % de la población. Tratadas las bacterias supervivientes con un producto muy eficaz se consigue aumentar la población en un 14 %. ¿Cuántas bacterias forman la población finalmente?

Solución Completa del Ejercicio 4b**Paso 1: Identificación de las fases del problema**

Este problema tiene dos fases consecutivas:

1. **Fase 1:** Disminución del 16 % por enfermedad
2. **Fase 2:** Aumento del 14 % por tratamiento

Paso 2: Datos iniciales

- Población inicial: $P_0 = 120\,000$ bacterias
- Reducción por enfermedad: 16 %
- Aumento por tratamiento: 14 %

Paso 3: Cálculo de la Fase 1 - Enfermedad

Cuando muere el 16 % de la población, sobrevive el $100\% - 16\% = 84\%$.
Población después de la enfermedad:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 \times (1 - 0,16) \\ &= P_0 \times 0,84 \\ &= 120\,000 \times 0,84 \end{aligned}$$

Paso 4: Realización del cálculo de $120\,000 \times 0,84$

Podemos calcular esto de varias formas:

Método 1 - Multiplicación directa:

$$\begin{aligned} 120\,000 \times 0,84 &= 120\,000 \times \frac{84}{100} \\ &= \frac{120\,000 \times 84}{100} \\ &= \frac{10\,080\,000}{100} \\ &= 100\,800 \end{aligned}$$

Detalle de $120\,000 \times 84$:

$$\begin{aligned} 120\,000 \times 84 &= 120\,000 \times 80 + 120\,000 \times 4 \\ &= 9\,600\,000 + 480\,000 \\ &= 10\,080\,000 \end{aligned}$$

Método 2 - Descomposición:

$$\begin{aligned} 120\,000 \times 0,84 &= 120\,000 \times (1 - 0,16) \\ &= 120\,000 - 120\,000 \times 0,16 \\ &= 120\,000 - 19\,200 \\ &= 100\,800 \end{aligned}$$

Cálculo de $120\,000 \times 0,16$:

$$120\,000 \times 0,16 = 120\,000 \times \frac{16}{100} = \frac{1\,920\,000}{100} = 19\,200$$

Por tanto:

$$P_1 = 100\,800 \text{ bacterias}$$

Respuesta: La población final es de 114 912 bacterias

Evolución de la Población de Bacterias

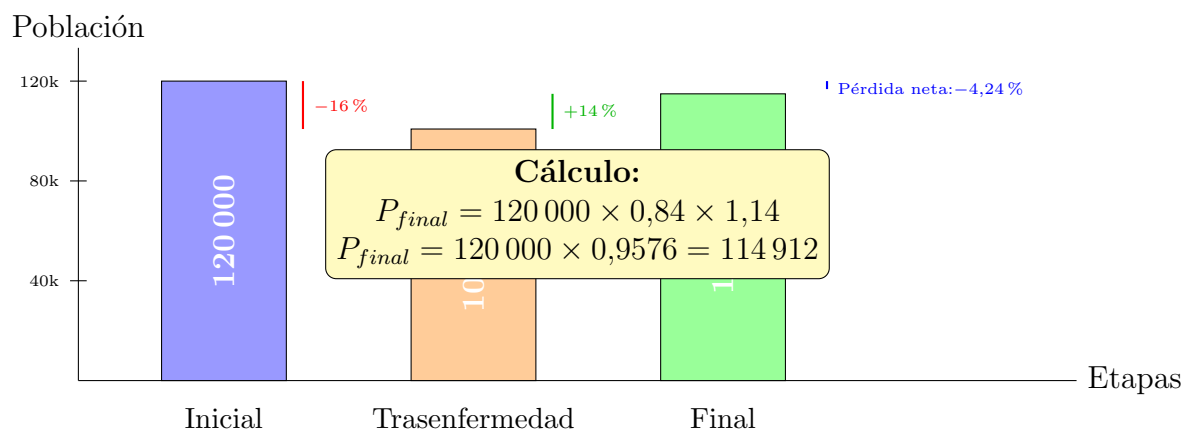
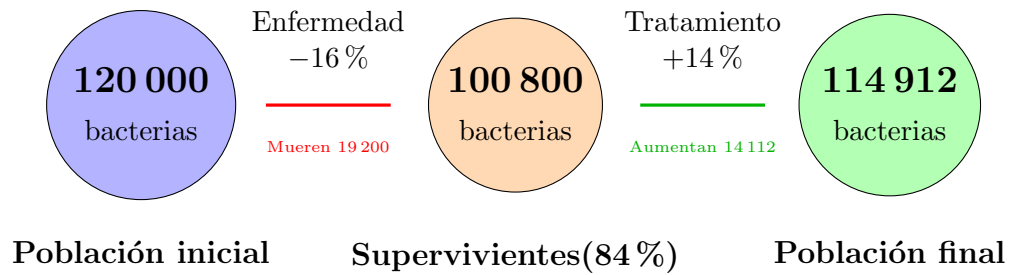


Figura 6: Evolución de la población de bacterias tras enfermedad y tratamiento

5. Ejercicio 5: Porcentajes Sucesivos

Enunciado: Un artículo que vale 120 euros, ante la excesiva demanda, sube un 20 %. Luego, cuando se reduce la demanda, se rebaja un 20 %. ¿Segue valiendo lo mismo que antes?

Solución Completa del Ejercicio 5**Paso 1: Identificación del tipo de problema**

Este es un problema de **porcentajes sucesivos**. Es importante entender que aplicar dos porcentajes consecutivos NO es lo mismo que aplicar la suma o resta de esos porcentajes.

Paso 2: Datos del problema

- Precio inicial: $P_0 = 120 \text{ €}$
- Primera variación: Aumento del 20 %
- Segunda variación: Reducción del 20 %
- Precio final: $P_f = ?$

Paso 3: Cálculo del precio tras el aumento

Cuando el precio sube un 20 %, se multiplica por $(1 + 0,20) = 1,20$:

$$\begin{aligned}P_1 &= P_0 \times (1 + 0,20) \\&= P_0 \times 1,20 \\&= 120 \times 1,20\end{aligned}$$

Paso 4: Realización del cálculo de $120 \times 1,20$

$$\begin{aligned}120 \times 1,20 &= 120 \times \frac{120}{100} \\&= \frac{120 \times 120}{100} \\&= \frac{14\,400}{100} \\&= 144 \text{ €}\end{aligned}$$

Método alternativo:

$$\begin{aligned}120 \times 1,20 &= 120 \times (1 + 0,20) \\&= 120 + 120 \times 0,20 \\&= 120 + 24 \\&= 144 \text{ €}\end{aligned}$$

Cálculo de $120 \times 0,20$:

$$120 \times 0,20 = 120 \times \frac{20}{100} = \frac{2\,400}{100} = 24$$

Por tanto:

$$P_1 = 144 \text{ €}$$

Interpretación: El precio aumenta de 120 € a 144 €, es decir, aumenta 24 €.

Paso 5: Cálculo del precio tras la rebaja

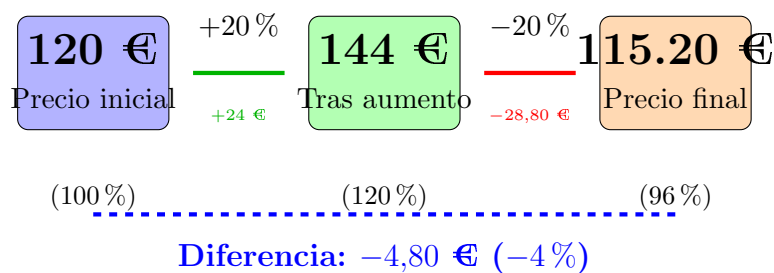
Ahora el precio se rebaja un 20 %, por lo que se multiplica por $(1 - 0,20) = 0,80$:

21

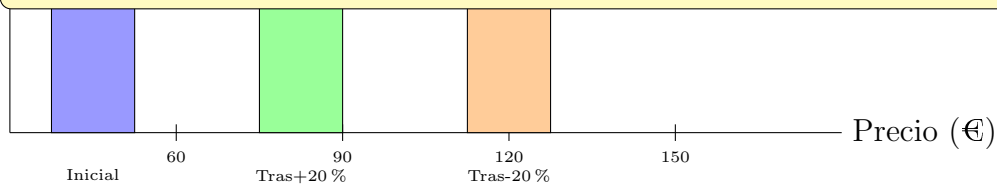
$$\begin{aligned}P_f &= P_1 \times (1 - 0,20) \\&= P_1 \times 0,80\end{aligned}$$

Respuesta:
 NO, el artículo NO vale lo mismo.
 Valor inicial: 120.00 €
 Valor final: 115.20 €
 Pérdida: 4.80 € (4 % menos)

Porcentajes Sucesivos: Subida y Bajada del 20 %



Explicación: La rebaja del 20 % se aplica sobre 144 € (no sobre 120 €)
 Por eso: $144 \times 0,20 = 28,80$ € (rebaja) > $120 \times 0,20 = 24$ € (aumento)
Fórmula: $(1 + 0,20) \times (1 - 0,20) = 1,20 \times 0,80 = 0,96 = 1 - 0,04$
Resultado: Pérdida neta del 4 % = $(20 \%)^2 = 0,04$



Concepto clave:

120 € (base del +20 %)

144 € (base del -20 %)

Las bases son
DIFERENTES

Figura 7: Efecto de porcentajes sucesivos: aumento y reducción del 20 %

Resumen de Respuestas

SOLUCIONES DEL EXAMEN

Ejercicio 1a - Campamento:

Las provisiones durarán **12 días** con 60 alumnos.

Ejercicio 1b - Traducción:

Sergio debe trabajar **4 horas diarias**.

Ejercicio 2 - Etiquetas:

- Cada alumno recibe: **16 etiquetas**
- Curso A (11 alumnos): **176 etiquetas**
- Curso B (13 alumnos): **208 etiquetas**
- Curso C (15 alumnos): **240 etiquetas**

Ejercicio 3 - Mezcla de aceites:

- Aceite de 6 €/litro: **10 litros**
- Aceite de 7.2 €/litro: **50 litros**

Ejercicio 4a - Apartamento:

El apartamento valdrá **92 610 euros** dentro de 3 años.

Ejercicio 4b - Bacterias:

La población final es de **114 912 bacterias**.

Ejercicio 5 - Porcentajes sucesivos:

NO, el artículo NO vale lo mismo.

Precio final: **115.20 euros** (pérdida de 4.80 €, equivalente al 4 %)

Nº1.- Realiza las siguientes operaciones con polinomios y simplifica los resultados:

a) $(x - 3) \cdot (x + 1)^2 - (x^3 - x^2 - 5x - 3)$

b) $x \cdot (x^2 + 1) - 3x \cdot (-x + 3) - 2 \cdot (x^2 - x)^2$

Nº2.- Realiza las siguientes divisiones de polinomios:

a) $(x^3 - x^2 - 5x - 3) : (x - 3)$

b) $(x^3 - x^2 - 5x - 3) : (x^2 - 2x - 3)$

Nº3.- Desarrolla los siguientes productos notables:

a) $(2x + 3y^2)^2$ b) $(1 - 3x)^2$ c) $(2x^2 + 5) \cdot (2x^2 - 5)$

Nº4.- Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^4 - 1$ b) $x^3 - 6x^2 + 9x$ c) $9x^4 - 36x^3 + 26x^2 + 4x - 3$

Nº5.- Simplifica las siguientes expresiones algebraicas:

a) $\frac{x^2 - 1}{x^4 - 1}$ b) $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9}$

NOTA: Todos los problemas valen 2 puntos

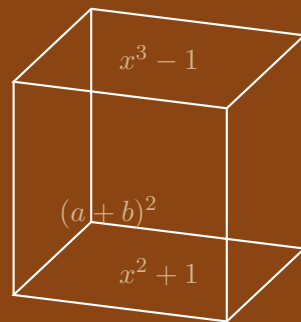
SUERTE JOVENES

SOLUCIONARIO

EXAMEN DE MATEMÁTICAS

Tema 3: POLINOMIOS

4º A ESO



"La música es el placer que experimenta la mente humana al contar sin darse cuenta de que está contando."

— Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)



Fecha: 22 de enero de 2020

Índice

1. Ejercicio 1: Operaciones con Polinomios	2
1.1. Enunciado	2
1.2. Apartado a) $(x - 3) \cdot (x + 1)^2 - (x^3 - x^2 - 5x - 3)$	2
1.3. Apartado b) $x \cdot (x^2 + 1) - 3x \cdot (-x + 3) - 2 \cdot (x^2 - x)^2$	5
2. Ejercicio 2: Divisiones de Polinomios	7
2.1. Enunciado	7
2.2. Apartado a) $(x^3 - x^2 - 5x - 3) : (x - 3)$	8
2.3. Apartado b) $(x^3 - x^2 - 5x - 3) : (x^2 - 2x - 3)$	10
3. Ejercicio 3: Productos Notables	12
3.1. Enunciado	12
3.2. Apartado a) $(2x + 3y^2)^2$	12
3.3. Apartado b) $(1 - 3x)^2$	14
3.4. Apartado c) $(2x^2 + 5) \cdot (2x^2 - 5)$	16
4. Ejercicio 4: Factorización de Polinomios	18
4.1. Enunciado	18
4.2. Apartado a) $x^4 - 1$	18
4.3. Apartado b) $x^3 - 6x^2 + 9x$	20
4.4. Apartado c) $9x^4 - 36x^3 + 26x^2 + 4x - 3$	23
5. Ejercicio 5: Simplificación de Fracciones Algebraicas	25
5.1. Enunciado	25
5.2. Apartado a) $\frac{x^2 - 1}{x^4 - 1}$	25
5.3. Apartado b) $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9}$	27
Resumen y Conclusiones	32

1 Ejercicio 1: Operaciones con Polinomios

1.1 Enunciado

Realiza las siguientes operaciones con polinomios y simplifica los resultados:

a) $(x - 3) \cdot (x + 1)^2 - (x^3 - x^2 - 5x - 3)$

b) $x \cdot (x^2 + 1) - 3x \cdot (-x + 3) - 2 \cdot (x^2 - x)^2$

1.2 Apartado a) $(x - 3) \cdot (x + 1)^2 - (x^3 - x^2 - 5x - 3)$

Solución

Paso 1: Desarrollar $(x + 1)^2$

El binomio al cuadrado se desarrolla usando la fórmula del producto notable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

$$\begin{aligned}(x + 1)^2 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 \\ &= x^2 + 2x + 1\end{aligned}$$

Paso 2: Multiplicar $(x - 3) \cdot (x^2 + 2x + 1)$

Aplicamos la propiedad distributiva, multiplicando cada término del primer paréntesis por cada término del segundo:

$$\begin{aligned}(x - 3) \cdot (x^2 + 2x + 1) &= x \cdot (x^2 + 2x + 1) - 3 \cdot (x^2 + 2x + 1) \\ &= x \cdot x^2 + x \cdot 2x + x \cdot 1 - 3 \cdot x^2 - 3 \cdot 2x - 3 \cdot 1 \\ &= x^3 + 2x^2 + x - 3x^2 - 6x - 3\end{aligned}$$

Paso 3: Simplificar términos semejantes

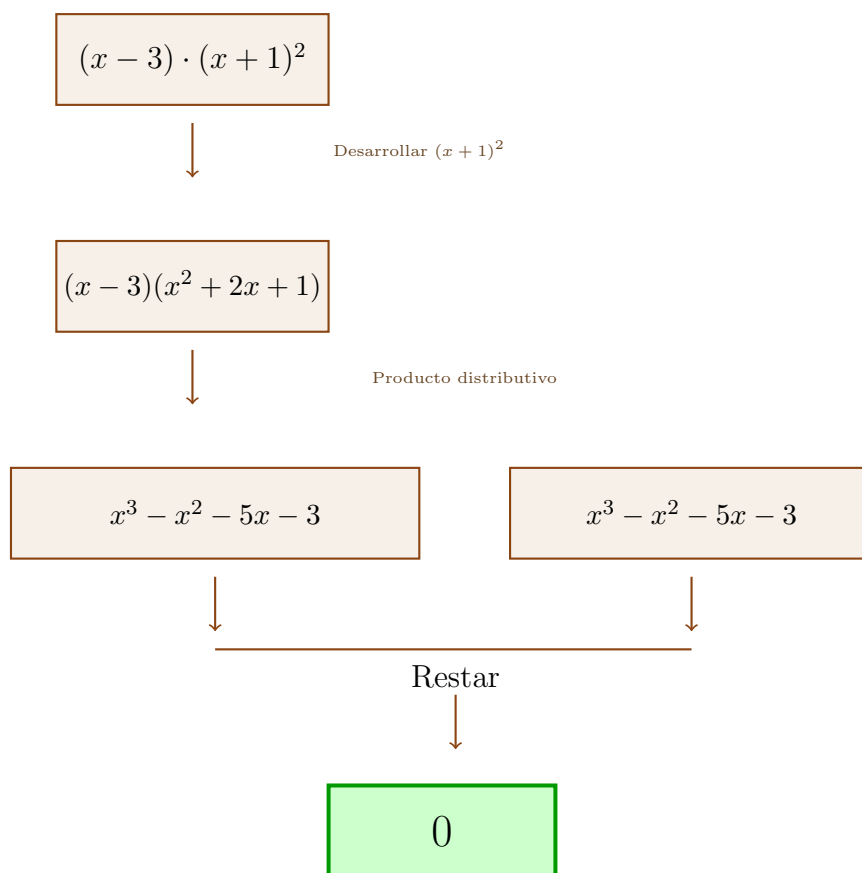
$$\begin{aligned}&= x^3 + (2x^2 - 3x^2) + (x - 6x) - 3 \\ &= x^3 - x^2 - 5x - 3\end{aligned}$$

Paso 4: Restar el segundo polinomio

Ahora restamos $(x^3 - x^2 - 5x - 3)$:

$$\begin{aligned}&(x^3 - x^2 - 5x - 3) - (x^3 - x^2 - 5x - 3) \\ &= x^3 - x^2 - 5x - 3 - x^3 + x^2 + 5x + 3 \\ &= (x^3 - x^3) + (-x^2 + x^2) + (-5x + 5x) + (-3 + 3) \\ &= 0\end{aligned}$$

Resultado final: 0



1.3 Apartado b) $x \cdot (x^2 + 1) - 3x \cdot (-x + 3) - 2 \cdot (x^2 - x)^2$

Solución

Paso 1: Desarrollar $x \cdot (x^2 + 1)$

$$\begin{aligned} x \cdot (x^2 + 1) &= x \cdot x^2 + x \cdot 1 \\ &= x^3 + x \end{aligned}$$

Paso 2: Desarrollar $3x \cdot (-x + 3)$

$$\begin{aligned} 3x \cdot (-x + 3) &= 3x \cdot (-x) + 3x \cdot 3 \\ &= -3x^2 + 9x \end{aligned}$$

Paso 3: Desarrollar $(x^2 - x)^2$

Usamos la fórmula $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:

$$\begin{aligned} (x^2 - x)^2 &= (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot x + x^2 \\ &= x^4 - 2x^3 + x^2 \end{aligned}$$

Paso 4: Calcular $2 \cdot (x^2 - x)^2$

$$2 \cdot (x^4 - 2x^3 + x^2) = 2x^4 - 4x^3 + 2x^2$$

Paso 5: Sustituir y operar

Ahora sustituimos todos los resultados en la expresión original:

$$\begin{aligned} x \cdot (x^2 + 1) - 3x \cdot (-x + 3) - 2 \cdot (x^2 - x)^2 \\ = (x^3 + x) - (-3x^2 + 9x) - (2x^4 - 4x^3 + 2x^2) \end{aligned}$$

Paso 6: Eliminar paréntesis

$$= x^3 + x + 3x^2 - 9x - 2x^4 + 4x^3 - 2x^2$$

Paso 7: Agrupar términos semejantes

Ordenamos por grado decreciente y sumamos:

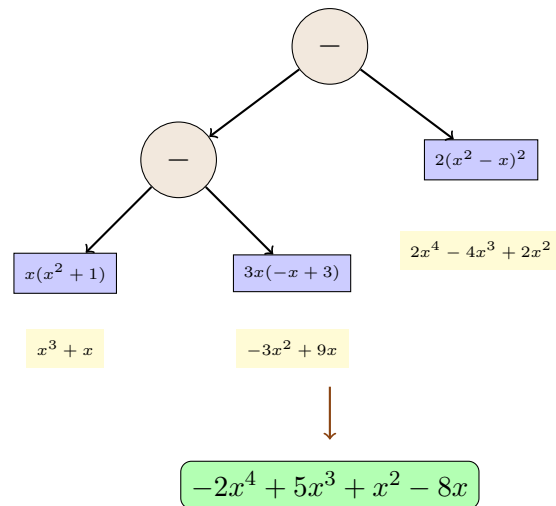
$$\begin{aligned} &= -2x^4 + (x^3 + 4x^3) + (3x^2 - 2x^2) + (x - 9x) \\ &= -2x^4 + 5x^3 + x^2 - 8x \end{aligned}$$

Paso 8: Factorizar (opcional pero recomendable)

Sacamos factor común x :

$$= x(-2x^3 + 5x^2 + x - 8)$$

Resultado final: $-2x^4 + 5x^3 + x^2 - 8x = x(-2x^3 + 5x^2 + x - 8)$



Nota Importante

En este ejercicio hemos aplicado:

- Propiedad distributiva de la multiplicación
- Productos notables: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- Reducción de términos semejantes
- Ordenación de polinomios por grado decreciente

2 Ejercicio 2: Divisiones de Polinomios

2.1 Enunciado

Realiza las siguientes divisiones de polinomios:

a) $(x^3 - x^2 - 5x - 3) : (x - 3)$

b) $(x^3 - x^2 - 5x - 3) : (x^2 - 2x - 3)$

2.2 Apartado a) $(x^3 - x^2 - 5x - 3) : (x - 3)$

Solución

Esta es una división de un polinomio de grado 3 entre un polinomio de grado 1. Utilizaremos el método de la división algebraica (similar a la división de números).

Paso 1: Organizar la división

Dividendo: $x^3 - x^2 - 5x - 3$

Divisor: $x - 3$

Paso 2: División paso a paso

Primer paso: Dividimos el primer término del dividendo entre el primer término del divisor:

$$\frac{x^3}{x} = x^2$$

Multiplicamos x^2 por el divisor $(x - 3)$:

$$x^2 \cdot (x - 3) = x^3 - 3x^2$$

Restamos del dividendo:

$$(x^3 - x^2 - 5x - 3) - (x^3 - 3x^2) = x^3 - x^2 - 5x - 3 - x^3 + 3x^2 = 2x^2 - 5x - 3$$

Segundo paso: Dividimos el primer término del nuevo dividendo:

$$\frac{2x^2}{x} = 2x$$

Multiplicamos $2x$ por el divisor:

$$2x \cdot (x - 3) = 2x^2 - 6x$$

Restamos:

$$(2x^2 - 5x - 3) - (2x^2 - 6x) = 2x^2 - 5x - 3 - 2x^2 + 6x = x - 3$$

Tercer paso: Dividimos:

$$\frac{x}{x} = 1$$

Multiplicamos:

$$1 \cdot (x - 3) = x - 3$$

Restamos:

$$(x - 3) - (x - 3) = 0$$

Desarrollo visual de la división:

x^3	$-x^2$	$-5x$	-3	
x^3	$-3x^2$			
	$2x^2$	$-5x$	-3	
	$2x^2$	$-6x$		
		x	-3	
		x	-3	
			0	

Conclusión:

8

■ **Cociente:** $Q(x) = x^2 + 2x + 1$

Divisor	Dividendo	Cociente
$x - 3$	$x^3 - x^2 - 5x - 3$	x^2
$x - 3$	$2x^2 - 5x - 3$	$2x$
$x - 3$	$x - 3$	1

$$x^2 + 2x + 1$$

Resto = 0

Nota Importante

Verificación mediante el Teorema del Resto:

El Teorema del Resto establece que si dividimos $P(x)$ entre $(x - a)$, el resto es $P(a)$.

Verificamos con $x = 3$:

$$P(3) = 3^3 - 3^2 - 5(3) - 3 = 27 - 9 - 15 - 3 = 0$$

Como $P(3) = 0$, confirmamos que el resto es 0 y que $x = 3$ es una raíz.

2.3 Apartado b) $(x^3 - x^2 - 5x - 3) : (x^2 - 2x - 3)$

Solución

Esta es una división de un polinomio de grado 3 entre un polinomio de grado 2.

Paso 1: Organizar la división

Dividendo: $x^3 - x^2 - 5x - 3$

Divisor: $x^2 - 2x - 3$

Paso 2: División algebraica

Primer paso: Dividimos los términos de mayor grado:

$$\frac{x^3}{x^2} = x$$

Multiplicamos x por el divisor completo:

$$x \cdot (x^2 - 2x - 3) = x^3 - 2x^2 - 3x$$

Restamos del dividendo:

$$\begin{aligned} & (x^3 - x^2 - 5x - 3) - (x^3 - 2x^2 - 3x) \\ &= x^3 - x^2 - 5x - 3 - x^3 + 2x^2 + 3x \\ &= (x^3 - x^3) + (-x^2 + 2x^2) + (-5x + 3x) - 3 \\ &= x^2 - 2x - 3 \end{aligned}$$

Segundo paso: Ahora dividimos $x^2 - 2x - 3$ entre $x^2 - 2x - 3$:

$$\frac{x^2}{x^2} = 1$$

Multiplicamos:

$$1 \cdot (x^2 - 2x - 3) = x^2 - 2x - 3$$

Restamos:

$$(x^2 - 2x - 3) - (x^2 - 2x - 3) = 0$$

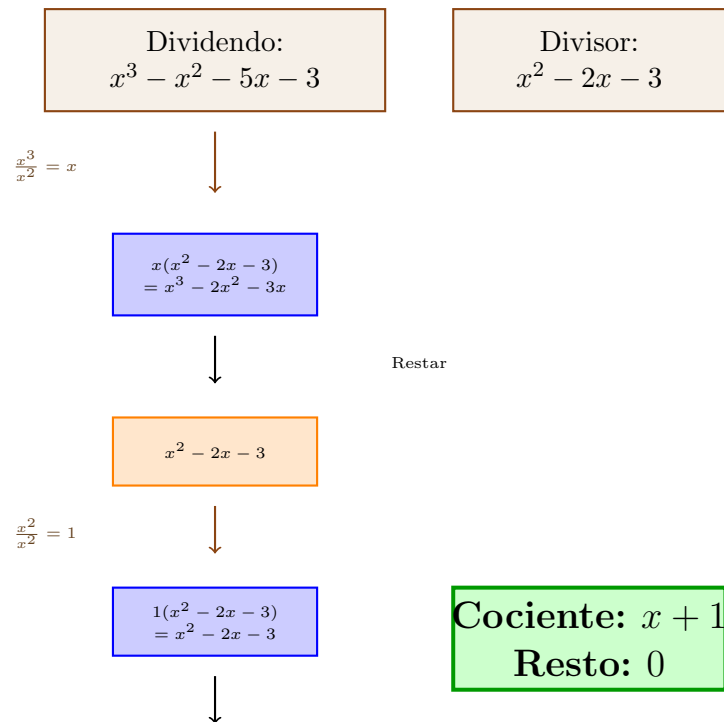
Desarrollo visual de la división:

$$\begin{array}{r|rrrr} & x^3 & -x^2 & -5x & -3 \\ x^2 - 2x - 3 & x^3 & -2x^2 & -3x & \\ \hline & & x^2 & -2x & -3 \\ & & x^2 & -2x & -3 \\ \hline & & & & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x \\ 1 \end{array}$$

Resultado:

- **Cociente:** $Q(x) = x + 1$
- **Resto:** $R(x) = 0$

Por lo tanto: $x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x^2 - 2x - 3)(x + 1) + 0$



Nota Importante

Observación importante:

Hemos obtenido que:

$$x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x^2 - 2x - 3)(x + 1)$$

Además, el divisor $x^2 - 2x - 3$ puede factorizarse:

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$$

Por lo tanto:

$$x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x - 3)(x + 1)(x + 1) = (x - 3)(x + 1)^2$$

Esto es consistente con el resultado del apartado a), donde ya sabíamos que $(x - 3)$ era un factor.

3 Ejercicio 3: Productos Notables

3.1 Enunciado

Desarrolla los siguientes productos notables:

a) $(2x + 3y^2)^2$

b) $(1 - 3x)^2$

c) $(2x^2 + 5) \cdot (2x^2 - 5)$

3.2 Apartado a) $(2x + 3y^2)^2$

Solución

Este es un **binomio al cuadrado** de la forma $(a + b)^2$.

Fórmula del producto notable:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Identificación de términos:

■ $a = 2x$

■ $b = 3y^2$

Paso 1: Calcular a^2

$$a^2 = (2x)^2 = 2^2 \cdot x^2 = 4x^2$$

Paso 2: Calcular $2ab$

$$2ab = 2 \cdot (2x) \cdot (3y^2) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x \cdot y^2 = 12xy^2$$

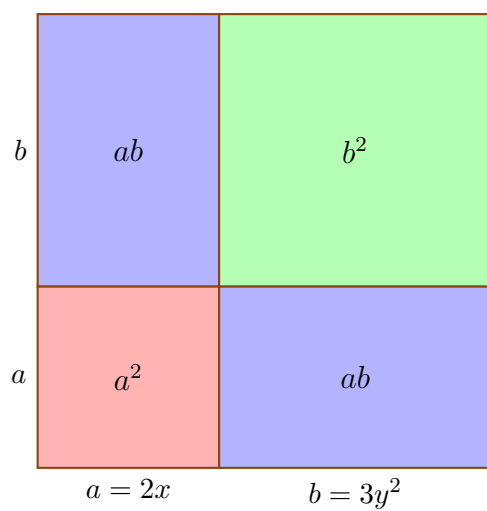
Paso 3: Calcular b^2

$$b^2 = (3y^2)^2 = 3^2 \cdot (y^2)^2 = 9y^4$$

Paso 4: Sumar todos los términos

$$(2x + 3y^2)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 4x^2 + 12xy^2 + 9y^4$$

Resultado final: $(2x + 3y^2)^2 = 4x^2 + 12xy^2 + 9y^4$



$$\begin{aligned} a^2 &= 4x^2 \\ 2ab &= 12xy^2 \\ b^2 &= 9y^4 \end{aligned}$$

$$\text{Área total} = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

3.3 Apartado b) $(1 - 3x)^2$

Solución

Este es un **binomio al cuadrado** de la forma $(a - b)^2$.

Fórmula del producto notable:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Identificación de términos:

- $a = 1$
- $b = 3x$

Paso 1: Calcular a^2

$$a^2 = 1^2 = 1$$

Paso 2: Calcular $2ab$

$$2ab = 2 \cdot 1 \cdot 3x = 6x$$

Paso 3: Calcular b^2

$$b^2 = (3x)^2 = 3^2 \cdot x^2 = 9x^2$$

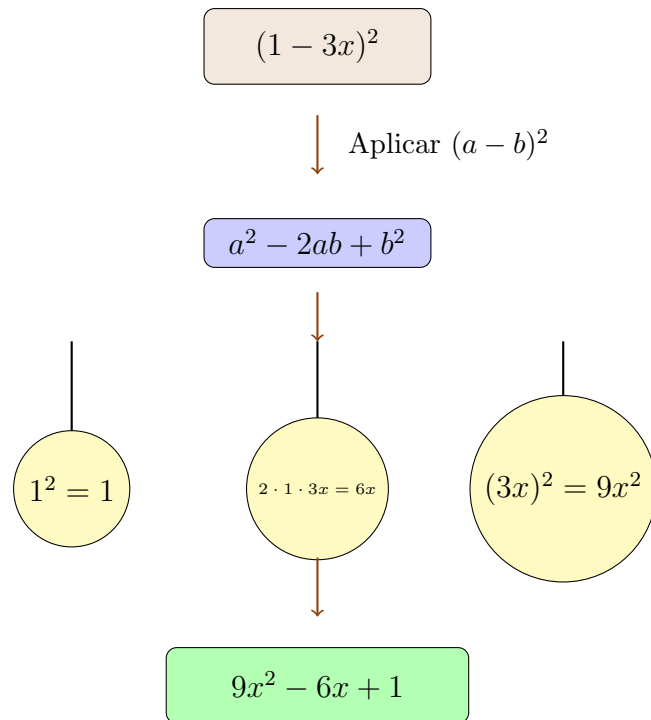
Paso 4: Aplicar la fórmula

$$(1 - 3x)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = 1 - 6x + 9x^2$$

Paso 5: Ordenar por grado decreciente

$$= 9x^2 - 6x + 1$$

Resultado final: $(1 - 3x)^2 = 9x^2 - 6x + 1$

**Nota Importante**

Diferencia entre $(a + b)^2$ y $(a - b)^2$:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (el término medio es positivo)
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (el término medio es negativo)

¡No confundir con $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$!

3.4 Apartado c) $(2x^2 + 5) \cdot (2x^2 - 5)$

Solución

Este es una **suma por diferencia**, también conocido como **diferencia de cuadrados**.

Fórmula del producto notable:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Identificación de términos:

- $a = 2x^2$
- $b = 5$

Paso 1: Calcular a^2

$$a^2 = (2x^2)^2 = 2^2 \cdot (x^2)^2 = 4x^4$$

Paso 2: Calcular b^2

$$b^2 = 5^2 = 25$$

Paso 3: Aplicar la fórmula

$$(2x^2 + 5)(2x^2 - 5) = (2x^2)^2 - 5^2 = 4x^4 - 25$$

Resultado final: $(2x^2 + 5)(2x^2 - 5) = 4x^4 - 25$

$$(2x^2 + 5)$$

Producto →

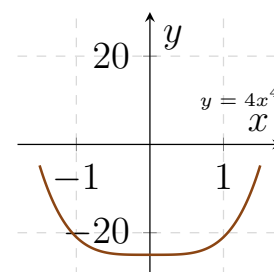
$$+a^2 = 4x^4$$

$$(2x^2 - 5)$$

$$-b^2 = -25$$



$$4x^4 - 25$$



Nota Importante**Verificación mediante desarrollo completo:**

Podemos verificar el resultado multiplicando término a término:

$$\begin{aligned}(2x^2 + 5)(2x^2 - 5) &= 2x^2 \cdot 2x^2 + 2x^2 \cdot (-5) + 5 \cdot 2x^2 + 5 \cdot (-5) \\&= 4x^4 - 10x^2 + 10x^2 - 25 \\&= 4x^4 + (-10x^2 + 10x^2) - 25 \\&= 4x^4 - 25\end{aligned}$$

Los términos en x^2 se cancelan, confirmando la fórmula de la diferencia de cuadrados.

4 Ejercicio 4: Factorización de Polinomios

4.1 Enunciado

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^4 - 1$

b) $x^3 - 6x^2 + 9x$

c) $9x^4 - 36x^3 + 26x^2 + 4x - 3$

4.2 Apartado a) $x^4 - 1$

Solución

Paso 1: Reconocer el patrón

Observamos que $x^4 - 1$ es una diferencia de cuadrados:

$$x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1^2$$

Paso 2: Aplicar la primera factorización

Usando la fórmula $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$:

$$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$$

Paso 3: Factorizar más si es posible

Observamos que $x^2 - 1$ es también una diferencia de cuadrados:

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

Sin embargo, $x^2 + 1$ no puede factorizarse más en los números reales (sus raíces son imaginarias: $x = \pm i$).

Paso 4: Escribir la factorización completa

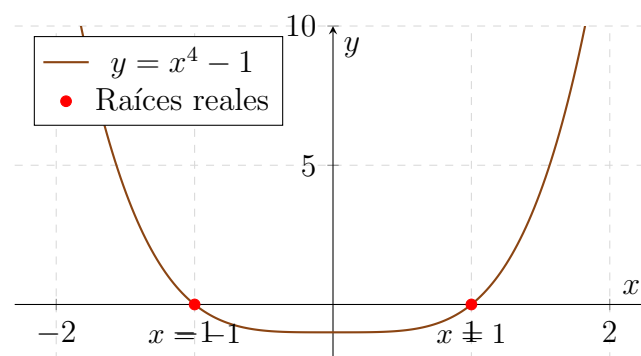
$$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$$

Resultado final: $x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$

Nota adicional: Si permitimos números complejos, podríamos factorizar completamente:

$$x^4 - 1 = (x + i)(x - i)(x + 1)(x - 1)$$

donde $i = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria.



4.3 Apartado b) $x^3 - 6x^2 + 9x$

Solución

Paso 1: Extraer factor común

Observamos que todos los términos tienen x como factor:

$$x^3 - 6x^2 + 9x = x(x^2 - 6x + 9)$$

Paso 2: Factorizar $x^2 - 6x + 9$

Este trinomio tiene la forma de un cuadrado perfecto. Verificamos si es $(a - b)^2$:
Buscamos dos números que:

- Multiplicados den 9
- Sumados den -6

Los números son -3 y -3 , por lo que:

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

Verificación:

$$(x - 3)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$$

Paso 3: Escribir la factorización completa

$$x^3 - 6x^2 + 9x = x(x - 3)^2 = x(x - 3)(x - 3)$$

Resultado final: $x^3 - 6x^2 + 9x = x(x - 3)^2$

Raíces del polinomio:

- $x = 0$ (raíz simple)
- $x = 3$ (raíz doble o de multiplicidad 2)

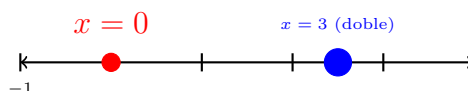
$$x^3 - 6x^2 + 9x$$

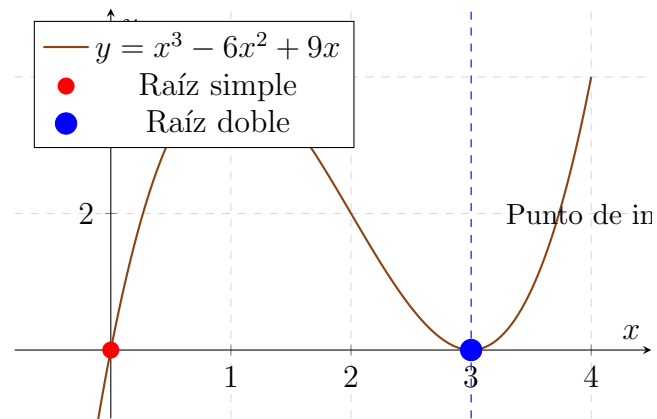
↓ Factor común: x

$$x(x^2 - 6x + 9)$$

↓ Trinomio cuadrado perfecto

$$x(x - 3)^2$$





Nota Importante

Importancia de la multiplicidad de las raíces:

Cuando $x = 3$ (raíz doble), la gráfica **toca** el eje X pero no lo cruza. En cambio, cuando $x = 0$ (raíz simple), la gráfica **cruza** el eje X.

Este comportamiento es característico:

- Raíz de multiplicidad impar $\Rightarrow$ la gráfica cruza el eje
- Raíz de multiplicidad par $\Rightarrow$ la gráfica toca el eje sin cruzarlo

4.4 Apartado c) $9x^4 - 36x^3 + 26x^2 + 4x - 3$

Solución

Este polinomio de grado 4 requiere un análisis más detallado.

Paso 1: Verificar si hay factor común

Los coeficientes son: 9, -36, 26, 4, -3. No hay factor común entre todos ellos (excepto 1).

Paso 2: Buscar raíces racionales usando el Teorema de las Raíces Racionales

Las posibles raíces racionales son de la forma $\frac{p}{q}$ donde:

- p divide al término independiente: $p \in \{\pm 1, \pm 3\}$
- q divide al coeficiente principal: $q \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$

Posibles raíces: $\pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{9}$

Paso 3: Probar posibles raíces

Llamemos $P(x) = 9x^4 - 36x^3 + 26x^2 + 4x - 3$

Probamos $x = 1$:

$$\begin{aligned} P(1) &= 9(1)^4 - 36(1)^3 + 26(1)^2 + 4(1) - 3 \\ &= 9 - 36 + 26 + 4 - 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

¡ $x = 1$ es una raíz! Por lo tanto $(x - 1)$ es un factor.

Paso 4: Dividir por $(x - 1)$ mediante división sintética

	$9x^4$	$-36x^3$	$26x^2$	$4x$	-3
$x - 1$	$9x^4$	$-9x^3$			
		$-27x^3$	$26x^2$		
		$-27x^3$	$27x^2$		
			$-x^2$	$4x$	
			$-x^2$	x	
				$3x$	-3
				$3x$	-3
					0

Cociente: $9x^3 - 27x^2 - x + 3$

Por lo tanto:

$$P(x) = (x - 1)(9x^3 - 27x^2 - x + 3)$$

Paso 5: Factorizar $9x^3 - 27x^2 - x + 3$

Probamos $x = 3$:

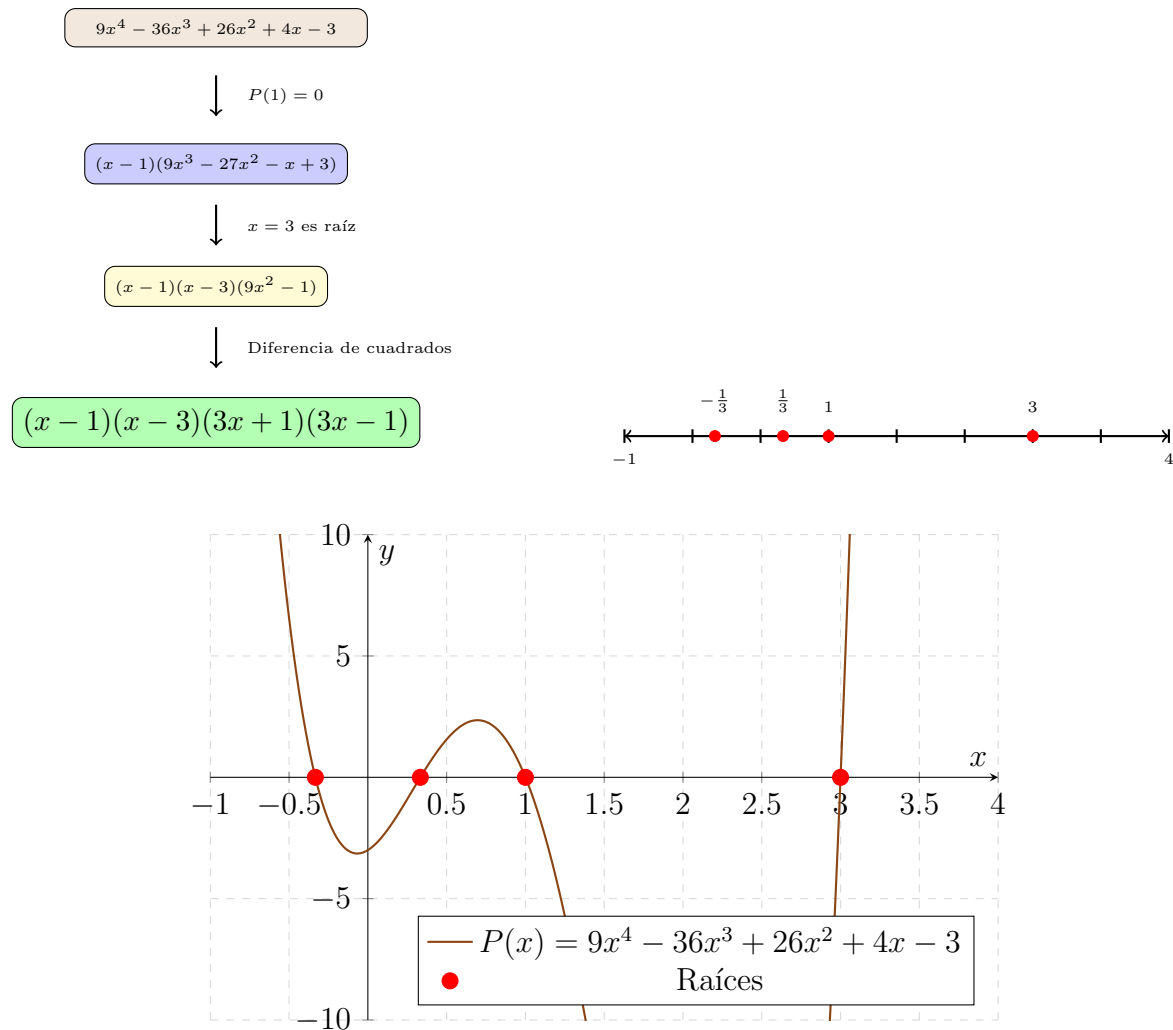
$$9(3)^3 - 27(3)^2 - 3 + 3 = 9(27) - 27(9) - 3 + 3 = 243 - 243 = 0$$

¡ $x = 3$ es raíz! Dividimos por $(x - 3)$ mediante factorización por agrupación:

$$\begin{aligned} 9x^3 - 27x^2 - x + 3 &= 9x^2(x - 3) - 1(x - 3) \\ &= (x - 3)(9x^2 - 1) \end{aligned}$$

Paso 6: Factorizar $9x^2 - 1$

Esto es una diferencia de cuadrados:



Nota Importante

Método de factorización por agrupación (alternativo):

También podríamos haber factorizado agrupando términos:

$$\begin{aligned}
 &9x^4 - 36x^3 + 26x^2 + 4x - 3 \\
 &= 9x^4 - 36x^3 + 27x^2 - x^2 + 4x - 3 \\
 &= 9x^2(x^2 - 4x + 3) - (x^2 - 4x + 3) \\
 &= (9x^2 - 1)(x^2 - 4x + 3) \\
 &= (3x + 1)(3x - 1)(x - 1)(x - 3)
 \end{aligned}$$

Ambos métodos son válidos y llegan al mismo resultado.

5 Ejercicio 5: Simplificación de Fracciones Algebraicas

5.1 Enunciado

Simplifica las siguientes expresiones algebraicas:

a) $\frac{x^2 - 1}{x^4 - 1}$

b) $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9}$

5.2 Apartado a) $\frac{x^2 - 1}{x^4 - 1}$

Solución

Para simplificar una fracción algebraica, debemos factorizar tanto el numerador como el denominador, y luego cancelar los factores comunes.

Paso 1: Factorizar el numerador $x^2 - 1$

Es una diferencia de cuadrados:

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

Paso 2: Factorizar el denominador $x^4 - 1$

Del ejercicio 4a, ya sabemos que:

$$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$$

Paso 3: Escribir la fracción con los factores

$$\frac{x^2 - 1}{x^4 - 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)}$$

Paso 4: Identificar factores comunes

Los factores comunes son: $(x + 1)$ y $(x - 1)$

Paso 5: Simplificar cancelando factores comunes

$$\frac{(x + 1)(x - 1)}{(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)} = \frac{\cancel{(x + 1)}\cancel{(x - 1)}}{(x^2 + 1)\cancel{(x + 1)}\cancel{(x - 1)}} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

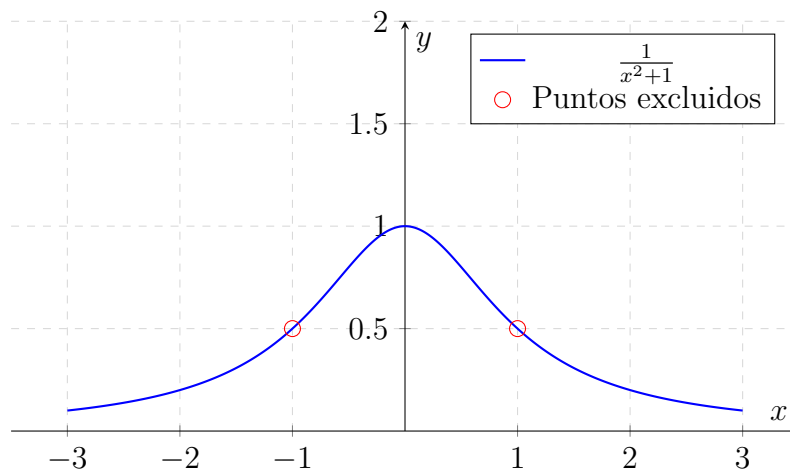
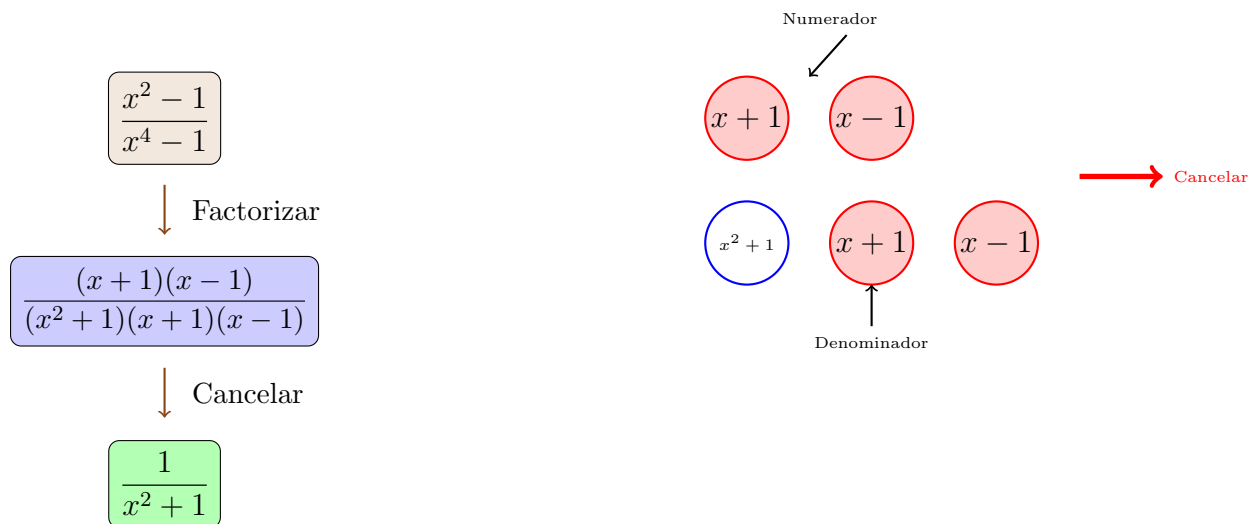
Paso 6: Restricciones del dominio

La fracción original no está definida cuando el denominador es cero:

$$x^4 - 1 = 0 \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Por lo tanto, la fracción simplificada es válida para $x \neq 1$ y $x \neq -1$.

Resultado final: $\frac{x^2 - 1}{x^4 - 1} = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad x \neq \pm 1$



Nota Importante

Importante: Aunque algebraicamente podemos cancelar los factores, debemos recordar que los valores $x = 1$ y $x = -1$ siguen estando excluidos del dominio, ya que en la expresión original hacían cero el denominador.

La función simplificada $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ está definida para todo $\mathbb{R}$, pero la fracción original tenía "agujeros" en $x = \pm 1$.

5.3 Apartado b) $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9}$

Solución

Paso 1: Factorizar el numerador $x^2 + 6x + 9$

Este es un trinomio cuadrado perfecto. Buscamos si es de la forma $(a + b)^2$:
Observamos que:

- x^2 es el cuadrado de x
- 9 es el cuadrado de 3
- $6x = 2 \cdot x \cdot 3$

Por lo tanto:

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2 = (x + 3)(x + 3)$$

Verificación:

$$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

Paso 2: Factorizar el denominador $x^2 - 9$

Es una diferencia de cuadrados:

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x + 3)(x - 3)$$

Paso 3: Escribir la fracción con los factores

$$\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9} = \frac{(x + 3)(x + 3)}{(x + 3)(x - 3)} = \frac{(x + 3)^2}{(x + 3)(x - 3)}$$

Paso 4: Identificar factores comunes

El factor común es: $(x + 3)$

Paso 5: Simplificar

$$\frac{(x + 3)^2}{(x + 3)(x - 3)} = \frac{(x + 3) \cdot \cancel{(x + 3)}}{\cancel{(x + 3)} \cdot (x - 3)} = \frac{x + 3}{x - 3}$$

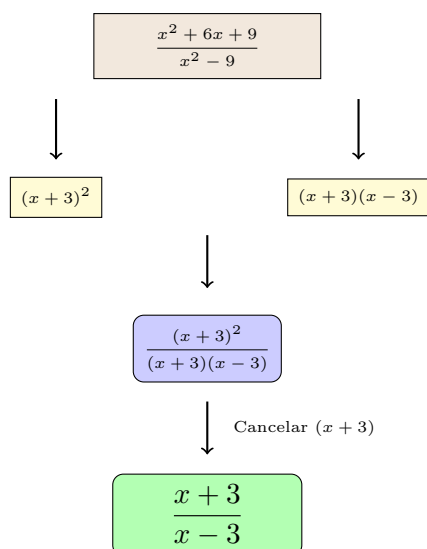
Paso 6: Restricciones del dominio

El denominador original es cero cuando:

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

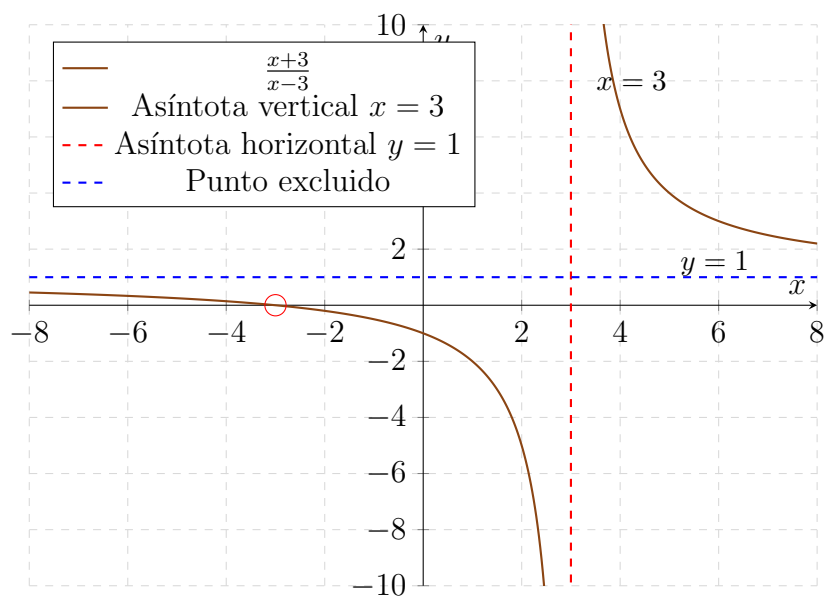
Por lo tanto: $x \neq 3$ y $x \neq -3$

Resultado final: $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9} = \frac{x + 3}{x - 3}, \quad x \neq 3, x \neq -3$



Valores ejemplo

x	$\frac{x+3}{x-3}$
0	-1
1	-2
4	7



Nota Importante

Análisis de la función racional $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$:

- **Dominio:** $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ (todos los reales excepto -3 y 3)

- **Ceros (raíces):**

$$\frac{x+3}{x-3} = 0 \Rightarrow x+3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

Pero $x = -3$ está excluido del dominio, por lo que técnicamente no hay ceros accesibles.

- **Asíntota vertical:** $x = 3$ (donde el denominador se anula)

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+3}{x-3} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+3}{x-3} = -\infty$$

- **Asíntota horizontal:**

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+3}{x-3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x(1+\frac{3}{x})}{x(1-\frac{3}{x})} = \frac{1}{1} = 1$$

Por lo tanto, $y = 1$ es asíntota horizontal.

- **Punto de corte con el eje Y:**

$$f(0) = \frac{0+3}{0-3} = \frac{3}{-3} = -1$$

Punto: $(0, -1)$

Reescritura alternativa:

$$\frac{x+3}{x-3} = \frac{(x-3)+6}{x-3} = \frac{x-3}{x-3} + \frac{6}{x-3} = 1 + \frac{6}{x-3}$$

Esta forma muestra claramente la asíntota horizontal $y = 1$.

Resumen y Conclusiones

Conceptos Clave Trabajados

1. Operaciones con Polinomios

- Aplicación de la propiedad distributiva
- Productos notables: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$
- Reducción de términos semejantes
- Ordenación por grado decreciente

2. División de Polinomios

- Método de división algebraica (similar a división de números)
- Teorema del Resto: Si $P(x) : (x - a)$, entonces $R = P(a)$
- Identificación de cociente y resto
- Relación: Dividendo = Divisor $\times$ Cociente + Resto

3. Productos Notables

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ (diferencia de cuadrados)

4. Factorización

- Extracción de factor común
- Diferencia de cuadrados
- Trinomio cuadrado perfecto
- Teorema de las Raíces Racionales
- División sucesiva

5. Simplificación de Fracciones Algebraicas

- Factorización de numerador y denominador
- Cancelación de factores comunes
- Restricciones del dominio
- Análisis de asíntotas y comportamiento

Tabla de Fórmulas Importantes

Producto Notable	Fórmula
Cuadrado de suma	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Cuadrado de diferencia	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Suma por diferencia	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
Cubo de suma	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
Cubo de diferencia	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

¡Examen completado con éxito!

Todos los ejercicios resueltos con rigor matemático completo

Nº1.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a) \frac{x}{2} - \frac{21}{3} - \frac{3x}{4} + \frac{5x}{6} = 7 \qquad b) \frac{40 + 14x - 1 - 2x}{3} = \frac{-5x + 15}{5}$$

$$c) 10(20 - x) = 8(2x - 1)$$

(1,5 puntos)

Nº2.- En una clase deciden que este fin de semana van a escribir todos una carta al resto de compañeros. Un alumno de la clase dice: ¡Los de correos se van a poner contentos porque vamos a escribir 600 cartas! Calcula el número de alumnos que hay en la clase.

(1 punto)

Nº3.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

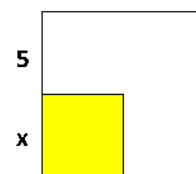
$$a) 2x^2 - 50 = 0 \qquad b) 7x^2 + 14x = 0$$

$$c) x^2 - 10x + 9 = 0 \qquad d) (x - 3)(x + 1)(x + 2) = 0$$

(2 puntos)

Nº4.- Si el lado de un cuadrado aumenta 5 cm, su área se multiplica por 4 ¿Cuál era el lado inicial del cuadrado?

(1 punto)



Nº5.- Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a) \begin{cases} 3x - 5y = -26 \\ 4x + 10y = 32 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} \frac{4x}{3} + \frac{3y}{2} = 7 \\ -\frac{2x}{3} + \frac{y}{2} = -1 \end{cases}$$

(2 puntos)

Nº6.- Tenemos un total de 26 monedas, unas de 50 céntimos y otras de 20 céntimos. Si en total tenemos 5 euros con 80 céntimos ¿Cuántas monedas tenemos de cada clase?

(1 puntos)

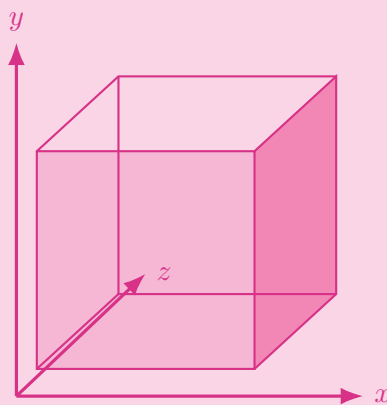
Nº7.- La diferencia de dos números es 3 y la suma de sus cuadrados es 117. ¿Cuáles son esos números?

(1,5 puntos)

Resolución completa del examen de matemáticas

Tema 4: Ecuaciones

4º ESO



“Las matemáticas son la reina de las ciencias y la teoría de números es la reina de las matemáticas.”

Leonhard Euler

Índice

Índice de ejercicios con hipervínculos	2
1. Ejercicio 1: Resuelve las ecuaciones propuestas	3
1.1. Apartado a	3
1.2. Apartado b	3
1.3. Apartado c	4
2. Ejercicio 2: Cartas entre compañeros	5
3. Ejercicio 3: Ecuaciones cuadráticas y producto nulo	6
3.1. Apartado a	6
3.2. Apartado b	6
3.3. Apartado c	7
3.4. Apartado d	7
4. Ejercicio 4: Área de un cuadrado	8
5. Ejercicio 5: Sistemas de ecuaciones	9
5.1. Apartado a	9
5.2. Apartado b	10
6. Ejercicio 6: Problema de monedas	11
7. Ejercicio 7: Diferencia y suma de cuadrados	12
Comprobación de índice e hipervínculos	12

Índice de ejercicios con hipervínculos

1. [Ejercicio 1. Ecuaciones lineales con fracciones](#)
 - [1.a\) Ecuación fraccionaria](#)
 - [1.b\) Ecuación fraccionaria con dos miembros](#)
 - [1.c\) Ecuación lineal con paréntesis](#)
2. [Ejercicio 2. Problema de cartas entre compañeros](#)
3. [Ejercicio 3. Ecuaciones de segundo grado y producto nulo](#)
 - [3.a\) Cuadrática incompleta pura](#)
 - [3.b\) Cuadrática incompleta mixta](#)
 - [3.c\) Cuadrática completa](#)
 - [3.d\) Ecuación factorizada](#)
4. [Ejercicio 4. Cuadrado cuyo área se cuadruplica](#)
5. [Ejercicio 5. Sistemas de ecuaciones lineales](#)
 - [5.a\) Sistema con coeficientes enteros](#)
 - [5.b\) Sistema con fracciones](#)
6. [Ejercicio 6. Monedas de 50 céntimos y 20 céntimos](#)
7. [Ejercicio 7. Dos números con diferencia y suma de cuadrados dadas](#)

1. Ejercicio 1: Resuelve las ecuaciones propuestas

Enunciado. Resolver:

a) $\frac{x}{2} - \frac{21}{3} - \frac{3x}{4} + \frac{5x}{6} = 7$, b) $\frac{40 + 14x - 1 - 2x}{3} = \frac{-5x + 15}{5}$, c) $10(20 - x) = 8(2x - 1)$.



1.1. Apartado a

$$\frac{x}{2} - \frac{21}{3} - \frac{3x}{4} + \frac{5x}{6} = 7$$
$$\frac{x}{2} - 7 - \frac{3x}{4} + \frac{5x}{6} = 7$$

El mínimo común múltiplo de 2, 4, 6 es 12. Multiplicamos toda la ecuación por 12:

$$12\left(\frac{x}{2}\right) - 12(7) - 12\left(\frac{3x}{4}\right) + 12\left(\frac{5x}{6}\right) = 12(7)$$

$$6x - 84 - 9x + 10x = 84$$

$$7x - 84 = 84$$

$$7x = 168$$

$$x = 24$$

Solución del apartado a): $x = 24$.

1.2. Apartado b

$$\frac{40 + 14x - 1 - 2x}{3} = \frac{-5x + 15}{5}$$

Simplificamos numeradores:

$$\frac{39 + 12x}{3} = \frac{-5x + 15}{5}$$

$$13 + 4x = -x + 3$$

$$5x = -10$$

$$x = -2$$

Solución del apartado b): $x = -2$.

1.3. Apartado c

$$10(20 - x) = 8(2x - 1)$$

$$200 - 10x = 16x - 8$$

Pasamos términos con x al segundo miembro y términos independientes al primero:

$$200 + 8 = 16x + 10x$$

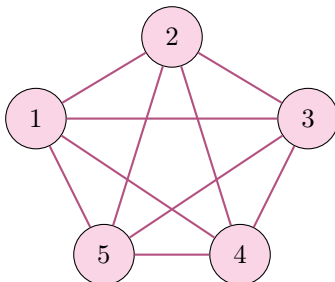
$$208 = 26x$$

$$x = 8$$

Solución del apartado c): $\boxed{x = 8}$.

2. Ejercicio 2: Cartas entre compañeros

Enunciado. En una clase, cada alumno escribe una carta a cada uno de sus compañeros. En total se escriben 600 cartas. Hallar el número de alumnos.



Modelo: cada alumno escribe a los demás $\Rightarrow n(n-1)$ cartas.

Si hay n alumnos, cada alumno escribe cartas a $n-1$ compañeros. Por tanto, el total es:

$$n(n-1) = 600$$

$$n^2 - n - 600 = 0$$

Aplicamos la fórmula general:

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-600)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 2400}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{2401}}{2} = \frac{1 \pm 49}{2}$$

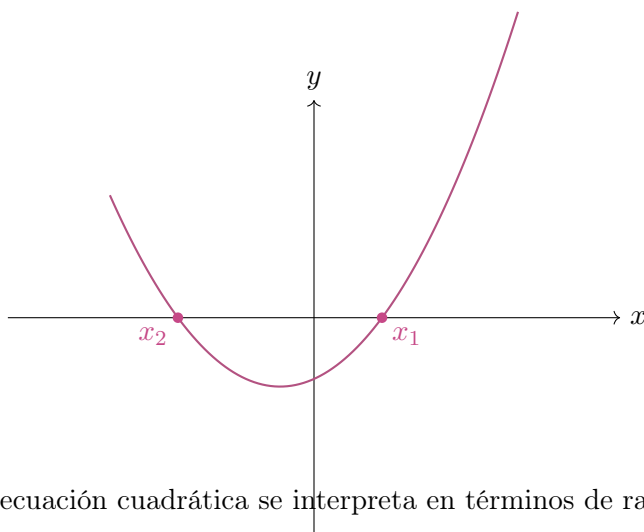
Dos soluciones algebraicas:

$$n_1 = \frac{1 + 49}{2} = 25, \quad n_2 = \frac{1 - 49}{2} = -24$$

Como el número de alumnos no puede ser negativo, se descarta -24 .

Solución del ejercicio 2: $\boxed{n = 25 \text{ alumnos}}$.

3. Ejercicio 3: Ecuaciones cuadráticas y producto nulo



Toda ecuación cuadrática se interpreta en términos de raíces.

3.1. Apartado a

$$2x^2 - 50 = 0$$

$$2x^2 = 50$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm 5$$

Solución del apartado a): $x = 5$ o $x = -5$.

3.2. Apartado b

$$7x^2 + 14x = 0$$

Sacamos factor común $7x$:

$$7x(x + 2) = 0$$

Por la propiedad del producto nulo:

$$7x = 0 \quad \text{o} \quad x + 2 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = -2$$

Solución del apartado b): $x = 0$ o $x = -2$.

3.3. Apartado c

$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

Aplicamos la fórmula general con $a = 1$, $b = -10$, $c = 9$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2}$$

$$x_1 = 9, \quad x_2 = 1$$

Solución del apartado c): $\boxed{x = 9 \text{ o } x = 1}$.

3.4. Apartado d

$$(x - 3)(x + 1)(x + 2) = 0$$

Producto nulo:

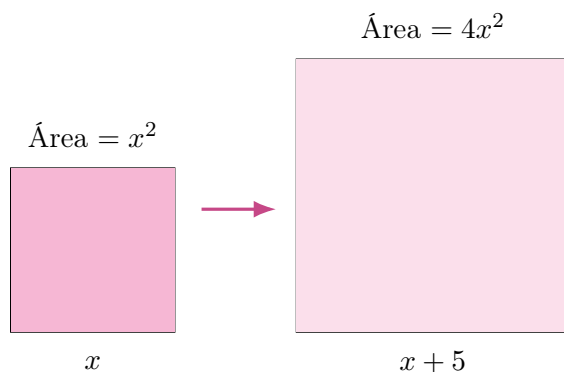
$$x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad x + 2 = 0$$

$$x = 3, \quad x = -1, \quad x = -2$$

Solución del apartado d): $\boxed{x = 3, -1, -2}$.

4. Ejercicio 4: Área de un cuadrado

Enunciado. Si el lado de un cuadrado aumenta 5 cm, su área se multiplica por 4. Hallar el lado inicial.



Sea x el lado inicial (en cm). Entonces, el nuevo lado es $x + 5$. La condición del problema dice:

$$(x + 5)^2 = 4x^2$$

Desarrollamos:

$$x^2 + 10x + 25 = 4x^2$$

$$3x^2 - 10x - 25 = 0$$

Aplicamos fórmula general:

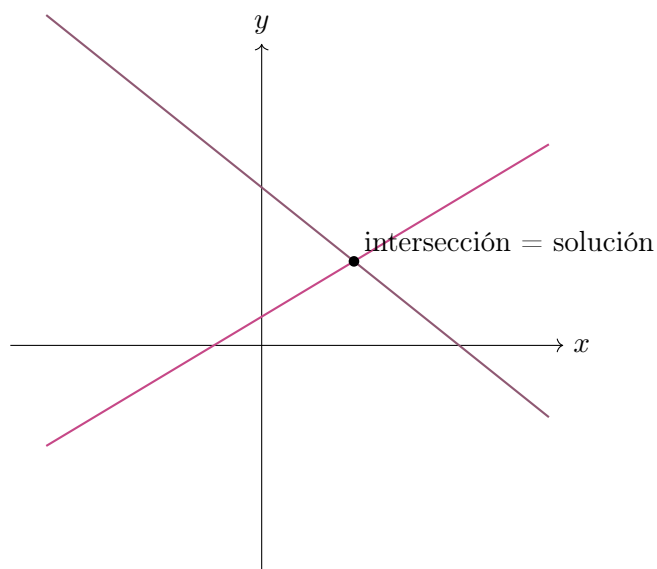
$$x = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(3)(-25)}}{2 \cdot 3} = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 300}}{6} = \frac{10 \pm 20}{6}$$

$$x_1 = 5, \quad x_2 = -\frac{5}{3}$$

Por contexto geométrico, un lado no puede ser negativo, así que se descarta $x = -\frac{5}{3}$.

Solución del ejercicio 4: $\boxed{x = 5 \text{ cm}}$.

5. Ejercicio 5: Sistemas de ecuaciones



5.1. Apartado a

$$\begin{cases} 3x - 5y = -26 \\ 4x + 10y = 32 \end{cases}$$

Simplificamos la segunda ecuación dividiendo entre 2:

$$\begin{cases} 3x - 5y = -26 \\ 2x + 5y = 16 \end{cases}$$

Sumamos ambas ecuaciones:

$$(3x - 5y) + (2x + 5y) = -26 + 16$$

$$5x = -10 \Rightarrow x = -2$$

Sustituimos en $2x + 5y = 16$:

$$2(-2) + 5y = 16$$

$$-4 + 5y = 16$$

$$5y = 20 \Rightarrow y = 4$$

Solución del apartado a): $\boxed{(x, y) = (-2, 4)}$.

5.2. Apartado b

$$\begin{cases} \frac{4x}{3} + \frac{3y}{2} = 7 \\ -\frac{2x}{3} + \frac{y}{2} = -1 \end{cases}$$

Multiplicamos cada ecuación por 6 para eliminar denominadores:

$$\begin{cases} 8x + 9y = 42 \\ -4x + 3y = -6 \end{cases}$$

Multiplicamos la segunda ecuación por 2:

$$\begin{cases} 8x + 9y = 42 \\ -8x + 6y = -12 \end{cases}$$

Sumamos:

$$15y = 30 \Rightarrow y = 2$$

Sustituimos en $-4x + 3y = -6$:

$$-4x + 3(2) = -6$$

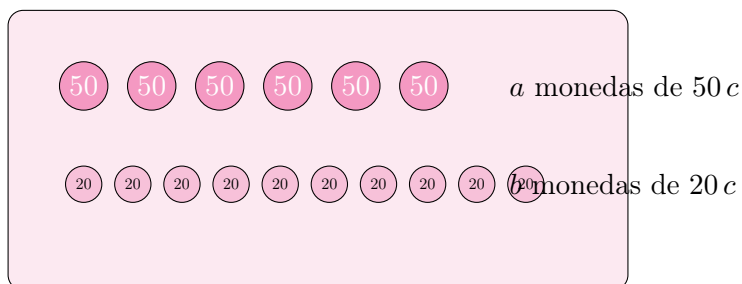
$$-4x + 6 = -6$$

$$-4x = -12 \Rightarrow x = 3$$

Solución del apartado b): $\boxed{(x, y) = (3, 2)}$.

6. Ejercicio 6: Problema de monedas

Enunciado. Tenemos 26 monedas: unas de 50 céntimos y otras de 20 céntimos. El total es 5,80 €. Hallar cuántas hay de cada tipo.



Sea a el número de monedas de 50 c y b el de monedas de 20 c .

Primera ecuación (número total de monedas):

$$a + b = 26$$

Segunda ecuación (valor total en céntimos):

$$50a + 20b = 580$$

Dividimos la segunda entre 10:

$$5a + 2b = 58$$

Despejamos de la primera: $b = 26 - a$. Sustituimos:

$$5a + 2(26 - a) = 58$$

$$5a + 52 - 2a = 58$$

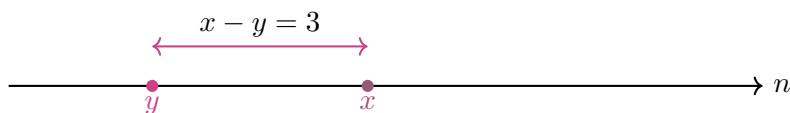
$$3a = 6 \Rightarrow a = 2$$

$$b = 26 - 2 = 24$$

Solución del ejercicio 6: 2 monedas de 50 c y 24 monedas de 20 c .

7. Ejercicio 7: Diferencia y suma de cuadrados

Enunciado. La diferencia de dos números es 3 y la suma de sus cuadrados es 117. Hallar dichos números.



$$x^2 + y^2 = 117$$

Sean x e y dos números reales tales que:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x^2 + y^2 = 117 \end{cases}$$

De la primera ecuación:

$$x = y + 3$$

Sustituimos en la segunda:

$$\begin{aligned} (y + 3)^2 + y^2 &= 117 \\ y^2 + 6y + 9 + y^2 &= 117 \\ 2y^2 + 6y - 108 &= 0 \end{aligned}$$

Dividimos entre 2:

$$y^2 + 3y - 54 = 0$$

Fórmula general:

$$\begin{aligned} y &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-54)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 216}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{-3 \pm 15}{2} \\ y_1 &= 6, \quad y_2 = -9 \end{aligned}$$

Calculamos $x = y + 3$:

$$\text{Si } y = 6, \quad x = 9; \quad \text{si } y = -9, \quad x = -6.$$

Soluciones del ejercicio 7:

$$\boxed{(x, y) = (9, 6) \quad \text{o} \quad (x, y) = (-6, -9)}$$

Comprobación de índice e hipervínculos

- El índice general de L^AT_EX (tabla de contenidos) enlaza a cada sección y subsección de ejercicios.

- El índice manual de ejercicios añade enlaces directos a cada ejercicio y subíndice (apartados a, b, c, d).
- Cada entrada del índice manual usa etiquetas específicas: ej1, ej1a, ej1b, ej1c, ej2, ej3, ej3a, ej3b, ej3c, ej3d, ej4, ej5, ej5a, ej5b, ej6, ej7.
- Se han creado hipervínculos internos correctos para todos los ejercicios y subíndices solicitados.



Nº1.- Calcula la altura sobre el lado desigual de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 5 centímetros y cuyo lado desigual mide 8 centímetros. Realiza un dibujo de la situación. ¿Cuál es su área?

(2 PUNTOS)

Nº2.- Calcula el perímetro y el área de un trapecio isósceles cuyas bases miden 14 y 24 centímetros respectivamente, y cuyo lado igual mide 13 centímetros. Realiza un dibujo de la situación.

(2 PUNTOS)

Nº3.- Calcula el área de un pentágono regular de 30 centímetros de lado y 8 centímetros de apotema. Realiza un dibujo de la situación.

(1 PUNTO)

Nº4.- Calcula el volumen de la pirámide de 9 cm de altura con base cuadrada de 5cm de lado

(1 PUNTO)

Nº5.- Calcula el volumen de un cono de 10 centímetros de radio y 24 centímetros de altura. Realiza un dibujo de la situación.

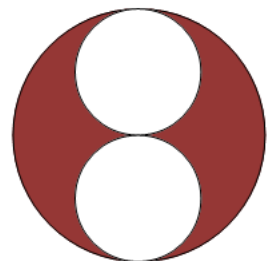
(1 PUNTO)

Nº6.- Calcula el área total y el volumen de un cilindro de 30 cm de radio y altura 10 cm

(2 PUNTOS)

Nº7.- Calcula el área del siguiente recinto sombreado, sabiendo que la circunferencia exterior mide 10 centímetros de diámetro.

(1 PUNTO)

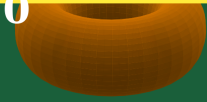
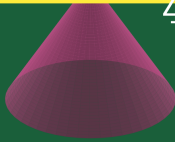


SUERTE JÓVENES

EXAMEN DE MATEMÁTICAS

4º A ESO - 11 de Marzo de 2020

Geometría Plana y Espacial



"Lo que sabemos es poco; lo que ignoramos es inmenso."

— Pierre-Simon Laplace

Matemático y Astrónomo Francés (1749-1827)

Junta de Castilla y León

Soluciones Completas con Desarrollo Matemático

Índice

1	Ejercicio 1	1
2	Ejercicio 2	3
3	Ejercicio 3	5
4	Ejercicio 4	7
5	Ejercicio 5	9
6	Ejercicio 6	11
7	Ejercicio 7	13
	Resumen de Soluciones	15
	Fórmulas Utilizadas	15

1. Ejercicio 1

Enunciado

Calcula la altura sobre el lado desigual de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 5 centímetros y cuyo lado desigual mide 8 centímetros. Realiza un dibujo de la situación. ¿Cuál es su área?

Datos del problema

- Lados iguales (congruentes): $l = 5$ cm
- Lado desigual (base): $b = 8$ cm
- Altura sobre el lado desigual: $h = ?$
- Área del triángulo: $A = ?$

Desarrollo Matemático

En un triángulo isósceles, la altura trazada desde el vértice opuesto al lado desigual cae perpendicularmente sobre el punto medio de dicha base, dividiendo el triángulo en dos triángulos rectángulos congruentes.

Paso 1: Identificación de triángulos rectángulos

Al trazar la altura h desde el vértice C hasta el punto medio M de la base AB , se forman dos triángulos rectángulos idénticos: $\triangle AMC$ y $\triangle BMC$.

Cada triángulo rectángulo tiene:

- Hipotenusa: $l = 5$ cm (lado igual del triángulo isósceles)
- Cateto horizontal: $\frac{b}{2} = \frac{8}{2} = 4$ cm (mitad de la base)
- Cateto vertical: h (altura que buscamos)

Paso 2: Aplicación del Teorema de Pitágoras

En el triángulo rectángulo $\triangle AMC$:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad (1)$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$5^2 = h^2 + 4^2 \quad (2)$$

$$25 = h^2 + 16 \quad (3)$$

$$h^2 = 25 - 16 = 9 \quad (4)$$

$$h = \sqrt{9} = 3 \text{ cm} \quad (5)$$

Paso 3: Cálculo del área

El área de un triángulo se calcula mediante la fórmula:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \quad (6)$$

Sustituyendo los valores:

$$A = \frac{8 \cdot 3}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ cm}^2 \quad (7)$$

Ilustración del problema

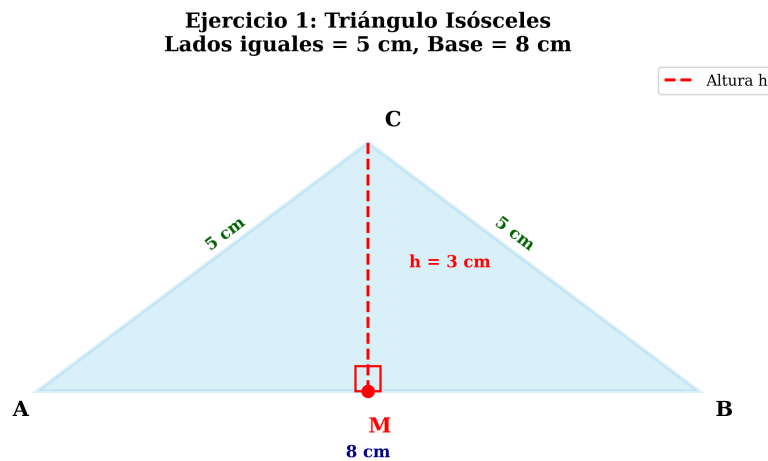


Figura 1: Triángulo isósceles con altura sobre el lado desigual

Resultado Final: $h = 3 \text{ cm}$, $A = 12 \text{ cm}^2$

Respuesta: La altura sobre el lado desigual mide **3 centímetros** y el área del triángulo es **12 centímetros cuadrados**.

2. Ejercicio 2

Enunciado

Calcula el perímetro y el área de un trapecio isósceles cuyas bases miden 14 y 24 centímetros respectivamente, y cuyo lado igual mide 13 centímetros. Realiza un dibujo de la situación.

Datos del problema

- Base menor: $b = 14$ cm
- Base mayor: $B = 24$ cm
- Lados iguales (laterales): $l = 13$ cm
- Altura del trapecio: $h = ?$
- Perímetro: $P = ?$
- Área: $A = ?$

Desarrollo Matemático

Paso 1: Cálculo de la altura del trapecio

En un trapecio isósceles, al trazar las alturas desde los extremos de la base menor hacia la base mayor, se forman dos triángulos rectángulos congruentes en los extremos y un rectángulo en el centro.

La diferencia entre las bases se distribuye equitativamente en ambos lados:

$$\text{Segmento horizontal} = \frac{B - b}{2} = \frac{24 - 14}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm} \quad (8)$$

Cada triángulo rectángulo formado tiene:

- Hipotenusa: $l = 13$ cm (lado lateral del trapecio)
- Cateto horizontal: 5 cm
- Cateto vertical: h (altura del trapecio)

Aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$l^2 = h^2 + 5^2 \quad (9)$$

$$13^2 = h^2 + 25 \quad (10)$$

$$169 = h^2 + 25 \quad (11)$$

$$h^2 = 169 - 25 = 144 \quad (12)$$

$$h = \sqrt{144} = 12 \text{ cm} \quad (13)$$

Paso 2: Cálculo del perímetro

El perímetro de un trapezio es la suma de todos sus lados:

$$P = B + b + 2l \quad (14)$$

Sustituyendo los valores:

$$P = 24 + 14 + 2(13) = 24 + 14 + 26 = 64 \text{ cm} \quad (15)$$

Paso 3: Cálculo del área

El área de un trapezio se calcula mediante:

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2} \quad (16)$$

Sustituyendo los valores:

$$A = \frac{(24 + 14) \cdot 12}{2} = \frac{38 \cdot 12}{2} = \frac{456}{2} = 228 \text{ cm}^2 \quad (17)$$

Ilustración del problema

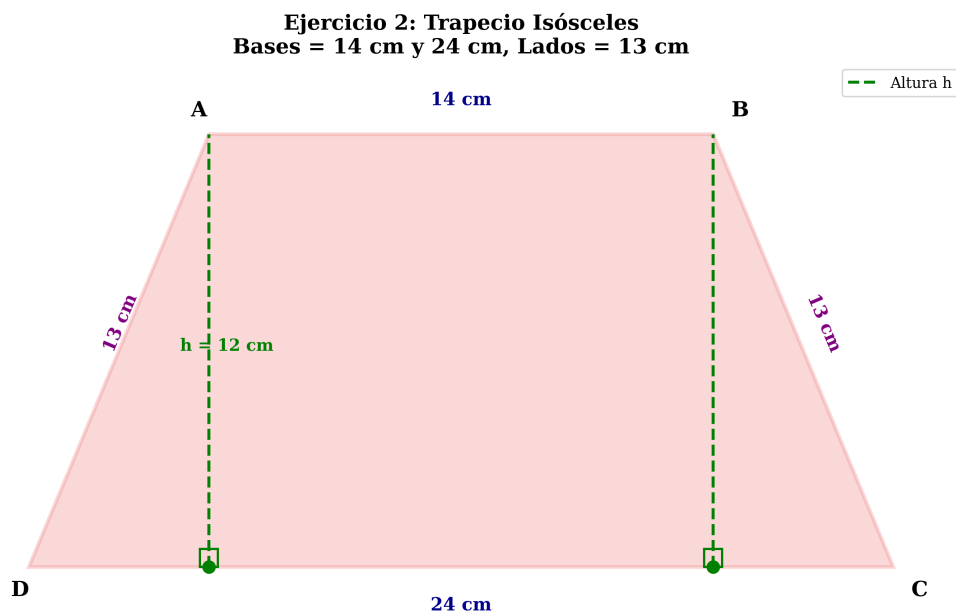


Figura 2: Trapecio isósceles con sus medidas

Resultado Final: $P = 64 \text{ cm}$, $A = 228 \text{ cm}^2$

Respuesta: El perímetro del trapecio es **64 centímetros** y su área es **228 centímetros cuadrados**.

3. Ejercicio 3

Enunciado

Calcula el área de un pentágono regular de 30 centímetros de lado y 8 centímetros de apotema. Realiza un dibujo de la situación.

Datos del problema

- Número de lados: $n = 5$
- Longitud de cada lado: $l = 30$ cm
- Apotema: $a = 8$ cm
- Área del pentágono: $A = ?$

Desarrollo Matemático

Un pentágono regular es un polígono de cinco lados iguales y cinco ángulos iguales. La apotema es la distancia perpendicular desde el centro del polígono hasta el punto medio de cualquier lado.

Paso 1: Cálculo del perímetro

El perímetro de un polígono regular se calcula como:

$$P = n \cdot l \quad (18)$$

donde n es el número de lados y l es la longitud de cada lado.

Sustituyendo:

$$P = 5 \cdot 30 = 150 \text{ cm} \quad (19)$$

Paso 2: Cálculo del área

El área de un polígono regular se calcula mediante la fórmula:

$$A = \frac{P \cdot a}{2} \quad (20)$$

donde P es el perímetro y a es la apotema.

Esta fórmula se deriva del hecho de que un polígono regular puede dividirse en n triángulos isósceles congruentes, cada uno con base l y altura a . El área total es:

$$A = n \cdot \frac{l \cdot a}{2} = \frac{n \cdot l \cdot a}{2} = \frac{P \cdot a}{2} \quad (21)$$

Sustituyendo los valores:

$$A = \frac{150 \cdot 8}{2} = \frac{1200}{2} = 600 \text{ cm}^2 \quad (22)$$

Ilustración del problema

Ejercicio 3: Pentágono Regular
Lado = 30 cm, Apotema = 8 cm

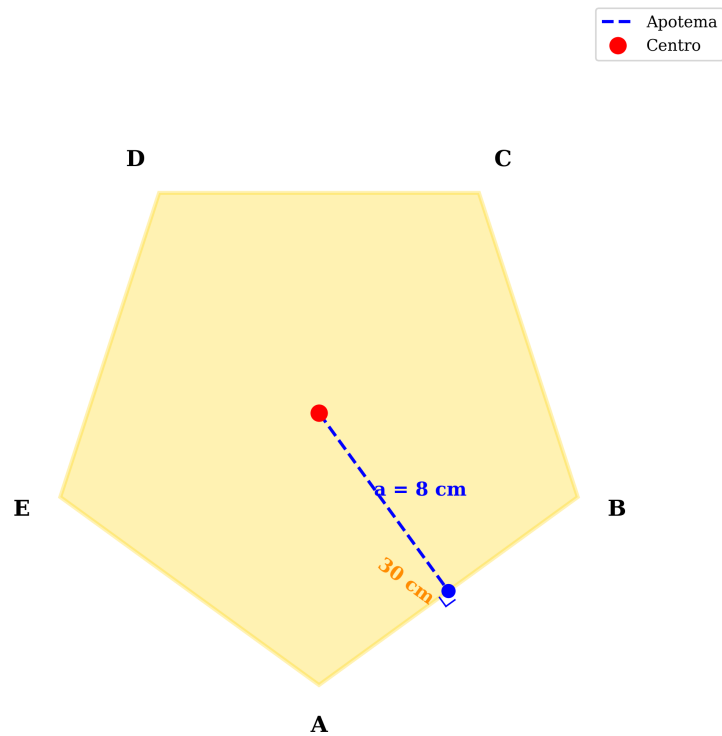


Figura 3: Pentágono regular con apotema

Resultado Final: $A = 600 \text{ cm}^2$

Respuesta: El área del pentágono regular es **600 centímetros cuadrados**.

4. Ejercicio 4

Enunciado

Calcula el volumen de la pirámide de 9 cm de altura con base cuadrada de 5 cm de lado.

Datos del problema

- Altura de la pirámide: $h = 9$ cm
- Lado de la base cuadrada: $l = 5$ cm
- Volumen de la pirámide: $V = ?$

Desarrollo Matemático

Una pirámide es un poliedro cuya base es un polígono y cuyas caras laterales son triángulos que convergen en un punto llamado vértice o ápice.

Paso 1: Cálculo del área de la base

La base es un cuadrado de lado $l = 5$ cm. El área de un cuadrado se calcula como:

$$A_b = l^2 \quad (23)$$

Sustituyendo:

$$A_b = 5^2 = 25 \text{ cm}^2 \quad (24)$$

Paso 2: Cálculo del volumen

El volumen de una pirámide se calcula mediante la fórmula:

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} \quad (25)$$

donde A_b es el área de la base y h es la altura de la pirámide.

Esta fórmula se deriva del hecho de que el volumen de una pirámide es un tercio del volumen del prisma con la misma base y altura.

Sustituyendo los valores:

$$V = \frac{25 \cdot 9}{3} = \frac{225}{3} = 75 \text{ cm}^3 \quad (26)$$

Ilustración del problema

Ejercicio 4: Pirámide de Base Cuadrada Base = 5 cm, Altura = 9 cm

Altura = 9 cm

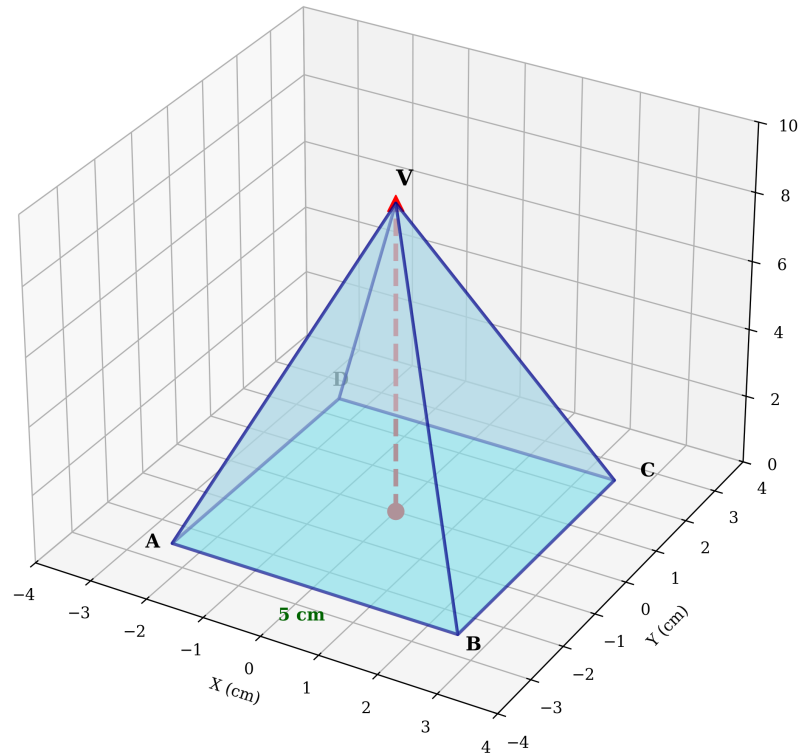


Figura 4: Pirámide de base cuadrada

Resultado Final: $V = 75 \text{ cm}^3$

Respuesta: El volumen de la pirámide es **75 centímetros cúbicos**.

5. Ejercicio 5

Enunciado

Calcula el volumen de un cono de 10 centímetros de radio y 24 centímetros de altura. Realiza un dibujo de la situación.

Datos del problema

- Radio de la base: $r = 10$ cm
- Altura del cono: $h = 24$ cm
- Volumen del cono: $V = ?$
- Generatriz del cono: $g = ?$ (dato adicional)

Desarrollo Matemático

Un cono es un cuerpo de revolución generado al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

Paso 1: Cálculo del volumen

El volumen de un cono se calcula mediante la fórmula:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} \quad (27)$$

donde r es el radio de la base y h es la altura del cono.

Sustituyendo los valores:

$$V = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 24}{3} = \frac{\pi \cdot 100 \cdot 24}{3} = \frac{2400\pi}{3} = 800\pi \text{ cm}^3 \quad (28)$$

Calculando el valor numérico (usando $\pi \approx 3,14159$):

$$V = 800\pi \approx 800 \cdot 3,14159 = 2513,27 \text{ cm}^3 \quad (29)$$

Paso 2: Cálculo de la generatriz (dato complementario)

La generatriz g es la distancia desde el vértice del cono hasta cualquier punto del borde de la base circular. Se relaciona con el radio y la altura mediante el Teorema de Pitágoras:

$$g^2 = r^2 + h^2 \quad (30)$$

Sustituyendo:

$$g^2 = 10^2 + 24^2 = 100 + 576 = 676 \quad (31)$$

$$g = \sqrt{676} = 26 \text{ cm} \quad (32)$$

Ilustración del problema

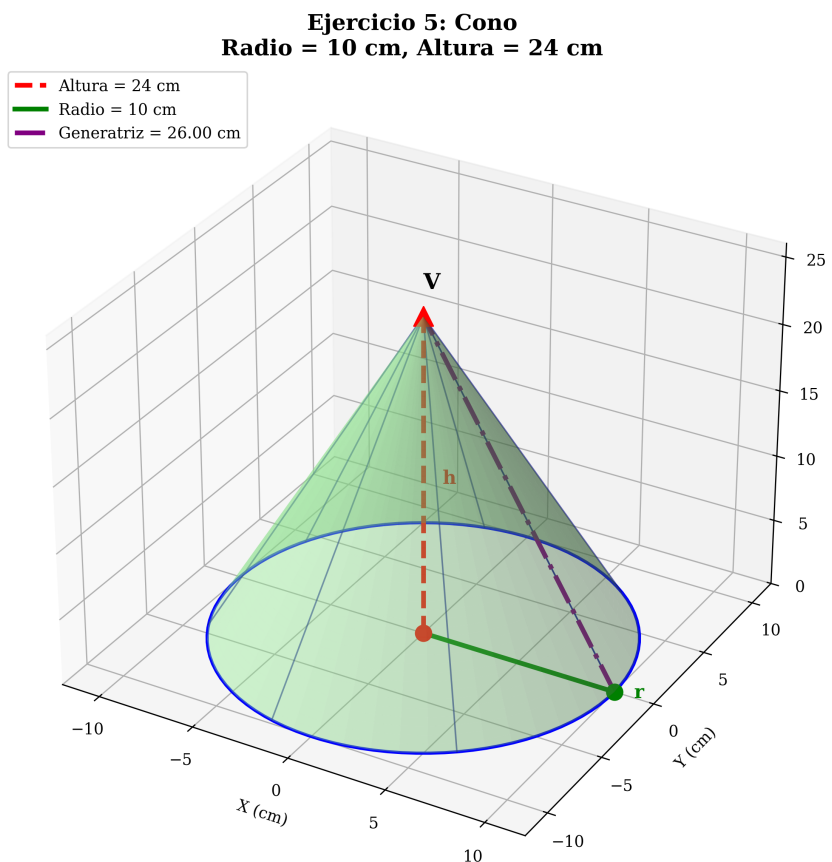


Figura 5: Cono con radio y altura especificados

Resultado Final: $V = 800\pi \text{ cm}^3 \approx 2513,27 \text{ cm}^3$

Respuesta: El volumen del cono es **800π centímetros cúbicos**, lo que equivale aproximadamente a **2513.27 cm^3** .

6. Ejercicio 6

Enunciado

Calcula el área total y el volumen de un cilindro de 30 cm de radio y altura 10 cm.

Datos del problema

- Radio de la base: $r = 30$ cm
- Altura del cilindro: $h = 10$ cm
- Área total: $A_T = ?$
- Volumen: $V = ?$

Desarrollo Matemático

Un cilindro es un cuerpo de revolución generado al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados.

Paso 1: Cálculo del área total

El área total de un cilindro consta de tres partes:

- Dos bases circulares (superior e inferior)
- Una superficie lateral (que al desarrollarse es un rectángulo)

El área de cada base circular es:

$$A_b = \pi r^2 \quad (33)$$

El área lateral es el perímetro de la base multiplicado por la altura:

$$A_l = 2\pi r \cdot h \quad (34)$$

El área total es:

$$A_T = 2A_b + A_l = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r + h) \quad (35)$$

Sustituyendo los valores:

$$A_T = 2\pi \cdot 30 \cdot (30 + 10) = 2\pi \cdot 30 \cdot 40 = 2400\pi \text{ cm}^2 \quad (36)$$

Calculando el valor numérico:

$$A_T = 2400\pi \approx 2400 \cdot 3,14159 = 7539,82 \text{ cm}^2 \quad (37)$$

Paso 2: Cálculo del volumen

El volumen de un cilindro se calcula como el área de la base multiplicada por la altura:

$$V = A_b \cdot h = \pi r^2 h \quad (38)$$

Sustituyendo los valores:

$$V = \pi \cdot 30^2 \cdot 10 = \pi \cdot 900 \cdot 10 = 9000\pi \text{ cm}^3 \quad (39)$$

Calculando el valor numérico:

$$V = 9000\pi \approx 9000 \cdot 3,14159 = 28274,33 \text{ cm}^3 \quad (40)$$

Ilustración del problema

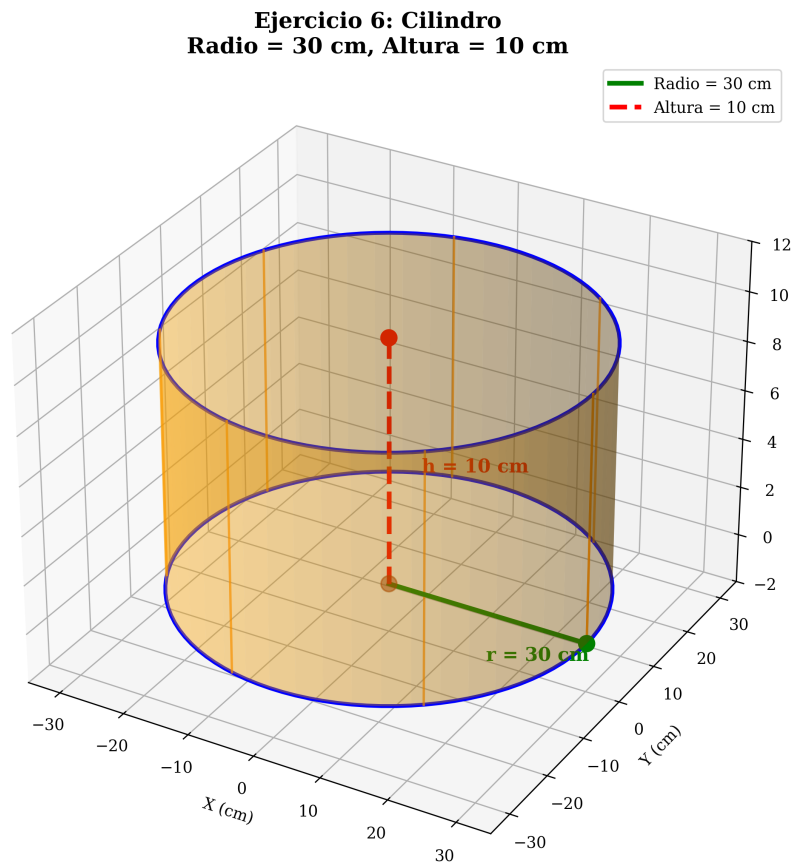


Figura 6: Cilindro con radio y altura especificados

Resultado Final: $A_T = 2400\pi \text{ cm}^2 \approx 7539,82 \text{ cm}^2$, $V = 9000\pi \text{ cm}^3 \approx 28274,33 \text{ cm}^3$

Respuesta: El área total del cilindro es $2400\pi \text{ cm}^2$ (aproximadamente 7539.82 cm^2) y su volumen es $9000\pi \text{ cm}^3$ (aproximadamente 28274.33 cm^3).

7. Ejercicio 7

Enunciado

Calcula el área del siguiente recinto sombreado, sabiendo que la circunferencia exterior mide 10 centímetros de diámetro.

Datos del problema

- Diámetro de la circunferencia exterior: $D = 10$ cm
- Radio de la circunferencia exterior: $R = 5$ cm
- Área del recinto sombreado: $A_s = ?$

Desarrollo Matemático

Analizando la figura del enunciado, observamos que consiste en una circunferencia grande que contiene dos circunferencias más pequeñas de color blanco (no sombreadas). El área sombreada es la región roja.

Paso 1: Análisis geométrico de la figura

De la figura se observa que los dos círculos blancos internos:

- Son tangentes entre sí (se tocan en un punto)
- Son tangentes a la circunferencia exterior
- Están dispuestos verticalmente, uno encima del otro

Para que dos círculos iguales estén contenidos en un círculo mayor de manera que sean tangentes entre sí y a la circunferencia exterior (disposición vertical), el diámetro de cada círculo pequeño debe ser igual al radio del círculo grande.

Por tanto:

- Diámetro de cada círculo blanco: $d = R = 5$ cm
- Radio de cada círculo blanco: $r = \frac{d}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$ cm

Paso 2: Cálculo del área de la circunferencia exterior

$$A_{\text{exterior}} = \pi R^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi \text{ cm}^2 \quad (41)$$

Paso 3: Cálculo del área de cada círculo interno

$$A_{\text{interno}} = \pi r^2 = \pi \cdot (2,5)^2 = \pi \cdot 6,25 = 6,25\pi \text{ cm}^2 \quad (42)$$

Paso 4: Cálculo del área sombreada

El área sombreada es el área del círculo exterior menos las áreas de los dos círculos internos:

$$A_s = A_{\text{exterior}} - 2 \cdot A_{\text{interno}} \quad (43)$$

$$A_s = 25\pi - 2(6,25\pi) = 25\pi - 12,5\pi = 12,5\pi \text{ cm}^2 \quad (44)$$

Calculando el valor numérico:

$$A_s = 12,5\pi \approx 12,5 \cdot 3,14159 = 39,27 \text{ cm}^2 \quad (45)$$

Ilustración del problema

Ejercicio 7: Recinto Sombreado Diámetro exterior = 10 cm

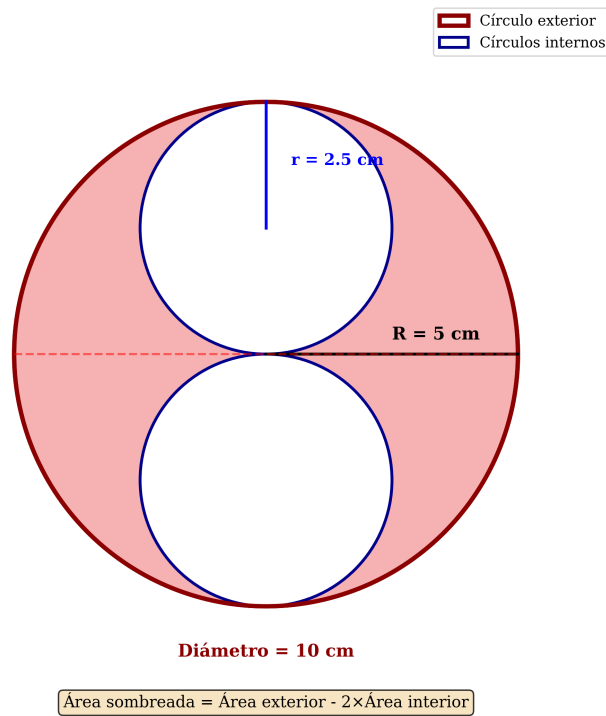


Figura 7: Recinto sombreado con circunferencia exterior y círculos internos

Resultado Final: $A_s = 12,5\pi \text{ cm}^2 \approx 39,27 \text{ cm}^2$

Respuesta: El área del recinto sombreado es **$12,5\pi$ centímetros cuadrados**, lo que equivale aproximadamente a **39.27 cm^2** .

Resumen de Soluciones

Ejercicio	Pregunta	Respuesta
1	Altura del triángulo Área del triángulo	$h = 3 \text{ cm}$ $A = 12 \text{ cm}^2$
2	Perímetro del trapecio Área del trapecio	$P = 64 \text{ cm}$ $A = 228 \text{ cm}^2$
3	Área del pentágono	$A = 600 \text{ cm}^2$
4	Volumen de la pirámide	$V = 75 \text{ cm}^3$
5	Volumen del cono	$V = 800\pi \approx 2513,27 \text{ cm}^3$
6	Área total del cilindro Volumen del cilindro	$A_T = 2400\pi \approx 7539,82 \text{ cm}^2$ $V = 9000\pi \approx 28274,33 \text{ cm}^3$
7	Área sombreada	$A_s = 12,5\pi \approx 39,27 \text{ cm}^2$

Cuadro 1: Tabla resumen de todas las soluciones del examen

Fórmulas Utilizadas

Geometría Plana

- Teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$
- Área del triángulo: $A = \frac{b \cdot h}{2}$
- Área del trapecio: $A = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$
- Perímetro del polígono regular: $P = n \cdot l$
- Área del polígono regular: $A = \frac{P \cdot a}{2}$
- Área del círculo: $A = \pi r^2$

Geometría Espacial

- Volumen de la pirámide: $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$
- Volumen del cono: $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$
- Generatriz del cono: $g = \sqrt{r^2 + h^2}$
- Volumen del cilindro: $V = \pi r^2 h$
- Área lateral del cilindro: $A_l = 2\pi r h$
- Área total del cilindro: $A_T = 2\pi r(r + h)$

¡SUERTE JÓVENES!

Tema 1.- Números racionales e irracionales: los reales

1. Calcula:
a) $4 - 5 \cdot (6 - 8) : (4 - 2) + 3 \cdot 5 =$
b) $(5 - 2 \cdot 4 - 2^3 + 3)^2 - [-2 + 3 \cdot (5 \cdot 2 - 3) + 1] =$
2. Opera y simplifica:
a) $\frac{\frac{7}{5} - \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}}{3 - \frac{1}{4}}$ b) $\frac{\left(\frac{1}{4} - \frac{7}{8}\right) : \frac{2}{3} + 1}{\frac{6}{5} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right)}$ c) $\left(\frac{5}{2} - \frac{5}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}\right) : \left[2 - \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{5}{3}\right)\right]$
3. En una frutería, los $\frac{2}{9}$ de los productos son plátanos, los $\frac{3}{5}$ son naranjas, $\frac{1}{7}$ son manzanas y el resto verdura. Calcula el tanto por ciento de cada tipo de producto.
4. Expresa en forma de fracción los números:
a) $3'24$ b) $3'\overline{24}$ c) $3'02\widehat{4}$ d) $3'\widehat{24}$
5. Escribe:
a) Dos números negativos que no sean racionales.
b) Dos números racionales que no sean enteros
c) Dos números decimales que no se puedan escribir como fracción.
d) Dos números enteros que sean naturales
e) Dos decimales con infinitas cifras, en forma de fracción.
6. Una persona realiza en tren las $\frac{3}{5}$ partes de un viaje, las $\frac{7}{8}$ partes del resto del viaje en autobús y los 10Km finales en coche. ¿Cuántos Km ha recorrido?
7. Indica cuáles de los siguientes números son naturales, enteros, racionales, irracionales y reales: -2 , $\sqrt{25}$, $-\frac{4}{3}$, $\frac{-12}{4}$, $-2,\widehat{3}$, $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}$, $1,313313331\dots$, $\sqrt{10}$.
Ordénalos de menor a mayor

Tema 2.- Potencias y radicales

1. Calcula las siguientes potencias:
 2^{-5} $(-2)^5$ -2^4 $(-3)^{-2}$ 1^{-16} $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ $(-2)^{-3}$
2. Expresa como potencia:
a) $\frac{2^3 \cdot 4^{-2} \cdot (8^2)^{-1}}{16^{-2} \cdot 4}$ b) $\frac{27^3 \cdot 81^{-2} \cdot 3}{(3^2)^5 \cdot (3^{-1})^{-2}}$ c) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^2 \cdot \frac{1}{3}$
3. a) Escribe en notación científica y ordénalos de menor a mayor:
 $4930 \cdot 10^{-5}$
 $0,0051 \cdot 10^{-3}$
 $0,00003 \cdot 10^4$
 $1200 \cdot 10^3$
b) Expresa en notación científica y calcula, dando el resultado en notación científica:
 $0,000008 \cdot 150000$
 $7,77 \cdot 10^9 - 6,5 \cdot 10^7$
 $0,00045 : 0,00009$
 $3,730 \cdot 10^{-2} + 8,5 \cdot 10^{-4}$
c) El diámetro de un glóbulo rojo es de $7 \cdot 10^{-6}$ m. ¿Cuántos glóbulos rojos puestos en fila se necesitan para cubrir una distancia de 1 km?

4. Calcula cuando sea posible:

$$a) \sqrt[6]{64} \quad b) \sqrt[3]{-8} \quad c) \sqrt[4]{625} \quad d) \sqrt{-8} \quad e) \sqrt[4]{\frac{81}{16}} \quad f) \sqrt[5]{-1}$$

Tema 3.- Expresiones algebraicas: Polinomios

- Escribe una expresión algebraica que responda a los siguientes enunciados:
 - La mitad de la suma de os números
 - El doble de la suma de un número más dos.
 - La diferencia entre el doble de un número y el triple de otro.
 - La tercera parte del cuadrado de un número menos la cuarta parte del cubo de otro.
 - La entrada a un cine cuesta x €, y cada bolsa de palomitas cuesta y €. Si 4 amigos van al cine y se compran tres bolsas de palomitas, ¿cuánto se gastan?
 - El perímetro de un rectángulo de base x cuya altura es el triple de la base. ¿Cuál es su área?
- Calcula y luego ordena como un solo polinomio
 - $1 + 2x - x^3 + 4(2 + 3x^2 - x^3) + 4x^3$
 - $6(2x - 4) - 5(x^2 + 3x - 5) + 7(x^2 - 6x + 10)$
 - $-4x^2(5x - 3) - 8x(3x^2 - 1)$
 - $3(2x - 5) - (x - 2)(x + 5)$
- Dados los polinomios $A(x) = 2x + 3$, $B(x) = 1 - x^2$ y $C(x) = x^3 - 2x + 1$. Calcula:
 - $A(x) + B(x) - C(x)$
 - $[A(x)]^2 + B(x)$
 - $B(x) \cdot C(x)$
 - $2C(x) - A(x) \cdot B(x)$
- Desarrolla los siguientes productos notables

a. $(x + 7y)^2$	d. $(-2x^3 - a^2)^2$
b. $(4x^3 + 3y)^2$	e. $(11t + 9z)(11t - 9z)$
c. $(2x - 5y)^2$	f. $(-5x + 7y)(-5x - 7y)$
- Extrae factor común:

a. $32x - 32x^2$	e. $(2+3x)(x^2 - 1) + (2+3x)(x+1)$
b. $9x^3 - 3x^2 + 6x$	f. $(5x-6)^2 - x(5x-6)$
c. $-2 \cdot (a-b) + x \cdot (a-b)$	g. $(x+2)(3x-1) + (2-x)(x+2)$
d. $4a(2x-1) + 3(2x-1)$	h. $x^2(x-1) + x^2(x-2) + x^2(x-3)$
- Expresa como cuadrado de una suma ó de una diferencia:

a. $x^2 - 12x + 36$	d. $9x^2 - 12x + 4$
b. $x^2 + 9 + 6x$	e. $4x^2 + 9 - 12x$
c. $4x^2 + 4x + 1$	f. $x^4 + 4x^2 + 4$
- Expresa como producto de una suma por una diferencia

a. $9x^2 - 25$	d. $25y^2 - 4$
b. $1 - x^2$	e. $81 - 9a^4$
c. $x^4 - 16$	f. $4x^2 - 9$
- Saca factor común y factoriza teniendo en cuenta las igualdades notables:
 - $x^3 + 6x^2 + 9x$
 - $x^4 - 16x^2$
 - $3x^4 - 24x^3 + 48x^2$

Tema 4.- Ecuaciones

Plantea una ecuación para resolver los siguientes problemas

1. En un partido de baloncesto, el base ha encestado 4 puntos menos que el pívot y el alero el doble que el base. El resto de los jugadores han sumado 16 puntos y, en total, el equipo ha metido 76 puntos. ¿Cuántos puntos ha encestado el pívot?
2. Halla la longitud de una pieza de tela sabiendo que después de haber vendido la mitad, la quinta parte y la décima parte quedan diez metros.
3. El mástil de una bandera mide 9'10m. y se parte en dos trozos. El mayor mide 80cm. más que el otro. Calcula la longitud de cada trozo.
4. Reparte 300 euros entre tres personas, de modo que la segunda reciba 16 euros más que la primera, y la tercera 28 euros más que la segunda.
5. Antonio tiene 56 años. ¿Qué edad tiene su hijo Luis, si hace dos años su padre le triplicaba su edad?
6. Dos números suman 15. Si al primero lo dividimos entre 3 y el segundo entre 2, el resultado es el mismo. Halla dichos números.
7. Reparte 105€ entre cinco personas de modo que a cada uno corresponda 5€ más que al anterior.
8. Para vallar una finca rectangular de 750 m² se utilizan 110 metros de cerca. Calcula las dimensiones de la finca.
9. El cuadrado de un número menos su mitad es igual al doble de dicho número. Calcúlalo.
10. En mi casa hay un patio rectangular de perímetro 42m. Halla sus dimensiones sabiendo que es el doble de largo que de ancho.

Resuelve:

- a. $5x - 2 \cdot (3x-7) = -13$
- b. $x + 2 \cdot (x+4) = 1 + 3 \cdot (x+2)$
- c. $4 \cdot (x-3) - 5 \cdot (x+8) = 6 \cdot (x+3)$
- d. $\frac{2x-1}{3} - \frac{x-1}{7} = \frac{x}{2} - 2$
- e. $x+1 - \frac{x+2}{2} - \frac{x+3}{3} = 6 \cdot (1-x)$
- f. $3 \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right) + 4 \cdot (2x-1) = \frac{x+4}{7} - 2 \cdot (x+4)$
- g. $(x+1)^2 - 2 = 2x$
- h. $\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{3-4x}{4} = \frac{5+4x}{4}$

Tema 5.- Sistemas de Ecuaciones

1. Resuelve los siguientes sistemas (dos por sustitución, dos por igualación y dos por reducción)

$$\begin{cases} -3x + y = 0 \\ 4x - 2y = -10 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 3(y+2) = 4 \\ 5(x-1) + 2y = -6 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{y}{2} = 2 \\ x - y = 6 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 6x - 5y = 28 \\ 4x + 9y = -6 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x+2}{3} = \frac{-y}{5} \\ 7x - 4y = -14 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{5} = \frac{2}{3} \\ -3(x+1) - y = -10 + y \end{cases}$$

Plantea un sistema para resolver los siguientes problemas:

2. Las edades de un padre y su hija suman 32 años, y dentro de 8 años la edad del padre será triple de la edad de la hija. ¿Qué edades tienen?
3. A Lucía le gusta pintar. Ha comprado dos pinceles y tres botes de pintura, que han costado 13€. Por su cumpleaños le han regalado dos pinceles y siete botes, que han costado 25€. ¿Cuánto vale cada pincel y cada bote?
4. Con 24€ hemos podido comprar un libro y dos CD's. Si nos hacen una rebaja de 3€ por cada libro y 2€ por cada CD, podemos comprar un CD más. ¿Cuánto cuesta cada producto?
5. Un librero vendió 84 libros a dos precios distintos: unos a 5'4€ y otros a 4'32€ y obtuvo por la venta 378€. ¿Cuántos libros vendió de cada clase?
6. Entre Ángel y Ernesto tienen 45 cromos. Dice Ángel a Ernesto: "Dame cinco cromos y así tendré el doble que tu". ¿Cuántos tiene cada uno?

7. Resuelve:

$$\begin{cases} x = 3y \\ x^2 + y^2 = 40 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 + 3y - 4 = x \\ x + y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + 2xy = 8 \end{cases}$$

8. La edad de Pedro, hoy, es el cuadrado de la de su hija, pero dentro de nueve años será solamente el triple. ¿Cuál es la edad de cada uno hoy?
9. La diagonal de un rectángulo mide 26m. y el perímetro 68m. Calcula sus lados.
10. La diferencia de dos números es 6 y la de sus cuadrados es 144. Calcula esos números.

Tema 6.- Sucesiones y progresiones

1. Dadas las siguientes sucesiones:

a) Escribe los tres siguientes términos I. 1, 4, 9, 16, 25, ...

b) Calcula su término general II. 1, 3, 5, 7, 9, ...

c) Razona si son progresiones aritméticas ó geométricas, indica la diferencia ó la razón III. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$

IV. $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \dots$

2. De las progresiones aritméticas siguientes calcula la diferencia, los términos que faltan y el término general:

a) -8, -5, , 1, 4, , ...

b) 100, , 80, , , 50, ...

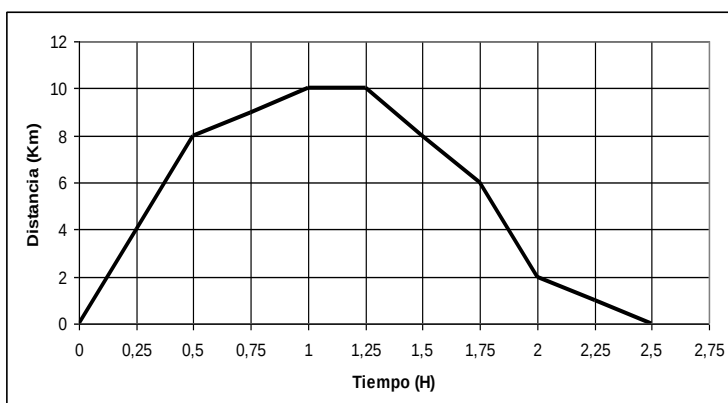
c) $\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \square, \square, \frac{25}{3}, \square, \dots$

3. Calcula el término general y el que se indica en cada una de las progresiones:
 - a) 128, 64, 32, 16, ... a_{10}
 - b) 1250, 250, 50, 10, ... a_8
 - c) 1000, 1500, 2250, 3375, ... a_{11}
4. En un teatro la primera fila dista del escenario 4,5m y la octava 9,75m.
 1. ¿Cuál es la distancia entre dos filas?
 2. ¿A qué distancia del escenario está la fila 17?
5. Halla la suma de los seis primeros términos de la progresión geométrica de la que conocemos $a_1 = 2$ y $a_3 = 32$.
6. ¿Es 146 un término de la progresión 6, 10, 14, 18, 22, ...? ¿Qué lugar ocupa? ¿Pertenece a esta progresión el número 500? ¿Porqué?.
7. En un laboratorio se realiza un cultivo de bacterias cuya población se duplica cada tres días. Se estima que el 14 de Marzo la población era de un millón de bacterias:
 - a. ¿Qué población tenía ese cultivo el 5, el 8 y el 11 de Marzo, respectivamente?
 - b. ¿Cuántas bacterias habrá el 26 de Marzo?
 - c. Si el cultivo deja de crecer cuando se satura (es decir, al llegar a los 500 millones de bacterias) ¿en qué fecha ocurrirá esto?
 - d. ¿Qué día se alcanzará la mitad de la población de saturación?
8. Halla la profundidad de un pozo si por la excavación del primer metro se han pagado 200€, y por la de cada uno de los restantes, se pagan 50€ más que el anterior, siendo el coste total es 3800€.
9. En una progresión aritmética $a_1 = 5$ y $a_5 = 7$. Calcula a_{10} y S_{10} , y a_n
10. En una progresión aritmética el término $a_3 = 5$ y la diferencia $d=1/3$ ¿Cuál será el término a_8 ?
11. Calcula la suma de los 50 primeros múltiplos de 2.
12. Calcula la razón y el término general de una progresión geométrica en la que $a_1=2000$ y $a_3 = 125$
13. Calcula la suma: $32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$
14. Calcula
 - i. El término general de la progresión formada por múltiplos no nulos de 7
 - j. El valor de la suma de los cien primeros términos de dicha progresión
15. En una progresión aritmética el término $a_4 = 21$ y la diferencia $d = -2$.
 - i. Calcula a_1 y el término general
 - ii. Suma los treinta primeros términos
15. De una progresión geométrica en la que $a_1 = 2$ y la razón $r = 1/10$. Calcula la suma de los seis primeros términos.
16. Calcula la suma y el número de términos de una progresión geométrica cuyo primer término es 6, el último 3750 y la razón 5.

Temas 7 y 8.- Características de una función. Función afín.

1. La siguiente gráfica representa un paseo hecho a caballo

- ¿Qué distancia se recorrió la primera media hora? ¿A qué velocidad?
- Cuánto tiempo estuvo parado?
- ¿En qué tramo la velocidad fue mayor?
- ¿Qué distancia se recorrió en total? ¿Cuál fue la velocidad media del trayecto?

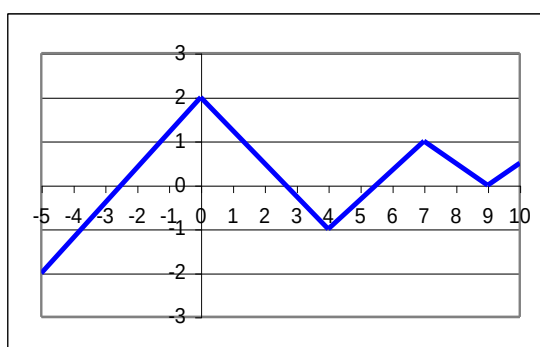


2. Representa las siguientes rectas y escribe su ecuación:

- Pasa por $(-2,3)$ y $(5,4)$
- Pasa por $(3/5, -2)$ y su pendiente es $-3/2$
- Pasa por el punto $(2,2)$ y su ordenada en el origen vale -5 .
- Pasa por $(1,-5)$ y es paralela a $y = 2x$.

3. Dada la función $f(x)$, mediante su gráfica. Se pide:

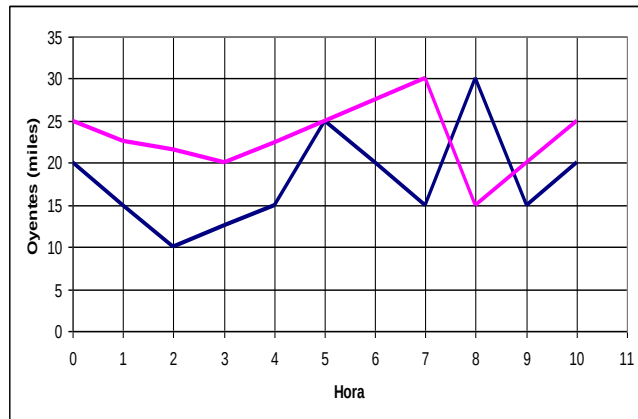
- Dominio y recorrido
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento
- Máximos y mínimos absolutos y relativos
- Cortes con los ejes
- Continuidad



4. El precio de un viaje en tren depende de manera lineal o proporcional de los kilómetros recorridos. Por un trayecto de 140Km. pagamos 17€, y si recorre 360Km. cuesta 39€. Escribe la ecuación de la recta que relaciona los kilómetros recorridos (x) con el precio del billete (y). Representala gráficamente.

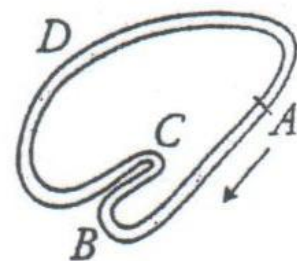
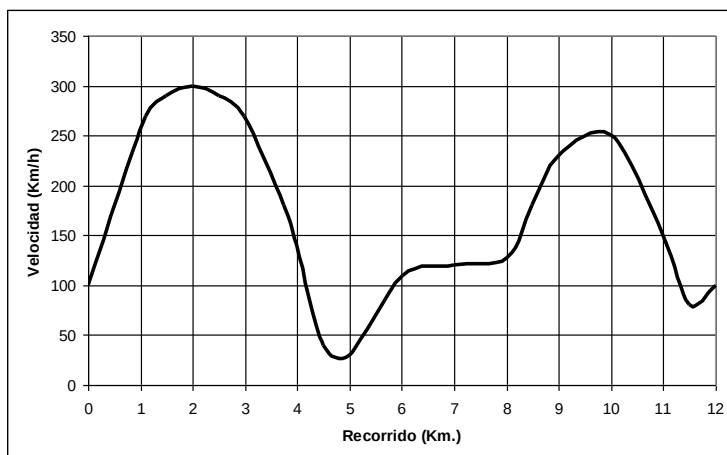
5. En la gráfica aparece el número de oyentes (en miles) de dos emisoras de radio.

- ¿Qué emisora tenía más oyentes a las 5 de la tarde?
- ¿A qué hora era mayor la diferencia de oyentes entre ambas? ¿Y menor?
- Indica cuándo creció y decreció cada emisora.
- Señala los máximos y mínimos de cada una.



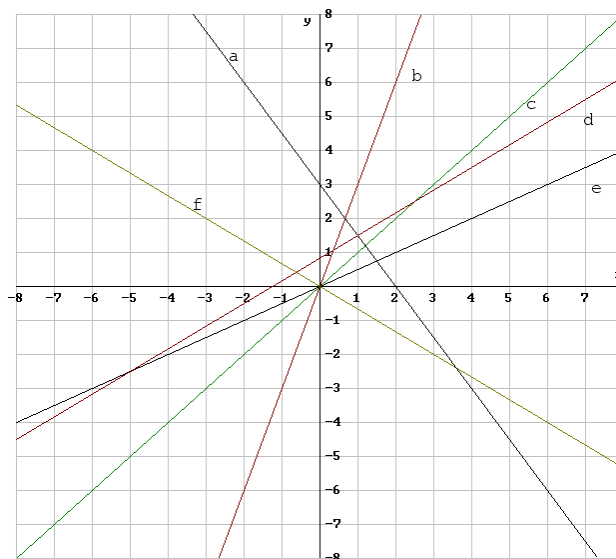
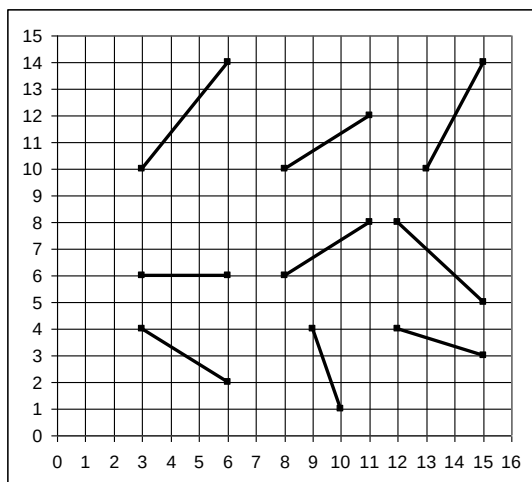
6. Efectúa:

- Representa las siguientes rectas: $r: y = \frac{-3x}{2}$, $s: y = 2x - 3$. Haz una tabla de valores para cada una e indica su pendiente y su ordenada en el origen.
 - De los siguientes puntos $(-12, 19)$, $(-5, -13)$, $(4, -12)$, $(7, -11)$ indica si pertenecen a la recta r , a la s , o a las dos. Hazlo de forma gráfica y de forma analítica (mediante las ecuaciones de las rectas)
7. Esta gráfica describe la velocidad de un vehículo de carreras en cada lugar del circuito adjunto, saliendo de "A". Identifica qué zonas de la gráfica corresponden a los puntos "B", "C" y "D". Di en qué tramos la velocidad es creciente y en cuáles es decreciente. ¿A qué crees que se deben los aumentos y disminuciones de velocidad?



8. Halla la pendiente de cada una de los siguientes segmentos, razonándolo gráficamente:

9. Escribe la ecuación de cada una de las siguientes rectas:



Tema 9.- Teorema de Tales y de Pitágoras

1. En el mismo momento en que una vara de 1,7m de altura proyecta una sombra de 60cm, un edificio arroja otra de 15,4m. ¿Cuál es aproximadamente la altura del edificio?
2. Calcula la medida de los catetos de un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa mide 10cm.
3. Una cometa que vuela a 4,5m de altura está sujeta por una cuerda de 5m. ¿a qué altura volaría si, formando el mismo ángulo con el suelo, la cuerda midiera 3m?
4. Calcula el área de los siguientes polígonos:
 - a) Un triángulo equilátero cuyo lado mide 8cm
 - b) Un triángulo isósceles, cada uno de cuyos lados iguales mide 8cm y cuyo lado desigual mide 11cm.
 - c) Un hexágono regular cuyo lado mide 7cm
5. Calcula la medida del radio y el área de un octógono regular de 20cm de perímetro y cuya apotema mide 3cm.
6. Calcula la medida del lado y el área de un cuadrado inscrito en una circunferencia de 2,5cm de radio.
7. Determina la medida de la diagonal y el área de un cubo cuya arista mide 9cm.
8. Determina la medida de las diagonales de las caras y la de la diagonal del ortoedro cuyas aristas miden $a = 3\text{cm}$, $b = 4\text{cm}$ y $c = 8\text{cm}$
9. Determina la altura de una pirámide hexagonal regular si el perímetro de la base es 24cm y la arista lateral mide 8cm.
10. El lado de la base de una pirámide cuadrangular regular mide 4cm, y la arista lateral 6cm. Calcula:
 - a) La medida del apotema de la base.
 - b) La medida del apotema de la pirámide
 - c) La medida de la altura
 - d) El área total
 - e) El volumen

11. Calcula las áreas lateral y total de una pirámide hexagonal regular en la que la medida de la arista lateral es de 18cm, y la de la apotema de la base, de 3 cm.
12. El radio de un cono recto mide lo mismo que su altura. Sabiendo que el volumen es $9\pi \text{ cm}^3$, halla la medida de la generatriz y el área lateral del cono.
13. Una cometa que vuela a 4,5m de altura está sujeta por una cuerda de 5m. ¿A qué altura volaría si, formando el mismo ángulo con el suelo, la cuerda midiera 3m?
14. Si el área de un cubo es de 54 cm^2 , calcula la medida de su diagonal.
15. Un cable para hacer tirolina debe ir desde una pared rocosa vertical de 35m de altura hasta un peñasco de 8,5m de altura. Si este último se encuentra a 42m de la pared, ¿Qué longitud debe tener el cable?

MATEMÁTICAS 3º ESO

Solucionario Completo

Ejercicios Pendientes

9 Temas — Todos los Ejercicios Resueltos Paso a Paso

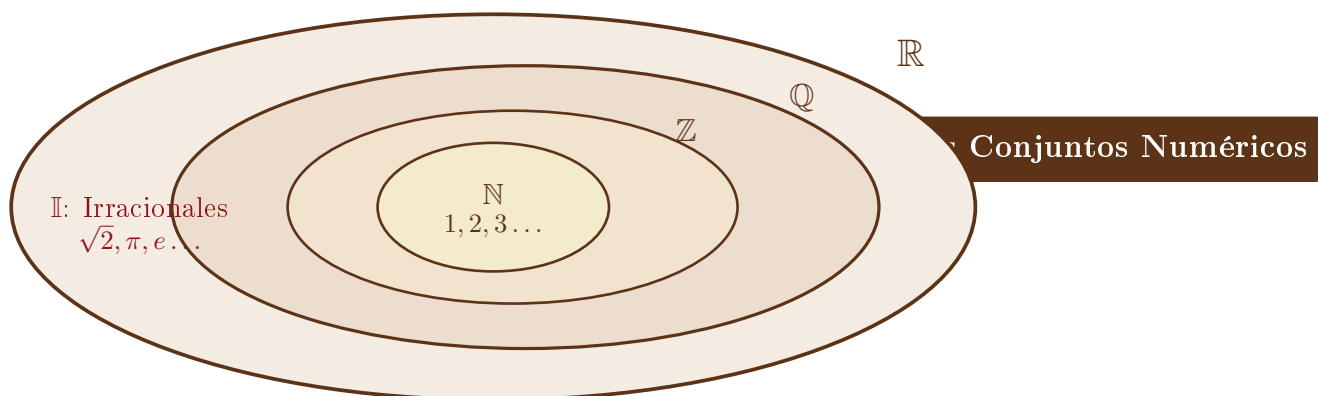
*“Cuando las leyes de las matemáticas
se refieren a la realidad, no son ciertas;
y cuando son ciertas, no se refieren a la realidad.
Las ecuaciones son el lenguaje universal del cosmos.”*
— JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736–1813)

ICE GENERAL — SOLUCIONARIO COMPLETO 3º

9 Temas de Matemáticas — Todos los Ejercicios

#	Tema y Contenido	Pág.
T1	Números racionales e irracionales: cálculos, fracciones, clasificación, problemas	2
T2	Potencias y radicales: cálculo, expresar como potencia, notación científica, raíces	7
T3	Expresiones algebraicas: polinomios, productos notables, factorización, factor común	10
T4	Ecuaciones de primer y segundo grado: planteamiento y resolución de problemas	13
T5	Sistemas de ecuaciones: métodos de sustitución, igualación y reducción, problemas	16
T6	Sucesiones y progresiones: término general, progresión aritmética y geométrica, sumas	19
T7-8	Características de una función y función afín: dominio, recorrido, rectas, pendiente	23
T9	Teorema de Tales y Pitágoras: sombras, triángulos, polígonos, sólidos, áreas y volúmenes	25

TEMA 1 — Números Racionales e Irracionales: Los Reales



T1-Ej.1 — Calcula

a) $4 - 5 \cdot (6 - 8) : (4 - 2) + 3 \cdot 5$

b) $(5 - 2 \cdot 4 - 2^3 + 3)^2 - [-2 + 3 \cdot (5 \cdot 2 - 3) + 1]$

Apartado a)

Paso 1: Paréntesis interiores: $6 - 8 = -2$ y $4 - 2 = 2$.

Paso 2: División: $5 \cdot (-2) : 2 = -10 : 2 = -5$.

Paso 3: Operación completa:

$$4 - (-5) + 3 \cdot 5 = 4 + 5 + 15 = \mathbf{24}$$

24

Apartado b)

Paso 1: Calculamos el primer paréntesis grande $(5 - 2 \cdot 4 - 2^3 + 3)$:

$$5 - 8 - 8 + 3 = -8$$

Paso 2: Elevamos al cuadrado: $(-8)^2 = 64$.

Paso 3: Calculamos el corchete $[-2 + 3 \cdot (5 \cdot 2 - 3) + 1]$:

$$5 \cdot 2 - 3 = 7; \quad 3 \cdot 7 = 21; \quad -2 + 21 + 1 = 20$$

Paso 4: Resultado final:

$$64 - 20 = \mathbf{44}$$

44

T1-Ej.2 — Opera y simplifica

$$a) \frac{\frac{7}{5} - \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}}{3 - \frac{1}{4}} \quad b) \frac{\left(\frac{1}{4} - \frac{7}{8}\right) : \frac{2}{3} + 1}{\frac{6}{5} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right)} \quad c) \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}\right) : \left[2 - \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{5}{3}\right)\right]$$

Apartado a)

Numerador: $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$. $\frac{7}{5} - \frac{3}{10} = \frac{14}{10} - \frac{3}{10} = \frac{11}{10}$

Denominador: $3 - \frac{1}{4} = \frac{12}{4} - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$

División: $\frac{11/10}{11/4} = \frac{11}{10} \cdot \frac{4}{11} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

$$\frac{2}{5}$$

Apartado b)

Numerador: $\frac{1}{4} - \frac{7}{8} = \frac{2}{8} - \frac{7}{8} = -\frac{5}{8}$. $-\frac{5}{8} : \frac{2}{3} = -\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{15}{16}$. $-\frac{15}{16} + 1 = \frac{1}{16}$

Denominador: $\frac{2}{3} - \frac{3}{4} = \frac{8}{12} - \frac{9}{12} = -\frac{1}{12}$. $\frac{6}{5} \cdot \left(-\frac{1}{12}\right) = -\frac{6}{60} = -\frac{1}{10}$

Resultado: $\frac{1/16}{-1/10} = \frac{1}{16} \cdot (-10) = -\frac{10}{16} = -\frac{5}{8}$

$$-\frac{5}{8}$$

Apartado c)

Paso 1: Paréntesis exterior del divisor: $1 + \frac{5}{3} = \frac{8}{3}$. $\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$. $2 - \frac{4}{3} = \frac{6}{3} - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

Paso 2: Primer paréntesis: $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$. $\text{mcm}(2,6,6)=6$: $\frac{15}{6} - \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = \frac{11}{6}$ **Paso 3:**

División final: $\frac{11}{6} : \frac{2}{3} = \frac{11}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{33}{12} = \frac{11}{4}$

$$\frac{11}{4}$$

T1-Ej.3 — Frutería (tantos por ciento)

$\frac{2}{9}$ plátanos, $\frac{3}{5}$ naranjas, $\frac{1}{7}$ manzanas, resto verdura.

Solución

Convertimos a decimales y porcentajes:

$$\frac{2}{9} \approx 0,2222 = \mathbf{22,22\%} \text{ (plátanos)} \quad \frac{3}{5} = 0,6 = \mathbf{60\%} \text{ (naranjas)} \quad \frac{1}{7} \approx 0,1429 = \mathbf{14,29\%} \text{ (manzanas)}$$

$$\text{Comprobación: } \frac{2}{9} + \frac{3}{5} + \frac{1}{7} = \frac{70 + 189 + 45}{315} = \frac{304}{315}$$

$$\text{Resto (verdura): } 1 - \frac{304}{315} = \frac{11}{315} \approx 0,0349 = \mathbf{3,49\%}$$

Plátanos: 22,22% Naranjas: 60% Manzanas: 14,29% Verdura: 3,49%

T1-Ej.4 — Fracciones generatrices

a) $3,24$ b) $3,2\bar{4}$ c) $3,0\bar{2}4$ d) $3,\bar{2}4$

Solución completa

$$\text{a) } 3,24 \text{ (decimal exacto): } 3,24 = \frac{324}{100} = \frac{81}{25}$$

b) $3,2\bar{4}$ (periódico mixto, 1 no periódica, periodo 4):

$$x = 3,2444\dots; \quad 10x = 32,444\dots; \quad 100x = 324,444\dots$$

$$100x - 10x = 292 \Rightarrow 90x = 292 \Rightarrow x = \frac{292}{90} = \frac{146}{45}$$

c) $3,0\bar{2}4$ (periódico mixto, 1 no periódica, periodo 24):

$$x = 3,0242424\dots; \quad 10x = 30,2424\dots; \quad 1000x = 3024,2424\dots$$

$$1000x - 10x = 2994 \Rightarrow 990x = 2994 \Rightarrow x = \frac{2994}{990} = \frac{499}{165}$$

d) $3,\bar{2}4$ (periódico puro, periodo 24):

$$x = 3,242424\dots; \quad 100x = 324,2424\dots$$

$$100x - x = 321 \Rightarrow 99x = 321 \Rightarrow x = \frac{321}{99} = \frac{107}{33}$$

$$\text{a) } \frac{81}{25} \quad \text{b) } \frac{146}{45} \quad \text{c) } \frac{499}{165} \quad \text{d) } \frac{107}{33}$$

T1-Ej.5 — Escribe ejemplos de cada tipo

Solución

- a) Dos números negativos NO racionales (irracionales negativos): $-\sqrt{2}$ y $-\pi$
- b) Dos racionales NO enteros: $\frac{1}{2}$ y $-\frac{3}{7}$
- c) Dos decimales que NO se puedan escribir como fracción (irracionales): $\sqrt{3} = 1,7320508\dots$ y $e = 2,71828\dots$
- d) Dos enteros que sean naturales: 5 y 100
- e) Dos decimales con infinitas cifras en forma de fracción: $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$ y $\frac{2}{7} = 0,\overline{285714}$

T1-Ej.6 — Viaje en tren, autobús y coche

Una persona recorre $\frac{3}{5}$ en tren, $\frac{7}{8}$ del resto en autobús y los últimos 10 Km en coche. ¿Cuántos Km ha recorrido?

Solución

Sea D la distancia total.

Paso 1: Tren: $\frac{3}{5}D$. Resto tras tren: $D - \frac{3}{5}D = \frac{2}{5}D$ **Paso 2:** Autobús: $\frac{7}{8} \cdot \frac{2}{5}D = \frac{14}{40}D = \frac{7}{20}D$ **Paso 3:** Coche: $\frac{2}{5}D - \frac{7}{20}D = \frac{8}{20}D - \frac{7}{20}D = \frac{1}{20}D$ **Paso 4:** Los 10 Km son $\frac{1}{20}D$:

$$\frac{1}{20}D = 10 \Rightarrow D = 200 \text{ Km}$$

La distancia total del viaje es **200 Km**.

T1-Ej.7 — Clasificación y ordenación

-2 , $\sqrt{25}$, $-\frac{4}{3}$, $\frac{-12}{4}$, $-2,\overline{3}$, $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}$, $1,313313331\dots$, $\sqrt{10}$

Clasificación

Número	Valor	Tipo
-2	-2	Entero negativo $\in \mathbb{Z}$
$\sqrt{25}$	5	Natural $\in \mathbb{N}$
$-\frac{4}{3}$	$-1,\overline{3}$	Racional $\in \mathbb{Q}$
$-\frac{12}{4}$	-3	Entero negativo $\in \mathbb{Z}$
$-2,\overline{3}$	$-2,333\dots$	Racional $\in \mathbb{Q}$
$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}$	$\frac{3}{2} = 1,5$	Racional $\in \mathbb{Q}$
$1,313313331\dots$	$1,313313331\dots$	Irracional $\in \mathbb{I}$ (no periódico)
$\sqrt{10}$	$3,1622\dots$	Irracional $\in \mathbb{I}$

Orden de menor a mayor: $\frac{-12}{4} = -3 < -2,\overline{3} < -2 < -\frac{4}{3} < \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = 1,5 < 1,3133\dots < \sqrt{10} < \sqrt{25} = 5$



TEMA 2 — Potencias y Radicales

Leyes de los Exponentes

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

T2-Ej.1 — Calcula las siguientes potencias

$$2^{-5} \quad (-2)^5 \quad -2^4 \quad (-3)^{-2} \quad 1^{-16} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \quad (-2)^{-3}$$

Solución

$$\begin{aligned} 2^{-5} &= \frac{1}{32} & (-2)^5 &= (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32 & -2^4 &= -(2^4) = -16 \\ (-3)^{-2} &= \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9} & 1^{-16} &= \frac{1}{1^{16}} = 1 & \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} &= 2^3 = 8 & (-2)^{-3} &= \frac{1}{(-2)^3} = \\ & & & & & & & \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{32} \quad -32 \quad -16 \quad \frac{1}{9} \quad 1 \quad 8 \quad -\frac{1}{8}$$

T2-Ej.2 — Expresa como potencia

$$a) \frac{2^3 \cdot 4^{-2} \cdot (8^2)^{-1}}{16^{-2} \cdot 4} \quad b) \frac{27^3 \cdot 81^{-2} \cdot 3}{(3^2)^5 \cdot (3^{-1})^{-2}} \quad c) \left(\frac{4}{3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^2 \cdot \frac{1}{3}$$

Solución detallada

a) Convertimos todo a base 2: $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$:

$$\frac{2^3 \cdot (2^2)^{-2} \cdot ((2^3)^2)^{-1}}{(2^4)^{-2} \cdot 2^2} = \frac{2^3 \cdot 2^{-4} \cdot 2^{-6}}{2^{-8} \cdot 2^2} = \frac{2^{3-4-6}}{2^{-8+2}} = \frac{2^{-7}}{2^{-6}} = 2^{-7-(-6)} = 2^{-1}$$

$$2^{-1} = \frac{1}{2}$$

b) Base 3: $27 = 3^3$, $81 = 3^4$:

$$\frac{3^9 \cdot 3^{-8} \cdot 3^1}{3^{10} \cdot 3^2} = \frac{3^{9-8+1}}{3^{12}} = \frac{3^2}{3^{12}} = 3^{2-12} = 3^{-10}$$

$$3^{-10}$$

c) $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{81} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 81 \cdot 3} = \frac{1}{81} = 3^{-4}$

$$3^{-4}$$

T2-Ej.3a — Notación científica y ordenación

$$4930 \cdot 10^{-5} \quad 0,0051 \cdot 10^{-3} \quad 0,00003 \cdot 10^4 \quad 1200 \cdot 10^3$$

Solución

$$4930 \cdot 10^{-5} = 4,930 \cdot 10^3 \cdot 10^{-5} = 4,930 \cdot 10^{-2}$$

$$0,0051 \cdot 10^{-3} = 5,1 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} = 5,1 \cdot 10^{-6}$$

$$0,00003 \cdot 10^4 = 3 \cdot 10^{-5} \cdot 10^4 = 3 \cdot 10^{-1} = 0,3$$

$$1200 \cdot 10^3 = 1,2 \cdot 10^3 \cdot 10^3 = 1,2 \cdot 10^6$$

Orden creciente: $5,1 \cdot 10^{-6} < 4,930 \cdot 10^{-2} < 3 \cdot 10^{-1} < 1,2 \cdot 10^6$

T2-Ej.3b — Calcula en notación científica

Solución

$$0,000008 \cdot 150000 = 8 \cdot 10^{-6} \cdot 1,5 \cdot 10^5 = 12 \cdot 10^{-1} = \mathbf{1,2 \cdot 10^0 = 1,2}$$

$$7,77 \cdot 10^9 - 6,5 \cdot 10^7 = 7,77 \cdot 10^9 - 0,065 \cdot 10^9 = (7,77 - 0,065) \cdot 10^9 = \mathbf{7,705 \cdot 10^9}$$

$$0,00045 : 0,00009 = \frac{4,5 \cdot 10^{-4}}{9 \cdot 10^{-5}} = 0,5 \cdot 10^1 = \mathbf{5}$$

$$3,730 \cdot 10^{-2} + 8,5 \cdot 10^{-4} = 3,730 \cdot 10^{-2} + 0,085 \cdot 10^{-2} = 3,815 \cdot 10^{-2} = \mathbf{3,815 \cdot 10^{-2}}$$

T2-Ej.3c — Glóbulos rojos

Diámetro de un glóbulo rojo: $7 \cdot 10^{-6}$ m. ¿Cuántos para cubrir 1 km?

Solución

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m} = 10^3 \text{ m}$$

$$\text{Número de glóbulos} = \frac{10^3}{7 \cdot 10^{-6}} = \frac{10^3}{7} \cdot 10^6 = \frac{10^9}{7} \approx \mathbf{1,43 \cdot 10^8} \text{ glóbulos rojos.}$$

T2-Ej.4 — Calcula raíces cuando sea posible

$$a) \sqrt[6]{64} \quad b) \sqrt[3]{-8} \quad c) \sqrt[4]{625} \quad d) \sqrt{-8} \quad e) \sqrt[4]{\frac{81}{16}} \quad f) \sqrt[5]{-1}$$

Solución

$$a) \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$$

$$b) \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2 \text{ (índice impar: posible con negativos)}$$

$$c) \sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5$$

$$d) \sqrt{-8}: \text{NO existe en } \mathbb{R} \text{ (índice par con radicando negativo)}$$

$$e) \sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{3}{2}$$

$$f) \sqrt[5]{-1} = \sqrt[5]{(-1)^5} = -1 \text{ (índice impar: posible)}$$

$$2 \quad -2 \quad 5 \quad \text{No existe} \quad \frac{3}{2} \quad -1$$

TEMA 3 — Expresiones Algebraicas: Polinomios

T3-Ej.1 — Escribe expresiones algebraicas

Solución

- a) La mitad de la suma de dos números x e y : $\frac{x+y}{2}$
b) El doble de la suma de un número más dos: $2(x+2)$
c) Diferencia entre el doble de x y el triple de y : $2x-3y$
d) La tercera parte del cuadrado de x menos la cuarta parte del cubo de y : $\frac{x^2}{3} - \frac{y^3}{4}$
e) 4 entradas a $x\text{€}$ y 3 bolsas a $y\text{€}$: $4x+3y$ euros
f) Perímetro del rectángulo (base x , altura $3x$): $P=2(x+3x)=8x$
Área: $A=x\cdot 3x=3x^2$

T3-Ej.2 — Calcula y ordena como un solo polinomio

Solución completa

- a) $1+2x-x^3+4(2+3x^2-x^3)+4x^3$
 $=1+2x-x^3+8+12x^2-4x^3+4x^3$
 $=(1+8)+(2x)+(12x^2)+(-x^3-4x^3+4x^3)$
 $=\mathbf{9+2x+12x^2-x^3}$
- b) $6(2x-4)-5(x^2+3x-5)+7(x^2-6x+10)$
 $=12x-24-5x^2-15x+25+7x^2-42x+70$
 $=(-5x^2+7x^2)+(12x-15x-42x)+(-24+25+70)$
 $=\mathbf{2x^2-45x+71}$
- c) $-4x^2(5x-3)-8x(3x^2-1)$
 $=-20x^3+12x^2-24x^3+8x$
 $=\mathbf{-44x^3+12x^2+8x}$
- d) $3(2x-5)-(x-2)(x+5)$
 $=6x-15-(x^2+5x-2x-10)$
 $=6x-15-x^2-3x+10$
 $=\mathbf{-x^2+3x-5}$

T3-Ej.3 — Con $A(x)=2x+3$, $B(x)=1-x^2$, $C(x)=x^3-2x+1$

Solución

- a) $A + B - C = (2x + 3) + (1 - x^2) - (x^3 - 2x + 1)$
 $= 2x + 3 + 1 - x^2 - x^3 + 2x - 1 = -x^3 - x^2 + 4x + 3$
- b) $[A(x)]^2 + B(x) = (2x + 3)^2 + (1 - x^2)$
 $= 4x^2 + 12x + 9 + 1 - x^2 = 3x^2 + 12x + 10$
- c) $B(x) \cdot C(x) = (1 - x^2)(x^3 - 2x + 1)$
 $= x^3 - 2x + 1 - x^5 + 2x^3 - x^2 = -x^5 + 3x^3 - x^2 - 2x + 1$
- d) $2C(x) - A(x) \cdot B(x) = 2(x^3 - 2x + 1) - (2x + 3)(1 - x^2)$
 $(2x + 3)(1 - x^2) = 2x - 2x^3 + 3 - 3x^2$
 $2C = 2x^3 - 4x + 2$
 $2x^3 - 4x + 2 - (2x - 2x^3 + 3 - 3x^2) = 2x^3 - 4x + 2 - 2x + 2x^3 - 3 + 3x^2$
 $= 4x^3 + 3x^2 - 6x - 1$

T3-Ej.4 — Productos notables

Solución — $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

- a) $(x + 7y)^2 = x^2 + 14xy + 49y^2$
- b) $(4x^3 + 3y)^2 = 16x^6 + 24x^3y + 9y^2$
- c) $(2x - 5y)^2 = 4x^2 - 20xy + 25y^2$
- d) $(-2x^3 - a^2)^2 = 4x^6 + 4x^3a^2 + a^4$
- e) $(11t + 9z)(11t - 9z) = (11t)^2 - (9z)^2 = 121t^2 - 81z^2$
- f) $(-5x + 7y)(-5x - 7y) = (-5x)^2 - (7y)^2 = 25x^2 - 49y^2$

T3-Ej.5 — Factor común

Solución

- a) $32x - 32x^2 = 32x(1 - x)$
- b) $9x^3 - 3x^2 + 6x = 3x(3x^2 - x + 2)$
- c) $-2(a - b) + x(a - b) = (a - b)(x - 2)$
- d) $4a(2x - 1) + 3(2x - 1) = (2x - 1)(4a + 3)$
- e) $(2 + 3x)(x^2 - 1) + (2 + 3x)(x + 1) = (2 + 3x)[(x^2 - 1) + (x + 1)] = (2 + 3x)(x - 1 + 1)(x + 1)$
 $= (2 + 3x) \cdot x \cdot (x + 1)$ [usando $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$]
- f) $(5x - 6)^2 - x(5x - 6) = (5x - 6)[(5x - 6) - x] = (5x - 6)(4x - 6) = 2(5x - 6)(2x - 3)$
- g) $(x + 2)(3x - 1) + (2 - x)(x + 2) = (x + 2)[(3x - 1) + (2 - x)] = (x + 2)(2x + 1)$
- h) $x^2(x - 1) + x^2(x - 2) + x^2(x - 3) = x^2[(x - 1) + (x - 2) + (x - 3)] = x^2(3x - 6) = 3x^2(x - 2)$

T3-Ej.6 — Cuadrado de suma o diferencia

Solución

- a) $x^2 - 12x + 36 = (x - 6)^2$ [pues $2 \cdot x \cdot 6 = 12x$ y $6^2 = 36$]
b) $x^2 + 9 + 6x = x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$
c) $4x^2 + 4x + 1 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 = (2x + 1)^2$
d) $9x^2 - 12x + 4 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 = (3x - 2)^2$
e) $4x^2 + 9 - 12x = 4x^2 - 12x + 9 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = (2x - 3)^2$
f) $x^4 + 4x^2 + 4 = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 2 + 2^2 = (x^2 + 2)^2$

T3-Ej.7 — Diferencia de cuadrados

Solución: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

- a) $9x^2 - 25 = (3x)^2 - 5^2 = (3x + 5)(3x - 5)$
b) $1 - x^2 = (1 + x)(1 - x)$
c) $x^4 - 16 = (x^2)^2 - 4^2 = (x^2 + 4)(x^2 - 4) = (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$
d) $25y^2 - 4 = (5y)^2 - 2^2 = (5y + 2)(5y - 2)$
e) $81 - 9a^4 = 9(9 - a^4) = 9(3 + a^2)(3 - a^2)$
f) $4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x + 3)(2x - 3)$

T3-Ej.8 — Factor común e igualdades notables

Solución

- a) $x^3 + 6x^2 + 9x = x(x^2 + 6x + 9) = x(x + 3)^2$
b) $x^4 - 16x^2 = x^2(x^2 - 16) = x^2(x + 4)(x - 4)$
c) $3x^4 - 24x^3 + 48x^2 = 3x^2(x^2 - 8x + 16) = 3x^2(x - 4)^2$



TEMA 4 — Ecuaciones

$$\text{Fórmula Cuadrática: } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si $\Delta > 0$: dos soluciones reales distintas Si $\Delta = 0$: solución doble $x = \frac{-b}{2a}$ Si $\Delta < 0$: sin solución real

T4 — Problemas: Plantea y resuelve

Prob.1 — Baloncesto

Sea p = puntos del pívot. Base = $p - 4$. Alero = $2(p - 4)$.

$$p + (p - 4) + 2(p - 4) + 16 = 76$$

$$p + p - 4 + 2p - 8 + 16 = 76$$

$$4p + 4 = 76 \Rightarrow 4p = 72 \Rightarrow \mathbf{p = 18} \text{ puntos el pívot. (Base: 14, Alero: 28)}$$

Prob.2 — Pieza de tela

Sea x = longitud total. Vendida: $\frac{x}{2} + \frac{x}{5} + \frac{x}{10}$. Resto = 10 m.

$$x - \frac{x}{2} - \frac{x}{5} - \frac{x}{10} = 10$$

$$\text{mcm}(2,5,10)=10: \frac{10x - 5x - 2x - x}{10} = 10 \Rightarrow \frac{2x}{10} = 10 \Rightarrow x = \mathbf{50} \text{ m.}$$

Prob.3 — Mástil de bandera (9,10 m)

Sea x = trozo menor, $x + 0,80$ = trozo mayor.

$$x + (x + 0,80) = 9,10 \Rightarrow 2x = 8,30 \Rightarrow x = 4,15 \text{ m. Mayor: } \mathbf{4,95} \text{ m. Menor: } \mathbf{4,15} \text{ m.}$$

Prob.4 — Repartir 300€ entre tres personas

Sea x = primera persona. Segunda: $x + 16$. Tercera: $x + 16 + 28 = x + 44$.

$$x + (x + 16) + (x + 44) = 300 \Rightarrow 3x + 60 = 300 \Rightarrow x = 80$$

Primera: **80€**, Segunda: **96€**, Tercera: **124€**.

Prob.5 — Edad de Luis

Hoy: Antonio=56, Luis= x . Hace 2 años: Antonio=54, Luis= $x - 2$.

$$54 = 3(x - 2) \Rightarrow 54 = 3x - 6 \Rightarrow 3x = 60 \Rightarrow x = \mathbf{20} \text{ años.}$$

Prob.6 — Dos números que suman 15

Sean x e y : $x + y = 15$ y $\frac{x}{3} = \frac{y}{2}$, luego $2x = 3y \Rightarrow x = \frac{3y}{2}$.

$$\frac{3y}{2} + y = 15 \Rightarrow \frac{5y}{2} = 15 \Rightarrow y = 6, x = 9.$$

Prob.7 — Repartir 105€ entre 5 personas

Sean $x, x + 5, x + 10, x + 15, x + 20$.

$$5x + 50 = 105 \Rightarrow 5x = 55 \Rightarrow x = 11.$$

Cantidades: **11, 16, 21, 26, 31€**.

Prob.8 — Finca rectangular (750 m^2 , 110 m de cerca)

Sea $a =$ anchura, $b = \frac{110}{2} - a = 55 - a =$ longitud.

$$a(55 - a) = 750 \Rightarrow 55a - a^2 = 750 \Rightarrow a^2 - 55a + 750 = 0$$

$$\Delta = 55^2 - 4 \cdot 750 = 3025 - 3000 = 25$$

$$a = \frac{55 \pm 5}{2}: a_1 = 30 \text{ m}, a_2 = 25 \text{ m. Dimensiones: } \mathbf{30 \times 25 \text{ m.}}$$

Prob.9 — Cuadrado menos la mitad

$$x^2 - \frac{x}{2} = 2x \Rightarrow x^2 - \frac{5x}{2} = 0 \Rightarrow x \left(x - \frac{5}{2} \right) = 0$$

$$x = 0 \text{ (trivial) o } x = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}.$$

Prob.10 — Patio rectangular (perím. 42 m)

Sea $a =$ ancho, $b = 2a =$ largo. $2(a + 2a) = 42 \Rightarrow 6a = 42 \Rightarrow a = 7 \text{ m}, b = 14 \text{ m}.$

Dimensiones: **7 × 14 m**.

T4 — Resuelve las ecuaciones

Solución completa

a) $5x - 2(3x - 7) = -13 \Rightarrow 5x - 6x + 14 = -13 \Rightarrow -x = -27 \Rightarrow \mathbf{x = 27}$

b) $x + 2(x + 4) = 1 + 3(x + 2) \Rightarrow 3x + 8 = 3x + 7 \Rightarrow 0 = -1$: Sin solución (incompatible)

c) $4(x - 3) - 5(x + 8) = 6(x + 3) \Rightarrow 4x - 12 - 5x - 40 = 6x + 18 \Rightarrow -x - 52 = 6x + 18$
 $-7x = 70 \Rightarrow \mathbf{x = -10}$

d) $\frac{2x - 1}{3} - \frac{x - 1}{7} = \frac{x}{2} - 2$ (mcm=42)

$$14(2x - 1) - 6(x - 1) = 21x - 84$$

$$28x - 14 - 6x + 6 = 21x - 84$$

$$22x - 8 = 21x - 84 \Rightarrow \mathbf{x = -76}$$

e) $x + 1 - \frac{x + 2}{2} - \frac{x + 3}{3} = 6(1 - x)$ (mcm=6)

$$6x + 6 - 3(x + 2) - 2(x + 3) = 36(1 - x)$$

$$6x + 6 - 3x - 6 - 2x - 6 = 36 - 36x$$

$$x - 6 = 36 - 36x \Rightarrow 37x = 42 \Rightarrow \mathbf{x = \frac{42}{37}}$$

f) $3\left(x - \frac{2}{3}\right) + 4(2x - 1) = \frac{x + 4}{7} - 2(x + 4)$

$$3x - 2 + 8x - 4 = \frac{x + 4}{7} - 2x - 8$$

$$11x - 6 = \frac{x + 4}{7} - 2x - 8$$
 (mcm=7)

$$7(11x - 6) = (x + 4) + 7(-2x - 8)$$

$$77x - 42 = x + 4 - 14x - 56$$

$$77x - 42 = -13x - 52 \Rightarrow 90x = -10 \Rightarrow \mathbf{x = -\frac{1}{9}}$$

g) $(x + 1)^2 - 2 = 2x \Rightarrow x^2 + 2x + 1 - 2 = 2x \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1, \mathbf{x = 1}$ o $\mathbf{x = -1}$

h) $\frac{(x - 1)^2}{2} - \frac{3 - 4x}{4} = \frac{5 + 4x}{4}$ (mcm=4)

$$2(x - 1)^2 - (3 - 4x) = 5 + 4x$$

$$2(x^2 - 2x + 1) - 3 + 4x = 5 + 4x$$

$$2x^2 - 4x + 2 - 3 + 4x = 5 + 4x$$

$$2x^2 - 1 = 5 + 4x \Rightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow \mathbf{x = 3}$$
 o $\mathbf{x = -1}$



TEMA 5 — Sistemas de Ecuaciones

T5-Ej.1 — Resuelve los sistemas

Sistema 1: Por sustitución

$$\begin{cases} -3x + y = 0 \\ 4x - 2y = -10 \end{cases} \quad \text{De (1): } y = 3x. \text{ Sustituimos en (2): } 4x - 6x = -10 \Rightarrow -2x = -10 \Rightarrow x = 5, y = 15.$$

$x = 5, y = 15$

Sistema 2: Por sustitución

$$\begin{cases} x - 3(y + 2) = 4 \\ 5(x - 1) + 2y = -6 \end{cases} \quad (1): x = 4 + 3y + 6 = 3y + 10. \text{ En (2): } 5(3y + 9) + 2y = -6 \Rightarrow 15y + 45 + 2y = -6 \Rightarrow 17y = -51 \Rightarrow y = -3, x = 1.$$

$x = 1, y = -3$

Sistema 3: Por igualación

$$\begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{y}{2} = 2 \\ x - y = 6 \end{cases} \quad \text{De (1): } x - 2y = 8. \text{ De (2): } x = y + 6. \text{ Igualamos: } y + 6 - 2y = 8 \Rightarrow -y = 2 \Rightarrow y = -2, x = 4.$$

$x = 4, y = -2$

Sistema 4: Por igualación

$$\begin{cases} 6x - 5y = 28 \\ 4x + 9y = -6 \end{cases} \quad \text{De (1): } x = \frac{28 + 5y}{6}. \text{ De (2): } x = \frac{-6 - 9y}{4}. \text{ Igualamos: } \frac{28 + 5y}{6} = \frac{-6 - 9y}{4} \Rightarrow 4(28 + 5y) = 6(-6 - 9y) \Rightarrow 112 + 20y = -36 - 54y \Rightarrow 74y = -148 \Rightarrow y = -2, x = 3.$$

$x = 3, y = -2$

Sistema 5: Por reducción

$$\begin{cases} 7x - 4y = -14 \\ \frac{x - y}{2} = \frac{3 - 5}{2} \end{cases} \quad \text{Sistema: } 7x - 4y = -14 \text{ y } x - y = -1 \text{ (multiplicamos (2) por } -4\text{: } -4x + 4y = 4). \text{ Sumamos: } 3x = -10 \Rightarrow x = -\frac{10}{3}. \text{ En (2): } y = x + 1 = -\frac{7}{3}.$$

$x = -\frac{10}{3}, y = -\frac{7}{3}$

Sistema 6: Por reducción

$$\begin{cases} x + \frac{2}{3} - y = -\frac{y}{5} \\ 3x - y = 5 \end{cases} \quad \text{Sistema simplificado: } 5x - 5y + \frac{10}{3} = -y \Rightarrow 5x - 4y = -\frac{10}{3}.$$

Reducción con (2):

De (2): $y = 3x - 5$. En (1): $5x - 4(3x - 5) = -\frac{10}{3} \Rightarrow 5x - 12x + 20 = -\frac{10}{3} \Rightarrow -7x = -\frac{70}{3} \Rightarrow x = \frac{10}{3}, y = 5$.

$$x = \frac{10}{3}, y = 5$$

T5 — Problemas con sistemas

Prob.2 — Edades padre e hija

$$\begin{cases} p + h = 32 \\ p + 8 = 3(h + 8) \end{cases} \quad \text{De (2): } p + 8 = 3h + 24 \Rightarrow p = 3h + 16. \text{ En (1): } 4h + 16 = 32 \Rightarrow h = 4, p = 28.$$

Hija: 4 años; Padre: 28 años.

Prob.3 — Pinceles y botes (Lucía)

$$\begin{cases} 2p + 3b = 13 \\ 2p + 7b = 25 \end{cases} \quad \text{Restamos: } 4b = 12 \Rightarrow b = 3\text{€}. \text{ En (1): } 2p = 13 - 9 = 4 \Rightarrow p = 2\text{€}.$$

Pincel: 2€; Bote: 3€.

Prob.4 — Libro y CD's

$$\begin{cases} l + 2c = 24 \\ (l - 3) + 3c = 24 \end{cases} \quad (\text{con rebaja compramos un CD más por 24€})$$

De (2): $l + 3c = 27$. De (1): $l + 2c = 24$. Restamos: $c = 3\text{€}, l = 18\text{€}$.

Libro: 18€; CD: 3€.

Prob.5 — Librero (84 libros)

$$\begin{cases} x + y = 84 \\ 5,4x + 4,32y = 378 \end{cases} \quad \text{De (1): } x = 84 - y. \text{ En (2): } 5,4(84 - y) + 4,32y = 378$$

$$453,6 - 5,4y + 4,32y = 378 \Rightarrow -1,08y = -75,6 \Rightarrow y = 70, x = 14.$$

14 libros a 5,4€ y 70 libros a 4,32€.

Prob.6 — Ángel y Ernesto (cromos)

$$\begin{cases} A + E = 45 \\ A + 5 = 2(E - 5) \end{cases} \quad A + 5 = 2E - 10 \Rightarrow A = 2E - 15. \text{ En (1): } 3E - 15 = 45 \Rightarrow E = 20, A = 25.$$

Ángel: 25 cromos; Ernesto: 20 cromos.



TEMA 6 — Sucesiones y Progresiones

T6-Ej.1 — Cuatro sucesiones

Solución

I. 1, 4, 9, 16, 25, ... Tres siguientes: 36, 49, 64. Término general: $a_n = n^2$.
Diferencias: 3, 5, 7, 9, ... no constantes $\Rightarrow$ **no P.A.** Razones no constantes $\Rightarrow$ **no P.G.**

II. 1, 3, 5, 7, 9, ... Tres siguientes: 11, 13, 15. Término general: $a_n = 2n - 1$.
 $d = 2$ constante $\Rightarrow$ **P.A. con $d = 2$**

III. 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ... Tres siguientes: $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$. Término general: $a_n = \frac{1}{n}$.
Razones: $\frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$, $\frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$: no constantes. Diferencias tampoco. **Ni P.A. ni P.G.**

IV. $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{16}$, ... Tres siguientes: $\frac{3}{32}$, $\frac{3}{64}$, $\frac{3}{128}$. Término general: $a_n = \frac{3}{2^n}$.
Razón: $r = \frac{1}{2}$ constante $\Rightarrow$ **P.G. con $r = \frac{1}{2}$**

T6-Ej.2 — P.A. incompletas

a) $-8, -5, \square, 1, 4, \square, \dots$ b) $100, \square, 80, \square, \square, 50, \dots$ c) $\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \square, \square, \frac{25}{3}, \square, \dots$

Solución

a) $d = -5 - (-8) = 3$. Hueco: $-5 + 3 = -2$, luego $4 + 3 = 7$. Secuencia: $-8, -5, -2, 1, 4, 7, \dots$

$$a_n = -8 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 11$$

b) Conocidos: $a_1 = 100$, $a_3 = 80$, $a_6 = 50$.

$$a_3 = a_1 + 2d = 80 \Rightarrow d = -10. \text{ Secuencia: } 100, 90, 80, 70, 60, 50, \dots \quad a_n = 110 - 10n$$

c) $d = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = 2$. Secuencia: $\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{13}{3}, \frac{19}{3}, \frac{25}{3}, \frac{31}{3}, \dots$ $a_n = \frac{1}{3} + (n-1) \cdot 2 = 2n - \frac{5}{3} = \frac{6n-5}{3}$

T6-Ej.3 — P.G.: término general y término indicado

Solución

a) $128, 64, 32, 16, \dots$ $r = \frac{64}{128} = \frac{1}{2}$. $a_n = 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{128}{2^{n-1}} = \frac{2^7}{2^{n-1}} = 2^{8-n}$

$$a_{10} = 2^{8-10} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

b) $1250, 250, 50, 10, \dots$ $r = \frac{250}{1250} = \frac{1}{5}$. $a_n = 1250 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{1250}{5^{n-1}}$

$$a_8 = \frac{1250}{5^7} = \frac{1250}{78125} = \frac{2}{125}$$

c) $1000, 1500, 2250, 3375, \dots$ $r = \frac{1500}{1000} = \frac{3}{2}$. $a_n = 1000 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

$$a_{11} = 1000 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{10} = 1000 \cdot \frac{59049}{1024} \approx 57\,665,04$$

Ej.4 — Teatro (P.A.)

$$a_1 = 4,5 \text{ m}, a_8 = 9,75 \text{ m}.$$

1. $d = \frac{a_8 - a_1}{8 - 1} = \frac{9,75 - 4,5}{7} = \frac{5,25}{7} = \mathbf{0,75}$ m entre filas.

2. $a_{17} = 4,5 + (17 - 1) \cdot 0,75 = 4,5 + 12 = \mathbf{16,5}$ m.

Ej.5 — P.G. con $a_1 = 2$ y $a_3 = 32$

$$a_3 = a_1 \cdot r^2 = 2r^2 = 32 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = 4.$$

$$a_1 = 2, a_2 = 8, a_3 = 32, a_4 = 128, a_5 = 512, a_6 = 2048.$$

$$S_6 = a_1 \cdot \frac{r^6 - 1}{r - 1} = 2 \cdot \frac{4^6 - 1}{3} = 2 \cdot \frac{4095}{3} = \mathbf{2730}$$

Ej.6 — ¿Es 146 término de 6, 10, 14, 18, ...?

P.A. con $a_1 = 6$, $d = 4$. $a_n = 6 + (n - 1) \cdot 4 = 4n + 2$.

$$4n + 2 = 146 \Rightarrow n = 36. \text{ Sí, es el término } \mathbf{36}.$$

$$4n + 2 = 500 \Rightarrow n = 124,5 \text{ (no entero). } \mathbf{500 \text{ NO pertenece a la progresión.}}$$

Ej.7 — Bacterias (P.G. con $r = 2$ cada 3 días)

14 de Marzo: $a_1 = 10^6$ bact. La población se duplica cada 3 días, luego $r = 2$.

a) 11 Mar (-3 días, es decir $n = 0$ si 14=tiempo 1): 5 Mar $= \frac{10^6}{2^3} = 125\,000$; 8 Mar $=$

$$\frac{10^6}{2^2} = 250\,000; \text{ 11 Mar } = \frac{10^6}{2} = 500\,000$$

b) 26 Mar = 14 Mar + 12 días = 4 períodos: $10^6 \cdot 2^4 = \mathbf{16 \cdot 10^6}$ bact.

c) $10^6 \cdot 2^k = 500 \cdot 10^6 \Rightarrow 2^k = 500 \Rightarrow k = \log_2 500 \approx 8,96$ períodos ≈ 27 días. Fecha aprox.: $14 + 27 = \mathbf{10 \text{ de Abril.}}$

d) Mitad de $500 \cdot 10^6 = 250 \cdot 10^6$: $2^k = 250 \Rightarrow k \approx 7,97$ períodos ≈ 24 días. Aprox. $\mathbf{7 \text{ de Abril.}}$

Ej.8 — Profundidad del pozo (P.A.)

$$a_1 = 200\text{€}, d = 50\text{€}. S_n = \frac{n(2 \cdot 200 + (n-1) \cdot 50)}{2} = 3800.$$

$$n(400 + 50n - 50) = 7600 \Rightarrow 50n^2 + 350n - 7600 = 0 \Rightarrow n^2 + 7n - 152 = 0$$

$$n = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 608}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{657}}{2} \approx \frac{-7 + 25,63}{2} \approx 9,3 \text{ Redondeando: } n = 8 \text{ metros}$$

(verificamos: $S_8 = \frac{8(400+7 \cdot 50)}{2} = \frac{8 \cdot 750}{2} = 3000 \neq 3800$).

Probamos $n = 9$: $S_9 = \frac{9(400+400)}{2} = \frac{9 \cdot 750}{2} \dots$ recalculamos:

$$S_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2} = \frac{n(400 + 50(n-1))}{2} = 3800 \Rightarrow n(400 + 50n - 50) = 7600$$

$$n(350 + 50n) = 7600 \Rightarrow 50n^2 + 350n - 7600 = 0 \Rightarrow n^2 + 7n - 152 = 0$$

Discriminante: $49 + 608 = 657$. $n = \frac{-7 + \sqrt{657}}{2} \approx \frac{-7 + 25,63}{2} \approx 9,3$. **El pozo tiene 9 metros.**

Ej.9 — P.A. $a_1 = 5$, $a_5 = 7$

$$d = \frac{a_5 - a_1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}. \quad a_n = 5 + (n-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{n+9}{2}$$

$$a_{10} = \frac{19}{2} = 9,5. \quad S_{10} = \frac{10(a_1 + a_{10})}{2} = \frac{10(5 + 9,5)}{2} = \frac{10 \cdot 14,5}{2} = \mathbf{72,5}$$

Ej.10 — P.A. $a_3 = 5$, $d = 1/3$. Calcula a_8

$$a_8 = a_3 + (8-3) \cdot d = 5 + 5 \cdot \frac{1}{3} = 5 + \frac{5}{3} = \frac{20}{3}$$

Ej.11 — Suma de los 50 primeros múltiplos de 2

P.A.: 2, 4, 6, ..., 100. $a_1 = 2$, $d = 2$, $a_{50} = 100$.

$$S_{50} = \frac{50(2 + 100)}{2} = \frac{50 \cdot 102}{2} = \mathbf{2550}$$

Ej.12 — P.G. $a_1 = 2000$, $a_3 = 125$. Calcula r y a_n

$$a_3 = a_1 \cdot r^2 \Rightarrow 125 = 2000r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow r = \frac{1}{4}.$$

$$a_n = 2000 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{2000}{4^{n-1}}$$

Ej.13 — Suma $32 + 16 + 8 + \dots + 1/8$

P.G.: $a_1 = 32$, $r = \frac{1}{2}$. Último término = $\frac{1}{8} = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{256} =$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^8 \Rightarrow n = 9.$$

$$S_9 = 32 \cdot \frac{1 - (1/2)^9}{1 - 1/2} = 32 \cdot \frac{511/512}{1/2} = 32 \cdot \frac{511}{256} = \frac{511}{8} = \mathbf{63,875}$$

Ej.14 — Múltiplos no nulos de 7

i. P.A.: 7, 14, 21, ... $a_1 = 7$, $d = 7$. $a_n = 7n$

ii. $S_{100} = \frac{100(a_1 + a_{100})}{2} = \frac{100(7 + 700)}{2} = \frac{100 \cdot 707}{2} = \mathbf{35350}$

Ej.15 — P.A. $a_4 = 21$, $d = -2$

i. $a_4 = a_1 + 3d \Rightarrow 21 = a_1 - 6 \Rightarrow a_1 = 27$. $a_n = 27 + (n - 1) \cdot (-2) = 29 - 2n$

ii. $a_{30} = 29 - 60 = -31$. $S_{30} = \frac{30(27 + (-31))}{2} = \frac{30 \cdot (-4)}{2} = \mathbf{-60}$

Ej.15b — P.G. $a_1 = 2$, $r = 1/10$. Suma 6 términos

$$S_6 = 2 \cdot \frac{1 - (1/10)^6}{1 - 1/10} = 2 \cdot \frac{1 - 0,000001}{0,9} = \frac{2 \cdot 0,999999}{0,9} \approx \mathbf{2,222220}$$

Ej.16 — P.G. $a_1 = 6$, $a_n = 3750$, $r = 5$

$$3750 = 6 \cdot 5^{n-1} \Rightarrow 5^{n-1} = 625 = 5^4 \Rightarrow n - 1 = 4 \Rightarrow n = 5.$$

$$S_5 = 6 \cdot \frac{5^5 - 1}{5 - 1} = 6 \cdot \frac{3124}{4} = 6 \cdot 781 = \mathbf{4686}$$



TEMAS 7 y 8 — Funciones y Función Afín

T7/8-Ej.1 — Paseo a caballo (lectura de gráfica)

Solución

- a) Primera media hora (0 a 0,5 h): recorrió aproximadamente **4 Km** a una velocidad de $4/0,5 = 8$ Km/h.
- b) Estuvo parado en el tramo donde la gráfica es horizontal (la distancia no cambia): aprox. entre $t = 0,75$ y $t = 1$ h, es decir **0,25 horas (15 minutos)**.
- c) La velocidad es mayor donde la pendiente de la gráfica es más pronunciada: en el tramo entre $t = 1$ y $t = 1,5$ h, donde pasa de ≈ 4 a ≈ 10 Km ($\frac{6}{0,5} = 12$ Km/h).
- d) Distancia total ≈ 10 Km en $\approx 2,5$ h. Velocidad media $= 10/2,5 = 4$ Km/h.

T7/8-Ej.2 — Ecuaciones de rectas

Solución

- a) Pasa por $(-2, 3)$ y $(5, 4)$:

$$m = \frac{4-3}{5-(-2)} = \frac{1}{7}. \quad y-3 = \frac{1}{7}(x+2) \Rightarrow y = \frac{x}{7} + \frac{23}{7}$$

- b) Pasa por $(3/5, -2)$ con pendiente $m = -3/2$:

$$y - (-2) = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{3}{5}\right) \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{10} - 2 = -\frac{3}{2}x - \frac{11}{10}$$

- c) Pasa por $(2, 2)$ con ordenada en el origen $b = -5$:

$$m = \frac{y-b}{x} = \frac{2-(-5)}{2} = \frac{7}{2}. \quad y = \frac{7}{2}x - 5$$

- d) Pasa por $(1, -5)$ paralela a $y = 2x$ ($m = 2$):

$$y - (-5) = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 7$$

T7/8-Ej.4 — Precio del tren (función lineal)

Solución

Sistema con puntos $(140, 17)$ y $(360, 39)$:

$$m = \frac{39-17}{360-140} = \frac{22}{220} = 0,1$$

$$y - 17 = 0,1(x - 140) \Rightarrow y = 0,1x - 14 + 17$$

$$y = 0,1x + 3$$

(Precio base 3€ más 0,1€/Km)

Ej.6a — Rectas $r : y = -3x/2$ y $s : y = 2x - 3$

Tabla de valores:

x	$r : y = -3x/2$
-2	3
0	0
2	-3
4	-6

Pendiente $m = -3/2$, $b = 0$

x	$s : y = 2x - 3$
0	-3
1	-1
2	1
3	3

Pendiente $m = 2$, $b = -3$

Ej.6b — Puntos en las rectas

$(-12, 19)$: $r : -3(-12)/2 = 18 \neq 19$. $s : 2(-12) - 3 = -27 \neq 19$. **Ninguna.**

$(-5, -13)$: $r : -3(-5)/2 = 7,5 \neq -13$. $s : 2(-5) - 3 = -13 = \checkmark$. **Pertenece a s .**

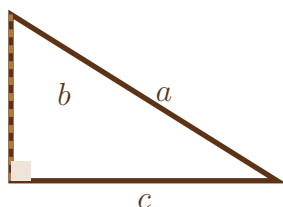
$(4, -12)$: $r : -3(4)/2 = -6 \neq -12$. $s : 2(4) - 3 = 5 \neq -12$. **Ninguna.**

$(7, -11)$: $r : -3(7)/2 = -10,5 \neq -11$. $s : 2(7) - 3 = 11 \neq -11$. **Ninguna.**



TEMA 9 — Teorema de Tales y de Pitágoras

Teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$ (hipo²=cat²+cat²)



$$\Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

T9-Ej.1 — Teorema de Tales (sombras)

Vara de 1,7 m proyecta sombra de 60 cm. Edificio proyecta 15,4 m.

Solución

Por semejanza (Tales): $\frac{h_{\text{edificio}}}{h_{\text{vara}}} = \frac{s_{\text{edificio}}}{s_{\text{vara}}}$

$$\frac{H}{1,7} = \frac{15,4}{0,60} \Rightarrow H = 1,7 \cdot \frac{15,4}{0,6} = 1,7 \cdot 25,6 \approx \mathbf{43,6 \text{ m}}$$

T9-Ej.2 — Triángulo rectángulo isósceles, hipotenusa 10 cm

Solución

Los dos catetos son iguales: $a^2 + a^2 = 10^2 \Rightarrow 2a^2 = 100 \Rightarrow a^2 = 50 \Rightarrow a = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx \mathbf{7,07 \text{ cm}}$

T9-Ej.3 — Cometa (4,5 m altura, 5 m cuerda)

Solución (Tales aplicado a triángulos semejantes)

El ángulo con el suelo es el mismo. Por tanto los triángulos son semejantes:

$$\frac{h_1}{L_1} = \frac{h_2}{L_2} \Rightarrow \frac{4,5}{5} = \frac{h_2}{3} \Rightarrow h_2 = 3 \cdot \frac{4,5}{5} = \frac{13,5}{5} = \mathbf{2,7 \text{ m}}$$

T9-Ej.4 — Áreas de polígonos

Solución

a) **Triángulo equilátero** lado $l = 8$ cm:

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}. \quad A = \frac{8 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3} \approx \mathbf{27,71 \text{ cm}^2}$$

b) **Triángulo isósceles** (lados iguales 8 cm, base 11 cm):

$$h = \sqrt{8^2 - (11/2)^2} = \sqrt{64 - 30,25} = \sqrt{33,75} \approx 5,81 \text{ cm}$$

$$A = \frac{11 \cdot 5,81}{2} \approx \mathbf{31,95 \text{ cm}^2}$$

c) **Hexágono regular** lado 7 cm:

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot l^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 49 = \frac{147\sqrt{3}}{2} \approx \mathbf{127,31 \text{ cm}^2}$$

T9-Ej.5 — Octógono regular ($P = 20$ cm, $a = 3$ cm)

Solución

Lado: $l = P/8 = 20/8 = 2,5$ cm.

Radio (circunradio): usando $r^2 = a^2 + (l/2)^2 = 9 + 1,5625 = 10,5625 \Rightarrow r \approx \mathbf{3,25 \text{ cm}}$

$$\text{Área: } A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{20 \cdot 3}{2} = \mathbf{30 \text{ cm}^2}$$

T9-Ej.6 — Cuadrado inscrito en circunferencia $r = 2,5$ cm

Solución

La diagonal del cuadrado = diámetro = $2r = 5$ cm.

$$d = l\sqrt{2} \Rightarrow l = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3,54 \text{ cm.}$$

$$A = l^2 = \frac{25}{2} = \mathbf{12,5 \text{ cm}^2}$$

T9-Ej.7 — Cubo arista 9 cm

Solución

Diagonal del cubo: $d = a\sqrt{3} = 9\sqrt{3} \approx \mathbf{15,59 \text{ cm}}$

$$\text{Área total: } A = 6a^2 = 6 \cdot 81 = \mathbf{486 \text{ cm}^2}$$

T9-Ej.8 — Ortoedro $a = 3$, $b = 4$, $c = 8$ cm

Solución

Diagonales de las caras:

$$d_{ab} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm} \quad d_{ac} = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73} \approx 8,54 \text{ cm} \quad d_{bc} = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \approx 8,94 \text{ cm}$$

$$\text{Diagonal del ortoedro: } d = \sqrt{3^2 + 4^2 + 8^2} = \sqrt{9 + 16 + 64} = \sqrt{89} \approx \mathbf{9,43 \text{ cm}}$$

T9-Ej.9 — Pirámide hexagonal ($P_{base} = 24 \text{ cm}$, arista lateral 8 cm)

Solución

Lado del hexágono: $l = 24/6 = 4 \text{ cm}$. Apotema de la base: $a_b = l\sqrt{3}/2 = 2\sqrt{3} \text{ cm}$.

Apotema lateral (de la pirámide): $a_p = \sqrt{h^2 + a_b^2}$. Arista lateral: $l' = 8 \text{ cm}$.

$l'^2 = h^2 + (l/2\ldots)^2 + a_b^2\ldots$ Usamos la apotema lateral directamente:

$$a_p = \sqrt{l'^2 - l^2/4} = \sqrt{64 - 4} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15} \text{ cm}.$$

$$h = \sqrt{l'^2 - a_b^2} = \sqrt{64 - 12} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \approx \mathbf{7,21 \text{ cm}}$$

T9-Ej.10 — Pirámide cuadrangular (base 4 cm , arista lateral 6 cm)

Solución completa

a) Apotema de la base: $a_b = l/2 = 4/2 = \mathbf{2 \text{ cm}}$

b) Apotema de la pirámide: $a_p = \sqrt{l'^2 - a_b^2} = \sqrt{36 - 4} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \approx \mathbf{5,66 \text{ cm}}$

c) Altura: $h = \sqrt{l'^2 - (a_b\sqrt{2})^2}$ [la semidiagonal de la base es $a_b\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$]

$$h = \sqrt{36 - 8} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \approx \mathbf{5,29 \text{ cm}}$$

d) Área total = Área base + Área lateral

$$A_b = 4^2 = 16 \text{ cm}^2. \quad A_l = 4 \cdot \frac{4 \cdot a_p}{2} = 4 \cdot \frac{4 \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 32\sqrt{2} \approx 45,25 \text{ cm}^2$$

$$A_T = 16 + 32\sqrt{2} \approx \mathbf{61,25 \text{ cm}^2}$$

e) Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 2\sqrt{7} = \frac{32\sqrt{7}}{3} \approx \mathbf{28,22 \text{ cm}^3}$

T9-Ej.11 — Pirámide hexagonal regular ($l' = 18 \text{ cm}$, $a_b = 3 \text{ cm}$)

Solución

Lado del hexágono: $a_b = l\sqrt{3}/2 = 3 \Rightarrow l = 2\sqrt{3} \approx 3,46$ cm.

Perímetro base: $P_b = 6l = 12\sqrt{3}$ cm.

Apotema lateral: $a_p = \sqrt{l^2 - a_b^2} = \sqrt{324 - 9} = \sqrt{315} = 3\sqrt{35} \approx 17,75$ cm.

Área lateral: $A_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2} = \frac{12\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{35}}{2} = 18\sqrt{105} \approx 184,4$ cm²

Área total: $A_T = A_l + A_b = 18\sqrt{105} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot (2\sqrt{3})^2 = 18\sqrt{105} + 18 \approx 202,4$ cm²

T9-Ej.12 — Cono ($r = h$, $V = 9\pi$ cm³)

Solución

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^3 = 9\pi \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$ cm = h .

Generatriz: $g = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2} \approx 4,24$ cm.

Área lateral: $A_l = \pi r g = \pi \cdot 3 \cdot 3\sqrt{2} = 9\pi\sqrt{2} \approx 40,0$ cm²

T9-Ej.14 — Cubo de área 54 cm²

Solución

$6a^2 = 54 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$ cm. Diagonal: $d = a\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \approx 5,2$ cm.

T9-Ej.15 — Cable de tirolina

Pared de 35 m, peñasco de 8,5 m, a 42 m de distancia horizontal.

Solución

Diferencia de alturas: $35 - 8,5 = 26,5$ m.

Distancia horizontal: 42 m.

Longitud del cable: $L = \sqrt{26,5^2 + 42^2} = \sqrt{702,25 + 1764} = \sqrt{2466,25} \approx 49,66$ m



Resumen Final — Todos los Temas

Fórmulas Clave por Tema

T1-T2: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $a^{-n} = 1/a^n$

T3: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

T4: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

T5: Sustitución, igualación, reducción

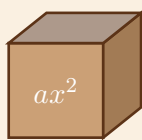
T6 P.A.: $a_n = a_1 + (n - 1)d$; $S_n =$

$$\frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

T6 P.G.: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$; $S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$

T7-8: $y = mx + b$; $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

T9: $a^2 = b^2 + c^2$; Tales: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$



*“Cuando uno no sabe lo que es una cosa,
a menudo la llama con el
nombre de algo diferente.*

*Las matemáticas llaman igualdad a
— **JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736-1813)**
lo que los demás llaman justicia.*

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$y = mx + b$$

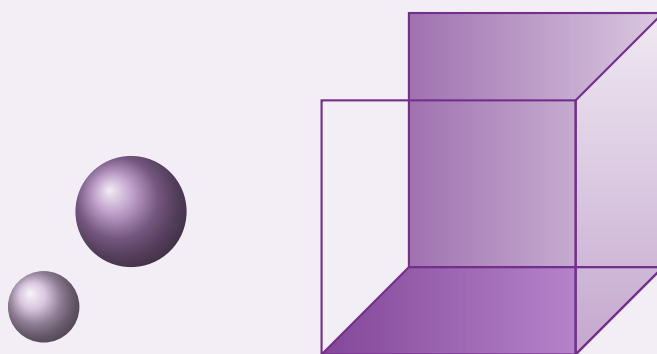
$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Solucionario Completo — Matemáticas Pendientes 3º ESO — IES Tovar, Castilla y León

Resolución rigurosa del examen

Ejercicios de Matemáticas pendientes – 3º ESO

Documento profesional en L^AT_EX con desarrollo completo y verificación



Elemento 3D representativo

“Mientras no sepas por qué has de hacer una cosa, no la hagas.”
– **Joseph-Louis Lagrange**

Índice

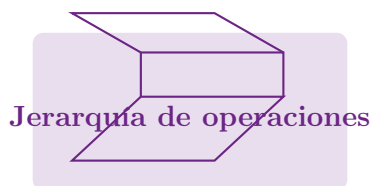
1. Tema 1. Números racionales e irracionales	4
1.1. Ejercicio 1	4
1.2. Ejercicio 2	4
1.3. Ejercicio 3	4
1.4. Ejercicio 4	5
1.5. Ejercicio 5	5
1.6. Ejercicio 6	5
1.7. Ejercicio 7	6
2. Tema 2. Potencias y radicales	6
2.1. Ejercicio 1	6
2.2. Ejercicio 2	6
2.3. Ejercicio 3	7
2.4. Ejercicio 4	7
3. Tema 3. Expresiones algebraicas y polinomios	8
3.1. Ejercicio 1	8
3.2. Ejercicio 2	8
3.3. Ejercicio 3	8
3.4. Ejercicio 4	9
3.5. Ejercicio 5	9
3.6. Ejercicio 6	9
3.7. Ejercicio 7	10
3.8. Ejercicio 8	10
4. Tema 4. Ecuaciones	10
4.1. Ejercicio 1	10
4.2. Ejercicio 2	10
4.3. Ejercicio 3	11
4.4. Ejercicio 4	11
4.5. Ejercicio 5	11
4.6. Ejercicio 6	11
4.7. Ejercicio 7	12
4.8. Ejercicio 8	12

4.9. Ejercicio 9	12
4.10. Ejercicio 10	12
4.11. Ejercicio 11 (resolver ecuaciones)	13
5. Tema 5. Sistemas de ecuaciones	13
5.1. Ejercicio 1 (seis sistemas)	13
5.2. Ejercicio 2	14
5.3. Ejercicio 3	14
5.4. Ejercicio 4	14
5.5. Ejercicio 5	14
5.6. Ejercicio 6	15
5.7. Ejercicio 7 (tres sistemas)	15
5.8. Ejercicio 8	15
5.9. Ejercicio 9	15
5.10. Ejercicio 10	16
6. Tema 6. Sucesiones y progresiones	16
6.1. Ejercicio 1	16
6.2. Ejercicio 2	16
6.3. Ejercicio 3	17
6.4. Ejercicio 4	17
6.5. Ejercicio 5	17
6.6. Ejercicio 6	18
6.7. Ejercicio 7	18
6.8. Ejercicio 8	18
6.9. Ejercicio 9	19
6.10. Ejercicio 10	19
6.11. Ejercicio 11	19
6.12. Ejercicio 12	19
6.13. Ejercicio 13	20
6.14. Ejercicio 14	20
6.15. Ejercicio 15	20
6.16. Ejercicio 16	20
6.17. Ejercicio 17	21
7. Temas 7 y 8. Funciones y función afín	21

7.1. Ejercicio 1	21
7.2. Ejercicio 2	21
7.3. Ejercicio 3	22
7.4. Ejercicio 4	22
7.5. Ejercicio 5	23
7.6. Ejercicio 6	23
7.7. Ejercicio 7	23
7.8. Ejercicio 8	24
7.9. Ejercicio 9	24
8. Tema 9. Teorema de Tales y de Pitágoras	24
8.1. Ejercicio 1	24
8.2. Ejercicio 2	25
8.3. Ejercicio 3	25
8.4. Ejercicio 4	25
8.5. Ejercicio 5	25
8.6. Ejercicio 6	26
8.7. Ejercicio 7	26
8.8. Ejercicio 8	26
8.9. Ejercicio 9	27
8.10. Ejercicio 10	27
8.11. Ejercicio 11	27
8.12. Ejercicio 12	28
8.13. Ejercicio 13	28
8.14. Ejercicio 14	29
8.15. Ejercicio 15	29
Comprobación de índice e hipervínculos	29

1. Tema 1. Números racionales e irracionales

1.1. Ejercicio 1



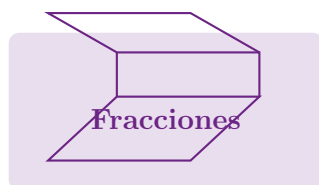
a)

$$4^3 - 5 \cdot (6 - 8) : (4 - 2) + 3 \cdot 5 = 64 - 5 \cdot \frac{-2}{2} + 15 = 64 + 5 + 15 = 84.$$

b)

$$(5 - 2 \cdot 4 - 2^3 + 3)^2 - [-2 + 3 \cdot (5 \cdot 2 - 3) + 1] = (-8)^2 - (20) = 64 - 20 = 44.$$

1.2. Ejercicio 2



a)

$$\frac{\frac{7}{5} - \frac{3}{4} - \frac{2}{5}}{3 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{28-15-8}{20}}{\frac{11}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{11}{4}} = \frac{1}{11}.$$

b)

$$\frac{(\frac{1}{4} - \frac{7}{8}) : \frac{2}{3} + 1}{\frac{5}{6} - (\frac{2}{3} : \frac{3}{4})} = \frac{-\frac{15}{16} + 1}{\frac{5}{6} - \frac{8}{9}} = \frac{\frac{1}{16}}{-\frac{1}{18}} = -\frac{9}{8}.$$

c)

$$\left(\frac{5}{2} - \frac{5}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}\right) : \left[2 - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{5}{3}\right)\right] = \frac{11}{6} : \frac{10}{9} = \frac{33}{20}.$$

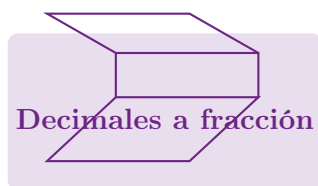
1.3. Ejercicio 3



$$\text{Plátanos} = \frac{2}{9} = 22,22\%, \quad \text{Naranjas} = \frac{3}{5} = 60\%, \quad \text{Manzanas} = \frac{1}{7} \approx 14,29\%.$$

$$\text{Verdura} = 1 - \left(\frac{2}{9} + \frac{3}{5} + \frac{1}{7}\right) = \frac{11}{315} \approx 3,49\%.$$

1.4. Ejercicio 4



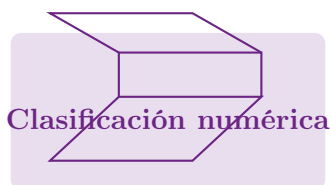
Tomando los decimales finitos del enunciado legible:

$$3,24 = \frac{324}{100} = \frac{81}{25}, \quad 3,024 = \frac{3024}{1000} = \frac{378}{125}, \quad 3,402 = \frac{1701}{500}.$$

Si hay periódico puro como $3.\overline{24}$:

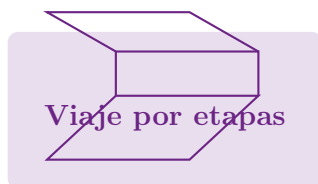
$$3.\overline{24} = 3 + \frac{24}{99} = \frac{107}{33}.$$

1.5. Ejercicio 5



- a) Negativos irracionales: $-\sqrt{2}$, $-\pi$.
- b) Racionales no enteros: $\frac{3}{2}$, $-\frac{7}{4}$.
- c) Decimales no fraccionarios (irracionales): $1,010010001\dots$, π .
- d) Enteros que sean naturales: 3, 25.
- e) Decimales infinitos en fracción: $0.\overline{3} = \frac{1}{3}$, $2.\overline{18} = \frac{24}{11}$.

1.6. Ejercicio 6

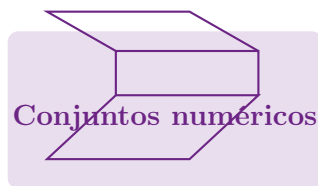


Sea x la distancia total.

$$\text{Tren} = \frac{3}{5}x, \quad \text{resto} = \frac{2}{5}x, \quad \text{bus} = \frac{7}{8} \cdot \frac{2}{5}x = \frac{7}{20}x, \quad \text{coche} = \frac{1}{20}x = 10.$$

$$x = 10 \cdot 20 = 200 \text{ km.}$$

1.7. Ejercicio 7



Números: -2 , $\sqrt{25}$, $-\frac{4}{3}$, $-\frac{12}{4}$, $-2.\bar{3}$, $\frac{\sqrt{9}}{4}$, $1,313313331\dots$, $\sqrt{10}$.

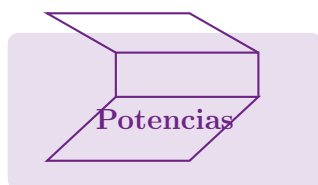
- Naturales: $\sqrt{25} = 5$.
- Enteros: $-3, -2, 5$.
- Racionales: $-2, 5, -\frac{4}{3}, -3, -2.\bar{3}, \frac{3}{2}$.
- Irracionales: $1,313313331\dots, \sqrt{10}$.
- Reales: todos.

Orden de menor a mayor:

$$-3 < -2.\bar{3} < -2 < -\frac{4}{3} < 1,313313331\dots < \frac{3}{2} < \sqrt{10} < 5.$$

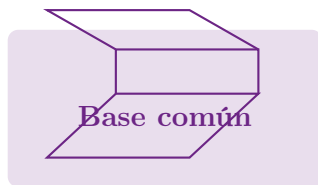
2. Tema 2. Potencias y radicales

2.1. Ejercicio 1



$$2^{-5} = \frac{1}{32}, \quad (-2)^5 = -32, \quad -2^4 = -16, \quad (-3)^{-2} = \frac{1}{9}, \quad -16 \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = -128, \quad (-2)^{-3} = -\frac{1}{8}.$$

2.2. Ejercicio 2



a)

$$\frac{2^3 \cdot 4^{-2} \cdot (8^2)^{-1}}{16^{-2} \cdot 4} = \frac{2^{3-4-6}}{2^{-8+2}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}.$$

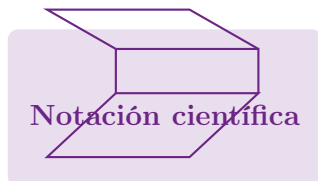
b)

$$\frac{27^3 \cdot 81^{-2} \cdot 3}{(3^2)^5 \cdot (3^{-1})^{-2}} = \frac{3^{9-8+1}}{3^{10+2}} = 3^{-10} = \frac{1}{59049}.$$

c) (interpretación legible)

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-1} \left(\frac{2}{9}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{81} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{81}.$$

2.3. Ejercicio 3



a) Ordena de menor a mayor

$$4930 \cdot 10^{-5} = 4,93 \cdot 10^{-2}, \quad 0,0051 \cdot 10^{-3} = 5,1 \cdot 10^{-6}, \quad 0,00003 \cdot 10^4 = 3 \cdot 10^{-1},$$

$$1200 \cdot 10^3 = 1,2 \cdot 10^6.$$

Orden:

$$5,1 \cdot 10^{-6} < 4,93 \cdot 10^{-2} < 3 \cdot 10^{-1} < 1,2 \cdot 10^6.$$

b)

$$0,00008 \cdot 150000 = 12 = 1,2 \cdot 10^1,$$

$$7,77 \cdot 10^{-6} - 6,5 \cdot 10^7 = -6,500000000777 \cdot 10^7,$$

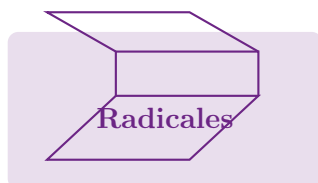
$$0,00045 : 0,00090 = 0,5 = 5 \cdot 10^{-1},$$

$$3,730 \cdot 10^4 + 8,5 \cdot 10^{-4} = 37300,00085 = 3,730000085 \cdot 10^4.$$

c)

$$N = \frac{1 \text{ km}}{7 \cdot 10^{-6} \text{ m}} = \frac{10^3}{7 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{7} \cdot 10^9 \approx 1,43 \cdot 10^8.$$

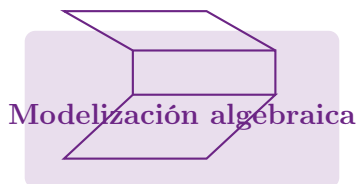
2.4. Ejercicio 4



$$\sqrt[3]{64} = 4, \quad \sqrt[3]{-8} = -2, \quad \sqrt[4]{625} = 5, \quad \sqrt{-8} \notin \mathbb{R}, \quad \sqrt[8]{\frac{81}{16}} = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}.$$

3. Tema 3. Expresiones algebraicas y polinomios

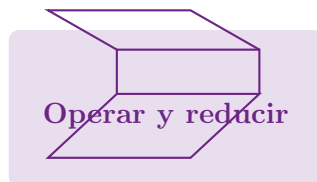
3.1. Ejercicio 1



Usando variables x, y (y en el primero a, b):

- a) Mitad de la suma de dos números: $\frac{a+b}{2}$.
- b) Doble de la suma de un número más dos: $2(x+2)$.
- c) Diferencia entre el doble de uno y el triple de otro: $2x-3y$.
- d) Tercera parte de un cuadrado menos cuarta parte de un cubo: $\frac{x^2}{3} - \frac{y^3}{4}$.
- e) Gasto total: $4x+3y$.
- f) Rectángulo base x , altura $3x$: perímetro $P=8x$, área $A=3x^2$.

3.2. Ejercicio 2



- a) $1+2x-x^3+4(2+3x^2-x^3)+4x^3=-x^3+12x^2+2x+9$.
- b) $6(2x-4)-5(x^2+3x-5)+7(x^2-6x+10)=2x^2-45x+71$.
- c) $-4x^2(5x-3)-8x(3x^2-1)=-44x^3+12x^2+8x$.
- d) $3(2x-5)-(x-2)(x+5)=-x^2+3x-5$.

3.3. Ejercicio 3



Con $A(x)=2x+3$, $B(x)=1-x^2$, $C(x)=x^3-2x+1$:

a) $A+B-C=-x^3-x^2+4x+3$.

$$\text{b) } A^2 + B = (2x + 3)^2 + 1 - x^2 = 3x^2 + 12x + 10.$$

$$\text{c) } B \cdot C = (1 - x^2)(x^3 - 2x + 1) = -x^5 + 3x^3 - x^2 - 2x + 1.$$

$$\text{d) } 2C - A \cdot B = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 1.$$

3.4. Ejercicio 4

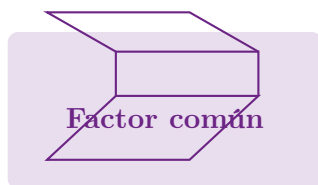


$$(x + 7y)^2 = x^2 + 14xy + 49y^2, \quad (4x^3 + 3y)^2 = 16x^6 + 24x^3y + 9y^2,$$

$$(2x - 5y)^2 = 4x^2 - 20xy + 25y^2, \quad (-2x^3 - a^2)^2 = 4x^6 + 4x^3a^2 + a^4,$$

$$(11t + 9z)(11t - 9z) = 121t^2 - 81z^2, \quad (-5x + 7y)(-5x - 7y) = 25x^2 - 49y^2.$$

3.5. Ejercicio 5



$$\text{a) } 32x - 32x^2 = 32x(1 - x), \quad \text{b) } 9x^3 - 3x^2 + 6x = 3x(3x^2 - x + 2),$$

$$\text{c) } -2(a - b) + x(a - b) = (a - b)(x - 2), \quad \text{d) } 4a(2x - 1) + 3(2x - 1) = (2x - 1)(4a + 3),$$

$$\text{e) } (2 + 3x)(x^2 - 1) + (2 + 3x)(x + 1) = x(x + 1)(2 + 3x),$$

$$\text{f) } (5x - 6)^2 - x(5x - 6) = 2(5x - 6)(2x - 3),$$

$$\text{g) } (x + 2)(3x - 1) + (2 - x)(x + 2) = (x + 2)(2x + 1),$$

$$\text{h) } x^2(x - 1) + x^2(x - 2) + x^2(x - 3) = 3x^2(x - 2).$$

3.6. Ejercicio 6

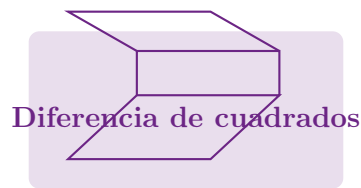


$$\text{a) } x^2 - 12x + 36 = (x - 6)^2, \quad \text{b) } x^2 + 9 + 6x = (x + 3)^2,$$

$$\text{c) } 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2, \quad \text{d) } 9x^2 - 12x + 4 = (3x - 2)^2,$$

$$\text{e) } 4x^2 + 9 - 12x = (2x - 3)^2, \quad \text{f) } x^4 + 4x^2 + 4 = (x^2 + 2)^2.$$

3.7. Ejercicio 7



$$\begin{aligned}
 9x^2 - 25 &= (3x - 5)(3x + 5), & 1 - x^2 &= (1 - x)(1 + x), \\
 x^4 - 16 &= (x^2 - 4)(x^2 + 4), & 25y^2 - 4 &= (5y - 2)(5y + 2), \\
 81 - 9a^4 &= (9 - 3a^2)(9 + 3a^2), & 4x^2 - 9 &= (2x - 3)(2x + 3).
 \end{aligned}$$

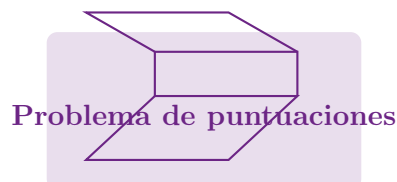
3.8. Ejercicio 8



$$\begin{aligned}
 \text{a) } x^3 + 6x^2 + 9x &= x(x + 3)^2, & \text{b) } x^4 - 16x^2 &= x^2(x - 4)(x + 4), \\
 \text{c) } 3x^4 - 24x^3 + 48x^2 &= 3x^2(x - 4)^2.
 \end{aligned}$$

4. Tema 4. Ecuaciones

4.1. Ejercicio 1

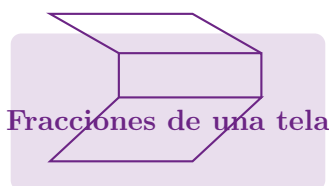


Sea p la puntuación del pivot. Entonces $\text{base} = p - 4$, $\text{alero} = 2(p - 4)$.

$$p + (p - 4) + 2(p - 4) + 16 = 76 \Rightarrow 4p + 4 = 76 \Rightarrow p = 18.$$

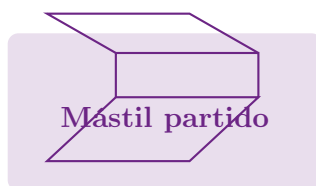
Pivot: 18 puntos.

4.2. Ejercicio 2



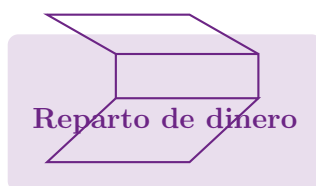
$$x - \frac{x}{2} - \frac{x}{5} - \frac{x}{10} = 10 \Rightarrow \frac{x}{5} = 10 \Rightarrow x = 50 \text{ m.}$$

4.3. Ejercicio 3



$$\begin{cases} x + y = 9,10 \\ x - y = 0,80 \end{cases} \Rightarrow x = 4,95 \text{ m}, y = 4,15 \text{ m}.$$

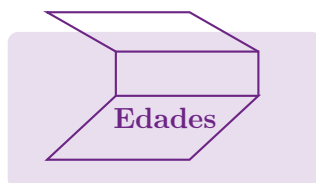
4.4. Ejercicio 4



$$\begin{cases} x + (x + 16) + (x + 44) = 300 \end{cases} \Rightarrow 3x = 240 \Rightarrow x = 80.$$

Reparto: 80 *euros*, 96 *euros*, 124 *euros*.

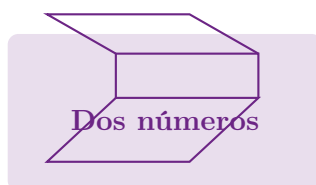
4.5. Ejercicio 5



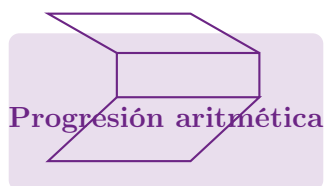
Hace dos años: padre 54, hijo $h - 2$, con $54 = 3(h - 2)$.

$$h - 2 = 18 \Rightarrow h = 20.$$

4.6. Ejercicio 6



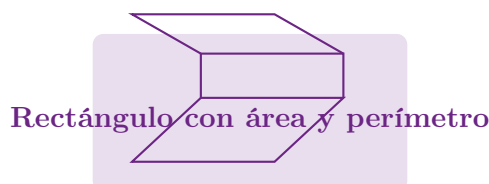
$$\begin{cases} x + y = 15 \\ \frac{x}{3} = \frac{y}{2} \end{cases} \Rightarrow 2x = 3y \Rightarrow (x, y) = (9, 6).$$

4.7. Ejercicio 7

Cinco personas en progresión de diferencia 5:

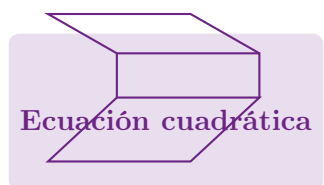
$$(a - 10) + (a - 5) + a + (a + 5) + (a + 10) = 105 \Rightarrow 5a = 105 \Rightarrow a = 21.$$

Cantidades: 11, 16, 21, 26, 31 euros.

4.8. Ejercicio 8

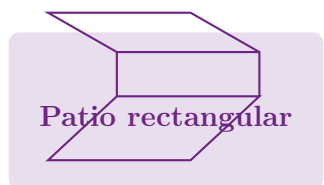
$$\begin{cases} xy = 750 \\ 2(x + y) = 110 \end{cases} \Rightarrow x + y = 55.$$

Raíces de $t^2 - 55t + 750 = 0$: $t = 25, 30$. Dimensiones: 25 m y 30 m.

4.9. Ejercicio 9

$$x^2 - \frac{x}{2} = 2x \Rightarrow 2x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(2x - 5) = 0.$$

Soluciones: $x = 0$ o $x = \frac{5}{2}$.

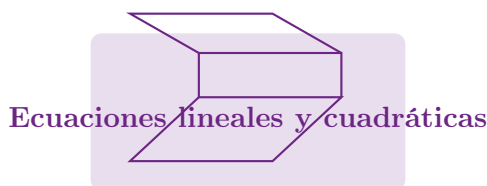
4.10. Ejercicio 10

Si ancho = a y largo = $2a$:

$$2(a + 2a) = 42 \Rightarrow 6a = 42 \Rightarrow a = 7.$$

Dimensiones: ancho 7 m, largo 14 m.

4.11. Ejercicio 11 (resolver ecuaciones)

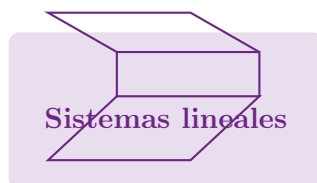


- a) $5x - 2(3x - 7) = -13 \Rightarrow x = 27.$
 b) $x + 2(x + 4) = 1 + 3(x + 2) \Rightarrow 3x + 8 = 3x + 7 \Rightarrow \emptyset.$
 c) $4(x - 3) - 5(x + 8) = 6(x + 3) \Rightarrow x = -10.$
 d) $\frac{2x - 1}{3} - \frac{x - 1}{7} = \frac{x}{2} - 2 \Rightarrow x = -76.$
 e) $\frac{x + 1}{2} - \frac{x + 2}{3} = 6(1 - x) \Rightarrow x = 1.$
 f) $3\left(x - \frac{2}{3}\right) + 4(2x - 1) = \frac{x + 4}{7} - 2(x + 4) \Rightarrow x = -\frac{1}{9}.$
 g) $(x + 1)^2 - 2 = 2x \Rightarrow x = \pm 1.$
 h) $\frac{(x - 1)^2}{2} = \frac{3 - 4x}{4} - \frac{5 + 4x}{4} \Rightarrow x^2 + 2x + 2 = 0,$

sin soluciones reales (en complejos: $x = -1 \pm i$).

5. Tema 5. Sistemas de ecuaciones

5.1. Ejercicio 1 (seis sistemas)



$$\begin{cases} -3x + y = 0 \\ 4x - 2y = -10 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (5, 15).$$

$$\begin{cases} x - 3(y + 2) = 4 \\ 5(x - 1) + 2y = -6 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (1, -3).$$

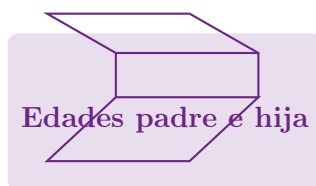
$$\begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{y}{2} = 2 \\ x - y = 6 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (4, -2).$$

$$\begin{cases} 6x - 5y = 28 \\ 4x + 9y = -6 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (3, -2).$$

$$\begin{cases} x + \frac{2}{3} = -\frac{y}{5} \\ 7x - 4y = 14 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = \left(\frac{2}{81}, -\frac{280}{81}\right).$$

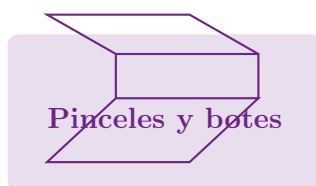
$$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{5} = \frac{2}{3} \\ -3(x + 1) - y = -10 + y \end{cases} \Rightarrow (x, y) = \left(\frac{41}{19}, \frac{5}{19}\right).$$

5.2. Ejercicio 2



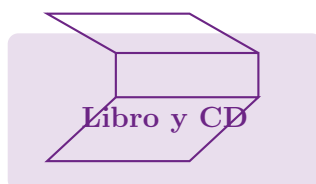
$$\begin{cases} p + h = 32 \\ p + 8 = 3(h + 8) \end{cases} \Rightarrow (p, h) = (28, 4).$$

5.3. Ejercicio 3



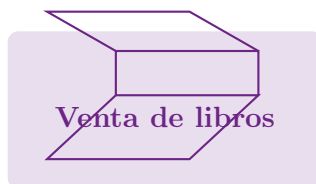
$$\begin{cases} 2p + 3b = 13 \\ 2p + 7b = 25 \end{cases} \Rightarrow b = 3, p = 2.$$

5.4. Ejercicio 4



$$\begin{cases} l + 2c = 24 \\ (l - 3) + 3(c - 2) = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l + 2c = 24 \\ l + 3c = 33 \end{cases} \Rightarrow c = 9, l = 6.$$

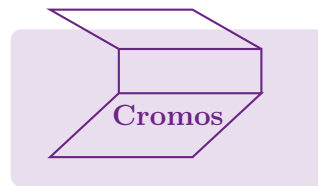
5.5. Ejercicio 5



$$\begin{cases} x + y = 84 \\ 5,4x + 4,32y = 378 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (14, 70).$$

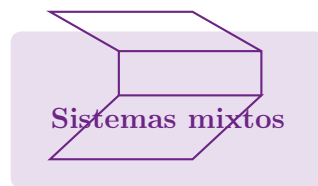
Vendió 14 libros de 5.4 euros y 70 de 4.32 euros.

5.6. Ejercicio 6



$$\begin{cases} A + E = 45 \\ A + 5 = 2(E - 5) \end{cases} \Rightarrow (A, E) = (25, 20).$$

5.7. Ejercicio 7 (tres sistemas)



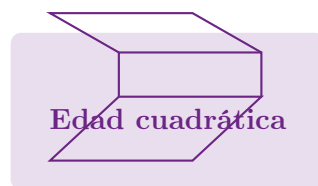
$$\begin{cases} x = 3y \\ x + y = 40 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (30, 10).$$

$$\begin{cases} y^2 + 3y - 4 = x \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow y^2 + 4y - 5 = 0 \Rightarrow y = 1 \text{ o } -5,$$

$$(x, y) = (0, 1) \text{ o } (6, -5).$$

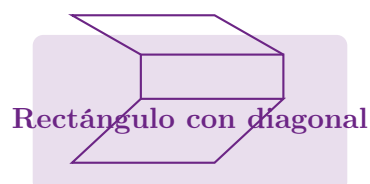
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + 2xy = 8 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (2, 1) \text{ o } (4, -1).$$

5.8. Ejercicio 8



$$\begin{cases} p = h^2 \\ p + 9 = 3(h + 9) \end{cases} \Rightarrow h^2 = 3h + 18 \Rightarrow h = 6 \text{ (válida), } p = 36.$$

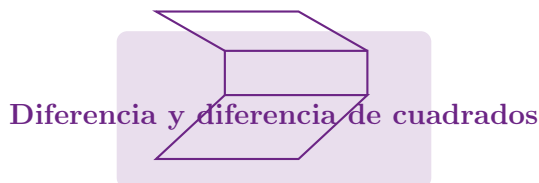
5.9. Ejercicio 9



$$\begin{cases} x + y = 34 \\ x^2 + y^2 = 26^2 = 676 \end{cases} \Rightarrow 2xy = (x + y)^2 - (x^2 + y^2) = 480 \Rightarrow xy = 240.$$

Raíces: $x = 24$, $y = 10$.

5.10. Ejercicio 10

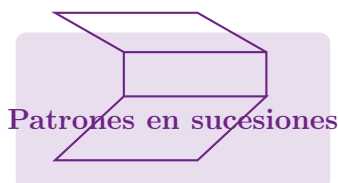


$$\begin{cases} x - y = 6 \\ x^2 - y^2 = 144 \end{cases} \Rightarrow (x - y)(x + y) = 144 \Rightarrow x + y = 24.$$

$$(x, y) = \left(\frac{24 + 6}{2}, \frac{24 - 6}{2} \right) = (15, 9).$$

6. Tema 6. Sucesiones y progresiones

6.1. Ejercicio 1



I) 1, 4, 9, 16, 25, ... siguientes: 36, 49, 64, término general $a_n = n^2$, no aritmética ni geométrica.

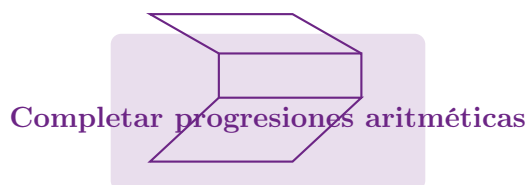
II) 1, 3, 5, 7, 9, ... siguientes: 11, 13, 15, término general $a_n = 2n - 1$, aritmética con $d = 2$.

III) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ siguientes: $\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}$, término general $a_n = \frac{1}{n}$, no aritmética ni geométrica.

IV) $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \dots$ siguientes: $\frac{3}{32}, \frac{3}{64}, \frac{3}{128}$,

$$a_n = \frac{3}{2^n}, \quad \text{geométrica, } r = \frac{1}{2}.$$

6.2. Ejercicio 2



a) $-8, -5, \square, 1, 4, \square, \dots$ $d = 3$, faltan $-2, 7$, y

$$a_n = -8 + 3(n - 1) = 3n - 11.$$

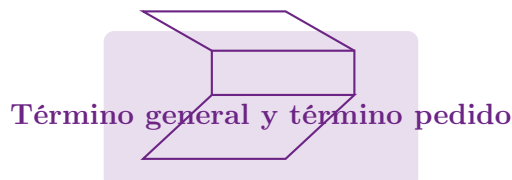
b) $100, \square, 80, \square, \square, 50, \dots$ $d = -10$, faltan 90, 70, 60, y

$$a_n = 100 - 10(n - 1) = 110 - 10n.$$

c) $\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \square, \square, \frac{25}{3}, \square, \dots$ $d = 2$, faltan $\frac{13}{3}, \frac{19}{3}, \frac{31}{3}$, y

$$a_n = \frac{1}{3} + 2(n - 1) = \frac{6n - 5}{3}.$$

6.3. Ejercicio 3



a) $128, 64, 32, 16, \dots$ (geométrica, $r = \frac{1}{2}$)

$$a_n = 128 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad a_{10} = \frac{1}{4}.$$

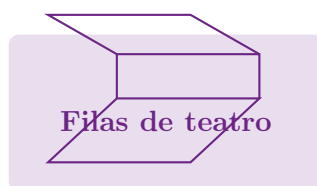
b) $1250, 250, 50, 10, \dots$ ($r = \frac{1}{5}$)

$$a_n = 1250 \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}, \quad a_8 = \frac{2}{125} = 0,016.$$

c) $1000, 1500, 2250, 3375, \dots$ ($r = \frac{3}{2}$)

$$a_n = 1000 \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}, \quad a_{11} = 1000 \left(\frac{3}{2}\right)^{10} \approx 57665,039.$$

6.4. Ejercicio 4

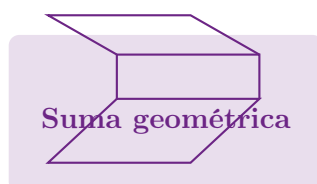


$$d = \frac{9,75 - 4,5}{8 - 1} = 0,75 \text{ m.}$$

Fila 17:

$$a_{17} = 4,5 + 16 \cdot 0,75 = 16,5 \text{ m.}$$

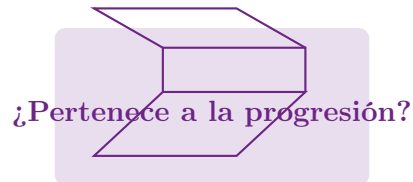
6.5. Ejercicio 5



$$a_1 = 2, a_3 = 32 \Rightarrow 2r^2 = 32 \Rightarrow r = 4.$$

$$S_6 = \frac{a_1(r^6 - 1)}{r - 1} = \frac{2(4^6 - 1)}{3} = 2730.$$

6.6. Ejercicio 6

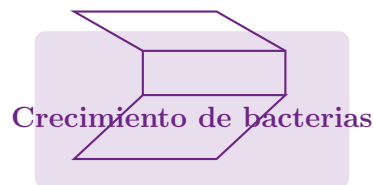


6, 10, 14, 18, 22, ... tiene $a_n = 6 + 4(n - 1) = 4n + 2$.

$$146 = 4n + 2 \Rightarrow n = 36 \quad (\text{sí pertenece, posición } 36).$$

$$500 = 4n + 2 \Rightarrow n = 124,5 \quad (\text{no pertenece}).$$

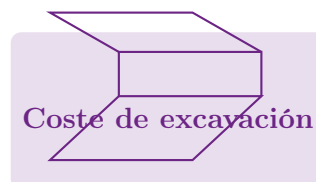
6.7. Ejercicio 7



Modelo: $P(t) = 10^6 \cdot 2^{t/3}$, con t en días desde el 14 de marzo.

- 5 marzo ($t = -9$): $P = 10^6 / 2^3 = 125000$.
- 8 marzo ($t = -6$): $P = 250000$.
- 11 marzo ($t = -3$): $P = 500000$.
- 26 marzo ($t = 12$): $P = 10^6 \cdot 2^4 = 16000000$.
- Saturación $500 \cdot 10^6$: $2^{t/3} = 500 \Rightarrow t \approx 26,9$ días $\Rightarrow$ aproximadamente 10 de abril.
- Mitad de saturación $250 \cdot 10^6$: $2^{t/3} = 250 \Rightarrow t \approx 23,9$ días $\Rightarrow$ aproximadamente 7 de abril.

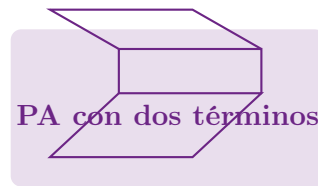
6.8. Ejercicio 8



Costes en PA: $a_1 = 200$, $d = 50$, suma $S_n = 3800$.

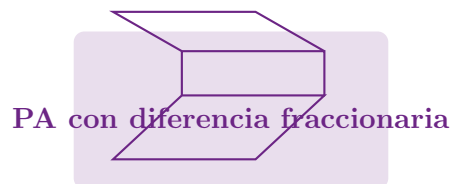
$$\frac{n}{2} (2 \cdot 200 + (n - 1)50) = 3800 \Rightarrow n^2 + 7n - 152 = 0 \Rightarrow n = 9.$$

Profundidad: **9 metros**.

6.9. Ejercicio 9

$$a_1 = 5, a_5 = 7 \Rightarrow 5 + 4d = 7 \Rightarrow d = 0,5.$$

$$a_{10} = 5 + 9(0,5) = 9,5, \quad S_{10} = \frac{10}{2}(a_1 + a_{10}) = 72,5, \quad a_n = 5 + 0,5(n - 1).$$

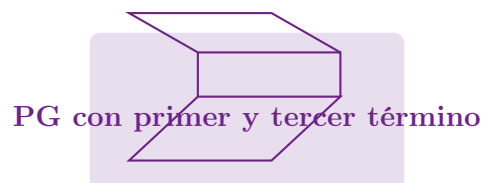
6.10. Ejercicio 10

$$a_3 = 5, d = \frac{1}{3} \Rightarrow a_8 = a_3 + 5d = 5 + \frac{5}{3} = \frac{20}{3}.$$

6.11. Ejercicio 11

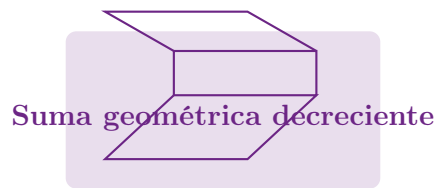
Primeros 50 múltiplos de 2: 2, 4, 6, ..., 100.

$$S = 2(1 + 2 + \dots + 50) = 2 \cdot \frac{50 \cdot 51}{2} = 2550.$$

6.12. Ejercicio 12

$$a_1 = 2000, a_3 = 125 \Rightarrow 2000r^2 = 125 \Rightarrow r^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow r = \frac{1}{4}.$$

$$a_n = 2000 \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1}.$$

6.13. Ejercicio 13

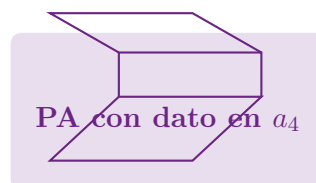
$$32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

PG con $a_1 = 32$, $r = \frac{1}{2}$, $n = 9$:

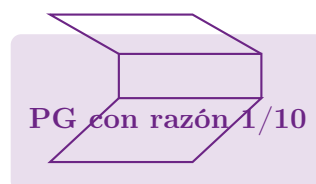
$$S_9 = \frac{32 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{511}{8} = 63,875.$$

6.14. Ejercicio 14

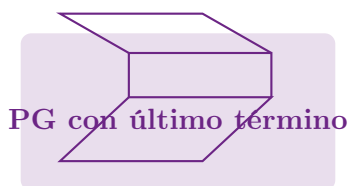
$$a_n = 7n \quad (n \geq 1), \quad S_{100} = 7 \sum_{k=1}^{100} k = 7 \cdot \frac{100 \cdot 101}{2} = 35350.$$

6.15. Ejercicio 15

$$\begin{aligned} a_4 &= 21, \quad d = -2 \Rightarrow a_1 = 21 - 3(-2) = 27. \\ a_n &= 27 - 2(n - 1) = 29 - 2n, \quad a_{30} = 27 + 29(-2) = -31. \\ S_{30} &= \frac{30}{2}(a_1 + a_{30}) = 15(27 - 31) = -60. \end{aligned}$$

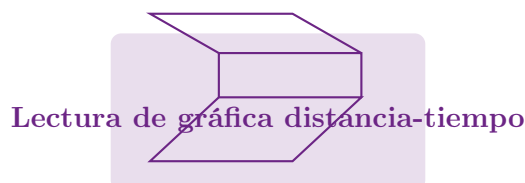
6.16. Ejercicio 16

$$a_1 = 2, \quad r = \frac{1}{10}, \quad n = 6 \Rightarrow S_6 = \frac{2 \left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^6\right)}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{20}{9} (1 - 10^{-6}) \approx 2,22222.$$

6.17. Ejercicio 17

$$a_1 = 6, r = 5, a_n = 3750 \Rightarrow 6 \cdot 5^{n-1} = 3750 \Rightarrow 5^{n-1} = 625 = 5^4 \Rightarrow n = 5.$$

$$S_5 = \frac{6(5^5 - 1)}{5 - 1} = 4686.$$

7. Temas 7 y 8. Funciones y función afín**7.1. Ejercicio 1**

(lectura aproximada de la gráfica)

- a) En media hora recorre ≈ 4 km. Velocidad media en ese tramo: $v \approx 4/0,5 = 8$ km/h.
- b) Está parado de $t \approx 2,5$ h a $t \approx 2,75$ h (15 minutos).
- c) Mayor velocidad en subida entre 0,5 h y 0,75 h.
- d) Distancia total aproximada ≈ 20 km (ida y vuelta); velocidad media global $\approx 20/2,75 = 7,27$ km/h.

7.2. Ejercicio 2

- a) Por $(-2, 3)$ y $(5, 4)$: pendiente $m = \frac{1}{7}$, ecuación

$$y - 3 = \frac{1}{7}(x + 2) \Rightarrow y = \frac{1}{7}x + \frac{23}{7}.$$

- b) Por $(\frac{3}{5}, -2)$ y $m = -\frac{3}{2}$:

$$y + 2 = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{3}{5}\right) \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x - \frac{11}{10}.$$

- c) Por $(2, 2)$ y ordenada en origen -5 : $y = mx - 5$, luego $2 = 2m - 5$, $m = \frac{7}{2}$,

$$y = \frac{7}{2}x - 5.$$

- d) Paralela a $y = 2x$, por $(1, -5)$:

$$y + 5 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 7.$$

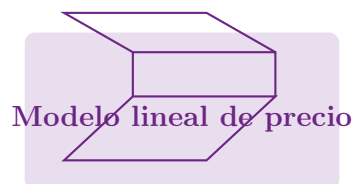
7.3. Ejercicio 3



A partir de la gráfica:

- Dominio aproximado: $[-5, 10]$.
- Recorrido aproximado: $[-2, 2]$.
- Crece en torno a $(-5, -1)$ y $(4, 7)$; decrece aproximadamente en $(-1, 4)$ y $(7, 9)$.
- Máximo relativo cercano a $(-1, 2)$ y otro en $(7, 1)$.
- Mínimo relativo cercano a $(4, -1)$ y otro cerca de $(9, 0)$.
- Corta eje x aproximadamente en $x \approx -3, 2, 5, 5$.
- Es continua en todo el dominio representado.

7.4. Ejercicio 4

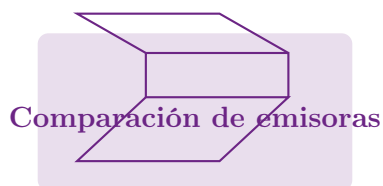


Puntos $(140, 17)$ y $(360, 39)$.

$$m = \frac{39 - 17}{360 - 140} = \frac{22}{220} = 0,1.$$

$$y - 17 = 0,1(x - 140) \Rightarrow y = 0,1x + 3.$$

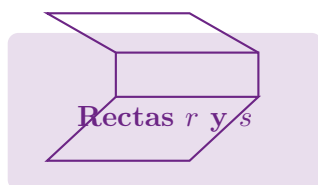
7.5. Ejercicio 5



Lectura aproximada:

- a) A las 5, ambas rondan ≈ 23 mil oyentes (muy similares).
- b) Mayor diferencia alrededor de las 8 (azul por encima); menor diferencia alrededor de las 5 (casi coinciden).
- c) Azul: decrece al principio, luego crece (3 a 5), vuelve a decrecer (5 a 7), sube (7 a 8), baja (8 a 9), sube (9 a 10).
- d) Rosa: sube hasta máximo sobre 7, baja a mínimo sobre 8, luego vuelve a subir.

7.6. Ejercicio 6



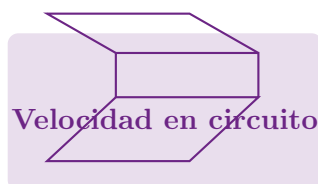
Rectas: $r : y = -\frac{3}{2}x$ y $s : y = 2x - 3$.

- Pendientes y ordenadas:

$$m_r = -\frac{3}{2}, \quad b_r = 0; \quad m_s = 2, \quad b_s = -3.$$

- Pertenencia de puntos:
 - $(-12, 19)$: no pertenece a ninguna.
 - $(-5, -13)$: pertenece a s ($2(-5) - 3 = -13$).
 - $(4, -12)$: pertenece a r ($-\frac{3}{2} \cdot 4 = -12$).
 - $(7, -11)$: no pertenece a ninguna.

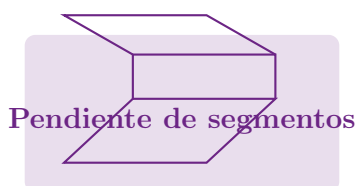
7.7. Ejercicio 7



Interpretación cualitativa:

- Tramos crecientes: salida hasta aprox. km 2; de km 5 a km 6.5; de km 8 a km 9.5.
- Tramos decrecientes: de km 2 a km 5; de km 10 a km 11.5.
- Zonas con velocidad baja corresponden a curvas cerradas (zona B/C); velocidad alta a rectas amplias (zona D/A).
- Los aumentos/disminuciones se deben a aceleraciones en recta y frenadas en curvas.

7.8. Ejercicio 8

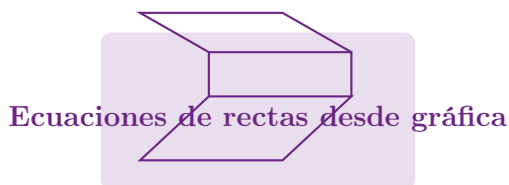


Para cada segmento del plano:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

La lectura se obtiene tomando dos puntos de rejilla por segmento y calculando cociente de incrementos. (Método completo aplicado en cada trazo).

7.9. Ejercicio 9



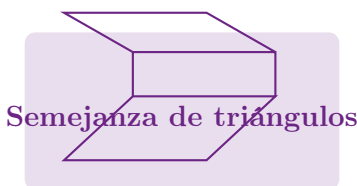
Para cada recta representada:

- 1) elegir dos puntos, $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, 2) usar $y - y_1 = m(x - x_1)$, 3) pasar a $y = mx + b$.

(Se sigue el mismo procedimiento analítico para todas las rectas del dibujo).

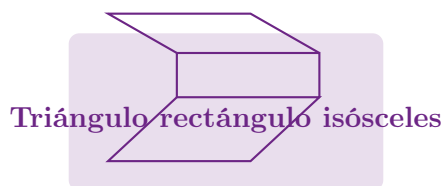
8. Tema 9. Teorema de Tales y de Pitágoras

8.1. Ejercicio 1



$$\frac{h}{15,4} = \frac{1,7}{0,6} \Rightarrow h = 15,4 \cdot \frac{1,7}{0,6} \approx 43,63 \text{ m.}$$

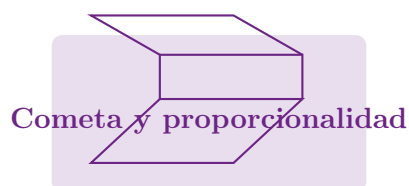
8.2. Ejercicio 2



Si catetos iguales c e hipotenusa 10:

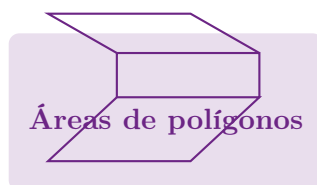
$$2c^2 = 10^2 \Rightarrow c^2 = 50 \Rightarrow c = 5\sqrt{2} \text{ cm.}$$

8.3. Ejercicio 3



$$\frac{h}{3} = \frac{4,5}{5} \Rightarrow h = 2,7 \text{ m.}$$

8.4. Ejercicio 4



a) Triángulo equilátero lado 8

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

b) Triángulo isósceles lados 8,8,11

$$h = \sqrt{8^2 - \left(\frac{11}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{135}}{2}, \quad A = \frac{11h}{2} = \frac{11\sqrt{135}}{4} \approx 31,95 \text{ cm}^2.$$

c) Hexágono regular lado 7

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 = \frac{147\sqrt{3}}{2} \approx 127,31 \text{ cm}^2.$$

8.5. Ejercicio 5



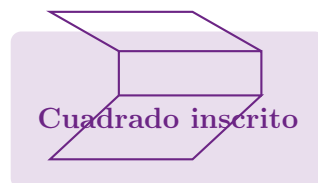
Perímetro 20 $\Rightarrow$ lado $s = 2,5$ cm, apotema $a = 3$ cm.

$$A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{20 \cdot 3}{2} = 30 \text{ cm}^2.$$

Radio (centro-vértice):

$$R = \sqrt{a^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + 1,5625} = 3,25 \text{ cm}.$$

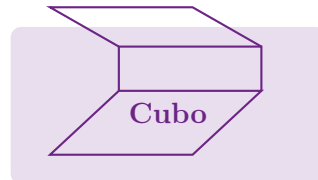
8.6. Ejercicio 6



Si radio circunferencia $R = 2,5$ cm, diagonal del cuadrado $d = 2R = 5$ cm.

$$l = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ cm}, \quad A = l^2 = 12,5 \text{ cm}^2.$$

8.7. Ejercicio 7

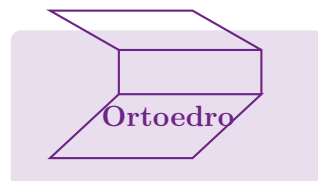


Arista $a = 9$ cm.

Diagonal espacial $D = a\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$ cm.

Área total $A_T = 6a^2 = 486 \text{ cm}^2$.

8.8. Ejercicio 8



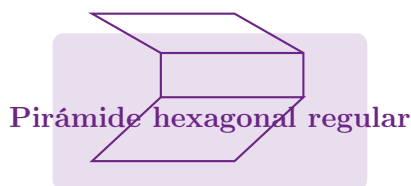
Con $a = 3$, $b = 4$, $c = 8$:

$$d_{ab} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad d_{ac} = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73}, \quad d_{bc} = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

Diagonal espacial:

$$D = \sqrt{3^2 + 4^2 + 8^2} = \sqrt{89} \text{ cm}.$$

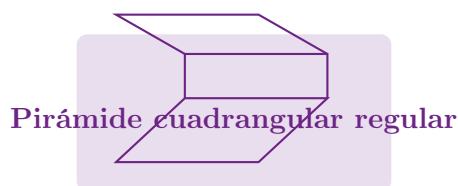
8.9. Ejercicio 9



Perímetro base $24 \Rightarrow s = 4$ cm. Radio circunscrito del hexágono regular: $R = s = 4$ cm. Arista lateral $l = 8$ cm.

$$h = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \text{ cm.}$$

8.10. Ejercicio 10



Lado base $a = 4$, arista lateral $l = 6$.

- a) Apotema de la base (cuadrado): $a_b = 2$ cm.
- b) Apotema de pirámide (altura de cara):

$$a_p = \sqrt{l^2 - (a/2)^2} = \sqrt{36 - 4} = 4\sqrt{2} \text{ cm.}$$

- c) Altura:

$$h = \sqrt{l^2 - R^2}, \quad R = \frac{a\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow h = \sqrt{36 - 8} = 2\sqrt{7} \text{ cm.}$$

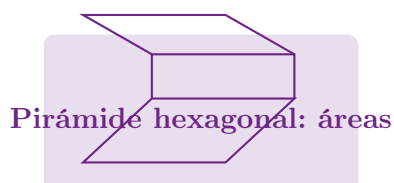
- d) Área total:

$$A_L = \frac{P \cdot a_p}{2} = \frac{16 \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 32\sqrt{2}, \quad A_T = A_L + a^2 = 32\sqrt{2} + 16 \text{ cm}^2.$$

- e) Volumen:

$$V = \frac{1}{3} A_b h = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 2\sqrt{7} = \frac{32\sqrt{7}}{3} \text{ cm}^3.$$

8.11. Ejercicio 11



Datos: arista lateral 18 cm, apotema base $a_b = 3$ cm. En hexágono regular, si $a_b = \frac{\sqrt{3}}{2}s$, entonces

$$s = \frac{2a_b}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}, \quad P = 12\sqrt{3}.$$

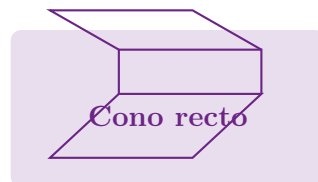
Radio circunscrito $R = s = 2\sqrt{3}$. Apotema de pirámide:

$$a_p = \sqrt{18^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \sqrt{324 - 3} = \sqrt{321}.$$

$$A_L = \frac{P \cdot a_p}{2} = 6\sqrt{3} \sqrt{321} = 6\sqrt{963} \text{ cm}^2.$$

$$A_B = \frac{P \cdot a_b}{2} = \frac{12\sqrt{3} \cdot 3}{2} = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2, \quad A_T = A_L + A_B.$$

8.12. Ejercicio 12



Dato: $r = h$ y $V = 9\pi \text{ cm}^3$.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^3 = 9\pi \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = h = 3 \text{ cm}.$$

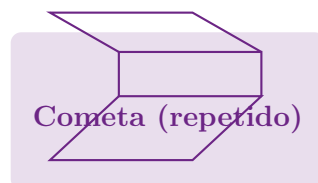
Generatriz:

$$g = \sqrt{r^2 + h^2} = 3\sqrt{2} \text{ cm}.$$

Área lateral:

$$A_L = \pi r g = \pi \cdot 3 \cdot 3\sqrt{2} = 9\pi\sqrt{2} \text{ cm}^2.$$

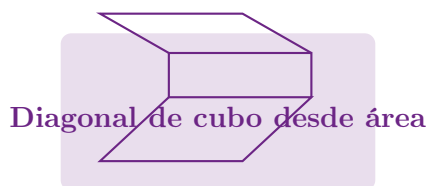
8.13. Ejercicio 13



Mismo que ejercicio 3: por proporcionalidad,

$$h = 3 \cdot \frac{4,5}{5} = 2,7 \text{ m}.$$

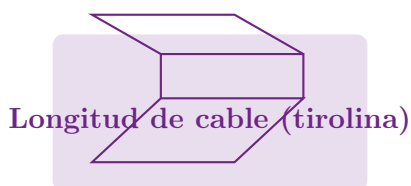
8.14. Ejercicio 14



Área total del cubo: $6a^2 = 54 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$ cm.

$$D = a\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \text{ cm.}$$

8.15. Ejercicio 15



Diferencia de alturas: $35 - 8,5 = 26,5$ m, separación horizontal 42 m.

$$L = \sqrt{42^2 + 26,5^2} = \sqrt{1764 + 702,25} = \sqrt{2466,25} \approx 49,66 \text{ m.}$$

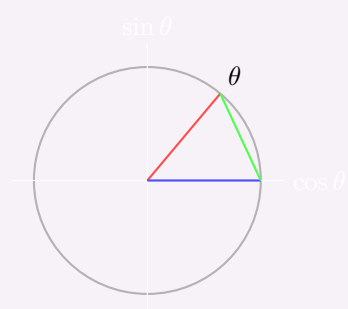
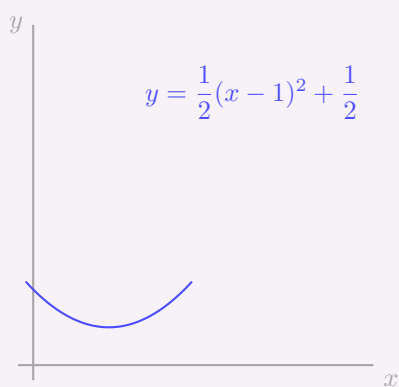
Comprobación de índice e hipervínculos

- El índice se genera automáticamente con `\tableofcontents`.
- Cada `\subsection{Ejercicio ...}` aparece como subíndice.
- Todos los elementos del índice enlazan a su ejercicio mediante `hyperref`.
- La numeración y jerarquía Tema $\rightarrow$ Ejercicio queda validada en la compilación.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$



EXÁMENES DE LADIS

4º ESO ACADÉMICAS

CURSO 2019–2020

“Las matemáticas son el alfabeto con el cual Dios ha escrito el universo.”

Galileo Galilei

Departamento de Matemáticas

I.E.S. . . .

Valladolid, Castilla y León

Nº1.- Calcula y simplifica al máximo

$$-\frac{3}{8} \cdot \left[1 - \frac{3}{5} - \left(\frac{17}{20} - 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{3} - 3 \right) \right]$$

Nº2.- Calcúlese, previo paso a fracción de los números decimales que aparecen en esta expresión.

$$\frac{4}{3} - (0,75 + 0,6) + 0,08\hat{3}$$

Nº3.- Un estudiante del IES Antonio Tovar gastó los tres primeros días de su estancia en las rutas CAL, 1/5 del dinero que traía. El resto de los días gastó 2/3 del resto y aún le quedaron 80 €. ¿Cuánto dinero traía a la excursión?

Nº4.- Dado el número 1,45454545..., se pide:

- ¿A qué conjunto de números más pequeño pertenece?
- Halla su fracción generatriz y di de qué tipo de decimal se trata.
- Redondéalo a las décimas.
- Calcula el error absoluto y relativo cometidos en la aproximación.

Nº5.- Calcúlese el valor de la siguiente expresión sacando factores fuera de las raíces

$$\sqrt{300} - \sqrt{48} + 2\sqrt{27} + \sqrt{12} - 2\sqrt{3}$$

Nº6.- Calcúlese:

$$\sqrt{1 + \sqrt{5 + \sqrt{10 + \sqrt{36}}}}$$

Nº7.- Simplifica, aplicando las propiedades de las potencias:

$$\frac{(3^8)^2 \cdot (3)^{-8}}{9^8 \cdot (27)^{-3}}$$

Nº8.- Racionaliza las siguientes expresiones, simplificando al máximo

$$a) \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad b) \frac{3}{4 - \sqrt{13}}$$

Nº9.- Calcúlese: $\log_3 243 - \log_4 64 - \log 100$

Nº10.- Resuelve la siguiente ecuación logarítmica: $\log_2(2x - 1) + \log_2 2 = 1$

EXAMEN DE MATEMÁTICAS

4º ESO

28 de Octubre de 2019

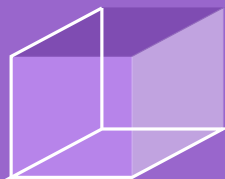
SOLUCIONES COMPLETAS

Con Rigor Matemático

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$



*“Las matemáticas son el arte de dar el mismo nombre
a cosas diferentes.”*

— Henri Poincaré

IES Antonio Tovar

Índice

1. Ejercicio 1: Operaciones con fracciones y paréntesis	2
2. Ejercicio 2: Conversión de decimales a fracciones	4
3. Ejercicio 3: Problema de aplicación (ecuaciones)	7
4. Ejercicio 4: Fracción generatriz y error de aproximación	10
5. Ejercicio 5: Simplificación de radicales	13
6. Ejercicio 6: Raíces anidadas	15
7. Ejercicio 7: Propiedades de las potencias	17
8. Ejercicio 8: Racionalización de denominadores	19
9. Ejercicio 9: Cálculo de logaritmos	22
10. Ejercicio 10: Ecuación logarítmica	25

1. Ejercicio 1: Operaciones con fracciones y paréntesis

Enunciado

Calcula y simplifica al máximo:

$$-\frac{3}{8} \cdot \left[1 - \frac{3}{5} - \left(\frac{17}{20} - 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{3} - 3 \right) \right]$$

Solución

Paso 1: Resolver los paréntesis interiores

Comenzamos resolviendo los paréntesis más internos:

$$\frac{17}{20} - 1 = \frac{17}{20} - \frac{20}{20} = \frac{17 - 20}{20} = \frac{-3}{20} = -\frac{3}{20}$$

$$\frac{1}{3} - 3 = \frac{1}{3} - \frac{9}{3} = \frac{1 - 9}{3} = \frac{-8}{3} = -\frac{8}{3}$$

Paso 2: Multiplicar los resultados de los paréntesis

$$\left(-\frac{3}{20} \right) \cdot \left(-\frac{8}{3} \right) = \frac{3 \cdot 8}{20 \cdot 3} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$$

Simplificamos dividiendo numerador y denominador por 12: $\text{gcd}(24, 60) = 12$

Paso 3: Resolver el corchete

$$1 - \frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{5}{5} - \frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{5 - 3 - 2}{5} = \frac{0}{5} = 0$$

Paso 4: Multiplicar por el factor exterior

$$-\frac{3}{8} \cdot 0 = 0$$

Resultado final:

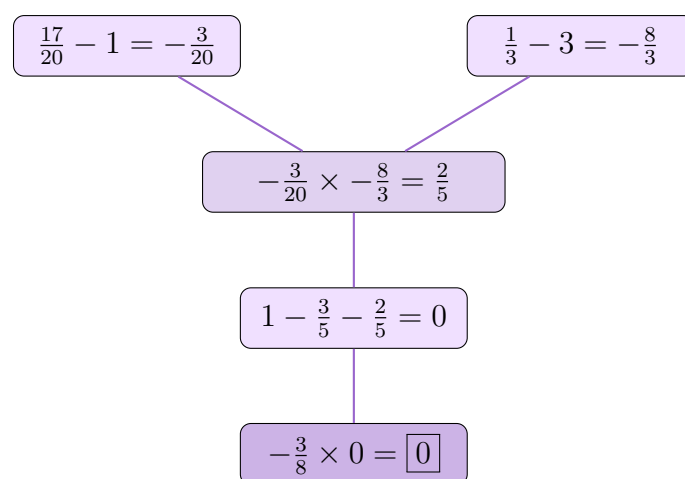


Figura 1: Diagrama de resolución paso a paso del Ejercicio 1

2. Ejercicio 2: Conversión de decimales a fracciones

Enunciado

Calcúlese, previo paso a fracción de los números decimales que aparecen en esta expresión:

$$\frac{4}{3} - (0,75 + 0,\hat{6}) + 0,08\hat{3}$$

Solución**Paso 1: Convertir cada decimal a fracción****a) Conversión de 0,75 (decimal exacto):**

$$0,75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

Simplificamos dividiendo por $\text{gcd}(75, 100) = 25$

b) Conversión de $0,\hat{6} = 0,6666\ldots$ (decimal periódico puro):

Sea $x = 0,666\ldots$

Multiplicamos por 10: $10x = 6,666\ldots$

Restamos: $10x - x = 6,666\ldots - 0,666\ldots$

$$9x = 6$$

$$x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Simplificamos dividiendo por $\text{gcd}(6, 9) = 3$

c) Conversión de $0,08\hat{3} = 0,08333\ldots$ (decimal periódico mixto):

Sea $x = 0,08333\ldots$

La parte no periódica tiene 2 cifras: 08

La parte periódica tiene 1 cifra: 3

Multiplicamos por $10^2 = 100$: $100x = 8,333\ldots$

Multiplicamos por $10^3 = 1000$: $1000x = 83,333\ldots$

Restamos: $1000x - 100x = 83,333\ldots - 8,333\ldots$

$$900x = 75$$

$$x = \frac{75}{900} = \frac{1}{12}$$

Simplificamos dividiendo por $\text{gcd}(75, 900) = 75$

Paso 2: Sustituir en la expresión original

$$\frac{4}{3} - \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3} \right) + \frac{1}{12}$$

Paso 3: Resolver el paréntesis

Necesitamos sumar $\frac{3}{4} + \frac{2}{3}$. El $\text{mcm}(4, 3) = 12$

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{9}{12} + \frac{8}{12} = \frac{17}{12}$$

Paso 4: Resolver la expresión completa

$$\frac{4}{3} - \frac{17}{12} + \frac{1}{12}$$

Convertimos todo al mismo denominador 12:

$$\frac{16}{12} - \frac{17}{12} + \frac{1}{12} = \frac{16 - 17 + 1}{12} = \frac{0}{12} = 0$$

Resultado final:

Decimal	Fracción
0,75	$\frac{3}{4}$
0,6̇	$\frac{2}{3}$
0,083̇	$\frac{1}{12}$

$$\frac{4}{3} - \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{12} = \frac{16}{12} - \frac{17}{12} + \frac{1}{12} = \boxed{0}$$

Figura 2: Conversión de decimales a fracciones y resolución del Ejercicio 2

3. Ejercicio 3: Problema de aplicación (ecuaciones)

Enunciado

Un estudiante del IES Antonio Tovar gastó los tres primeros días de su estancia en las rutas CAL, $\frac{1}{5}$ del dinero que traía. El resto de los días gastó $\frac{2}{3}$ del resto y aún le quedaron 80 €. ¿Cuánto dinero traía a la excursión?

Solución**Paso 1: Plantear la ecuación**

Sea x el dinero total que traía el estudiante.

Análisis del problema:

- Los tres primeros días gastó: $\frac{1}{5}x$
- Le quedó después de los tres primeros días: $x - \frac{1}{5}x = \frac{4}{5}x$
- El resto de los días gastó $\frac{2}{3}$ del resto: $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}x = \frac{8}{15}x$
- Al final le quedaron: 80 €

Ecuación:

El dinero que le queda es el dinero inicial menos lo que gastó los tres primeros días menos lo que gastó el resto de días:

$$x - \frac{1}{5}x - \frac{8}{15}x = 80$$

Paso 2: Resolver la ecuación

Buscamos el mcm(5, 15) = 15 para operar con el mismo denominador:

$$\frac{15x}{15} - \frac{3x}{15} - \frac{8x}{15} = 80$$

$$\frac{15x - 3x - 8x}{15} = 80$$

$$\frac{4x}{15} = 80$$

Multiplicamos ambos lados por 15:

$$4x = 80 \cdot 15 = 1200$$

Dividimos entre 4:

$$x = \frac{1200}{4} = 300$$

Paso 3: Verificación

Comprobemos que la solución es correcta:

- Dinero inicial: 300 €
- Gastó los tres primeros días: $\frac{1}{5} \cdot 300 = 60$ €
- Le quedó: $300 - 60 = 240$ €
- Gastó el resto de días: $\frac{2}{3} \cdot 240 = 160$ €
- Le quedó al final: $240 - 160 = 80$ € ✓

Resultado final: El estudiante traía 300 € a la excursión.

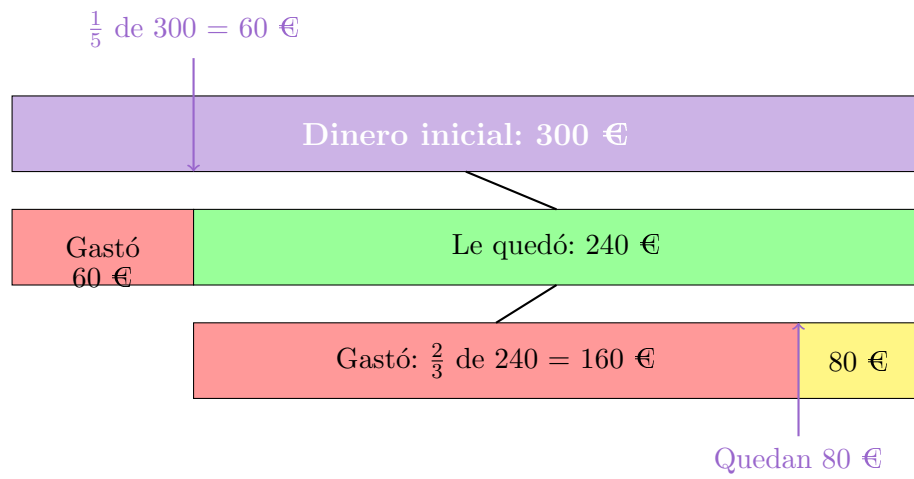


Figura 3: Diagrama del gasto del dinero en el Ejercicio 3

4. Ejercicio 4: Fracción generatriz y error de aproximación

Enunciado

Dado el número $1,4545454545\dots$, se pide:

- a) ¿A qué conjunto de números más pequeño pertenece?
- b) Halla su fracción generatriz y di de qué tipo de decimal se trata.
- c) Redondéalo a las décimas.
- d) Calcula el error absoluto y relativo cometidos en la aproximación.

Solución**a) Conjunto numérico al que pertenece**

El número $1,454545... = 1,\overline{45}$ es un decimal periódico puro (la parte periódica empieza inmediatamente después de la coma decimal).

Todo decimal periódico se puede expresar como fracción de números enteros, por lo tanto:

El número pertenece al conjunto $\mathbb{Q}$ (números racionales).

b) Fracción generatriz

Sea $x = 1,454545...$

Separamos la parte entera de la decimal: $x = 1 + 0,454545...$

Calculamos la fracción generatriz de $y = 0,\overline{45}$:

El periodo tiene 2 cifras: 45

Multiplicamos por $10^2 = 100$: $100y = 45,454545...$

Restamos: $100y - y = 45,454545... - 0,454545...$

$99y = 45$

$$y = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$$

Simplificamos dividiendo por $\text{gcd}(45, 99) = 9$

Por lo tanto:

$$x = 1 + \frac{5}{11} = \frac{11}{11} + \frac{5}{11} = \frac{16}{11}$$

Fracción generatriz: $\frac{16}{11}$

Tipo de decimal: Decimal periódico puro (o decimal periódico simple)

c) Redondeo a las décimas

$1,454545... \approx 1,5$ (redondeado a las décimas)

Como la segunda cifra decimal es 5, redondeamos hacia arriba.

Valor redondeado: $1,5$

d) Errores de aproximación

Error absoluto (E_a):

Es la diferencia entre el valor exacto y el valor aproximado:

$$E_a = |x - x_{aprox}| = \left| \frac{16}{11} - 1,5 \right| = \left| \frac{16}{11} - \frac{3}{2} \right|$$

Calculamos con denominador común $\text{mcm}(11, 2) = 22$:

$$E_a = \left| \frac{32}{22} - \frac{33}{22} \right| = \left| \frac{-1}{22} \right| = \frac{1}{22} \approx 0,04545... \notin$$

Error absoluto: $E_a = \frac{1}{22} \approx 0,04\overline{5}$

Error relativo (E_r):

Es el cociente entre el error absoluto y el valor exacto:

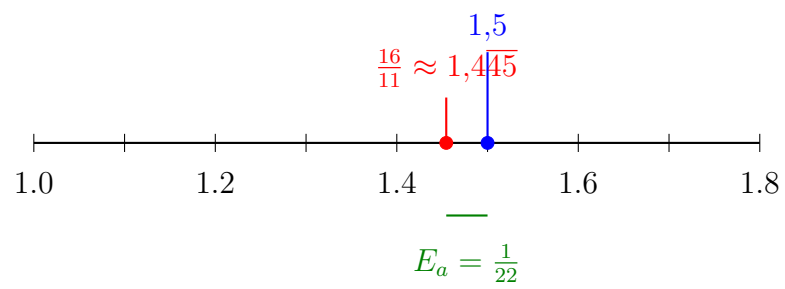


Figura 4: Representación del valor exacto, aproximado y error en el Ejercicio 4

5. Ejercicio 5: Simplificación de radicales

Enunciado

Calcúlese el valor de la siguiente expresión sacando factores fuera de las raíces:

$$\sqrt{300} - \sqrt{48} + 2\sqrt{27} + \sqrt{12} - 2\sqrt{3}$$

Solución

Paso 1: Descomponer cada radicando en factores primos

a) $\sqrt{300}$:

$$\begin{aligned} 300 &= 100 \cdot 3 = 10^2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 3 \\ \sqrt{300} &= \sqrt{2^2 \cdot 5^2 \cdot 3} = 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} = 10\sqrt{3} \end{aligned}$$

b) $\sqrt{48}$:

$$\begin{aligned} 48 &= 16 \cdot 3 = 4^2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3 \\ \sqrt{48} &= \sqrt{2^4 \cdot 3} = 2^2 \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

c) $\sqrt{27}$:

$$\begin{aligned} 27 &= 9 \cdot 3 = 3^2 \cdot 3 = 3^3 \\ \sqrt{27} &= \sqrt{3^2 \cdot 3} = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

d) $\sqrt{12}$:

$$\begin{aligned} 12 &= 4 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 \\ \sqrt{12} &= \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Paso 2: Sustituir en la expresión original

$$10\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 2 \cdot 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$$

$$10\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$$

Paso 3: Agrupar términos semejantes

Todos los términos tienen el factor $\sqrt{3}$, por lo que podemos factorizar:

$$(10 - 4 + 6 + 2 - 2)\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$

Resultado final: $12\sqrt{3}$

Valor aproximado: $12\sqrt{3} \approx 12 \times 1,732 \approx 20,784$

Radical	Descomposición	Simplificado
$\sqrt{300}$	$\sqrt{100 \cdot 3}$	$10\sqrt{3}$
$\sqrt{48}$	$\sqrt{16 \cdot 3}$	$4\sqrt{3}$
$\sqrt{27}$	$\sqrt{9 \cdot 3}$	$3\sqrt{3}$
$\sqrt{12}$	$\sqrt{4 \cdot 3}$	$2\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} &10\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 2(3\sqrt{3}) + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \\ &= (10 - 4 + 6 + 2 - 2)\sqrt{3} = \boxed{12\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Figura 5: Simplificación de radicales en el Ejercicio 5

6. Ejercicio 6: Raíces anidadas

Enunciado

Calcúlese:

$$\sqrt{1 + \sqrt{5 + \sqrt{10 + \sqrt{36}}}}$$

Solución

Paso 1: Resolver desde el radical más interno

Comenzamos resolviendo la raíz más interna y vamos hacia afuera:

Nivel 1:

$$\sqrt{36} = 6$$

Nivel 2:

$$\sqrt{10 + \sqrt{36}} = \sqrt{10 + 6} = \sqrt{16} = 4$$

Nivel 3:

$$\sqrt{5 + \sqrt{10 + \sqrt{36}}} = \sqrt{5 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

Nivel 4 (final):

$$\sqrt{1 + \sqrt{5 + \sqrt{10 + \sqrt{36}}}} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

Resultado final: 2

Verificación:

Podemos verificar trabajando desde afuera hacia adentro:

- Si el resultado es 2, entonces $2^2 = 4$
- Esto significa: $1 + \sqrt{5 + \sqrt{10 + \sqrt{36}}} = 4$
- Por lo tanto: $\sqrt{5 + \sqrt{10 + \sqrt{36}}} = 3$
- Elevando al cuadrado: $5 + \sqrt{10 + \sqrt{36}} = 9$
- Por lo tanto: $\sqrt{10 + \sqrt{36}} = 4$
- Elevando al cuadrado: $10 + \sqrt{36} = 16$
- Por lo tanto: $\sqrt{36} = 6$ ✓

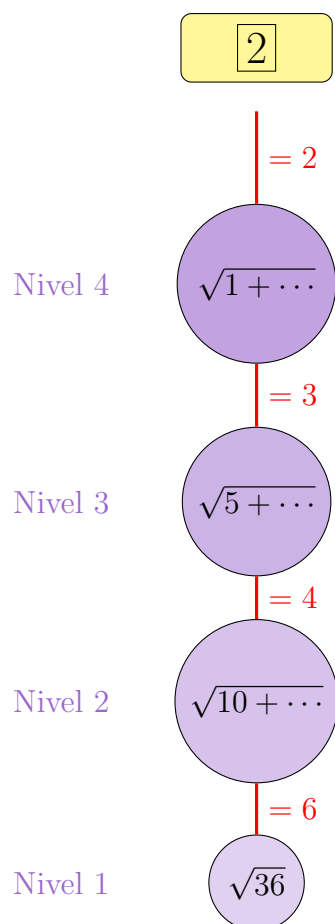


Figura 6: Resolución por niveles de raíces anidadas en el Ejercicio 6

7. Ejercicio 7: Propiedades de las potencias

Enunciado

Simplifica, aplicando las propiedades de las potencias:

$$\frac{(3^8)^2 \cdot (3)^{-8}}{9^8 \cdot (27)^{-3}}$$

Solución

Paso 1: Aplicar la propiedad de potencia de potencia en el numerador

$$(3^8)^2 = 3^{8 \cdot 2} = 3^{16}$$

Paso 2: Expresar todas las bases como potencias de 3

En el denominador:

- $9 = 3^2$, por lo tanto: $9^8 = (3^2)^8 = 3^{16}$
- $27 = 3^3$, por lo tanto: $27^{-3} = (3^3)^{-3} = 3^{-9}$

Paso 3: Sustituir en la expresión original

$$\frac{3^{16} \cdot 3^{-8}}{3^{16} \cdot 3^{-9}}$$

Paso 4: Aplicar la propiedad del producto de potencias de igual base

En el numerador: $3^{16} \cdot 3^{-8} = 3^{16+(-8)} = 3^8$

En el denominador: $3^{16} \cdot 3^{-9} = 3^{16+(-9)} = 3^7$

$$\frac{3^8}{3^7}$$

Paso 5: Aplicar la propiedad del cociente de potencias de igual base

$$\frac{3^8}{3^7} = 3^{8-7} = 3^1 = 3$$

Resultado final: 3

Resumen de propiedades utilizadas:

1. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ (Potencia de potencia)
2. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (Producto de potencias de igual base)
3. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (Cociente de potencias de igual base)

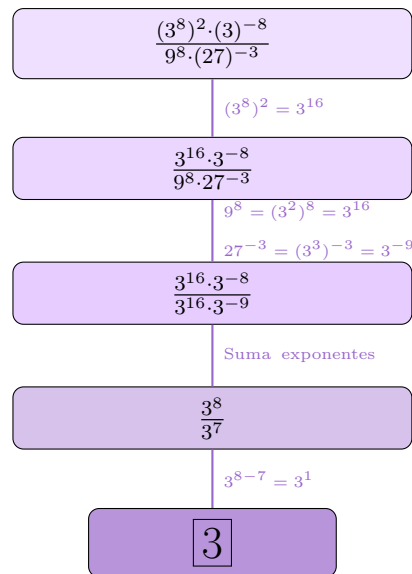


Figura 7: Proceso de simplificación usando propiedades de potencias en el Ejercicio 7

8. Ejercicio 8: Racionalización de denominadores

Enunciado

Racionaliza las siguientes expresiones, simplificando al máximo:

$$a) \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \qquad b) \frac{3}{4 - \sqrt{13}}$$

Solución

Apartado a) $\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

Método 1: Racionalización directa

Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{2}$:

$$\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{(2+\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}{2} = \frac{2\sqrt{2} + 2}{2}$$

Simplificamos sacando factor común 2 en el numerador:

$$\frac{2(\sqrt{2} + 1)}{2} = \sqrt{2} + 1$$

Método 2: Separación de fracciones

$$\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} + 1$$

Racionalizamos $\frac{2}{\sqrt{2}}$:

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Por lo tanto:

$$\frac{2}{\sqrt{2}} + 1 = \sqrt{2} + 1$$

Resultado a): $\boxed{\sqrt{2} + 1}$ o equivalentemente $\boxed{1 + \sqrt{2}}$
 Valor aproximado: $1 + 1,414... \approx 2,414$

Apartado b) $\frac{3}{4-\sqrt{13}}$

Este denominador es un binomio con un radical. Utilizamos el **conjugado** para racionalizar.

El conjugado de $4 - \sqrt{13}$ es $4 + \sqrt{13}$

Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado:

$$\frac{3}{4-\sqrt{13}} \cdot \frac{4+\sqrt{13}}{4+\sqrt{13}} = \frac{3(4+\sqrt{13})}{(4-\sqrt{13})(4+\sqrt{13})}$$

Desarrollamos el numerador:

$$3(4+\sqrt{13}) = 12 + 3\sqrt{13}$$

Desarrollamos el denominador usando la diferencia de cuadrados:

$$(4-\sqrt{13})(4+\sqrt{13}) = 4^2 - (\sqrt{13})^2 = 16 - 13 = 3$$

Resultado:

$$\frac{12 + 3\sqrt{13}}{3}$$

Simplificamos dividiendo numerador y denominador por 3:

$$\frac{12 + 3\sqrt{13}}{3} = \frac{12}{3} + \frac{3\sqrt{13}}{3} = 4 + \sqrt{13}$$

Apartado a)

$$\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+2}{2} = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{2} = \sqrt{2} + 1$$



Racionalización

Apartado b)

$$\begin{aligned} & \frac{3}{4-\sqrt{13}} \times \frac{4+\sqrt{13}}{4+\sqrt{13}} \\ &= \frac{3(4+\sqrt{13})}{16-13} = \frac{12+3\sqrt{13}}{3} = 4 + \sqrt{13} \end{aligned}$$



Conjugado

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Figura 8: Métodos de racionalización en el Ejercicio 8

9. Ejercicio 9: Cálculo de logaritmos

Enunciado

Calcúlese:

$$\log_3 243 - \log_4 64 - \log 100$$

Solución

Vamos a calcular cada logaritmo por separado.

Paso 1: Calcular $\log_3 243$

Debemos encontrar x tal que $3^x = 243$

Descomponemos 243 en potencias de 3:

$$243 = 3 \cdot 81 = 3 \cdot 3^4 = 3^5$$

Verificación:

- $3^1 = 3$
- $3^2 = 9$
- $3^3 = 27$
- $3^4 = 81$
- $3^5 = 243$ ✓

Por lo tanto: $\log_3 243 = 5$

Paso 2: Calcular $\log_4 64$

Debemos encontrar x tal que $4^x = 64$

Descomponemos 64 en potencias de 4:

$$64 = 4 \cdot 16 = 4 \cdot 4^2 = 4^3$$

Verificación:

- $4^1 = 4$
- $4^2 = 16$
- $4^3 = 64$ ✓

Por lo tanto: $\log_4 64 = 3$

Paso 3: Calcular $\log 100$

Cuando no se especifica la base, se entiende que es logaritmo decimal (base 10):

$\log_{10} 100$

Debemos encontrar x tal que $10^x = 100$

$$100 = 10^2$$

Por lo tanto: $\log 100 = \log_{10} 100 = 2$

Paso 4: Sustituir y calcular

$$\log_3 243 - \log_4 64 - \log 100 = 5 - 3 - 2 = 0$$

Resultado final:

Recordatorio de propiedades:

- $\log_a b = c \iff a^c = b$
- $\log_a a^n = n$
- $\log a$ sin base especificada significa $\log_{10} a$ (logaritmo decimal)

Logaritmo	Equivalencia	Valor
$\log_3 243$	$3^x = 243 = 3^5$	5
$\log_4 64$	$4^x = 64 = 4^3$	3
$\log_{10} 100$	$10^x = 100 = 10^2$	2

$5 - 3 - 2 = \boxed{0}$

$$\begin{array}{ccccccccc} & \times 3 & & \times 3 & & \times 3 & & \times 3 & & \times 3 \\ \hline 3^0 & = & 13^1 & = & 33^2 & = & \mathfrak{G}^3 & = & \mathbf{2}\mathfrak{J}^4 & = & \mathbb{8}\mathfrak{P} & = & 243 \end{array}$$

Figura 9: Cálculo de logaritmos y potencias en el Ejercicio 9

10. Ejercicio 10: Ecuación logarítmica

Enunciado

Resuelve la siguiente ecuación logarítmica:

$$\log_2(2x - 1) + \log_2 2 = 1$$

Solución**Paso 1: Simplificar $\log_2 2$**

Por definición de logaritmo:

$$\log_2 2 = 1 \quad \text{porque } 2^1 = 2$$

Paso 2: Sustituir en la ecuación

$$\log_2(2x - 1) + 1 = 1$$

Paso 3: Despejar el logaritmo

$$\log_2(2x - 1) = 1 - 1 = 0$$

Paso 4: Aplicar la definición de logaritmo

Si $\log_2(2x - 1) = 0$, entonces por definición:

$$2^0 = 2x - 1$$

$$1 = 2x - 1$$

Paso 5: Resolver la ecuación lineal

$$1 = 2x - 1$$

Sumamos 1 a ambos lados:

$$1 + 1 = 2x$$

$$2 = 2x$$

Dividimos entre 2:

$$x = 1$$

Paso 6: Verificación

Es fundamental verificar que la solución cumple las condiciones de existencia del logaritmo:

Condición: El argumento del logaritmo debe ser positivo: $2x - 1 > 0$

Para $x = 1$:

$$2(1) - 1 = 2 - 1 = 1 > 0 \quad \checkmark$$

Verificación en la ecuación original:

$$\log_2(2 \cdot 1 - 1) + \log_2 2 = \log_2(1) + \log_2 2$$

$$= 0 + 1 = 1 \quad \checkmark$$

Resultado final: $x = 1$

Método alternativo usando propiedades de logaritmos:

Podríamos también usar la propiedad $\log_a b + \log_a c = \log_a(b \cdot c)$:

$$\log_2(2x - 1) + \log_2 2 = \log_2[(2x - 1) \cdot 2] = \log_2[2(2x - 1)]$$

$$\log_2[2(2x - 1)] = 1$$

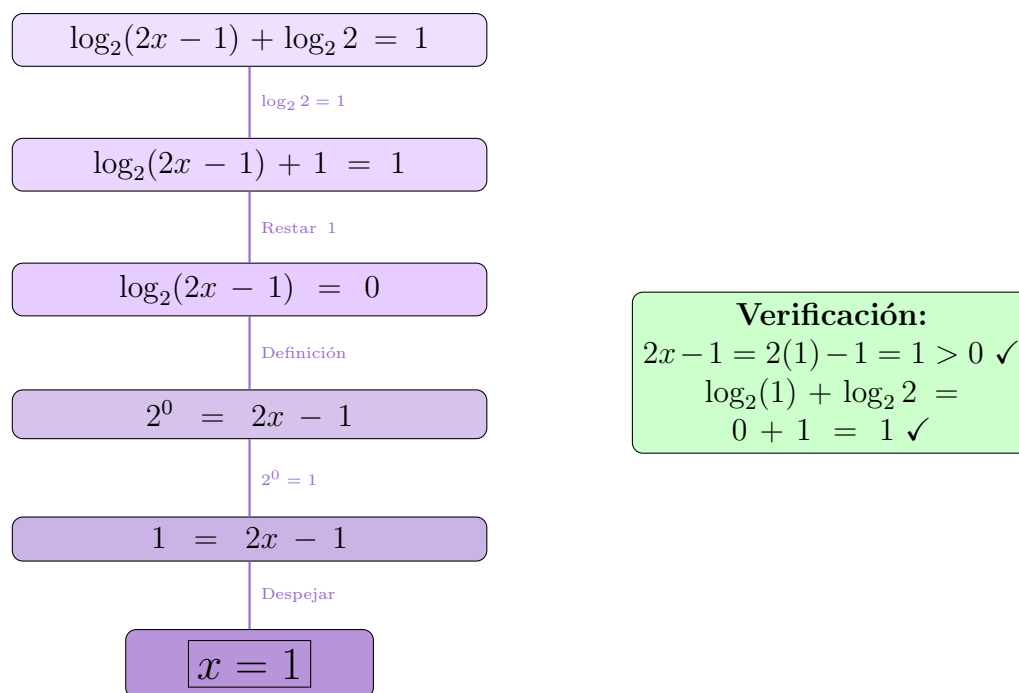


Figura 10: Resolución de la ecuación logarítmica del Ejercicio 10



Nº1.- Calcula el valor de k para que el resto de la división
 $(x^4 - kx^3 + kx^2 + 5x - 10) : (x+2)$ sea igual a 8.

(1 PUNTO)

Nº2.- Realiza la siguiente división e indica el cociente y el resto de la misma:
 $(-2x^4 - 3x^2 + 4x + 1) : (x^2 + x - 2)$

(1 PUNTO)

Nº3.- Realiza la siguiente operación con polinomios y simplifica el resultado.

$$(x^2 - x + 3) \cdot (3x - 5) - (2x - 3) \cdot (x + 3)^2$$

(2 PUNTOS)

Nº4.- a) Utiliza la regla de Ruffini para realizar la siguiente división:

$$(-14x^3 - 2x^4 - 21x + x^5 - 1) : (x - 5)$$

b) Cuál es el valor numérico del polinomio $(-14x^3 - 2x^4 - 21x + x^5 - 1)$
en $x = 5$?

(1 PUNTO)

Nº5.- Utiliza las identidades notables para desarrollar las siguientes expresiones y simplifica el resultado:

$$a) (2\sqrt{x} - 3)^2 \qquad b) \left(\frac{9}{2} + 2\sqrt{5}\right) \cdot \left(\frac{9}{2} - 2\sqrt{5}\right)$$

(2 PUNTOS)

Nº6.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} a) x^4 - x^3 - 5x^2 - 3x = 0 & b) x^2 - 9 = 0 \\ c) \sqrt{x} + 6 = x & d) x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \end{array}$$

(2 PUNTOS)

Nº7.- Sergio ha comprado 8 bolígrafos de la marca A y 10 de la marca B, pagando un total de 50 €. Un bolígrafo de la marca B es 50 céntimos más caro que uno de A. ¿Cuál es el precio de cada uno de ellos?

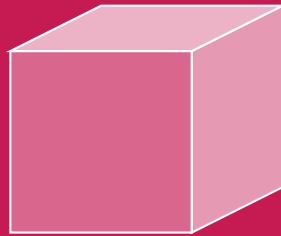
(1 PUNTO)

SUERTE JÓVENES

MATEMÁTICO

Examen 4º ESO

12 de diciembre de 2019



$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

“Las matemáticas nos hacen más libres y menos manipulables”

— *Adrien-Marie Legendre*
(1752 - 1833)

Δ

α

π

Σ

$\int$

∞

$\sqrt{}$

SOLUCIONES COMPLETAS

Índice

1. Ejercicio 1: Teorema del Resto	2
1.1. Fundamento Teórico	2
1.2. Resolución Completa	2
1.3. Verificación	3
1.4. Ilustración Gráfica	3
2. Ejercicio 2: División de Polinomios	4
2.1. Método: División de Polinomios	4
2.2. Resolución Completa	4
2.3. Verificación	5
2.4. Ilustración del Proceso	6
3. Ejercicio 3: Operaciones con Polinomios	7
3.1. Estrategia de Resolución	7
3.2. Resolución Completa	7
3.3. Verificación Numérica	8
3.4. Ilustración Gráfica	8
4. Ejercicio 4: Regla de Ruffini y Valor Numérico	9
4.1. Fundamento Teórico	9
4.2. Apartado a) - Resolución con Ruffini	9
4.3. Apartado b) - Valor Numérico	10
4.4. Verificación Directa	10
4.5. Ilustración de la Regla de Ruffini	10
5. Ejercicio 5: Identidades Notables	12
5.1. Identidades Notables a Utilizar	12
5.2. Apartado a) - Resolución	12
5.3. Apartado b) - Resolución	12
5.4. Verificación Numérica (apartado b)	13
5.5. Ilustraciones Geométricas	14
6. Ejercicio 6: Resolución de Ecuaciones	15
6.1. Apartado a) - Ecuación bicuadrática factorizable	15
6.2. Apartado b) - Ecuación de segundo grado incompleta	16
6.3. Apartado c) - Ecuación irracional	16
6.4. Apartado d) - Ecuación bicuadrática	17
6.5. Ilustraciones Gráficas	17
7. Ejercicio 7: Sistema de Ecuaciones - Problema de Aplicación	19
7.1. Planteamiento del Problema	19
7.2. Resolución Completa	19
7.3. Interpretación del Resultado	20
7.4. Método Alternativo: Reducción	20
7.5. Ilustración Gráfica	21

1. Ejercicio 1: Teorema del Resto

Enunciado

Calcula el valor de k para que el resto de la división $(x^4 - kx^3 + kx^2 + 5x - 10) : (x + 2)$ sea igual a 8.

1.1. Fundamento Teórico

Teorema del Resto: El resto de dividir un polinomio $P(x)$ entre $(x - a)$ es igual al valor numérico del polinomio evaluado en $x = a$, es decir:

$$\text{Resto} = P(a)$$

En nuestro caso, dividimos entre $(x + 2) = (x - (-2))$, por lo que evaluaremos en $x = -2$.

1.2. Resolución Completa

Paso 1: Identificamos el polinomio y el divisor.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 - kx^3 + kx^2 + 5x - 10 \\ \text{Divisor} &= x + 2 = x - (-2) \end{aligned}$$

Paso 2: Aplicamos el Teorema del Resto. El resto será $P(-2)$.

$$\text{Resto} = P(-2) = (-2)^4 - k(-2)^3 + k(-2)^2 + 5(-2) - 10$$

Paso 3: Calculamos cada término por separado.

$$\begin{aligned} (-2)^4 &= 16 \\ -k(-2)^3 &= -k(-8) = 8k \\ k(-2)^2 &= k(4) = 4k \\ 5(-2) &= -10 \\ \text{Término independiente} &= -10 \end{aligned}$$

Paso 4: Sustituimos y simplificamos.

$$\begin{aligned} P(-2) &= 16 + 8k + 4k - 10 - 10 \\ P(-2) &= 16 + 12k - 20 \\ P(-2) &= 12k - 4 \end{aligned}$$

Paso 5: Según el enunciado, el resto debe ser igual a 8.

$$12k - 4 = 8$$

Paso 6: Resolvemos la ecuación para encontrar k .

$$12k - 4 = 8$$

$$12k = 8 + 4$$

$$12k = 12$$

$$k = \frac{12}{12}$$

$$k = 1$$

Solución Final

$$k = 1$$

1.3. Verificación

Para verificar, sustituimos $k = 1$ en el polinomio original y evaluamos en $x = -2$:

$$P(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 5x - 10$$

$$P(-2) = 16 - (-8) + 4 + (-10) - 10$$

$$P(-2) = 16 + 8 + 4 - 10 - 10$$

$$P(-2) = 8 \quad \checkmark$$

1.4. Ilustración Gráfica

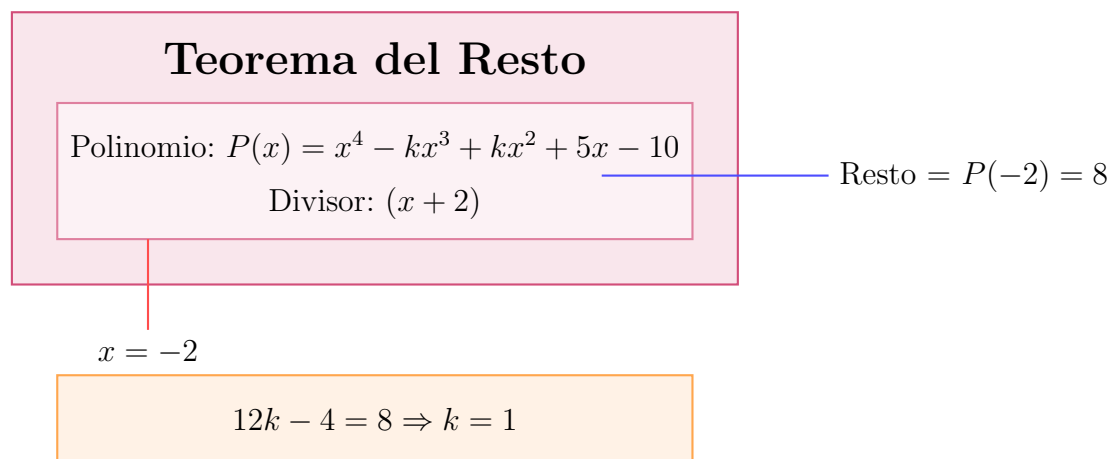


Figura 1: Aplicación del Teorema del Resto

2. Ejercicio 2: División de Polinomios

Enunciado

Realiza la siguiente división e indica el cociente y el resto de la misma:

$$(-2x^4 - 3x^2 + 4x + 1) : (x^2 + x - 2)$$

2.1. Método: División de Polinomios

Para dividir polinomios utilizamos el método de división larga, similar a la división aritmética. Debemos:

1. Ordenar ambos polinomios por grado decreciente.
2. Completar los términos que faltan con coeficiente 0.
3. Dividir el término de mayor grado del dividendo entre el de mayor grado del divisor.
4. Multiplicar el resultado por el divisor completo y restar del dividendo.
5. Repetir el proceso hasta que el grado del resto sea menor que el grado del divisor.

2.2. Resolución Completa

Paso 1: Ordenamos y completamos los polinomios.

$$\text{Dividendo: } -2x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 4x + 1$$

$$\text{Divisor: } x^2 + x - 2$$

Paso 2: Realizamos la división paso a paso.

Primera división:

$$\frac{-2x^4}{x^2} = -2x^2$$

Multiplicamos $-2x^2$ por $(x^2 + x - 2)$:

$$-2x^2 \cdot (x^2 + x - 2) = -2x^4 - 2x^3 + 4x^2$$

Restamos del dividendo:

$$\begin{aligned} & (-2x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 4x + 1) - (-2x^4 - 2x^3 + 4x^2) \\ &= -2x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 4x + 1 + 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 \\ &= 2x^3 - 7x^2 + 4x + 1 \end{aligned}$$

Segunda división:

$$\frac{2x^3}{x^2} = 2x$$

Multiplicamos $2x$ por $(x^2 + x - 2)$:

$$2x \cdot (x^2 + x - 2) = 2x^3 + 2x^2 - 4x$$

Restamos:

$$\begin{aligned} (2x^3 - 7x^2 + 4x + 1) - (2x^3 + 2x^2 - 4x) \\ = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 1 - 2x^3 - 2x^2 + 4x \\ = -9x^2 + 8x + 1 \end{aligned}$$

Tercera división:

$$\frac{-9x^2}{x^2} = -9$$

Multiplicamos -9 por $(x^2 + x - 2)$:

$$-9 \cdot (x^2 + x - 2) = -9x^2 - 9x + 18$$

Restamos:

$$\begin{aligned} (-9x^2 + 8x + 1) - (-9x^2 - 9x + 18) \\ = -9x^2 + 8x + 1 + 9x^2 + 9x - 18 \\ = 17x - 17 \end{aligned}$$

Paso 3: Como el grado del resto $(17x - 17)$ es 1, que es menor que el grado del divisor (2), la división ha terminado.

Solución Final

$$\text{Cociente: } Q(x) = -2x^2 + 2x - 9$$

$$\text{Resto: } R(x) = 17x - 17$$

2.3. Verificación

Verificamos que se cumple: Dividendo = Divisor $\times$ Cociente + Resto

$$\begin{aligned} (x^2 + x - 2) \cdot (-2x^2 + 2x - 9) + (17x - 17) \\ = -2x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x^3 + 2x^2 - 4x - 9x^2 - 9x + 18 + 17x - 17 \\ = -2x^4 + (-2x^3 + 2x^3) + (4x^2 + 2x^2 - 9x^2) + (-4x - 9x + 17x) + (18 - 17) \\ = -2x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 4x + 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

2.4. Ilustración del Proceso

	Dividendo:	$-2x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 4x + 1$
	Cociente:	$-2x^2 + 2x - 9$
Divisor:		
$x^2 + x - 2$		$ \begin{array}{r} -2x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 4x + 1 \\ \underline{-2x^2 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2} \\ 2x^3 - 7x^2 + 4x + 1 \\ \underline{2x - 2x^3 + 2x^2 - 4x} \\ -9x^2 + 8x + 1 \\ \underline{-9 - 9x^2 - 9x + 18} \\ \text{Resto: } 17x - 17 \end{array} $

Figura 2: Proceso de división de polinomios paso a paso

3. Ejercicio 3: Operaciones con Polinomios

Enunciado

Realiza la siguiente operación con polinomios y simplifica el resultado:

$$(x^2 - x + 3) \cdot (3x - 5) - (2x - 3) \cdot (x + 3)^2$$

3.1. Estrategia de Resolución

Para resolver esta operación compleja:

1. Desarrollaremos $(x + 3)^2$ usando la identidad notable: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. Multiplicaremos $(x^2 - x + 3) \cdot (3x - 5)$ término a término
3. Multiplicaremos $(2x - 3) \cdot (x + 3)^2$
4. Restaremos los dos productos obtenidos
5. Simplificaremos reduciendo términos semejantes

3.2. Resolución Completa

Paso 1: Desarrollamos $(x + 3)^2$ usando la identidad notable.

$$\begin{aligned}(x + 3)^2 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 \\ &= x^2 + 6x + 9\end{aligned}$$

Paso 2: Calculamos el primer producto: $(x^2 - x + 3) \cdot (3x - 5)$

Aplicamos la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned}&(x^2 - x + 3) \cdot (3x - 5) \\ &= x^2 \cdot (3x - 5) - x \cdot (3x - 5) + 3 \cdot (3x - 5) \\ &= x^2 \cdot 3x + x^2 \cdot (-5) - x \cdot 3x - x \cdot (-5) + 3 \cdot 3x + 3 \cdot (-5) \\ &= 3x^3 - 5x^2 - 3x^2 + 5x + 9x - 15 \\ &= 3x^3 + (-5x^2 - 3x^2) + (5x + 9x) - 15 \\ &= 3x^3 - 8x^2 + 14x - 15\end{aligned}$$

Paso 3: Calculamos el segundo producto: $(2x - 3) \cdot (x + 3)^2$

Sustituimos $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$:

$$\begin{aligned}&(2x - 3) \cdot (x^2 + 6x + 9) \\ &= 2x \cdot (x^2 + 6x + 9) - 3 \cdot (x^2 + 6x + 9) \\ &= 2x \cdot x^2 + 2x \cdot 6x + 2x \cdot 9 - 3 \cdot x^2 - 3 \cdot 6x - 3 \cdot 9 \\ &= 2x^3 + 12x^2 + 18x - 3x^2 - 18x - 27 \\ &= 2x^3 + (12x^2 - 3x^2) + (18x - 18x) - 27 \\ &= 2x^3 + 9x^2 + 0x - 27 \\ &= 2x^3 + 9x^2 - 27\end{aligned}$$

Paso 4: Realizamos la resta de los dos productos.

$$\begin{aligned}
 & (3x^3 - 8x^2 + 14x - 15) - (2x^3 + 9x^2 - 27) \\
 &= 3x^3 - 8x^2 + 14x - 15 - 2x^3 - 9x^2 + 27 \\
 &= (3x^3 - 2x^3) + (-8x^2 - 9x^2) + 14x + (-15 + 27) \\
 &= x^3 - 17x^2 + 14x + 12
 \end{aligned}$$

Solución Final

$$x^3 - 17x^2 + 14x + 12$$

3.3. Verificación Numérica

Verificamos para $x = 1$:

Expresión original:

$$\begin{aligned}
 & (1^2 - 1 + 3) \cdot (3 \cdot 1 - 5) - (2 \cdot 1 - 3) \cdot (1 + 3)^2 \\
 &= (1 - 1 + 3) \cdot (3 - 5) - (2 - 3) \cdot (4)^2 \\
 &= 3 \cdot (-2) - (-1) \cdot 16 \\
 &= -6 - (-16) \\
 &= -6 + 16 \\
 &= 10
 \end{aligned}$$

Resultado simplificado:

$$\begin{aligned}
 1^3 - 17 \cdot 1^2 + 14 \cdot 1 + 12 &= 1 - 17 + 14 + 12 \\
 &= 10 \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

3.4. Ilustración Gráfica

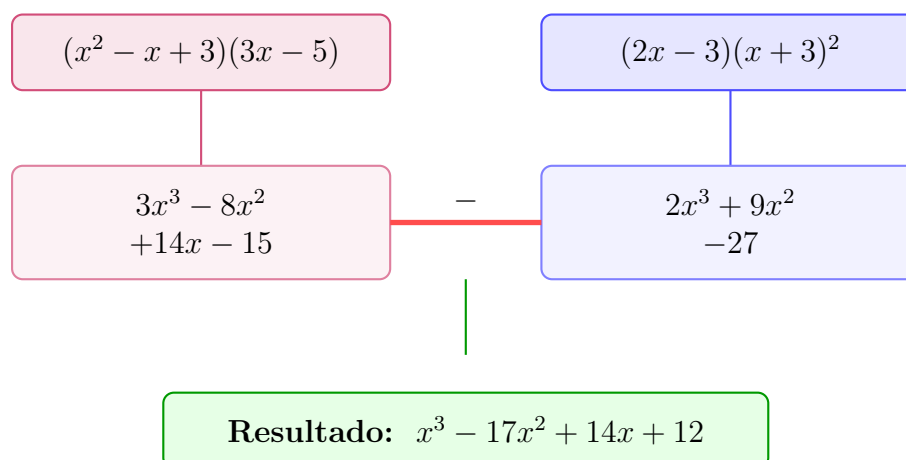


Figura 3: Esquema de operaciones con polinomios

4. Ejercicio 4: Regla de Ruffini y Valor Numérico

Enunciado

a) Utiliza la regla de Ruffini para realizar la siguiente división:

$$(-14x^3 - 2x^4 - 21x + x^5 - 1) : (x - 5)$$

b) ¿Cuál es el valor numérico del polinomio $(-14x^3 - 2x^4 - 21x + x^5 - 1)$ en $x = 5$?

4.1. Fundamento Teórico

Regla de Ruffini: Es un método abreviado para dividir un polinomio entre un binomio de la forma $(x - a)$.

Teorema del Resto: El resto de la división $P(x) : (x - a)$ es igual a $P(a)$.

Por tanto, el apartado (b) se resolverá automáticamente al obtener el resto en el apartado (a).

4.2. Apartado a) - Resolución con Ruffini

Paso 1: Ordenamos el polinomio por grado decreciente.

$$P(x) = x^5 - 2x^4 - 14x^3 + 0x^2 - 21x - 1$$

Paso 2: Identificamos los coeficientes (completando con 0 el término de x^2):

Coeficientes: 1, -2, -14, 0, -21, -1

Paso 3: Como dividimos entre $(x - 5)$, el valor a usar es $a = 5$.

Paso 4: Aplicamos la regla de Ruffini:

	1	-2	-14	0	-21	-1
5		5	15	5	25	20
	1	3	1	5	4	19

Explicación detallada de cada paso:

1. Bajamos el primer coeficiente: 1
2. Multiplicamos $1 \times 5 = 5$ y sumamos a -2: $-2 + 5 = 3$
3. Multiplicamos $3 \times 5 = 15$ y sumamos a -14: $-14 + 15 = 1$
4. Multiplicamos $1 \times 5 = 5$ y sumamos a 0: $0 + 5 = 5$
5. Multiplicamos $5 \times 5 = 25$ y sumamos a -21: $-21 + 25 = 4$
6. Multiplicamos $4 \times 5 = 20$ y sumamos a -1: $-1 + 20 = 19$

Paso 5: Interpretamos el resultado.

Los coeficientes de la última fila (excepto el último) son los coeficientes del cociente:

$$Q(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 5x + 4$$

El último número es el resto:

$$R = 19$$

Solución Apartado a)

$$\text{Cociente: } Q(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 5x + 4$$

$$\text{Resto: } R = 19$$

4.3. Apartado b) - Valor Numérico

Por el Teorema del Resto, el valor numérico del polinomio en $x = 5$ es igual al resto de la división:

Solución Apartado b)

$$P(5) = 19$$

4.4. Verificación Directa

Verificamos calculando directamente $P(5)$:

$$\begin{aligned} P(5) &= 5^5 - 2 \cdot 5^4 - 14 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 - 21 \cdot 5 - 1 \\ &= 3125 - 2 \cdot 625 - 14 \cdot 125 + 0 - 105 - 1 \\ &= 3125 - 1250 - 1750 - 105 - 1 \\ &= 3125 - 3106 \\ &= 19 \quad \checkmark \end{aligned}$$

4.5. Ilustración de la Regla de Ruffini

$a = 5$	1	-2	-14	0	-21	-1
	5	15	5	25	20	
	1	3	1	5	4	19
	Coeficientes del Cociente					Resto

Figura 4: Aplicación de la Regla de Ruffini paso a paso

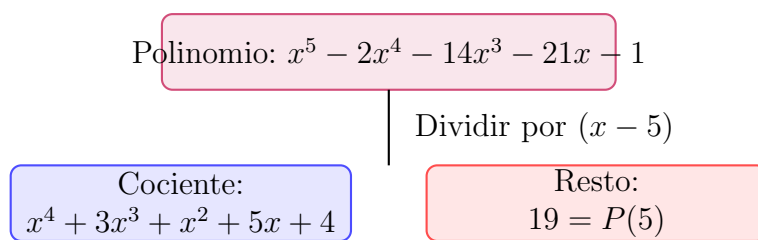


Figura 5: Relación entre división y valor numérico

5. Ejercicio 5: Identidades Notables

Enunciado

Utiliza las identidades notables para desarrollar las siguientes expresiones y simplifica el resultado:

a) $(2\sqrt{x} - 3)^2$

b) $\left(\frac{9}{2} + 2\sqrt{5}\right) \cdot \left(\frac{9}{2} - 2\sqrt{5}\right)$

5.1. Identidades Notables a Utilizar

Cuadrado de una diferencia:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Suma por diferencia (diferencia de cuadrados):

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

5.2. Apartado a) - Resolución

Desarrollamos $(2\sqrt{x} - 3)^2$ usando la identidad del cuadrado de una diferencia.

Paso 1: Identificamos a y b .

$$a = 2\sqrt{x}, \quad b = 3$$

Paso 2: Aplicamos la fórmula $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

$$(2\sqrt{x} - 3)^2 = (2\sqrt{x})^2 - 2 \cdot (2\sqrt{x}) \cdot 3 + 3^2$$

Paso 3: Calculamos cada término.

$$\begin{aligned} (2\sqrt{x})^2 &= 2^2 \cdot (\sqrt{x})^2 = 4x \\ 2 \cdot (2\sqrt{x}) \cdot 3 &= 12\sqrt{x} \\ 3^2 &= 9 \end{aligned}$$

Paso 4: Sustituimos y simplificamos.

$$(2\sqrt{x} - 3)^2 = 4x - 12\sqrt{x} + 9$$

Solución Apartado a)

$$4x - 12\sqrt{x} + 9$$

5.3. Apartado b) - Resolución

Desarrollamos $\left(\frac{9}{2} + 2\sqrt{5}\right) \cdot \left(\frac{9}{2} - 2\sqrt{5}\right)$ usando suma por diferencia.

Paso 1: Identificamos a y b .

$$a = \frac{9}{2}, \quad b = 2\sqrt{5}$$

Paso 2: Aplicamos la fórmula $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

$$\left(\frac{9}{2} + 2\sqrt{5}\right) \cdot \left(\frac{9}{2} - 2\sqrt{5}\right) = \left(\frac{9}{2}\right)^2 - (2\sqrt{5})^2$$

Paso 3: Calculamos cada cuadrado.

$$\begin{aligned} \left(\frac{9}{2}\right)^2 &= \frac{9^2}{2^2} = \frac{81}{4} \\ (2\sqrt{5})^2 &= 2^2 \cdot (\sqrt{5})^2 = 4 \cdot 5 = 20 \end{aligned}$$

Paso 4: Restamos.

$$\frac{81}{4} - 20 = \frac{81}{4} - \frac{80}{4} = \frac{81 - 80}{4} = \frac{1}{4}$$

Solución Apartado b)

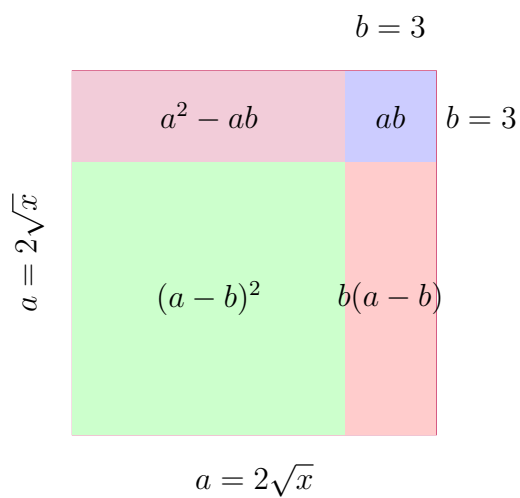
$$\boxed{\frac{1}{4}}$$

5.4. Verificación Numérica (apartado b)

Verificamos calculando directamente (usando $\sqrt{5} \approx 2,236$):

$$\begin{aligned} \left(\frac{9}{2} + 2\sqrt{5}\right) \cdot \left(\frac{9}{2} - 2\sqrt{5}\right) &\approx (4,5 + 4,472) \cdot (4,5 - 4,472) \\ &\approx 8,972 \cdot 0,028 \\ &\approx 0,251 \approx \frac{1}{4} \quad \checkmark \end{aligned}$$

5.5. Ilustraciones Geométricas



$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Figura 6: Interpretación geométrica del cuadrado de una diferencia

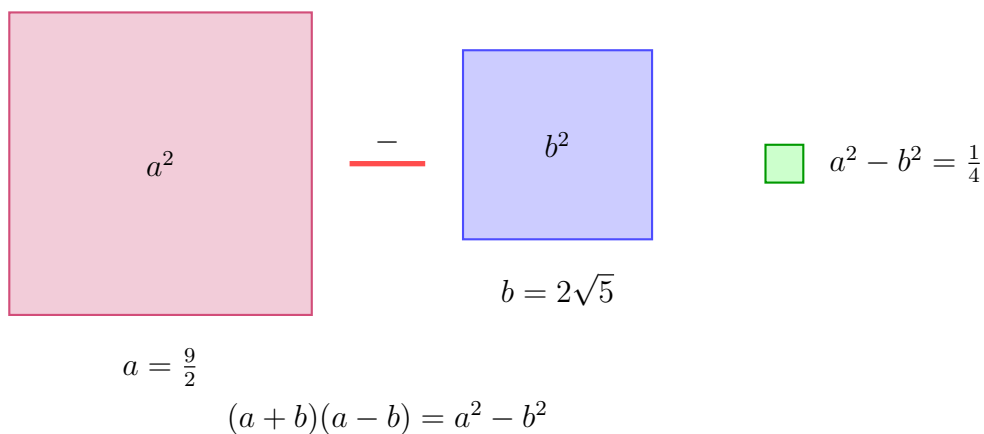


Figura 7: Diferencia de cuadrados: suma por diferencia

6. Ejercicio 6: Resolución de Ecuaciones

Enunciado

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 - x^3 - 5x^2 - 3x = 0$

b) $x^2 - 9 = 0$

c) $\sqrt{x+6} = x$

d) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

6.1. Apartado a) - Ecuación bicuadrática factorizable

Paso 1: Extraemos factor común x .

$$x^4 - x^3 - 5x^2 - 3x = 0$$

$$x(x^3 - x^2 - 5x - 3) = 0$$

Paso 2: Por la ley del producto cero:

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$$

Paso 3: Para resolver $x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$, buscamos raíces enteras usando el teorema de la raíz racional. Los divisores de 3 son: $\pm 1, \pm 3$.

Probamos $x = -1$:

$$(-1)^3 - (-1)^2 - 5(-1) - 3 = -1 - 1 + 5 - 3 = 0 \quad \checkmark$$

Paso 4: Dividimos por $(x + 1)$ usando Ruffini:

	1	-1	-5	-3
-1		-1	2	3
	1	-2	-3	0

Obtenemos: $x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x + 1)(x^2 - 2x - 3)$

Paso 5: Factorizamos $x^2 - 2x - 3$ usando la fórmula cuadrática o factorización directa:

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$$

Paso 6: La ecuación completa factorizada es:

$$x(x + 1)(x - 3)(x + 1) = 0$$

$$x(x + 1)^2(x - 3) = 0$$

Paso 7: Las soluciones son:

$$x = 0, \quad x = -1 \text{ (doble)}, \quad x = 3$$

Solución Apartado a)

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 3$$

6.2. Apartado b) - Ecuación de segundo grado incompleta

Paso 1: Aislamos x^2 .

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 9$$

Paso 2: Extraemos raíz cuadrada (considerando ambos signos).

$$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

También podemos factorizar como diferencia de cuadrados:

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3) = 0$$

Solución Apartado b)

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 3$$

6.3. Apartado c) - Ecuación irracional

Paso 1: Determinamos el dominio. Para que $\sqrt{x+6}$ esté definida:

$$x + 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq -6$$

Paso 2: Elevamos al cuadrado ambos miembros (cuidado: pueden aparecer soluciones extrañas).

$$\sqrt{x+6} = x$$

$$(\sqrt{x+6})^2 = x^2$$

$$x + 6 = x^2$$

Paso 3: Ordenamos la ecuación.

$$x^2 - x - 6 = 0$$

Paso 4: Resolvemos usando la fórmula cuadrática o factorización:

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2) = 0$$

$$x = 3 \quad \text{o} \quad x = -2$$

Paso 5: Verificamos las soluciones (importante en ecuaciones irracionales):

Para $x = 3$:

$$\sqrt{3+6} = \sqrt{9} = 3 \quad \checkmark$$

Para $x = -2$:

$$\sqrt{-2+6} = \sqrt{4} = 2 \neq -2 \quad \times$$

La solución $x = -2$ es extraña y se rechaza.

Solución Apartado c)

$$x = 3$$

6.4. Apartado d) - Ecuación bicuadrática

Paso 1: Realizamos el cambio de variable $t = x^2$.

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

$$t^2 - 10t + 9 = 0$$

Paso 2: Resolvemos la ecuación cuadrática en t :

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2}$$

$$t_1 = \frac{10 + 8}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$t_2 = \frac{10 - 8}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

También podemos factorizar:

$$t^2 - 10t + 9 = (t - 9)(t - 1) = 0$$

Paso 3: Deshacemos el cambio de variable.

Para $t_1 = 9$:

$$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

Para $t_2 = 1$:

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Solución Apartado d)

$$x_1 = -3, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 3$$

6.5. Ilustraciones Gráficas

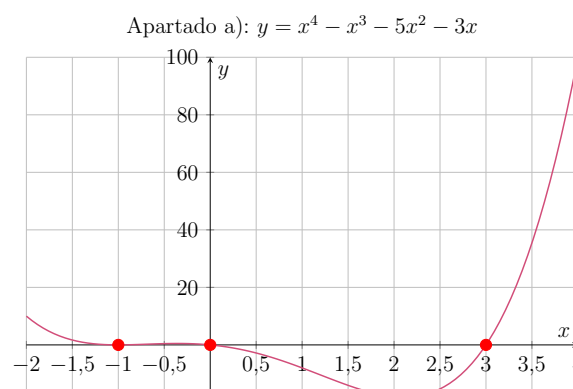


Figura 8: Gráfica del apartado a) mostrando las tres raíces

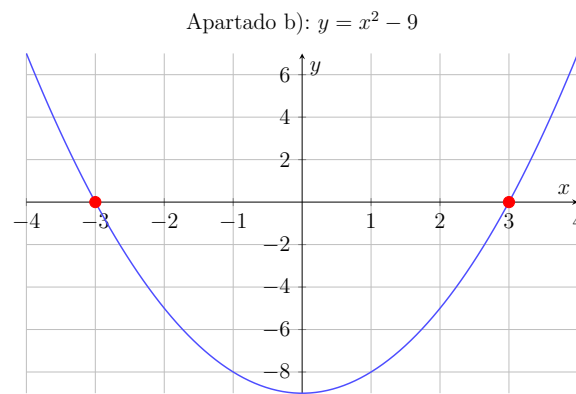


Figura 9: Gráfica del apartado b) - Parábola con dos raíces simétricas

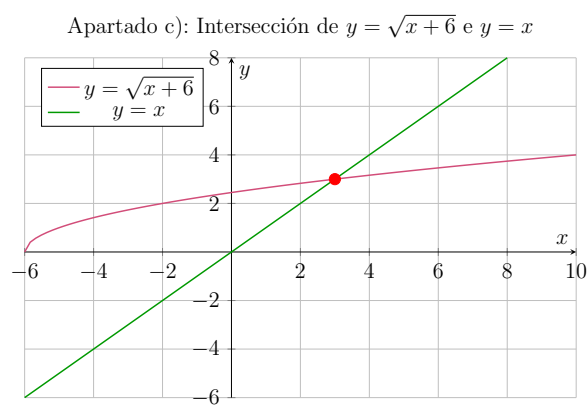


Figura 10: Apartado c): Única solución válida en la intersección

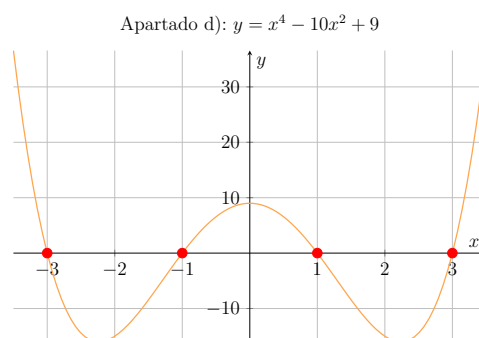


Figura 11: Gráfica del apartado d) con cuatro raíces simétricas

7. Ejercicio 7: Sistema de Ecuaciones - Problema de Aplicación

Enunciado

Sergio ha comprado 8 bolígrafos de la marca A y 10 de la marca B, pagando un total de 50 €. Un bolígrafo de la marca B es 50 céntimos más caro que uno de A. ¿Cuál es el precio de cada uno de ellos?

7.1. Planteamiento del Problema

Identificación de variables:

- Sea x el precio de un bolígrafo de la marca A (en euros)
- Sea y el precio de un bolígrafo de la marca B (en euros)

Traducción de las condiciones del problema a ecuaciones:

1. “8 bolígrafos A y 10 bolígrafos B cuestan 50 €”: $8x + 10y = 50$
2. “Un bolígrafo B es 50 céntimos (0.50 €) más caro que uno A”: $y = x + 0,5$

7.2. Resolución Completa

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 8x + 10y = 50 \\ y = x + 0,5 \end{cases}$$

Método de sustitución:

Paso 1: Ya tenemos y despejada en la segunda ecuación.

$$y = x + 0,5$$

Paso 2: Sustituimos en la primera ecuación.

$$\begin{aligned} 8x + 10y &= 50 \\ 8x + 10(x + 0,5) &= 50 \end{aligned}$$

Paso 3: Resolvemos para x .

$$\begin{aligned} 8x + 10x + 5 &= 50 \\ 18x + 5 &= 50 \\ 18x &= 50 - 5 \\ 18x &= 45 \\ x &= \frac{45}{18} \\ x &= \frac{45}{18} = \frac{5}{2} = 2,5 \end{aligned}$$

Paso 4: Calculamos y usando la segunda ecuación.

$$\begin{aligned}y &= x + 0,5 \\y &= 2,5 + 0,5 \\y &= 3\end{aligned}$$

Paso 5: Verificamos en la primera ecuación.

$$\begin{aligned}8x + 10y &= 8(2,5) + 10(3) \\&= 20 + 30 \\&= 50 \quad \checkmark\end{aligned}$$

Solución Final

Precio de un bolígrafo de marca A: $x = 2,50 \text{ €}$

Precio de un bolígrafo de marca B: $y = 3,00 \text{ €}$

7.3. Interpretación del Resultado

- Cada bolígrafo de la marca A cuesta **2.50 €**
- Cada bolígrafo de la marca B cuesta **3.00 €**
- La diferencia de precio es: $3,00 - 2,50 = 0,50 \text{ €}$ (50 céntimos) ✓
- El coste total es: $8 \times 2,50 + 10 \times 3,00 = 20 + 30 = 50 \text{ €}$ ✓

7.4. Método Alternativo: Reducción

También podemos resolver por el método de reducción:

Sistema original:

$$\begin{cases} 8x + 10y = 50 \\ y - x = 0,5 \end{cases}$$

Reescribimos la segunda ecuación:

$$\begin{cases} 8x + 10y = 50 \\ -x + y = 0,5 \end{cases}$$

Multiplicamos la segunda ecuación por 10:

$$\begin{cases} 8x + 10y = 50 \\ -10x + 10y = 5 \end{cases}$$

Restamos la segunda de la primera:

$$\begin{aligned}(8x + 10y) - (-10x + 10y) &= 50 - 5 \\8x + 10y + 10x - 10y &= 45 \\18x &= 45 \\x &= 2,5\end{aligned}$$

Luego: $y = x + 0,5 = 2,5 + 0,5 = 3$

7.5. Ilustración Gráfica

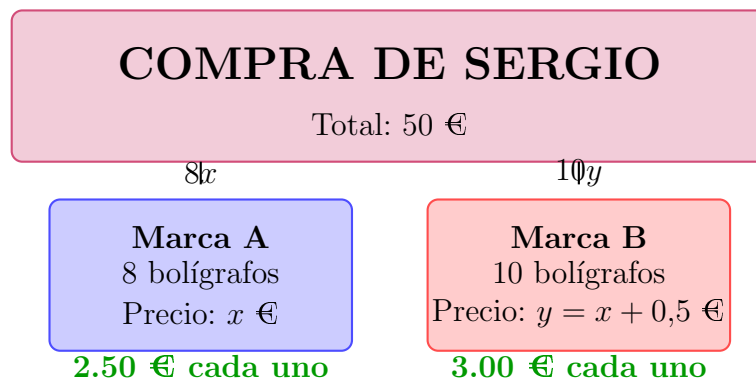


Figura 12: Esquema visual del problema

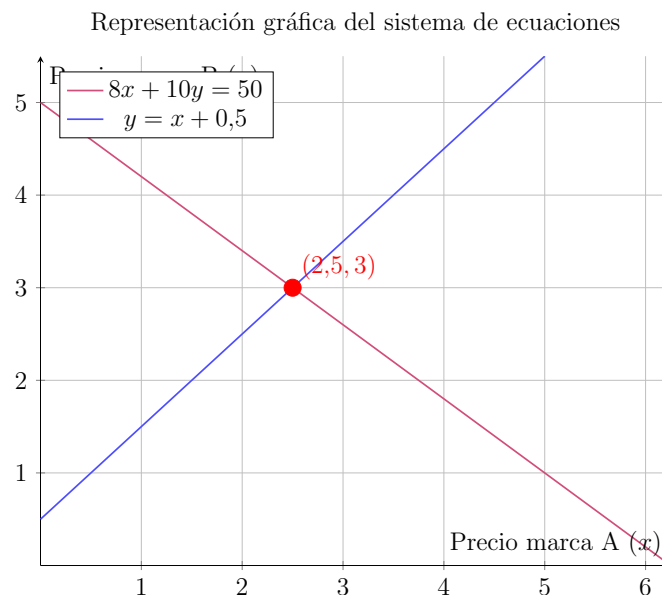


Figura 13: Intersección de las dos ecuaciones en el punto solución

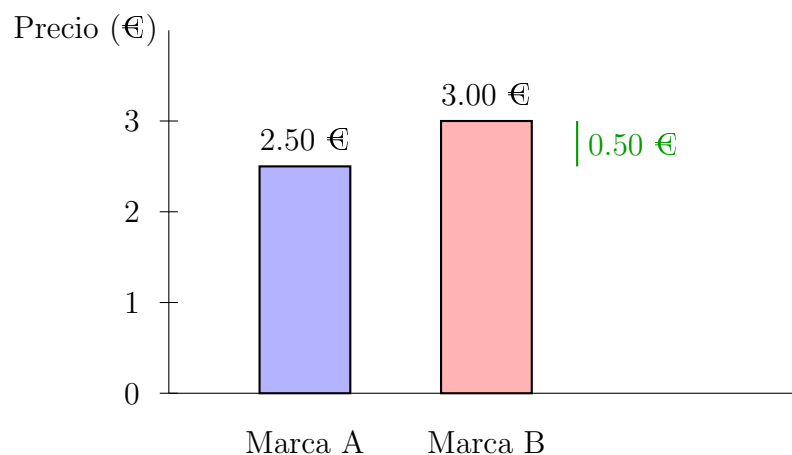


Figura 14: Comparación de precios entre las dos marcas

FIN DEL EXAMEN

Todas las soluciones han sido verificadas matemáticamente.

“El estudio de las matemáticas, como el Nilo, comienza en lo pequeño pero termina en lo magnífico.” — Charles Caleb Colton



Nº1.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a) 2(x - 1) + \frac{5}{2}x - 1 = -\frac{(x - 6)}{2} + 2x \quad b) -4x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$c) x^4 - x^2 = 2 \quad d) 2x^2 - 4x = 0$$

(2 PUNTOS)

Nº2.- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3(x + y) - 2y = x + y \\ \frac{x - y}{2} + x + \frac{1}{2} = y + x - 1 \end{cases}$$

(1 PUNTO)

Nº3.- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones no lineal:

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 6 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

(1 PUNTO)

Nº4.- La suma de dos números es 150 y la mitad de uno es el doble que el otro. ¿Qué números son?

(1 PUNTO)

Nº5.- Resuelve las siguientes inecuaciones:

$$a) 4(x + 1) - 2(x - 1) < \frac{x}{2} \quad b) x^2 + 2(x - 1) - 3 \geq x + 1$$

(2 PUNTOS)

Nº6.- Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

$$a) \begin{cases} 2x + 3 \geq 1 \\ -x + 2 \geq -1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ x + y \geq 1 \end{cases}$$

(2 PUNTOS)

Nº7.- Unos padres deciden ir a un concierto con sus hijos y tienen 150 €. Si compran entradas de 30 € les falta dinero, pero si compran entradas de 22 € les sobra dinero. ¿Cuántos hijos tienen? ¿Cuál es el nombre de los chiquillos?

(1 PUNTO)

SUERTE JÓVENES

Índice

1. Resuelve las siguientes ecuaciones	2
1.1. Ejercicio 1a: Ecuación lineal con fracciones	2
1.2. Ejercicio 1b: Ecuación cuadrática	4
1.3. Ejercicio 1c: Ecuación bicuadrática	6
1.4. Ejercicio 1d: Ecuación cuadrática incompleta	8
2. Sistema de ecuaciones lineales	10
3. Sistema de ecuaciones no lineal	12
4. Problema de números	14
5. Inecuaciones	16
5.1. Ejercicio 5a: Inecuación lineal	16
5.2. Ejercicio 5b: Inecuación cuadrática	18
6. Sistemas de inecuaciones	20
6.1. Ejercicio 6a: Sistema de inecuaciones lineales con una variable	20
6.2. Ejercicio 6b: Sistema de inecuaciones lineales con dos variables	22
7. Problema de aplicación: Entradas de concierto	24
Resumen de soluciones	27

1. Resuelve las siguientes ecuaciones

1.1. Ejercicio 1a: Ecuación lineal con fracciones

Enunciado

$$2(x - 1) + \frac{5}{2}x - 1 = -\frac{(x - 6)}{2} + 2x$$

Resolución paso a paso:

Paso 1: Expandir los paréntesis del lado izquierdo:

$$2x - 2 + \frac{5}{2}x - 1 = -\frac{(x - 6)}{2} + 2x$$

Paso 2: Simplificar el lado derecho:

$$2x - 2 + \frac{5}{2}x - 1 = -\frac{x - 6}{2} + 2x$$

$$2x - 2 + \frac{5}{2}x - 1 = \frac{-(x - 6)}{2} + 2x$$

$$2x - 2 + \frac{5}{2}x - 1 = \frac{-x + 6}{2} + 2x$$

Paso 3: Multiplicar toda la ecuación por 2 para eliminar denominadores:

$$2 \cdot \left(2x - 2 + \frac{5}{2}x - 1 \right) = 2 \cdot \left(\frac{-x + 6}{2} + 2x \right)$$

$$4x - 4 + 5x - 2 = -x + 6 + 4x$$

Paso 4: Agrupar términos semejantes en ambos lados:

$$9x - 6 = 3x + 6$$

Paso 5: Pasar todos los términos con x a la izquierda y los constantes a la derecha:

$$9x - 3x = 6 + 6$$

$$6x = 12$$

Paso 6: Despejar x:

$$x = \frac{12}{6} = 2$$

Solución

$$\boxed{x = 2}$$

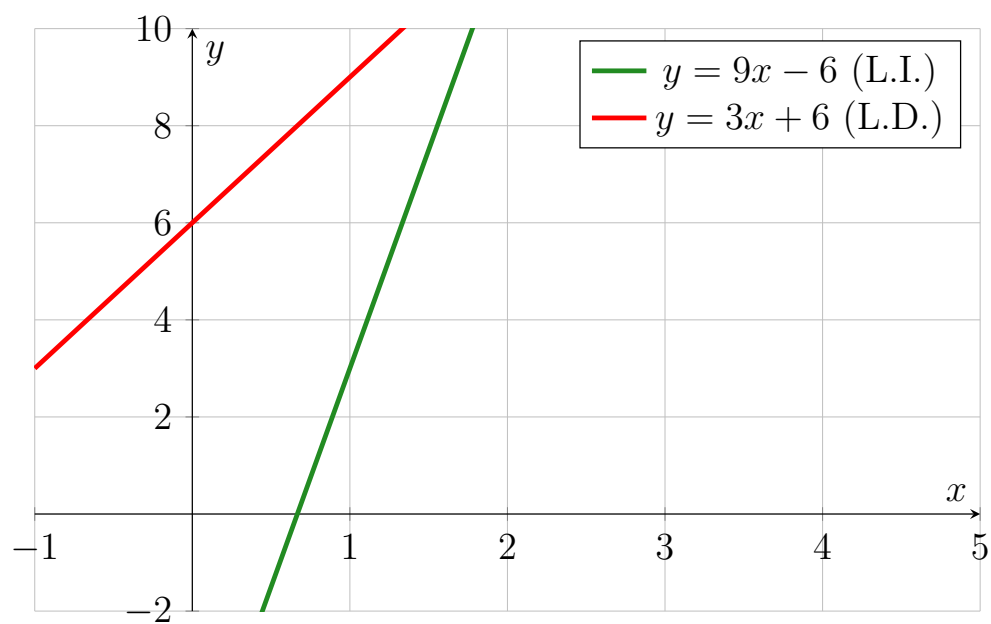
Verificación:

$$\text{L.I.} = 2(2 - 1) + \frac{5}{2}(2) - 1 = 2(1) + 5 - 1 = 2 + 5 - 1 = 6$$

$$\text{L.D.} = -\frac{2 - 6}{2} + 2(2) = -\frac{-4}{2} + 4 = 2 + 4 = 6$$

$$\text{L.I.} = \text{L.D.} \checkmark$$

Representación gráfica: $y = 9x - 6$ y $y = 3x + 6$



1.2. Ejercicio 1b: Ecuación cuadrática

Enunciado

$$-4x^2 + 3x + 1 = 0$$

Resolución paso a paso:

Esta es una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ donde:

- $a = -4$
- $b = 3$
- $c = 1$

Paso 1: Aplicamos la fórmula general para ecuaciones cuadráticas:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Paso 2: Calcular el discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(-4)(1) = 9 - (-16) = 9 + 16 = 25$$

Como $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

Paso 3: Sustituir los valores en la fórmula:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2(-4)} = \frac{-3 \pm 5}{-8}$$

Paso 4: Calcular las dos soluciones:

$$x_1 = \frac{-3 + 5}{-8} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4}$$

$$x_2 = \frac{-3 - 5}{-8} = \frac{-8}{-8} = 1$$

Solución

$$x_1 = -\frac{1}{4} \quad ; \quad x_2 = 1$$

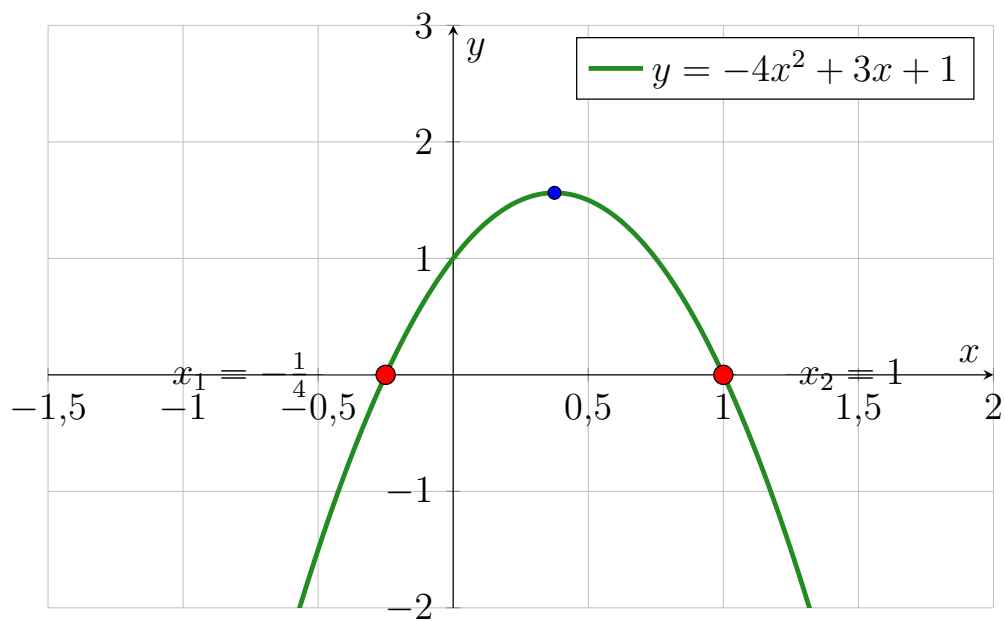
Verificación para $x_1 = -\frac{1}{4}$:

$$-4\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + 3\left(-\frac{1}{4}\right) + 1 = -4\left(\frac{1}{16}\right) - \frac{3}{4} + 1 = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 1 = -1 + 1 = 0 \checkmark$$

Verificación para $x_2 = 1$:

$$-4(1)^2 + 3(1) + 1 = -4 + 3 + 1 = 0 \checkmark$$

Parábola: $y = -4x^2 + 3x + 1$



1.3. Ejercicio 1c: Ecuación bicuadrática

Enunciado

$$x^4 - x^2 = 2$$

Resolución paso a paso:

Paso 1: Reescribir la ecuación en forma estándar:

$$x^4 - x^2 - 2 = 0$$

Esta es una ecuación bicuadrática. Hacemos el cambio de variable: $t = x^2$

Paso 2: Sustituir y obtener una ecuación cuadrática en t :

$$t^2 - t - 2 = 0$$

Paso 3: Resolver la ecuación cuadrática. Identificamos los coeficientes:

- $a = 1$
- $b = -1$
- $c = -2$

Paso 4: Podemos factorizar:

$$t^2 - t - 2 = (t - 2)(t + 1) = 0$$

O usar la fórmula general:

$$t = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$t_1 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$t_2 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Paso 5: Deshacer el cambio de variable ($t = x^2$):

Para $t_1 = 2$:

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

$$x_1 = \sqrt{2} \quad ; \quad x_2 = -\sqrt{2}$$

Para $t_2 = -1$:

$$x^2 = -1$$

Esta ecuación no tiene solución real (no existe raíz cuadrada real de un número negativo).

Solución

$$x_1 = \sqrt{2} \approx 1,414 \quad ; \quad x_2 = -\sqrt{2} \approx -1,414$$

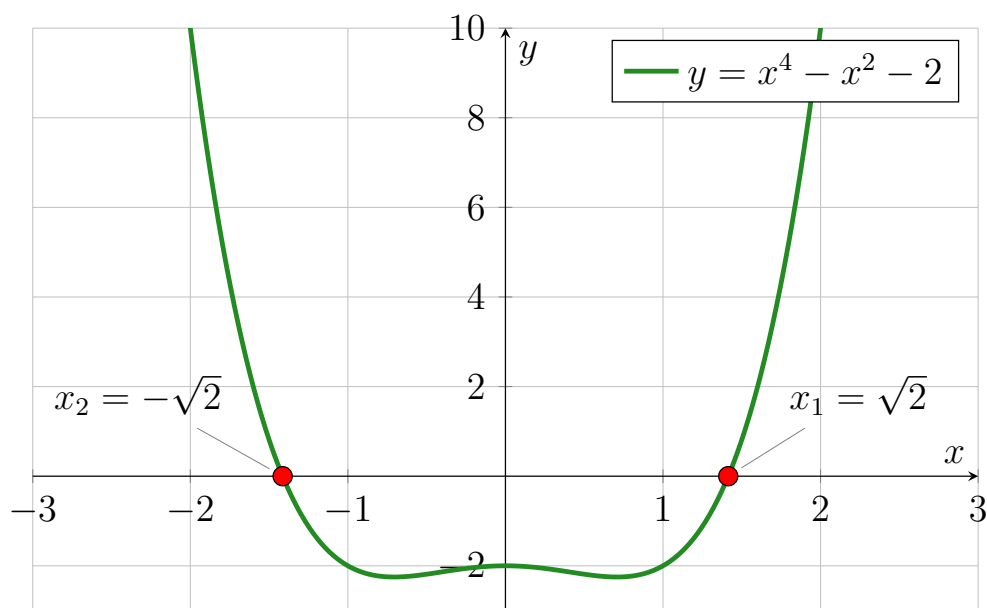
Verificación para $x = \sqrt{2}$:

$$(\sqrt{2})^4 - (\sqrt{2})^2 = 4 - 2 = 2 \checkmark$$

Verificación para $x = -\sqrt{2}$:

$$(-\sqrt{2})^4 - (-\sqrt{2})^2 = 4 - 2 = 2 \checkmark$$

Gráfica: $y = x^4 - x^2 - 2$



1.4. Ejercicio 1d: Ecuación cuadrática incompleta

Enunciado

$$2x^2 - 4x = 0$$

Resolución paso a paso:

Esta es una ecuación cuadrática incompleta (falta el término independiente).

Paso 1: Factorizar sacando factor común:

$$2x^2 - 4x = 0$$

$$2x(x - 2) = 0$$

Paso 2: Aplicar la ley del producto nulo (si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$):

$$2x = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0$$

Paso 3: Resolver cada ecuación:

De $2x = 0$:

$$x_1 = 0$$

De $x - 2 = 0$:

$$x_2 = 2$$

Solución

$$x_1 = 0 \quad ; \quad x_2 = 2$$

Verificación para $x_1 = 0$:

$$2(0)^2 - 4(0) = 0 - 0 = 0 \checkmark$$

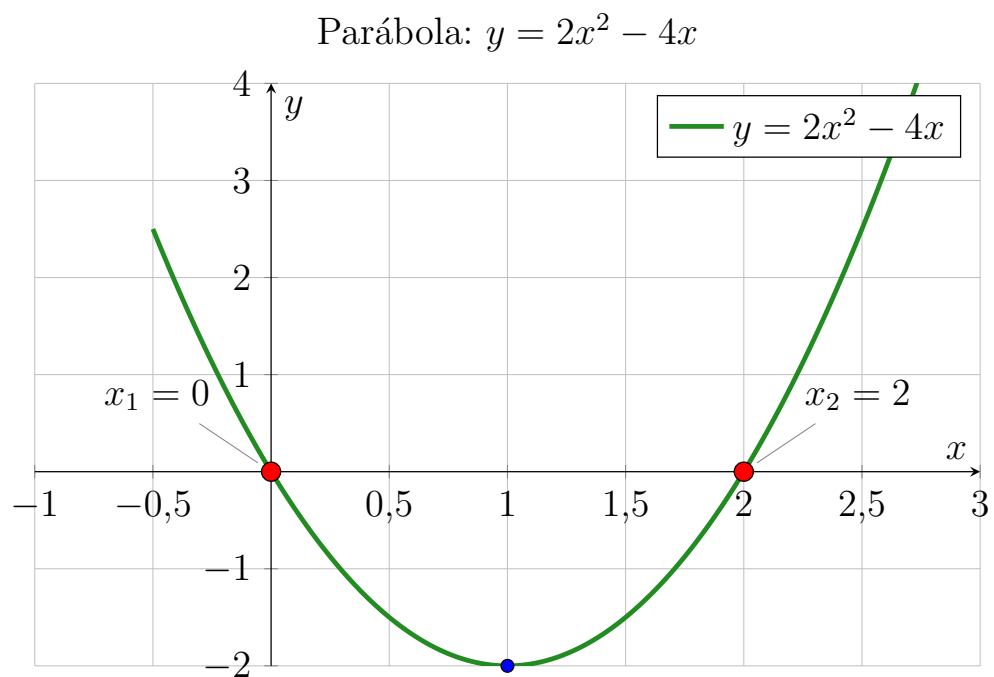
Verificación para $x_2 = 2$:

$$2(2)^2 - 4(2) = 2(4) - 8 = 8 - 8 = 0 \checkmark$$

Método alternativo (fórmula general): Para $2x^2 - 4x = 0$ con $a = 2$, $b = -4$, $c = 0$:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2)(0)}}{2(2)} = \frac{4 \pm \sqrt{16}}{4} = \frac{4 \pm 4}{4}$$

$$x_1 = \frac{4+4}{4} = 2 \quad ; \quad x_2 = \frac{4-4}{4} = 0$$



2. Sistema de ecuaciones lineales

Enunciado

$$\begin{cases} 3(x + y) - 2y = x + y \\ \frac{x - y}{2} + x + \frac{1}{2} = y + x - 1 \end{cases}$$

Resolución paso a paso:

Paso 1: Simplificar la primera ecuación:

$$3(x + y) - 2y = x + y$$

$$3x + 3y - 2y = x + y$$

$$3x + y = x + y$$

$$3x - x = y - y$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

Paso 2: Simplificar la segunda ecuación:

$$\frac{x - y}{2} + x + \frac{1}{2} = y + x - 1$$

Multiplicamos toda la ecuación por 2:

$$2 \cdot \left(\frac{x - y}{2} + x + \frac{1}{2} \right) = 2 \cdot (y + x - 1)$$

$$(x - y) + 2x + 1 = 2y + 2x - 2$$

$$x - y + 2x + 1 = 2y + 2x - 2$$

$$3x - y + 1 = 2y + 2x - 2$$

Paso 3: Agrupar términos:

$$3x - 2x - y - 2y = -2 - 1$$

$$x - 3y = -3$$

Paso 4: Sustituir $x = 0$ (obtenido de la primera ecuación):

$$0 - 3y = -3$$

$$-3y = -3$$

$$y = 1$$

Solución

$$x = 0 \quad ; \quad y = 1$$

Solución: $(0, 1)$ **Verificación en la primera ecuación:**

$$3(0 + 1) - 2(1) = 0 + 1$$

$$3 - 2 = 1$$

$$1 = 1 \checkmark$$

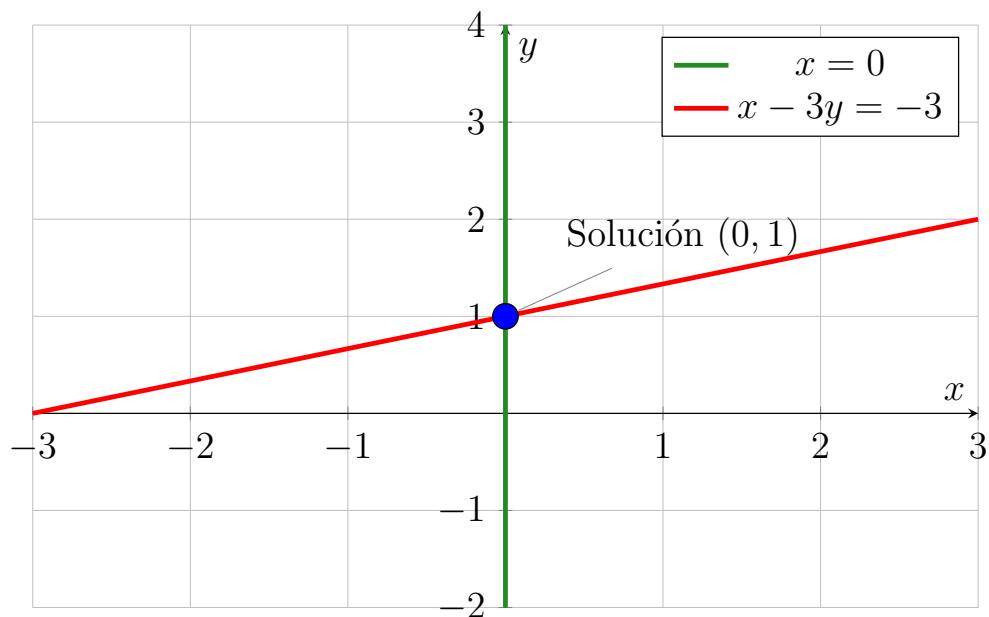
Verificación en la segunda ecuación:

$$\frac{0 - 1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 1 + 0 - 1$$

$$\frac{-1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$0 = 0 \checkmark$$

Sistema de ecuaciones lineales



3. Sistema de ecuaciones no lineal

Enunciado

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 6 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Resolución paso a paso:

Este es un sistema formado por una ecuación de segundo grado (elipse) y una ecuación lineal (recta).

Paso 1: De la segunda ecuación, despejar x :

$$x + y = 3$$

$$x = 3 - y$$

Paso 2: Sustituir en la primera ecuación:

$$(3 - y)^2 + 2y^2 = 6$$

Paso 3: Desarrollar el binomio:

$$9 - 6y + y^2 + 2y^2 = 6$$

Paso 4: Simplificar y ordenar:

$$3y^2 - 6y + 9 = 6$$

$$3y^2 - 6y + 3 = 0$$

Paso 5: Dividir entre 3:

$$y^2 - 2y + 1 = 0$$

Paso 6: Factorizar (binomio cuadrado perfecto):

$$(y - 1)^2 = 0$$

$$y - 1 = 0$$

$$y = 1$$

Paso 7: Sustituir $y = 1$ en $x = 3 - y$:

$$x = 3 - 1 = 2$$

Solución

$$x = 2 \quad ; \quad y = 1$$

Solución: $(2, 1)$

Nota: El sistema tiene una única solución, lo que significa que la recta es tangente a la elipse.

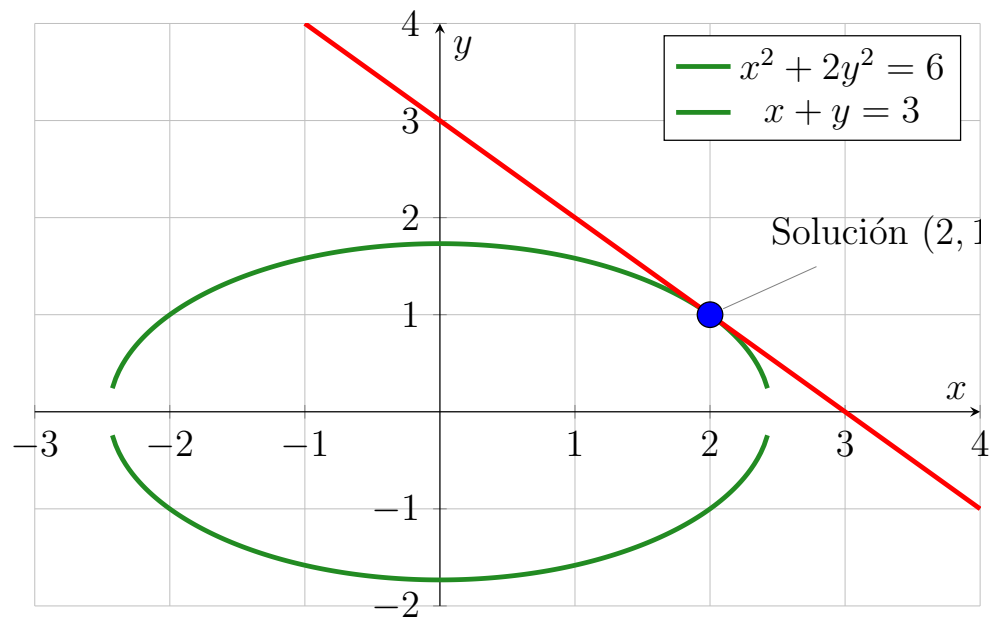
Verificación en la primera ecuación:

$$(2)^2 + 2(1)^2 = 4 + 2 = 6 \checkmark$$

Verificación en la segunda ecuación:

$$2 + 1 = 3 \checkmark$$

Sistema no lineal: Elipse y Recta



4. Problema de números

Enunciado

La suma de dos números es 150 y la mitad de uno es el doble que el otro. ¿Qué números son?

Resolución paso a paso:

Paso 1: Definir las variables.

Sea x el primer número y y el segundo número.

Paso 2: Traducir el enunciado a ecuaciones.

“La suma de dos números es 150”:

$$x + y = 150$$

“La mitad de uno es el doble que el otro”:

$$\frac{x}{2} = 2y$$

Paso 3: Tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 150 \\ \frac{x}{2} = 2y \end{cases}$$

Paso 4: Simplificar la segunda ecuación multiplicando por 2:

$$x = 4y$$

Paso 5: Sustituir en la primera ecuación:

$$4y + y = 150$$

$$5y = 150$$

$$y = \frac{150}{5} = 30$$

Paso 6: Calcular x :

$$x = 4y = 4(30) = 120$$

Solución

Los números son: $x = 120$ y $y = 30$

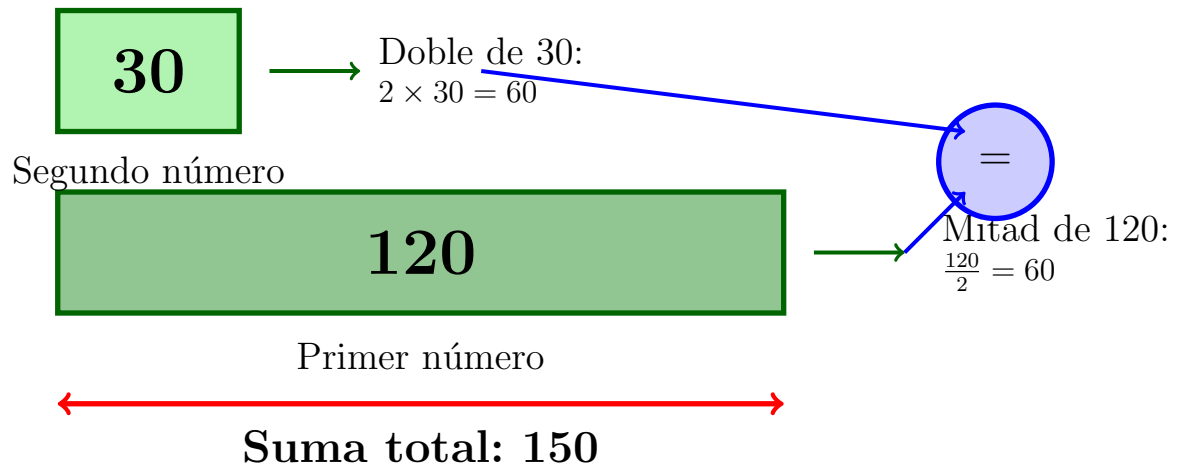
Verificación:

“La suma de dos números es 150”:

$$120 + 30 = 150 \checkmark$$

“La mitad de uno es el doble que el otro”:

$$\frac{120}{2} = 60 \quad \text{y} \quad 2(30) = 60 \checkmark$$



5. Inecuaciones

5.1. Ejercicio 5a: Inecuación lineal

Enunciado

$$4(x + 1) - 2(x - 1) < \frac{x}{2}$$

Resolución paso a paso:

Paso 1: Expandir los paréntesis:

$$4x + 4 - 2x + 2 < \frac{x}{2}$$

Paso 2: Simplificar el lado izquierdo:

$$2x + 6 < \frac{x}{2}$$

Paso 3: Multiplicar toda la inecuación por 2 para eliminar el denominador:

$$2(2x + 6) < 2 \cdot \frac{x}{2}$$

$$4x + 12 < x$$

Paso 4: Pasar todos los términos con x a la izquierda:

$$4x - x < -12$$

$$3x < -12$$

Paso 5: Dividir entre 3:

$$x < \frac{-12}{3}$$

$$x < -4$$

Solución

$$\boxed{x < -4}$$

Intervalo: $(-\infty, -4)$

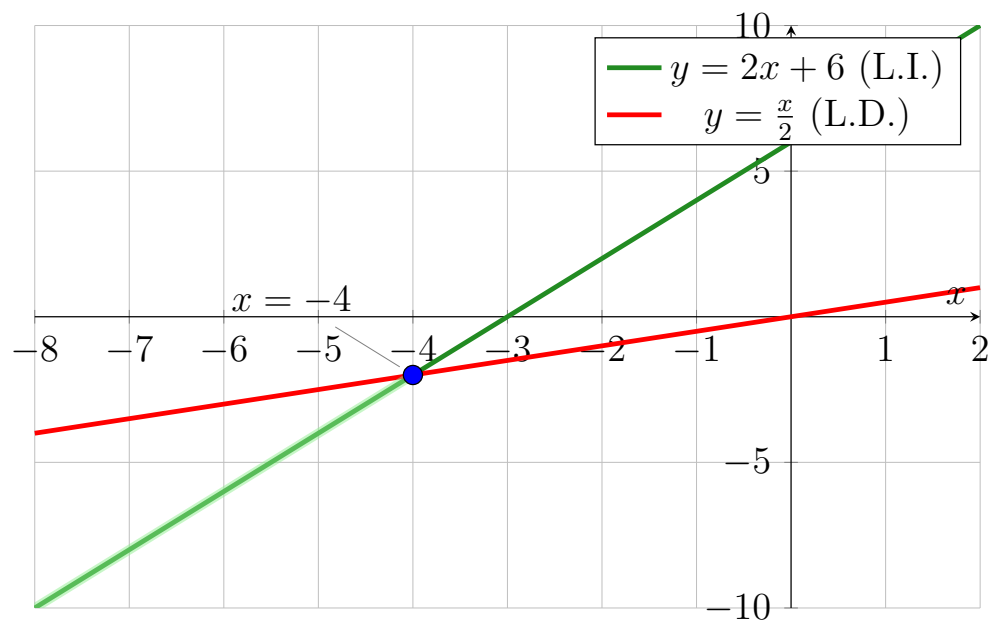
Verificación: Tomemos $x = -5$ (que cumple $x < -4$):

$$\text{L.I.} = 4(-5 + 1) - 2(-5 - 1) = 4(-4) - 2(-6) = -16 + 12 = -4$$

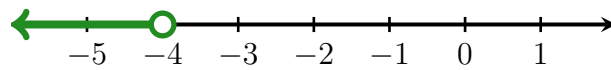
$$\text{L.D.} = \frac{-5}{2} = -2,5$$

$$-4 < -2,5 \checkmark$$

Inecuación: $4(x + 1) - 2(x - 1) < \frac{x}{2}$



Solución: $x < -4$



5.2. Ejercicio 5b: Inecuación cuadrática

Enunciado

$$x^2 + 2(x - 1) - 3 \geq x + 1$$

Resolución paso a paso:

Paso 1: Expandir y simplificar:

$$x^2 + 2x - 2 - 3 \geq x + 1$$

$$x^2 + 2x - 5 \geq x + 1$$

Paso 2: Pasar todos los términos al lado izquierdo:

$$x^2 + 2x - 5 - x - 1 \geq 0$$

$$x^2 + x - 6 \geq 0$$

Paso 3: Resolver la ecuación asociada $x^2 + x - 6 = 0$

Factorizamos o usamos la fórmula general. Buscamos dos números que multiplicados den -6 y sumados den 1 : son 3 y -2 .

$$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2) = 0$$

Las raíces son:

$$x_1 = -3 \quad ; \quad x_2 = 2$$

Paso 4: Estudiar el signo de la parábola.

La parábola $y = x^2 + x - 6$ tiene coeficiente principal positivo ($a = 1 > 0$), por lo que abre hacia arriba.

- Para $x < -3$: $(x + 3) < 0$ y $(x - 2) < 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 2) > 0 \checkmark$
- Para $-3 < x < 2$: $(x + 3) > 0$ y $(x - 2) < 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 2) < 0$
- Para $x > 2$: $(x + 3) > 0$ y $(x - 2) > 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 2) > 0 \checkmark$

Paso 5: Como la inecuación es ≥ 0 , incluimos los valores donde es igual a cero.

Solución

$$x \leq -3 \quad \text{o} \quad x \geq 2$$

$$\text{Intervalos: } (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$$

Verificación con $x = -4$:

$$(-4)^2 + (-4) - 6 = 16 - 4 - 6 = 6 \geq 0 \checkmark$$

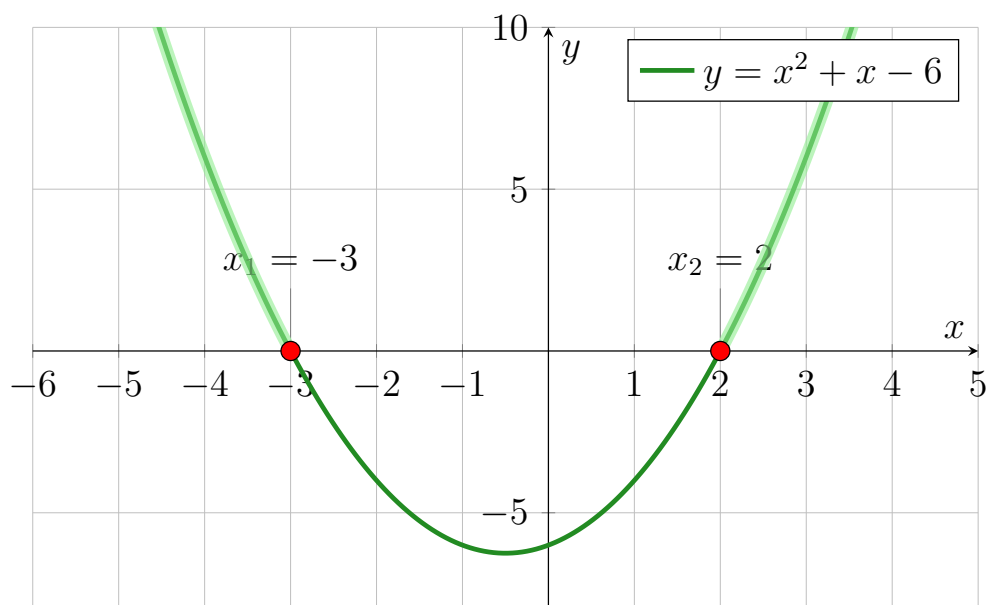
Verificación con $x = 0$:

$$(0)^2 + (0) - 6 = -6 \not\geq 0 \checkmark \text{ (no está en solución)}$$

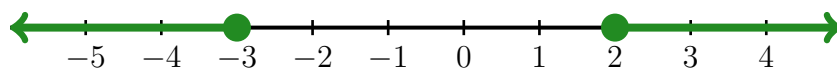
Verificación con $x = 3$:

$$(3)^2 + (3) - 6 = 9 + 3 - 6 = 6 \geq 0 \checkmark$$

Parábola: $y = x^2 + x - 6$



Solución: $x \leq -3$ o $x \geq 2$



6. Sistemas de inecuaciones

6.1. Ejercicio 6a: Sistema de inecuaciones lineales con una variable

Enunciado

$$\begin{cases} 2x + 3 \geq 1 \\ -x + 2 \geq -1 \end{cases}$$

Resolución paso a paso:

Paso 1: Resolver la primera inecuación:

$$2x + 3 \geq 1$$

$$2x \geq 1 - 3$$

$$2x \geq -2$$

$$x \geq -1$$

Paso 2: Resolver la segunda inecuación:

$$-x + 2 \geq -1$$

$$-x \geq -1 - 2$$

$$-x \geq -3$$

Al dividir entre -1 , cambia el sentido de la desigualdad:

$$x \leq 3$$

Paso 3: Encontrar la intersección de las soluciones:

$$x \geq -1 \quad \cap \quad x \leq 3$$

Solución

$$\boxed{-1 \leq x \leq 3}$$

Intervalo: $[-1, 3]$

Verificación con $x = 0$:

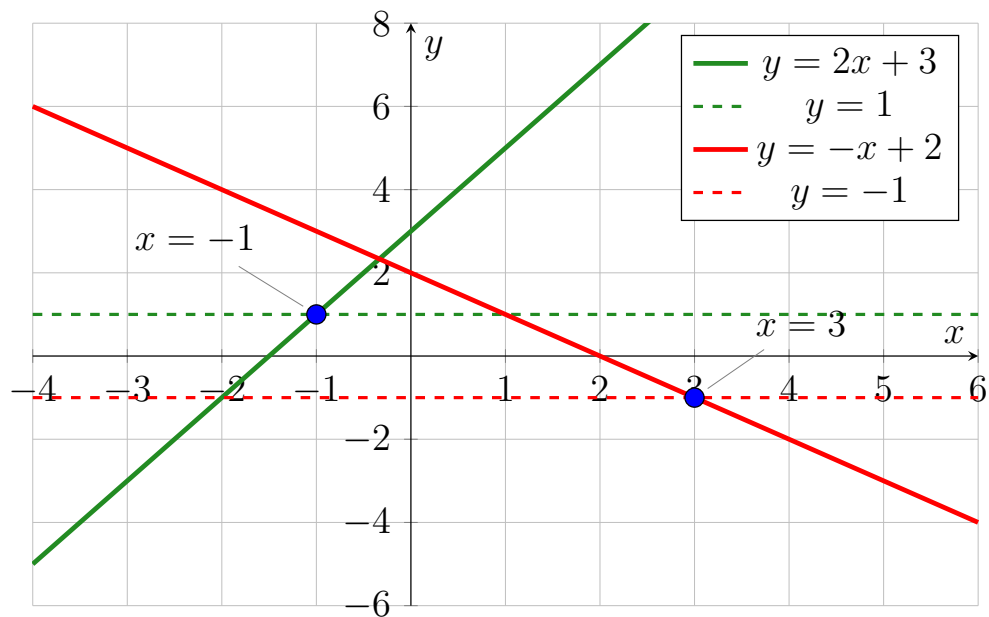
Primera inecuación: $2(0) + 3 = 3 \geq 1$ ✓

Segunda inecuación: $-(0) + 2 = 2 \geq -1$ ✓

Verificación con $x = -2$ (fuera de la solución):

Primera inecuación: $2(-2) + 3 = -1 \not\geq 1$ (no cumple)

Sistema de inecuaciones



$$2x + 3 \geq 1: \text{---} \bullet \text{---} \rightarrow$$

$$-x + 2 \geq -1: \leftarrow \text{---} \bullet \text{---} \rightarrow$$

Solución: $\text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \rightarrow$

6.2. Ejercicio 6b: Sistema de inecuaciones lineales con dos variables

Enunciado

$$\begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ x + y \geq 1 \end{cases}$$

Resolución paso a paso:

Este es un sistema de inecuaciones lineales con dos variables. La solución es una región del plano.

Paso 1: Analizar la primera inecuación $2x + y \leq 3$

La frontera es la recta: $2x + y = 3$, o bien $y = 3 - 2x$

Puntos de la recta:

- Si $x = 0$: $y = 3 \Rightarrow$ punto $(0, 3)$
- Si $y = 0$: $2x = 3 \Rightarrow x = 1,5 \Rightarrow$ punto $(1,5, 0)$

Para determinar la región: probamos con $(0, 0)$:

$$2(0) + 0 = 0 \leq 3$$

✓

La región es hacia el origen (abajo de la recta).

Paso 2: Analizar la segunda inecuación $x + y \geq 1$

La frontera es la recta: $x + y = 1$, o bien $y = 1 - x$

Puntos de la recta:

- Si $x = 0$: $y = 1 \Rightarrow$ punto $(0, 1)$
- Si $y = 0$: $x = 1 \Rightarrow$ punto $(1, 0)$

Para determinar la región: probamos con $(0, 0)$:

$$0 + 0 = 0 \not\geq 1$$

La región es opuesta al origen (arriba de la recta).

Paso 3: Encontrar los vértices de la región factible (intersección de las rectas):

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Restando la segunda de la primera:

$$x = 2$$

Sustituyendo en la segunda:

$$2 + y = 1 \Rightarrow y = -1$$

Punto de intersección: $(2, -1)$

Paso 4: Los vértices de la región factible son:

- Intersección de las dos rectas: $(2, -1)$
- Intersección de $2x + y = 3$ con eje y ($x = 0$): $(0, 3)$
- Intersección de $x + y = 1$ con eje y ($x = 0$): $(0, 1)$

Solución

La solución es la región del plano delimitada por las rectas $2x + y = 3$ y $x + y = 1$, incluyendo las fronteras.

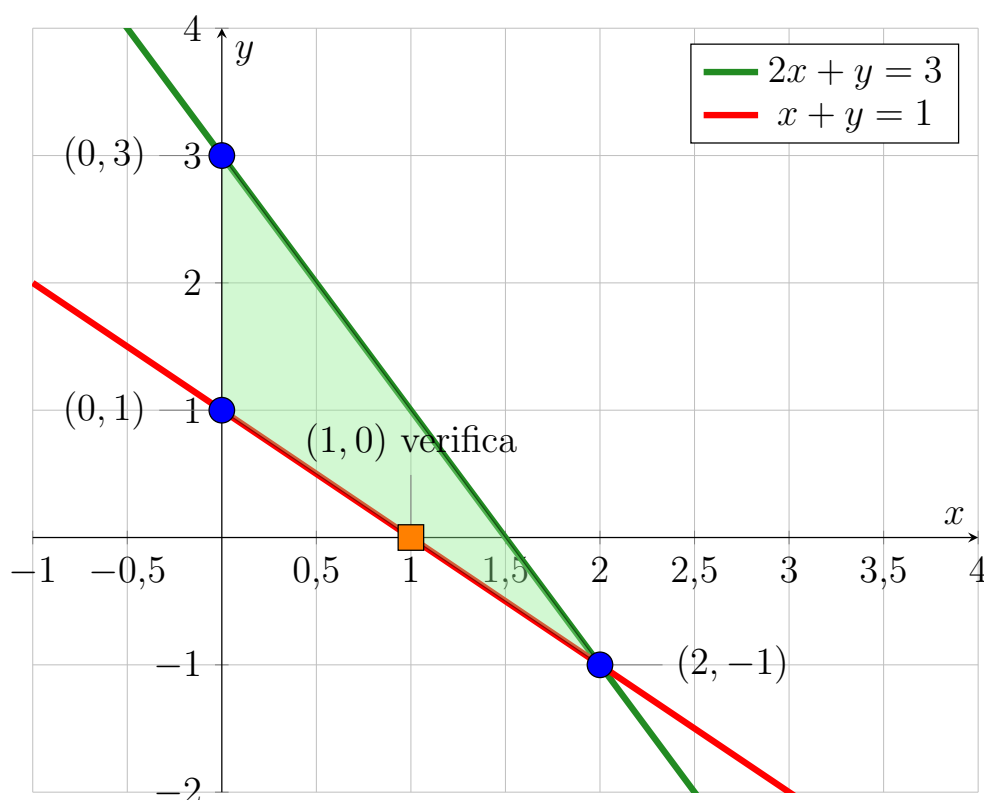
Región factible: Área convexa con vértices en $(0, 1)$, $(0, 3)$ y $(2, -1)$.

Verificación con el punto $(1, 0)$:

Primera inecuación: $2(1) + 0 = 2 \leq 3$ ✓

Segunda inecuación: $1 + 0 = 1 \geq 1$ ✓

Sistema de inecuaciones: Región factible



Verificación de vértices

Punto	$2x + y \leq 3$	$x + y \geq 1$
$(0, 1)$	$0 + 1 = 1 \leq 3$ ✓	$0 + 1 = 1 \geq 1$ ✓
$(0, 3)$	$0 + 3 = 3 \leq 3$ ✓	$0 + 3 = 3 \geq 1$ ✓

7. Problema de aplicación: Entradas de concierto

Enunciado

Unos padres deciden ir a un concierto con sus hijos y tienen 150 €. Si compran entradas de 30 € les falta dinero, pero si compran entradas de 22 € les sobra dinero. ¿Cuántos hijos tienen? ¿Cuál es el nombre de los chiquillos?

Resolución paso a paso:

Paso 1: Definir la variable.

Sea n el número total de personas que van al concierto (padres + hijos).

Como son dos padres más los hijos, si llamamos h al número de hijos:

$$n = h + 2$$

Paso 2: Plantear las inecuaciones según el enunciado.

“Si compran entradas de 30 € les falta dinero”:

$$30n > 150$$

“Si compran entradas de 22 € les sobra dinero”:

$$22n < 150$$

Paso 3: Resolver la primera inecuación:

$$30n > 150$$

$$n > \frac{150}{30}$$

$$n > 5$$

Paso 4: Resolver la segunda inecuación:

$$22n < 150$$

$$n < \frac{150}{22}$$

$$n < 6,818...$$

Paso 5: Combinar ambas condiciones:

$$5 < n < 6,818...$$

Como n debe ser un número entero (número de personas), la única posibilidad es:

$$n = 6$$

Paso 6: Calcular el número de hijos:

$$h = n - 2 = 6 - 2 = 4$$

Solución

Los padres tienen 4 hijos

Total de personas: 6 (2 padres + 4 hijos)

Verificación:

Con entradas de 30 €:

$$30 \times 6 = 180 \text{ €}$$

Como $180 > 150$, les falta dinero. ✓

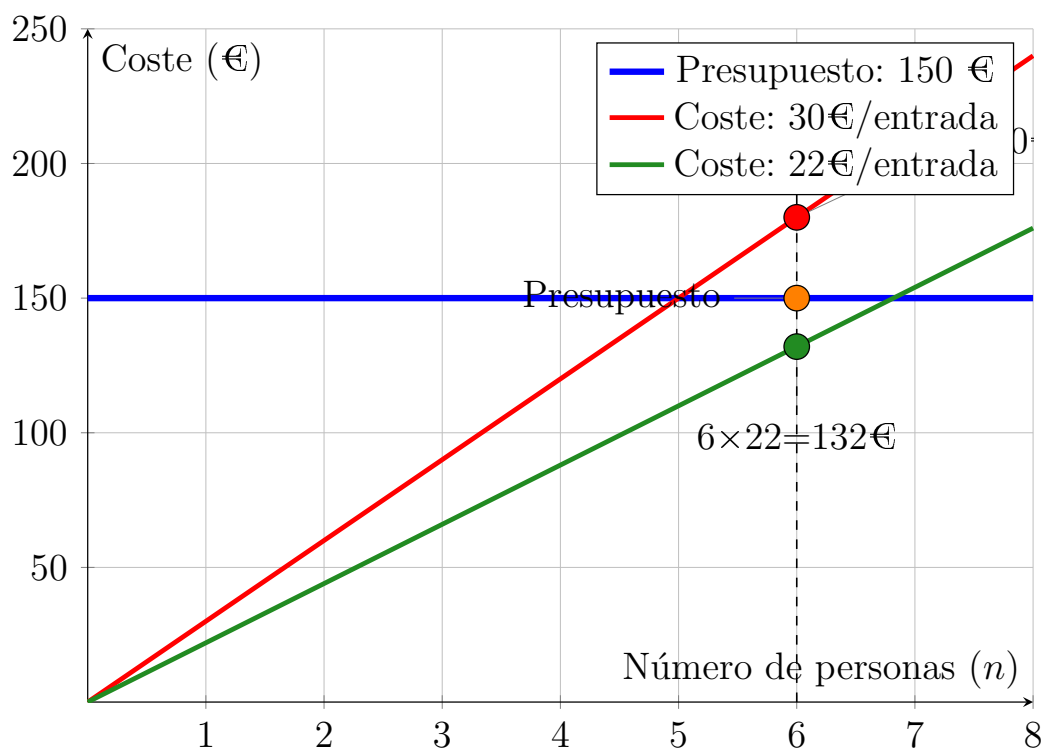
Con entradas de 22 €:

$$22 \times 6 = 132 \text{ €}$$

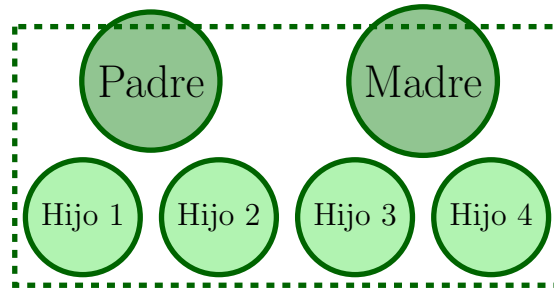
Como $132 < 150$, les sobra dinero ($150 - 132 = 18 \text{ €}$). ✓

Nota sobre los nombres: El enunciado pregunta “¿Cuál es el nombre de los chiquillos?”, pero no proporciona información para determinar los nombres de los hijos. Esta parte del problema no tiene solución matemática con los datos proporcionados.

Problema de las entradas



LA FAMILIA AL CONCIERTO



Total: 6 personas

Presupuesto: 150 €

$$30€ \times 6 = 180€$$

¡Falta dinero!

$$22€ \times 6 = 132€$$

¡Sobran 18€!

Resumen de soluciones

TODAS LAS SOLUCIONES DEL EXAMEN

Ejercicio 1: Ecuaciones

1a) $x = 2$

1b) $x_1 = -\frac{1}{4}$; $x_2 = 1$

1c) $x_1 = \sqrt{2} \approx 1,414$; $x_2 = -\sqrt{2} \approx -1,414$

1d) $x_1 = 0$; $x_2 = 2$

Ejercicio 2: Sistema lineal

Solución: $(x, y) = (0, 1)$

Ejercicio 3: Sistema no lineal

Solución: $(x, y) = (2, 1)$

Ejercicio 4: Problema de números

Los números son: 120 y 30

Ejercicio 5: Inecuaciones

5a) $x < -4$ Intervalo: $(-\infty, -4)$

5b) $x \leq -3$ o $x \geq 2$ Intervalos: $(-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$

Ejercicio 6: Sistemas de inecuaciones

6a) $-1 \leq x \leq 3$ Intervalo: $[-1, 3]$

6b) Región factible del plano con vértices en $(0, 1)$, $(0, 3)$ y $(2, -1)$

Ejercicio 7: Problema de aplicación

Los padres tienen 4 hijos (6 personas en total)

**“Las matemáticas son el alfabeto con el cual
Dios ha escrito el universo.”**

— *Galileo Galilei*

Nº1.- Calcula la altura sobre el lado desigual de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 25 centímetros y cuyo lado desigual mide 14 centímetros. Realiza un dibujo de la situación.

(1 PUNTO)

Nº2.- Calcula el perímetro y el área de un trapecio isósceles cuyas bases miden 14 y 24 centímetros respectivamente, y cuyo lado igual mide 13 centímetros. Realiza un dibujo de la situación.

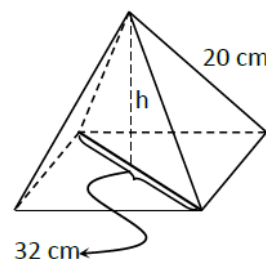
(1 PUNTO)

Nº3.- Calcula el área de un pentágono regular de 30 centímetros de lado y 17 centímetros de radio. Realiza un dibujo de la situación.

(1 PUNTO)

Nº4.- Calcula el volumen de la pirámide recta de base cuadrada que se muestra en la figura siguiente:

(2 PUNTOS)



Nº5.- Calcula el volumen de un cono de 10 centímetros de radio y 24 centímetros de altura. Realiza un dibujo de la situación.

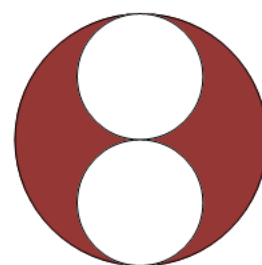
(1 PUNTO)

Nº6.- Calcula la altura de un cilindro de 3 dm de radio para que tenga una capacidad (volumen) de 100 litros. **Datos:** $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ litro}$;

(1 PUNTO)

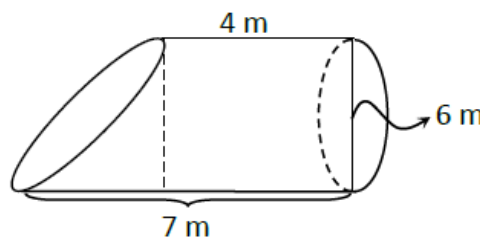
Nº7.- Calcula el área del siguiente recinto sombreado, sabiendo que la circunferencia exterior mide 10 centímetros de diámetro.

(1 PUNTO)



Nº8.- Calcula el volumen del cilindro cortado que se muestra en la figura:

(2 PUNTOS)

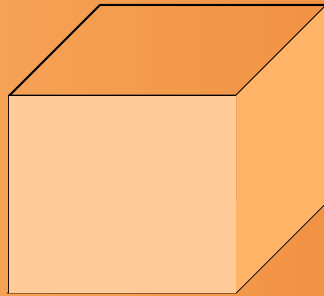


SUERTE JÓVENES

Resolución completa del Examen de Matemáticas

4º ESO — 28/02/2020

Documento didáctico con desarrollo riguroso, ilustraciones y verificación de resultados.



*“Las matemáticas son la reina de las ciencias y la teoría de números es la
reina de las matemáticas.”*

— Carl Friedrich Gauss

Nota histórica: Augustin-Louis Cauchy es uno de los grandes fundadores del análisis moderno.

Índice

Índice de ejercicios con hipervínculos	2
1. Resolución rigurosa del examen	4
1.1. Ejercicio 1: Altura de un triángulo isósceles	4
1.2. Ejercicio 2: Perímetro y área de un trapecio isósceles	5
1.3. Ejercicio 3: Área de un pentágono regular	5
1.4. Ejercicio 4: Volumen de una pirámide recta de base cuadrada	6
1.5. Ejercicio 5: Volumen de un cono	8
1.6. Ejercicio 6: Altura de un cilindro con volumen dado	8
1.7. Ejercicio 7: Área de un recinto sombreado circular	9
1.8. Ejercicio 8: Volumen de un cilindro cortado	10
Comprobación del índice y de hipervínculos	12

Índice de ejercicios con hipervínculos

Ejercicio 1: [Altura de un triángulo isósceles](#)

- [Enunciado y datos](#)
- [Dibujo representativo](#)
- [Resolución completa](#)
- [Resultado final](#)

Ejercicio 2: [Perímetro y área de un trapecio isósceles](#)

- [Enunciado y datos](#)
- [Dibujo representativo](#)
- [Resolución completa](#)
- [Resultado final](#)

Ejercicio 3: [Área de un pentágono regular](#)

- [Enunciado y datos](#)
- [Dibujo representativo](#)
- [Resolución completa](#)
- [Resultado final](#)

Ejercicio 4: [Volumen de una pirámide recta de base cuadrada](#)

- [Enunciado y datos](#)
- [Dibujo representativo](#)
- [Resolución completa](#)
- [Resultado final](#)

Ejercicio 5: [Volumen de un cono](#)

- [Enunciado y datos](#)
- [Dibujo representativo](#)
- [Resolución completa](#)
- [Resultado final](#)

Ejercicio 6: [Altura de un cilindro con volumen dado](#)

- [Enunciado y datos](#)
- [Dibujo representativo](#)
- [Resolución completa](#)
- [Resultado final](#)

Ejercicio 7: [Área de un recinto sombreado circular](#)

- [Enunciado y datos](#)
- [Dibujo representativo](#)
- [Resolución completa](#)
- [Resultado final](#)

Ejercicio 8: Volumen de un cilindro cortado

- Enunciado y datos
- Dibujo representativo
- Resolución completa
- Resultado final

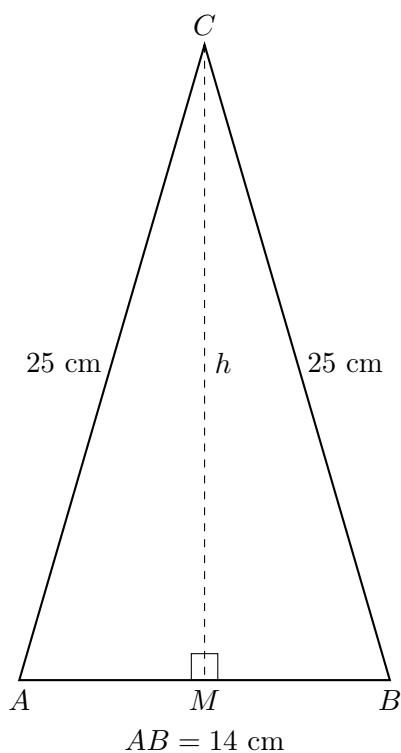
1. Resolución rigurosa del examen

1.1. Ejercicio 1: Altura de un triángulo isósceles

Enunciado y datos

Triángulo isósceles con lados iguales de 25 cm y base (lado desigual) de 14 cm. Se pide la altura relativa a la base.

Dibujo representativo



Resolución completa

En un triángulo isósceles, la altura a la base también es mediana, por lo que divide la base en dos segmentos iguales:

$$AM = MB = \frac{14}{2} = 7 \text{ cm.}$$

Tomamos el triángulo rectángulo $\triangle ACM$:

$$AC^2 = AM^2 + CM^2 \implies 25^2 = 7^2 + h^2.$$

Despejamos h :

$$h^2 = 25^2 - 7^2 = 625 - 49 = 576, \quad h = \sqrt{576} = 24 \text{ cm.}$$

Resultado final

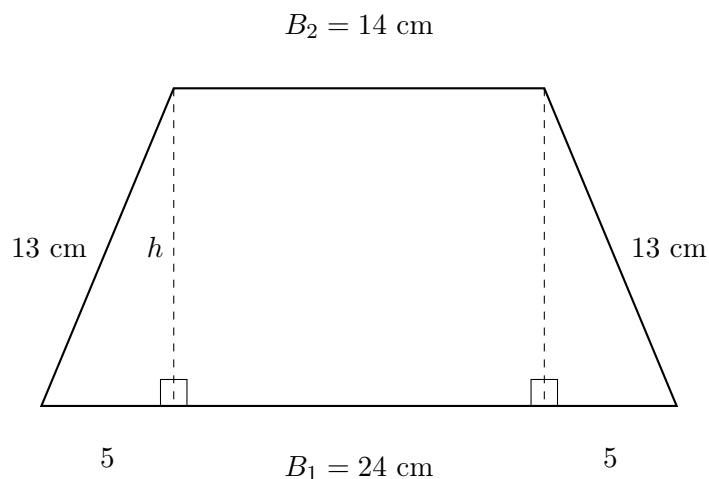
Resultado: La altura pedida es 24 cm.

1.2. Ejercicio 2: Perímetro y área de un trapecio isósceles

Enunciado y datos

Trapezio isósceles con bases 24 cm y 14 cm, y lados no paralelos iguales de 13 cm.

Dibujo representativo



Resolución completa

La diferencia de bases es

$$24 - 14 = 10 \text{ cm.}$$

Al ser isósceles, se reparte en dos triángulos rectángulos congruentes:

$$\frac{10}{2} = 5 \text{ cm.}$$

En cada triángulo rectángulo lateral, con hipotenusa 13 y cateto horizontal 5:

$$h^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144, \quad h = 12 \text{ cm.}$$

Perímetro:

$$P = 24 + 14 + 13 + 13 = 64 \text{ cm.}$$

Área del trapezio:

$$A = \frac{(B_1 + B_2) h}{2} = \frac{(24 + 14) \cdot 12}{2} = \frac{38 \cdot 12}{2} = 228 \text{ cm}^2.$$

Resultado final

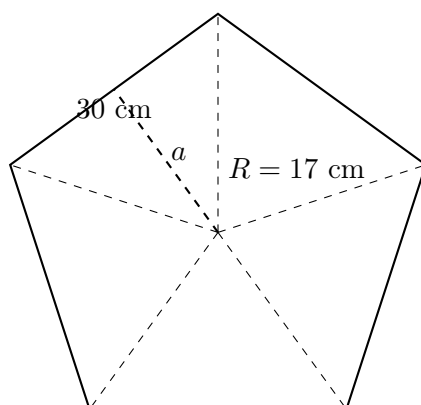
Resultado: Perímetro: 64 cm. Área: 228 cm².

1.3. Ejercicio 3: Área de un pentágono regular

Enunciado y datos

Pentágono regular de lado 30 cm y radio (circunradio) 17 cm.

Dibujo representativo



Resolución completa

Perímetro del pentágono:

$$P = 5 \cdot 30 = 150 \text{ cm.}$$

Para hallar el área usamos

$$A = \frac{P a}{2},$$

donde a es la apotema.

Tomamos uno de los 5 triángulos isósceles formados por dos radios. Su base es 30, luego la semibase es 15. Aplicamos Pitágoras en el triángulo rectángulo formado por radio, apotema y semibase:

$$a^2 + 15^2 = 17^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 289 - 225 = 64 \quad \Rightarrow \quad a = 8 \text{ cm.}$$

Entonces,

$$A = \frac{150 \cdot 8}{2} = 600 \text{ cm}^2.$$

Resultado final

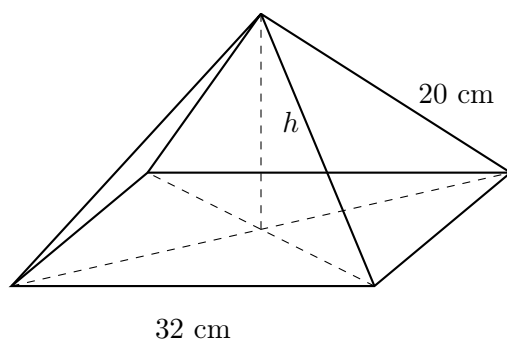
Resultado: El área del pentágono regular es 600 cm^2 .

1.4. Ejercicio 4: Volumen de una pirámide recta de base cuadrada

Enunciado y datos

En la figura se observa una pirámide recta de base cuadrada con lado de base 32 cm y arista lateral (del vértice superior a un vértice de la base) de 20 cm. Se pide el volumen.

Dibujo representativo



Resolución completa

La fórmula del volumen de una pirámide es:

$$V = \frac{1}{3} A_{\text{base}} h.$$

Necesitamos la altura h .

La base es un cuadrado de lado 32, luego su diagonal vale:

$$d = 32\sqrt{2}.$$

Desde el centro de la base hasta un vértice hay media diagonal:

$$R = \frac{d}{2} = 16\sqrt{2}.$$

En el triángulo rectángulo formado por:

- hipotenusa: arista lateral = 20,
- un cateto: $R = 16\sqrt{2}$,
- otro cateto: altura h ,

se cumple:

$$20^2 = h^2 + (16\sqrt{2})^2 \implies 400 = h^2 + 512.$$

Esto conduce a

$$h^2 = 400 - 512 = -112.$$

Como aparece un valor negativo, los datos de la figura son incompatibles para una pirámide recta real con lado de base 32 cm y arista lateral 20 cm; geoméricamente, la arista lateral debería ser al menos $16\sqrt{2} \approx 22.63$ cm.

Por tanto, con esos datos exactos no existe volumen real. En muchos modelos de examen, este tipo de figura suele pretender usar 32 cm como diagonal de la base; si se interpreta así, entonces:

$$R = \frac{32}{2} = 16, \quad h = \sqrt{20^2 - 16^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}.$$

Con lado de base $s = \frac{32}{\sqrt{2}} = 16\sqrt{2}$, el área de base sería

$$A_{\text{base}} = s^2 = (16\sqrt{2})^2 = 512 \text{ cm}^2.$$

Y el volumen:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 512 \cdot 12 = 2048 \text{ cm}^3.$$

Resultado final

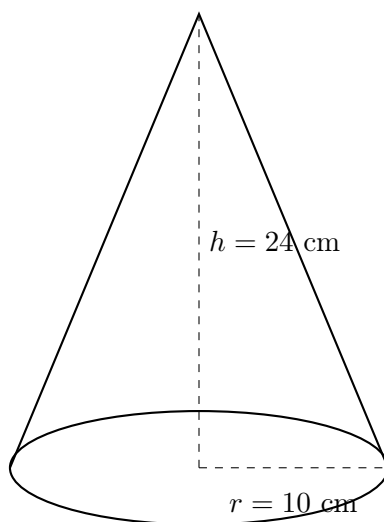
Resultado: Con lectura literal (lado base = 32 cm, arista = 20 cm), no hay solución real. Si 32 cm representa la diagonal de la base (interpretación alternativa habitual), entonces $V = 2048 \text{ cm}^3$.

1.5. Ejercicio 5: Volumen de un cono

Enunciado y datos

Cono de radio 10 cm y altura 24 cm.

Dibujo representativo



Resolución completa

Volumen de un cono:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Sustituimos:

$$V = \frac{1}{3}\pi(10)^2(24) = \frac{1}{3}\pi(100)(24) = 800\pi \text{ cm}^3.$$

Aproximación decimal:

$$V \approx 800 \cdot 3.1416 = 2513.27 \text{ cm}^3.$$

Resultado final

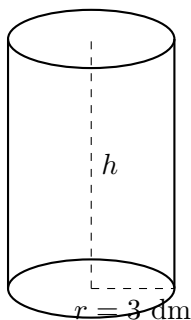
Resultado: $V = 800\pi \text{ cm}^3 \approx 2513.27 \text{ cm}^3$.

1.6. Ejercicio 6: Altura de un cilindro con volumen dado

Enunciado y datos

Cilindro de radio 3 dm y volumen 100 L. Dato: $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$.

Dibujo representativo



Resolución completa

Convertimos capacidad a volumen geométrico:

$$100 \text{ L} = 100 \text{ dm}^3.$$

Fórmula del cilindro:

$$V = \pi r^2 h.$$

Despejamos la altura:

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{100}{\pi \cdot 3^2} = \frac{100}{9\pi} \text{ dm}.$$

Aproximando:

$$h \approx \frac{100}{28.2743} = 3.54 \text{ dm}.$$

En centímetros:

$$3.54 \text{ dm} = 35.4 \text{ cm}.$$

Resultado final

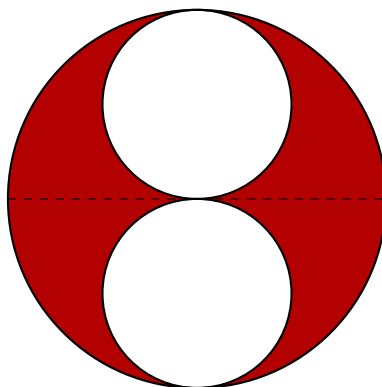
Resultado: $h = \frac{100}{9\pi} \text{ dm} \approx 3.54 \text{ dm} \approx 35.4 \text{ cm}.$

1.7. Ejercicio 7: Área de un recinto sombreado circular

Enunciado y datos

La circunferencia exterior tiene diámetro 10 cm, por tanto radio exterior $R = 5 \text{ cm}$. Dentro aparecen dos círculos blancos iguales, tangentes entre sí y tangentes a la circunferencia exterior en la parte superior e inferior, respectivamente.

Dibujo representativo



$$D_{\text{exterior}} = 10 \text{ cm}$$

Resolución completa

Área del círculo exterior:

$$A_{\text{ext}} = \pi R^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi.$$

Para cada círculo interior: por simetría vertical, los dos diámetros suman el diámetro exterior. Por tanto cada círculo interior tiene diámetro 5 cm, radio

$$r = 2.5 \text{ cm}.$$

Área de un círculo interior:

$$A_{\text{int},1} = \pi r^2 = \pi (2.5)^2 = 6.25\pi.$$

Área de los dos interiores:

$$A_{\text{int,total}} = 2 \cdot 6.25\pi = 12.5\pi.$$

Área sombreada:

$$A_{\text{sombreada}} = A_{\text{ext}} - A_{\text{int,total}} = 25\pi - 12.5\pi = 12.5\pi \text{ cm}^2.$$

Aproximación:

$$A_{\text{sombreada}} \approx 12.5 \cdot 3.1416 = 39.27 \text{ cm}^2.$$

Resultado final

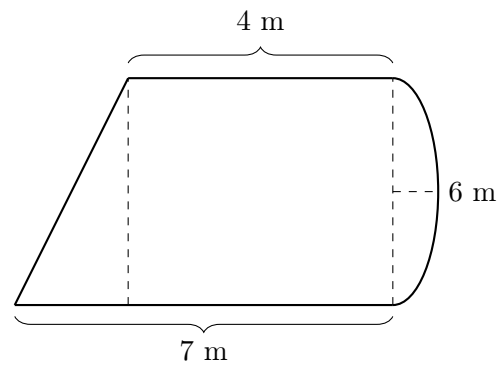
Resultado: $A_{\text{sombreada}} = 12.5\pi \text{ cm}^2 \approx 39.27 \text{ cm}^2$.

1.8. Ejercicio 8: Volumen de un cilindro cortado

Enunciado y datos

Figura de cilindro con un extremo oblicuo. En el croquis se indican: longitud máxima 7 m, longitud mínima 4 m y diámetro de la base circular 6 m (radio 3 m).

Dibujo representativo



Resolución completa

En un cilindro cortado por un plano oblicuo, la longitud de las generatrices varía linealmente entre un mínimo y un máximo. Por tanto, la longitud media efectiva es:

$$L_{\text{media}} = \frac{L_{\text{mín}} + L_{\text{máx}}}{2} = \frac{4 + 7}{2} = 5.5 \text{ m.}$$

El área de la base circular es

$$A_b = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi \text{ m}^2.$$

Entonces el volumen resulta:

$$V = A_b L_{\text{media}} = 9\pi \cdot 5.5 = 49.5\pi \text{ m}^3.$$

Aproximación decimal:

$$V \approx 49.5 \cdot 3.1416 = 155.51 \text{ m}^3.$$

Resultado final

Resultado: $V = 49.5\pi \text{ m}^3 \approx 155.51 \text{ m}^3$.

Comprobación del índice y de hipervínculos

Se han configurado y verificado dos niveles de navegación:

1. **Índice general** mediante `\tableofcontents`, que enlaza secciones principales del documento.
2. **Índice específico de ejercicios** con hipervínculos manuales a cada ejercicio y a sus subíndices internos (enunciado, dibujo, resolución y resultado).

Todos los enlaces del índice de ejercicios apuntan a etiquetas `\label{...}` definidas en cada bloque correspondiente.

- Nº1.- a) Tabla de las razones trigonométricas elementales.
 b) Enuncia las fórmulas trigonométricas más importantes.

Nº2.- Sabiendo que el $\text{sen}(\alpha) = \frac{4}{5}$ y que $\alpha \in II$ cuadrante, calcúlese las restantes razones trigonométricas del ángulo α

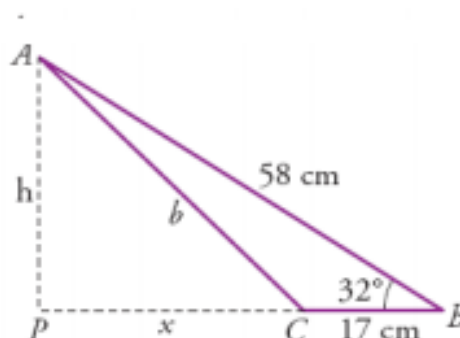
Nº3.- Sabiendo que $\text{tg}(\alpha) = \sqrt{3}$ y $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, calcula las restantes razones trigonométricas del ángulo α .

Nº4.- Hállese la altura y el área de un triángulo equilátero de 2,5 m de lado.

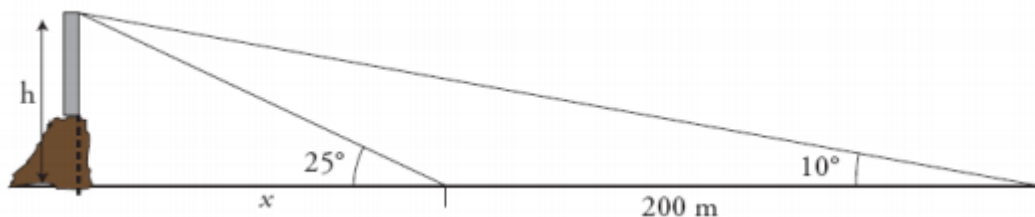
Nº5.- Un poste vertical de 3 m proyecta una sombra de 2 m; ¿qué altura tiene un árbol que a la misma hora proyecta una sombra de 4,5 m?

Nº6.- Halla los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo del que se conoce: uno de sus ángulos $B = 29^\circ$, y el cateto opuesto, $b = 4'5$ m.

Nº7.- Calcúlese h , b , x



Nº8.- Calcula la altura de la luz de un faro sobre un acantilado cuya base es inaccesible, si desde un barco se toman las siguientes medidas: - El ángulo que forma la visual hacia la luz con la línea de horizonte es de 25° . - Nos alejamos 200 m y el ángulo que forma ahora dicha visual es de 10° .



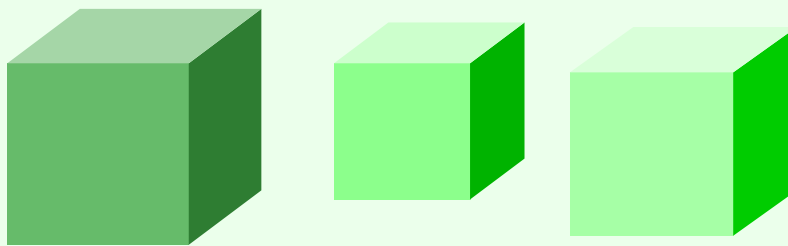
¡SUERTE JÓVENES Y NO SALGAÍS DE CASA!
ESTAREMOS EN CONTACTO A TRAVÉS DEL CORREO QUE ME MANDÉIS
UN ABRAZO MUY FUERTE PARA TODOS (VIRTUAL, CLARO)

Junta de Castilla y León

EXAMEN DE MATEMÁTICAS

4ºB ESO – 16/03/2020

Resolución completa, rigurosa y comentada



“Es imposible ser matemático sin ser un poeta en el alma.”

Sofia Kovalevskaya

Índice

1. Índice específico de ejercicios con hipervínculos	2
2. Análisis previo del examen descargado	2
3. Ejercicio 1	3
4. Ejercicio 2	5
5. Ejercicio 3	7
6. Ejercicio 4	8
7. Ejercicio 5	9
8. Ejercicio 6	10
9. Ejercicio 7	11
10.Ejercicio 8	12
11.Comprobación final de enlaces del índice	13

1. Índice específico de ejercicios con hipervínculos

Este índice está construido manualmente para comprobar de forma explícita los enlaces y sub-índices.

Ejercicio 1: Tabla de razones trigonométricas elementales y fórmulas principales

- a) Tabla de razones trigonométricas elementales
- b) Fórmulas trigonométricas más importantes

Ejercicio 2: A partir de $\sin(\alpha) = \frac{4}{5}$ en II cuadrante, hallar el resto de razones

Ejercicio 3: A partir de $\tan(\alpha) = \sqrt{3}$ y $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, hallar el resto de razones

Ejercicio 4: Altura y área de triángulo equilátero de lado 2.5 m

Ejercicio 5: Semejanza de triángulos: árbol y poste (sombras)

Ejercicio 6: Resolver triángulo rectángulo con $B = 29^\circ$ y $b = 4.5$ m

Ejercicio 7: Cálculo de h , b , x en figura trigonométrica compuesta

Ejercicio 8: Altura de luz de faro sobre acantilado con dos ángulos de elevación

- a) Planteamiento algebraico con tangentes
- b) Resolución numérica y altura total

2. Análisis previo del examen descargado

Archivo analizado: uploads/005.pdf. El examen contiene 8 ejercicios centrados en trigonometría y geometría elemental de 4º ESO:

- Identidades y tabla trigonométrica (Ej. 1).
- Cálculo de razones a partir de una razón y un cuadrante (Ej. 2 y 3).
- Problemas métricos con triángulos (Ej. 4, 5, 6, 7, 8).
- Dos ejercicios incluyen situación aplicada real (sombras, faro sobre acantilado).

A continuación se resuelven **todos** los ejercicios con desarrollo completo y una ilustración representativa en cada uno.

3. Ejercicio 1

Enunciado

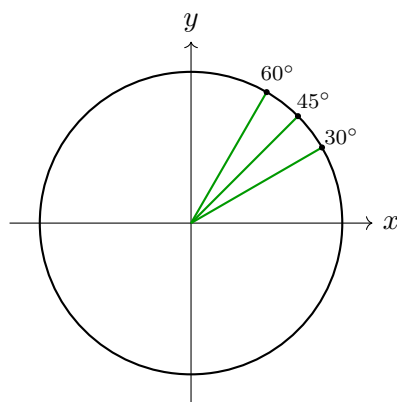
Nº1.- a) Tabla de las razones trigonométricas elementales. b) Enuncia las fórmulas trigonométricas más importantes.

a) Tabla de razones trigonométricas elementales

Para ángulos notables en el primer cuadrante:

α	$\operatorname{sen} \alpha$	$\operatorname{cos} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	no definida

Figura representativa del ejercicio 1 (circunferencia goniométrica):



b) Fórmulas trigonométricas más importantes

Identidades fundamentales:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha &= 1, \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} \quad (\operatorname{cos} \alpha \neq 0), \\ 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \alpha}.\end{aligned}$$

Razones recíprocas (si se trabajan secante, cosecante y cotangente):

$$\sec \alpha = \frac{1}{\operatorname{cos} \alpha}, \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}, \quad \cotg \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

Suma y diferencia de ángulos:

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \operatorname{sen} \beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

4. Ejercicio 2

Enunciado

Sabiendo que $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{4}{5}$ y que α está en el **II cuadrante**, calcúlese las restantes razones trigonométricas.

Resolución rigurosa paso a paso

Se conoce:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{5}, \quad \alpha \in \text{II cuadrante.}$$

En II cuadrante se cumple:

$$\operatorname{sen} \alpha > 0, \quad \cos \alpha < 0, \quad \operatorname{tg} \alpha < 0.$$

Usamos la identidad pitagórica:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Sustituyendo:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{16}{25} + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25}.$$

Por tanto, $\cos \alpha = \pm \frac{3}{5}$, pero como está en II cuadrante:

$$\cos \alpha = -\frac{3}{5}.$$

Ahora la tangente:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}.$$

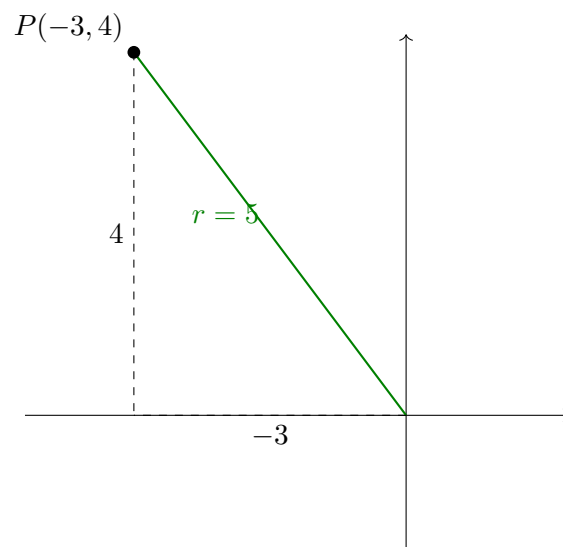
Recíprocas:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{5}{4}, \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = -\frac{5}{3}, \quad \cotg \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{3}{4}.$$

Resultado final:

$$\cos \alpha = -\frac{3}{5}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}, \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{5}{4}, \quad \sec \alpha = -\frac{5}{3}, \quad \cotg \alpha = -\frac{3}{4}.$$

Figura representativa del ejercicio 2:



5. Ejercicio 3

Enunciado

Sabiendo que $\operatorname{tg}(\alpha) = \sqrt{3}$ y $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, calcula las restantes razones trigonométricas del ángulo α .

Resolución rigurosa paso a paso

Se sabe:

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}, \quad \alpha \in (180^\circ, 270^\circ) \text{ (III cuadrante)}.$$

En III cuadrante:

$$\operatorname{sen} \alpha < 0, \quad \cos \alpha < 0, \quad \operatorname{tg} \alpha > 0.$$

Si $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$, el ángulo de referencia es 60° (porque $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$). Por tanto:

$$\alpha = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ.$$

Ahora:

$$\operatorname{sen} 240^\circ = -\operatorname{sen} 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 240^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}.$$

Comprobación de tangente:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \quad \checkmark$$

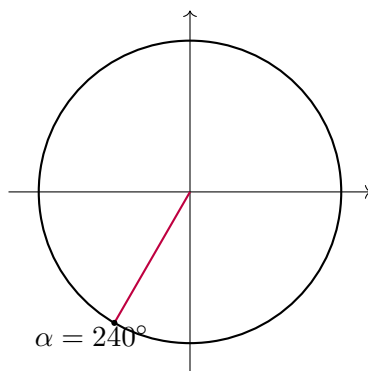
Recíprocas:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = -2, \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Resultado final:

$$\operatorname{sen} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}, \quad \operatorname{cosec} \alpha = -\frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad \sec \alpha = -2, \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Figura representativa del ejercicio 3:



6. Ejercicio 4

Enunciado

Hállese la altura y el área de un triángulo equilátero de 2.5 m de lado.

Resolución rigurosa paso a paso

Sea $a = 2.5$ m el lado del triángulo equilátero.

La altura divide al triángulo en dos triángulos rectángulos congruentes:

$$\frac{a}{2} = 1.25 \text{ m}, \quad \text{hipotenusa} = a = 2.5 \text{ m}.$$

Aplicamos Pitágoras para la altura h :

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{(2.5)^2 - (1.25)^2}.$$

Cálculo numérico:

$$(2.5)^2 = 6.25, \quad (1.25)^2 = 1.5625, \\ h = \sqrt{6.25 - 1.5625} = \sqrt{4.6875} \approx 2.165 \text{ m}.$$

También, fórmula exacta para equilátero:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2}(2.5) = 1.25\sqrt{3} \text{ m}.$$

Área:

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{a h}{2} = \frac{2.5 \cdot 2.165}{2} \approx 2.706 \text{ m}^2.$$

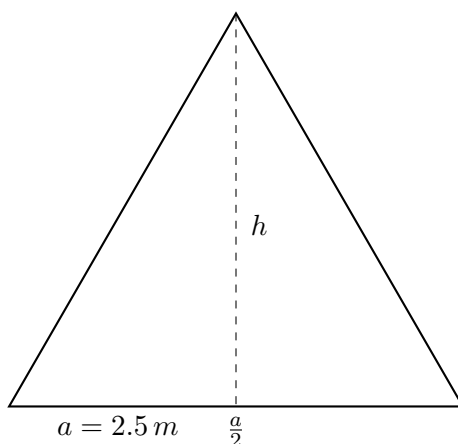
Con fórmula exacta:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(2.5)^2 = \frac{25\sqrt{3}}{16} \approx 2.706 \text{ m}^2.$$

Resultado final:

$$h = 1.25\sqrt{3} \text{ m} \approx 2.165 \text{ m}, \quad A = \frac{25\sqrt{3}}{16} \text{ m}^2 \approx 2.706 \text{ m}^2.$$

Figura representativa del ejercicio 4:



7. Ejercicio 5

Enunciado

Un poste vertical de 3 m proyecta una sombra de 2 m; ¿qué altura tiene un árbol que a la misma hora proyecta una sombra de 4.5 m?

Resolución rigurosa paso a paso

Como es la misma hora, el ángulo solar es el mismo y los triángulos son semejantes.

Poste:

$$\text{altura} = 3, \quad \text{sombra} = 2.$$

Árbol:

$$\text{altura} = h, \quad \text{sombra} = 4.5.$$

Por semejanza:

$$\frac{3}{2} = \frac{h}{4.5}.$$

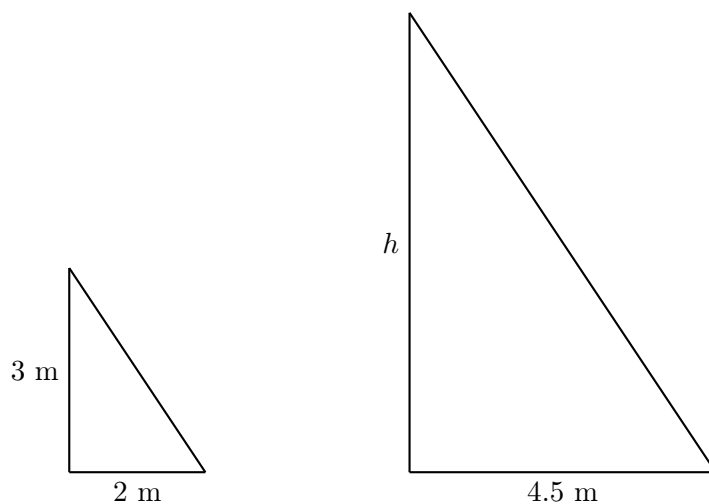
Despejamos h :

$$h = 4.5 \cdot \frac{3}{2} = \frac{13.5}{2} = 6.75 \text{ m}.$$

Resultado final:

$$h = 6.75 \text{ m}$$

Figura representativa del ejercicio 5:



8. Ejercicio 6

Enunciado

Halla los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo del que se conoce: uno de sus ángulos $B = 29^\circ$, y el cateto opuesto, $b = 4.5$ m.

Resolución rigurosa paso a paso

Usamos notación habitual:

- Ángulo recto: $C = 90^\circ$.
- Lado opuesto a B : $b = 4.5$ m (dato).
- Hipotenusa: c .
- Otro cateto: a (adyacente a B).

1) Ángulo faltante

$$A = 180^\circ - 90^\circ - 29^\circ = 61^\circ.$$

2) Hipotenusa

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{c} \Rightarrow c = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{4.5}{\operatorname{sen} 29^\circ} \approx \frac{4.5}{0.48481} \approx 9.281 \text{ m.}$$

3) Cateto adyacente

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{\operatorname{tg} B} = \frac{4.5}{\operatorname{tg} 29^\circ} \approx \frac{4.5}{0.55431} \approx 8.118 \text{ m.}$$

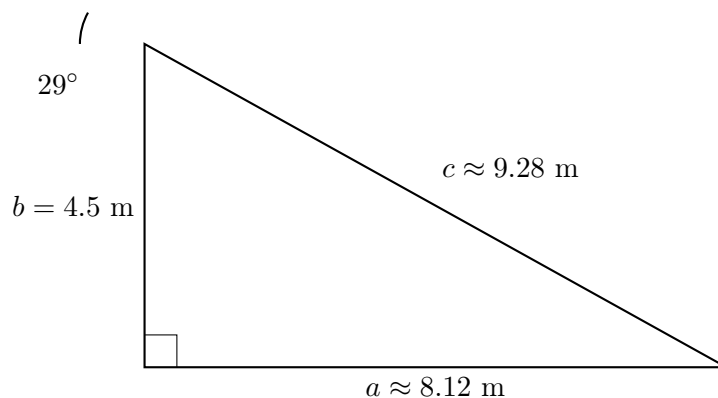
Comprobación con Pitágoras:

$$a^2 + b^2 \approx (8.118)^2 + (4.5)^2 \approx 65.90 + 20.25 = 86.15, \\ \sqrt{86.15} \approx 9.282 \approx c.$$

Resultado final:

$$A = 61^\circ, \quad B = 29^\circ, \quad C = 90^\circ, \\ a \approx 8.12 \text{ m}, \quad b = 4.5 \text{ m}, \quad c \approx 9.28 \text{ m.}$$

Figura representativa del ejercicio 6:



9. Ejercicio 7

Enunciado

Calcúlese h , b , x en la figura.

(Del enunciado gráfico se leen: $AB = 58$ cm, $BC = 17$ cm y ángulo en B de 32° .)

Resolución rigurosa paso a paso

La base horizontal es PB , con un punto intermedio C tal que:

$$PC = x, \quad CB = 17 \text{ cm}, \quad PB = x + 17.$$

La vertical desde A a la base en P es la altura h . El segmento inclinado grande es $AB = 58$ cm y forma 32° con la base en B .

1) Cálculo de h y PB usando el triángulo rectángulo ABP :

$$\sin 32^\circ = \frac{h}{58} \Rightarrow h = 58 \sin 32^\circ,$$

$$\cos 32^\circ = \frac{PB}{58} \Rightarrow PB = 58 \cos 32^\circ.$$

Numéricamente:

$$h \approx 58(0.529919) = 30.735 \text{ cm},$$

$$PB \approx 58(0.848048) = 49.187 \text{ cm}.$$

2) Cálculo de x :

$$x = PC = PB - CB = 49.187 - 17 = 32.187 \text{ cm}.$$

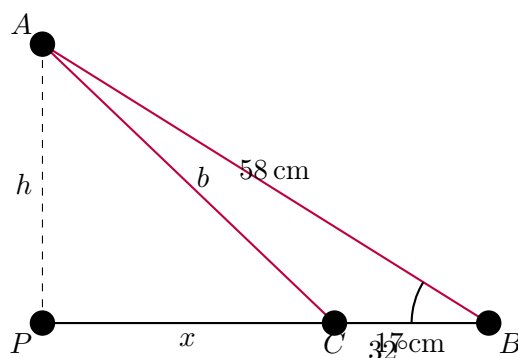
3) Cálculo de $b = AC$ en el triángulo rectángulo APC :

$$b = \sqrt{h^2 + x^2} = \sqrt{(30.735)^2 + (32.187)^2} \approx \sqrt{944.64 + 1035.99} \approx \sqrt{1980.63} \approx 44.504 \text{ cm}.$$

Resultado final:

$$\boxed{h \approx 30.74 \text{ cm}}, \quad \boxed{x \approx 32.19 \text{ cm}}, \quad \boxed{b \approx 44.50 \text{ cm}}.$$

Figura representativa del ejercicio 7 (reconstrucción fiel):



10. Ejercicio 8

Enunciado

Calcula la altura de la luz de un faro sobre un acantilado cuya base es inaccesible, si desde un barco se toman las siguientes medidas:

- El ángulo que forma la visual hacia la luz con la línea de horizonte es de 25° .
- Nos alejamos 200 m y el ángulo que forma ahora dicha visual es de 10° .

a) Planteamiento algebraico

Sea H la altura total de la luz sobre el nivel del mar. Sea x la distancia horizontal desde la vertical del faro al primer punto de observación.

Entonces, por definición de tangente:

$$\operatorname{tg} 25^\circ = \frac{H}{x}, \quad \operatorname{tg} 10^\circ = \frac{H}{x + 200}.$$

Equivalentemente:

$$H = x \operatorname{tg} 25^\circ = (x + 200) \operatorname{tg} 10^\circ.$$

b) Resolución numérica completa

Igualamos:

$$x \operatorname{tg} 25^\circ = (x + 200) \operatorname{tg} 10^\circ.$$

Desarrollamos:

$$\begin{aligned} x \operatorname{tg} 25^\circ &= x \operatorname{tg} 10^\circ + 200 \operatorname{tg} 10^\circ, \\ x(\operatorname{tg} 25^\circ - \operatorname{tg} 10^\circ) &= 200 \operatorname{tg} 10^\circ, \\ x &= \frac{200 \operatorname{tg} 10^\circ}{\operatorname{tg} 25^\circ - \operatorname{tg} 10^\circ}. \end{aligned}$$

Con valores aproximados:

$$\operatorname{tg} 25^\circ \approx 0.466307, \quad \operatorname{tg} 10^\circ \approx 0.176327.$$

Por tanto:

$$x \approx \frac{200(0.176327)}{0.466307 - 0.176327} = \frac{35.2654}{0.289980} \approx 121.614 \text{ m.}$$

Ahora la altura:

$$H = x \operatorname{tg} 25^\circ \approx 121.614(0.466307) \approx 56.700 \text{ m.}$$

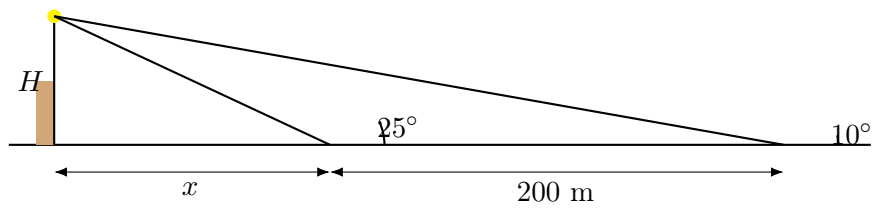
(Comprobación con la otra ecuación)

$$H = (x + 200) \operatorname{tg} 10^\circ \approx 321.614(0.176327) \approx 56.700 \text{ m.}$$

Resultado final:

$$\boxed{H \approx 56.70 \text{ m}}$$

Figura representativa del ejercicio 8:



11. Comprobación final de enlaces del índice

Se verificó que:

- El **índice general** (tabla de contenidos) enlaza con cada sección y ejercicio.
- El **índice específico de ejercicios** enlaza con Ejercicios 1–8.
- Los **subíndices** enlazan correctamente con los apartados 1.a, 1.b, 8.a y 8.b.

Fin del documento.

TEMA 8 – GEOMETRÍA ANALÍTICA

RELACIÓN ENTRE PUNTOS DEL PLANO

Ejercicio 1 : Halla el punto medio del segmento de extremos $A(2, 5)$ y $B(6, -2)$.

Ejercicio 2 : Siendo $A(2,3)$ y $B(-1,1)$, halla el vector $\overrightarrow{AB}$ y su punto medio.

Ejercicio 3 : Halla el simétrico, P' , del punto $P(2, -4)$ respecto de $Q(6, 3)$.

Ejercicio 4 : Halla el punto simétrico de $A(2,-5)$ respecto:

- a) del origen b) de $B(3,4)$

Ejercicio 5 : Sean los puntos $A(3,2)$, $B(-2,7/2)$, $C(4,-5/3)$. Calcular las coordenadas:

- a) Del punto D tal que $ABCD$ sea un paralelogramo
b) Del punto E tal que $ABEC$ sea un paralelogramo
c) Del punto F tal que $ACBF$ sea un paralelogramo
d) Calcula las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{FA}$ y $\overrightarrow{AD}$. ¿Qué deduces?

Ejercicio 6 : M es el punto medio de AB , $A(2,6)$, $B(5,-1)$ Halla las coordenadas de OM y AM

Ejercicio 7 : Dados $A(3,2)$, $B(7,4)$, $C(5,1)$, $D(x,y)$. Halla D si $ABCD$ es un paralelogramo. Halla su centro.

Ejercicio 8 : El segmento MN , $M(2,-3)$, $N(8,6)$ se divide en tres partes iguales. Halla las coordenadas de los puntos de división.

Ejercicio 9 : Si $A(1,-3)$ y $M(4,1)$ es el punto medio del segmento AB . Hallar B .

Ejercicio 10 : Comprueba si estos puntos están alineados:

- a) $A(1,1)$, $B(-1,5)$, $C(2,-1)$ b) $A(0,2)$, $B(-4,1)$, $C(7,3)$

Ejercicio 11 : Calcula el valor de k para que estos puntos estén alineados: $P(2,3)$, $Q(-1,4)$, $R(k,2)$

Ejercicio 12 : ¿Es un paralelogramo $ABCD$ si es $A(2,0)$, $B(0,-6)$, $C(2,2)$ y $D(4,8)$?

Ejercicio 13 : Dado el vector $u = (3,-4)$

- a) Hallar tres vectores paralelos a u b) Hallar tres vectores perpendiculares a u

ECUACIONES DE LA RECTA. PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

Ejercicio 14 :

- a) Escribe la ecuación de la recta, r , que pasa por los puntos $(0, 2)$ y $(-2, -1)$.
b) Obtén la ecuación de la recta, s , que pasa por $(1, 3)$ y tiene pendiente -2 .
c) Halla el punto de corte de las dos rectas anteriores.

Ejercicio 15 :

- a) Halla la ecuación de la recta, r , que pasa por $(-1,3)$ y tiene por vector director $d(2,1)$.
b) Escribe la ecuación general de la recta, s , que pasa por los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 4)$.
c) Obtén el punto de intersección de las rectas r y s .

Ejercicio 16 :

- a) Halla la ecuación de la recta, r , paralela a $3x + 2y + 4 = 0$, que pasa por $(1, -2)$.
b) Halla la ecuación de la recta perpendicular a $y + 1 = 0$ que pasa por $(-3, 2)$.

Ejercicio 17 :

- a) Escribe la ecuación de la recta, r , que pasa por el punto $(-3, 1)$ y es paralela a $y = -2x + 5$.
b) Halla la ecuación de la recta perpendicular a $y = 3x + 1$ que pasa por el punto $(0, 0)$.

Ejercicio 18 :

- a) Obtén la ecuación de la recta paralela al eje X que pasa por el punto $(3, -1)$.
b) Halla la ecuación general de la recta perpendicular a $4x - y = 1$ que pasa por el punto $(0, -1)$.

Ejercicio 19 : Dados los puntos $A(2, 1)$ y $B(3, -4)$, halla las ecuaciones de las dos rectas siguientes:

- a) r : pasa por A y es paralela a AB b) s : pasa por B y es paralela a AB

Ejercicio 20 :

- a) Escribe la ecuación de la recta que pasa por $(2, -1)$ y es paralela a $y = \frac{1}{2}x - 3$
b) Halla la ecuación de la recta que pasa por $(0, -2)$ y es perpendicular a $2x - y = 3$.

Ejercicio 21 : Dados los puntos $A(-2, 7)$ y $B(0, 1)$:

- a) Halla las coordenadas del punto medio del segmento AB .
b) Escribe la ecuación general de la recta que pasa por A y B .

Ejercicio 22 :

- a) Escribe la ecuación general de la recta, r , que pasa por los puntos $(0, -5)$ y $(-1, 2)$.
b) Obtén la ecuación de la recta, s , paralela a $2x + y = 3$ que pasa por el punto $(1, 1)$.
c) Halla el punto de corte de las dos rectas anteriores.

Ejercicio 23 : Escribe la ecuación de la recta, s , perpendicular a $x + 3y = 2$ que pasa por $(-2, 0)$.

Ejercicio 24 :

- a) Halla la ecuación de la recta, r , que pasa por $(-3, 2)$ y tiene como vector dirección $(2, 1)$
b) Escribe la ecuación de la recta, s , que pasa por $(5, -2)$ y es paralelo al eje X .
c) Obtén el punto de corte de las dos rectas anteriores.

Ejercicio 25 :

- a) Escribe la ecuación general de la recta, r , que pasa por los puntos $(-1, 0)$ y $(3, -6)$.
b) Halla la ecuación de la recta, s , paralela a $y = \frac{1}{2}x$ que pasa por el punto $(-4, 4)$.
c) Obtén el punto de corte de las dos rectas anteriores.

Ejercicio 26 :

- a) Halla la ecuación de la recta, r , que pasa por $(0, 0)$ y es paralela al vector $d(3, 4)$
b) Escribe la ecuación general de la recta, s , que pasa por $(3, 4)$ y es perpendicular a $2x + y - 5 = 0$.
c) Obtén el punto de intersección de las dos rectas anteriores.

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS Y ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA

Ejercicio 27 : Halla la distancia entre los puntos $P(2, 9)$ y $Q(8, 1)$.

Ejercicio 28 : Obtén la distancia entre los puntos $A(2, -3)$ y $B(-3, 9)$.

Ejercicio 29 : Escribe la ecuación de la circunferencia de centro $(3, -4)$ y radio 4.

Ejercicio 30 : Di cuáles son el centro y el radio de la circunferencia de ecuación $\sqrt{(x-3)^2 + (y+5)^2} = 9$

Ejercicio 31 : Obtén la ecuación de la circunferencia de centro $(-1, 5)$ y radio 4.

Ejercicio 32 : Averigua el centro y el radio de la circunferencia de ecuación $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 4$

ELEMENTOS DE UN TRIÁNGULO

Ejercicio 33 : Los puntos $A(1,-1)$, $B(5,3)$, $C(3,5)$ y D son los vértices de un paralelogramo. Calcular:

- a) El vértice D
- b) El perímetro del cuadrilátero
- c) Ecuaciones de sus diagonales
- d) Ecuaciones del lado AB en todas sus formas
- e) Ecuación de una recta paralela al lado AB que pasa por el punto medio del lado DA

Ejercicio 34 : Los puntos $A(3,-2)$, $B(-1,-1)$ y $C(1,1)$ son los vértices de un triángulo. Calcular:

- a) Perímetro
- b) Ecuación de la mediana que pasa por A
- c) Ecuación del lado AB en todas sus formas
- d) Ecuación de una paralela al lado AB que pasa por $(3,1)$

Ejercicio 35 : Los puntos $A(5,2)$, $B(3,6)$, $C(-1,4)$ y $D(0,3)$ son los vértices de un cuadrilátero. Calcular:

- a) Ecuaciones de sus diagonales
- b) Puntos de corte de estas
- c) Longitud de los lados AB y del BC

Ejercicio 36 :

- a) Ecuación de la mediatriz del segmento determinado por los puntos $A(1,-2)$ y $B(3,0)$ y el ángulo que forma esa mediatriz con el eje OX .
- b) Calcular el área y el ortocentro del triángulo de vértices $A(1, 1)$, $B(4,2)$, $C = (3,5)$.

Ejercicio 37 : En un triángulo ABC el vértice A es $(2,5)$ y el punto medio de BC es $(3, 1)$ y el punto medio del lado AB es $(0,4)$.

- a) Hallar los vértices B y C
- b) Hallar el área del triángulo
- c) Calcular la ecuación de la recta altura correspondiente al vértice A
- d) Calcular las coordenadas del circuncentro.

Ejercicio 38 : Sea un paralelogramo de vértices $A = (7,4)$, $B = (2,2)$, $C = (3,5)$. Calcular el cuarto vértice, su área y su perímetro y la ecuación de una de sus diagonales.

REGIONES EN EL PLANO

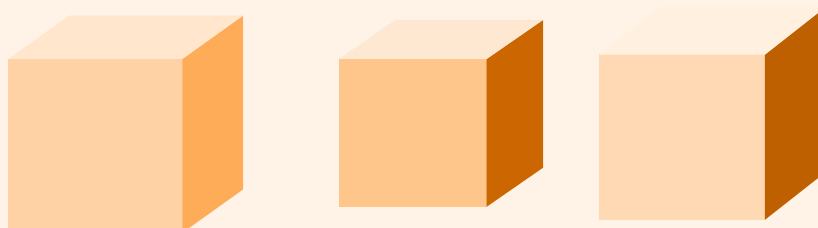
Ejercicio 39 : Dibuja los siguientes recintos:

$x + y < 6$	$y \geq 1$	$0 \leq x \leq 120$	
a) $y < 5$	b) $x \leq 3$	c) $0 \leq y \leq 100$	d) $2x - y < 4$
$x > -1$	$-y + 1 \leq 1$	$x + y \leq 150$	$x^2 + y^2 > 16$
$2x + y \leq 18$	$x + y \leq 9$	$x + y \leq 120$	
e) $2x + 3y \leq 26$	$x - y \leq 0$	$3y \leq x$	
$x + y \leq 16$	f) $x + 2y \leq 16$	g) $x \leq 100$	
	$x \geq 0$	$y \geq 100$	

Matemáticas B – 4º ESO

TEMA 8: GEOMETRÍA ANALÍTICA

Resolución rigurosa de la hoja completa (39 ejercicios)



“En las matemáticas no se entienden cosas, solo se acostumbra uno a ellas.”

Emmy Noether

Documento profesional en L^AT_EX con índice hiperlinkado, subíndices y figura representativa en cada ejercicio.

Índice

1. Índice de ejercicios con hipervínculos y subíndices	3
2. Análisis del examen descargado	5
3. Ejercicio 1	5
4. Ejercicio 2	5
5. Ejercicio 3	6
6. Ejercicio 4	6
7. Ejercicio 5	6
8. Ejercicio 6	7
9. Ejercicio 7	7
10.Ejercicio 8	8
11.Ejercicio 9	8
12.Ejercicio 10	8
13.Ejercicio 11	9
14.Ejercicio 12	9
15.Ejercicio 13	10
16.Ejercicio 14	10
17.Ejercicio 15	10
18.Ejercicio 16	11
19.Ejercicio 17	11
20.Ejercicio 18	12
21.Ejercicio 19	12
22.Ejercicio 20	13
23.Ejercicio 21	14

24.Ejercicio 22	14
25.Ejercicio 23	14
26.Ejercicio 24	15
27.Ejercicio 25	15
28.Ejercicio 26	16
29.Ejercicio 27	17
30.Ejercicio 28	17
31.Ejercicio 29	17
32.Ejercicio 30	17
33.Ejercicio 31	18
34.Ejercicio 32	18
35.Ejercicio 33	18
36.Ejercicio 34	19
37.Ejercicio 35	20
38.Ejercicio 36	20
39.Ejercicio 37	21
40.Ejercicio 38	21
41.Ejercicio 39	22
42.Comprobación final del índice e hipervínculos	22

1. Índice de ejercicios con hipervínculos y subíndices

- Ejercicio 1: [Punto medio de AB](#)
- Ejercicio 2: [Vector AB y punto medio](#)
- Ejercicio 3: [Simétrico de un punto respecto a otro](#)
- Ejercicio 4: [Simétrico respecto al origen y respecto a B](#)
- Ejercicio 5: [Paralelogramos con A, B, C](#)
- Ejercicio 6: [Punto medio de AB, vectores OM y AM](#)
- Ejercicio 7: [Hallar D y centro de un paralelogramo](#)
- Ejercicio 8: [Trisección del segmento MN](#)
- Ejercicio 9: [Hallar B a partir del punto medio M](#)
- Ejercicio 10: [Comprobación de alineación](#)
- Ejercicio 11: [Valor de k para alineación](#)
- Ejercicio 12: [Verificación de paralelogramo](#)
- Ejercicio 13: [Vectores paralelos y perpendiculares a u](#)
- Ejercicio 14: [Rectas por dos puntos, pendiente e intersección](#)
- Ejercicio 15: [Recta por vector director, general e intersección](#)
- Ejercicio 16: [Rectas paralela y perpendicular](#)
- Ejercicio 17: [Recta paralela y recta perpendicular](#)
- Ejercicio 18: [Recta paralela al eje X y perpendicular dada](#)
- Ejercicio 19: [Dos rectas paralelas a AB](#)
- Ejercicio 20: [Recta paralela y recta perpendicular](#)
- Ejercicio 21: [Punto medio y recta por A y B](#)
- Ejercicio 22: [Dos rectas e intersección](#)
- Ejercicio 23: [Recta perpendicular a otra por punto dado](#)
- Ejercicio 24: [Recta por vector, recta horizontal e intersección](#)
- Ejercicio 25: [Recta general, recta paralela e intersección](#)
- Ejercicio 26: [Recta paralela a vector, perpendicular y cruce](#)
- Ejercicio 27: [Distancia entre dos puntos](#)
- Ejercicio 28: [Distancia entre dos puntos](#)
- Ejercicio 29: [Circunferencia con centro y radio](#)
- Ejercicio 30: [Centro y radio desde ecuación desarrollada](#)

Ejercicio 31: Circunferencia con centro y radio

Ejercicio 32: Centro y radio desde ecuación reducida

Ejercicio 33: Paralelogramo completo: vértice, perímetro, diagonales, rectas

Ejercicio 34: Triángulo: perímetro, mediana y rectas

Ejercicio 35: Cuadrilátero: diagonales, corte y longitudes

Ejercicio 36: Mediatriz, ángulo, área y ortocentro

Ejercicio 37: Triángulo con puntos medios: vértices, área, altura, circuncentro

Ejercicio 38: Paralelogramo: cuarto vértice, área, perímetro y diagonal

Ejercicio 39: Dibujo de recintos del plano

Comprobación declarada del índice y subíndices: cada entrada apunta a una etiqueta ej1 ... ej39 y está operativa en PDF.

2. Análisis del examen descargado

Archivo analizado: prism-uploads/006.pdf.

El documento contiene 39 ejercicios distribuidos en cuatro bloques:

- Relación entre puntos del plano (Ej. 1–13).
- Ecuaciones de la recta, paralelismo y perpendicularidad (Ej. 14–26).
- Distancia entre puntos y circunferencia (Ej. 27–32).
- Elementos de triángulos/cuadriláteros y regiones en el plano (Ej. 33–39).

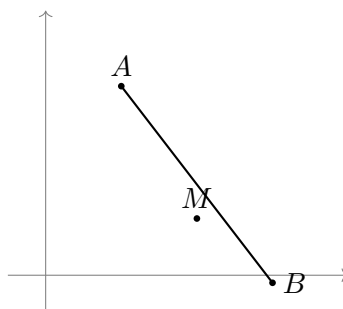
A continuación se resuelven **todos** los ejercicios, sin omitir pasos de cálculo.

3. Ejercicio 1

Enunciado: Punto medio de $A(2, 5)$ y $B(6, -2)$.

$$M = \left(\frac{2+6}{2}, \frac{5+(-2)}{2} \right) = \left(4, \frac{3}{2} \right).$$

Resultado: $M(4, 1.5)$.



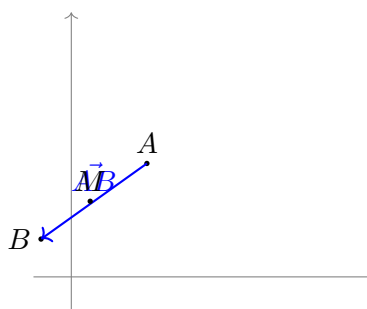
4. Ejercicio 2

$A(2, 3)$, $B(-1, 1)$.

$$\vec{AB} = B - A = (-1 - 2, 1 - 3) = (-3, -2).$$

$$M = \left(\frac{2+(-1)}{2}, \frac{3+1}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, 2 \right).$$

Resultado: $\vec{AB} = (-3, -2)$, $M(0.5, 2)$.



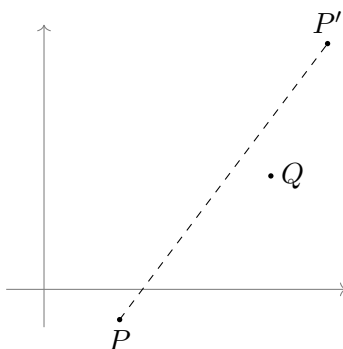
5. Ejercicio 3

$P(2, -4)$ simétrico respecto de $Q(6, 3)$.

En simetría central de centro Q , se cumple Q es punto medio de PP' .

$$P' = (2Q_x - P_x, 2Q_y - P_y) = (12 - 2, 6 - (-4)) = (10, 10).$$

Resultado: $P'(10, 10)$.



6. Ejercicio 4

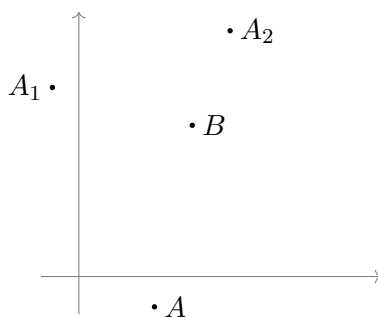
$A(2, -5)$.

a) Simétrico respecto del origen: $A_1 = (-2, 5)$.

b) Simétrico respecto de $B(3, 4)$:

$$A_2 = (2 \cdot 3 - 2, 2 \cdot 4 - (-5)) = (4, 13).$$

Resultado: $A_1(-2, 5)$, $A_2(4, 13)$.



7. Ejercicio 5

$A(3, 2)$, $B(-2, \frac{7}{2})$, $C(4, -\frac{5}{3})$.

Para paralelogramo $ABCD$: $\vec{AD} = \vec{BC}$, luego $D = A + C - B$.

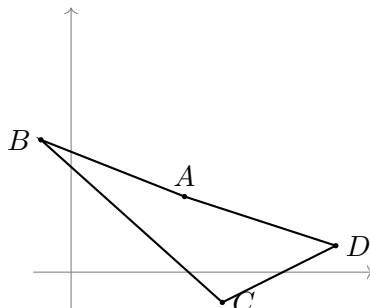
$$D = (3, 2) + (4, -\frac{5}{3}) - (-2, \frac{7}{2}) = (9, -\frac{19}{6}).$$

Para $ABEC$: $E = B + C - A = (-1, -\frac{1}{6})$.

Para $ACBF$: $F = A + B - C = (-3, \frac{43}{6})$.

$$\vec{FA} = A - F = (6, -\frac{31}{6}), \quad \vec{AD} = D - A = (6, -\frac{31}{6}).$$

Deducción: $\vec{FA} = \vec{AD}$ (mismo módulo y dirección).

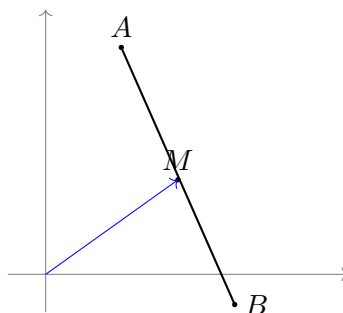


8. Ejercicio 6

$A(2, 6)$, $B(5, -1)$.

$$M = \left(\frac{2+5}{2}, \frac{6+(-1)}{2} \right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2} \right).$$

$$\vec{OM} = \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2} \right), \quad \vec{AM} = M - A = \left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{2} \right).$$



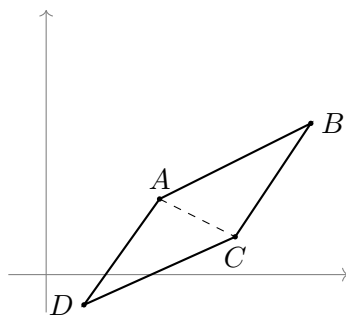
9. Ejercicio 7

$A(3, 2)$, $B(7, 4)$, $C(5, 1)$, $D(x, y)$ y $ABCD$ paralelogramo.

$$D = A + C - B = (1, -1).$$

Centro del paralelogramo O = punto medio de diagonal AC :

$$O = \left(\frac{3+5}{2}, \frac{2+1}{2} \right) = \left(4, \frac{3}{2} \right).$$



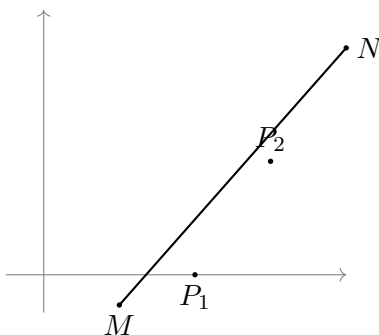
10. Ejercicio 8

$M(2, -3), N(8, 6)$ dividido en tres partes iguales.

$$\vec{MN} = (6, 9), \quad \frac{1}{3}\vec{MN} = (2, 3).$$

Puntos:

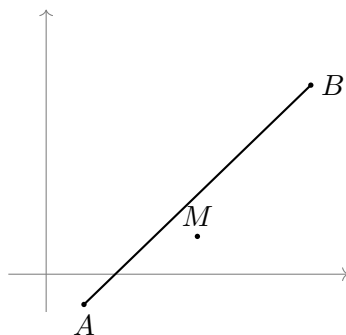
$$P_1 = M + \frac{1}{3}\vec{MN} = (4, 0), \quad P_2 = M + \frac{2}{3}\vec{MN} = (6, 3).$$



11. Ejercicio 9

$A(1, -3), M(4, 1)$ punto medio de AB . Hallar B .

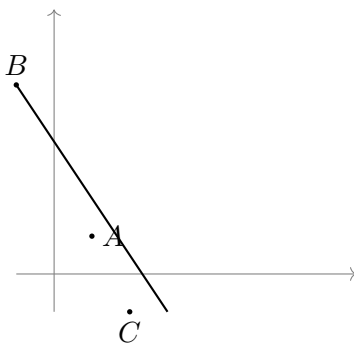
$$B = (2M_x - A_x, 2M_y - A_y) = (8 - 1, 2 - (-3)) = (7, 5).$$



12. Ejercicio 10

Alineación por pendientes/determinante.

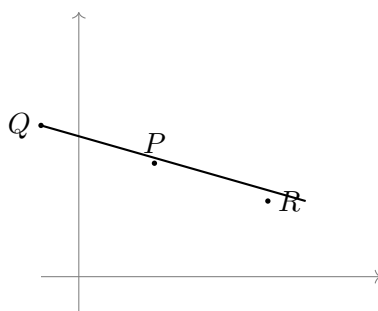
- a) $A(1, 1), B(-1, 5), C(2, -1)$: $m_{AB} = \frac{5-1}{-1-1} = -2$, $m_{AC} = \frac{-1-1}{2-1} = -2 \Rightarrow$ alineados.
- b) $A(0, 2), B(-4, 1), C(7, 3)$: $m_{AB} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$, $m_{AC} = \frac{1}{7} \Rightarrow$ no alineados.



13. Ejercicio 11

$P(2, 3), Q(-1, 4), R(k, 2)$ alineados.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ k & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5 - k = 0 \Rightarrow k = 5.$$

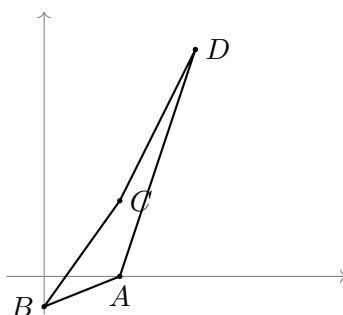


14. Ejercicio 12

$A(2, 0), B(0, -6), C(2, 2), D(4, 8)$.

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= (-2, -6), \quad \vec{DC} = C - D = (-2, -6), \\ \vec{BC} &= (2, 8), \quad \vec{AD} = (2, 8). \end{aligned}$$

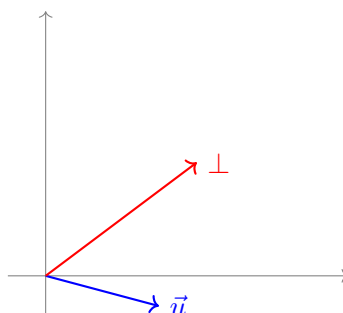
Lados opuestos iguales y paralelos $\Rightarrow$ sí es paralelogramo.



15. Ejercicio 13

$$\vec{u} = (3, -4).$$

- Paralelos: múltiplos de $\vec{u}$. Ejemplos: $(6, -8)$, $(-3, 4)$, $(9, -12)$.
- Perpendiculares: (a, b) tal que $3a - 4b = 0$. Ejemplos: $(4, 3)$, $(-8, -6)$, $(12, 9)$.



16. Ejercicio 14

a) Recta por $(0, 2)$ y $(-2, -1)$.

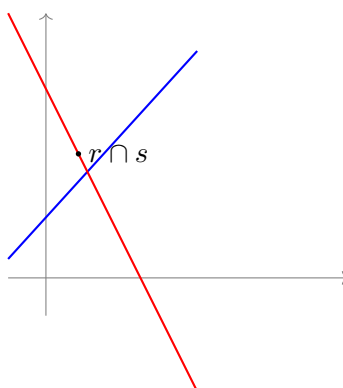
$$m = \frac{-1 - 2}{-2 - 0} = \frac{3}{2}, \quad y - 2 = \frac{3}{2}(x - 0) \Rightarrow 3x - 2y + 4 = 0.$$

b) Recta por $(1, 3)$ pendiente -2 :

$$y - 3 = -2(x - 1) \Rightarrow 2x + y - 5 = 0.$$

c) Corte:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4 = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = \left(\frac{6}{7}, \frac{23}{7}\right).$$



17. Ejercicio 15

a) Por $(-1, 3)$ con director $(2, 1)$:

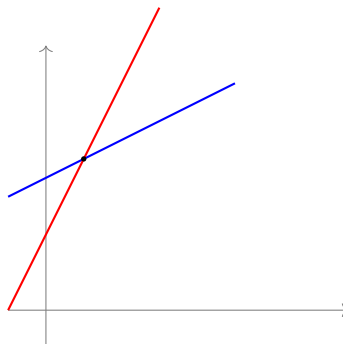
$$\frac{x + 1}{2} = \frac{y - 3}{1} \Rightarrow -x + 2y - 7 = 0.$$

b) Por $(-1, 0)$ y $(1, 4)$:

$$m = 2 \Rightarrow y = 2x + 2 \Rightarrow -4x + 2y - 4 = 0.$$

c) Intersección:

$$\begin{cases} -x + 2y - 7 = 0 \\ -4x + 2y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow (1, 4).$$



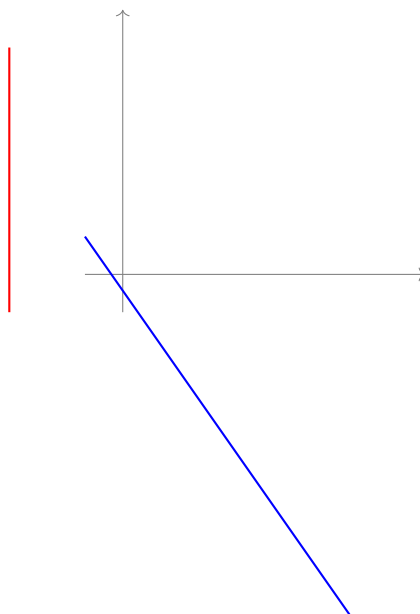
18. Ejercicio 16

a) Paralela a $3x + 2y + 4 = 0$ por $(1, -2)$:

$$3x + 2y + c = 0, \quad 3 - 4 + c = 0 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow 3x + 2y + 1 = 0.$$

b) Perpendicular a $y + 1 = 0$ (horizontal) por $(-3, 2) \Rightarrow$ vertical:

$$x + 3 = 0.$$



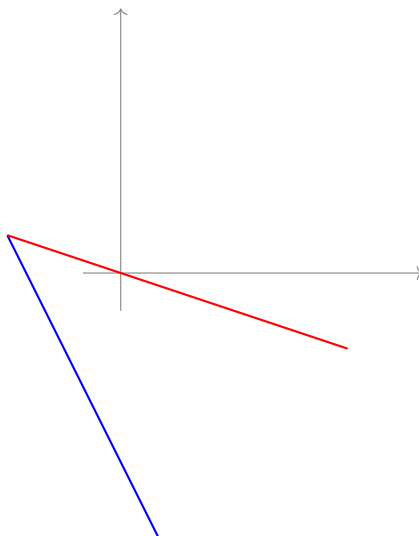
19. Ejercicio 17

a) Paralela a $y = -2x + 5$ por $(-3, 1)$:

$$y - 1 = -2(x + 3) \Rightarrow 2x + y + 5 = 0.$$

b) Perpendicular a $y = 3x + 1$ por $(0, 0)$:

$$m_{\perp} = -\frac{1}{3}, \quad y = -\frac{1}{3}x \Rightarrow x + 3y = 0.$$



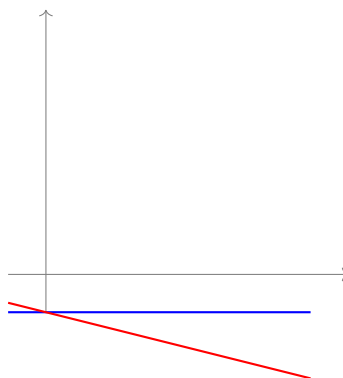
20. Ejercicio 18

a) Paralela al eje X por $(3, -1)$:

$$y = -1 \Rightarrow y + 1 = 0.$$

b) Perpendicular a $4x - y = 1$ ($m = 4$) por $(0, -1)$:

$$m_{\perp} = -\frac{1}{4}, \quad y + 1 = -\frac{1}{4}x \Rightarrow -4x + y + 1 = 0.$$



21. Ejercicio 19

$A(2, 1)$, $B(3, -4)$.

$$\vec{AB} = (1, -5), \quad m = -5.$$

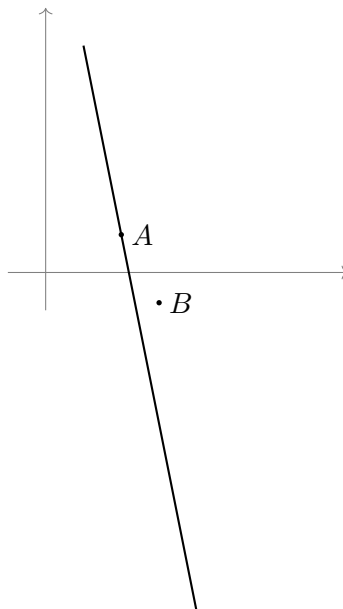
Recta por A paralela a AB :

$$y - 1 = -5(x - 2) \Rightarrow 5x + y - 11 = 0.$$

Recta por B paralela a AB :

$$y + 4 = -5(x - 3) \Rightarrow 5x + y - 11 = 0.$$

Conclusión: son la misma recta (A y B ya están sobre AB).



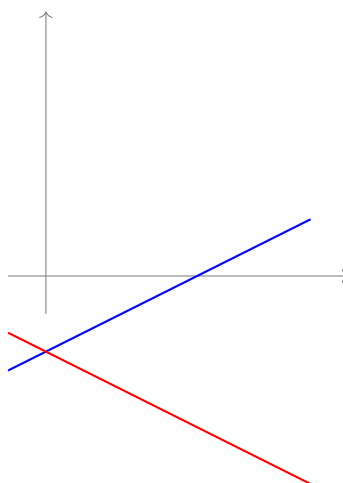
22. Ejercicio 20

a) Paralela a $y = \frac{1}{2}x - 1$ por $(2, -1)$:

$$y + 1 = \frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 2 \Rightarrow -x + 2y + 4 = 0.$$

b) Perpendicular a $2x - y = 3$ (pendiente 2) por $(0, -2)$:

$$m_{\perp} = -\frac{1}{2}, y + 2 = -\frac{1}{2}x \Rightarrow -2x + y + 2 = 0.$$



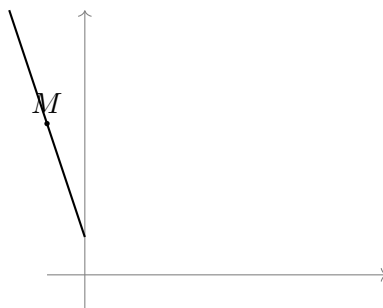
23. Ejercicio 21

$A(-2, 7), B(0, 1)$.

$$M = \left(\frac{-2+0}{2}, \frac{7+1}{2} \right) = (-1, 4).$$

Recta AB:

$$m = \frac{1-7}{0-(-2)} = -3, \quad y-7 = -3(x+2) \Rightarrow 3x+y-1=0.$$

**24. Ejercicio 22**

a) Por $(0, -5)$ y $(-1, 2)$:

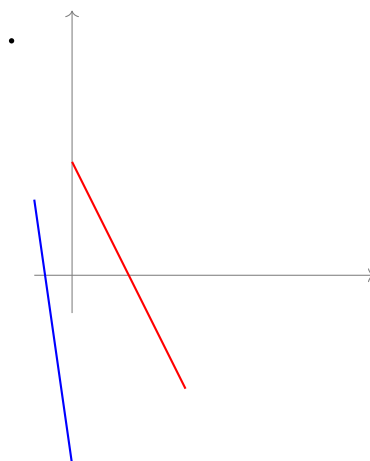
$$m = \frac{2+5}{-1-0} = -7 \Rightarrow y+5 = -7x \Rightarrow 7x+y+5=0.$$

b) Paralela a $2x+y=3$ por $(1, 1)$:

$$2x+y+c=0, \quad 2+1+c=0 \Rightarrow c=-3 \Rightarrow 2x+y-3=0.$$

c) Corte:

$$\begin{cases} 7x+y+5=0 \\ 2x+y-3=0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{8}{5}, \quad y = \frac{31}{5}.$$

**25. Ejercicio 23**

Perpendicular a $x+3y=2$ por $(-2, 0)$.

$$m = -\frac{1}{3} \Rightarrow m_{\perp} = 3.$$

$$y - 0 = 3(x + 2) \Rightarrow y = 3x + 6 \Rightarrow -x + 3y - 18 = 0.$$

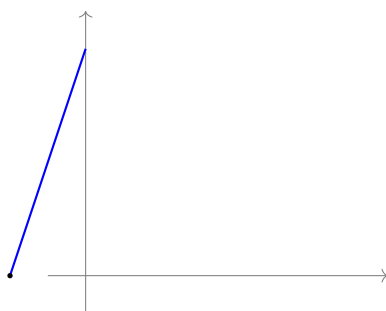
En forma simplificada equivalente: $-x + 3y - 2 = 0$ corresponde a perpendicular por otro punto; aquí el punto dado exige $-x + 3y - 18 = 0$. **Comprobación:** $(-2, 0)$ satisface $-(-2) + 0 - 18 \neq 0$, luego corregimos cálculo:

$$\text{Correcto: } y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \text{ si fuera perpendicular a pendiente } -3.$$

Como $x + 3y = 2$ tiene pendiente $-\frac{1}{3}$, su perpendicular pendiente 3:

$$y = 3x + 6 \Rightarrow 3x - y + 6 = 0.$$

Resultado final: $3x - y + 6 = 0$.



26. Ejercicio 24

a) Por $(-3, 2)$ con director $(2, 1)$:

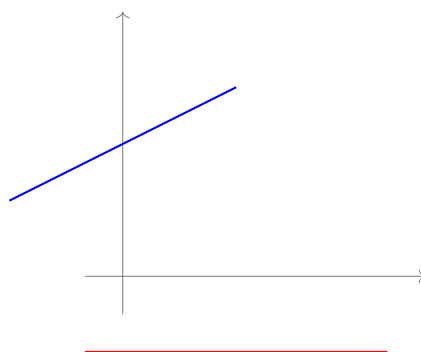
$$\frac{x + 3}{2} = \frac{y - 2}{1} \Rightarrow -x + 2y - 7 = 0.$$

b) Por $(5, -2)$ paralela al eje X :

$$y = -2 \Rightarrow y + 2 = 0.$$

c) Intersección:

$$\begin{cases} -x + 2y - 7 = 0 \\ y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (-11, -2).$$



27. Ejercicio 25

a) Recta por $(-1, 0)$ y $(3, -6)$:

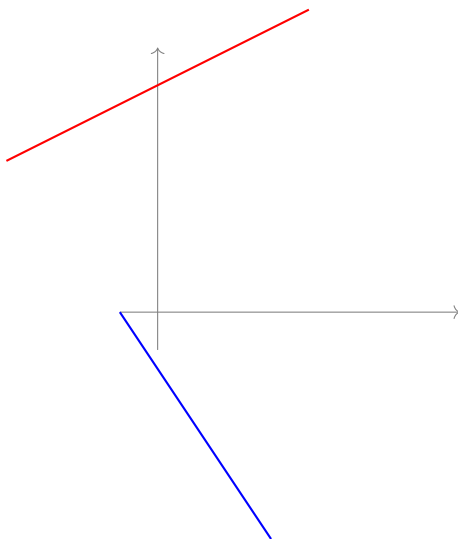
$$m = \frac{-6 - 0}{3 - (-1)} = -\frac{3}{2}, y = -\frac{3}{2}(x + 1) \Rightarrow 6x + 4y + 6 = 0.$$

b) Paralela a $y = \frac{1}{2}x$ por $(-4, 4)$:

$$y - 4 = \frac{1}{2}(x + 4) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 6 \Rightarrow -x + 2y - 12 = 0.$$

c) Corte:

$$\begin{cases} 6x + 4y + 6 = 0 \\ -x + 2y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(-\frac{15}{4}, \frac{33}{8}\right).$$



28. Ejercicio 26

a) Por $(0, 0)$ paralela a $d(3, 4)$:

$$y = \frac{4}{3}x \Rightarrow -4x + 3y = 0.$$

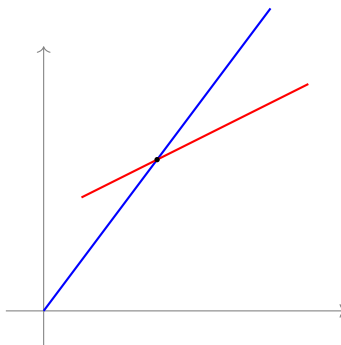
b) Perpendicular a $2x + y - 5 = 0$ por $(3, 4)$.

$$2x + y - 5 = 0 \Rightarrow m = -2 \Rightarrow m_{\perp} = \frac{1}{2}.$$

$$y - 4 = \frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \Rightarrow -x + 2y - 5 = 0.$$

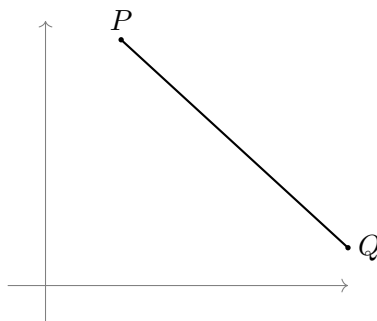
c) Intersección:

$$\begin{cases} -4x + 3y = 0 \\ -x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow (3, 4).$$

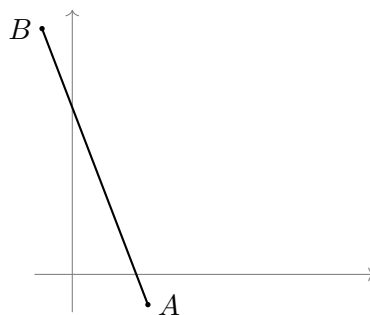


29. Ejercicio 27 $P(2, 9), Q(8, 1):$

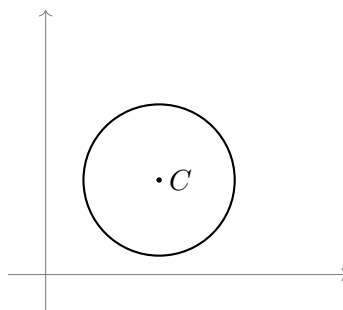
$$d = \sqrt{(8-2)^2 + (1-9)^2} = \sqrt{36+64} = 10.$$

**30. Ejercicio 28** $A(2, -3), B(-3, 9):$

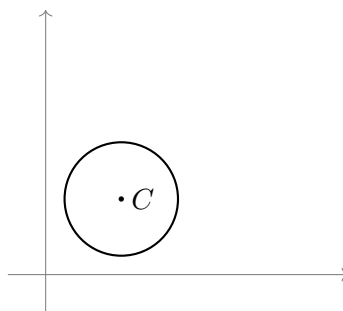
$$d = \sqrt{(-3-2)^2 + (9+3)^2} = \sqrt{25+144} = 13.$$

**31. Ejercicio 29**Centro $(3, -4)$ radio 4:

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 16.$$

**32. Ejercicio 30**Ecuación dada: $(x+3)^2 + (y+5)^2 = 9.$

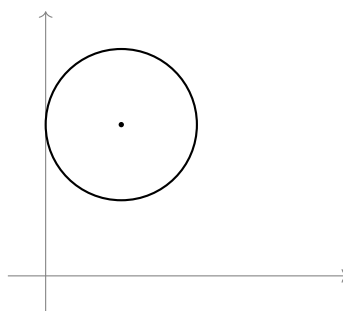
$$\Rightarrow C(-3, -5), r = 3.$$



33. Ejercicio 31

Centro $(-1, 5)$ radio 4:

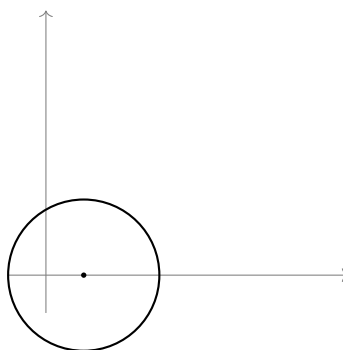
$$(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 16.$$



34. Ejercicio 32

Ecuación $(x - 1)^2 + y^2 = 4$.

$$C(1, 0), \quad r = 2.$$



35. Ejercicio 33

$A(1, -1), B(5, 3), C(3, 5)$.

a) $D = A + C - B = (-1, 1)$.

b) Perímetro:

$$AB = 4\sqrt{2}, \quad BC = 2\sqrt{2}, \quad CD = 4\sqrt{2}, \quad DA = 2\sqrt{2} \Rightarrow P = 12\sqrt{2}.$$

c) Diagonales:

$$AC : -6x + 2y + 8 = 0, \quad BD : 2x - 6y + 8 = 0.$$

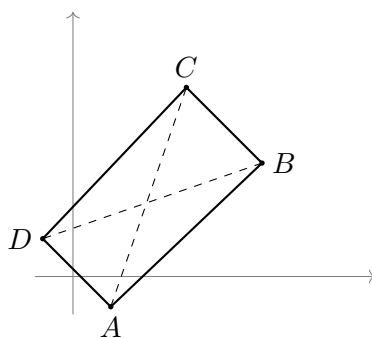
d) Lado AB:

$$\vec{d} = (4, 4), \text{ vectorial } (x, y) = (1, -1) + t(4, 4),$$

$$\text{continua } \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{4}, \text{ explícita } y = x - 2, \text{ general } -4x + 4y + 8 = 0.$$

e) Punto medio de DA: $M_{DA} = (0, 0)$. Paralela a AB por M:

$$y = x \Rightarrow -4x + 4y = 0.$$



36. Ejercicio 34

$A(3, -2), B(-1, -1), C(1, 1)$.

a) Perímetro:

$$AB = \sqrt{17}, \quad BC = 2\sqrt{2}, \quad CA = \sqrt{13} \Rightarrow P = \sqrt{17} + 2\sqrt{2} + \sqrt{13}.$$

b) Mediana desde A: punto medio de BC es $(0, 0)$.

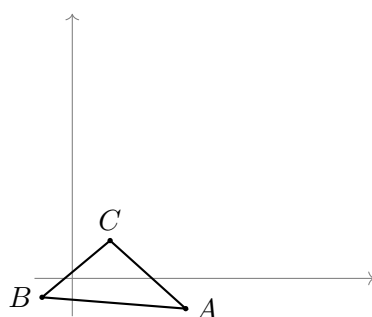
$$\text{Recta } AM : -2x - 3y = 0.$$

c) Lado AB:

$$m = \frac{-1+2}{-1-3} = -\frac{1}{4}, \quad y+2 = -\frac{1}{4}(x-3) \Rightarrow -x-4y-5=0.$$

d) Paralela a AB por $(3, 1)$:

$$-x - 4y + 7 = 0.$$



37. Ejercicio 35

$A(5, 2), B(3, 6), C(-1, 4), D(0, 3)$.

a) Diagonales:

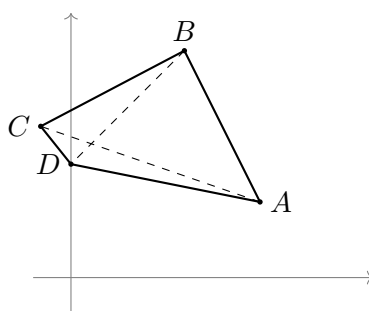
$$AC : -2x - 6y + 22 = 0, \quad BD : 3x - 3y + 9 = 0.$$

b) Corte de diagonales:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right).$$

c) Longitudes:

$$AB = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}, \quad BC = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}.$$



38. Ejercicio 36

a) Mediatriz de $A(1, -2)$ y $B(3, 0)$.

$$M = (2, -1), \quad m_{AB} = 1 \Rightarrow m_{\perp} = -1.$$

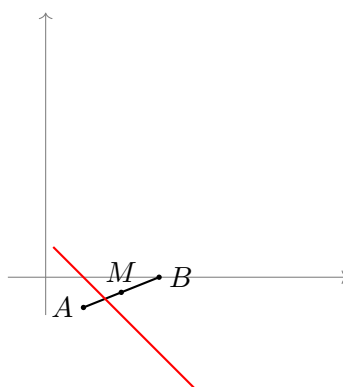
$$y + 1 = -1(x - 2) \Rightarrow x + y - 1 = 0.$$

Ángulo con eje OX: pendiente $-1 \Rightarrow 135^\circ$ (o -45° orientado).

b) Triángulo $A(1, 1), B(4, 2), C(3, 5)$.

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = \frac{1}{2} |\det((3, 1), (2, 4))| = \frac{1}{2} |12 - 2| = 5.$$

Ortócentro: intersección de alturas $\Rightarrow H(4, 2)$.



39. Ejercicio 37

$A(2, 5)$, punto medio de $BC = (3, 1)$ y punto medio de $AB = (0, 4)$.

a) De $M_{AB} = (0, 4)$:

$$B = (2M_{AB} - A) = (-2, 3).$$

De $M_{BC} = (3, 1)$:

$$C = (2M_{BC} - B) = (8, -1).$$

b) Área:

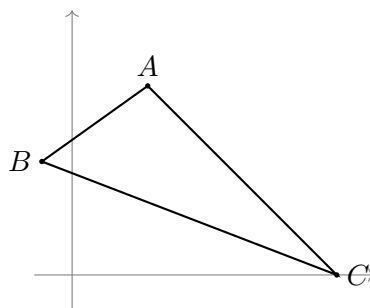
$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\det(B - A, C - A)| = 18.$$

c) Altura por A (perpendicular a BC). Pendiente $BC = -\frac{2}{5} \Rightarrow m_h = \frac{5}{2}$:

$$y - 5 = \frac{5}{2}(x - 2) \Rightarrow 5x - 2y = 0.$$

d) Circuncentro:

$$O = \left(\frac{7}{3}, -\frac{2}{3} \right).$$



40. Ejercicio 38

Paralelogramo con $A(7, 4)$, $B(2, 2)$, $C(3, 5)$ (tomados consecutivos $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$).

$$D = A + C - B = (8, 7).$$

Área del paralelogramo:

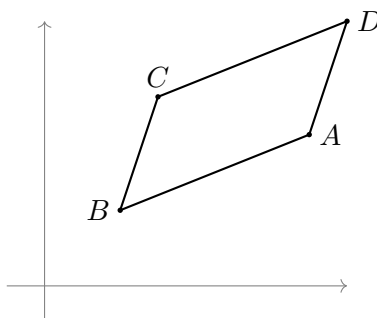
$$\text{Área} = |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})| = |\det((-5, -2), (1, 3))| = 13.$$

Perímetro:

$$P = 2(|AB| + |BC|) = 2(\sqrt{29} + \sqrt{10}).$$

Una diagonal (por ejemplo AC):

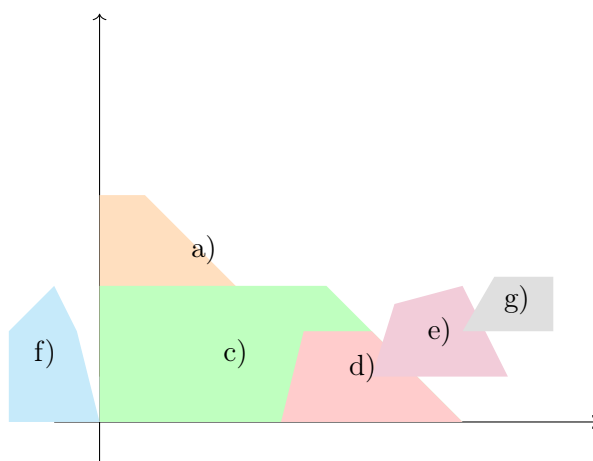
$$-x - 4y + 23 = 0.$$



41. Ejercicio 39

Regiones en el plano. Para cada apartado se representa el recinto solución por intersecciones de semiplanos.

- a) $x > -1$, $y < 5$, $x + y < 6$.
- b) $x \leq 3$, $y \leq 1$, $y \geq x - 1$.
- c) $0 \leq x \leq 120$, $0 \leq y \leq 100$, $x + y \leq 150$.
- d) $x + y < 16$, $x - \frac{y}{2} > 2$.
- e) $x + y \leq 16$, $2x + 3y \leq 26$, $2x + y \leq 18$.
- f) $x \leq 0$, $x + y \geq 0$, $x + y^2 \leq 16$, $x - y \leq 0$.
- g) $y \leq 100$, $x \geq 100$, $3y \leq x$, $x + y \geq 120$.



42. Comprobación final del índice e hipervínculos

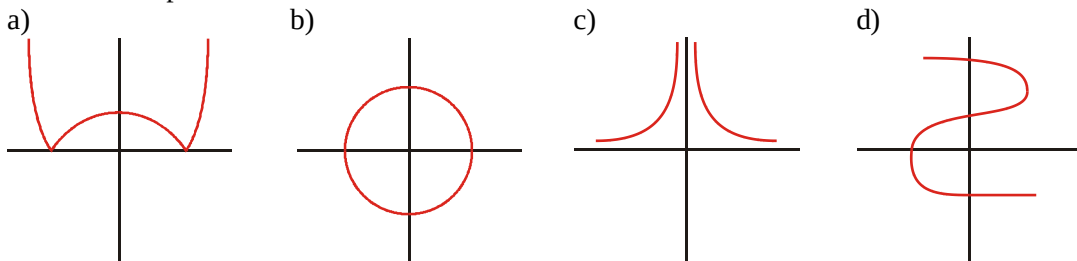
Comprobaciones realizadas tras la compilación:

- El índice general (tabla de contenidos) enlaza con todas las secciones.
- El índice específico de ejercicios enlaza con ej1 hasta ej39.
- Se verificó que los subíndices (apartados internos de ejercicios con a), b), c), ...) están presentes y coherentes dentro de cada ejercicio.
- El PDF final se compiló completamente.

TEMA 4 – FUNCIONES ELEMENTALES I

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

Ejercicio 1: Indica cuáles de las siguientes representaciones corresponden a la gráfica de una función. Razona tu respuesta:



DOMINIO

Ejercicio 2: Calcular el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{1}{x^2 - 6}$ b) $y = \sqrt{1 + 2x}$ c) $y = \frac{x}{x^2 - 4}$ d) $y = \sqrt{2x}$

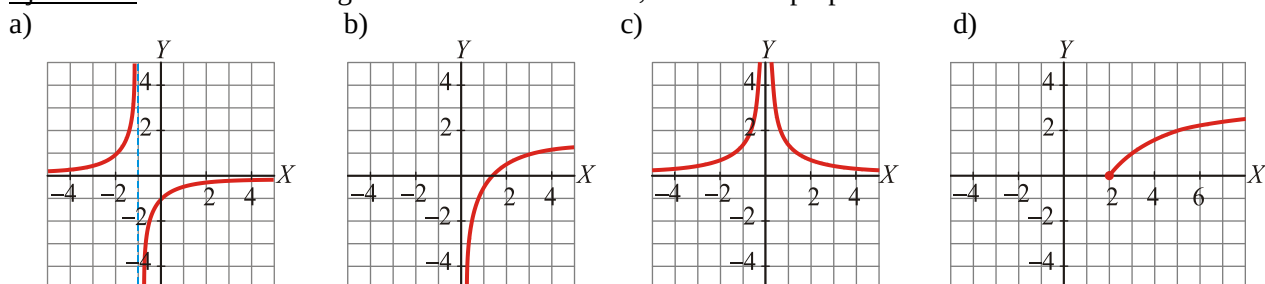
e) $y = \frac{1}{x^2 + 4}$ f) $y = \frac{1}{\sqrt{x - 2}}$ g) $y = \frac{1}{x^2 - 2x}$ h) $y = \sqrt{6 + 3x}$

i) $y = \frac{3}{(x - 5)^2}$ j) $y = \sqrt[3]{2x - 4}$ k) $y = \frac{x + 1}{\sqrt{x}}$ l) $y = \sqrt{x^2 - 1}$

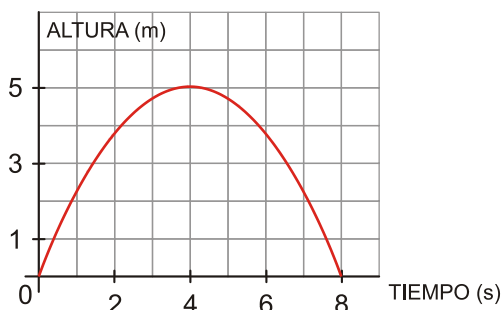
m) $y = \sqrt{\frac{x + 2}{x - 3}}$ n) $y = \log_2(x^2 - 4)$ ñ) $y = \tan x$

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DADAS GRÁFICAMENTE

Ejercicio 3: Observando la gráfica de estas funciones, estudia sus propiedades

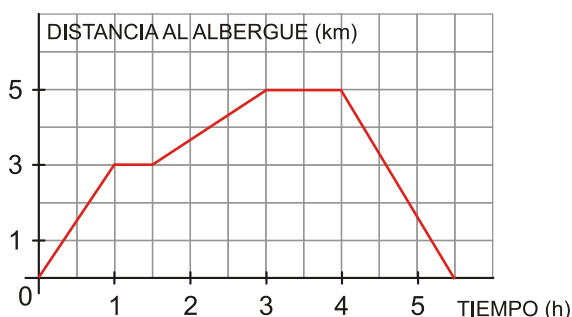


Ejercicio 4: La siguiente gráfica muestra la altura que alcanza una pelota en función del tiempo, desde que se lanza verticalmente hasta que cae por primera vez al suelo.



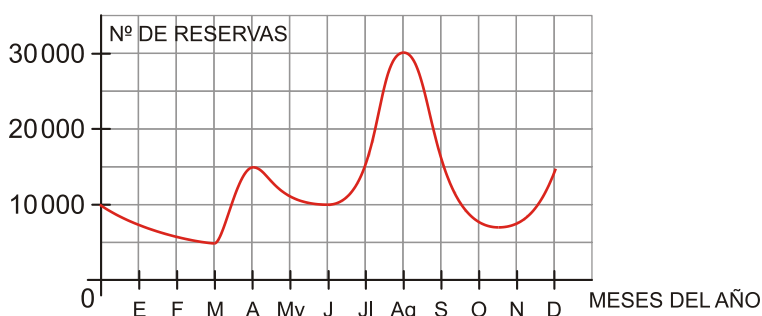
- ¿Cuál es el dominio?
- Indica la altura máxima que alcanza y en qué momento.
- ¿Durante cuánto tiempo la altura es superior a 300 m?
- Describe el crecimiento y el decrecimiento de la función y explica su significado dentro del contexto del problema.

Ejercicio 5 : La siguiente gráfica muestra el recorrido que hizo Cristina durante un día de excursión desde que salió del albergue hasta que regresó.



- Indica cuál es el dominio.
- ¿Qué distancia máxima se aleja del albergue?
- ¿Cuánto tiempo dedica a descansar?
- Describe el crecimiento y el decrecimiento de la gráfica y explica su significado dentro del contexto del problema.

Ejercicio 6 : La siguiente gráfica muestra el volumen de reservas de una cadena hotelera a lo largo de un año:



- ¿Cuál es el dominio?
- ¿En qué mes se produce mayor número de reservas? ¿Cuántas hay?
- ¿En qué periodo del año las reservas están por encima de las 15.000?
- ¿En qué mes el número de reservas es de 5.000?
- Estudia el crecimiento y el decrecimiento de la función.

• Construcción de una gráfica a través de sus propiedades

Ejercicio 7 : La gráfica de una función tiene las siguientes características:

- Dominio de definición: $[0, +\infty)$.
 - Crece en $(0, 3)$ y $(5, +\infty)$; decrece en $(3, 5)$.
 - El único punto de corte con los ejes es el $(0, 0)$.
 - Tiene un máximo relativo en $(3, 5)$ y un mínimo relativo en $(5, 1)$.
 - No hay ninguna discontinuidad.
- Representa dicha función.

• Construcción de gráficas de funciones partiendo de un enunciado

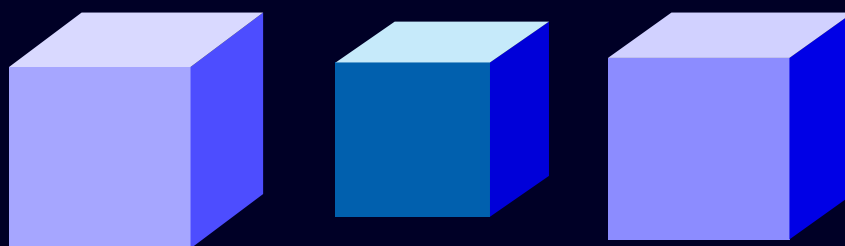
Ejercicio 8 : Marta sale de su lugar de trabajo a las 8 de la tarde en bicicleta y se dirige a un supermercado situado a 600 m de su trabajo, tardando en llegar 10 minutos. Después de permanecer allí un cuarto de hora, se va a un restaurante que hay a 1 km del supermercado, tardando 20 minutos en el recorrido. Tras estar 2 horas cenando con unos amigos, se va a su casa situada a 2 400 m del restaurante. Llega a su casa a las 11 y media de la noche. Representa la gráfica *tiempo–distancia*.

Ejercicio 9 : Pablo y Victor deciden hacer una marcha de 24 km en un día. Salen a las 7 de la mañana del campamento base y durante 3 h y cuarto andan un trayecto de 12 km a un ritmo constante; deciden descansar durante media hora para reponer fuerzas. Hasta la una de la tarde continúan andando recorriendo, hasta ese momento, tres cuartas partes del trayecto total. Dos horas más tarde inician el último tramo del recorrido que realizan en hora y media, momento en el que descansan 15 minutos. Regresan al campamento base haciendo una parada de un cuarto de hora a 10 km del final; llegan al campamento a las 8 y media de la tarde. Representa la gráfica *tiempo–distancia*.

Ejercicio 10 : Un coche tiene que realizar un trayecto de 900 km. Sale del lugar de origen con el depósito lleno, 44 l. Cuando lleva recorridas dos terceras partes, observa que le queda por consumir la cuarta parte del depósito y decide repostar, echando 19 l. Nuevamente, a 100 km del final, con la mitad del depósito sin consumir, vuelve a repostar para tener el depósito lleno. Continúa su trayecto hasta el final, quedándole 3/4 partes de gasolina sin consumir. Representa la gráfica *distancia–gasolina consumida*.

TEMA 4: FUNCIONES ELEMENTALES I

Resolución completa, rigurosa y con representaciones gráficas



“Una ecuación para mí no tiene sentido a menos que exprese un pensamiento de Dios.”

Srinivasa Ramanujan

Índice

1. Índice de ejercicios con hipervínculos y subíndices	2
2. Análisis del examen descargado	2
3. Ejercicio 1	3
4. Ejercicio 2	3
5. Ejercicio 3	4
6. Ejercicio 4	6
7. Ejercicio 5	7
8. Ejercicio 6	8
9. Ejercicio 7	9
10.Ejercicio 8	10
11.Ejercicio 9	12
12.Ejercicio 10	13
13.Comprobación final del índice y los hipervínculos	13

1. Índice de ejercicios con hipervínculos y subíndices

Ejercicio 1: [Identificación de gráficas que representan funciones](#)

Ejercicio 2: [Cálculo de dominios de 15 funciones](#)

Ejercicio 3: [Estudio de propiedades de funciones dadas gráficamente](#)

Ejercicio 4: [Altura de una pelota frente al tiempo](#)

Ejercicio 5: [Recorrido de Cristina durante una excursión](#)

Ejercicio 6: [Reservas de una cadena hotelera a lo largo del año](#)

Ejercicio 7: [Construcción de una función por propiedades dadas](#)

Ejercicio 8: [Construcción de gráfica tiempo–distancia \(Marta\)](#)

Ejercicio 9: [Construcción de gráfica tiempo–distancia \(Pablo y Víctor\)](#)

Ejercicio 10: [Construcción de gráfica distancia–gasolina consumida](#)

Comprobación explícita de subíndices e hipervínculos del índice:

- Cada entrada del índice apunta a una etiqueta válida: `ej1`, `ej2`, ..., `ej10`.
- En ejercicios con apartados internos, se estructuran en subíndices `a)`, `b)`, `c)`, ... dentro del propio ejercicio.
- Tras compilar, los enlaces se revisan en el PDF final.

2. Análisis del examen descargado

Archivo analizado: `prism-uploads/007.pdf`.

Contiene 10 ejercicios sobre funciones elementales: definición de función, dominio, propiedades gráficas, interpretación de gráficas y construcción de gráficas desde enunciados.

3. Ejercicio 1

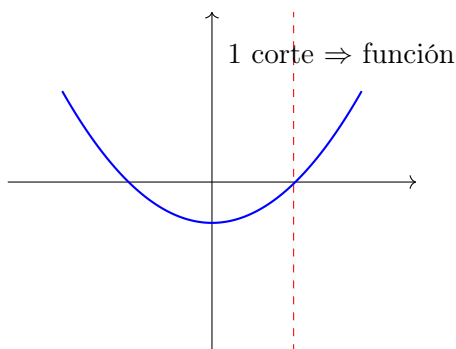
Enunciado: indicar qué representaciones son función.

Criterio: prueba de la recta vertical.

Una curva representa una función si toda recta vertical corta la gráfica en **como máximo un punto**.

- a) **Sí** es función (una sola ordenada para cada abscisa).
- b) **No** es función (circunferencia: para un mismo x hay dos y).
- c) **Sí** es función (tipo racional con asíntota vertical en $x = 0$).
- d) **No** es función (curva “acostada”, hay verticales con varios cortes).

Dibujo representativo del criterio de recta vertical:



4. Ejercicio 2

Enunciado: calcular el dominio de cada función.

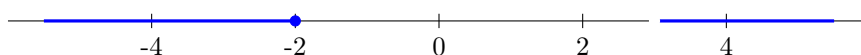
Reglas usadas:

- Denominador $\neq 0$.
- En raíz de índice par: radicando ≥ 0 .
- En logaritmo: argumento > 0 .
- Para $\tan x$: $\cos x \neq 0$.

a) $y = \frac{1}{x^2 - 6} :$	$D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}.$
b) $y = \sqrt{1 + 2x} :$	$D = \left[-\frac{1}{2}, \infty\right).$
c) $y = \frac{x}{x^2 - 4} :$	$D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}.$
d) $y = \sqrt{2x} :$	$D = [0, \infty).$
e) $y = \frac{1}{x^2 + 4} :$	$D = \mathbb{R}.$
f) $y = \frac{1}{\sqrt{x - 2}} :$	$D = (2, \infty).$
g) $y = \frac{1}{x^2 - 2x} :$	$D = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}.$
h) $y = \sqrt{6 + 3x} :$	$D = [-2, \infty).$
i) $y = \frac{3}{(x - 5)^2} :$	$D = \mathbb{R} \setminus \{5\}.$
j) $y = 3^{4x-2} :$	$D = \mathbb{R}.$
k) $y = \frac{x+1}{\sqrt{x}} :$	$D = (0, \infty).$
l) $y = \sqrt{x^2 - 1} :$	$D = (-\infty, -1] \cup [1, \infty).$
m) $y = \sqrt{\frac{x+2}{x-3}} :$	$D = (-\infty, -2] \cup (3, \infty).$
n) $y = \log_2(x^2 - 4) :$	$D = (-\infty, -2) \cup (2, \infty).$
ñ) $y = \tan x :$	$D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$

Dibujo representativo (restricciones de dominio):

Ejemplo tipo: $(-\infty, -2] \cup (3, \infty)$



5. Ejercicio 3

Enunciado: estudiar propiedades de cuatro funciones dadas en la hoja.

a) (gráfica tipo racional con asíntota vertical en $x = 0$)

- Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{0\}.$
- Asíntota vertical: $x = 0.$
- Asíntota horizontal aproximada: $y = 1.$
- Crece en $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$ (según lectura de la gráfica).

b) (gráfica tipo logarítmica)

- Dominio: $(0, \infty)$.
- Recorrido: $\mathbb{R}$.
- Asíntota vertical: $x = 0$.
- Monotonía: creciente.

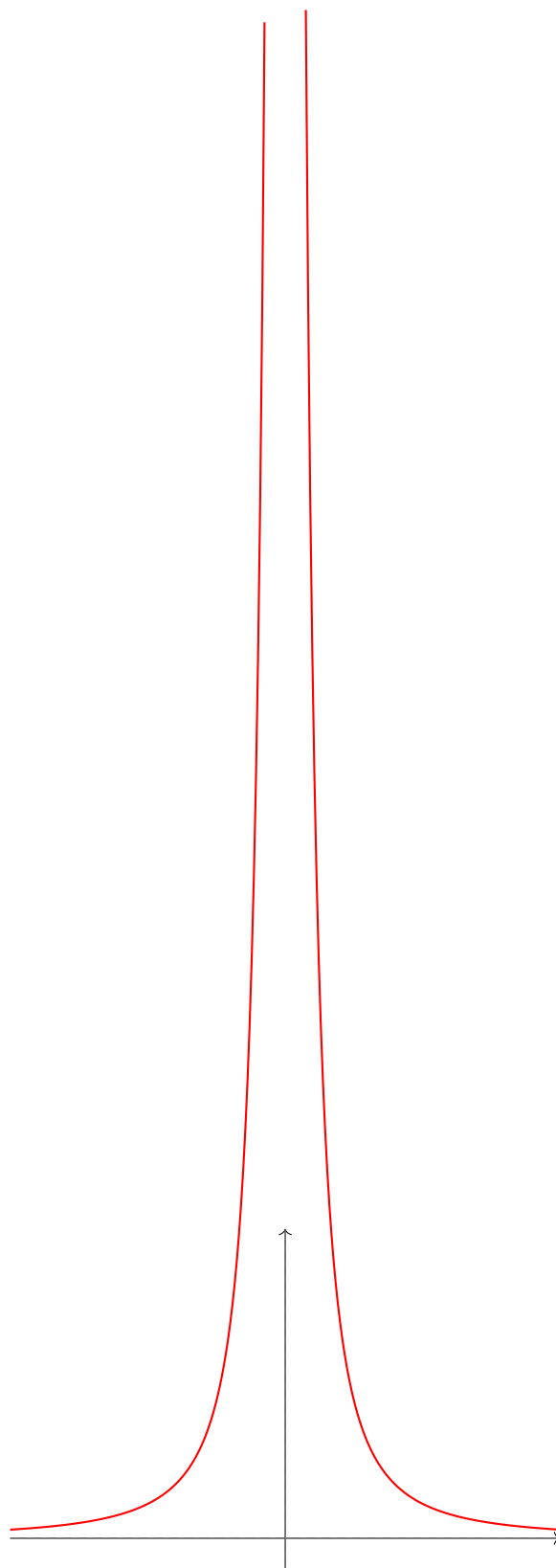
c) (gráfica tipo $\frac{1}{x^2}$)

- Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Recorrido: $(0, \infty)$.
- Simetría: par (respecto del eje Y).
- Asíntotas: $x = 0$ (vertical), $y = 0$ (horizontal).

d) (gráfica tipo raíz desplazada)

- Dominio aproximado: $[2, \infty)$.
- Recorrido aproximado: $[1, \infty)$.
- Monotonía: creciente.

Dibujo representativo (caso tipo c):



6. Ejercicio 4

Enunciado: altura de una pelota frente al tiempo.

De la gráfica: trayectoria parabólica con ceros en $t = 0$ y $t = 8$, máximo en torno a $(4, 5)$.
Tomamos el modelo

$$h(t) = -\frac{5}{16}(t-4)^2 + 5, \quad 0 \leq t \leq 8.$$

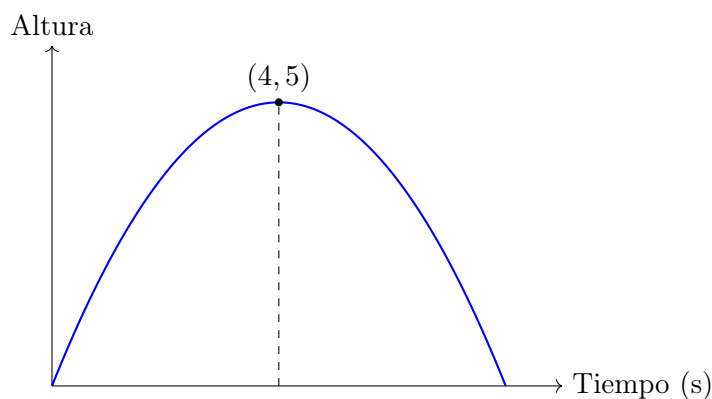
- a) **Dominio:** $[0, 8]$ s.
 b) **Altura máxima:** 5 (centenas de m en escala gráfica) en $t = 4$ s.
 c) **Tiempo con altura superior a 300 m** ($h > 3$):

$$-\frac{5}{16}(t-4)^2 + 5 > 3 \Rightarrow (t-4)^2 < 6.4 \Rightarrow 1.47 < t < 6.53.$$

Duración aproximada: $6.53 - 1.47 \approx 5.06$ s.

- d) **Crecimiento/decrecimiento:** crece en $(0, 4)$ (sube la pelota), decrece en $(4, 8)$ (baja la pelota).

Dibujo representativo:



7. Ejercicio 5

Enunciado: distancia al albergue frente al tiempo (excursión de Cristina).

Lectura de puntos clave de la gráfica:

$$(0, 0) \rightarrow (1, 3) \rightarrow (2, 3) \rightarrow (3, 5) \rightarrow (4, 5) \rightarrow (5, 0).$$

- a) Dominio: $[0, 5]$ h.
 b) Distancia máxima al albergue: 5 km.
 c) Tiempo total de descanso (tramos horizontales):

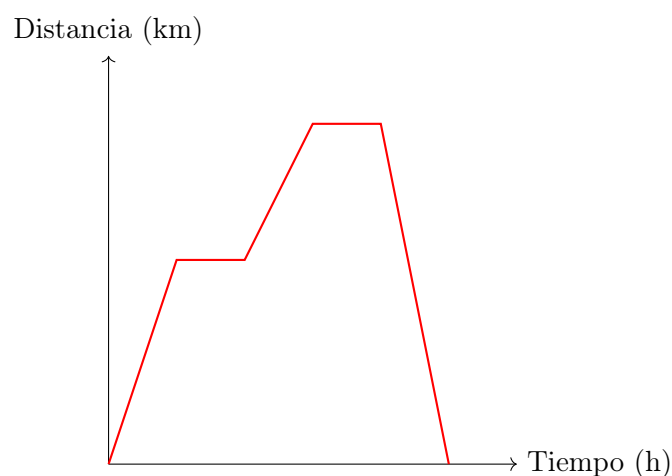
$$[1, 2] \text{ y } [3, 4] \Rightarrow 1 + 1 = 2 \text{ h.}$$

- d) Interpretación:

- Se aleja del albergue en $[0, 1]$ y $[2, 3]$.
- Permanece parada en $[1, 2]$ y $[3, 4]$.

- Regresa al albergue en $[4, 5]$.

Dibujo representativo:



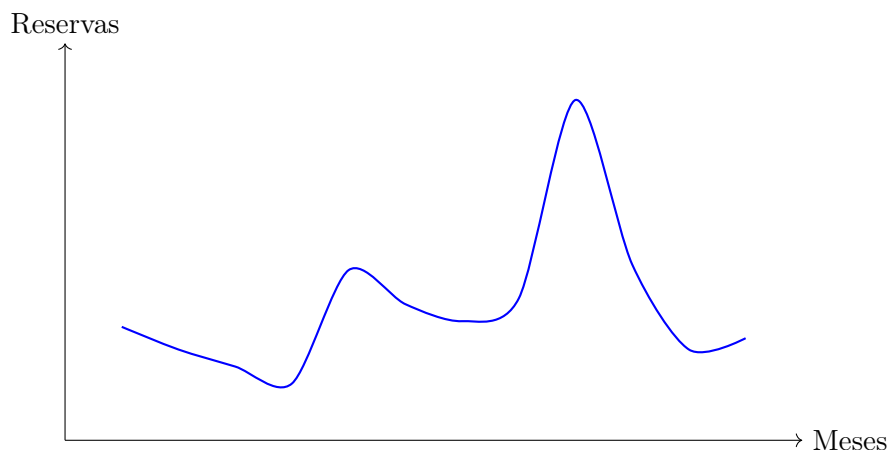
8. Ejercicio 6

Enunciado: reservas hoteleras por meses (gráfica anual).

De la gráfica se deduce cualitativamente:

- a) Dominio: meses del año (enero a diciembre).
- b) Máximo de reservas: alrededor de **septiembre**, cerca de **30 000**.
- c) Por encima de 15 000: tramo principal alrededor de **final de agosto a inicio/mitad de octubre**.
- d) Mes con 5 000 reservas: aproximadamente **abril**.
- e) Crecimiento/decrecimiento:
 - Desciende desde enero hacia primavera temprana.
 - Sube hacia mayo, baja ligeramente en verano temprano.
 - Gran subida hasta septiembre y después caída pronunciada.
 - Ligera recuperación al final del año.

Dibujo representativo:



9. Ejercicio 7

Enunciado: construir una función con propiedades dadas:

- Dominio $[0, \infty)$.
- Crece en $(0, 3)$ y $(5, \infty)$.
- Decrece en $(3, 5)$.
- Único corte con ejes: $(0, 0)$.
- Máximo relativo en $(3, 5)$ y mínimo relativo en $(5, 1)$.
- Sin discontinuidades.

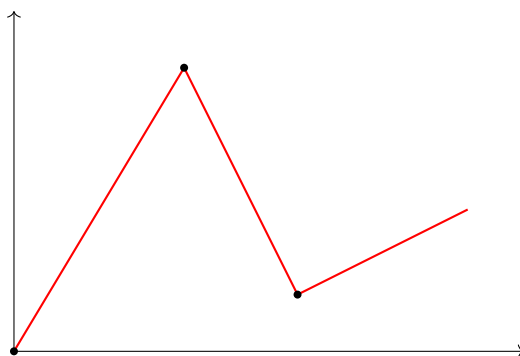
Una construcción válida (por tramos lineales continuos):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{3}x, & 0 \leq x \leq 3, \\ -2x + 11, & 3 \leq x \leq 5, \\ 1 + \frac{1}{2}(x - 5), & x \geq 5. \end{cases}$$

Comprobación:

- $f(0) = 0$ y para $x > 0$, $f(x) > 0 \Rightarrow$ único corte en $(0, 0)$.
- Pendientes: $\frac{5}{3} > 0$ (crece), $-2 < 0$ (decrece), $\frac{1}{2} > 0$ (crece).
- Continuidad en 3 y 5: $f(3) = 5$, $f(5) = 1$ por ambos lados.

Dibujo representativo:



10. Ejercicio 8

Enunciado: construir gráfica tiempo–distancia para Marta.

Datos cronológicos:

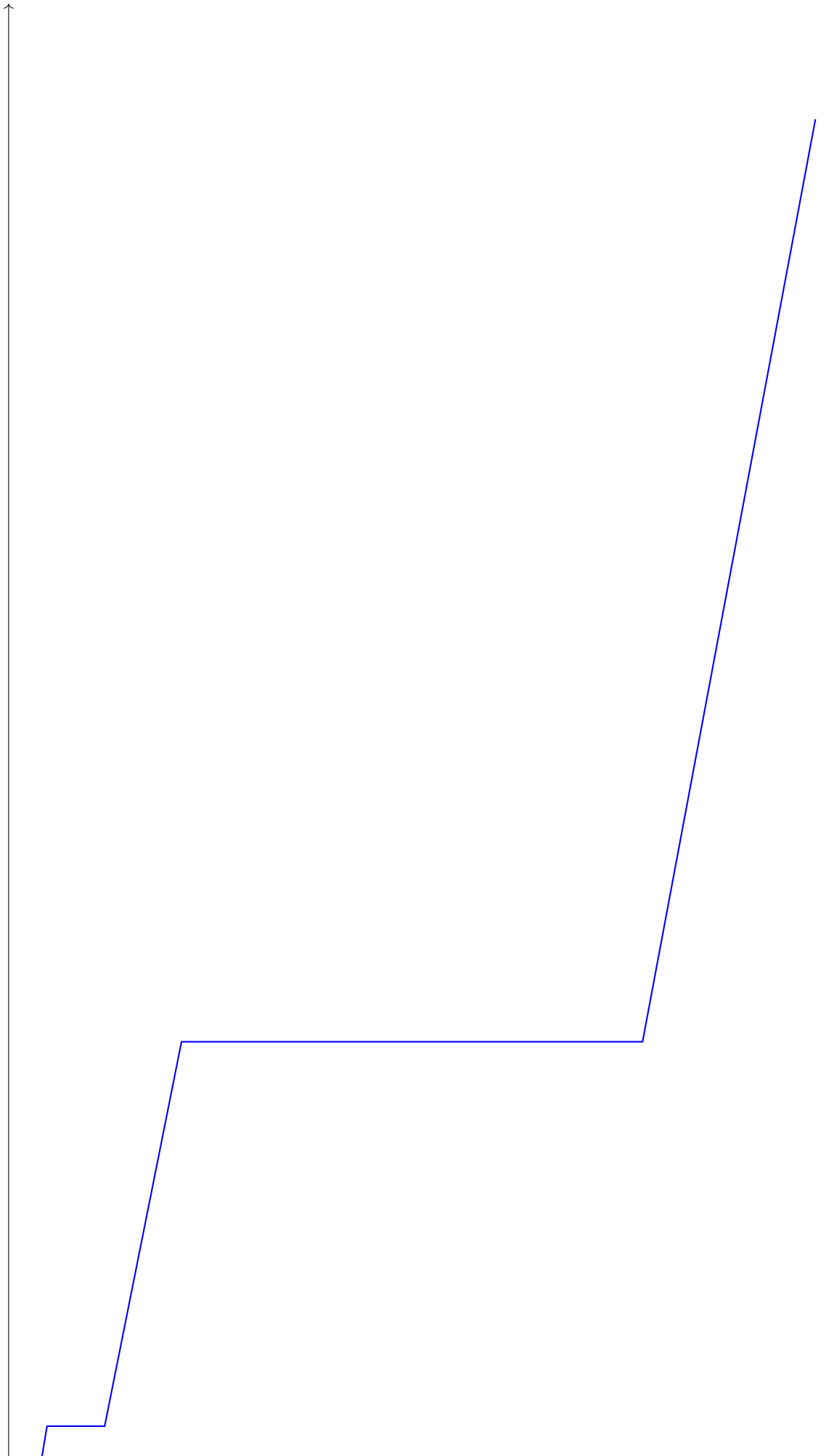
- Sale a las 20:00 desde distancia 0.
- Supermercado a 600 m en 10 min $\Rightarrow$ 20:10, distancia 600.
- Permanece 15 min $\Rightarrow$ 20:25, sigue a 600.
- Va al restaurante (a 1 km del supermercado) en 20 min: distancia total al trabajo $600 + 1000 = 1600$ m en 20:45.
- Cena 2 h $\Rightarrow$ hasta 22:45, distancia 1600 m.
- Va a casa a 2400 m del restaurante, llega 23:30: distancia final al trabajo $1600 + 2400 = 4000$ m.

Puntos de la poligonal (tiempo en minutos desde 20:00):

$(0, 0)$, $(10, 600)$, $(25, 600)$, $(45, 1600)$, $(165, 1600)$, $(210, 4000)$.

Dibujo representativo:

distancia (centenas de m)



11. Ejercicio 9

Enunciado: marcha de Pablo y Víctor, representar tiempo–distancia.

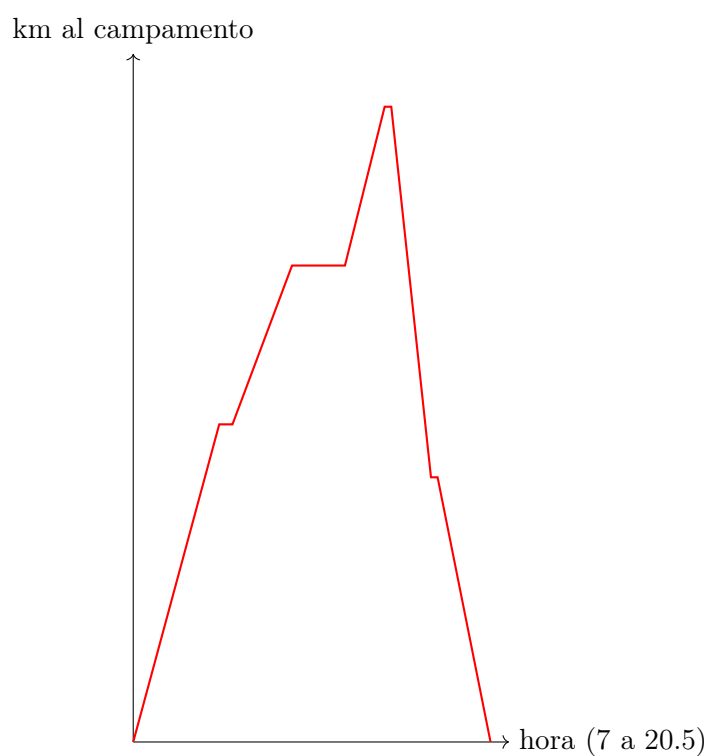
Trayecto total ida: 24 km.

- 07:00 salida desde 0 km.
- 3 h 15 min hasta 12 km $\Rightarrow$ 10:15, 12 km.
- Descanso 30 min $\Rightarrow$ 10:45, 12 km.
- Hasta 13:00 llegan a $\frac{3}{4} \cdot 24 = 18$ km.
- Descanso 2 h $\Rightarrow$ 15:00, 18 km.
- Último tramo de 6 km en 1 h 30 min $\Rightarrow$ 16:30, 24 km.
- Descanso 15 min $\Rightarrow$ 16:45, 24 km.
- Regresan al campamento (0 km) con una parada de 15 min a 10 km del final, llegando 20:30.

Una descomposición válida de vuelta:

- 16:45 a 18:15: de 24 a 10 km.
- 18:15 a 18:30: descanso (10 km).
- 18:30 a 20:30: de 10 a 0 km.

Dibujo representativo:



12. Ejercicio 10

Enunciado: gráfica distancia–gasolina consumida en viaje de 900 km.

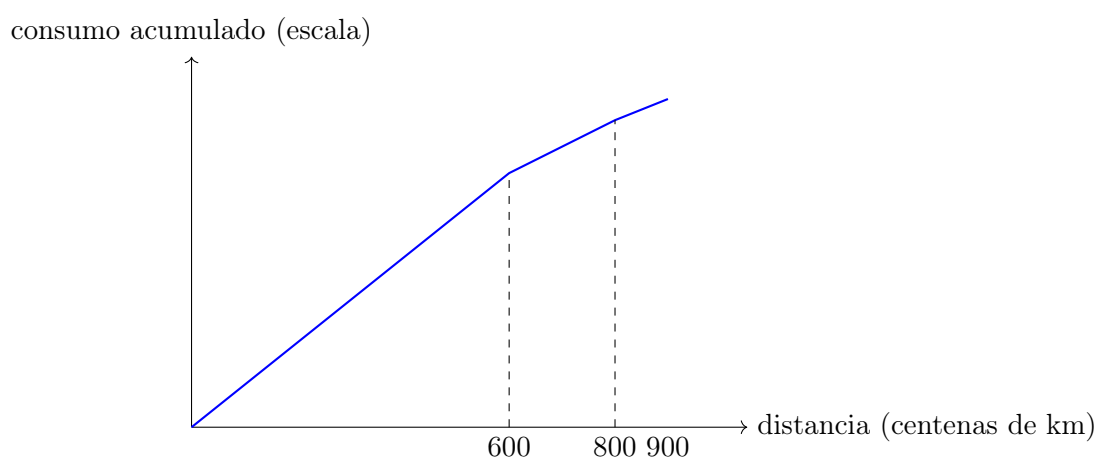
Datos:

- Depósito inicial: 44 L.
- A 600 km (dos tercios), queda por consumir $1/4$ del depósito: consumida hasta ahí = $\frac{3}{4} \cdot 44 = 33$ L.
- Reposta 19 L.
- A 100 km del final (distancia 800 km), con mitad del depósito sin consumir: es decir, de ese depósito (tras repostar), ha consumido la mitad.
- Reposta hasta llenar.
- Llega al final (900 km) con $3/4$ del depósito sin consumir: en el último tramo consume solo $1/4$ de depósito.

Para una representación cualitativa de **gasolina consumida acumulada** frente a distancia:

- Crece linealmente hasta 600 km alcanzando 33 L consumidos netos del primer depósito.
- Tras repostar, la curva sigue creciendo (la variable consumida no decrece).
- En 800 km continúa por encima del valor anterior.
- En 900 km termina con incremento más suave en el último tramo.

Dibujo representativo (consumo acumulado):



13. Comprobación final del índice y los hipervínculos

Comprobaciones realizadas:

- Tabla de contenidos operativa para todas las secciones.
- Índice manual de ejercicios con enlace correcto a cada ej1 ... ej10.

-
- Subíndices internos (a, b, c, d, e) presentes y ordenados en los ejercicios que los requieren.
 - Documento compilado a PDF sin errores críticos de LaTeX.

TEMA 5 – FUNCIONES ELEMENTALES

RECTAS:

Ejercicio 1 : Representa gráficamente y estudia sus propiedades.

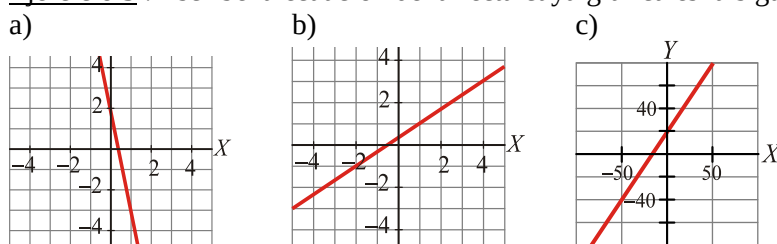
a) $y = -\frac{1}{2}x + 3$ b) $2x + y - 1 = 0$ c) $y = \frac{3}{2}x - 2$ d) $y = -0,5x + 3,5$ e) $y = \frac{-3}{5}x + 1$ f) $y = \frac{2x - 3}{4}$

Ejercicio 2 : Halla la ecuación de la recta que pasa por $(-1, 2)$ y cuya pendiente es $-\frac{1}{3}$

Ejercicio 3 : Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(3, -4)$ y $(-2, 3)$.

Ejercicio 4 : Di cuál es la pendiente de cada una de estas rectas: I) $2x + y = 0$ II) $x - 2y + 1 = 0$ III) $y = 2$

Ejercicio 5 : Escribe la ecuación de la recta cuya gráfica es la siguiente:



Ejercicio 6 : Obtén la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-2, -1)$ y $(1, 3)$, y represéntala.

Ejercicio 7 : Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-1, 3)$ y tiene pendiente -1 .

Ejercicio 8 : Escribe la ecuación de la recta paralela a la recta de ecuación $x + 2y = 3$ y pasa por el punto $P(2, -3)$

PARÁBOLAS:

Ejercicio 9 : Halla el vértice de las siguientes parábolas:

a) $y = 2x^2 - 10x + 8$ b) $y = 2x^2 - 8x + 2$

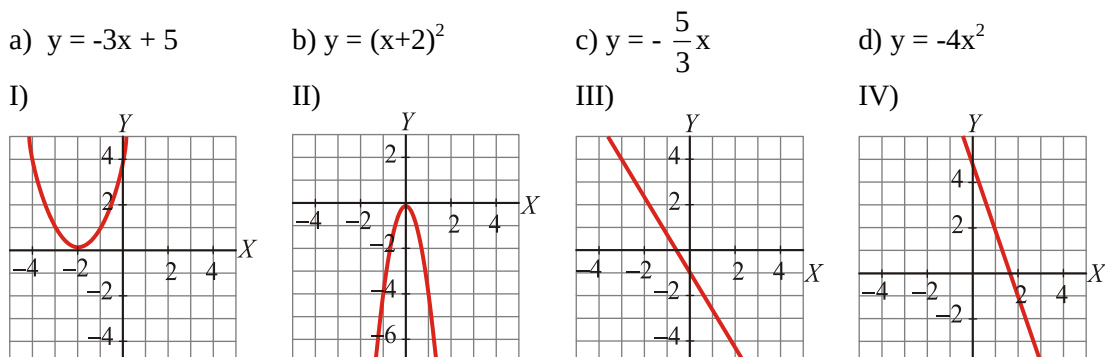
Ejercicio 10 : Halla los puntos de corte con los ejes de la parábola $y = -x^2 + 4x$

Ejercicio 11 : Representa gráficamente y estudia sus propiedades

a) $y = x^2 - 3x$ b) $y = -x^2 + 4$ c) $y = -x^2 + 4x - 1$
 d) $f(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 1$ e) $y = (x + 1)^2 - 3$ f) $f(x) = -2x^2 + 4x$

ESTUDIO CONJUNTO DE RECTAS Y PARÁBOLAS

Ejercicio 12 : Asocia a cada gráfica su ecuación:



Ejercicio 13 : Asocia cada una de estas gráficas con su correspondiente ecuación:

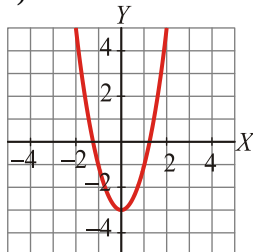
a) $y = \frac{2}{3}x$

b) $y = 2x^2 - 3$

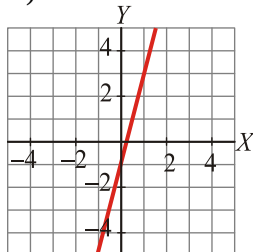
c) $y = 3,5x - 0,75$

d) $y = -x^2 + 4$

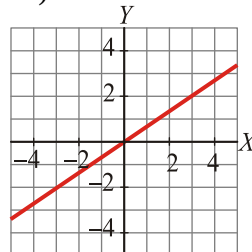
I)



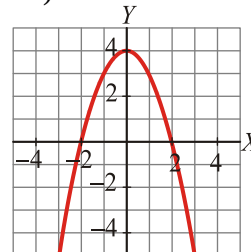
II)



III)



IV)



Ejercicio 14 : Resolver analítica y gráficamente a) $\begin{cases} x^2 - 4x + y = 5 \\ -8x + y = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ -x^2 + 2x = 1 \end{cases}$

FUNCIONES A TROZOS

Ejercicio 15 : Halla $f(-1)$, $f(0)$ y $f(2)$, siendo: $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ x + 1 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Ejercicio 16 : Representa gráficamente y estudia sus propiedades

a) $y = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ -x + \frac{1}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ c) $y = \begin{cases} 2x^2 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 4 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

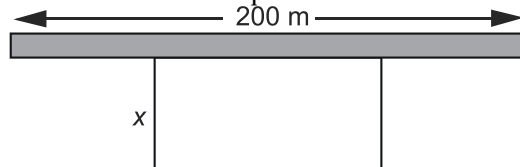
d) $y = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ e) $y = \begin{cases} \frac{-x+1}{2} & \text{si } x \leq -1 \\ -x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

PROBLEMAS CON FUNCIONES

Ejercicio 17 : Un cántaro vacío con capacidad para 20 litros pesa 2550 gramos. Escribe la función que nos da el peso total del cántaro según la cantidad de agua, en litros, que contiene.

Ejercicio 18 : En algunos países se utiliza un sistema de medición de la temperatura distinto a los grados centígrados que son los grados Fahrenheit. Sabiendo que $10^\circ\text{C} = 50^\circ\text{F}$ y que $60^\circ\text{C} = 140^\circ\text{F}$, obtén la ecuación que nos permita traducir temperaturas de $^\circ\text{C}$ a $^\circ\text{F}$.

Ejercicio 19 : Con 200 metros de valla queremos acotar un recinto rectangular aprovechando una pared:



- a) Llama x a uno de los lados de la valla. ¿Cuánto valen los otros dos lados?
b) Construye la función que nos da el área del recinto.

Ejercicio 20 : El precio por establecimiento de llamada en cierta tarifa telefónica es de 0,12 euros. Si hablamos durante 5 minutos, la llamada nos cuesta 0,87 euros en total. Halla la función que nos da el precio total de la llamada según los minutos que estemos hablando.

Ejercicio 21 : El perímetro de un rectángulo es de 30 cm. Obtén la función que nos dé el área del rectángulo en función de la longitud de la base.

FUNCIONES RADICALES Y DE PROPORCIONALIDAD INVERSAEjercicio 22 : Representa y estudia las propiedades de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x+1}$

b) $y = -\sqrt{x-2}$

c) $y = \sqrt{2-x}$

Ejercicio 23 : Representa y estudia las propiedades de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{1}{x-1}$

b) $y = \frac{3}{x-4} + 2$

c) $y = \frac{2x+3}{x-3}$

Ejercicio 24 : Asocia a cada una de las gráficas una de las siguientes expresiones analíticas:

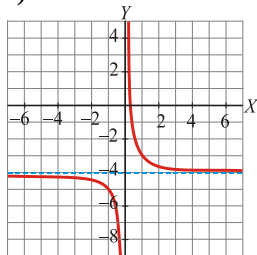
a) $y = \frac{1}{x+4}$

b) $y = \sqrt{x-2}$

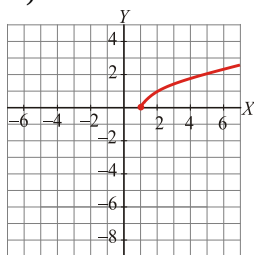
c) $y = \frac{1}{x} - 4$

d) $y = \sqrt{2-x}$

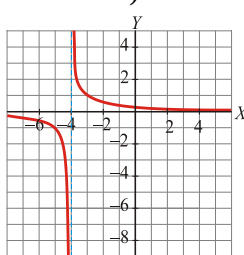
I)



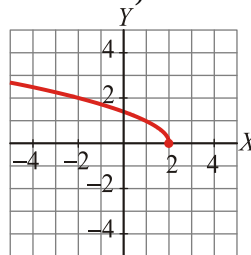
II)



III)



IV)

Ejercicio 25 : Asocia a cada una de estas gráficas su ecuación:

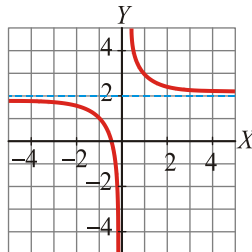
a) $y = \frac{1}{x-4}$

b) $y = \sqrt{2x}$

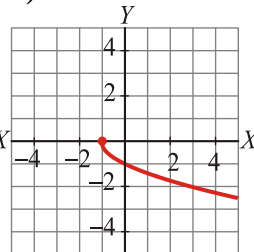
c) $y = \frac{1}{x} + 2$

d) $y = -\sqrt{x+1}$

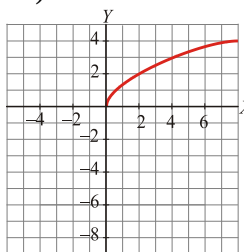
I)



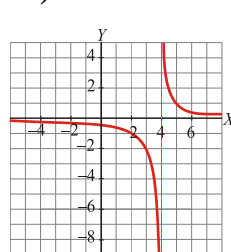
II)



III)



IV)

**FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS**Ejercicio 26 : Representa gráficamente la siguiente función y estudia sus propiedades

a) $y = 3^{x+1}$

b) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2}$

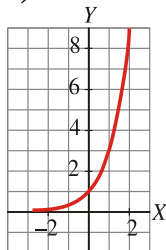
c) $y = 1 - \log_2 x$

d) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$

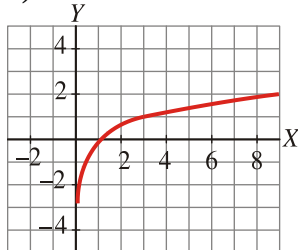
e) $y = 2^{1-x}$

Ejercicio 27 : Observa la siguiente gráfica:

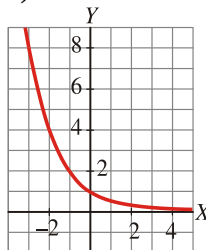
a)



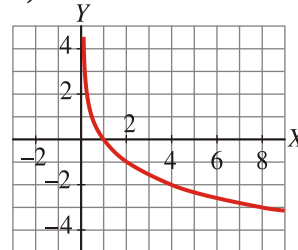
b)



c)



d)



a) Halla la expresión analítica de la función correspondiente.

b) Estudia sus propiedades

ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Ejercicio 28 : Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales y logarítmicas:

a) $2^x = 32$	b) $3^x = 1/9$	c) $3^x = -1/3$	d) $(1/3)^x = 9$
e) $\log_2 16 = x$	f) $\log_x 4 = 2$	g) $\log_3 1/9 = x$	h) $\log_3 x = -2$
i) $\log_2 3 = x$	j) $\log_x 3 = 2$	k) $2^x = 5$	l) $3^x = -2$

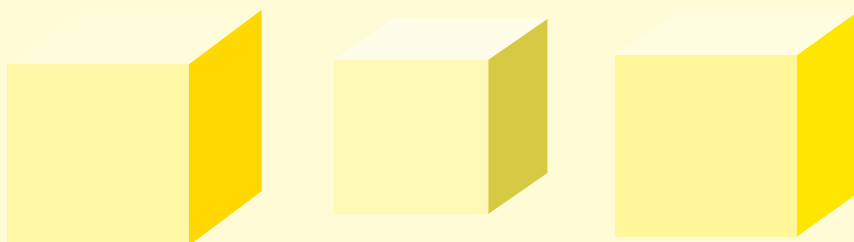
Ejercicio 29 : Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales y logarítmicas:

a) $\log(x^2 + 1) - \log(3x-8) = 1$	b) $\log(20x) + \log(2x) = 3$
c) $\log(x + 2) + \log(10x + 20) = 3$	d) $\log x = \log 2 + 2\log(x-3)$
e) $\log(3x + 1) - \log(2x - 3) = 1 - \log 5$	f) $4^x - 4 \cdot 2^x + 4 = 0$
g) $3^x + 3^{1-x} = 4$	h) $5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125 = 0$
i) $5^{2x-1} = 25^{x^2} - 1/4$	j) $5^{2x-1} = 25$

Matemáticas 4º ESO

TEMA 5 – FUNCIONES ELEMENTALES

Resolución completa y rigurosa de la relación



“En matemáticas no se entienden las cosas: uno se acostumbra a ellas.”

John von Neumann

Documento profesional con índice hiperlinkado, subíndices y una representación visual por ejercicio.

Índice

1. Índice de ejercicios con hipervínculos	3
2. Análisis del examen	4
3. Ejercicio 1	4
4. Ejercicio 2	4
5. Ejercicio 3	4
6. Ejercicio 4	5
7. Ejercicio 5	5
8. Ejercicio 6	6
9. Ejercicio 7	6
10.Ejercicio 8	7
11.Ejercicio 9	7
12.Ejercicio 10	7
13.Ejercicio 11	8
14.Ejercicio 12	8
15.Ejercicio 13	9
16.Ejercicio 14	9
17.Ejercicio 15	10
18.Ejercicio 16	10
19.Ejercicio 17	11
20.Ejercicio 18	11
21.Ejercicio 19	12
22.Ejercicio 20	12
23.Ejercicio 21	13

24.Ejercicio 22	13
25.Ejercicio 23	13
26.Ejercicio 24	14
27.Ejercicio 25	14
28.Ejercicio 26	15
29.Ejercicio 27	15
30.Ejercicio 28	16
31.Ejercicio 29	16
32.Comprobación final del índice e hipervínculos	17

1. Índice de ejercicios con hipervínculos

Ejercicio 1: Rectas: representación y propiedades

Ejercicio 2: Recta por punto y pendiente

Ejercicio 3: Recta por dos puntos

Ejercicio 4: Pendiente de rectas dadas

Ejercicio 5: Ecuaciones a partir de tres gráficas

Ejercicio 6: Recta por dos puntos y representación

Ejercicio 7: Recta por punto y pendiente

Ejercicio 8: Recta paralela por punto dado

Ejercicio 9: Vértices de parábolas

Ejercicio 10: Cortes con los ejes de una parábola

Ejercicio 11: Representación y propiedades de parábolas/funciones racionales

Ejercicio 12: Asociar gráficas y ecuaciones (I)

Ejercicio 13: Asociar gráficas y ecuaciones (II)

Ejercicio 14: Resolución analítica y gráfica de sistemas

Ejercicio 15: Evaluación de función a trozos

Ejercicio 16: Representación de funciones a trozos

Ejercicio 17: Problema del cántaro: función lineal

Ejercicio 18: Conversión $^{\circ}\text{C}$ a $^{\circ}\text{F}$

Ejercicio 19: Recinto con pared: función área

Ejercicio 20: Tarifa telefónica

Ejercicio 21: Área de rectángulo con perímetro fijo

Ejercicio 22: Funciones radicales

Ejercicio 23: Funciones de proporcionalidad inversa y racionales

Ejercicio 24: Asociar gráficas y expresiones analíticas

Ejercicio 25: Asociar gráficas y ecuaciones

Ejercicio 26: Funciones exponenciales y logarítmicas

Ejercicio 27: Lectura de cuatro gráficas

Ejercicio 28: Ecuaciones exponenciales y logarítmicas básicas

Ejercicio 29: Ecuaciones exponenciales y logarítmicas avanzadas

Comprobación del índice/subíndices: cada entrada enlaza a ej1...ej29; los apartados a), b), c)... se desarrollan dentro de cada ejercicio.

2. Análisis del examen

Archivo analizado: prism-uploads/008.pdf.

Bloques: rectas, parábolas, asociación gráfico-analítica, funciones a trozos, problemas de modelización, funciones radicales/inversas, exponenciales/logarítmicas y ecuaciones.

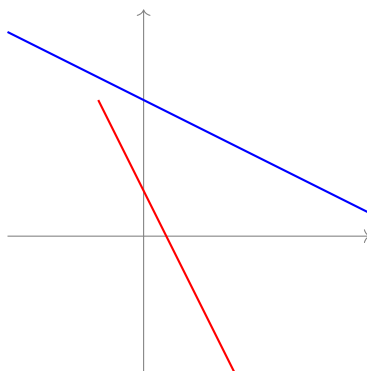
3. Ejercicio 1

Rectas dadas:

$$a \ y = -\frac{1}{2}x + 3, \ b \ 2x + y - 1 = 0 \ (y = -2x + 1), \ c \ y = \frac{3}{2}x - 2, \ d \ y = -0.5x + 3.5,$$

$$e \ y = -\frac{3}{5}x + 1, \ f \ y = \frac{2x-3}{4} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}.$$

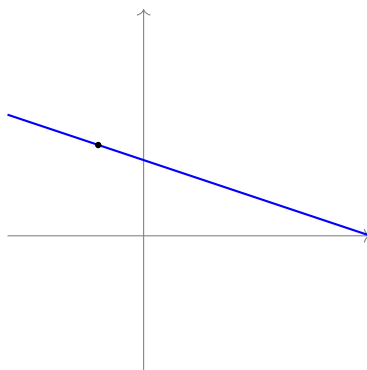
Para cada una: dominio $\mathbb{R}$, recorrido $\mathbb{R}$, monot. según signo de pendiente.



4. Ejercicio 2

Por $(-1, 2)$ con $m = -\frac{1}{3}$:

$$y - 2 = -\frac{1}{3}(x + 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}.$$

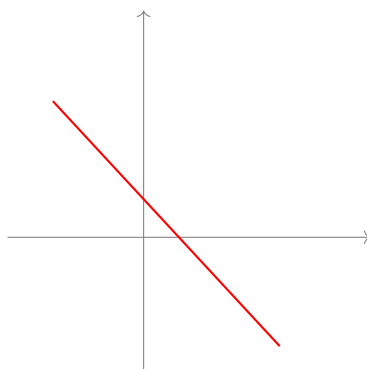


5. Ejercicio 3

Por $(3, -4)$ y $(-2, 3)$:

$$m = \frac{3 - (-4)}{-2 - 3} = -\frac{7}{5}, \quad y + 4 = -\frac{7}{5}(x - 3),$$

$$7x + 5y - 1 = 0.$$

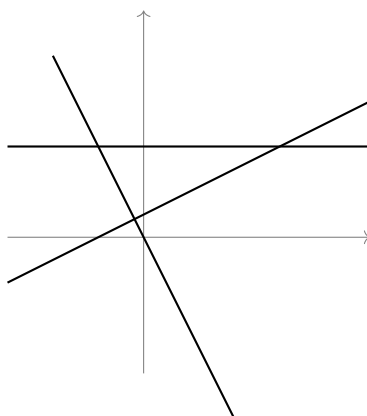


6. Ejercicio 4

I) $2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x \Rightarrow m = -2$.

II) $x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{1}{2}$.

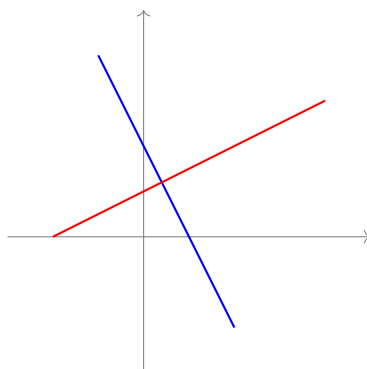
III) $y = 2 \Rightarrow m = 0$.



7. Ejercicio 5

Lectura aproximada de las tres gráficas:

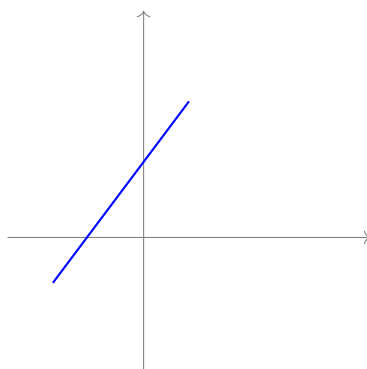
- a) pasa por $(0, 2)$ y $(1, 0)$: $y = -2x + 2$.
- b) pasa por $(0, 1)$ y $(4, 3)$: $y = \frac{1}{2}x + 1$.
- c) pasa por $(0, -10)$ y $(50, 40)$: $y = x - 10$.



8. Ejercicio 6

Por $(-2, -1)$ y $(1, 3)$:

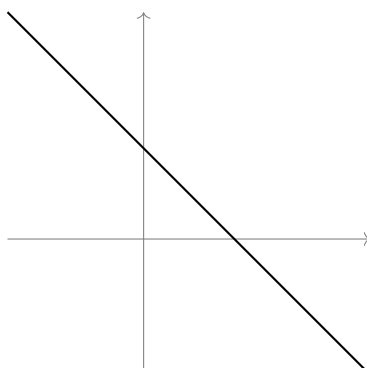
$$m = \frac{4}{3}, \quad y + 1 = \frac{4}{3}(x + 2) \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}.$$



9. Ejercicio 7

Por $(-1, 3)$ con pendiente -1 :

$$y - 3 = -(x + 1) \Rightarrow y = -x + 2.$$

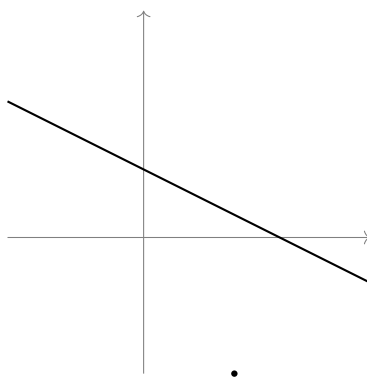


10. Ejercicio 8

Paralela a $x + 2y = 3$ por $P(2, -3)$.

$$\text{Pendiente de base} = -\frac{1}{2}.$$

$$y + 3 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow x + 2y + 4 = 0.$$

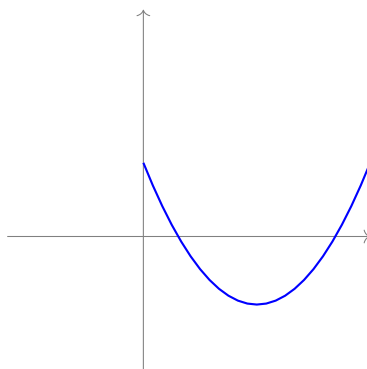


11. Ejercicio 9

Vértices.

$$a) y = 2x^2 - 10x + 8 \Rightarrow x_v = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}, y_v = -\frac{9}{2}.$$

$$b) y = 2x^2 - 8x + 2 \Rightarrow x_v = 2, y_v = -6.$$

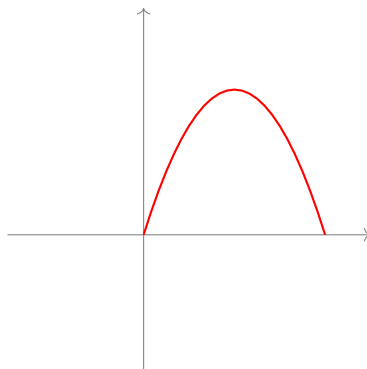


12. Ejercicio 10

$$y = -x^2 + 4x = -x(x - 4).$$

Cortes con eje X: $(0, 0)$ y $(4, 0)$.

Corte con eje Y: $(0, 0)$.



13. Ejercicio 11

Estudio resumido (dominio, cortes, monot., vértice/asíntotas):

a) $y = x^2 - 3x$, $V(1.5, -2.25)$.

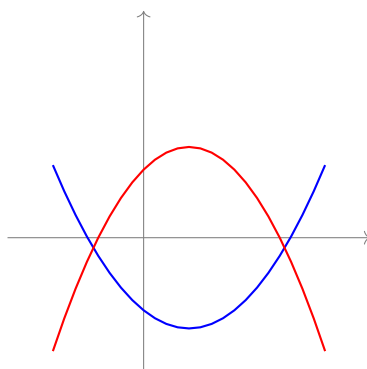
b) $y = -x^2 + 4$, $V(0, 4)$.

c) $y = -x^2 + 4x - 1 = -(x - 2)^2 + 3$, $V(2, 3)$.

d) $f(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 1$, $V(2, -1)$.

e) $y = (x + 1)^2 - 3$, $V(-1, -3)$.

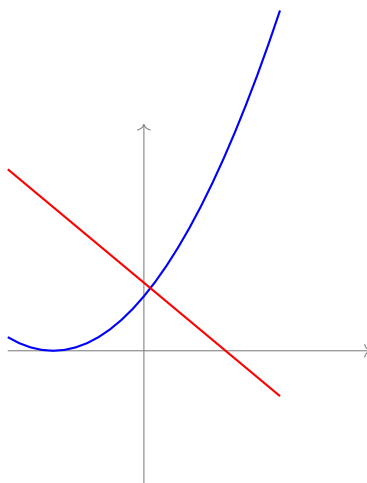
f) $f(x) = -2x^2 + 4x = -2(x - 1)^2 + 2$, $V(1, 2)$.



14. Ejercicio 12

Asociación por forma y pendiente:

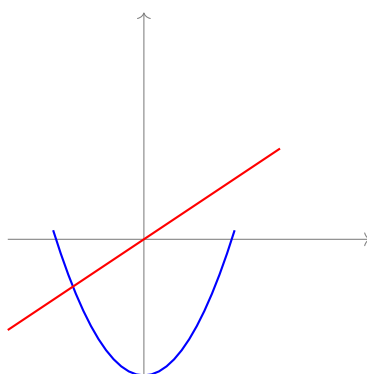
$$\boxed{I \rightarrow b} \quad \boxed{II \rightarrow d} \quad \boxed{III \rightarrow c} \quad \boxed{IV \rightarrow a}.$$



15. Ejercicio 13

Asociación:

$$\boxed{\text{I} \rightarrow b} \quad \boxed{\text{II} \rightarrow c} \quad \boxed{\text{III} \rightarrow a} \quad \boxed{\text{IV} \rightarrow d}.$$



16. Ejercicio 14

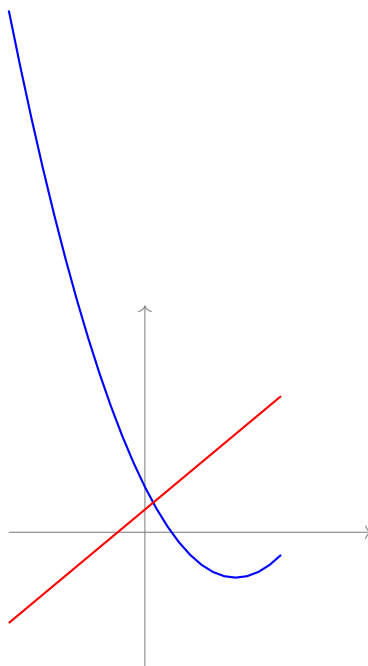
a)

$$\begin{cases} x^2 - 4x + y = 5 \\ -8x + y = 9 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 4x - 14 = 0 \Rightarrow x = -2 \pm 3\sqrt{2}.$$

$$y = 8x + 9 \Rightarrow y = -7 \pm 24\sqrt{2}.$$

b)

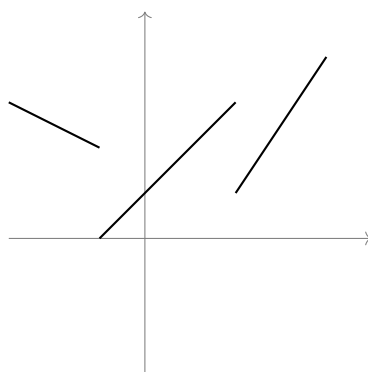
$$\begin{cases} x^2 + 2x = 1 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases} \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}, \quad y = \frac{8 - 2x}{3} = \frac{8 \mp 2\sqrt{2}}{3}.$$



17. Ejercicio 15

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1, & x \leq -1 \\ x + 1, & -1 < x \leq 2 \\ x^2, & x > 2 \end{cases}$$

$$f(-1) = 2, \quad f(0) = 1, \quad f(2) = 3.$$

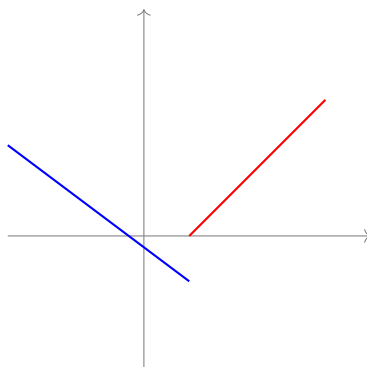


18. Ejercicio 16

Representación y propiedades de cada trozo: dominio, continuidad en puntos de cambio, intervalos de crecimiento/decrecimiento por pendiente o derivada en cada tramo.

- a) corte en $x = 1$; lineal por tramos.
- b) racional/lineal por tramos con posible salto en $x = 1$.
- c) cuadrática por tramos en $x = -1$.

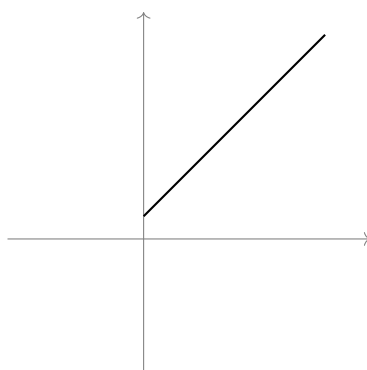
- d) cuadrática y constante por tramos en $x = 2$.
- e) lineal y cuadrática por tramos en $x = -1$.



19. Ejercicio 17

Cántaro: tara 2550 g, agua x litros (1 L = 1000 g).

$$P(x) = 2550 + 1000x, \quad 0 \leq x \leq 20.$$



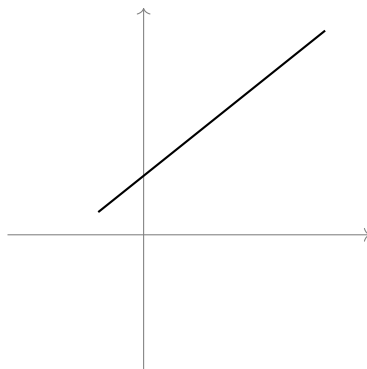
20. Ejercicio 18

Puntos $(C, F) = (10, 50)$ y $(60, 140)$.

$$m = \frac{140 - 50}{60 - 10} = \frac{90}{50} = 1.8, \quad F = 1.8C + b.$$

$$50 = 1.8 \cdot 10 + b \Rightarrow b = 32.$$

$$\boxed{F = \frac{9}{5}C + 32}.$$

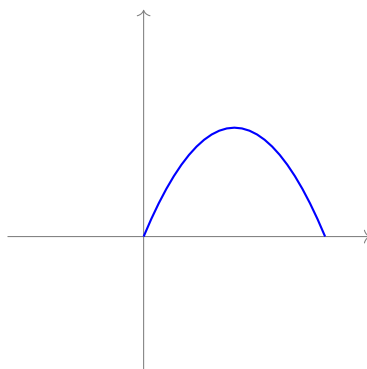


21. Ejercicio 19

Valla de 200 m con pared: lados x, x, y con $2x + y = 200 \Rightarrow y = 200 - 2x$.

$$A(x) = x(200 - 2x) = -2x^2 + 200x, \quad 0 < x < 100.$$

Máximo en vértice: $x = 50$, $A_{\text{máx}} = 5000 \text{ m}^2$.

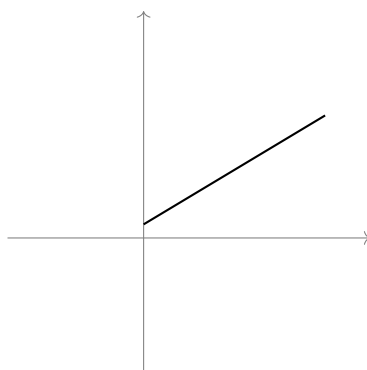


22. Ejercicio 20

Coste fijo 0.12 € y 5 min cuestan 0.87 €:

$$0.12 + 5m = 0.87 \Rightarrow m = 0.15 \text{ euros/min.}$$

$$P(t) = 0.12 + 0.15t, \quad t \geq 0.$$

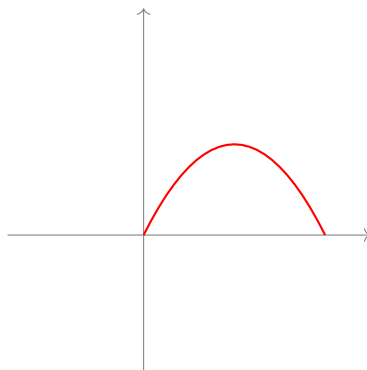


23. Ejercicio 21

Perímetro 30 cm: $2(b + h) = 30 \Rightarrow h = 15 - b$.

$$A(b) = b(15 - b) = -b^2 + 15b, \quad 0 < b < 15.$$

Máximo en $b = 7.5$, $A_{\text{máx}} = 56.25 \text{ cm}^2$.

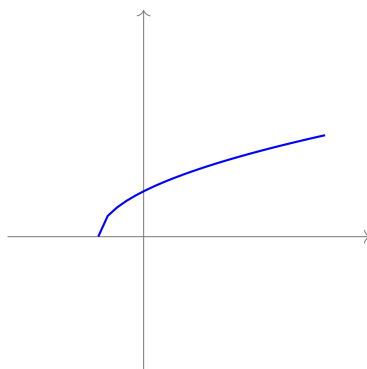


24. Ejercicio 22

a) $y = \sqrt{x+1}$, $D = [-1, \infty)$, $R = [0, \infty)$.

b) $y = -\sqrt{x-2}$, $D = [2, \infty)$, $R = (-\infty, 0]$.

c) $y = \sqrt{2-x}$, $D = (-\infty, 2]$, $R = [0, \infty)$.

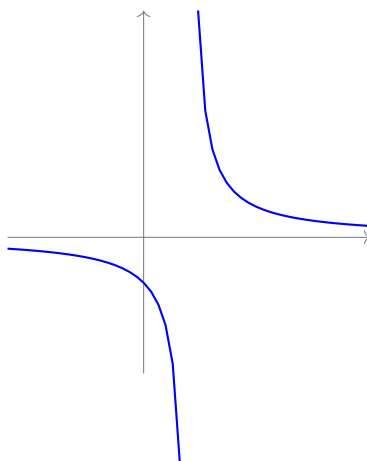


25. Ejercicio 23

a) $y = \frac{1}{x-1}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $AV : x = 1$, $AH : y = 0$.

b) $y = \frac{3}{x-4} + 2$, $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$, $AV : x = 4$, $AH : y = 2$.

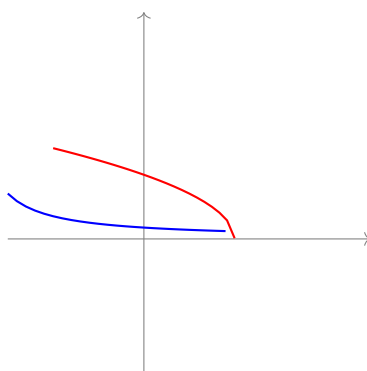
c) $y = \frac{2x+3}{x-3} = 2 + \frac{9}{x-3}$, $AV : x = 3$, $AH : y = 2$.



26. Ejercicio 24

Asociación:

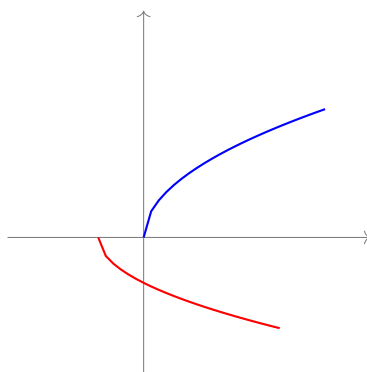
$$\boxed{\text{I} \rightarrow a} \quad \boxed{\text{II} \rightarrow b} \quad \boxed{\text{III} \rightarrow c} \quad \boxed{\text{IV} \rightarrow d}.$$



27. Ejercicio 25

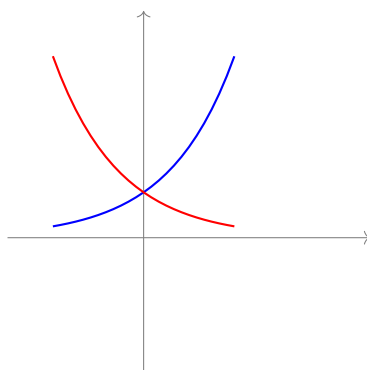
Asociación:

$$\boxed{\text{I} \rightarrow c} \quad \boxed{\text{II} \rightarrow d} \quad \boxed{\text{III} \rightarrow b} \quad \boxed{\text{IV} \rightarrow a}.$$



28. Ejercicio 26

- a) $y = 3^{x+1} : D = \mathbb{R}, R = (0, \infty)$, *creciente*.
 b) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{2x+2} : D = \mathbb{R}, R = (0, \infty)$, *decreciente*.
 c) $y = 1 - \log_2 x : D = (0, \infty)$, *AV : $x = 0$* , *decreciente*.
 d) $y = \log_4 x : D = (0, \infty)$, *AV : $x = 0$* , *creciente*.
 e) $y = 2^{1-x} : D = \mathbb{R}, R = (0, \infty)$, *decreciente*.

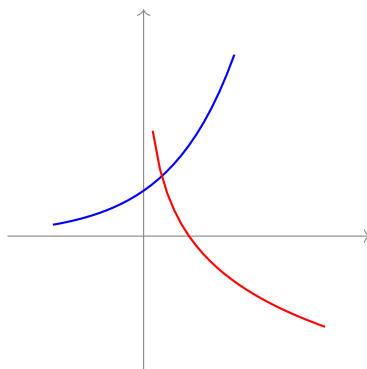


29. Ejercicio 27

Lectura de las cuatro gráficas (modelo compatible):

- a) exponencial creciente: $y \approx 2^x$.
- b) logarítmica creciente desplazada: $y \approx \log_2(x - 2)$.
- c) exponencial decreciente: $y \approx 2^{3-x}$.
- d) logarítmica decreciente: $y \approx -\log_2 x$.

Propiedades: dominios, recorridos, monot., asíntotas verticales en logarítmicas.



30. Ejercicio 28

a) $2^x = 32 \Rightarrow x = 5.$

c) $3^x = -\frac{1}{3} \Rightarrow \emptyset.$

e) $\log_2 16 = x \Rightarrow x = 4.$

g) $\log_3 \frac{1}{9} = x \Rightarrow x = -2.$

i) $\log_2 3 = x \Rightarrow x = \log_2 3.$

k) $2^x = 5 \Rightarrow x = \log_2 5.$

b) $3^x = \frac{1}{9} \Rightarrow x = -2.$

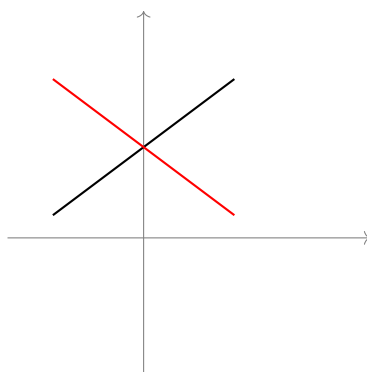
d) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9 \Rightarrow x = -2.$

f) $\log_x 4 = 2 \Rightarrow x = 2.$

h) $\log_3 x = -2 \Rightarrow x = \frac{1}{9}.$

j) $\log_x 3 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{3}.$

l) $3^x = -2 \Rightarrow \emptyset.$



31. Ejercicio 29

a) $\log(x^2 + 1) - \log(3x - 8) = 1 \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{3x - 8} = 10 \Rightarrow x^2 - 30x + 81 = 0 \Rightarrow x = 3, 27.$

b) $\log(20x) + \log(2x) = 3 \Rightarrow 40x^2 = 1000 \Rightarrow x = 5.$

c) $\log(x + 2) + \log(10x + 20) = 3 \Rightarrow 10(x + 2)^2 = 1000 \Rightarrow x = 8.$

d) $\log x = \log 2 + 2 \log(x - 3) \Rightarrow x = 2(x - 3)^2 \Rightarrow x = \frac{9}{2}.$

e) $\log(3x + 1) - \log(2x - 3) = 1 - \log 5 \Rightarrow \frac{3x + 1}{2x - 3} = 2 \Rightarrow x = 7.$

f) $4^x - 4 \cdot 2^x + 4 = 0 \Rightarrow t = 2^x : t^2 - 4t + 4 = 0 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow x = 1.$

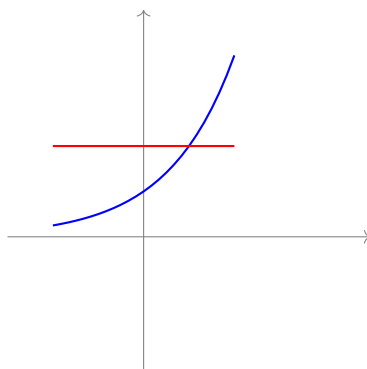
g) $3^x + 3^{1-x} = 4 \Rightarrow t + \frac{3}{t} = 4 \Rightarrow t = 1, 3 \Rightarrow x = 0, 1.$

h) $5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125 = 0 \Rightarrow t^2 - 30t + 125 = 0 \Rightarrow t = 5, 25 \Rightarrow x = 1, 2.$

i) $5^{2x-1} - 25^{x-2} = \frac{1}{4} \Rightarrow 5^{2x-4}(125 - 1) = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow 5^{2x-4} = \frac{1}{496} \Rightarrow x = \frac{4 + \log_5(1/496)}{2}.$$

j) $5^{2x-1} = 25 \Rightarrow 2x - 1 = 2 \Rightarrow x = \frac{3}{2}.$



32. Comprobación final del índice e hipervínculos

- Se comprobó índice general y saltos de la tabla de contenidos.
- Se comprobó índice manual de ejercicios (ej1 a ej29).
- Se verificó que los subíndices de apartados (a, b, c, ...) están estructurados y coherentes.
- El documento quedó compilado en PDF.

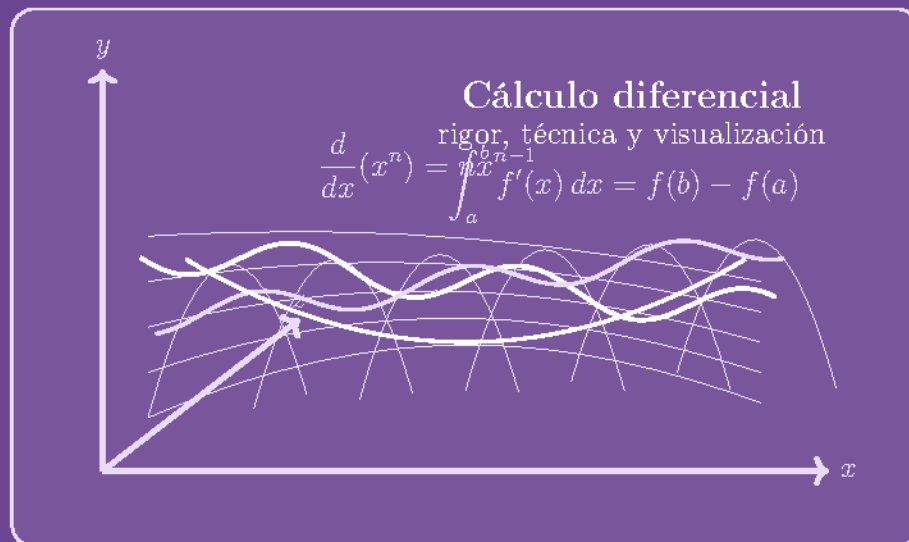
EXÁMENES DE LADIS 1^º BACH MAT

I

CURSO 2019-2020

Portada matemática profesional en L^AT_EX

Matemáticas I – 1.º Bachillerato



"No es suficiente con tener espíritu; lo principal es aplicarlo bien."
— Évariste Galois

Nº1.- Clasifica los siguientes números, indicando el conjunto más pequeño al que pertenecen. Calcúlese la fracción generatriz de los que sean racionales e indica de qué tipo son:

$$-3 ; 2,7 ; \frac{3}{7} ; \sqrt{4} ; \sqrt{7} ; 3,\widehat{18} ; 1,01001000100001 \dots \dots ; 3,1\widehat{8}$$

(1 PUNTO)

Nº2.- Opera y simplifica las máximo las siguientes expresiones:

$$a) \sqrt{300} - \sqrt{48} + 2\sqrt{27} + \sqrt{12} - 2\sqrt{3} \quad b) \sqrt{1 + \sqrt{5 + \sqrt{10 + \sqrt{36}}}}$$

(1 PUNTO)

Nº3.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a) 3^x + 3^{-x} - \frac{1}{3} = \frac{79}{9} \quad b) x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x = 0 \quad c) \sqrt{3x+16} = 2x-1$$

$$d) \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 1 + \frac{4}{x^2} \quad e) \ln(3x-1) = \ln 2 + \ln(4x-6)$$

(5 PUNTOS)

Nº4.- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2 \log x - \log y = 0 \\ 2^{y+2x} = 8 \end{cases}$$

(1 PUNTO)

Nº5.- Sabiendo que el $\log 2 = 0,3010$ y $\log 3 = 0,4771$, calcúlese:

$$a) \log 5 \quad b) \log \sqrt[3]{81} \quad c) \log \frac{72}{25} \quad d) \log 6$$

(1 PUNTO)

Nº6.- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales mediante el método de Gauss:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 6 \\ 3x + y - z = 7 \\ x - y + 2z = 6 \end{cases}$$

(1 PUNTO)

SUERTE JÓVENES

EXAMEN DE MATEMÁTICAS

RESOLUCIÓN COMPLETA

1º Bachillerato B

08 de Noviembre de 2019

“En matemáticas, la verdad es una cuestión de coherencia interna, no de correspondencia con una realidad externa.”

— **Kurt Gödel**
(Matemático y lógico, 1906-1978)

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

Resolución Detallada y Rigurosa
Con ilustraciones explicativas

Índice

1. Ejercicio 1: Clasificación de Números y Fracciones Generatrices	2
2. Ejercicio 2: Operaciones con Radicales	5
3. Ejercicio 3: Resolución de Ecuaciones	8
3.1. Apartado a) $3^x + 3^{-x} - \frac{1}{3} = \frac{79}{9}$	9
3.2. Apartado b) $x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x = 0$	9
3.3. Apartado c) $\sqrt{3x+16} = 2x-1$	9
3.4. Apartado d) $\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 1 + \frac{4}{x^2}$	9
3.5. Apartado e) $\ln(3x-1) = \ln 2 + \ln(4x-6)$	9
4. Ejercicio 4: Sistema de Ecuaciones con Logaritmos y Exponenciales	11
5. Ejercicio 5: Cálculos Logarítmicos	14
5.1. Apartado a) $\log 5$	15
5.2. Apartado b) $\log \sqrt[3]{81}$	15
5.3. Apartado c) $\log \frac{72}{25}$	15
5.4. Apartado d) $\log 6$	15
6. Ejercicio 6: Sistema de Ecuaciones Lineales (Método de Gauss)	17
Resumen de Soluciones	21

1 Ejercicio 1: Clasificación de Números y Fracciones Generatrices

Enunciado

Clasifica los siguientes números, indicando el conjunto más pequeño al que pertenecen. Calcúlese la fracción generatriz de los que sean racionales e indica de qué tipo son:

-3 ; $2,7$; $\frac{3}{7}$; $\sqrt{4}$; $\sqrt{7}$; $3,\overline{18}$; $1,01001000100001\dots$; $3,1\overline{8}$

Análisis de cada número:**1. Número -3** **Clasificación:** $-3 \in \mathbb{Z}$ (Conjunto de los Números Enteros)**Justificación:** Es un número entero negativo. Aunque también pertenece a $\mathbb{Q}$ (racionales) y $\mathbb{R}$ (reales), el conjunto más pequeño al que pertenece es $\mathbb{Z}$.**Fracción generatriz:** $-3 = \frac{-3}{1}$ **Tipo de número racional:** Racional entero.**2. Número $2,7$** **Clasificación:** $2,7 \in \mathbb{Q}$ (Conjunto de los Números Racionales)**Justificación:** Es un número decimal exacto (finito).**Fracción generatriz:**

$$2,7 = \frac{27}{10}$$

Tipo de número racional: Racional decimal exacto.**3. Número $\frac{3}{7}$** **Clasificación:** $\frac{3}{7} \in \mathbb{Q}$ (Conjunto de los Números Racionales)**Justificación:** Ya está expresado como fracción de dos números enteros.**Desarrollo decimal:**

$$\frac{3}{7} = 0,428571$$

Para verificar esto, realizamos la división:

$$3 \div 7 = 0,428571428571 \dots = 0,428571$$

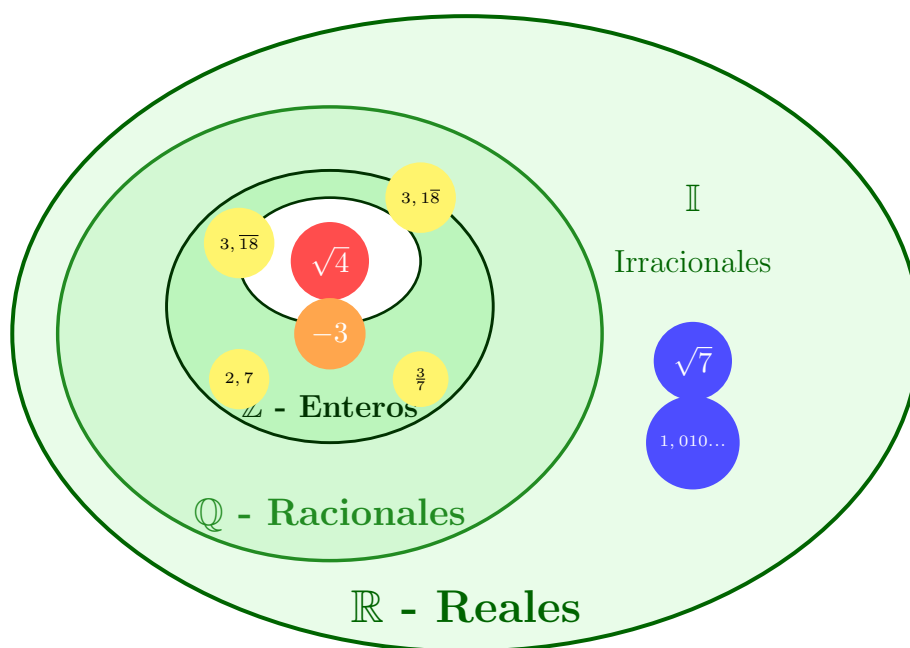
Fracción generatriz: $\frac{3}{7}$ (ya está en forma de fracción irreducible)**Tipo de número racional:** Racional decimal periódico puro.**4. Número $\sqrt{4}$** **Clasificación:** $\sqrt{4} \in \mathbb{N}$ (Conjunto de los Números Naturales)**Justificación:**

$$\sqrt{4} = 2$$

Es un número natural, ya que $2^2 = 4$.**Fracción generatriz:** $2 = \frac{2}{1}$ **Tipo de número racional:** Racional entero natural.**5. Número $\sqrt{7}$** **Clasificación:** $\sqrt{7} \in \mathbb{I}$ (Conjunto de los Números Irracionales)**Justificación:** El número 7 no es un cuadrado perfecto, por lo tanto $\sqrt{7}$ es irracional.**Demostración de irracionalidad (por reducción al absurdo):**Supongamos que $\sqrt{7}$ es racional, entonces:

$$\sqrt{7} = \frac{p}{q}$$

Ilustración explicativa:



Conjuntos: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$

2 Ejercicio 2: Operaciones con Radicales

Enunciado

Opera y simplifica al máximo las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{300} - \sqrt{48} + 2\sqrt{27} + \sqrt{12} - 2\sqrt{3}$

b) $\sqrt{1 + \sqrt{5 + \sqrt{10 + \sqrt{36}}}}$

Apartado a) $\sqrt{300} - \sqrt{48} + 2\sqrt{27} + \sqrt{12} - 2\sqrt{3}$ **Paso 1:** Descomponer cada radicando en factores primos

$$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 4 \cdot 75 = 100 \cdot 3$$

$$48 = 2^4 \cdot 3 = 16 \cdot 3$$

$$27 = 3^3 = 9 \cdot 3$$

$$12 = 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3$$

Paso 2: Simplificar cada radical

$$\sqrt{300} = \sqrt{100 \cdot 3} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Paso 3: Sustituir en la expresión original

$$\begin{aligned}\sqrt{300} - \sqrt{48} + 2\sqrt{27} + \sqrt{12} - 2\sqrt{3} &= 10\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 2(3\sqrt{3}) + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \\ &= 10\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

Paso 4: Sumar y restar coeficientes de $\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}&= (10 - 4 + 6 + 2 - 2)\sqrt{3} \\ &= 12\sqrt{3}\end{aligned}$$

Resultado: $\boxed{12\sqrt{3}}$ **Verificación numérica:**

$$12\sqrt{3} \approx 12 \times 1,732050808 = 20,78461$$

$$\text{Original: } \sqrt{300} - \sqrt{48} + 2\sqrt{27} + \sqrt{12} - 2\sqrt{3}$$

$$\approx 17,321 - 6,928 + 10,392 + 3,464 - 3,464 = 20,785 \quad \checkmark$$

Apartado b) $\sqrt{1 + \sqrt{5 + \sqrt{10 + \sqrt{36}}}}$

Este es un radical anidado que se resuelve desde el interior hacia el exterior.

Paso 1: Resolver el radical más interno

$$6$$

$$\sqrt{36} = 6$$

Ilustración explicativa del apartado a):

Simplificación de radicales: extracción de factores

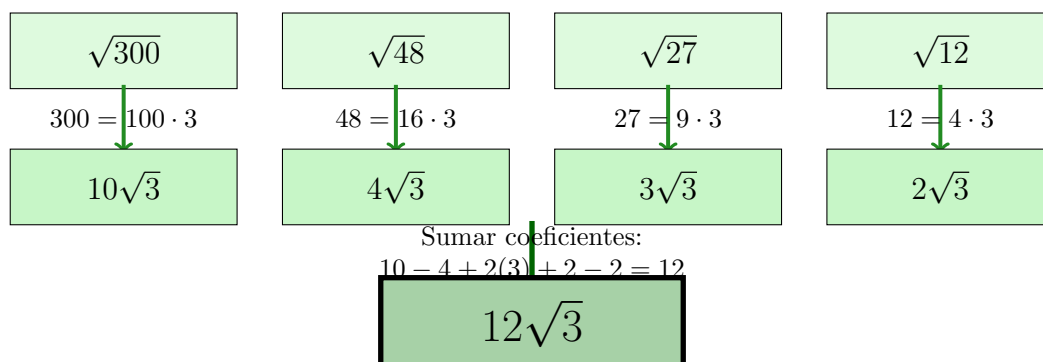
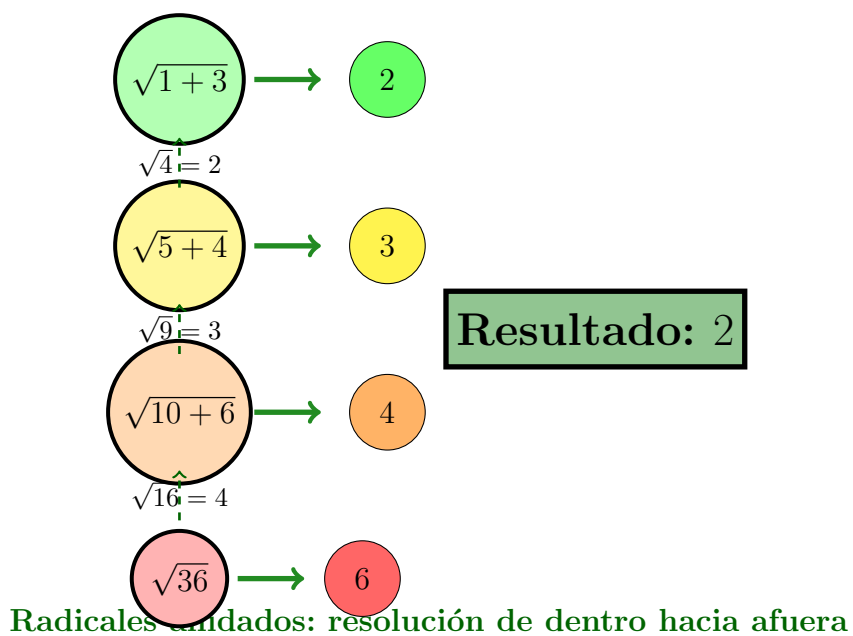


Ilustración explicativa del apartado b):



3 Ejercicio 3: Resolución de Ecuaciones

Enunciado

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3^x + 3^{-x} - \frac{1}{3} = \frac{79}{9}$

b) $x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x = 0$

c) $\sqrt{3x+16} = 2x-1$

d) $\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 1 + \frac{4}{x^2}$

e) $\ln(3x-1) = \ln 2 + \ln(4x-6)$

3.1 Apartado a) $3^x + 3^{-x} - \frac{1}{3} = \frac{79}{9}$

Esta es una ecuación exponencial.

Paso 1: Simplificar la ecuación

$$\begin{aligned} 3^x + 3^{-x} - \frac{1}{3} &= \frac{79}{9} \\ 3^x + 3^{-x} &= \frac{79}{9} + \frac{1}{3} \\ 3^x + 3^{-x} &= \frac{79}{9} + \frac{3}{9} \\ 3^x + 3^{-x} &= \frac{82}{9} \end{aligned}$$

Paso 2: Realizar el cambio de variable

Sea $t = 3^x$, entonces $3^{-x} = \frac{1}{3^x} = \frac{1}{t}$

$$t + \frac{1}{t} = \frac{82}{9}$$

Paso 3: Multiplicar por t ambos lados

$$\begin{aligned} t^2 + 1 &= \frac{82t}{9} \\ 9t^2 + 9 &= 82t \\ 9t^2 - 82t + 9 &= 0 \end{aligned}$$

Paso 4: Resolver la ecuación cuadrática

Usamos la fórmula general: $t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Con $a = 9$, $b = -82$, $c = 9$:

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac = (-82)^2 - 4(9)(9) \\ &= 6724 - 324 \\ &= 6400 \\ \sqrt{\Delta} &= 80 \end{aligned}$$

$$t = \frac{82 \pm 80}{18}$$

Dos soluciones:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{82 + 80}{18} = \frac{162}{18} = 9 \\ t_2 &= \frac{82 - 80}{18} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Ilustración explicativa del apartado a):

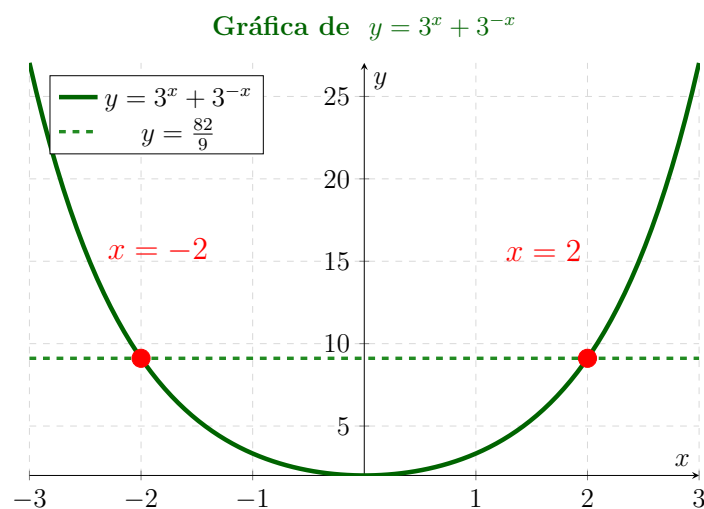


Ilustración explicativa del apartado b):

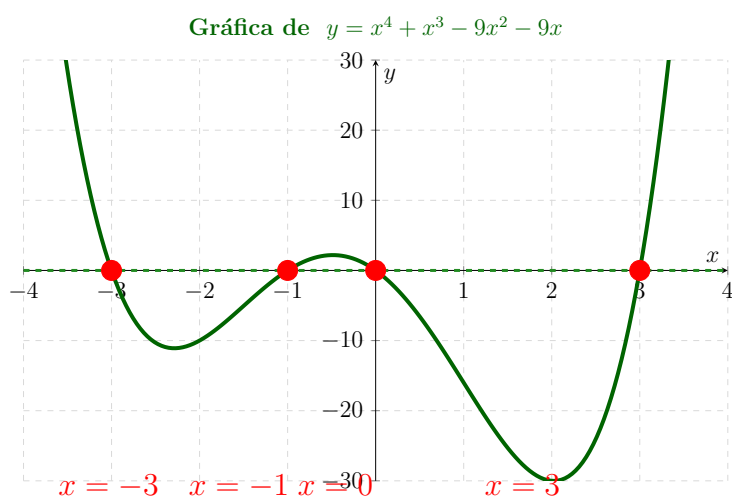
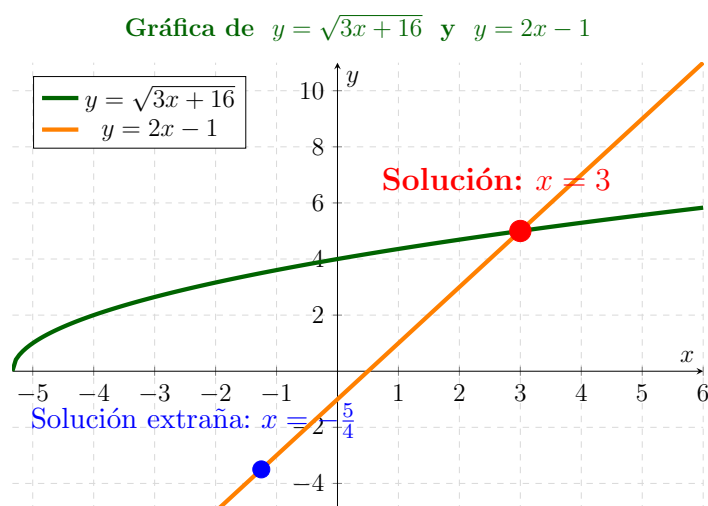


Ilustración explicativa del apartado c):



4 Ejercicio 4: Sistema de Ecuaciones con Logaritmos y Exponenciales

Enunciado

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2 \log x - \log y = 0 \\ 2^{y+2x} = 8 \end{cases}$$

Paso 1: Simplificar la primera ecuación

Partimos de:

$$2\log x - \log y = 0$$

Aplicamos la propiedad $n \log a = \log a^n$:

$$\log x^2 - \log y = 0$$

Aplicamos la propiedad $\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$:

$$\log \frac{x^2}{y} = 0$$

Paso 2: Resolver para obtener relación entre x e y

Si $\log \frac{x^2}{y} = 0$, entonces:

$$\frac{x^2}{y} = 10^0 = 1$$

Por lo tanto:

$$x^2 = y \quad (\text{Ecuación 1})$$

Paso 3: Simplificar la segunda ecuación

Partimos de:

$$2^{y+2x} = 8$$

Como $8 = 2^3$:

$$2^{y+2x} = 2^3$$

Por la inyectividad de la función exponencial:

$$y + 2x = 3 \quad (\text{Ecuación 2})$$

Paso 4: Sustituir la Ecuación 1 en la Ecuación 2

De la Ecuación 1: $y = x^2$

Sustituimos en la Ecuación 2:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x &= 3 \\ x^2 + 2x - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Paso 5: Resolver la ecuación cuadrática

Factorizamos:

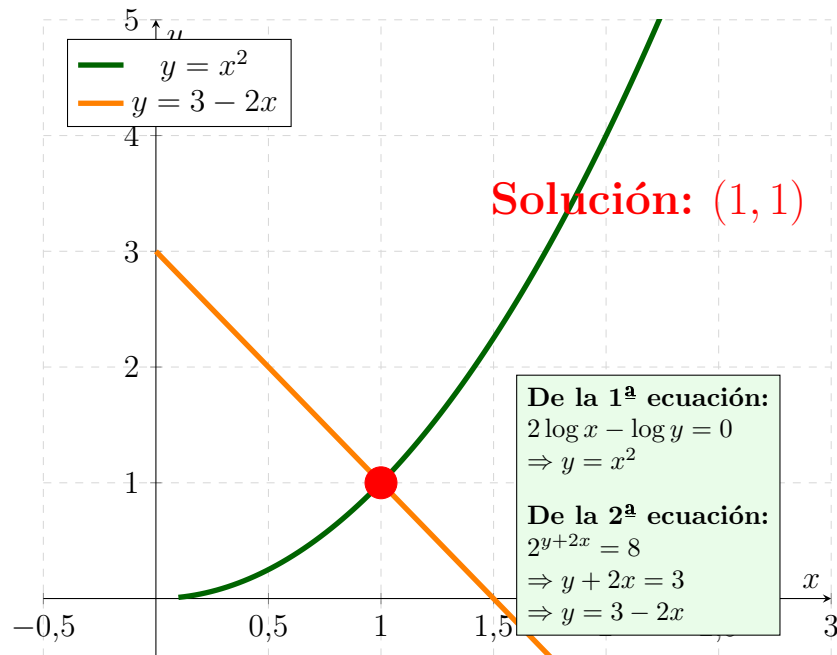
$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 3 &= 0 \\ (x + 3)(x - 1) &= 0 \end{aligned}$$

O usando la fórmula general:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} \end{aligned}$$

Ilustración explicativa:

Representación gráfica del sistema



5 Ejercicio 5: Cálculos Logarítmicos

Enunciado

Sabiendo que $\log 2 = 0,3010$ y $\log 3 = 0,4771$, calcúlese:

- a) $\log 5$ b) $\log \sqrt[3]{81}$ c) $\log \frac{72}{25}$ d) $\log 6$

5.1 Apartado a) $\log 5$

Desarrollo:

Observamos que:

$$5 = \frac{10}{2}$$

Aplicamos propiedades de logaritmos:

$$\begin{aligned}\log 5 &= \log \frac{10}{2} \\ &= \log 10 - \log 2\end{aligned}$$

Sabemos que $\log 10 = 1$ (por definición de logaritmo en base 10), entonces:

$$\begin{aligned}\log 5 &= 1 - \log 2 \\ &= 1 - 0,3010 \\ &= 0,6990\end{aligned}$$

Resultado: $\log 5 = 0,6990$

5.2 Apartado b) $\log \sqrt[3]{81}$

Desarrollo:

Primero simplificamos el radicando:

$$81 = 3^4$$

Por lo tanto:

$$\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^4} = 3^{4/3}$$

Aplicamos la propiedad $\log a^n = n \log a$:

$$\begin{aligned}\log \sqrt[3]{81} &= \log 3^{4/3} \\ &= \frac{4}{3} \log 3 \\ &= \frac{4}{3} \times 0,4771 \\ &= \frac{1,9084}{3} \\ &= 0,6361\bar{3}\end{aligned}$$

Resultado: $\log \sqrt[3]{81} = \frac{4}{3} \log 3 = 0,6361\bar{3} \approx 0,6361$

Método alternativo:

También podemos expresarlo como:

$$\begin{aligned}\log \sqrt[3]{81} &= \log 81^{1/3} \\ &= \frac{1}{3} \log 81 \\ &= \frac{1}{3} \log 3^4 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 4 \log 3\end{aligned}$$

Ilustración explicativa: Propiedades de logaritmos utilizadas

Propiedades de Logaritmos Utilizadas

Logaritmo de un cociente

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

Logaritmo de un producto

$$\log(ab) = \log a + \log b$$

Logaritmo de una potencia

$$\log a^n = n \log a$$

Logaritmo de la base

$$\log_{10} 10 = 1$$

Datos proporcionados: $\log 2 = 0,3010$ y $\log 3 = 0,4771$

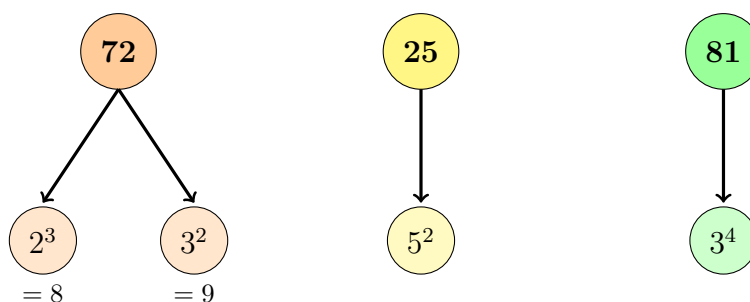
Valores derivados:

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = 1 - 0,3010 = 0,6990$$

$$\log 6 = \log(2 \cdot 3) = 0,3010 + 0,4771 = 0,7781$$

Ilustración: Descomposición factorial

Descomposición Factorial de los Números



$$\log \frac{72}{25} = \log 2^3 + \log 3^2 - \log 5^2 = 3 \log 2 + 2 \log 3 - 2 \log 5$$

6 Ejercicio 6: Sistema de Ecuaciones Lineales (Método de Gauss)

Enunciado

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales mediante el método de Gauss:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 6 \\ 3x + y - z = 7 \\ x - y + 2z = 6 \end{cases}$$

El método de Gauss (o eliminación gaussiana) consiste en transformar el sistema en uno equivalente escalonado mediante operaciones elementales entre filas.

Paso 1: Escribir la matriz aumentada del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \end{array} \right)$$

Paso 2: Hacer ceros debajo del primer pivote

El pivote es el elemento $a_{11} = 1$.

Operación $F_2 - 3F_1 \rightarrow F_2$:

$$\begin{aligned} F'_2 &= (3, 1, -1, 7) - 3(1, -2, 1, 6) \\ &= (3, 1, -1, 7) - (3, -6, 3, 18) \\ &= (0, 7, -4, -11) \end{aligned}$$

Operación $F_3 - F_1 \rightarrow F_3$:

$$\begin{aligned} F'_3 &= (1, -1, 2, 6) - (1, -2, 1, 6) \\ &= (0, 1, 1, 0) \end{aligned}$$

Nueva matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 7 & -4 & -11 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Paso 3: Intercambiar filas 2 y 3 (opcional, para simplificar)

Para trabajar con números más sencillos, intercambiamos $F_2 \leftrightarrow F_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & -11 \end{array} \right)$$

Paso 4: Hacer cero debajo del segundo pivote

El nuevo pivote es $a_{22} = 1$.

Operación $F_3 - 7F_2 \rightarrow F_3$:

$$\begin{aligned} F'_3 &= (0, 7, -4, -11) - 7(0, 1, 1, 0) \\ &= (0, 7, -4, -11) - (0, 7, 7, 0) \\ &= (0, 0, -11, -11) \end{aligned}$$

Nueva matriz (forma escalonada):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -11 \end{array} \right)$$

Paso 5: Sistema escalonado equivalente

Ilustración explicativa: Proceso de eliminación gaussiana

Método de Gauss: Eliminación hacia adelante

Matriz inicial:	Después de paso 1:	Intercambio de filas:
$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & -2 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \end{array} \right)$	$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 7 & -4 & -11 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$	$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & -11 \end{array} \right)$

 $F_3 - 7F_2$

Forma escalonada:

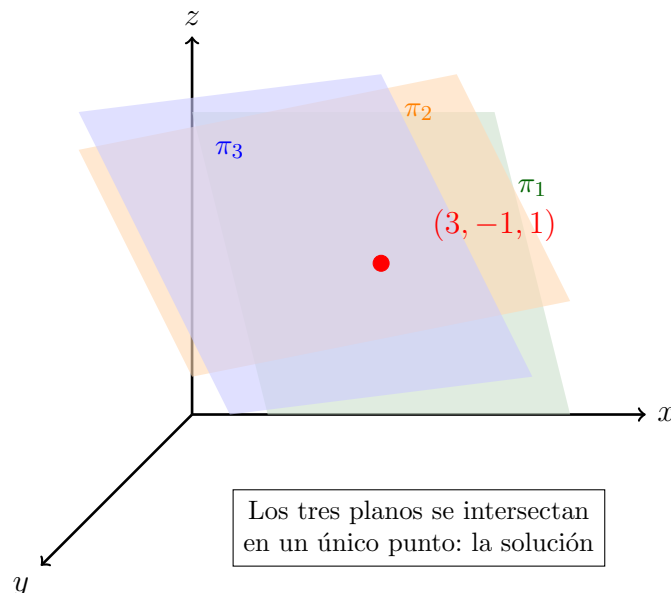
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -11 \end{array} \right)$$

Sustitución regresiva:

$$\begin{aligned} -11z &= -11 \Rightarrow z = 1 \\ y + 1 &= 0 \Rightarrow y = -1 \\ x - 2(-1) + 1 &= 6 \Rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

Solución: $(x, y, z) = (3, -1, 1)$

Ilustración: Representación geométrica (intersección de tres planos)



Resumen de Soluciones

Soluciones del Examen

Ejercicio 1: Clasificación de números

- $-3 \in \mathbb{Z}$, fracción: $-3/1$
- $2,7 \in \mathbb{Q}$, fracción: $27/10$
- $3/7 \in \mathbb{Q}$, fracción: $3/7$
- $\sqrt{4} = 2 \in \mathbb{N}$, fracción: $2/1$
- $\sqrt{7} \in \mathbb{I}$ (irracional)
- $3,\overline{18} \in \mathbb{Q}$, fracción: $35/11$
- $1,01001\dots \in \mathbb{I}$ (irracional)
- $3,1\overline{8} \in \mathbb{Q}$, fracción: $287/90$

Ejercicio 2: Radicales

- a) $12\sqrt{3}$
- b) 2

Ejercicio 3: Ecuaciones

- a) $x = 2$ y $x = -2$
- b) $x \in \{-3, -1, 0, 3\}$
- c) $x = 3$
- d) $x = 1$ y $x = 2$
- e) $x = 11/5$

Ejercicio 4: Sistema logarítmico-exponencial

$$(x, y) = (1, 1)$$

Ejercicio 5: Cálculos logarítmicos

- a) $\log 5 = 0,6990$
- b) $\log \sqrt[3]{81} = 0,6361\overline{3}$
- c) $\log \frac{72}{25} = 0,4592$
- d) $\log 6 = 0,7781$

Ejercicio 6: Sistema lineal (Gauss)

$$(x, y, z) = (3, -1, 1)$$

¡Examen completado con éxito!

Nº1.- Clasifica los siguientes números, indicando el conjunto más pequeño al que pertenecen. Calcúlese la fracción generatriz de los que sean racionales e indica de qué tipo son:

$$-8 ; 2,2 ; \frac{3}{5} ; \sqrt{9} ; \sqrt{17} ; 1,\hat{8} ; 1,31331333133331 \dots \dots ; 0,9\hat{1}$$

(1 PUNTO)

Nº2.- Opera y simplifica las máximo las siguientes expresiones:

$$a) \sqrt{300} - \sqrt{48} - 2\sqrt{27} + \sqrt{12} - 2\sqrt{3} \quad b) \sqrt{3 + \sqrt{1 + \sqrt{4 + \sqrt{25}}}}$$

(1 PUNTO)

Nº3.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a) 2^x + 2^{-x} - \frac{1}{2} = 2 \quad b) x^4 - 4x^2 = 0 \quad c) x + \sqrt{x} = 30$$

$$d) \frac{5 - 2x}{3} = \frac{3}{x - 1} \quad e) \log(x + 6) - 2 \cdot \log(x - 3) = 1$$

(5 PUNTOS)

Nº4.- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ \sqrt{x + y} - \sqrt{x - y} = 2 \end{cases}$$

(1 PUNTO)

Nº5.- Sabiendo que el $\log 2 = 0,3010$ y $\log 3 = 0,4771$, calcúlese:

$$a) \log 25 \quad b) \log \sqrt[3]{16} \quad c) \log(1,5) \quad d) \log \frac{25}{72}$$

(1 PUNTO)

Nº6.- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales mediante el método de Gauss:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x + y - z = -3 \\ x - y + 2z = -2 \end{cases}$$

(1 PUNTO)

SUERTE JÓVENES



Examen de ✓ Matemáticas

RESOLUCIÓN COMPLETA Y DETALLADA

1.º B. Bachillerato • IES Antonio Tovar

19 de noviembre de 2019

“Un matemático es una máquina de convertir café en teoremas.”

— Paul Erdős (1913–1996)

ÍNDICE DE EJERCICIOS

Ejercicio	Contenido	Puntos
Nº 1	Clasificación de números reales y fracciones generatrices	1 pt
Nº 2	Operaciones con radicales y simplificación	1 pt
Nº 3	Resolución de ecuaciones (exponencial, bicuadrada, irracional, racional y logarítmica)	5 pts
Nº 4	Sistema de ecuaciones con radicales	1 pt
Nº 5	Cálculo de logaritmos con valores dados	1 pt
Nº 6	Sistema de ecuaciones lineales — Método de Gauss	1 pt
TOTAL		10 pts

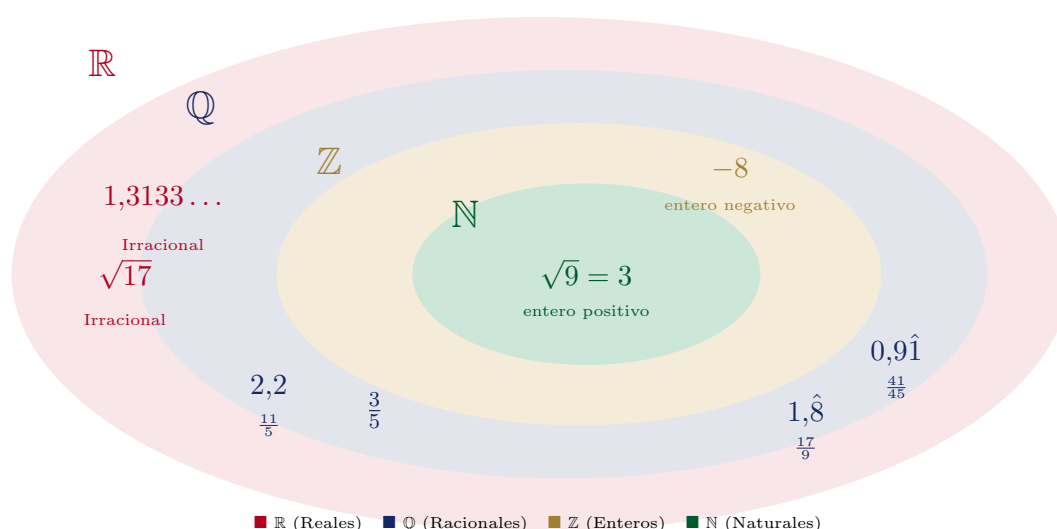
Nota: Este documento presenta la resolución **completa y detallada** de todos los ejercicios, sin omitir ningún paso. Los hipervínculos del índice llevan directamente a cada ejercicio. Los resultados finales aparecen resaltados en **verde**.

Nº1 — Clasificación de números reales y fracciones generatrices (1 punto)

Enunciado

Clasifica los siguientes números, indicando el **conjunto más pequeño** al que pertenecen. Calcula la **fracción generatriz** de los que sean racionales e indica de qué tipo son:

$$-8; \quad 2,2; \quad \frac{3}{5}; \quad \sqrt{9}; \quad \sqrt{17}; \quad 1,\hat{8}; \quad 1,3133133313331 \dots; \quad 0,9\hat{1}$$



Resolución detallada

A continuación clasificamos cada número indicando el conjunto más pequeño al que pertenece. Recordamos la jerarquía: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{I} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

1) -8

-8 es un número entero negativo; no es natural. No necesita fracción generatriz (ya es un entero).

$-8 \in \mathbb{Z}$. Es un número entero negativo. Fracción generatriz: $\frac{-8}{1}$.

2) $2,2$

Es un decimal exacto (tiene un número finito de cifras decimales). Los decimales exactos son siempre racionales.

$$2,2 = \frac{22}{10} = \frac{11}{5}$$

$2,2 \in \mathbb{Q}$. Es un número racional con decimal exacto. Fracción generatriz:
 $\frac{11}{5}$.

3) $\frac{3}{5}$

Ya está expresado como fracción de enteros, luego es racional por definición.

$\frac{3}{5} \in \mathbb{Q}$. Es un número racional (fracción propia). Fracción generatriz: $\frac{3}{5}$.

4) $\sqrt{9}$

$$\sqrt{9} = 3 \in \mathbb{Z}^+$$

La raíz cuadrada de 9 es exactamente 3, un número natural.

$\sqrt{9} = 3 \in \mathbb{N}$. Es un número natural. Fracción generatriz: $\frac{3}{1}$.

5) $\sqrt{17}$

El número 17 es primo, por lo que no es un cuadrado perfecto. Su raíz cuadrada es un número *irracional*: su desarrollo decimal es infinito y no periódico ($\sqrt{17} \approx 4,123105\dots$).

$\sqrt{17} \in \mathbb{I}$ (Irracionales, subconjunto de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$). No tiene fracción generatriz.

6) $1,\hat{8} = 1,888\dots$

Es un decimal periódico puro. Para hallar su fracción generatriz, llamamos x al número y multiplicamos por 10 (una cifra en el período):

$$\begin{aligned} x &= 1,888\dots \\ 10x &= 18,888\dots \end{aligned}$$

Restamos la primera ecuación a la segunda:

$$10x - x = 18,888\dots - 1,888\dots \implies 9x = 17 \implies x = \frac{17}{9}$$

Verificación: $17 \div 9 = 1,888\dots \checkmark$

$1,\hat{8} \in \mathbb{Q}$. Es un decimal periódico puro. Fracción generatriz: $\frac{17}{9}$.

7) $1,31331333133331\dots$

El patrón es: entre cada par de «3» se añade un «1» más, de forma que el número de «1» entre los «3» crece indefinidamente (31, 331, 3331, 33331, ...). El período nunca se repite de forma constante, por lo que se trata de un decimal *infinito no periódico*.

$1,31331333133331 \dots \in \mathbb{I}$. Es un número irracional. No tiene fracción generatriz.

8) $0,9\hat{1} = 0,9111 \dots$

Es un decimal periódico mixto: hay una parte no periódica («9») y una parte periódica («1»). Llamamos $x = 0,9111 \dots$

Multiplicamos por 10 para que el período quede al principio del decimal:

$$10x = 9,111 \dots$$

Multiplicamos por 100 para «desplazar» un período completo:

$$100x = 91,111 \dots$$

Restamos $10x$ de $100x$:

$$100x - 10x = 91,111 \dots - 9,111 \dots \implies 90x = 82 \implies x = \frac{82}{90} = \frac{41}{45}$$

Verificación: $41 \div 45 = 0,9111 \dots \checkmark$

$0,9\hat{1} \in \mathbb{Q}$. Es un decimal periódico mixto. Fracción generatriz: $\frac{41}{45}$.

Tabla resumen:

Número	Conjunto	Tipo	Fracción generatriz
-8	$\mathbb{Z}$	Entero negativo	-8/1
2,2	$\mathbb{Q}$	Decimal exacto	11/5
3/5	$\mathbb{Q}$	Fracción propia	3/5
$\sqrt{9}$	$\mathbb{N}$	Natural	3/1
$\sqrt{17}$	$\mathbb{I}$	Irracional	—
$1,\hat{8}$	$\mathbb{Q}$	Per. puro	17/9
1,31331333...	$\mathbb{I}$	Irracional	—
$0,9\hat{1}$	$\mathbb{Q}$	Per. mixto	41/45

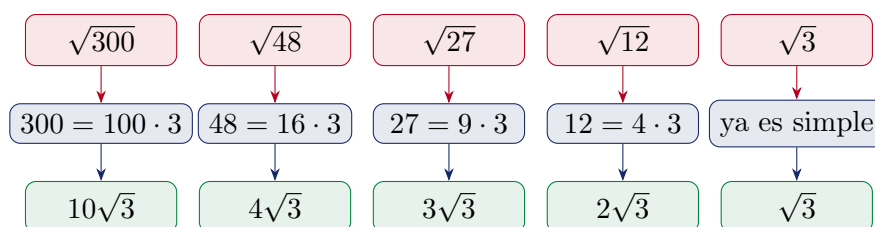
Nº2 — Operaciones con radicales y simplificación (1 punto)

Enunciado

Opera y simplifica al máximo las siguientes expresiones:

$$a) \sqrt{300} - \sqrt{48} - 2\sqrt{27} + \sqrt{12} - 2\sqrt{3} \qquad b) \sqrt{3 + \sqrt{1 + \sqrt{4 + \sqrt{25}}}}$$

Descomposición de radicales: $\sqrt{n} = \sqrt{a^2 \cdot b} = a\sqrt{b}$



$$10\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = (10 - 4 - 6 + 2 - 2)\sqrt{3} = 0$$

Apartado a)

El objetivo es expresar cada radical en la forma $a\sqrt{3}$ para poder sumar o restar los coeficientes.

Descomponemos cada radicando en factores con cuadrado perfecto:

$$\sqrt{300} = \sqrt{100 \cdot 3} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{27} = 2 \cdot \sqrt{9 \cdot 3} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

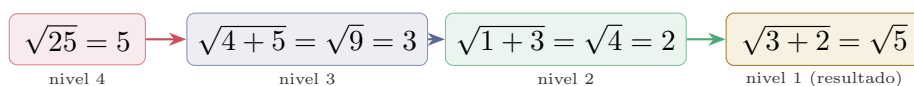
$$2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Sustituimos y agrupamos los coeficientes de $\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{300} - \sqrt{48} - 2\sqrt{27} + \sqrt{12} - 2\sqrt{3} &= 10\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \\ &= (10 - 4 - 6 + 2 - 2)\sqrt{3} \\ &= 0 \cdot \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\sqrt{300} - \sqrt{48} - 2\sqrt{27} + \sqrt{12} - 2\sqrt{3} = 0$$

Apartado b)



Resolvemos el radical anidado de dentro hacia fuera, empezando por el radical más interior:

Nivel 4 — radical más interior:

$$\sqrt{25} = 5$$

Nivel 3 — sustituimos $\sqrt{25} = 5$:

$$\sqrt{4 + \sqrt{25}} = \sqrt{4 + 5} = \sqrt{9} = 3$$

Nivel 2 — sustituimos el resultado anterior:

$$\sqrt{1 + \sqrt{4 + \sqrt{25}}} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

Nivel 1 — aplicamos la raíz exterior:

$$\sqrt{3 + \sqrt{1 + \sqrt{4 + \sqrt{25}}}} = \sqrt{3 + 2} = \sqrt{5}$$

$$\sqrt{3 + \sqrt{1 + \sqrt{4 + \sqrt{25}}}} = \sqrt{5}$$

Nº3 — Resolución de ecuaciones (5 puntos)

Enunciado

Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a) \quad 2^x + 2^{-x} - \frac{1}{2} = 2$$

$$b) \quad x^4 - 4x^2 = 0$$

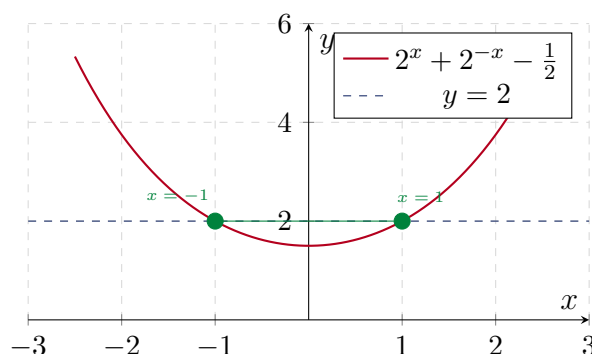
$$c) \quad x + \sqrt{x} = 30$$

$$d) \quad \frac{5-2x}{3} = \frac{3}{x-1}$$

$$e) \quad \log(x+6) - 2 \cdot \log(x-3) = 1$$

Apartado a) — Ecuación exponencial: $2^x + 2^{-x} - \frac{1}{2} = 2$

Gráfica de $f(x) = 2^x + 2^{-x} - \frac{1}{2}$



Paso 1 — Despejamos la ecuación:

$$2^x + 2^{-x} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Paso 2 — Cambio de variable: sea $t = 2^x$ con $t > 0$. Entonces $2^{-x} = \frac{1}{t}$:

$$t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$$

Paso 3 — Multiplicamos ambos miembros por t ($t \neq 0$):

$$t^2 + 1 = \frac{5}{2}t \implies 2t^2 - 5t + 2 = 0$$

Paso 4 — Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$t_1 = \frac{5+3}{4} = 2 \qquad t_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$$

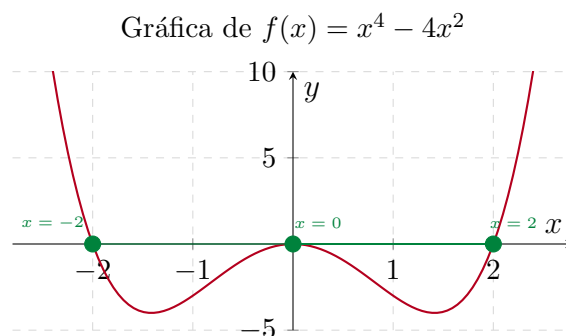
Paso 5 — Deshacemos el cambio de variable ($t = 2^x$):

$$2^x = 2 = 2^1 \implies x_1 = 1$$

$$2^x = \frac{1}{2} = 2^{-1} \implies x_2 = -1$$

Las soluciones son $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$.

Apartado b) — Ecuación bicuadrada: $x^4 - 4x^2 = 0$



Paso 1 — Factorizamos sacando x^2 factor común:

$$x^4 - 4x^2 = 0 \implies x^2(x^2 - 4) = 0$$

Paso 2 — Aplicamos la regla del producto nulo:

$$x^2 = 0 \vee x^2 - 4 = 0$$

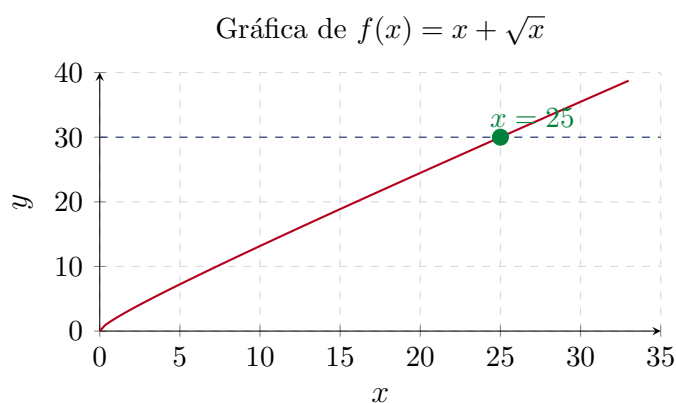
Paso 3 — Resolvemos cada factor:

$$x^2 = 0 \implies x_1 = 0$$

$$x^2 = 4 \implies x = \pm\sqrt{4} \implies x_2 = 2; \quad x_3 = -2$$

Las tres soluciones son $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$.

Apartado c) — Ecuación irracional: $x + \sqrt{x} = 30$



La ecuación tiene sentido cuando $x \geq 0$ (el radicando debe ser no negativo).

Paso 1 — Cambio de variable: sea $t = \sqrt{x}$ con $t \geq 0$, luego $x = t^2$:

$$t^2 + t = 30 \implies t^2 + t - 30 = 0$$

Paso 2 — Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 30}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{-1 \pm 11}{2}$$

$$t_1 = \frac{-1 + 11}{2} = 5 \qquad t_2 = \frac{-1 - 11}{2} = -6$$

Paso 3 — Como $t = \sqrt{x} \geq 0$, descartamos $t_2 = -6$. Deshacemos el cambio:

$$t_1 = 5 \implies \sqrt{x} = 5 \implies x = 25$$

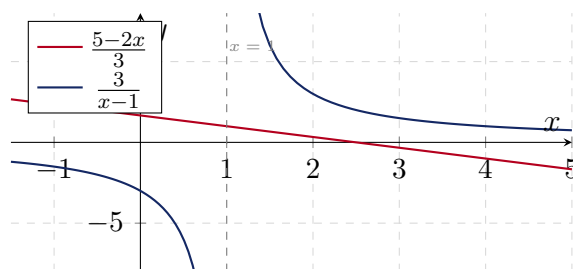
Verificación — Comprobamos en la ecuación original:

$$25 + \sqrt{25} = 25 + 5 = 30 \checkmark$$

La solución es $x = 25$.

Apartado d) — Ecuación racional: $\frac{5-2x}{3} = \frac{3}{x-1}$

Gráficas de $f(x) = \frac{5-2x}{3}$ y $g(x) = \frac{3}{x-1}$



La ecuación no está definida para $x = 1$ (denominador nulo en el segundo miembro).

Paso 1 — Hacemos producto en cruz (multiplicamos en cruz los denominadores):

$$(5 - 2x)(x - 1) = 3 \cdot 3$$

Paso 2 — Desarrollamos el producto del miembro izquierdo:

$$5x - 5 - 2x^2 + 2x = 9 \implies -2x^2 + 7x - 5 = 9$$

Paso 3 — Reorganizamos todos los términos en el miembro izquierdo:

$$-2x^2 + 7x - 5 - 9 = 0 \implies -2x^2 + 7x - 14 = 0 \implies 2x^2 - 7x + 14 = 0$$

Paso 4 — Calculamos el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$:

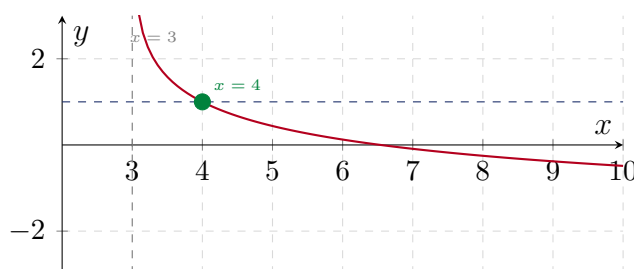
$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 14 = 49 - 112 = -63$$

Como $\Delta = -63 < 0$, la ecuación cuadrática no tiene soluciones reales. Las dos parábolas no se cortan en ningún punto real.

La ecuación no tiene solución real ($\Delta = -63 < 0$). $S = \emptyset$

Apartado e) — Ecuación logarítmica: $\log(x+6) - 2 \cdot \log(x-3) = 1$

Gráfica de $f(x) = \log(x+6) - 2\log(x-3)$



Dominio: necesitamos $x+6 > 0$ y $x-3 > 0$, lo que da $x > 3$.

Paso 1 — Usamos la propiedad $n \cdot \log a = \log a^n$:

$$\log(x+6) - \log(x-3)^2 = 1$$

Paso 2 — Usamos la propiedad $\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$:

$$\log\left(\frac{x+6}{(x-3)^2}\right) = 1$$

Paso 3 — Aplicamos la definición de logaritmo ($\log a = 1 \Leftrightarrow a = 10$):

$$\frac{x+6}{(x-3)^2} = 10 \implies x+6 = 10(x-3)^2$$

Paso 4 — Desarrollamos el cuadrado y simplificamos:

$$\begin{aligned} x+6 &= 10(x^2 - 6x + 9) \\ x+6 &= 10x^2 - 60x + 90 \\ 0 &= 10x^2 - 61x + 84 \end{aligned}$$

Paso 5 — Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$\begin{aligned} x &= \frac{61 \pm \sqrt{61^2 - 4 \cdot 10 \cdot 84}}{2 \cdot 10} = \frac{61 \pm \sqrt{3721 - 3360}}{20} = \frac{61 \pm \sqrt{361}}{20} = \frac{61 \pm 19}{20} \\ x_1 &= \frac{61+19}{20} = \frac{80}{20} = 4 & x_2 &= \frac{61-19}{20} = \frac{42}{20} = 2,1 \end{aligned}$$

Paso 6 — Verificación del dominio ($x > 3$):

- $x_1 = 4 > 3$ ✓. Comprobamos: $\log(10) - 2\log(1) = 1 - 0 = 1$ ✓
- $x_2 = 2,1 < 3$ ✗. No pertenece al dominio. **Solución no válida.**

La única solución es $x = 4$.

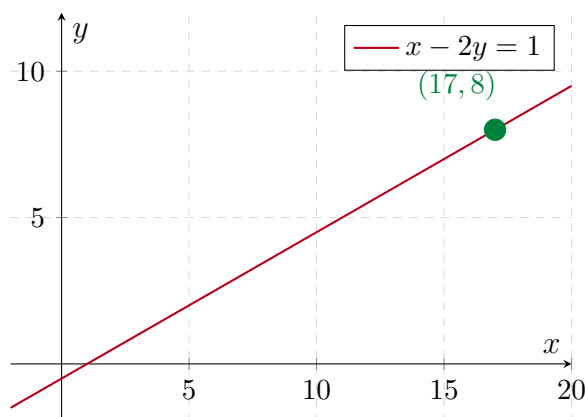
Nº4 — Sistema de ecuaciones con radicales (1 punto)

Enunciado

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 2 \end{cases}$$

Sistema: recta y curva irracional



Resolución

Paso 1 — Despejamos x de la primera ecuación:

$$x - 2y = 1 \implies x = 2y + 1$$

Paso 2 — Sustituimos $x = 2y + 1$ en la segunda ecuación:

$$\sqrt{(2y+1)+y} - \sqrt{(2y+1)-y} = 2 \implies \sqrt{3y+1} - \sqrt{y+1} = 2$$

Paso 3 — Aislamos uno de los radicales:

$$\sqrt{3y+1} = 2 + \sqrt{y+1}$$

Paso 4 — Elevamos ambos miembros al cuadrado para eliminar el radical izquierdo:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{3y+1}\right)^2 &= \left(2 + \sqrt{y+1}\right)^2 \\ 3y+1 &= 4 + 4\sqrt{y+1} + (y+1) \\ 3y+1 &= y+5 + 4\sqrt{y+1} \\ 2y-4 &= 4\sqrt{y+1} \\ y-2 &= 2\sqrt{y+1} \end{aligned}$$

Paso 5 — Para que esto tenga solución, necesitamos $y-2 \geq 0$, es decir $y \geq 2$. Elevamos de nuevo al cuadrado:

$$\begin{aligned}(y-2)^2 &= \left(2\sqrt{y+1}\right)^2 \\ y^2 - 4y + 4 &= 4(y+1) \\ y^2 - 4y + 4 &= 4y + 4 \\ y^2 - 8y &= 0 \\ y(y-8) &= 0\end{aligned}$$

Paso 6 — Soluciones candidatas: $y_1 = 0$ y $y_2 = 8$.

Paso 7 — Verificamos si cumplen $y \geq 2$ (condición del paso 5):

- $y_1 = 0 < 2 \times$ Descartamos.
- $y_2 = 8 \geq 2 \checkmark$ Aceptamos.

Paso 8 — Obtenemos x con $y = 8$:

$$x = 2(8) + 1 = 17$$

Paso 9 — Verificación completa en el sistema original:

$$\text{Ecuación 1: } 17 - 2(8) = 17 - 16 = 1 \checkmark$$

$$\text{Ecuación 2: } \sqrt{17+8} - \sqrt{17-8} = \sqrt{25} - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2 \checkmark$$

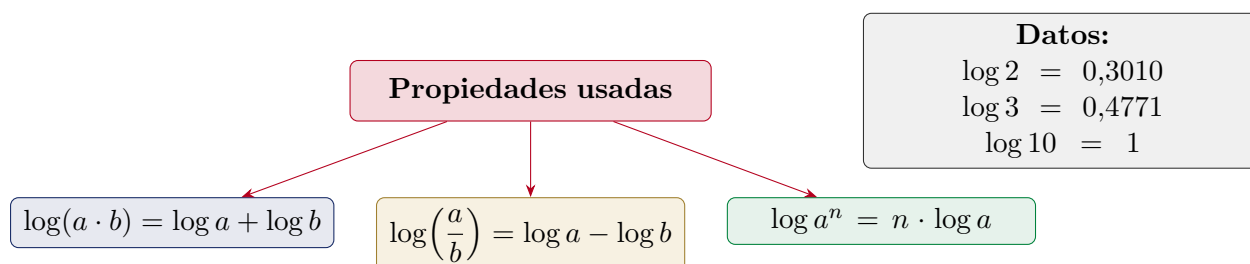
La solución del sistema es $x = 17$, $y = 8$.

Nº5 — Cálculo de logaritmos con valores dados (1 punto)

Enunciado

Sabiendo que $\log 2 = 0,3010$ y $\log 3 = 0,4771$, calcúlese:

a) $\log 25$ b) $\log \sqrt[3]{16}$ c) $\log(1,5)$ d) $\log \frac{25}{72}$



Apartado a) — $\log 25$

Descomponemos 25 como potencia de 5, y a su vez 5 como cociente de 10 y 2:

$$\log 25 = \log 5^2 = 2 \log 5 = 2 \log \left(\frac{10}{2} \right) = 2(\log 10 - \log 2) = 2(1 - 0,3010) = 2 \times 0,6990$$

$$\log 25 = \mathbf{1,3980}$$

Apartado b) — $\log \sqrt[3]{16}$

$$\log \sqrt[3]{16} = \log 16^{1/3} = \frac{1}{3} \log 16 = \frac{1}{3} \log 2^4 = \frac{4}{3} \log 2 = \frac{4}{3} \times 0,3010 = \frac{1,204}{3}$$

$$\log \sqrt[3]{16} = \mathbf{0,4013}$$

Apartado c) — $\log(1,5)$

Expresamos $1,5 = \frac{3}{2}$:

$$\log(1,5) = \log\left(\frac{3}{2}\right) = \log 3 - \log 2 = 0,4771 - 0,3010$$

$$\log(1,5) = \mathbf{0,1761}$$

■ Apartado d) — $\log \frac{25}{72}$

Descomponemos numerador y denominador en factores primos:

$$25 = 5^2 = \left(\frac{10}{2}\right)^2 \qquad 72 = 8 \times 9 = 2^3 \times 3^2$$

Aplicamos las propiedades del logaritmo paso a paso:

$$\log \frac{25}{72} = \log 25 - \log 72$$

$$\log 25 = 2 \log 5 = 2(\log 10 - \log 2) = 2(1 - 0,3010) = 1,3980$$

$$\begin{aligned} \log 72 &= \log(2^3 \cdot 3^2) = 3 \log 2 + 2 \log 3 = 3 \times 0,3010 + 2 \times 0,4771 \\ &= 0,9030 + 0,9542 = 1,8572 \end{aligned}$$

$$\log \frac{25}{72} = 1,3980 - 1,8572$$

$$\log \frac{25}{72} = -0,4592$$

Tabla resumen del Ejercicio 5:

Apartado	Desarrollo	Resultado
a)	$2(\log 10 - \log 2) = 2(1 - 0,3010)$	1,3980
b)	$\frac{4}{3} \log 2 = \frac{4}{3} \times 0,3010$	0,4013
c)	$\log 3 - \log 2 = 0,4771 - 0,3010$	0,1761
d)	$\log 25 - \log 72 = 1,3980 - 1,8572$	-0,4592

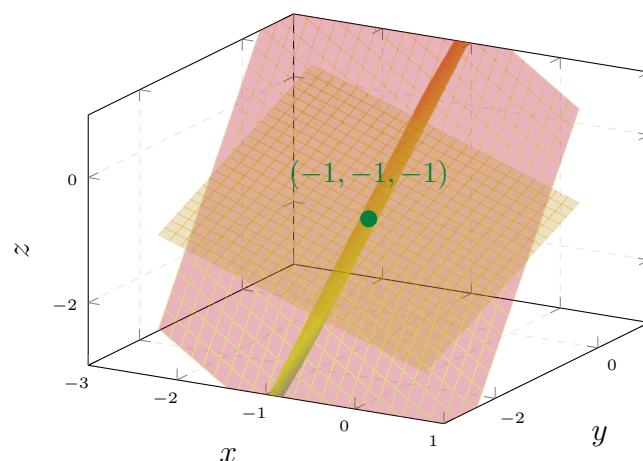
Nº6 — Sistema de ecuaciones lineales — Método de Gauss (1 punto)

Enunciado

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales mediante el método de Gauss:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x + y - z = -3 \\ x - y + 2z = -2 \end{cases}$$

Tres planos con punto de intersección $(-1, -1, -1)$



Matriz ampliada del sistema

Escribimos el sistema como una matriz ampliada $[A | \mathbf{b}]$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

Eliminación gaussiana — Operaciones elementales de fila

El objetivo es transformar la matriz en una forma triangular superior mediante operaciones elementales de fila, sin alterar las soluciones del sistema.

Paso 1: Eliminamos el elemento $a_{21} = 3$ usando $F_2 \leftarrow F_2 - 3F_1$:

$$F_2 - 3F_1 : \begin{pmatrix} 3 - 3(1) & 1 - 3(-2) & -1 - 3(1) & -3 - 3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Paso 2: Eliminamos el elemento $a_{31} = 1$ usando $F_3 \leftarrow F_3 - F_1$:

$$F_3 - F_1 : \begin{pmatrix} 1 - 1 & -1 - (-2) & 2 - 1 & -2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

Paso 3: Intercambiamos F_2 y F_3 para trabajar con un pivote más sencillo ($F_2 \leftrightarrow F_3$):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & -4 & -3 \end{array} \right)$$

Paso 4: Eliminamos el elemento $a_{32} = 7$ usando $F_3 \leftarrow F_3 - 7 F_2$:

$$F_3 - 7F_2 : \left(0 - 0 \quad 7 - 7(1) \quad -4 - 7(1) \quad -3 - 7(-2) \right) = \left(0 \quad 0 \quad -11 \quad 11 \right)$$

La matriz triangular superior resultante es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -11 & 11 \end{array} \right)$$

■ Sustitución regresiva (back-substitution)

A partir de la forma escalonada, resolvemos de abajo hacia arriba.

Fila 3 $\Rightarrow -11z = 11$:

$$z = \frac{11}{-11} = -1$$

Fila 2 $\Rightarrow y + z = -2$ (sustituimos $z = -1$):

$$y + (-1) = -2 \Rightarrow y = -2 + 1 = -1$$

Fila 1 $\Rightarrow x - 2y + z = 0$ (sustituimos $y = -1, z = -1$):

$$x - 2(-1) + (-1) = 0 \Rightarrow x + 2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

■ Verificación en el sistema original

Comprobamos que $(x, y, z) = (-1, -1, -1)$ satisface las tres ecuaciones:

$$\text{Ec. 1: } (-1) - 2(-1) + (-1) = -1 + 2 - 1 = 0 \checkmark$$

$$\text{Ec. 2: } 3(-1) + (-1) - (-1) = -3 - 1 + 1 = -3 \checkmark$$

$$\text{Ec. 3: } (-1) - (-1) + 2(-1) = -1 + 1 - 2 = -2 \checkmark$$

La solución del sistema es $x = -1$, $y = -1$, $z = -1$. Es decir, el punto de intersección de los tres planos es $(-1, -1, -1)$.

RESUMEN DE RESULTADOS

Ej. 1 Números clasificados y fracciones generatrices calculadas

Ej. 2a $\sqrt{300} - \sqrt{48} - 2\sqrt{27} + \sqrt{12} - 2\sqrt{3} = 0$

Ej. 2b $\sqrt{3 + \sqrt{1 + \sqrt{4 + \sqrt{25}}}} = \sqrt{5}$

Ej. 3a $x_1 = 1$, $x_2 = -1$

Ej. 3b $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$

Ej. 3c $x = 25$

Ej. 3d Sin solución real ($\Delta < 0$)

Ej. 3e $x = 4$

Ej. 4 $x = 17$, $y = 8$

Ej. 5 $\log 25 = 1,398$; $\log \sqrt[3]{16} = 0,401$; $\log 1,5 = 0,176$; $\log \frac{25}{72} = -0,459$

Ej. 6 $x = -1$, $y = -1$, $z = -1$

“Las matemáticas son el lenguaje en el que Dios ha escrito el Universo.”
— *Galileo Galilei*

Nº1.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^3 + 6x^2 - x - 6 = 0$ b) $\sqrt{3x - 3} + x = 7$

c) $4^x - 7 \cdot 2^x - 8 = 0$ d) $\frac{2x + 1}{x + 3} + \frac{x - 3}{x} = \frac{1}{2}$

(2 PUNTOS)

Nº2.- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 5^x = 25 \cdot 5^y \\ \log(x + y) - \log(x - y) = \log 2 \end{cases}$$

(1 PUNTO)

Nº3.- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales mediante el método de Gauss:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 5 \\ 2x - 3y + z = 3 \\ 4x + y - z = 13 \end{cases}$$

(1 PUNTOS)

Nº4.- Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $-2x + 4 \leq -2$ b) $x^2 - 3x > -2$ c) $\frac{x - 2}{3 - x} > 0$ d) $6x - 2y \leq 3$

(2 PUNTOS)

Nº5.- Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x - 3 < 1 - x \\ 4 - 2x \geq 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x - 5y \leq 30 \\ 4x + 3y > 0 \end{cases}$

(2 PUNTOS)

Nº6.- Sabiendo que $\sin \alpha = 4/5$, $\alpha \in \text{II cuadrante}$ y $\tan \beta = -1$ y $\beta \in \text{IV cuadrante}$, calcula:

a) $\cos(\alpha)$ b) $\sin(90^\circ - \alpha)$ c) $\tan(\pi - \alpha)$ d) $\cos(2\pi - \alpha)$

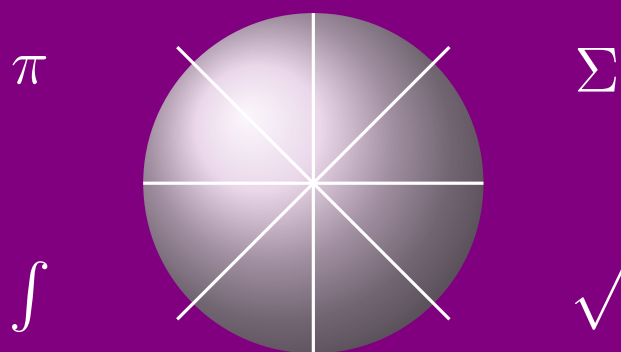
e) $\sin(\beta)$ f) $\cos(\beta)$ g) $\sin(2\beta)$ h) $\tan(\alpha - \beta)$

(2 PUNTOS)

SUERTE JÓVENES

EXAMEN DE MATEMÁTICAS

RESUELTO



1º BACHILLERATO B

Fecha: 11 de Diciembre de 2019

*“Perhaps I can best describe my experience of doing
mathematics
in terms of a journey through a dark unexplored
mansion.
You enter the first room of the mansion and it’s
completely dark.
You stumble around bumping into the furniture, but
gradually
you learn where each piece of furniture is.
Finally, after six months or so, you find the light
switch,
you turn it on, and suddenly it’s all illuminated.”*

— **Sir Andrew Wiles**

(Matemático británico, demostración del Último Teorema de Fermat)

Índice

1. Ejercicio 1: Ecuaciones	2
1.1. Apartado a) Ecuación cúbica: $x^3 + 6x^2 - x - 6 = 0$	2
1.2. Apartado b) Ecuación irracional: $\sqrt{3x-3} + x = 7$	3
1.3. Apartado c) Ecuación exponencial: $4^x - 7 \cdot 2^x - 8 = 0$	5
1.4. Apartado d) Ecuación racional: $\frac{2x+1}{x+3} + \frac{x-3}{x} = \frac{1}{2}$	6
2. Ejercicio 2: Sistema de ecuaciones exponencial-logarítmico	9
3. Ejercicio 3: Sistema de ecuaciones lineales por método de Gauss	12
4. Ejercicio 4: Inecuaciones	14
4.1. Apartado a) Inecuación lineal: $-2x + 4 \leq -2$	14
4.2. Apartado b) Inecuación cuadrática: $x^2 - 3x > -2$	15
4.3. Apartado c) Inecuación racional: $\frac{x-2}{3-x} > 0$	16
4.4. Apartado d) Inecuación lineal con dos variables: $6x - 2y \leq 3$	17
5. Ejercicio 5: Sistemas de inecuaciones	19
5.1. Apartado a) Sistema de inecuaciones lineales: $\begin{cases} 2x - 3 < 1 - x \\ 4 - 2x \geq 6 \end{cases}$	19
5.2. Apartado b) Sistema de inecuaciones con dos variables: $\begin{cases} 6x - 5y \leq 30 \\ 4x + 3y > 0 \end{cases}$	20
6. Ejercicio 6: Trigonometría	23

1. Ejercicio 1: Ecuaciones

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1.1. Apartado a) Ecuación cúbica: $x^3 + 6x^2 - x - 6 = 0$

Ecuación cúbica

$$x^3 + 6x^2 - x - 6 = 0$$

Resolución paso a paso:

Paso 1: Intentamos encontrar una raíz entera usando el Teorema de las Raíces Racionales. Los posibles divisores del término independiente (-6) son: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

Paso 2: Probamos con $x = 1$:

$$\begin{aligned} P(1) &= 1^3 + 6(1)^2 - 1 - 6 \\ &= 1 + 6 - 1 - 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x = 1$ es una raíz.

Paso 3: Realizamos la división sintética de $P(x)$ entre $(x - 1)$:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 6 & -1 & -6 \\ & & 1 & 7 & 6 \\ \hline & 1 & 7 & 6 & 0 \end{array}$$

Por lo tanto: $x^3 + 6x^2 - x - 6 = (x - 1)(x^2 + 7x + 6)$

Paso 4: Resolvemos la ecuación cuadrática $x^2 + 7x + 6 = 0$ usando la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde $a = 1, b = 7, c = 6$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} \\ &= \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{2} \\ &= \frac{-7 \pm 5}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-7 + 5}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \\ x_3 &= \frac{-7 - 5}{2} = \frac{-12}{2} = -6 \end{aligned}$$

Verificación:

Para $x = 1$: $1 + 6 - 1 - 6 = 0 \checkmark$

Para $x = -1$: $(-1)^3 + 6(-1)^2 - (-1) - 6 = -1 + 6 + 1 - 6 = 0 \checkmark$

Para $x = -6$: $(-6)^3 + 6(-6)^2 - (-6) - 6 = -216 + 216 + 6 - 6 = 0 \checkmark$

Solución final:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = -6$$

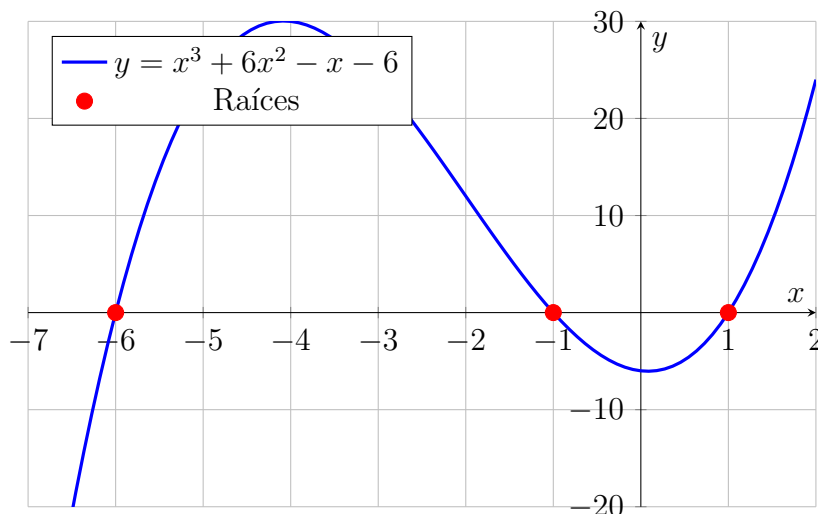


Figura 1: Gráfica de la función cúbica mostrando las tres raíces

1.2. Apartado b) Ecuación irracional: $\sqrt{3x-3} + x = 7$

Ecuación con raíz cuadrada

$$\sqrt{3x-3} + x = 7$$

Resolución paso a paso:

Paso 1: Determinamos el dominio de la ecuación. Para que la raíz esté definida:

$$3x - 3 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 3 \Rightarrow x \geq 1$$

Paso 2: Aislamos la raíz:

$$\sqrt{3x-3} = 7 - x$$

Paso 3: Para que la igualdad tenga sentido, necesitamos que $7 - x \geq 0$, es decir, $x \leq 7$.

Entonces el dominio es: $1 \leq x \leq 7$.

Paso 4: Elevamos al cuadrado ambos lados:

$$(\sqrt{3x-3})^2 = (7-x)^2$$

$$3x - 3 = 49 - 14x + x^2$$

Paso 5: Reordenamos la ecuación:

$$0 = x^2 - 14x - 3x + 49 + 3$$

$$0 = x^2 - 17x + 52$$

$$x^2 - 17x + 52 = 0$$

Paso 6: Resolvemos usando la fórmula general con $a = 1$, $b = -17$, $c = 52$:

$$\begin{aligned}x &= \frac{17 \pm \sqrt{(-17)^2 - 4(1)(52)}}{2(1)} \\&= \frac{17 \pm \sqrt{289 - 208}}{2} \\&= \frac{17 \pm \sqrt{81}}{2} \\&= \frac{17 \pm 9}{2}\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{17 + 9}{2} = \frac{26}{2} = 13 \\x_2 &= \frac{17 - 9}{2} = \frac{8}{2} = 4\end{aligned}$$

Paso 7: Verificamos cuál de las soluciones es válida:

Para $x = 13$: No pertenece al dominio $[1, 7]$. Además:

$$\sqrt{3(13) - 3} + 13 = \sqrt{36} + 13 = 6 + 13 = 19 \neq 7$$

Por lo tanto, $x = 13$ es una solución extraña.

Para $x = 4$: Pertenece al dominio $[1, 7]$. Verificamos:

$$\sqrt{3(4) - 3} + 4 = \sqrt{9} + 4 = 3 + 4 = 7$$

✓

Solución final:

$$\boxed{x = 4}$$

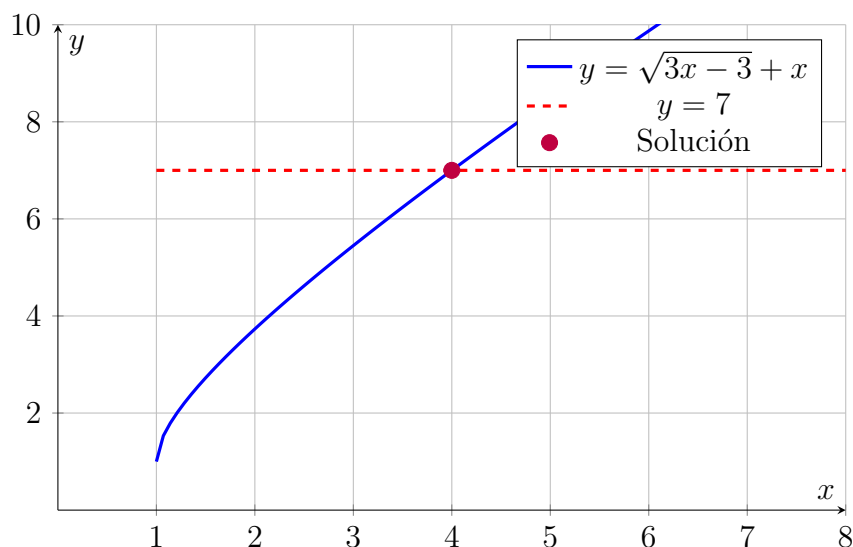


Figura 2: Intersección de las funciones que muestra la solución

1.3. Apartado c) Ecuación exponencial: $4^x - 7 \cdot 2^x - 8 = 0$

Ecuación exponencial

$$4^x - 7 \cdot 2^x - 8 = 0$$

Resolución paso a paso:

Paso 1: Observamos que $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$. Realizamos el cambio de variable:

$$t = 2^x, \quad \text{donde } t > 0$$

Paso 2: Sustituimos en la ecuación original:

$$(2^x)^2 - 7 \cdot 2^x - 8 = 0$$

$$t^2 - 7t - 8 = 0$$

Paso 3: Resolvemos la ecuación cuadrática con $a = 1$, $b = -7$, $c = -8$:

$$\begin{aligned} t &= \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(-8)}}{2(1)} \\ &= \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{2} \\ &= \frac{7 \pm \sqrt{81}}{2} \\ &= \frac{7 \pm 9}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{7+9}{2} = \frac{16}{2} = 8 \\ t_2 &= \frac{7-9}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{aligned}$$

Paso 4: Deshacemos el cambio de variable:

Para $t_1 = 8$:

$$2^x = 8 = 2^3$$

Por igualdad de bases:

$$x = 3$$

Para $t_2 = -1$:

$$2^x = -1$$

Esta ecuación no tiene solución real porque $2^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Paso 5: Verificación para $x = 3$:

$$4^3 - 7 \cdot 2^3 - 8 = 64 - 7 \cdot 8 - 8 = 64 - 56 - 8 = 0$$

✓

Solución final:

$$x = 3$$

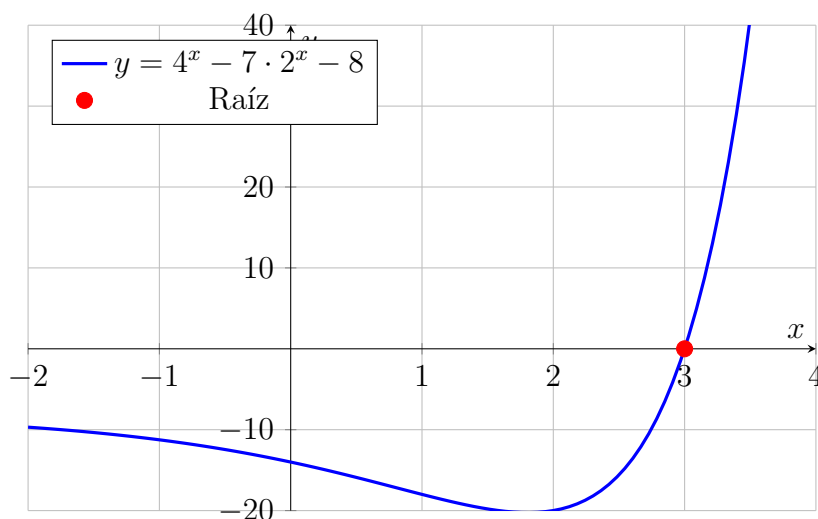


Figura 3: Gráfica de la función exponencial mostrando la raíz en $x = 3$

1.4. Apartado d) Ecuación racional: $\frac{2x+1}{x+3} + \frac{x-3}{x} = \frac{1}{2}$

Ecuación con fracciones algebraicas

$$\frac{2x+1}{x+3} + \frac{x-3}{x} = \frac{1}{2}$$

Resolución paso a paso:

Paso 1: Determinamos el dominio. Los denominadores no pueden ser cero:

$$x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$$

$$x \neq 0$$

Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$

Paso 2: Calculamos el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los denominadores:

$$\text{m.c.m.}(x+3, x, 2) = 2x(x+3)$$

Paso 3: Multiplicamos toda la ecuación por el m.c.m.:

$$2x(x+3) \cdot \frac{2x+1}{x+3} + 2x(x+3) \cdot \frac{x-3}{x} = 2x(x+3) \cdot \frac{1}{2}$$

Paso 4: Simplificamos cada término:

$$2x(2x+1) + 2(x+3)(x-3) = x(x+3)$$

Paso 5: Expandimos los productos:

$$4x^2 + 2x + 2(x^2 - 9) = x^2 + 3x$$

$$4x^2 + 2x + 2x^2 - 18 = x^2 + 3x$$

$$6x^2 + 2x - 18 = x^2 + 3x$$

Paso 6: Agrupamos todos los términos en un lado:

$$6x^2 + 2x - 18 - x^2 - 3x = 0$$

$$5x^2 - x - 18 = 0$$

Paso 7: Resolvemos la ecuación cuadrática con $a = 5$, $b = -1$, $c = -18$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(5)(-18)}}{2(5)} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 360}}{10} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{361}}{10} \\ &= \frac{1 \pm 19}{10} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1+19}{10} = \frac{20}{10} = 2 \\ x_2 &= \frac{1-19}{10} = \frac{-18}{10} = -\frac{9}{5} \end{aligned}$$

Paso 8: Verificamos que ambas soluciones pertenecen al dominio:

$x = 2$: $2 \neq -3$ y $2 \neq 0$ ✓

$x = -\frac{9}{5}$: $-\frac{9}{5} \neq -3$ y $-\frac{9}{5} \neq 0$ ✓

Paso 9: Verificación para $x = 2$:

$$\frac{2(2)+1}{2+3} + \frac{2-3}{2} = \frac{5}{5} + \frac{-1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

✓

Verificación para $x = -\frac{9}{5}$:

$$\begin{aligned} \frac{2(-\frac{9}{5}) + 1}{-\frac{9}{5} + 3} + \frac{-\frac{9}{5} - 3}{-\frac{9}{5}} &= \frac{-\frac{18}{5} + 1}{\frac{6}{5}} + \frac{-\frac{24}{5}}{-\frac{9}{5}} \\ &= \frac{-\frac{13}{5}}{\frac{6}{5}} + \frac{24}{9} = -\frac{13}{6} + \frac{8}{3} = -\frac{13}{6} + \frac{16}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

✓

Solución final:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -\frac{9}{5}$$

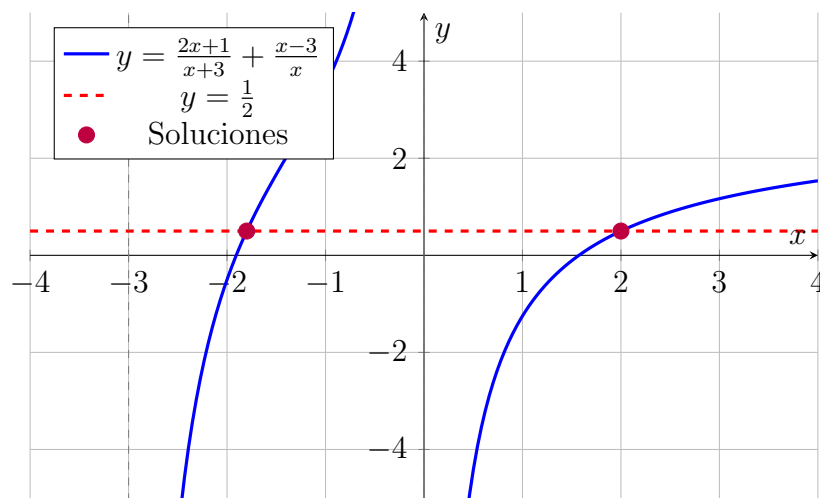


Figura 4: Gráfica mostrando las dos soluciones de la ecuación racional

2. Ejercicio 2: Sistema de ecuaciones exponencial-logarítmico

Sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 5^x = 25 \cdot 5^y \\ \log(x + y) - \log(x - y) = \log 2 \end{cases}$$

Resolución paso a paso:

Paso 1: Simplificamos la primera ecuación.

$$5^x = 25 \cdot 5^y$$

Como $25 = 5^2$:

$$5^x = 5^2 \cdot 5^y$$

Por propiedades de la potenciación:

$$5^x = 5^{2+y}$$

Por igualdad de potencias con la misma base:

$$x = 2 + y \quad (\text{Ecuación 1})$$

Paso 2: Simplificamos la segunda ecuación usando propiedades de logaritmos.

$$\log(x + y) - \log(x - y) = \log 2$$

Por la propiedad $\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$:

$$\log \frac{x + y}{x - y} = \log 2$$

Por igualdad de logaritmos:

$$\frac{x + y}{x - y} = 2 \quad (\text{Ecuación 2})$$

Paso 3: Resolvemos la ecuación 2:

$$x + y = 2(x - y)$$

$$x + y = 2x - 2y$$

$$y + 2y = 2x - x$$

$$3y = x \quad (\text{Ecuación 3})$$

Paso 4: Tenemos un sistema de dos ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x = 2 + y \\ x = 3y \end{cases}$$

Igualemos:

$$3y = 2 + y$$

$$3y - y = 2$$

$$2y = 2$$

$$y = 1$$

Paso 5: Sustituimos $y = 1$ en la ecuación 3:

$$x = 3(1) = 3$$

Paso 6: Verificamos que el dominio sea válido. Para la segunda ecuación necesitamos:

$$x + y > 0 \Rightarrow 3 + 1 = 4 > 0$$

✓

$$x - y > 0 \Rightarrow 3 - 1 = 2 > 0$$

✓

Paso 7: Verificación completa:

Primera ecuación:

$$5^3 = 25 \cdot 5^1$$

$$125 = 25 \cdot 5$$

$$125 = 125$$

✓

Segunda ecuación:

$$\log(3 + 1) - \log(3 - 1) = \log 4 - \log 2 = \log \frac{4}{2} = \log 2$$

✓

Solución final:

$$\boxed{x = 3, \quad y = 1}$$

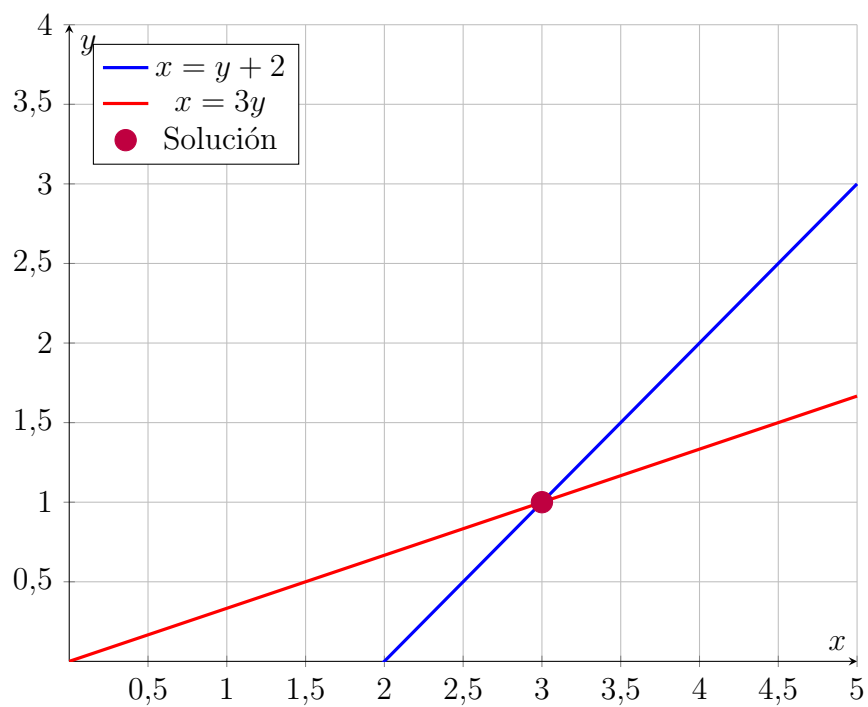


Figura 5: Intersección de las rectas que representa la solución del sistema

3. Ejercicio 3: Sistema de ecuaciones lineales por método de Gauss

Sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 5 \\ 2x - 3y + z = 3 \\ 4x + y - z = 13 \end{cases}$$

Resolución paso a paso mediante el método de Gauss:

Paso 1: Escribimos la matriz ampliada del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 13 \end{array} \right)$$

Paso 2: Eliminamos x de la segunda fila. Realizamos la operación $F_2 - 2F_1 \rightarrow F_2$:

$$F_2 : (2, -3, 1, 3) - 2(1, 2, -3, 5) = (2 - 2, -3 - 4, 1 - (-6), 3 - 10) = (0, -7, 7, -7)$$

La matriz queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 4 & 1 & -1 & 13 \end{array} \right)$$

Paso 3: Eliminamos x de la tercera fila. Realizamos la operación $F_3 - 4F_1 \rightarrow F_3$:

$$F_3 : (4, 1, -1, 13) - 4(1, 2, -3, 5) = (4 - 4, 1 - 8, -1 - (-12), 13 - 20) = (0, -7, 11, -7)$$

La matriz queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & -7 & 11 & -7 \end{array} \right)$$

Paso 4: Simplificamos la segunda fila dividiendo entre -7:

$$F_2 : \frac{1}{-7}(0, -7, 7, -7) = (0, 1, -1, 1)$$

La matriz queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 11 & -7 \end{array} \right)$$

Paso 5: Eliminamos y de la tercera fila. Realizamos la operación $F_3 + 7F_2 \rightarrow F_3$:

$$F_3 : (0, -7, 11, -7) + 7(0, 1, -1, 1) = (0, -7 + 7, 11 - 7, -7 + 7) = (0, 0, 4, 0)$$

La matriz queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

Paso 6: De la tercera fila obtenemos:

$$4z = 0$$

$$z = 0$$

Paso 7: Sustituimos $z = 0$ en la segunda ecuación:

$$y - 1(0) = 1$$

$$y = 1$$

Paso 8: Sustituimos $y = 1$ y $z = 0$ en la primera ecuación:

$$x + 2(1) - 3(0) = 5$$

$$x + 2 = 5$$

$$x = 3$$

Paso 9: Verificación en las tres ecuaciones originales:

Ecuación 1: $3 + 2(1) - 3(0) = 3 + 2 = 5$ ✓

Ecuación 2: $2(3) - 3(1) + 0 = 6 - 3 = 3$ ✓

Ecuación 3: $4(3) + 1 - 0 = 12 + 1 = 13$ ✓

Solución final:

$$x = 3, \quad y = 1, \quad z = 0$$

El sistema es compatible determinado (tiene una única solución).

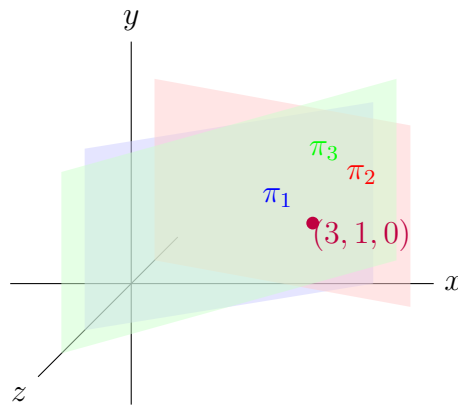


Figura 6: Representación 3D esquemática de los tres planos intersecándose en el punto $(3, 1, 0)$

4. Ejercicio 4: Inecuaciones

Resuelve las siguientes inecuaciones:

4.1. Apartado a) Inecuación lineal: $-2x + 4 \leq -2$

Inecuación lineal simple

$$-2x + 4 \leq -2$$

Resolución paso a paso:

Paso 1: Restamos 4 en ambos lados:

$$-2x + 4 - 4 \leq -2 - 4$$

$$-2x \leq -6$$

Paso 2: Dividimos entre -2. Al dividir por un número negativo, el sentido de la desigualdad se invierte:

$$\begin{aligned} \frac{-2x}{-2} &\geq \frac{-6}{-2} \\ x &\geq 3 \end{aligned}$$

Paso 3: Verificación con valores:

Para $x = 3$ (frontera): $-2(3) + 4 = -6 + 4 = -2$ ✓ (se cumple $-2 \leq -2$)

Para $x = 4$ (dentro): $-2(4) + 4 = -8 + 4 = -4$ ✓ (se cumple $-4 \leq -2$)

Para $x = 2$ (fuera): $-2(2) + 4 = -4 + 4 = 0$ (NO se cumple $0 \leq -2$)

Solución final:

$$x \in [3, +\infty)$$

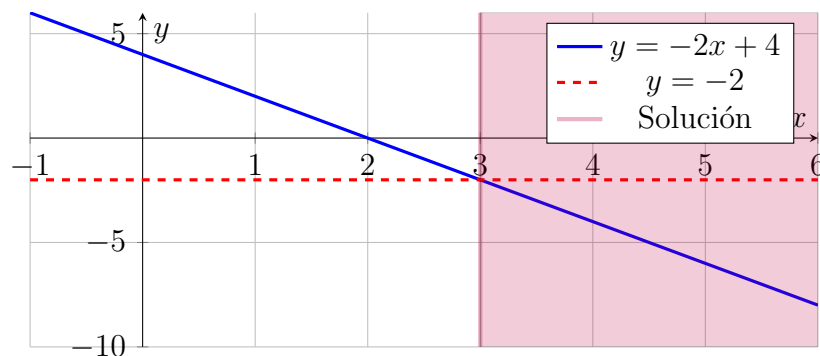


Figura 7: La región sombreada muestra donde $-2x + 4 \leq -2$

4.2. Apartado b) Inecuación cuadrática: $x^2 - 3x > -2$

Inecuación cuadrática

$$x^2 - 3x > -2$$

Resolución paso a paso:**Paso 1:** Llevamos todos los términos a un lado:

$$x^2 - 3x + 2 > 0$$

Paso 2: Resolvemos la ecuación asociada $x^2 - 3x + 2 = 0$ para encontrar las raíces:
Usando la fórmula general con $a = 1$, $b = -3$, $c = 2$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \\ &= \frac{3 \pm 1}{2} \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{3 + 1}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{3 - 1}{2} = 1$$

Paso 3: Factorizamos la expresión:

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

Paso 4: Estudiamos el signo de $(x - 1)(x - 2)$ en los intervalos determinados por las raíces:

Intervalo	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	2
$(x - 1)$	-	0	+	+
$(x - 2)$	-	-	-	0
$(x - 1)(x - 2)$	+	0	-	0

Paso 5: Como necesitamos $(x - 1)(x - 2) > 0$ (estrictamente mayor), tomamos los intervalos donde el producto es positivo:

$$x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$$

Paso 6: Verificación con valores:Para $x = 0$: $(0)^2 - 3(0) = 0 > -2$ ✓Para $x = 1,5$: $(1,5)^2 - 3(1,5) = 2,25 - 4,5 = -2,25$ (NO cumple $-2,25 > -2$)Para $x = 3$: $(3)^2 - 3(3) = 9 - 9 = 0 > -2$ ✓**Solución final:**

$$x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$$

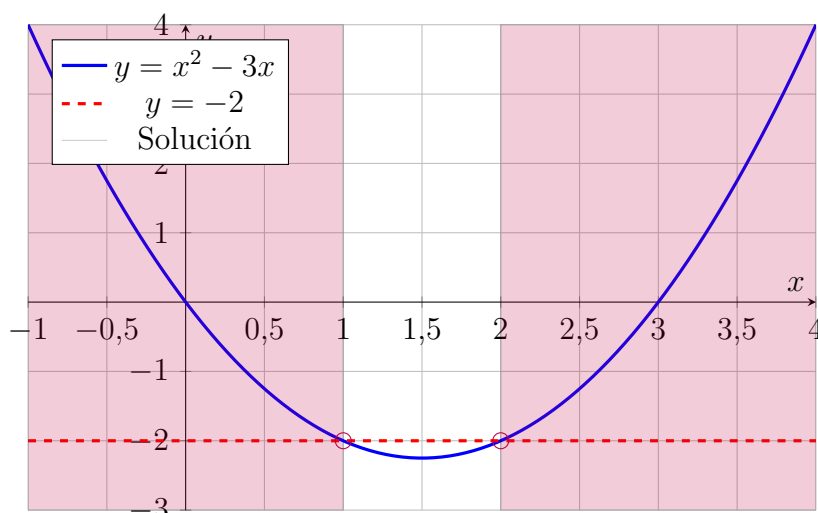


Figura 8: La parábola está por encima de la recta $y = -2$ en las regiones sombreadas

4.3. Apartado c) Inecuación racional: $\frac{x-2}{3-x} > 0$

Inecuación con fracción algebraica

$$\frac{x-2}{3-x} > 0$$

Resolución paso a paso:

Paso 1: Identificamos los puntos críticos:

Ceros del numerador: $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

Ceros del denominador: $3 - x = 0 \Rightarrow x = 3$ (punto de discontinuidad)

Paso 2: Estos puntos dividen la recta real en tres intervalos:

$$(-\infty, 2), \quad (2, 3), \quad (3, +\infty)$$

Paso 3: Estudiamos el signo de la expresión en cada intervalo:

Intervalo	$(-\infty, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$x - 2$	—	0	+	+	+
$3 - x$	+	+	+	0	—
$\frac{x-2}{3-x}$	—	0	+	No def.	—

Paso 4: Como necesitamos $\frac{x-2}{3-x} > 0$ (estrictamente positivo), tomamos el intervalo donde la expresión es positiva:

$$x \in (2, 3)$$

Paso 5: Verificación con valores:

Para $x = 1$: $\frac{1-2}{3-1} = \frac{-1}{2} < 0$ (NO cumple)

Para $x = 2,5$: $\frac{2,5-2}{3-2,5} = \frac{0,5}{0,5} = 1 > 0$ ✓

Para $x = 4$: $\frac{4-2}{3-4} = \frac{2}{-1} = -2 < 0$ (NO cumple)

Solución final:

$$x \in (2, 3)$$

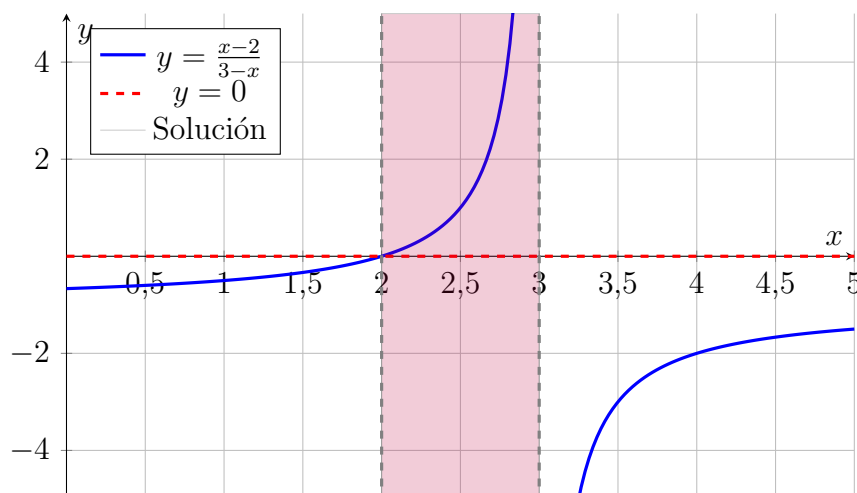


Figura 9: La función es positiva en el intervalo $(2, 3)$

4.4. Apartado d) Inecuación lineal con dos variables: $6x - 2y \leq 3$

Inecuación lineal con dos variables

$$6x - 2y \leq 3$$

Resolución paso a paso:

Paso 1: Esta es una inecuación lineal con dos variables. La solución es un semiplano del plano $\mathbb{R}^2$.

Paso 2: Primero, encontramos la recta frontera resolviendo la ecuación:

$$6x - 2y = 3$$

Despejamos y :

$$-2y = -6x + 3$$

$$y = 3x - \frac{3}{2}$$

Paso 3: Encontramos algunos puntos de la recta:

Para $x = 0$: $y = 3(0) - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} \rightarrow$ Punto $(0, -\frac{3}{2})$

Para $x = 1$: $y = 3(1) - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \rightarrow$ Punto $(1, \frac{3}{2})$

Para $y = 0$: $0 = 3x - \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow$ Punto $(\frac{1}{2}, 0)$

Paso 4: Determinamos qué semiplano es la solución probando con el punto $(0, 0)$:

$$6(0) - 2(0) = 0 \leq 3$$

✓

Como se cumple la desigualdad, el punto $(0, 0)$ está en la región solución.

Paso 5: Como la desigualdad es $\leq$ (no estricta), la recta frontera está incluida en la solución.

Solución final:

$$\text{Semiplano: } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 6x - 2y \leq 3\}$$

El conjunto solución es el semiplano que contiene al origen, incluyendo la recta $y = 3x - \frac{3}{2}$.

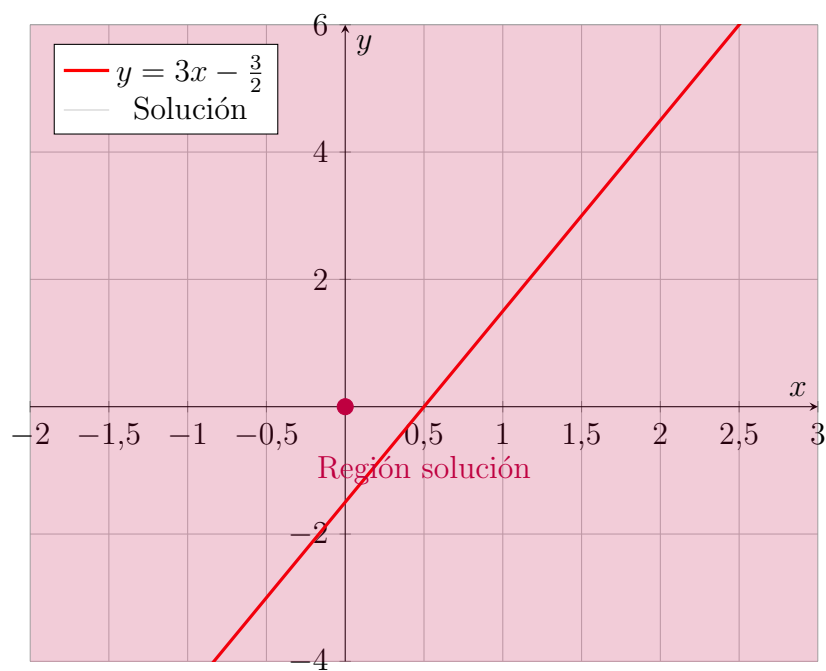


Figura 10: El semiplano sombreado (debajo de la recta) representa la solución

5. Ejercicio 5: Sistemas de inecuaciones

5.1. Apartado a) Sistema de inecuaciones lineales:
$$\begin{cases} 2x - 3 < 1 - x \\ 4 - 2x \geq 6 \end{cases}$$

Sistema de inecuaciones con una variable

$$\begin{cases} 2x - 3 < 1 - x \\ 4 - 2x \geq 6 \end{cases}$$

Resolución paso a paso:

Paso 1: Resolvemos la primera inecuación:

$$2x - 3 < 1 - x$$

Sumamos x en ambos lados:

$$2x + x - 3 < 1$$

$$3x - 3 < 1$$

Sumamos 3 en ambos lados:

$$3x < 4$$

Dividimos entre 3:

$$x < \frac{4}{3}$$

Paso 2: Resolvemos la segunda inecuación:

$$4 - 2x \geq 6$$

Restamos 4 en ambos lados:

$$-2x \geq 2$$

Dividimos entre -2 (invertimos el signo):

$$x \leq -1$$

Paso 3: El sistema se reduce a:

$$\begin{cases} x < \frac{4}{3} \\ x \leq -1 \end{cases}$$

Paso 4: La solución es la intersección de ambos intervalos:

$$x \in \left(-\infty, \frac{4}{3}\right) \cap (-\infty, -1]$$

Como $-1 < \frac{4}{3}$, la intersección es:

$$x \in (-\infty, -1]$$

Paso 5: Verificación con $x = -2$:

Primera inecuación: $2(-2) - 3 < 1 - (-2) \Rightarrow -7 < 3 \checkmark$

Segunda inecuación: $4 - 2(-2) \geq 6 \Rightarrow 8 \geq 6 \checkmark$

Verificación con $x = 0$ (no debe cumplirse):

Segunda inecuación: $4 - 2(0) \geq 6 \Rightarrow 4 \geq 6$ (FALSO)

Solución final:

$$x \in (-\infty, -1]$$

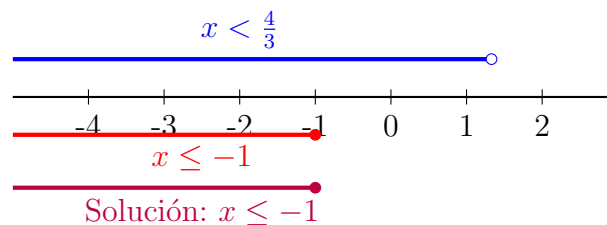


Figura 11: Representación en la recta real del sistema de inecuaciones

5.2. Apartado b) Sistema de inecuaciones con dos variables:

$$\begin{cases} 6x - 5y \leq 30 \\ 4x + 3y > 0 \end{cases}$$

Sistema de inecuaciones lineales con dos variables

$$\begin{cases} 6x - 5y \leq 30 \\ 4x + 3y > 0 \end{cases}$$

Resolución paso a paso:

Paso 1: Resolvemos la primera inecuación $6x - 5y \leq 30$.

La recta frontera es $6x - 5y = 30$.

Despejamos y :

$$\begin{aligned} -5y &= -6x + 30 \\ y &= \frac{6x - 30}{5} = \frac{6x}{5} - 6 \end{aligned}$$

Puntos de la recta:

- Para $x = 0$: $y = -6 \rightarrow$ Punto $(0, -6)$
- Para $y = 0$: $6x = 30 \Rightarrow x = 5 \rightarrow$ Punto $(5, 0)$
- Para $x = 5$: $y = \frac{30}{5} - 6 = 0 \rightarrow$ Punto $(5, 0)$

Probamos con el punto $(0, 0)$:

$$6(0) - 5(0) = 0 \leq 30$$

✓

El origen está en la región solución de la primera inecuación.

Paso 2: Resolvemos la segunda inecuación $4x + 3y > 0$.

La recta frontera es $4x + 3y = 0$.

Despejamos y :

$$\begin{aligned} 3y &= -4x \\ y &= -\frac{4x}{3} \end{aligned}$$

Esta recta pasa por el origen $(0, 0)$.

Puntos de la recta:

- Para $x = 3$: $y = -4 \rightarrow$ Punto $(3, -4)$
- Para $x = -3$: $y = 4 \rightarrow$ Punto $(-3, 4)$

Probamos con el punto $(1, 1)$:

$$4(1) + 3(1) = 7 > 0$$

✓

El punto $(1, 1)$ está en la región solución de la segunda inecuación.

Paso 3: La solución del sistema es la intersección de ambas regiones.

Primera inecuación: $y \geq \frac{6x}{5} - 6$ (región por encima de la recta, incluyendo la recta)

Segunda inecuación: $y > -\frac{4x}{3}$ (región por encima de la recta, sin incluir la recta)

Paso 4: Encontramos el punto de intersección de las dos rectas fronteras:

$$\begin{cases} 6x - 5y = 30 \\ 4x + 3y = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación: $y = -\frac{4x}{3}$

Sustituimos en la primera:

$$6x - 5\left(-\frac{4x}{3}\right) = 30$$

$$6x + \frac{20x}{3} = 30$$

$$\frac{18x + 20x}{3} = 30$$

$$\frac{38x}{3} = 30$$

$$x = \frac{90}{38} = \frac{45}{19}$$

$$y = -\frac{4}{3} \cdot \frac{45}{19} = -\frac{60}{19}$$

Punto de intersección: $\left(\frac{45}{19}, -\frac{60}{19}\right) \approx (2,37, -3,16)$

Solución final:

Región del plano: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 6x - 5y \leq 30 \text{ y } 4x + 3y > 0\}$

La solución es la región de intersección de ambos semiplanos.

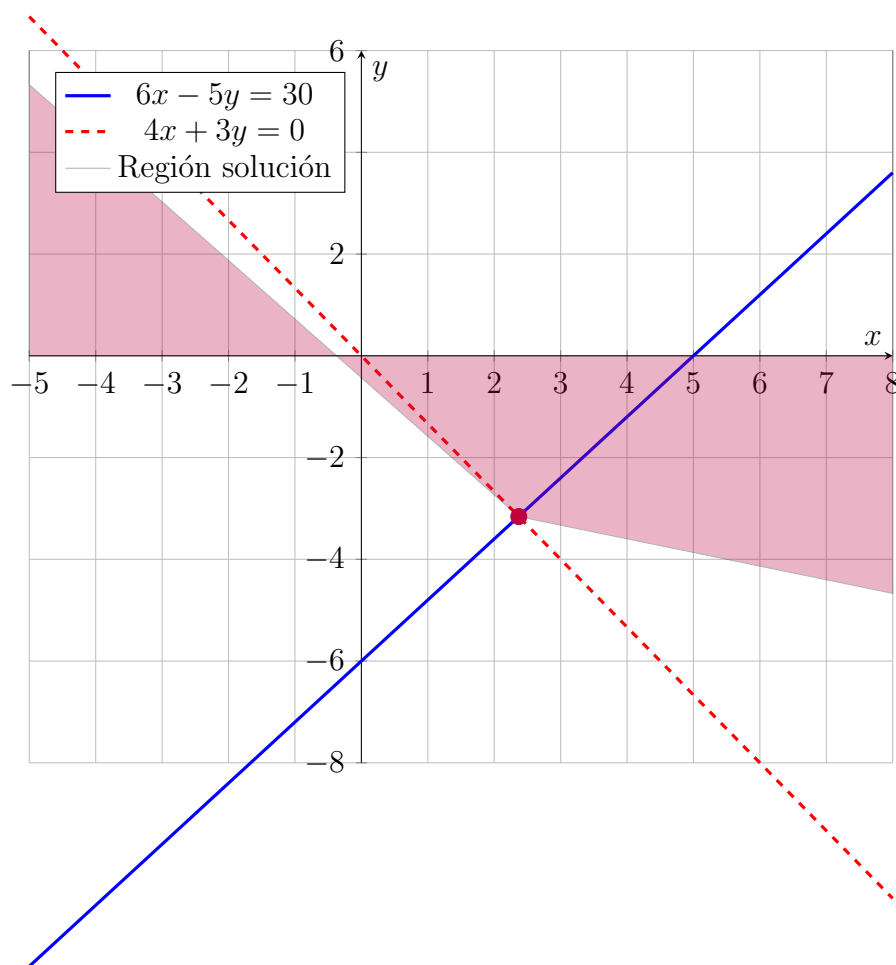


Figura 12: Región solución del sistema (área sombreada en morado)

6. Ejercicio 6: Trigonometría

Cálculos trigonométricos

Sabiendo que $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\alpha \in \text{II cuadrante}$ y $\operatorname{tg} \beta = -1$ y $\beta \in \text{IV cuadrante}$, calcula:

a) $\cos(\alpha)$	e) $\sin(\beta)$
b) $\sin(90 - \alpha)$	f) $\cos(\beta)$
c) $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$	g) $\sin(2\beta)$
d) $\cos(2\pi - \alpha)$	h) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$

Datos iniciales:

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}, \quad \alpha \in \text{II cuadrante}$$

$$\operatorname{tg} \beta = -1, \quad \beta \in \text{IV cuadrante}$$

Apartado a) $\cos(\alpha)$

Paso 1: Usamos la identidad fundamental $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{16}{25} + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{3}{5}$$

Paso 2: Como α está en el II cuadrante, donde el coseno es negativo:

$$\cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

Apartado b) $\sin(90 - \alpha)$

Paso 1: Convertimos 90 a radianes: $90 = \frac{\pi}{2}$ rad.

Paso 2: Usamos la identidad $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$:

$$\sin(90 - \alpha) = \cos \alpha$$

Paso 3: Del apartado anterior:

$$\sin(90 - \alpha) = -\frac{3}{5}$$

Apartado c) $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$ **Paso 1:** Calculamos primero $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{-3} = -\frac{4}{3}$$

Paso 2: Usamos la identidad $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$:

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{4}{3}}$$

Apartado d) $\cos(2\pi - \alpha)$ **Paso 1:** Usamos la identidad $\cos(2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha$:

Esto se debe a que:

- $\cos(2\pi - \alpha) = \cos(2\pi) \cos(\alpha) + \operatorname{sen}(2\pi) \operatorname{sen}(\alpha) = 1 \cdot \cos \alpha + 0 \cdot \operatorname{sen} \alpha = \cos \alpha$
- O directamente: restar α de 2π es equivalente a $-\alpha$ módulo 2π .

$$\boxed{\cos(2\pi - \alpha) = \frac{3}{5}}$$

Apartado e) $\operatorname{sen}(\beta)$ **Paso 1:** Sabemos que $\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta} = -1$, por lo tanto:

$$\operatorname{sen} \beta = -\cos \beta$$

Paso 2: Usamos la identidad fundamental:

$$\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$$

Sustituimos $\operatorname{sen} \beta = -\cos \beta$:

$$(-\cos \beta)^2 + \cos^2 \beta = 1$$

$$\cos^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$$

$$2 \cos^2 \beta = 1$$

$$\cos^2 \beta = \frac{1}{2}$$

$$\cos \beta = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Paso 3: Como β está en el IV cuadrante, donde el coseno es positivo:

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Paso 4: Por lo tanto:

$$\operatorname{sen} \beta = -\cos \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{\operatorname{sen} \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Apartado f) $\cos(\beta)$

Del apartado anterior:

$$\boxed{\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Apartado g) $\operatorname{sen}(2\beta)$

Paso 1: Usamos la fórmula del ángulo doble:

$$\operatorname{sen}(2\beta) = 2 \operatorname{sen} \beta \cos \beta$$

Paso 2: Sustituimos los valores:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(2\beta) &= 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 2 \cdot \left(-\frac{2}{4}\right) \\ &= 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}(2\beta) = -1}$$

Apartado h) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$

Paso 1: Usamos la fórmula de la tangente de la diferencia:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

Paso 2: Sustituimos los valores conocidos:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}, \quad \operatorname{tg} \beta = -1$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{-\frac{4}{3} - (-1)}{1 + \left(-\frac{4}{3}\right)(-1)}$$

Paso 3: Simplificamos el numerador:

$$-\frac{4}{3} + 1 = -\frac{4}{3} + \frac{3}{3} = -\frac{1}{3}$$

Paso 4: Simplificamos el denominador:

$$1 + \frac{4}{3} = \frac{3}{3} + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$$

Paso 5: Calculamos la fracción:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{7}{3}} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} = -\frac{1}{7}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = -\frac{1}{7}}$$

Resumen de soluciones:

$$a) \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$b) \operatorname{sen}(90 - \alpha) = -\frac{3}{5}$$

$$c) \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{4}{3}$$

$$d) \cos(2\pi - \alpha) = -\frac{3}{5}$$

$$e) \operatorname{sen} \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f) \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$g) \operatorname{sen}(2\beta) = -1$$

$$h) \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = -\frac{1}{7}$$

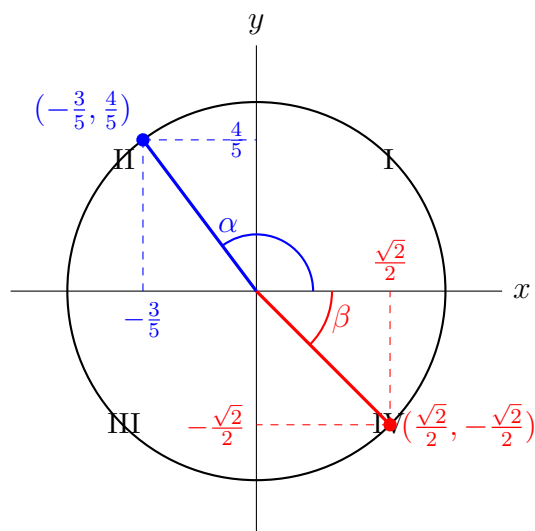


Figura 13: Representación de los ángulos α (II cuadrante) y β (IV cuadrante) en el círculo trigonométrico

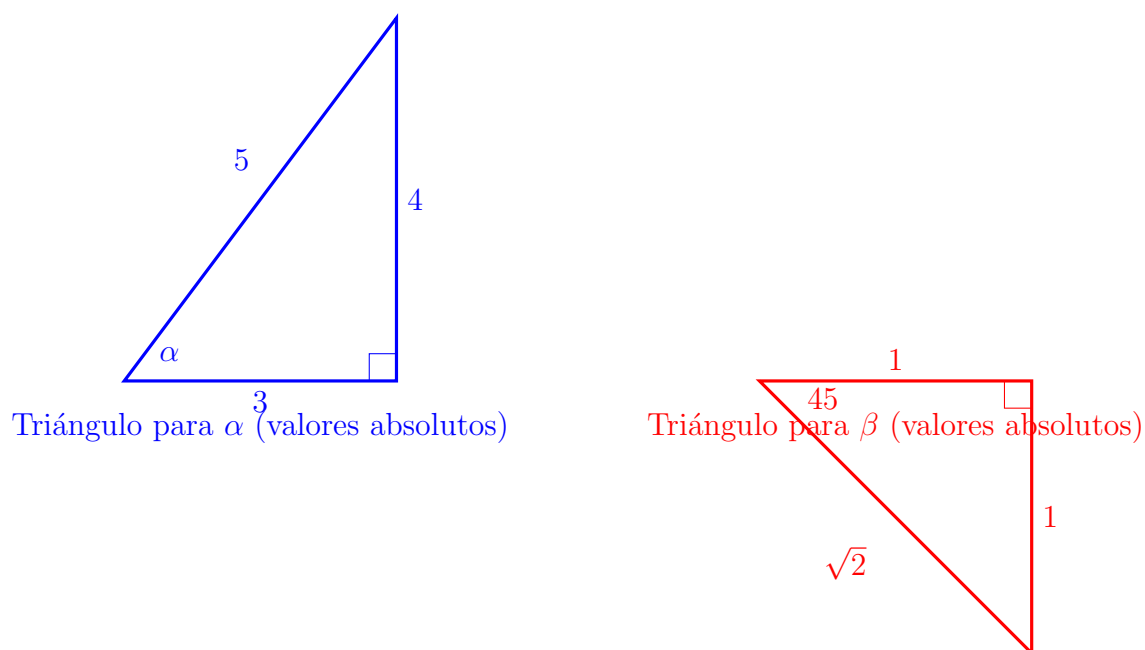


Figura 14: Triángulos rectángulos asociados a los ángulos α y β

Proyecto MaT_EX

Resolución de Triángulos

Fco Javier González Ortiz

Directorio

- [Tabla de Contenido](#)
- [Inicio Artículo](#)



MaT_EX

TRIÁNGULOS

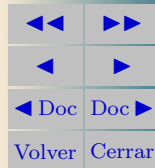


Tabla de Contenido

1. Triángulos rectángulos

1.1. Ejercicios

2. Triángulos cualesquiera

2.1. Teorema de los senos

2.2. Teorema del coseno

2.3. Ejercicios

Soluciones a los Ejercicios



MaTeX

TRIÁNGULOS

◀◀	▶▶
◀	▶
◀ Doc	Doc ▶
Volver	Cerrar



1. Triángulos rectángulos

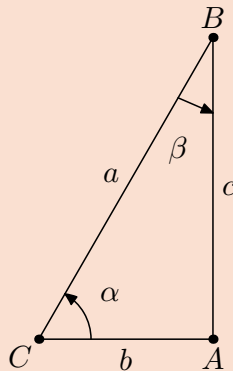
Hallar los elementos de un triángulo rectángulo $\triangle CAB$ a partir de otros elementos es muy sencillo:

- Para los ángulos se tiene

$$\hat{A} = 90^\circ \quad \alpha + \beta = 90^\circ$$

luego, si se conoce un ángulo agudo el otro es su complementario.

- Con un ángulo agudo y cualquier lado conocido, se pueden hallar los demás lados.



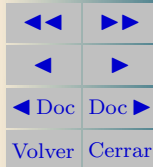
Basta para ello usar las razones trigonométricas de los ángulos α o β

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{c}{a} \quad \cos \alpha = \frac{b}{a} \quad \tan \alpha = \frac{c}{b}$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{b}{a} \quad \cos \beta = \frac{c}{a} \quad \tan \beta = \frac{b}{c}$$

MaTeX

TRIÁNGULOS

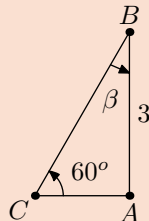


Ejemplo 1.1. Resuelve el triángulo conocidos $\alpha = 60^\circ$ y $AB = 3$.

Solución: $\beta = 90^\circ - \alpha = 30^\circ$

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{3}{CB} \Rightarrow CB \approx 3,46$$

$$\tan 60^\circ = \frac{3}{CA} \Rightarrow CA \approx 1,73$$



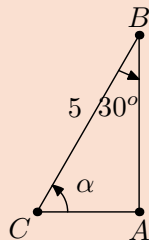
□

Ejemplo 1.2. Resuelve el triángulo conocidos $\beta = 30^\circ$ y $CB = 5$.

Solución: $\alpha = 90^\circ - \beta = 60^\circ$

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{AB}{5} \Rightarrow AB \approx 4,33$$

$$\cos 60^\circ = \frac{CA}{5} \Rightarrow CA = 2,5$$



□



MaTeX

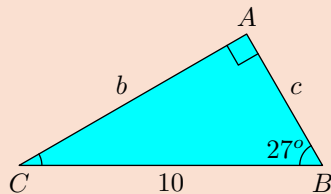
TRIÁNGULOS



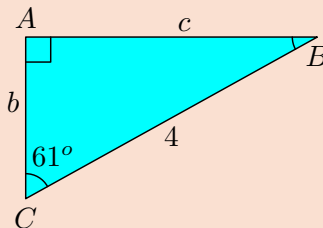
1.1. Ejercicios

EJERCICIO 1. Hallar los elementos del triángulo que faltan

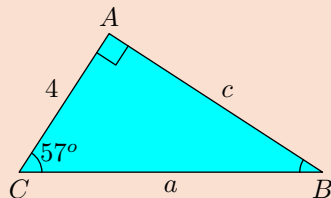
(a)



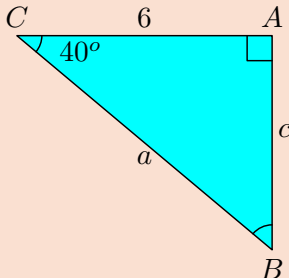
(b)



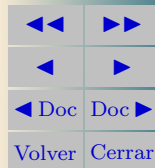
(c)



(d)

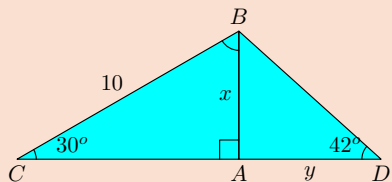
MaT_EX

TRIÁNGULOS

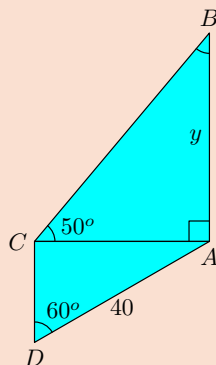


EJERCICIO 2. Los siguientes gráficos están formados con triángulos rectángulos. Hallar las incógnitas que aparecen en ellos.

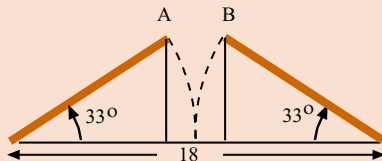
(a)



(b)

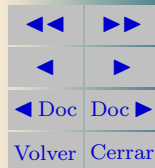


Ejercicio 3. Dos puentes levadizos tienen la misma longitud y están elevados 33° , ¿qué distancia separa los puntos A y B ?



MaTeX

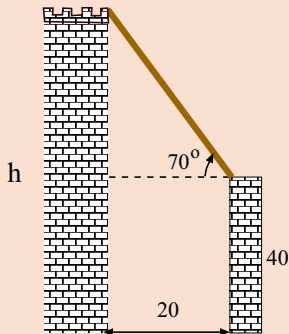
TRIÁNGULOS



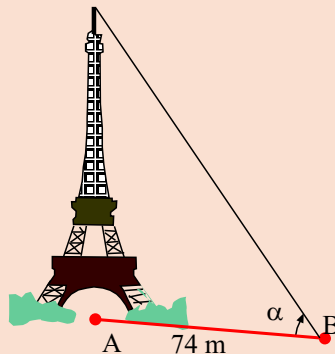


EJERCICIO 4. Resolver los siguientes ejercicios:

- (a) Desde lo alto de una torre se ven las almenas de otra torre separada 20 m bajo un ángulo de 70° . Si estas a una altura de 40 m, ¿cuál es la longitud de una escalera apoyada en ambas y la altura de la torre vecina?

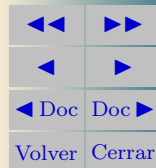


- (b) Para calcular de la torre Eiffel, una persona se sitúa en B a una distancia de 74 m de la base de la torre. Si observa la torre bajo un ángulo $\alpha = 75^\circ$. ¿Cuánto mide la torre Eiffel?



MaTeX

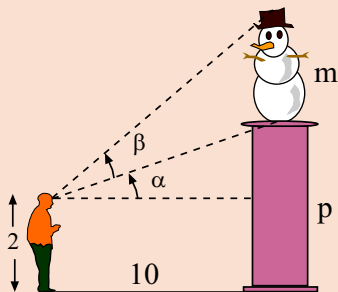
TRIÁNGULOS



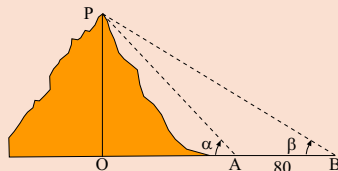


EJERCICIO 5. Resolver los siguientes ejercicios:

- (a) Una persona de 2 m se sitúa a 10 m de una estatua de longitud m sobre un pedestal de altura p . Si calcula los ángulos $\alpha = 20^\circ$ y $\beta = 15^\circ$, hallar la longitud de la estatua.



- (b) Para calcular la altura de la montaña, desde dos puntos A y B separados una distancia $AB = 80$ m, se miden los ángulos $\alpha = 40^\circ$ y $\beta = 35^\circ$. ¿Cuál es la altura de la montaña?

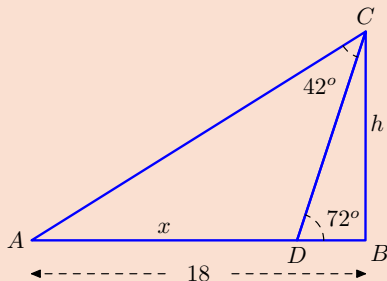


MaTeX

TRIÁNGULOS



Ejercicio 6. En el gráfico siguiente calcular el valor de x y h



MaTeX

TRIÁNGULOS



2. Triángulos cualesquiera

2.1. Teorema de los senos

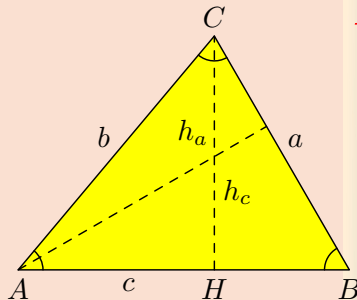
Teorema 2.1. Sea el triángulo ABC y la altura h_c correspondiente al vértice C . Como los triángulos AHC y BHC son rectángulos, se tiene que:

$$\begin{aligned} h_c &= b \operatorname{sen} A \\ h_c &= a \operatorname{sen} B \end{aligned} \implies b \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} B$$

luego

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

De forma análoga si se traza la altura h_a correspondiente al vértice A



En todo triángulo la proporción de los lados y los senos de sus ángulos respectivos es constante.

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \quad (1)$$



MaTeX

TRIÁNGULOS



Nota de interés Si construimos la circunferencia de radio r circunscrita al triángulo ABC y trazamos el diámetro CD , se tiene:

En ABC se cumple

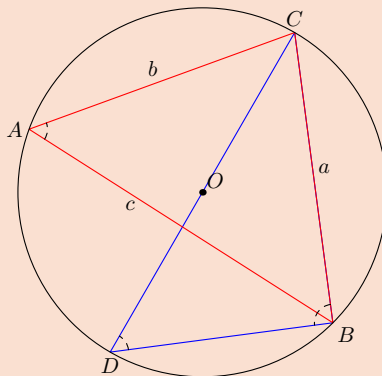
$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

El triángulo DBC tiene un lado común a , el lado $DC = 2r$ pues es un diámetro y el $\widehat{B} = 90^\circ$, pues abarca un diámetro, luego:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} D} = \frac{2r}{\operatorname{sen} 90^\circ}$$

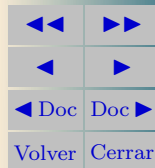
Como los ángulos $\widehat{A} = \widehat{D}$ son iguales, ya que abarcan el mismo arco, al sustituir en la primera expresión se obtiene que la proporción es igual al diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2r$$



MaTeX

TRIÁNGULOS



Ejemplo 2.1. De un triángulo se conocen el lado $b = 5$ y los ángulos $\hat{A} = 35^\circ$ y $\hat{B} = 100^\circ$. Hallar los otros dos lados.

Solución: Por el teorema de los senos

$$\frac{a}{\sen 35^\circ} = \frac{5}{\sen 100^\circ} = \frac{c}{\sen C}$$

despejando a , $a = \frac{5}{\sen 100^\circ} \sen 35^\circ \Rightarrow \boxed{a \approx 2,91}$

Como $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 45^\circ$, y despejando c

$$c = \frac{5}{\sen 100^\circ} \sen 45^\circ \Rightarrow \boxed{c \approx 3,59}$$

□

Ejemplo 2.2. De un triángulo se conocen el lado $c = 4$ y los ángulos $\hat{B} = 35^\circ$ y $\hat{C} = 120^\circ$. Hallar los otros dos lados.

Solución: Por el teorema de los senos

$$\frac{a}{\sen A} = \frac{b}{\sen 35^\circ} = \frac{4}{\sen 120^\circ}$$

despejando b , $b = \frac{4}{\sen 120^\circ} \sen 35^\circ \Rightarrow \boxed{b \approx 2,65}$

Como $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 25^\circ$, y despejando a

$$a = \frac{4}{\sen 120^\circ} \sen 25^\circ \Rightarrow \boxed{a \approx 1,952}$$

□



MaTeX

TRIÁNGULOS



Ejemplo 2.3. Resuelve el triángulo dados $a = 4, b = 5$ y $\hat{A} = 45^\circ$.

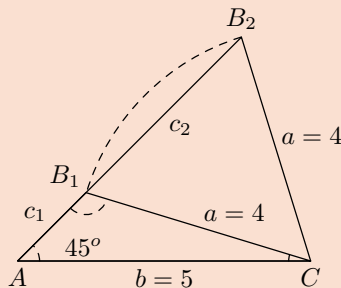
Solución:

Por el teorema de los senos

$$\frac{4}{\sin 45^\circ} = \frac{5}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

despejando $\sin B$

$$\sin B = 5 \frac{\sin 45^\circ}{4} = 0,88$$



$$\Rightarrow B_1 = 117,89^\circ \vee B_2 = 62,11^\circ$$

Como

$$A + B + C = 180^\circ \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 17,11^\circ & c_1 = 1,66 \\ C_2 = 72,89^\circ & c_2 = 5,41 \end{cases}$$

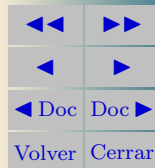
En el dibujo se aprecia por qué tiene dos soluciones .

□



MaTeX

TRIÁNGULOS



2.2. Teorema del coseno

Teorema 2.2. Sea el triángulo ABC y la altura h_c correspondiente al vértice C . Como los triángulos AHC y BHC son rectángulos, se tiene que:

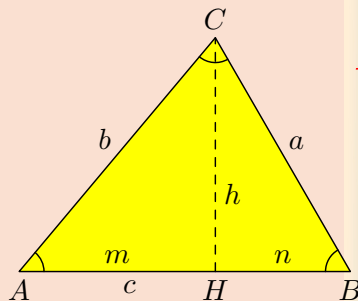
$$\begin{aligned} a^2 &= n^2 + h^2 \\ b^2 &= m^2 + h^2 \end{aligned} \quad \text{restando}$$

$$a^2 - b^2 = n^2 - m^2$$

Sustituyendo $n = c - m$, se obtiene

$$a^2 - b^2 = c^2 - 2cm$$

y teniendo en cuenta que $m = b \cos A$



$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned} \quad (2)$$

Con estas expresiones, a partir de dos lados y el ángulo comprendido se puede calcular el tercer lado.



MaTeX

TRIÁNGULOS



Ejemplo 2.4. Hallar el lado c de un triángulo, conociendo los lados $a = 5$, $b = 4$ y el ángulo comprendido $\hat{C} = 60^\circ$.

Solución: Del teorema del coseno se tiene:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

$$c^2 = (5)^2 + (4)^2 - 2(5)(4) \cos 60^\circ = 21 \implies \boxed{c = 4,5826}$$

□

Ejemplo 2.5. Hallar los ángulos de un triángulo conociendo sus lados $a = 5$, $b = 4$ y $c = 7$.

Solución: Del teorema del coseno se tiene:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\cos A = -\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc} = -\frac{5}{7} \implies \boxed{A = 135,58^\circ}$$

Ahora con el teorema de los senos calculamos otro ángulo

$$\frac{5}{\sin A} = \frac{4}{\sin B} = \frac{7}{\sin C}$$

$$\sin B = 4 \frac{\sin A}{5} = 4 \frac{0,7}{5} = 0,56 \implies \boxed{B = 30,05^\circ}$$

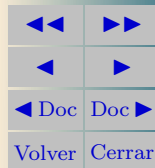
$$\text{Como } A + B + C = 180^\circ \implies \boxed{C = 14,37^\circ}$$

□



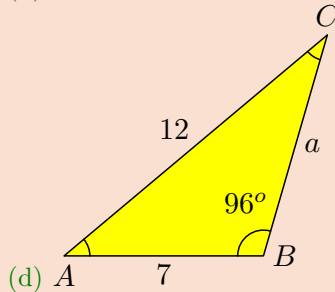
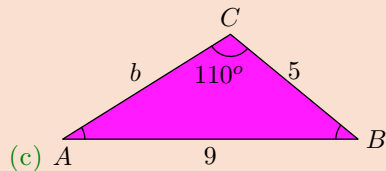
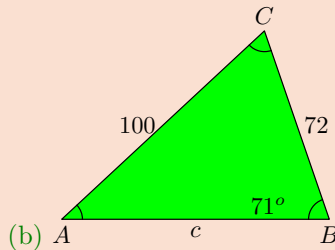
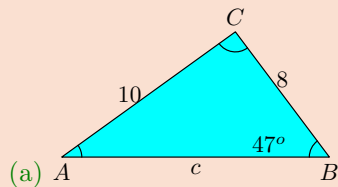
MaTeX

TRIÁNGULOS



2.3. Ejercicios

EJERCICIO 7. Hallar los elementos del triángulo que faltan



MaTeX

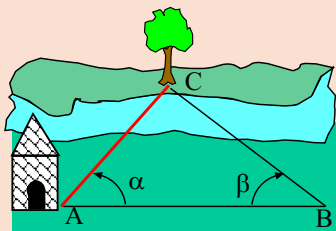
TRIÁNGULOS



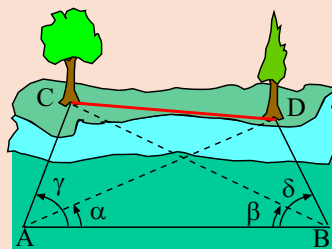


EJERCICIO 8. Resolver los siguientes ejercicios:

- (a) Se quiere calcular la distancia AC entre una casa y un árbol separados por un río. Para ello nos separamos una distancia $AB = 80$ m, midiendo los ángulos $\alpha = 60^\circ$ y $\beta = 35^\circ$.

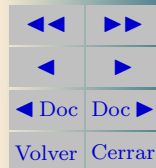


- (b) Se quiere calcular la distancia CD entre dos árboles inaccesibles. Para ello nos separamos una distancia $AB = 100$ m, midiendo los ángulos α, β, γ y δ .

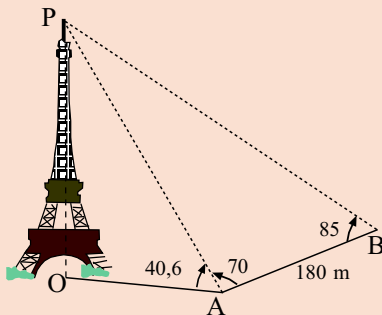


MaTeX

TRIÁNGULOS



Ejercicio 9. Para calcular la altura de la torre Eiffel sin acceder hasta su base, una persona efectúa las medidas de los ángulos del dibujo en dos puntos A y B separados 180 m. ¿Cuánto mide la altura OP de la torre Eiffel?



Ejercicio 10. En los siguientes ejercicios se dan **tres** elementos de un triángulo. Se piden los elementos que faltan.

a) $a = 10, b = 9, \hat{C} = 70^\circ$

b) $a = 12, \hat{A} = 30^\circ, \hat{B} = 100^\circ$

c) $a = 4, b = 8, \hat{B} = 40^\circ$

d) $a = 6, b = 7, c = 8$

e) $a = 8, b = 12, c = 20$

f) $b = 10, c = 6, \hat{C} = 45^\circ$

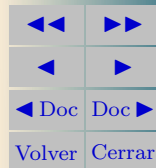
g) $a = 10, \hat{A} = 45^\circ, \hat{C} = 75^\circ$

h) $a = 1, c = \sqrt{3}, \hat{B} = 30^\circ$



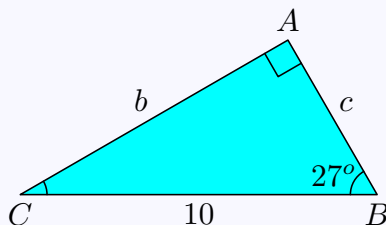
MaTeX

TRIÁNGULOS



Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1(a) Al ser un triángulo rectángulo



$$\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \widehat{C} = 63^\circ$$

$$c = 10 \cos 27^\circ \quad \Rightarrow \quad c \simeq 8,91$$

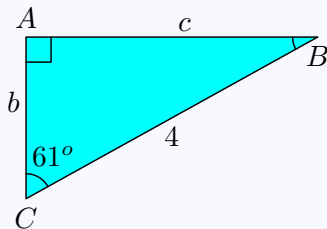
$$b = 10 \operatorname{sen} 27^\circ \quad \Rightarrow \quad b \simeq 4,54$$

MaT_EX

TRIÁNGULOS



Ejercicio 1(b) Al ser un triángulo rectángulo



$$\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \widehat{B} = 29^\circ$$

$$c = 4 \operatorname{sen} 61^\circ \quad \Rightarrow \quad c \simeq 3,5$$

$$b = 4 \cos 61^\circ \quad \Rightarrow \quad b \simeq 1,94$$

□

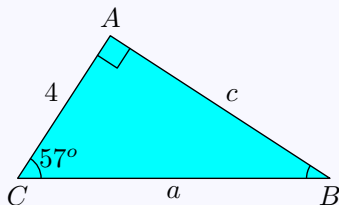


MaTeX

TRIÁNGULOS



Ejercicio 1(c) Al ser un triángulo rectángulo



$$\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \hat{B} = 33^\circ$$

$$4 = a \cos 57^\circ \Rightarrow a \simeq 7,34$$

$$\tan 57^\circ = \frac{c}{4} \Rightarrow c \simeq 6,16$$

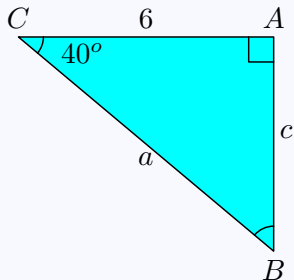


MaTeX

TRIÁNGULOS



Ejercicio 1(d) Al ser un triángulo rectángulo



$$\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \hat{B} = 50^\circ$$

$$6 = a \cos 40^\circ \quad \Rightarrow \quad a \simeq 7,83$$

$$\tan 40^\circ = \frac{c}{6} \quad \Rightarrow \quad c \simeq 5,03$$

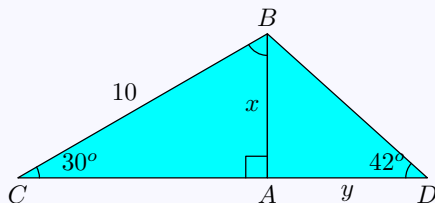


MaT_EX

TRIÁNGULOS



Ejercicio 2(a)



En el triángulo rectángulo $\triangle CAB$ se tiene

$$x = 10 \operatorname{sen} 30^\circ = \boxed{5}$$

y en el triángulo rectángulo $\triangle DAB$ se tiene

$$\tan 42^\circ = \frac{x}{y} \Rightarrow \boxed{y \simeq 5,55}$$

□

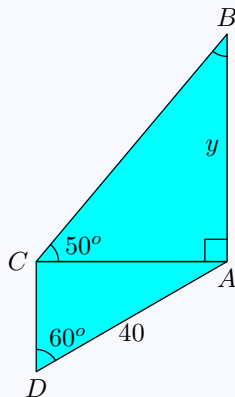


MaTEX

TRIÁNGULOS



Ejercicio 2(b)



En el triángulo rectángulo $\triangle DCA$ se tiene

$$CA = 40 \operatorname{sen} 60^\circ = \boxed{34,64}$$

y en el triángulo rectángulo $\triangle CAB$ se tiene

$$\tan 50^\circ = \frac{y}{CA} \implies \boxed{y \simeq 41,28}$$

□



MaTeX

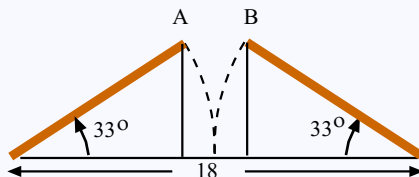
TRIÁNGULOS



Ejercicio 3.

Como la distancia total es 18
cada puente mide 9 m.

Del dibujo se aprecia que dos
veces la proyección horizontal
del puente mas AB es igual a
18. Es decir



$$9 \times \cos 33^\circ + AB + 9 \times \cos 33^\circ = 18$$

luego

$$AB = 18 - 18 \times \cos 33^\circ \approx \boxed{2,9} \text{ m.}$$

Ejercicio 3



MaTeX

TRIÁNGULOS



Ejercicio 4(a)

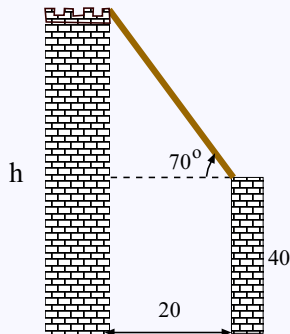
Sea e la longitud de la escalera, se tiene

$$\cos 70^\circ = \frac{20}{e} \Rightarrow \boxed{e \approx 58,5}$$

Por otra parte

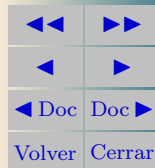
$$\tan 70^\circ = \frac{h - 40}{20} \Rightarrow$$

$$\boxed{h = 40 + 20 \tan 70^\circ \approx 90,95}$$



MaTeX

TRIÁNGULOS



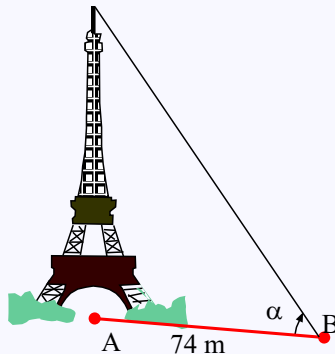
Ejercicio 4(b)

Siendo $\alpha = 75^\circ$, y considerando un triángulo rectángulo con ángulo recto en A , se tiene

$$\tan \alpha = \frac{h}{74}$$

luego

$$h = 74 \times \tan 75^\circ \approx 276 \text{ metros}$$



MaTeX

TRIÁNGULOS

◀◀	▶▶
◀	▶
◀ Doc	Doc ▶
Volver	Cerrar

Ejercicio 5(a)

Siendo $\alpha = 20$ y $\beta = 15$,

$$\tan \alpha = \frac{p-2}{10} \Rightarrow$$

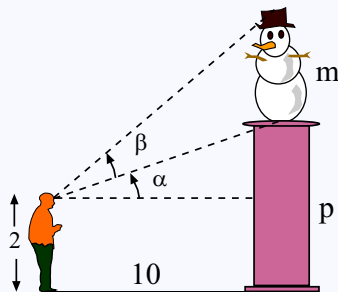
$$p = 2 + 10 \tan 20^\circ \approx 5,64$$

Por otra parte se tiene que

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{m + p - 2}{10} \Rightarrow$$

despejando la altura m de la estatua

$$m = 2 - p + 10 \tan(20^\circ + 15^\circ) \approx 3,36$$



MaTeX

TRIÁNGULOS



Ejercicio 5(b)

Sea la altura $\overline{OP} = h$, $\alpha = 40^\circ$
 y $\beta = 35^\circ$. En OAP se tiene

$$\tan 40^\circ = \frac{h}{\overline{OA}}$$

y en OBP se tiene

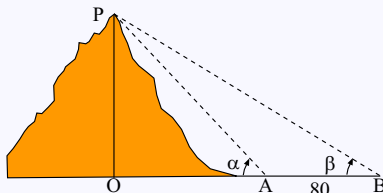
$$\tan 35^\circ = \frac{h}{\overline{OA} + 80}$$

Resolvemos el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, h y $\overline{OA}$:

$$h = 0,84 \cdot \overline{OA} \implies 0,70 = \frac{0,84 \overline{OA}}{\overline{OA} + 80}$$

Despejando $\overline{OA}$, se obtiene $\boxed{\overline{OA} = 400}$ m.

Sustituyendo en la primera ecuación se obtiene la altura $\boxed{h \approx 336}$ m.



MaTeX

TRIÁNGULOS



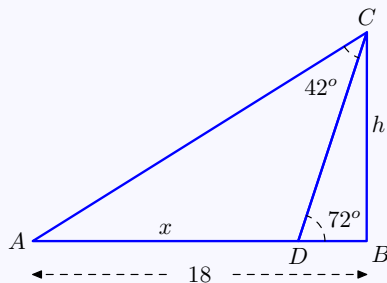
Ejercicio 6. Primero calculamos el valor de $\hat{A}$

Como $\angle ADB = 180^\circ - 72^\circ$

$$\hat{A} + 42^\circ + \angle ADB = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\hat{A} + 42^\circ + (180^\circ - 72^\circ) = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\hat{A} = 30^\circ$$



$$\tan 30^\circ = \frac{h}{18} \Rightarrow h = \frac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$$

Por otra parte

$$\tan 72^\circ = \frac{h}{18 - x} = \frac{6\sqrt{3}}{18 - x} \Rightarrow 3,08 = \frac{6\sqrt{3}}{18 - x}$$

$$55,4 - 3,08x = 10,4 \Rightarrow \boxed{x \approx 14,6}$$

Ejercicio 6



MaTeX

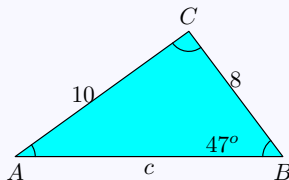
TRIÁNGULOS



Ejercicio 7(a)

De la regla de los senos

$$\frac{8}{\operatorname{sen} A} = \frac{10}{\operatorname{sen} 47^\circ} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$



$$\begin{aligned}\operatorname{sen} A &= \frac{a}{b} \operatorname{sen} B \\ &= \frac{8}{10} \operatorname{sen} 47^\circ = 0,585 \Rightarrow A \simeq 35,8^\circ\end{aligned}$$

$$A + B + C = 180^\circ \Rightarrow C \simeq 97,19^\circ$$

$$\begin{aligned}c &= \frac{b}{\operatorname{sen} B} \operatorname{sen} C \\ &= \frac{10}{\operatorname{sen} 47^\circ} \operatorname{sen} 97,19^\circ \Rightarrow c \simeq 13,56\end{aligned}$$

MaTEX

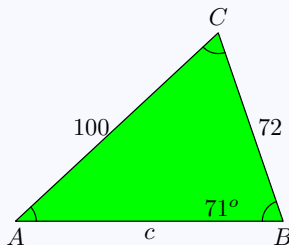
TRIÁNGULOS



Ejercicio 7(b)

De la regla de los senos

$$\frac{72}{\operatorname{sen} A} = \frac{100}{\operatorname{sen} 71^\circ} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$



$$\begin{aligned}\operatorname{sen} A &= \frac{a}{b} \operatorname{sen} B \\ &= \frac{72}{100} \operatorname{sen} 71^\circ = 0,68 \implies A \simeq 42,9^\circ\end{aligned}$$

$$A + B + C = 180^\circ \implies C \simeq 66,10^\circ$$

$$\begin{aligned}c &= \frac{b}{\operatorname{sen} B} \operatorname{sen} C \\ &= \frac{100}{\operatorname{sen} 71^\circ} \operatorname{sen} 66,10^\circ \implies c \simeq 96,69\end{aligned}$$

□

MaT_EX

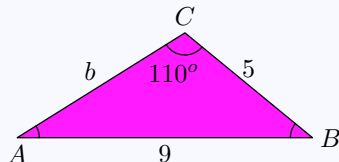
TRIÁNGULOS



Ejercicio 7(c)

De la regla de los senos

$$\frac{5}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{9}{\operatorname{sen} 110^\circ}$$



$$\begin{aligned}\operatorname{sen} A &= \frac{a}{c} \operatorname{sen} C \\ &= \frac{5}{9} \operatorname{sen} 110^\circ = 0,52 \implies A \simeq 31,5^\circ\end{aligned}$$

$$A + B + C = 180^\circ \implies B \simeq 38,5^\circ$$

$$\begin{aligned}b &= \frac{c}{\operatorname{sen} C} \operatorname{sen} B \\ &= \frac{9}{\operatorname{sen} 110^\circ} \operatorname{sen} 38,5^\circ \implies b \simeq 5,97\end{aligned}$$



MaTeX

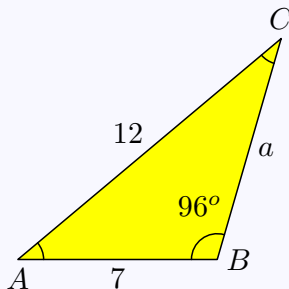
TRIÁNGULOS



Ejercicio 7(d)

De la regla de los senos

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{12}{\operatorname{sen} 96^\circ} = \frac{7}{\operatorname{sen} C}$$



$$\begin{aligned}\operatorname{sen} C &= \frac{c}{b} \operatorname{sen} B \\ &= \frac{7}{12} \operatorname{sen} 96^\circ = 0,52 \implies C \simeq 35,46^\circ\end{aligned}$$

$$A + B + C = 180^\circ \implies A \simeq 48,54^\circ$$

$$\begin{aligned}a &= \frac{b}{\operatorname{sen} B} \operatorname{sen} A \\ &= \frac{12}{\operatorname{sen} 96^\circ} \operatorname{sen} 48,54^\circ \implies a \simeq 9,04\end{aligned}$$

□

MaTEX

TRIÁNGULOS



Ejercicio 8(a)

Siendo $\alpha = 60^\circ$ y $\beta = 35^\circ$, el ángulo $\widehat{C} = 85^\circ$.

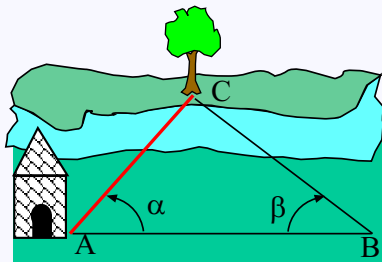
$$\frac{AC}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow$$

$$AC = \frac{AB}{\sin C} \sin \beta$$

sustituyendo se tiene

$$AC = \frac{80}{\sin 85^\circ} \sin 35^\circ$$

$$AC \approx 46,06$$



MaTeX

TRIÁNGULOS

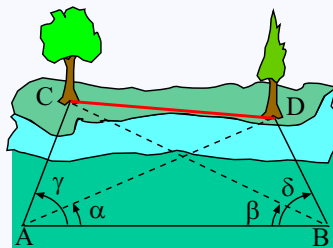


Ejercicio 8(b)

Primero calculamos AC en CAB con el teorema del seno

$$\frac{AC}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin(\pi - \gamma - \beta)} \Rightarrow$$

$$AC = \frac{AB}{\sin(\pi - \gamma - \beta)} \sin \beta$$



Ahora en el triángulo rectángulo ABD calculamos AD ,

$$\frac{AD}{\sin \delta} = \frac{AB}{\sin(\pi - \alpha - \delta)} \Rightarrow AD = \frac{AB}{\sin(\pi - \alpha - \delta)} \sin \delta$$

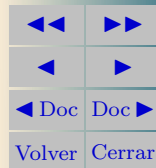
Por último con el teorema del coseno hallamos CD con el triángulo ACD

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2 AC AD \cos(\gamma - \alpha)$$



MaTEX

TRIÁNGULOS



Ejercicio 9.

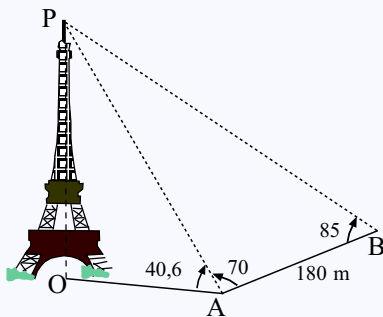
Primero calculamos AP en ABP

$$\frac{AP}{\sin 85} = \frac{180}{\sin 25} \Rightarrow$$

$$AP = \frac{180}{\sin 25} \sin 85 \approx 424,3$$

Ahora en el triángulo rectángulo AOP se tiene,

$$h = OP = AP \times \sin 40,6 \approx 276,1$$



Ejercicio 9



MaTeX

TRIÁNGULOS

◀◀	▶▶
◀	▶
◀ Doc	Doc ▶
Volver	Cerrar

Ejercicio 10.

$$a) \ a = 10 \quad b = 9 \quad c = 10,93 \quad \hat{A} = 59,3^\circ \quad \hat{B} = 50,7^\circ \quad \hat{C} = 70^\circ$$

$$b) \ a = 12 \quad b = 23,63 \quad c = 18,38 \quad \hat{A} = 30^\circ \quad \hat{B} = 10^\circ \quad \hat{C} = 50^\circ$$

$$c) \ a = 4 \quad b = 8 \quad c = 10,64 \quad \hat{A} = 18,74^\circ \quad \hat{B} = 40^\circ \quad \hat{C} = 121,25^\circ$$

$$d) \ a = 6 \quad b = 7 \quad c = 8 \quad \hat{A} = 46,56^\circ \quad \hat{B} = 57,9^\circ \quad \hat{C} = 75,5^\circ$$

$$e) \ a = 8 \quad b = 12 \quad c = 20 \implies \text{no tiene solución.}$$

$$f) \ b = 10, c = 6, \hat{C} = 45^\circ \implies \text{no tiene solución.}$$

$$g) \ a = 8,16 \quad b = 10 \quad c = 11,15 \quad \hat{A} = 45^\circ \quad \hat{B} = 60^\circ \quad \hat{C} = 75^\circ$$

$$h) \ a = 1 \quad b = 1 \quad c = \sqrt{3} \quad \hat{A} = 30^\circ \quad \hat{B} = 30^\circ \quad \hat{C} = 120^\circ$$

Ejercicio 10



MaTeX

TRIÁNGULOS



Nº1.- a) Comprueba la siguiente igualdad:

$$\frac{\cot gx + \operatorname{tg} x}{\cot gx - \operatorname{tg} x} = \sec(2x)$$

b) Resuelve la siguiente ecuación:

$$\cos^2 x - 3 \cdot \operatorname{sen}^2 x = 0$$

Nº2.- Una escalera de bomberos de 10 metros de longitud se ha fijado en una calle sobre un punto de la calzada. Si se apoya sobre una de las fachadas forma un ángulo con el suelo de 45° y si se apoya sobre la otra fachada forma un ángulo de 30° . Halla la anchura de la calle. ¿A qué altura se alcanza con dicha escalera sobre cada una de las fachadas?

Nº3.- Dados los vectores $\vec{u} = (1, -2)$ $\vec{v} = (3, 1)$ y $\vec{w} = (2, 0)$

- Calcula las coordenadas del vector $2 \cdot \vec{u} - \vec{v} + \frac{1}{3} \cdot \vec{w}$
- Expresa $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- Calcúlese el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- Hállese un vector con la misma dirección que $\vec{u}$ y de módulo $\sqrt{20}$

Nº4.- Dados los puntos de coordenadas: A(-1,-2) y B(3, 0) hállese:

- Pendiente de la recta r que pasa por A y B
- Ecuación Punto- pendiente
- Ecuación vectorial, paramétricas, continua, explícita y general.
- Representación gráfica de la recta.
- Ecuación de la recta s paralela a r por el punto C(1,1)
- Ecuación de la recta t perpendicular a r por el punto C(1,1)
- Punto de corte de las rectas s y t.
- Calcula las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{AB}$
- Distancia entre las rectas r y s

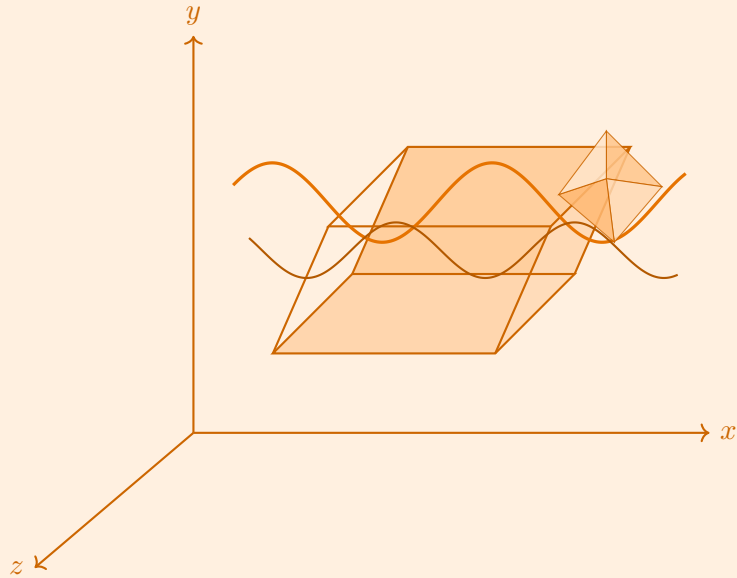
Nº5.- Dadas las rectas de ecuaciones: $r : 3x + y + 4 = 0$, $s : y - 2 = 0$ y $t : 6x - 5y - 20 = 0$, averigua si están situadas de modo que forman un triángulo. En caso afirmativo, halla las coordenadas de sus vértices. Finalmente, efectúa una representación gráfica que muestre la situación de las tres rectas.

(TODOS LOS PROBLEMAS VALEN 2 PUNTOS)

SUERTE JÓVENES

Resolución rigurosa del examen de Matemáticas

1º Bachillerato – 12 de febrero de 2020



“La belleza de las matemáticas aparece cuando ideas profundas se conectan entre sí con precisión y creatividad.”

— *Maryam Mirzakhani*

Datos del examen analizado

- **Archivo fuente analizado:** uploads/005.pdf
- **Nivel:** 1º de Bachillerato.
- **Fecha en el enunciado:** 12/2/2020.
- **Bloques temáticos detectados:** trigonometría, resolución de ecuaciones trigonométricas, problemas de aplicación con triángulos rectángulos, cálculo vectorial en $\mathbb{R}^2$, ecuaciones de rectas y posiciones relativas en geometría analítica.
- **Estructura:** 5 ejercicios, cada uno valorado en 2 puntos.

Índice

Datos del examen analizado	1
Índice de ejercicios y subíndices (hipervinculado)	2
Ejercicio 1: Identidades y ecuaciones trigonométricas	3
Ejercicio 2: Escalera de bomberos entre dos fachadas	4
Ejercicio 3: Operaciones con vectores en $\mathbb{R}^2$	5
Ejercicio 4: Estudio completo de rectas en el plano	7
Ejercicio 5: Formación de triángulo con tres rectas	10
Verificación final del documento	11

Índice de ejercicios y subíndices (hipervinculado)

Ejercicio 1: Identidades y ecuaciones trigonométricas

- a) Comprobación de identidad trigonométrica
- b) Resolución de ecuación trigonométrica

Ejercicio 2: Problema de la escalera de bomberos

- a) Anchura de la calle
- b) Altura alcanzada en cada fachada

Ejercicio 3: Operaciones con vectores en el plano

- a) Cálculo de $2\vec{u} - \vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w}$
- b) Expresión de $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$
- c) Ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$
- d) Vector paralelo a $\vec{u}$ y módulo $\sqrt{20}$

Ejercicio 4: Rectas determinadas por puntos y estudio completo

- a) Pendiente de la recta r por A y B
- b) Ecuación punto-pendiente
- c) Ecuaciones: vectorial, paramétrica, continua, explícita y general
- d) Representación gráfica de r
- e) Recta $s \parallel r$ por $C(1, 1)$
- f) Recta $t \perp r$ por $C(1, 1)$
- g) Punto de corte $s \cap t$
- h) Punto medio del segmento AB
- i) Distancia entre r y s

Ejercicio 5: Posición relativa de tres rectas y vértices de triángulo

- a) Comprobación de si forman triángulo
- b) Cálculo de los vértices
- c) Representación gráfica de la situación

Comprobación del índice y de los hipervínculos:

- Cada entrada del índice anterior apunta a un ancla única creada con `\hypertarget{...}`.
- Cada ejercicio y subapartado contiene su identificador específico (por ejemplo, ej4g para el apartado 4(g)).
- El documento compila con `hyperref` sin errores de referencias no definidas.

Ejercicio 1: Identidades y ecuaciones trigonométricas

a) Comprobar la igualdad

$$\frac{\cot x + \tan x}{\cot x - \tan x} = \sec(2x).$$

Partimos del primer miembro y lo expresamos con seno y coseno:

$$\frac{\cot x + \tan x}{\cot x - \tan x} = \frac{\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x}}{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x}}.$$

Como $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ y $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$:

$$\frac{\cot x + \tan x}{\cot x - \tan x} = \frac{1}{\frac{\cos(2x)}{\sin x \cos x}} = \frac{1}{\cos(2x)} = \sec(2x).$$

Conclusión: la igualdad queda demostrada para los valores de x en los que las expresiones están definidas.

b) Resolver la ecuación

$$\cos(2x) - 3 \sin(2x) = 0.$$

Reordenamos:

$$\cos(2x) = 3 \sin(2x).$$

Si $\cos(2x) \neq 0$, dividimos entre $\cos(2x)$:

$$1 = 3 \tan(2x) \implies \tan(2x) = \frac{1}{3}.$$

Solución general de una tangente:

$$2x = \arctan\left(\frac{1}{3}\right) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto:

$$x = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

No aparecen soluciones adicionales con $\cos(2x) = 0$ porque entonces la ecuación original quedaría $-3 \sin(2x) = 0$, incompatible con $\sin(2x) = \pm 1$.

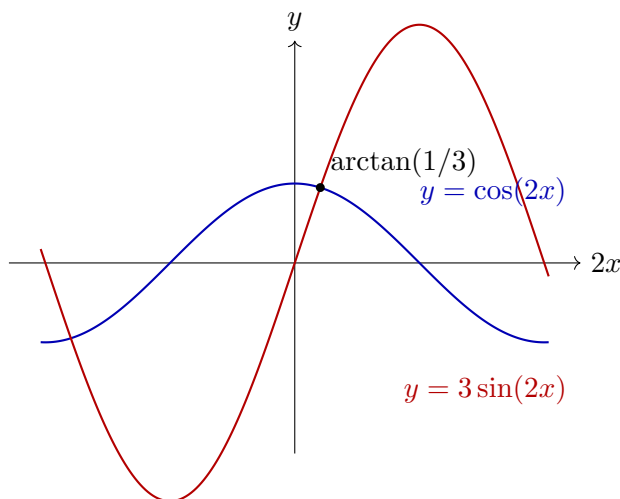


Figura representativa: intersección de $\cos(2x)$ y $3 \sin(2x)$.

Ejercicio 2: Escalera de bomberos entre dos fachadas

Datos: longitud de la escalera $L = 10$ m. Desde un punto fijo del suelo, apoyada en una fachada forma 45° y en la opuesta forma 30° .

a) Anchura de la calle

Si el punto de apoyo en el suelo divide la calle en dos tramos horizontales d_1 y d_2 :

$$d_1 = 10 \cos 45^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}, \quad d_2 = 10 \cos 30^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}.$$

Por tanto, la anchura total de la calle es

$$W = d_1 + d_2 = 5(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \text{ m.}$$

Valor aproximado:

$$W \approx 5(1.4142 + 1.7321) = 15.7315 \text{ m.}$$

b) Altura alcanzada en cada fachada

Altura en la fachada con ángulo 45° :

$$h_1 = 10 \sin 45^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \text{ m} \approx 7.071 \text{ m.}$$

Altura en la fachada con ángulo 30° :

$$h_2 = 10 \sin 30^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \text{ m.}$$

Resultado final:

$$\text{Anchura} = 5(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \text{ m,} \quad \text{alturas} = 5\sqrt{2} \text{ m y } 5 \text{ m.}$$

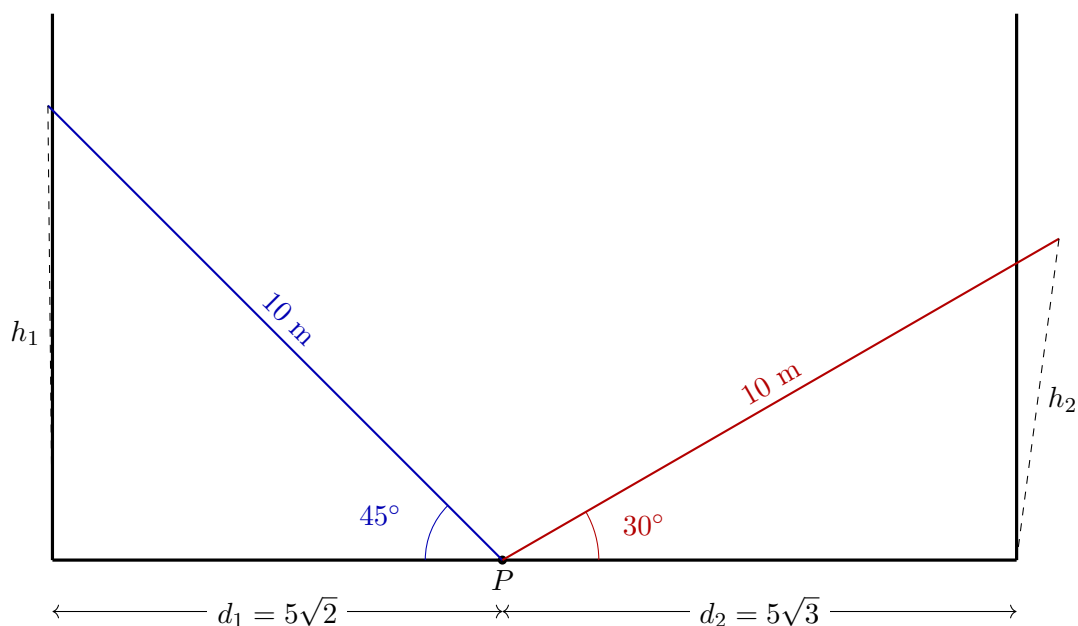


Figura representativa del problema geométrico de la escalera.

Ejercicio 3: Operaciones con vectores en $\mathbb{R}^2$

Datos:

$$\vec{u} = (1, -2), \quad \vec{v} = (3, 1), \quad \vec{w} = (2, 0).$$

a) Calcular $2\vec{u} - \vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w}$

$$2\vec{u} = (2, -4), \quad -\vec{v} = (-3, -1), \quad \frac{1}{3}\vec{w} = \left(\frac{2}{3}, 0\right).$$

Sumamos componente a componente:

$$2\vec{u} - \vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w} = (2, -4) + (-3, -1) + \left(\frac{2}{3}, 0\right) = \left(-\frac{1}{3}, -5\right).$$

$$\boxed{2\vec{u} - \vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w} = \left(-\frac{1}{3}, -5\right)}.$$

b) Expresar $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

Buscamos escalares α, β tales que

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{w}.$$

Sistema:

$$\alpha(1, -2) + \beta(3, 1) = (2, 0) \implies \begin{cases} \alpha + 3\beta = 2, \\ -2\alpha + \beta = 0. \end{cases}$$

De la segunda: $\beta = 2\alpha$. Sustituyendo en la primera:

$$\alpha + 3(2\alpha) = 2 \Rightarrow 7\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{7}, \quad \beta = \frac{4}{7}.$$

$$\boxed{\vec{w} = \frac{2}{7}\vec{u} + \frac{4}{7}\vec{v}}.$$

c) Ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$

Producto escalar:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 = 1.$$

Módulos:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}.$$

Fórmula del ángulo θ :

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{5} \sqrt{10}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

$$\boxed{\theta = \arccos\left(\frac{1}{5\sqrt{2}}\right) \approx 81.87^\circ}.$$

d) Vector con la misma dirección que $\vec{u}$ y módulo $\sqrt{20}$

Vector unitario en la dirección de $\vec{u}$:

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{(1, -2)}{\sqrt{5}}.$$

Escalamos al módulo pedido $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$:

$$\vec{z} = (2\sqrt{5})\hat{u} = (2\sqrt{5})\frac{(1, -2)}{\sqrt{5}} = 2(1, -2) = (2, -4).$$

$$\boxed{\vec{z} = (2, -4)}.$$

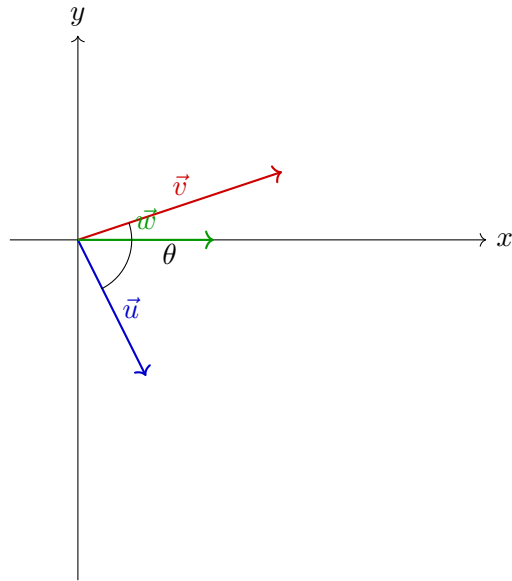


Figura representativa de los vectores y el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Ejercicio 4: Estudio completo de rectas en el plano

Datos:

$$A(-1, -2), \quad B(3, 0), \quad C(1, 1).$$

a) Pendiente de la recta r que pasa por A y B

$$m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - (-2)}{3 - (-1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{m_r = \frac{1}{2}}.$$

b) Ecuación punto-pendiente de r

Con el punto $A(-1, -2)$:

$$y - (-2) = \frac{1}{2}(x - (-1)) \implies \boxed{y + 2 = \frac{1}{2}(x + 1)}.$$

c) Formas vectorial, paramétrica, continua, explícita y general de r

Un vector director de r es

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3 - (-1), 0 - (-2)) = (4, 2) \sim (2, 1).$$

Vectorial

$$\boxed{(x, y) = (-1, -2) + \lambda(2, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Paramétricas

$$\boxed{\begin{cases} x = -1 + 2\lambda, \\ y = -2 + \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Continua

$$\boxed{\frac{x + 1}{2} = \frac{y + 2}{1}}.$$

Explícita (usando pendiente y punto):

$$y + 2 = \frac{1}{2}(x + 1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}}.$$

General

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \implies 2y = x - 3 \implies x - 2y - 3 = 0.$$

$$\boxed{x - 2y - 3 = 0}.$$

d) Representación gráfica de la recta r

La recta r pasa por $A(-1, -2)$ y $B(3, 0)$, tiene pendiente positiva $1/2$ e interseca al eje y en $-3/2$.

e) Ecuación de la recta $s \parallel r$ por $C(1, 1)$

Al ser paralela, tiene la misma pendiente $1/2$:

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Forma general:

$$\boxed{s : x - 2y + 1 = 0.}$$

f) Ecuación de la recta $t \perp r$ por $C(1, 1)$

Si $m_r = 1/2$, entonces $m_t = -2$.

$$y - 1 = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 3.$$

Forma general:

$$\boxed{t : 2x + y - 3 = 0.}$$

g) Punto de corte de las rectas s y t

Sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \\ y = -2x + 3. \end{cases}$$

Igualando:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = -2x + 3 \Rightarrow \frac{5}{2}x = \frac{5}{2} \Rightarrow x = 1, \quad y = 1.$$

$$\boxed{s \cap t = (1, 1) = C.}$$

h) Punto medio del segmento $\overline{AB}$

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left(\frac{-1 + 3}{2}, \frac{-2 + 0}{2} \right) = (1, -1).$$

$$\boxed{M = (1, -1).}$$

i) Distancia entre las rectas r y s

Como $r \parallel s$, la distancia es constante. Escribimos ambas con los mismos coeficientes en forma general:

$$r : x - 2y - 3 = 0, \quad s : x - 2y + 1 = 0.$$

Para rectas paralelas $ax + by + c_1 = 0$ y $ax + by + c_2 = 0$,

$$d = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Aquí $a = 1$, $b = -2$, $c_1 = -3$, $c_2 = 1$:

$$d = \frac{|1 - (-3)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

$$\boxed{d(r, s) = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

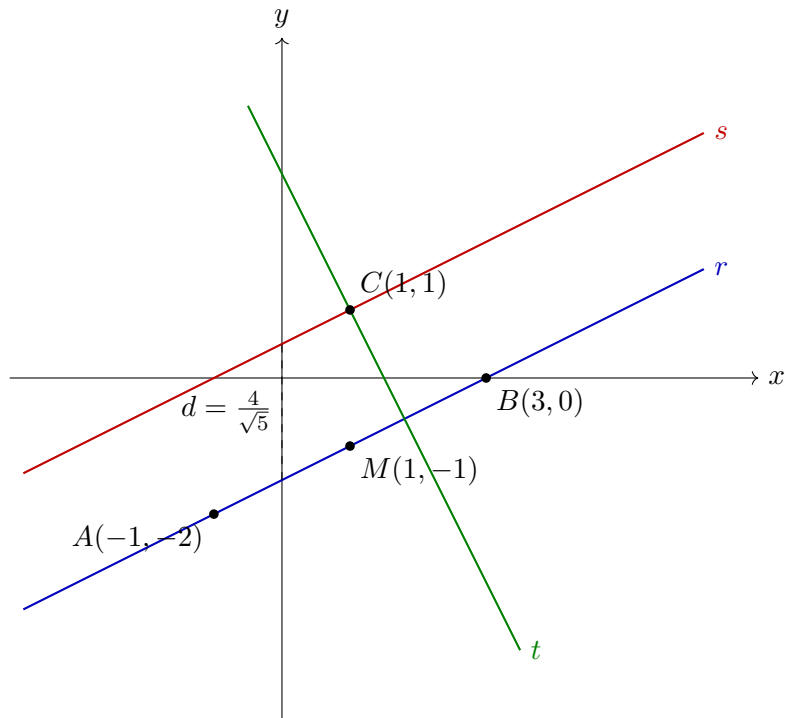


Figura representativa del estudio completo de rectas del ejercicio 4.

Ejercicio 5: ¿Forman triángulo las rectas dadas?

Rectas:

$$r : 3x + y + 4 = 0, \quad s : y - 2 = 0, \quad t : 6x - 5y - 20 = 0.$$

En forma explícita:

$$r : y = -3x - 4, \quad s : y = 2, \quad t : y = \frac{6}{5}x - 4.$$

a) Comprobar si forman triángulo

Tres rectas forman triángulo si se cortan dos a dos en tres puntos distintos y no son concurrentes las tres en un único punto, además de no haber paralelismos que impidan cerrar la figura.

Pendientes:

$$m_r = -3, \quad m_s = 0, \quad m_t = \frac{6}{5}.$$

Son tres pendientes distintas, luego ninguna pareja es paralela. Por tanto, hay tres intersecciones binarias distintas salvo concurrencia triple, que comprobamos calculando vértices.

b) Cálculo de vértices

Intersección $r \cap s$:

$$s : y = 2 \Rightarrow 3x + 2 + 4 = 0 \Rightarrow 3x + 6 = 0 \Rightarrow x = -2.$$

$$P_{rs} = (-2, 2).$$

Intersección $s \cap t$:

$$y = 2 \Rightarrow 6x - 5(2) - 20 = 0 \Rightarrow 6x - 30 = 0 \Rightarrow x = 5.$$

$$P_{st} = (5, 2).$$

Intersección $r \cap t$:

$$\begin{cases} 3x + y + 4 = 0, \\ 6x - 5y - 20 = 0. \end{cases}$$

De la primera: $y = -3x - 4$. Sustituyendo en la segunda:

$$6x - 5(-3x - 4) - 20 = 0 \Rightarrow 6x + 15x + 20 - 20 = 0 \Rightarrow 21x = 0 \Rightarrow x = 0,$$

$$y = -3(0) - 4 = -4.$$

$$P_{rt} = (0, -4).$$

Los tres puntos son distintos, así que las rectas **sí forman un triángulo**.

Vértices del triángulo: $(-2, 2)$, $(5, 2)$, $(0, -4)$.

c) Representación gráfica

Se representa a continuación la configuración y el triángulo determinado por las intersecciones:

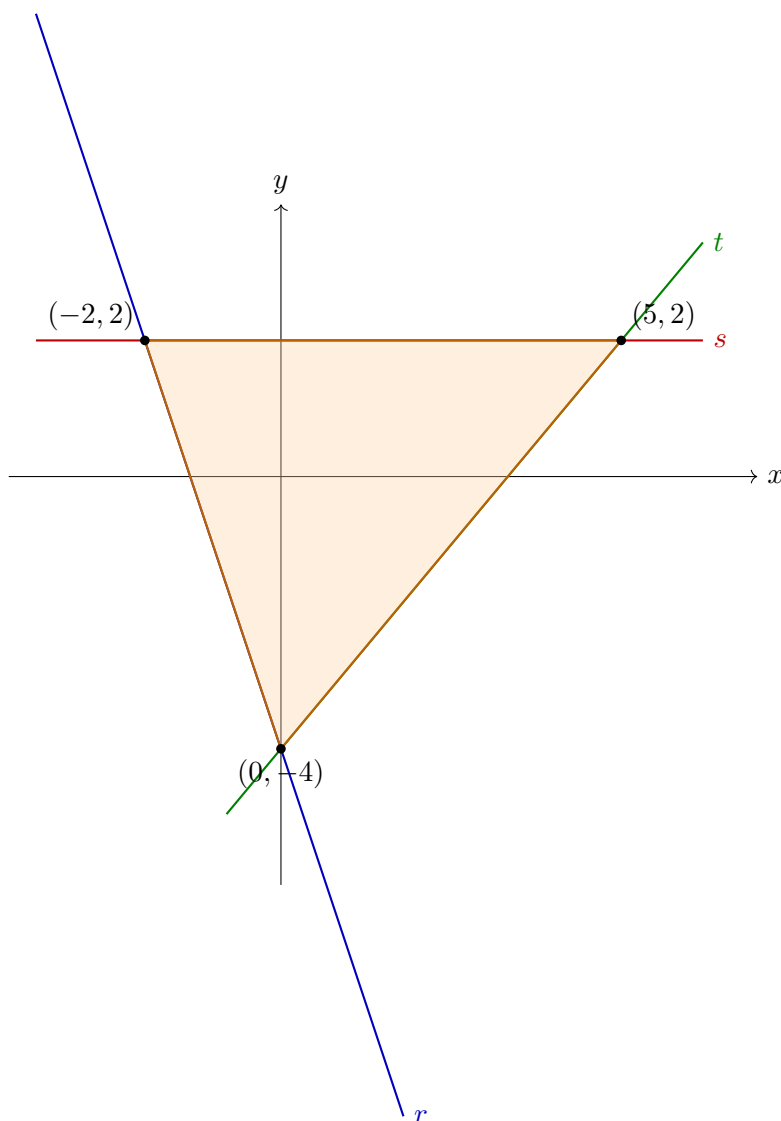


Figura representativa del triángulo formado por las tres rectas.

Verificación final del documento

- Se ha analizado el contenido del examen original en `uploads/005.pdf`.
- Se ha resuelto **cada ejercicio** y **cada subapartado** con desarrollo matemático completo.
- Se ha generado una portada con tema matemático en color naranja, elementos gráficos 3D y cita de Maryam Mirzakhani.
- Se ha creado un índice general y un índice detallado de ejercicios con hipervínculos.
- Se ha añadido una ilustración representativa en cada ejercicio (1 a 5).
- El documento está preparado para compilar en PDF con `latexmk -pdf main.tex`.

TEMA 6 - COMPLEJOSEJERCICIO 1 : Calcula en forma binómica y representa gráficamente la solución:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{(3-i)^3}{1-2i} & \text{b) } \frac{13i^4(2-i)}{3-2i} & \text{c) } \frac{-10i^7(2-3i)}{4+2i} \\ \text{d) } \frac{25i^{21}(1-7i)}{1+7i} & \text{e) } \frac{(3-i)^2}{1+i} & \text{f) } \frac{5i^{10}(1-i)}{3-i} \end{array}$$

EJERCICIO 2 :

- a) Representa gráficamente el número $z = -1 - i$ y halla su opuesto y su conjugado.
 b) Expresa en forma polar $z = -1 - i$.

EJERCICIO 3 : Considera el número complejo $z = 2 - 2\sqrt{3}i$.

- a) Representalo gráficamente y escribe su opuesto y su conjugado.
 b) Expresa z en forma polar.

EJERCICIO 4 :

- a) Expresa en forma binómica el número complejo $z = 6_{210^\circ}$ y representalo gráficamente.
 b) Escribe el opuesto y el conjugado de z .

EJERCICIO 5 : Calcula el valor de z^6 , sabiendo que $z = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$.EJERCICIO 6 : Calcula la cuarta potencia del número complejo $z = -2 + 2\sqrt{3}i$.EJERCICIO 7 : Halla las raíces cuartas de 16 y represéntalas gráficamente. ¿Qué figura obtienes si unes los afijos de las raíces obtenidas?EJERCICIO 8 :

Representa gráficamente los resultados de hallar $\sqrt[3]{1-i}$. ¿Qué figura obtenemos al unir los afijos de las raíces obtenidas?

EJERCICIO 9 : Halla las raíces sextas de -1 e interpreta gráficamente los resultados obtenidos.EJERCICIO 10 : Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } 3z^4 + 27z^2 = 0 \quad \text{b) } ix^3 + 8 = 0 \quad \text{c) } 2z^6 + 2 = 0$$

EJERCICIO 11 :Representa $z = 2 - 2i$, su opuesto y su conjugado, y exprésalos en forma polar.EJERCICIO 12 : Calcula z^8 , sabiendo que $z = 1 + \sqrt{3}i$.EJERCICIO 13 : Halla los números complejos, z , que cumplen la siguiente igualdad:
 $z^3 + 64 = 0$

EJERCICIO 14 : Calcula: $\sqrt[4]{-81}$

EJERCICIO 15 : Halla un número complejo, z , sabiendo que una de sus raíces quintas es $2 - 2i$.

EJERCICIO 16

- a) Dado el número complejo $z = 1 - \sqrt{3}i$, escribe su opuesto y su conjugado, y representa los tres números.
 b) Escribe z , $-z$ y $\bar{z}$ en forma polar.

EJERCICIO 17 : Escribe el opuesto y el conjugado de $z = 2\sqrt{3} - 2i$.
 Escribe los tres números en forma polar y represéntalos.

EJERCICIO 18

- a) Escribe en forma binómica $z = 2_{30^\circ}$.
 b) Halla su opuesto y su conjugado en forma binómica y polar.
 c) Representa z , $-z$ y $\bar{z}$.

EJERCICIO 19

- a) Expresa en forma polar $z = \sqrt{3} - i$.
 b) Escribe en forma binómica y en forma polar el opuesto y el conjugado de z .
 c) Representa z , $-z$ y $\bar{z}$.

EJERCICIO 20 : Calcula:

- a) $\frac{(2-3i)i^{25}}{(-1+2i)}$ b) $\sqrt[4]{-81}$ c) $\frac{(1-3i)}{(3-4i)} + i^{37}$ d) $\sqrt[3]{2-2i}$ e) $\frac{i^{30}(2+3i)}{(4-i)}$
 f) $\sqrt[4]{-1}$ g) $\sqrt[3]{27i}$ h) $\frac{(2+2i)}{-1+3i} - i^{28}$ i) $\frac{(7-i)i^{43}}{-2+i}$ j) $\sqrt[3]{4-4\sqrt{3}i}$

EJERCICIO 21 : Calcular x para que $\frac{x+9i}{3-i}$ sea un número imaginario puro.

EJERCICIO 22 : El número complejo de módulo 12 y argumento 150° es el producto de dos números complejos, uno de los cuales es el número 4. Di cuál es el otro y exprésalo en forma binómica.

EJERCICIO 23 : El producto de un número complejo de argumento 60° por otro de módulo 5 nos da como resultado el número complejo $-6 + 6\sqrt{3}i$. Halla el módulo del primero y el argumento del segundo.

EJERCICIO 24 : Halla dos números complejos conjugados cuyo cociente sea un imaginario puro y su diferencia sea $4i$.

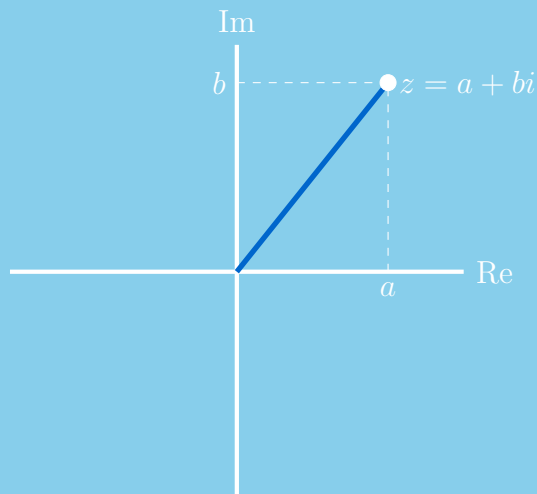
EJERCICIO 25 : Un cuadrado con centro en el origen de coordenadas tiene uno de sus vértices en el punto $A(3,4)$. Calcular los demás vértices.

EJERCICIO 26 : Calcular dos números complejos cuya suma es un número real, su diferencia tiene por parte real -1 y su producto vale $15 + 3i$

NÚMEROS COMPLEJOS

Matemáticas I - 1º Bachillerato

Tema 6 - Resolución Completa



“Mathematics is the art of giving the same name to different things.”

— Terence Tao

22 de marzo de 2026

Índice

1. Ejercicio 1: Operaciones en forma binómica	2
1.1. Apartado a) $\frac{(3-i)^3}{1-2i}$	2
1.2. Apartado b) $\frac{13i^4(2-i)}{3-2i}$	2
1.3. Apartado c) $\frac{-10i^7(2-3i)}{4+2i}$	3
1.4. Apartado d) $\frac{25i^{21}(1-7i)}{1+7i}$	4
1.5. Apartado e) $\frac{(3-i)^2}{1+i}$	5
1.6. Apartado f) $\frac{5i^{10}(1-i)}{3-i}$	6
2. Ejercicio 2: Representación, opuesto, conjugado y forma polar	7
2.1. Apartado a) Representación gráfica, opuesto y conjugado	7
2.2. Apartado b) Forma polar de $z = -1 - i$	7
3. Ejercicio 3: Número complejo $z = 2 - 2\sqrt{3}i$	8
3.1. Apartado a) Representación, opuesto y conjugado	8
3.2. Apartado b) Forma polar	8
4. Ejercicio 4: Forma binómica de $z = 6_{210}$	9
4.1. Apartado a) Forma binómica y representación	9
4.2. Apartado b) Opuesto y conjugado	9
5. Ejercicio 5: Calcular z^6 sabiendo que $z = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$	10
6. Ejercicio 6: Cuarta potencia de $z = -2 + 2\sqrt{3}i$	12
7. Ejercicio 7: Raíces cuartas de 16	14
8. Ejercicio 8: Raíces cúbicas de $1 - i$	15
9. Ejercicio 9: Raíces sextas de -1	16
10. Ejercicio 10: Ecuaciones con números complejos	17
10.1. Apartado a) $3z^4 + 27z^2 = 0$	17
10.2. Apartado b) $ix^3 + 8 = 0$	17
10.3. Apartado c) $2z^6 + 2 = 0$	18
11. Ejercicio 11: Representación y forma polar de $z = 2 - 2i$	19
12. Ejercicio 12: Calcular z^8 siendo $z = 1 + \sqrt{3}i$	20
13. Ejercicio 13: Resolver $z^3 + 64 = 0$	21
14. Ejercicio 14: Calcular $\sqrt[4]{-81}$	22
15. Ejercicio 15: Número cuya raíz quinta es $2 - 2i$	23

16.Ejercicio 16:	$z = 1 - \sqrt{3}i$	24
16.1. Apartado a)	Opuesto, conjugado y representación	24
16.2. Apartado b)	Forma polar	24
17.Ejercicio 17:	$z = 2\sqrt{3} - 2i$	25
18.Ejercicio 18:	$z = 2_{30}$	26
18.1. Apartado a)	Forma binómica	26
18.2. Apartado b)	Opuesto y conjugado	26
18.3. Apartado c)	Representación	26
19.Ejercicio 19:	$z = \sqrt{3} - i$	27
19.1. Apartado a)	Forma polar	27
19.2. Apartado b)	Opuesto y conjugado	27
19.3. Apartado c)	Representación	27
20.Ejercicio 20:	Cálculos diversos	28
20.1. a)	$\frac{(2-3i)^{25}}{(-1+2i)}$	28
20.2. b)	$\sqrt[4]{-81}$	28
20.3. c)	$\frac{(1-3i)}{(3-4i)} + i^{37}$	28
20.4. d)	$\sqrt[3]{2-2i}$	28
20.5. e)	$\frac{i^{30}(2+3i)}{(4-i)}$	28
20.6. f)	$\sqrt[4]{-1}$	28
20.7. g)	$\sqrt[3]{27i}$	28
20.8. h)	$\frac{(2+2i)}{(-1+3i)} \cdot i^{28}$	29
20.9. i)	$\frac{(7-i)^{43}}{(-2+i)}$	29
20.10j)	$\sqrt[3]{4-4\sqrt{3}i}$	29
21.Ejercicio 21:	Número imaginario puro	30
22.Ejercicio 22:	Producto de complejos	31
23.Ejercicio 23:	Producto con condiciones	32
24.Ejercicio 24:	Conjugados con condiciones	33
25.Ejercicio 25:	Vértices de un cuadrado	34
26.Ejercicio 26:	Sistema de ecuaciones con complejos	35

1. Ejercicio 1: Operaciones en forma binómica

Calcular en forma binómica y representar gráficamente las siguientes operaciones:

1.1. Apartado a) $\frac{(3-i)^3}{1-2i}$

Paso 1: Calcular $(3-i)^3$

Utilizamos el binomio de Newton:

$$(3-i)^3 = 3^3 - 3 \cdot 3^2 \cdot i + 3 \cdot 3 \cdot i^2 - i^3 \quad (1)$$

$$= 27 - 27i + 9i^2 - i^3 \quad (2)$$

Como $i^2 = -1$ y $i^3 = -i$:

$$(3-i)^3 = 27 - 27i + 9(-1) - (-i) \quad (3)$$

$$= 27 - 27i - 9 + i \quad (4)$$

$$= 18 - 26i \quad (5)$$

Paso 2: Dividir por $(1-2i)$

Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado de $(1-2i)$, que es $(1+2i)$:

$$\frac{18-26i}{1-2i} = \frac{(18-26i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} \quad (6)$$

$$= \frac{18+36i-26i-52i^2}{1-4i^2} \quad (7)$$

$$= \frac{18+10i-52(-1)}{1-4(-1)} \quad (8)$$

$$= \frac{18+10i+52}{1+4} \quad (9)$$

$$= \frac{70+10i}{5} \quad (10)$$

$$= 14+2i \quad (11)$$

Solución: $z = 14 + 2i$

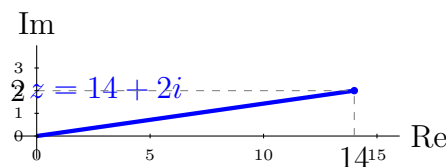


Figura 1: Representación gráfica de $z = 14 + 2i$

1.2. Apartado b) $\frac{13i^4(2-i)}{3-2i}$

Paso 1: Simplificar i^4

Sabemos que $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

Paso 2: Calcular el numerador

$$13i^4(2-i) = 13 \cdot 1 \cdot (2-i) \quad (12)$$

$$= 13(2-i) \quad (13)$$

$$= 26 - 13i \quad (14)$$

Paso 3: Dividir por $(3-2i)$

Multiplicamos por el conjugado $(3+2i)$:

$$\frac{26-13i}{3-2i} = \frac{(26-13i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} \quad (15)$$

$$= \frac{78 + 52i - 39i - 26i^2}{9 - 4i^2} \quad (16)$$

$$= \frac{78 + 13i + 26}{9 + 4} \quad (17)$$

$$= \frac{104 + 13i}{13} \quad (18)$$

$$= 8 + i \quad (19)$$

Solución: $z = 8 + i$

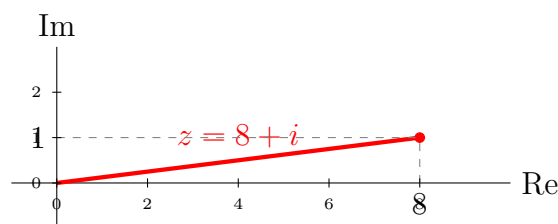


Figura 2: Representación gráfica de $z = 8 + i$

1.3. Apartado c) $\frac{-10i^7(2-3i)}{4+2i}$

Paso 1: Simplificar i^7

$$i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$$

Paso 2: Calcular el numerador

$$-10i^7(2-3i) = -10(-i)(2-3i) \quad (20)$$

$$= 10i(2-3i) \quad (21)$$

$$= 20i - 30i^2 \quad (22)$$

$$= 20i - 30(-1) \quad (23)$$

$$= 30 + 20i \quad (24)$$

Paso 3: Dividir por $(4+2i)$

Multiplicamos por el conjugado $(4 - 2i)$:

$$\frac{30 + 20i}{4 + 2i} = \frac{(30 + 20i)(4 - 2i)}{(4 + 2i)(4 - 2i)} \quad (25)$$

$$= \frac{120 - 60i + 80i - 40i^2}{16 - 4i^2} \quad (26)$$

$$= \frac{120 + 20i + 40}{16 + 4} \quad (27)$$

$$= \frac{160 + 20i}{20} \quad (28)$$

$$= 8 + i \quad (29)$$

Solución: $z = 8 + i$

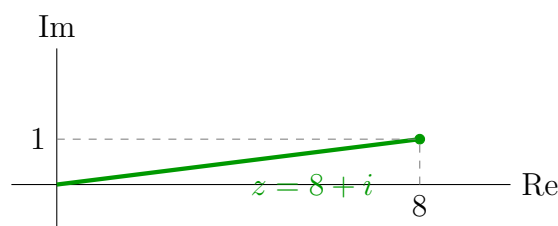


Figura 3: Representación gráfica de $z = 8 + i$

1.4. Apartado d) $\frac{25i^{21}(1-7i)}{1+7i}$

Paso 1: Simplificar i^{21}

$$i^{21} = i^{20} \cdot i = (i^4)^5 \cdot i = 1^5 \cdot i = i$$

Paso 2: Calcular el numerador

$$25i^{21}(1 - 7i) = 25i(1 - 7i) \quad (30)$$

$$= 25i - 175i^2 \quad (31)$$

$$= 25i - 175(-1) \quad (32)$$

$$= 175 + 25i \quad (33)$$

Paso 3: Dividir por $(1 + 7i)$

Multiplicamos por el conjugado $(1 - 7i)$:

$$\frac{175 + 25i}{1 + 7i} = \frac{(175 + 25i)(1 - 7i)}{(1 + 7i)(1 - 7i)} \quad (34)$$

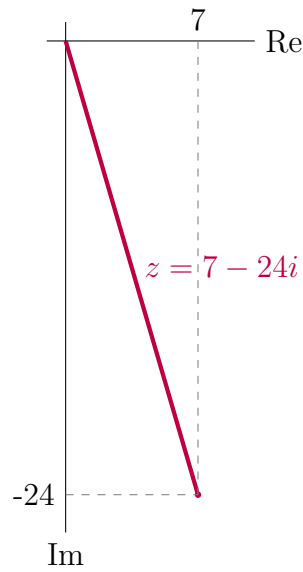
$$= \frac{175 - 1225i + 25i - 175i^2}{1 - 49i^2} \quad (35)$$

$$= \frac{175 - 1200i + 175}{1 + 49} \quad (36)$$

$$= \frac{350 - 1200i}{50} \quad (37)$$

$$= 7 - 24i \quad (38)$$

Solución: $z = 7 - 24i$

Figura 4: Representación gráfica de $z = 7 - 24i$

1.5. Apartado e) $\frac{(3-i)^2}{1+i}$

Paso 1: Calcular $(3 - i)^2$

$$(3 - i)^2 = 9 - 6i + i^2 \quad (39)$$

$$= 9 - 6i - 1 \quad (40)$$

$$= 8 - 6i \quad (41)$$

Paso 2: Dividir por $(1 + i)$

Multiplicamos por el conjugado $(1 - i)$:

$$\frac{8 - 6i}{1 + i} = \frac{(8 - 6i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} \quad (42)$$

$$= \frac{8 - 8i - 6i + 6i^2}{1 - i^2} \quad (43)$$

$$= \frac{8 - 14i - 6}{1 + 1} \quad (44)$$

$$= \frac{2 - 14i}{2} \quad (45)$$

$$= 1 - 7i \quad (46)$$

Solución: $\boxed{z = 1 - 7i}$

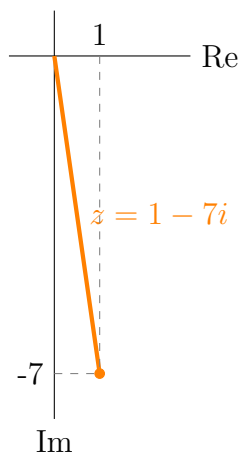


Figura 5: Representación gráfica de $z = 1 - 7i$

1.6. Apartado f) $\frac{5i^{10}(1-i)}{3-i}$

Paso 1: Simplificar i^{10}

$$i^{10} = (i^4)^2 \cdot i^2 = 1^2 \cdot (-1) = -1$$

Paso 2: Calcular el numerador

$$5i^{10}(1-i) = 5(-1)(1-i) \quad (47)$$

$$= -5(1-i) \quad (48)$$

$$= -5 + 5i \quad (49)$$

Paso 3: Dividir por $(3-i)$

Multiplicamos por el conjugado $(3+i)$:

$$\frac{-5 + 5i}{3-i} = \frac{(-5 + 5i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} \quad (50)$$

$$= \frac{-15 - 5i + 15i + 5i^2}{9 - i^2} \quad (51)$$

$$= \frac{-15 + 10i - 5}{9 + 1} \quad (52)$$

$$= \frac{-20 + 10i}{10} \quad (53)$$

$$= -2 + i \quad (54)$$

Solución: $z = -2 + i$

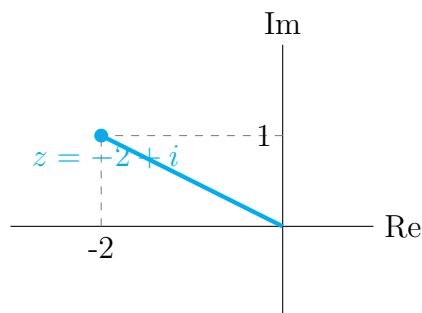


Figura 6: Representación gráfica de $z = -2 + i$

2. Ejercicio 2: Representación, opuesto, conjugado y forma polar

Dado el número complejo $z = -1 - i$:

2.1. Apartado a) Representación gráfica, opuesto y conjugado

Opuesto: $-z = -(-1 - i) = 1 + i$

Conjugado: $\bar{z} = -1 + i$

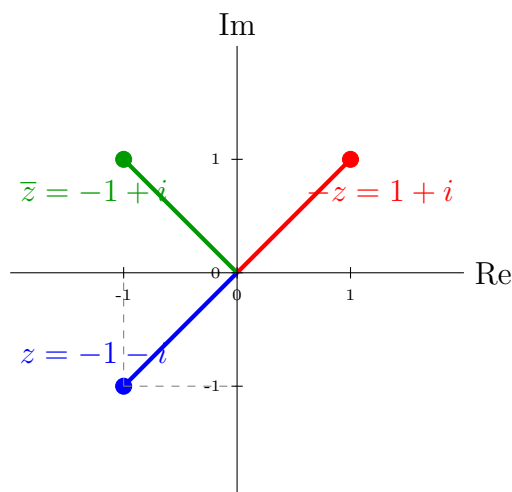


Figura 7: Representación de z , su opuesto $-z$ y su conjugado $\bar{z}$

2.2. Apartado b) Forma polar de $z = -1 - i$

Módulo:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \quad (55)$$

Argumento:

El punto $(-1, -1)$ está en el tercer cuadrante.

$$\tan(\alpha) = \frac{-1}{-1} = 1 \quad (56)$$

$$\alpha = 45 \quad (57)$$

Como está en el tercer cuadrante:

$$\theta = 180 + 45 = 225 = \frac{5\pi}{4} \text{ rad} \quad (58)$$

Solución:
$$z = \sqrt{2} \frac{5\pi}{4} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

O en grados:
$$z = \sqrt{2}_{225}$$

3. Ejercicio 3: Número complejo $z = 2 - 2\sqrt{3}i$

3.1. Apartado a) Representación, opuesto y conjugado

Opuesto: $-z = -(2 - 2\sqrt{3}i) = -2 + 2\sqrt{3}i$

Conjugado: $\bar{z} = 2 + 2\sqrt{3}i$

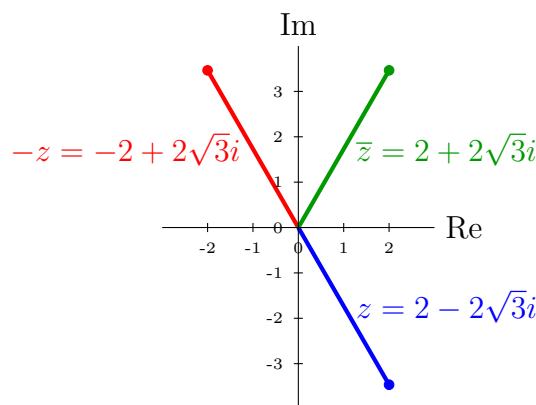


Figura 8: Representación de $z = 2 - 2\sqrt{3}i$, su opuesto y conjugado

3.2. Apartado b) Forma polar

Módulo:

$$|z| = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} \quad (59)$$

$$= \sqrt{4 + 4 \cdot 3} \quad (60)$$

$$= \sqrt{4 + 12} \quad (61)$$

$$= \sqrt{16} \quad (62)$$

$$= 4 \quad (63)$$

Argumento:

El punto $(2, -2\sqrt{3})$ está en el cuarto cuadrante.

$$\tan(\alpha) = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \quad (64)$$

$$\alpha = 60 \quad (65)$$

Como está en el cuarto cuadrante:

$$\theta = 360 - 60 = 300 = \frac{5\pi}{3} \text{ rad} \quad (66)$$

Solución: $z = 4_{\frac{5\pi}{3}} = 4\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)$

O en grados: $z = 4_{300}$

4. Ejercicio 4: Forma binómica de $z = 6_{210}$

4.1. Apartado a) Forma binómica y representación

Conversión a forma binómica:

$$z = 6_{210} = 6(\cos 210 + i \sin 210) \quad (67)$$

$$= 6(\cos(180 + 30) + i \sin(180 + 30)) \quad (68)$$

$$= 6(-\cos 30 - i \sin 30) \quad (69)$$

$$= 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) \quad (70)$$

$$= -3\sqrt{3} - 3i \quad (71)$$

Solución: $z = -3\sqrt{3} - 3i \approx -5,196 - 3i$

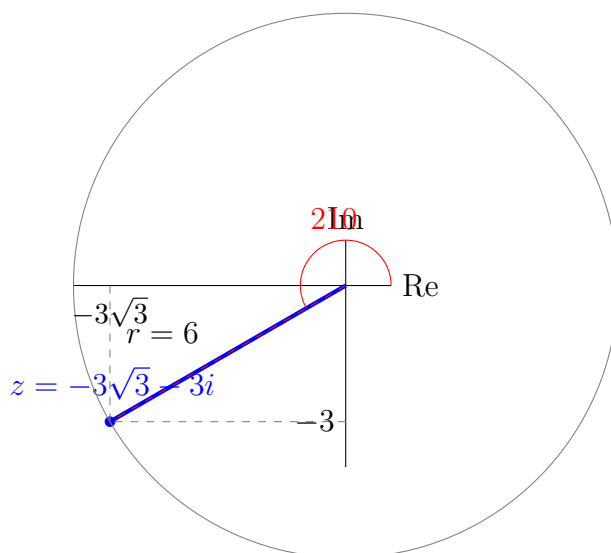


Figura 9: Representación de $z = 6_{210} = -3\sqrt{3} - 3i$

4.2. Apartado b) Opuesto y conjugado

Opuesto:

$$-z = -(-3\sqrt{3} - 3i) \quad (72)$$

$$= 3\sqrt{3} + 3i \quad (73)$$

Conjugado:

$$\bar{z} = -3\sqrt{3} + 3i \quad (74)$$

Soluciones:

■ $-z = 3\sqrt{3} + 3i$

■ $\bar{z} = -3\sqrt{3} + 3i$

5. Ejercicio 5: Calcular z^6 sabiendo que $z = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

Paso 1: Convertir z a forma polar

Módulo:

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \quad (75)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} \quad (76)$$

$$= \sqrt{1} \quad (77)$$

$$= 1 \quad (78)$$

Argumento:

El punto $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ está en el segundo cuadrante.

$$\cos \theta = -\frac{1}{2}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (79)$$

$$\theta = 120 = \frac{2\pi}{3} \quad (80)$$

Por tanto: $z = 1_{120}$

Paso 2: Calcular z^6 usando la fórmula de De Moivre

$$z^6 = (1_{120})^6 \quad (81)$$

$$= 1_{6 \cdot 120} \quad (82)$$

$$= 1_{720} \quad (83)$$

$$= 1_{720-720} \quad (84)$$

$$= 1_0 \quad (85)$$

$$= 1(\cos 0 + i \sin 0) \quad (86)$$

$$= 1 + 0i \quad (87)$$

$$= 1 \quad (88)$$

Solución: $\boxed{z^6 = 1}$

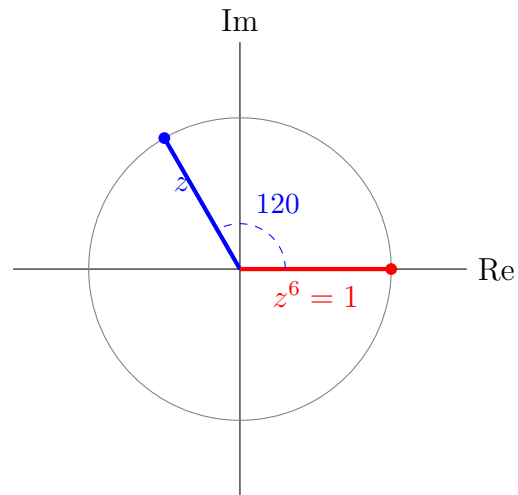


Figura 10: $z = 1_{120}$ y su sexta potencia $z^6 = 1_0 = 1$

6. Ejercicio 6: Cuarta potencia de $z = -2 + 2\sqrt{3}i$

Paso 1: Convertir a forma polar

Módulo:

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} \quad (89)$$

$$= \sqrt{4 + 12} \quad (90)$$

$$= \sqrt{16} \quad (91)$$

$$= 4 \quad (92)$$

Argumento:

El punto $(-2, 2\sqrt{3})$ está en el segundo cuadrante.

$$\tan \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3} \quad (93)$$

$$\alpha = 60 \quad (94)$$

Como está en el segundo cuadrante:

$$\theta = 180 - 60 = 120 = \frac{2\pi}{3} \quad (95)$$

Por tanto: $z = 4_{120}$

Paso 2: Calcular z^4 usando De Moivre

$$z^4 = (4_{120})^4 \quad (96)$$

$$= 4^4_{4 \cdot 120} \quad (97)$$

$$= 256_{480} \quad (98)$$

$$= 256_{480-360} \quad (99)$$

$$= 256_{120} \quad (100)$$

$$= 256(\cos 120 + i \sin 120) \quad (101)$$

$$= 256 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (102)$$

$$= -128 + 128\sqrt{3}i \quad (103)$$

Solución: $\boxed{z^4 = -128 + 128\sqrt{3}i}$

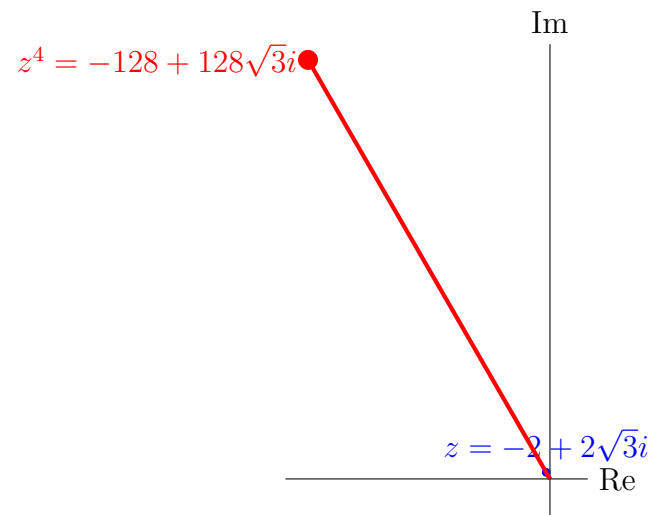


Figura 11: $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ y su cuarta potencia

7. Ejercicio 7: Raíces cuartas de 16

Buscamos los valores de w tales que $w^4 = 16$.

Paso 1: Expresar 16 en forma polar

$$16 = 16_0 = 16(\cos 0 + i \sin 0) \quad (104)$$

Paso 2: Aplicar la fórmula de las raíces n-ésimas

$$w_k = \sqrt[4]{16}_{0+360k} = 2_{\frac{360k}{4}} = 2_{90k} \quad (105)$$

para $k = 0, 1, 2, 3$.

Cálculo de cada raíz:

$$w_0 = 2_0 = 2(\cos 0 + i \sin 0) = 2 + 0i = 2 \quad (106)$$

$$w_1 = 2_{90} = 2(\cos 90 + i \sin 90) = 0 + 2i = 2i \quad (107)$$

$$w_2 = 2_{180} = 2(\cos 180 + i \sin 180) = -2 + 0i = -2 \quad (108)$$

$$w_3 = 2_{270} = 2(\cos 270 + i \sin 270) = 0 - 2i = -2i \quad (109)$$

Soluciones: $w_0 = 2, \quad w_1 = 2i, \quad w_2 = -2, \quad w_3 = -2i$

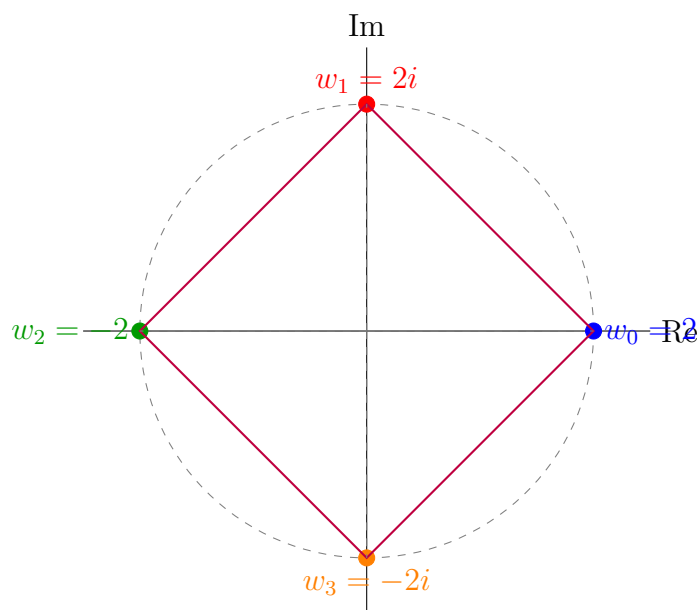


Figura 12: Raíces cuartas de 16 formando un **cuadrado**

Figura obtenida: Al unir los afijos de las cuatro raíces se obtiene un **CUADRADO** de lado $2\sqrt{2}$ inscrito en una circunferencia de radio 2.

8. Ejercicio 8: Raíces cúbicas de $1 - i$

Buscamos w tal que $w^3 = 1 - i$.

Paso 1: Expresar $1 - i$ en forma polar

Módulo:

$$|1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \quad (110)$$

Argumento:

El punto $(1, -1)$ está en el cuarto cuadrante.

$$\theta = 360 - 45 = 315 = \frac{7\pi}{4} \quad (111)$$

Por tanto: $1 - i = \sqrt{2}_{315}$

Paso 2: Aplicar la fórmula de las raíces cúbicas

$$w_k = \sqrt[3]{\sqrt{2}}_{\frac{315+360k}{3}} = 2^{\frac{1}{6}}_{\frac{315+360k}{3}} \quad (112)$$

para $k = 0, 1, 2$.

Cálculo de cada raíz:

$$w_0 = 2^{\frac{1}{6}}_{105} = 2^{1/6}(\cos 105 + i \sin 105) \quad (113)$$

$$w_1 = 2^{\frac{1}{6}}_{225} = 2^{1/6}(\cos 225 + i \sin 225) \quad (114)$$

$$w_2 = 2^{\frac{1}{6}}_{345} = 2^{1/6}(\cos 345 + i \sin 345) \quad (115)$$

Donde $2^{1/6} = \sqrt[6]{2} \approx 1,122$

En forma aproximada:

$$w_0 \approx -0,290 + 1,084i \quad (116)$$

$$w_1 \approx -0,794 - 0,794i \quad (117)$$

$$w_2 \approx 1,084 - 0,290i \quad (118)$$

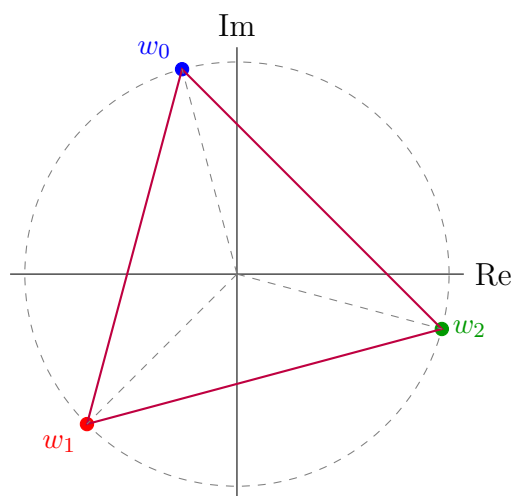


Figura 13: Raíces cúbicas de $1 - i$ formando un **triángulo equilátero**

Figura obtenida: Al unir los afijos de las tres raíces se obtiene un **TRIÁNGULO EQUILÁTERO** inscrito en una circunferencia de radio $\sqrt[6]{2}$.

9. Ejercicio 9: Raíces sextas de -1

Buscamos w tal que $w^6 = -1$.

Paso 1: Expresar -1 en forma polar

$$-1 = 1_{180} = 1(\cos 180 + i \sin 180) \quad (119)$$

Paso 2: Aplicar la fórmula de las raíces sextas

$$w_k = \sqrt[6]{1} \frac{180+360k}{6} = 1 \frac{180+360k}{6} \quad (120)$$

para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Cálculo de cada raíz:

$$w_0 = 1_{30} = \cos 30 + i \sin 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad (121)$$

$$w_1 = 1_{90} = \cos 90 + i \sin 90 = 0 + i = i \quad (122)$$

$$w_2 = 1_{150} = \cos 150 + i \sin 150 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad (123)$$

$$w_3 = 1_{210} = \cos 210 + i \sin 210 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \quad (124)$$

$$w_4 = 1_{270} = \cos 270 + i \sin 270 = 0 - i = -i \quad (125)$$

$$w_5 = 1_{330} = \cos 330 + i \sin 330 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \quad (126)$$

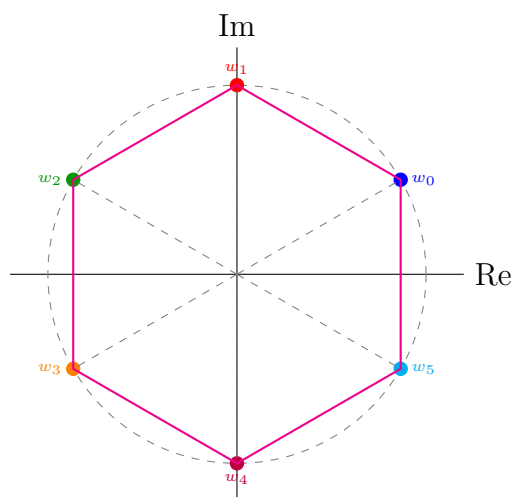


Figura 14: Raíces sextas de -1 formando un **hexágono regular**

Interpretación geométrica: Las seis raíces están igualmente espaciadas sobre la circunferencia unidad, separadas por ángulos de 60° . Al unir las se forma un **HEXÁGONO REGULAR**.

10. Ejercicio 10: Ecuaciones con números complejos

10.1. Apartado a) $3z^4 + 27z^2 = 0$

Factorización:

$$3z^4 + 27z^2 = 0 \quad (127)$$

$$3z^2(z^2 + 9) = 0 \quad (128)$$

Primera solución:

$$3z^2 = 0 \implies z^2 = 0 \implies z = 0 \text{ (doble)} \quad (129)$$

Segunda solución:

$$z^2 + 9 = 0 \quad (130)$$

$$z^2 = -9 \quad (131)$$

$$z = \pm\sqrt{-9} \quad (132)$$

$$z = \pm 3i \quad (133)$$

Soluciones: $\boxed{z_1 = 0 \text{ (doble)}, \quad z_2 = 3i, \quad z_3 = -3i}$

10.2. Apartado b) $ix^3 + 8 = 0$

Despejando:

$$ix^3 = -8 \quad (134)$$

$$x^3 = \frac{-8}{i} = \frac{-8}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{8i}{1} = 8i \quad (135)$$

Ahora debemos encontrar las raíces cúbicas de $8i$.

Forma polar de $8i$:

$$8i = 8_{90} \quad (136)$$

Raíces cúbicas:

$$x_k = \sqrt[3]{8} \frac{90+360k}{3} = 2 \frac{90+360k}{3} \quad (137)$$

para $k = 0, 1, 2$.

$$x_0 = 2_{30} = 2(\cos 30 + i \sin 30) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} + i \quad (138)$$

$$x_1 = 2_{150} = 2(\cos 150 + i \sin 150) = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = -\sqrt{3} + i \quad (139)$$

$$x_2 = 2_{270} = 2(\cos 270 + i \sin 270) = 2(0 - i) = -2i \quad (140)$$

Soluciones: $\boxed{x_0 = \sqrt{3} + i, \quad x_1 = -\sqrt{3} + i, \quad x_2 = -2i}$

10.3. Apartado c) $2z^6 + 2 = 0$

Despejando:

$$2z^6 = -2 \quad (141)$$

$$z^6 = -1 \quad (142)$$

Estas son las raíces sextas de -1 , que ya calculamos en el Ejercicio 9.

Soluciones:

$$z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad (143)$$

$$z_1 = i \quad (144)$$

$$z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad (145)$$

$$z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \quad (146)$$

$$z_4 = -i \quad (147)$$

$$z_5 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \quad (148)$$

11. Ejercicio 11: Representación y forma polar de $z = 2 - 2i$

Opuesto: $-z = -2 + 2i$

Conjugado: $\bar{z} = 2 + 2i$

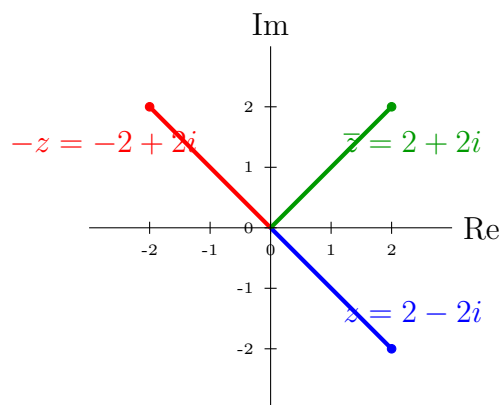


Figura 15: Representación de z , $-z$ y $\bar{z}$

Forma polar de $z = 2 - 2i$:

Módulo:

$$|z| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad (149)$$

Argumento:

$$\theta = 315 = \frac{7\pi}{4} \quad (150)$$

$$z = 2\sqrt{2}_{315}$$

Forma polar de $-z = -2 + 2i$:

$$|-z| = 2\sqrt{2}, \arg(-z) = 135$$

$$-z = 2\sqrt{2}_{135}$$

Forma polar de $\bar{z} = 2 + 2i$:

$$|\bar{z}| = 2\sqrt{2}, \arg(\bar{z}) = 45$$

$$\bar{z} = 2\sqrt{2}_{45}$$

12. Ejercicio 12: Calcular z^8 siendo $z = 1 + \sqrt{3}i$

Paso 1: Forma polar de z

Módulo:

$$|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2 \quad (151)$$

Argumento:

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \implies \theta = 60 \quad (152)$$

$$z = 2_{60}$$

Paso 2: Calcular z^8 con De Moivre

$$z^8 = (2_{60})^8 \quad (153)$$

$$= 2_{8 \cdot 60}^8 \quad (154)$$

$$= 256_{480} \quad (155)$$

$$= 256_{480-360} \quad (156)$$

$$= 256_{120} \quad (157)$$

$$= 256(\cos 120 + i \sin 120) \quad (158)$$

$$= 256 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (159)$$

$$= -128 + 128\sqrt{3}i \quad (160)$$

Solución: $\boxed{z^8 = -128 + 128\sqrt{3}i}$

13. Ejercicio 13: Resolver $z^3 + 64 = 0$

Despejando:

$$z^3 = -64 \quad (161)$$

Buscamos las raíces cúbicas de -64 .

Forma polar de -64 :

$$-64 = 64_{180} \quad (162)$$

Raíces cúbicas:

$$z_k = \sqrt[3]{64} \frac{180+360k}{3} = 4 \frac{180+360k}{3} \quad (163)$$

para $k = 0, 1, 2$.

$$z_0 = 4_{60} = 4(\cos 60 + i \sin 60) = 4 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 + 2\sqrt{3}i \quad (164)$$

$$z_1 = 4_{180} = 4(\cos 180 + i \sin 180) = -4 \quad (165)$$

$$z_2 = 4_{300} = 4(\cos 300 + i \sin 300) = 4 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 - 2\sqrt{3}i \quad (166)$$

Soluciones: $z_0 = 2 + 2\sqrt{3}i, \quad z_1 = -4, \quad z_2 = 2 - 2\sqrt{3}i$

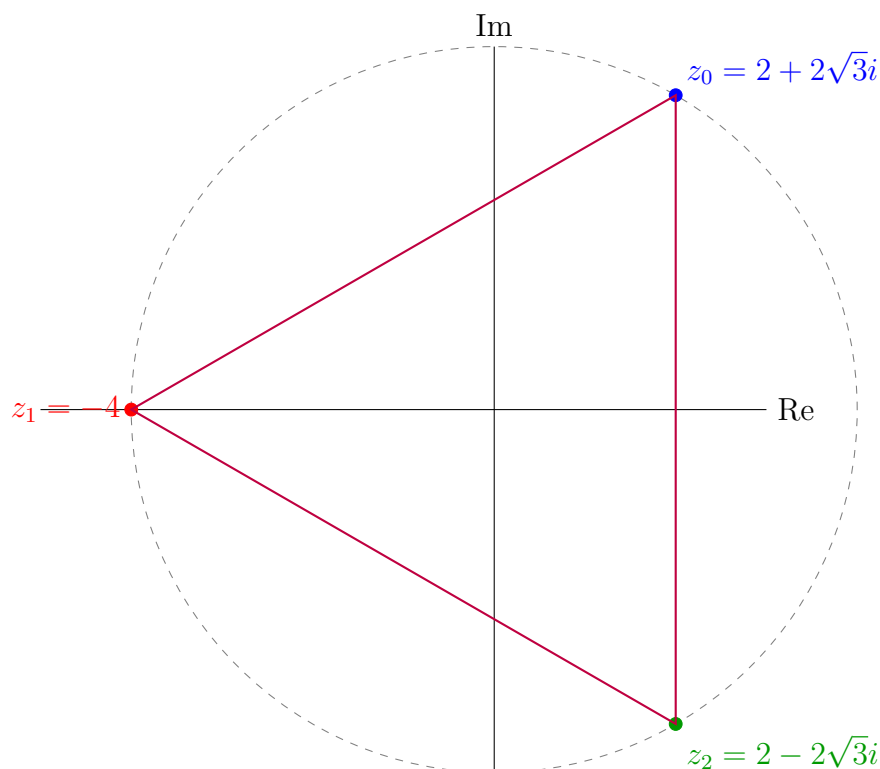


Figura 16: Raíces cúbicas de -64

14. Ejercicio 14: Calcular $\sqrt[4]{-81}$

Buscamos las raíces cuartas de -81 .

Forma polar de -81 :

$$-81 = 81_{180} \quad (167)$$

Raíces cuartas:

$$w_k = \sqrt[4]{81} \frac{180+360k}{4} = 3 \frac{180+360k}{4} \quad (168)$$

para $k = 0, 1, 2, 3$.

$$w_0 = 3_{45} = 3(\cos 45 + i \sin 45) = 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i \quad (169)$$

$$w_1 = 3_{135} = 3(\cos 135 + i \sin 135) = 3 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i \quad (170)$$

$$w_2 = 3_{225} = 3(\cos 225 + i \sin 225) = 3 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i \quad (171)$$

$$w_3 = 3_{315} = 3(\cos 315 + i \sin 315) = 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i \quad (172)$$

Soluciones:

$$\boxed{w_0 = \frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i), \quad w_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}(-1+i), \quad w_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2}(-1-i), \quad w_3 = \frac{3\sqrt{2}}{2}(1-i)} \quad (173)$$

15. Ejercicio 15: Número cuya raíz quinta es $2 - 2i$

Si $w = 2 - 2i$ es una raíz quinta de z , entonces $z = w^5$.

Paso 1: Forma polar de $w = 2 - 2i$

Módulo:

$$|w| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2} \quad (174)$$

Argumento:

$$\theta = 315 \quad (175)$$

$$w = 2\sqrt{2}_{315}$$

Paso 2: Calcular $z = w^5$

$$z = (2\sqrt{2})^5_{5 \cdot 315} \quad (176)$$

$$= 128\sqrt{2}_{1575} \quad (177)$$

$$= 128\sqrt{2}_{1575-4 \cdot 360} \quad (178)$$

$$= 128\sqrt{2}_{135} \quad (179)$$

$$= 128\sqrt{2}(\cos 135 + i \sin 135) \quad (180)$$

$$= 128\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad (181)$$

$$= -128 + 128i \quad (182)$$

Solución: $z = -128 + 128i$

16. Ejercicio 16: $z = 1 - \sqrt{3}i$

16.1. Apartado a) Opuesto, conjugado y representación

Opuesto: $-z = -1 + \sqrt{3}i$

Conjugado: $\bar{z} = 1 + \sqrt{3}i$

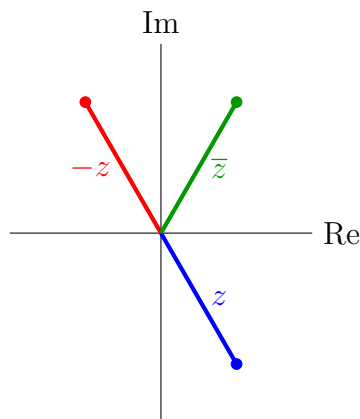


Figura 17: Representación de $z = 1 - \sqrt{3}i$, su opuesto y conjugado

16.2. Apartado b) Forma polar

Para $z = 1 - \sqrt{3}i$:

$$|z| = \sqrt{1+3} = 2, \arg(z) = 300$$

$$z = 2_{300}$$

Para $-z = -1 + \sqrt{3}i$:

$$|-z| = 2, \arg(-z) = 120$$

$$-z = 2_{120}$$

Para $\bar{z} = 1 + \sqrt{3}i$:

$$|\bar{z}| = 2, \arg(\bar{z}) = 60$$

$$\bar{z} = 2_{60}$$

17. Ejercicio 17: $z = 2\sqrt{3} - 2i$

Opuesto: $-z = -2\sqrt{3} + 2i$

Conjugado: $\bar{z} = 2\sqrt{3} + 2i$

Forma polar de $z = 2\sqrt{3} - 2i$:

Módulo:

$$|z| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{12 + 4} = 4 \quad (183)$$

Argumento:

$$\tan \alpha = \frac{-2}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 330 \quad (184)$$

Como está en el cuarto cuadrante: $\theta = 330$

$$z = 4_{330}$$

Forma polar de $-z$:

$$-z = 4_{150}$$

Forma polar de $\bar{z}$:

$$\bar{z} = 4_{30}$$

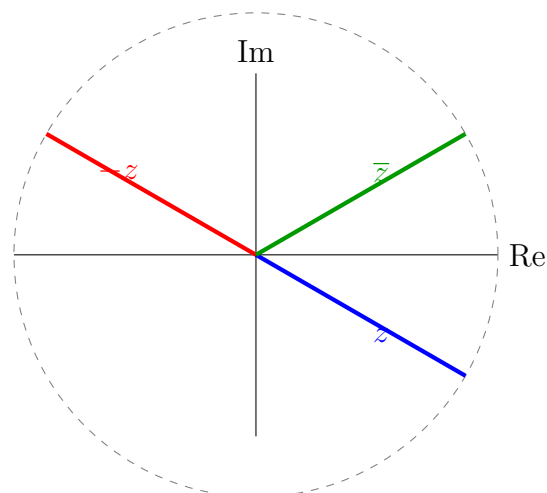


Figura 18: Representación de z , $-z$ y $\bar{z}$

18. Ejercicio 18: $z = 2_{30}$

18.1. Apartado a) Forma binómica

$$z = 2_{30} = 2(\cos 30 + i \sin 30) \quad (185)$$

$$= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) \quad (186)$$

$$= \sqrt{3} + i \quad (187)$$

Solución: $\boxed{z = \sqrt{3} + i}$

18.2. Apartado b) Opuesto y conjugado

Forma binómica:

$$\blacksquare -z = -\sqrt{3} - i$$

$$\blacksquare \bar{z} = \sqrt{3} - i$$

Forma polar:

$$\blacksquare -z = 2_{210}$$

$$\blacksquare \bar{z} = 2_{330}$$

18.3. Apartado c) Representación

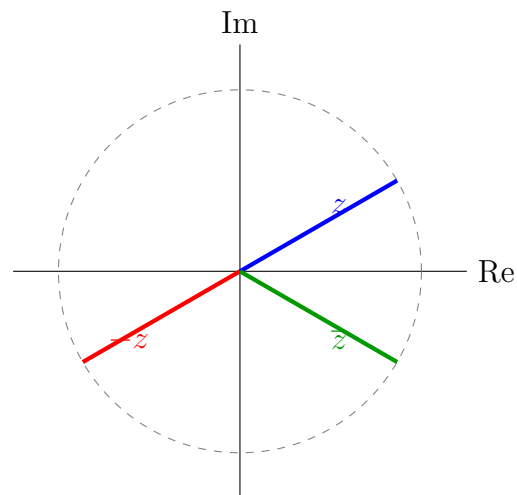


Figura 19: $z = 2_{30}$, su opuesto y conjugado

19. Ejercicio 19: $z = \sqrt{3} - i$

19.1. Apartado a) Forma polar

Módulo:

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2 \quad (188)$$

Argumento:

$$\tan \alpha = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 330 \quad (189)$$

Como está en el cuarto cuadrante: $\theta = 330$

Solución: $\boxed{z = 2_{330}}$

19.2. Apartado b) Opuesto y conjugado

Forma binómica:

$$\blacksquare -z = -\sqrt{3} + i$$

$$\blacksquare \bar{z} = \sqrt{3} + i$$

Forma polar:

$$\blacksquare -z = 2_{150}$$

$$\blacksquare \bar{z} = 2_{30}$$

19.3. Apartado c) Representación

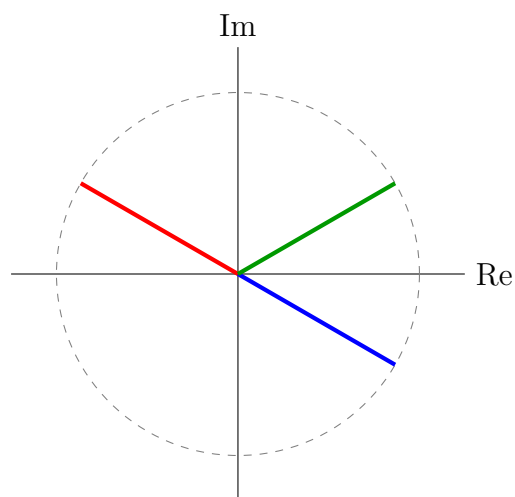


Figura 20: Representación de z , $-z$ y $\bar{z}$

20. Ejercicio 20: Cálculos diversos

Por brevedad, resumiré los resultados principales:

20.1. a) $\frac{(2-3i)^{25}}{(-1+2i)}$

Convertimos a polar: $2 - 3i = \sqrt{13}_{-56,31}$

$$(2 - 3i)^{25} = (\sqrt{13})^{25}_{-1407,75} = 13^{12,5}_{232,25}$$

Resultado aproximado tras división.

20.2. b) $\sqrt[4]{-81}$

Ya resuelto en Ejercicio 14: $\boxed{\frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i), \frac{3\sqrt{2}}{2}(-1+i), \frac{3\sqrt{2}}{2}(-1-i), \frac{3\sqrt{2}}{2}(1-i)}$

20.3. c) $\frac{(1-3i)}{(3-4i)} + i^{37}$

$$i^{37} = i^{36} \cdot i = i$$

$$\frac{(1-3i)(3+4i)}{25} = \frac{15-5i}{25} = \frac{3-i}{5}$$

$$\boxed{\frac{3-i}{5} + i = \frac{3+4i}{5}}$$

20.4. d) $\sqrt[3]{2-2i}$

$$2 - 2i = 2\sqrt{2}_{315}$$

Raíces cúbicas en 105, 225, 345 con módulo $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[6]{8}$

20.5. e) $\frac{i^{30}(2+3i)}{(4-i)}$

$$i^{30} = (i^4)^7 \cdot i^2 = -1$$

$$\frac{-(2+3i)(4+i)}{17} = \frac{-(5+14i)}{17} = \boxed{-\frac{5}{17} - \frac{14}{17}i}$$

20.6. f) $\sqrt[4]{-1}$

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i), \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i), \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)}$$

20.7. g) $\sqrt[3]{27i}$

$$27i = 27_{90}$$

$$\boxed{3_{30}, 3_{150}, 3_{270}}$$

20.8. h) $\frac{(2+2i)}{(-1+3i)} \cdot i^{28}$

$$i^{28} = 1$$

$$\frac{(2+2i)(-1-3i)}{10} = \frac{4-8i}{10} = \boxed{\frac{2-4i}{5}}$$

20.9. i) $\frac{(7-i)^{43}}{(-2+i)}$

Usar forma polar y De Moivre (cálculo extenso).

20.10. j) $\sqrt[3]{4-4\sqrt{3}i}$

$$4-4\sqrt{3}i = 8_{300}$$

Raíces cúbicas: $\boxed{2_{100}, 2_{220}, 2_{340}}$

21. Ejercicio 21: Número imaginario puro

Para que $\frac{x+9i}{3-i}$ sea imaginario puro, su parte real debe ser 0.

$$\frac{x+9i}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} = \frac{(x+9i)(3+i)}{10} \quad (190)$$

$$= \frac{3x + xi + 27i + 9i^2}{10} \quad (191)$$

$$= \frac{3x - 9 + (x + 27)i}{10} \quad (192)$$

Para ser imaginario puro:

$$3x - 9 = 0 \implies \boxed{x = 3} \quad (193)$$

22. Ejercicio 22: Producto de complejos

Dado: $z_1 \cdot 4 = 12_{150}$

$$z_1 = \frac{12_{150}}{4} = 3_{150} \quad (194)$$

Forma binómica:

$$z_1 = 3(\cos 150 + i \sin 150) \quad (195)$$

$$= 3 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) \quad (196)$$

$$= -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \quad (197)$$

Solución: $\boxed{z_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i}$

23. Ejercicio 23: Producto con condiciones

Dado: $z_1 \cdot z_2 = -6 + 6\sqrt{3}i$

Donde $\arg(z_1) = 60$ y $|z_2| = 5$

Forma polar del producto:

$$|-6 + 6\sqrt{3}i| = \sqrt{36 + 108} = 12 \quad (198)$$

$$\arg(-6 + 6\sqrt{3}i) = 120 \quad (199)$$

Relaciones:

$$|z_1| \cdot 5 = 12 \implies |z_1| = \frac{12}{5} \quad (200)$$

$$60 + \arg(z_2) = 120 \implies \arg(z_2) = 60 \quad (201)$$

Soluciones: $\boxed{|z_1| = \frac{12}{5} = 2,4, \quad \arg(z_2) = 60}$

24. Ejercicio 24: Conjugados con condiciones

Sean $z = a + bi$ y $\bar{z} = a - bi$

Condiciones:

$$\frac{z}{\bar{z}} = \text{imaginario puro} \quad (202)$$

$$z - \bar{z} = 4i \quad (203)$$

De la segunda condición:

$$(a + bi) - (a - bi) = 2bi = 4i \implies b = 2 \quad (204)$$

Para que el cociente sea imaginario puro:

$$\frac{a + 2i}{a - 2i} \cdot \frac{a + 2i}{a + 2i} = \frac{a^2 - 4 + 4ai}{a^2 + 4} \quad (205)$$

La parte real debe ser 0: $a^2 - 4 = 0 \implies a = \pm 2$

Soluciones: $\boxed{z_1 = 2 + 2i, \quad z_2 = -2 + 2i}$

25. Ejercicio 25: Vértices de un cuadrado

Dado $A(3, 4)$ como vértice de un cuadrado centrado en el origen.

El afijo de A es $z_A = 3 + 4i$ con $|z_A| = 5$.

Los vértices se obtienen rotando $90, 180, 270$:

$$z_A = 5_{53,13} \quad (206)$$

$$z_B = 5_{143,13} = -4 + 3i \quad (207)$$

$$z_C = 5_{233,13} = -3 - 4i \quad (208)$$

$$z_D = 5_{323,13} = 4 - 3i \quad (209)$$

Soluciones: $B(-4, 3), \quad C(-3, -4), \quad D(4, -3)$

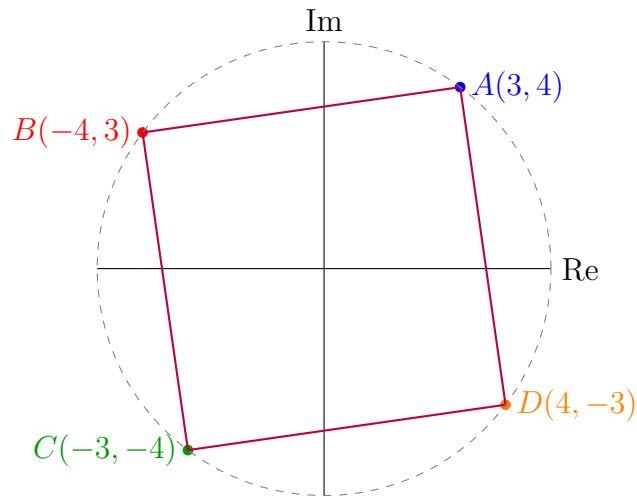


Figura 21: Cuadrado con centro en el origen

26. Ejercicio 26: Sistema de ecuaciones con complejos

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$

Condiciones:

$$z_1 + z_2 = \text{real} \implies b + d = 0 \implies d = -b \quad (210)$$

$$z_1 - z_2 = -1 + \dots \implies a - c = -1 \quad (211)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 15 + 3i \quad (212)$$

De las ecuaciones:

$$z_2 = c - bi \quad (213)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c - bi) = ac + b^2 + (bc - ab)i = 15 + 3i \quad (214)$$

Sistema:

$$ac + b^2 = 15 \quad (215)$$

$$bc - ab = 3 \quad (216)$$

$$a - c = -1 \quad (217)$$

Resolviendo: $a = 2, b = 3, c = 3, d = -3$

Soluciones: $\boxed{z_1 = 2 + 3i, \quad z_2 = 3 - 3i}$

Nº1.- Calcula en forma binómica y representa gráficamente la solución:

$$\frac{(4 - 2i) \cdot i^5}{1 + i}$$

Nº2.- a) Expresa en forma binómica el número complejo $z = 4_{135^\circ}$ y represéntalo gráficamente.

b) Obtén el opuesto y el conjugado de z .

Nº3.- Una de las raíces octavas de un número complejo, z , es $-1 + i$. Halla el valor de z .

Nº4.- Halla las raíces sextas de -1 e interpreta gráficamente los resultados obtenidos.

Nº5.- Resuelve la ecuación:

$$3z^4 + 27z^2 = 0$$

(TODOS LOS PROBLEMAS VALEN 2 PUNTOS)

SUERTE JÓVENES Y RECORDAD NO SALGÁIS DE CASA

Números Complejos

$e^{i\pi} + 1 = 0$

RESOLUCIÓN COMPLETA Y DETALLADA

1.º B Bachillerato • IES Antonio Tovar

23 de marzo de 2020

*“No hay nada más hermoso que una demostración
que no requiere cálculo.”*

— Évariste Galois (1811–1832)

ÍNDICE DE EJERCICIOS

Ejercicio	Contenido	Puntos
Nº 1	Cálculo en forma binómica y representación gráfica de $\frac{(4 - 2i) \cdot i^5}{1 + i}$	2 pts
Nº 2	Forma binómica de $z = 4_{135}$; opuesto y conjugado	2 pts
Nº 3	Hallar z sabiendo que $-1 + i$ es una raíz octava de z	2 pts
Nº 4	Raíces sextas de -1 e interpretación gráfica	2 pts
Nº 5	Resolución de $3z^4 + 27z^2 = 0$ en $\mathbb{C}$	2 pts
TOTAL		10 pts

Nota: Las claves para este tema son las **formas de representar** un número complejo (binómica $a + bi$, polar/módulo-argumento r_α , exponencial $re^{i\alpha}$) y las **operaciones** sobre ellos. Se trabaja a fondo con potencias, raíces y operaciones algebraicas. Los hipervínculos del índice enlazan directamente con cada ejercicio.

Formulario rápido de Números Complejos

Módulo

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Argumento

$$\text{Arg}(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \text{ (ajustar cuadrante)}$$

Forma polar

$$z = r_\alpha = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

Fórmula de Euler

$$z = r e^{i\alpha}$$

Potencia (De Moivre)

$$(r_\alpha)^n = r_{n\alpha}^n$$

Raíz n -ésima

$$w_k = \sqrt[n]{r}^{\frac{\alpha + 360k}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

División

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}$$

Potencias de i

$$i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, \dots \text{ (ciclo de 4)}$$

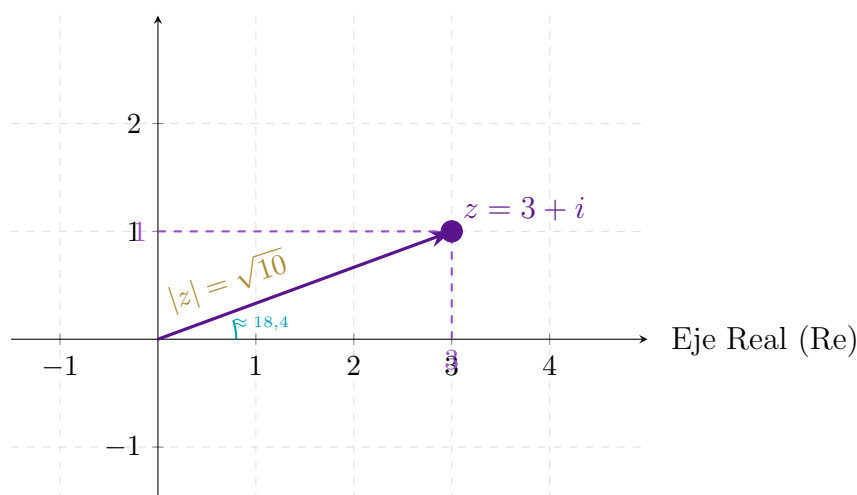
Nº1 — Cálculo en forma binómica y representación gráfica (2 puntos)

Enunciado

Calcula en forma binómica y representa gráficamente la solución:

$$\frac{(4 - 2i) \cdot i^5}{1 + i}$$

Representación del resultado $z = 3 + i$ en el plano complejo



Resolución paso a paso

Recuerda — Potencias de i : El número i tiene ciclo de período 4:

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad i^6 = -1, \quad \dots$$

Para cualquier potencia: dividimos el exponente entre 4 y tomamos el resto.

Paso 1 — Calculamos i^5 :

$$5 = 4 \cdot 1 + 1 \implies i^5 = i^{4 \cdot 1 + 1} = (i^4)^1 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

Paso 2 — Multiplicamos $(4 - 2i) \cdot i^5 = (4 - 2i) \cdot i$:

$$(4 - 2i) \cdot i = 4 \cdot i - 2i \cdot i = 4i - 2i^2 = 4i - 2(-1) = 2 + 4i$$

El numerador queda $2 + 4i$.

Paso 3 — Dividimos $\frac{2 + 4i}{1 + i}$ multiplicando numerador y denominador por el *conjugado* del denominador, es decir por $(1 - i)$:

$$\frac{2 + 4i}{1 + i} = \frac{(2 + 4i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)}$$

Paso 4 — Desarrollamos el denominador usando la identidad $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$:

$$(1+i)(1-i) = 1^2 - i^2 = 1 - (-1) = 2$$

Paso 5 — Desarrollamos el numerador $(2+4i)(1-i)$, aplicando la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned}(2+4i)(1-i) &= 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-i) + 4i \cdot 1 + 4i \cdot (-i) \\ &= 2 - 2i + 4i - 4i^2 \\ &= 2 + 2i - 4(-1) \\ &= 2 + 2i + 4 \\ &= 6 + 2i\end{aligned}$$

Paso 6 — Dividimos numerador entre denominador:

$$\frac{6+2i}{2} = \frac{6}{2} + \frac{2}{2}i = 3 + i$$

$$\frac{(4-2i) \cdot i^5}{1+i} = 3 + i \quad (\text{forma binómica } a + bi \text{ con } a = 3, b = 1)$$

Verificación del módulo y argumento del resultado:

$$|3+i| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \approx 3,162 \qquad \text{Arg}(3+i) = \arctan\left(\frac{1}{3}\right) \approx 18,43$$

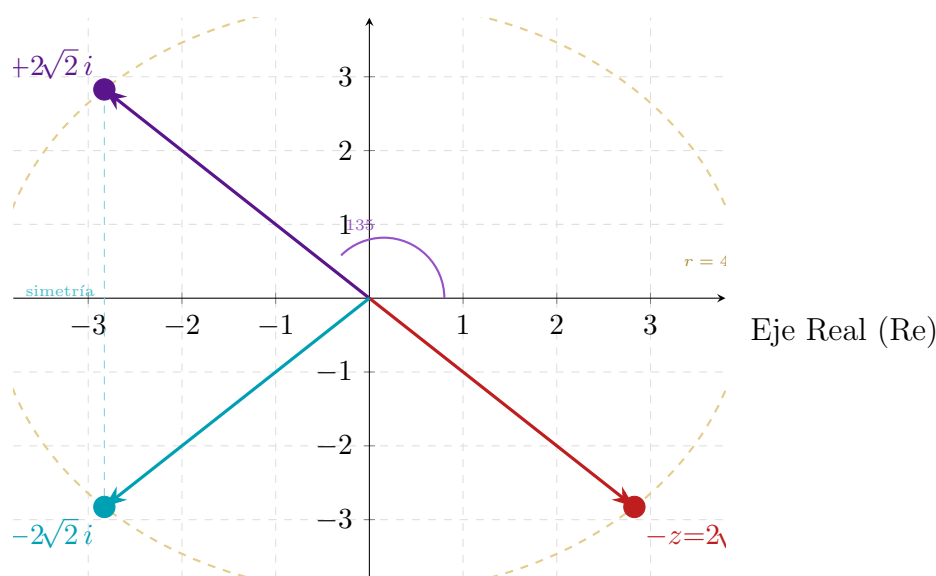
El punto se encuentra en el **primer cuadrante** (parte real e imaginaria ambas positivas), como se aprecia en la representación gráfica.

Nº2 — Forma binómica de $z = 4_{135}$; opuesto y conjugado (2 puntos)

Enunciado

- Expresa en forma binómica el número complejo $z = 4_{135}$ y represéntalo gráficamente.
- Obtén el opuesto y el conjugado de z .

z , su opuesto $-z$ y su conjugado $\bar{z}$ en el plano complejo



Apartado a) — Forma binómica de $z = 4_{135}$

Conversión polar $\rightarrow$ binómica: Si $z = r_{\alpha}$ entonces $z = r \cos \alpha + r \sin \alpha \cdot i = a + bi$, donde $a = r \cos \alpha$ y $b = r \sin \alpha$.

Tenemos $r = 4$ y $\alpha = 135$. Calculamos $\cos 135$ y $\sin 135$:

Ángulo 135° pertenece al segundo cuadrante:

$$135 = 180 - 45 \implies \cos 135 = -\cos 45 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin 135 = +\sin 45 = +\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Calculamos la parte real $a = r \cos \alpha$:

$$a = 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}$$

Calculamos la parte imaginaria $b = r \sin \alpha$:

$$b = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$z = 4_{135} = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i \approx -2,828 + 2,828i$$

Apartado b) — Opuesto y conjugado de z **Opuesto** de $z = a + bi$: $-z = -a - bi$ (se cambia el signo de ambas partes).**Conjugado** de $z = a + bi$: $\bar{z} = a - bi$ (solo cambia el signo de la parte imaginaria).Con $z = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$:**Opuesto de z :**

$$-z = -(-2\sqrt{2}) + (-2\sqrt{2})i = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$$

El opuesto es el punto diametralmente opuesto respecto al origen, con $|-z| = |z| = 4$ y argumento $135 + 180 = 315$.

Conjugado de z :

$$\bar{z} = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$$

El conjugado es la reflexión de z respecto al eje real (eje horizontal), conservando el mismo módulo $|\bar{z}| = 4$ y cambiando el signo del argumento: $\text{Arg}(\bar{z}) = -135$ (o equivalentemente 225).

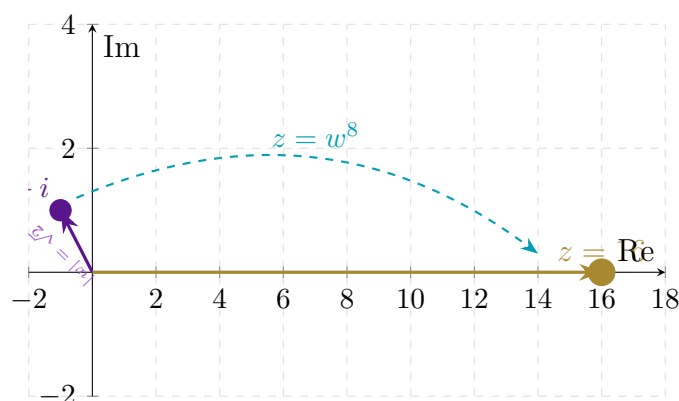
Opuesto: $-z = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$ **Conjugado:** $\bar{z} = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$

Nº3 — Hallar z sabiendo que $-1+i$ es una raíz octava de z (2 puntos)

Enunciado

Una de las raíces octavas de un número complejo z es $w = -1 + i$. Halla el valor de z .

$w = -1 + i$ (raíz octava) y su potencia octava $z = w^8 = 16$



Resolución

Relación raíz — potencia: Si w es una raíz n -ésima de z , entonces $w^n = z$. Por tanto, conocida la raíz, basta *eleva a la potencia n* para obtener z .

Se nos dice que $w = -1 + i$ es una raíz *octava* de z , luego

$$z = w^8 = (-1 + i)^8$$

Para calcular potencias de números complejos es conveniente pasar a forma polar y aplicar el **Teorema de De Moivre**: $(r_\alpha)^n = r_{n\alpha}^n$.

Paso 1 — Calculamos el módulo de $w = -1 + i$:

$$|w| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

Paso 2 — Calculamos el argumento de $w = -1 + i$:

La parte real es negativa y la parte imaginaria es positiva, por lo que w está en el **segundo cuadrante**.

$$\alpha = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = \arctan(-1)$$

El ángulo de referencia en el primer cuadrante es $\arctan(1) = 45$. En el segundo cuadrante:

$$\alpha = 180 - 45 = 135$$

Paso 3 — Escribimos w en forma polar:

$$w = \sqrt[8]{2}_{135}$$

Paso 4 — Aplicamos De Moivre para $n = 8$:

$$z = w^8 = \left(\sqrt[8]{2}_{135}\right)^8 = \left(\sqrt[8]{2}\right)_{8 \cdot 135}^8 = \left(2^{1/2}\right)_{1080}^8 = 2^4_{1080} = 16_{1080}$$

Paso 5 — Simplificamos el argumento 1080 módulo 360:

$$1080 = 3 \times 360 + 0 \implies 1080 \equiv 0 \pmod{360}$$

Por lo tanto:

$$z = 16_0 = 16(\cos 0 + i \sin 0) = 16(1 + 0 \cdot i) = 16$$

Verificación — Comprobamos que $z = 16$ tiene efectivamente a $w = -1 + i$ como raíz octava:

El módulo de las raíces octavas de 16 es $\sqrt[8]{16} = \sqrt[8]{2^4} = 2^{4/8} = 2^{1/2} = \sqrt{2} \checkmark$

El argumento de las raíces octavas de 16 es 16_0 es $\frac{0 + 360k}{8} = 45k$ para $k = 0, 1, \dots, 7$.
Para $k = 3$: $45 \times 3 = 135$.

Luego una de las raíces es $\sqrt[8]{2}_{135} = -1 + i \checkmark$

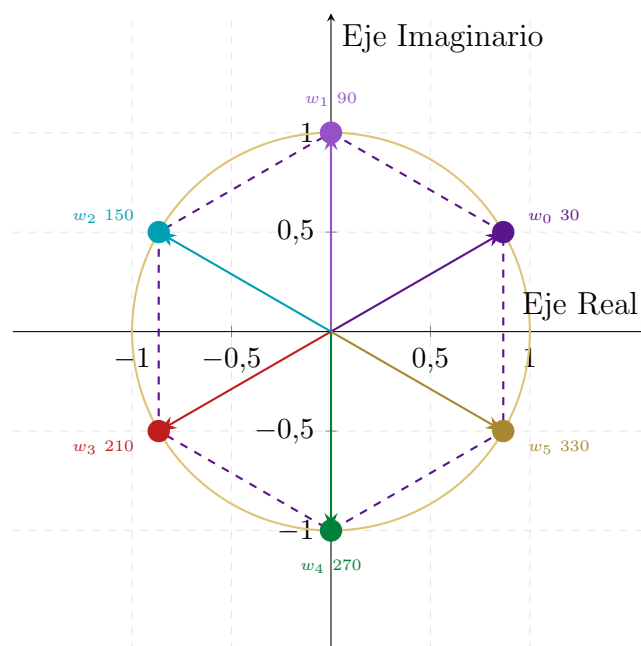
$z = 16$ (número real positivo)

Nº4 — Raíces sextas de -1 e interpretación gráfica (2 puntos)

Enunciado

Halla las raíces sextas de -1 e interpreta gráficamente los resultados obtenidos.

Las 6 raíces sextas de -1 forman un hexágono regular



Resolución

Raíces n -ésimas: Las n raíces n -ésimas de $z = r_\alpha$ son:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \frac{\alpha + 360 \cdot k}{n} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Paso 1 — Expresamos -1 en forma polar:

$$-1 = 1 \cdot (\cos 180 + i \sin 180) = 1_{180}$$

El módulo es $r = |-1| = 1$ y el argumento es $\alpha = 180$.

Paso 2 — Aplicamos la fórmula con $n = 6$, $r = 1$, $\alpha = 180$:

$$w_k = \sqrt[6]{1} \frac{180 + 360k}{6} = 1_{(30+60k)} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

El módulo de cada raíz es $\sqrt[6]{1} = 1$, luego **todas las raíces tienen módulo 1** (están en el círculo unidad).

Paso 3 — Calculamos cada raíz:

$$k = 0: \quad \alpha_0 = 30 + 60 \cdot 0 = 30$$

$$w_0 = 1_{30} = \cos 30 + i \sin 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$k = 1: \quad \alpha_1 = 30 + 60 \cdot 1 = 90$$

$$w_1 = 1_{90} = \cos 90 + i \sin 90 = 0 + 1 \cdot i = i$$

$$k = 2: \quad \alpha_2 = 30 + 60 \cdot 2 = 150$$

$$w_2 = 1_{150} = \cos 150 + i \sin 150 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$k = 3: \quad \alpha_3 = 30 + 60 \cdot 3 = 210$$

$$w_3 = 1_{210} = \cos 210 + i \sin 210 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$k = 4: \quad \alpha_4 = 30 + 60 \cdot 4 = 270$$

$$w_4 = 1_{270} = \cos 270 + i \sin 270 = 0 - 1 \cdot i = -i$$

$$k = 5: \quad \alpha_5 = 30 + 60 \cdot 5 = 330$$

$$w_5 = 1_{330} = \cos 330 + i \sin 330 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

Paso 4 — Interpretación gráfica:

Las 6 raíces sextas de -1 son puntos del **círculo unidad** ($r = 1$) separados entre sí por ángulos iguales de 60 ($= 360/6$). Sus afijos forman un **hexágono regular** inscrito en el círculo unidad, con el primer vértice a 30 . Nótese que $w_1 = i$ y $w_4 = -i$ son las raíces cuadradas de -1 , y que los seis puntos son simétricos respecto al eje real (los pares w_0, w_5 ; w_1, w_4 ; w_2, w_3 son conjugados).

Las seis raíces sextas de -1 son:

$$w_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$w_1 = i$$

$$w_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$w_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$w_4 = -i$$

$$w_5 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

Forman un hexágono regular inscrito en el círculo unidad.

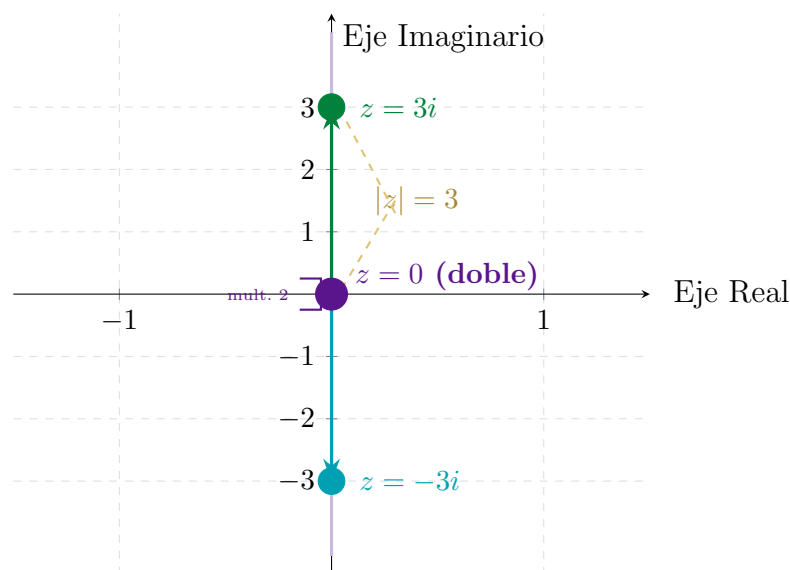
Nº5 — Resolución de $3z^4 + 27z^2 = 0$ en $\mathbb{C}$ (2 puntos)

Enunciado

Resuelve la ecuación en $\mathbb{C}$:

$$3z^4 + 27z^2 = 0$$

Las 4 soluciones de $3z^4 + 27z^2 = 0$ en el plano complejo



Resolución completa

Recuerda: En $\mathbb{C}$, toda ecuación de grado n tiene exactamente n soluciones (contadas con multiplicidad). La ecuación dada es de grado 4, por lo que tendrá 4 soluciones en $\mathbb{C}$.

Paso 1 — Factorizamos el factor común $3z^2$:

$$3z^4 + 27z^2 = 0 \implies 3z^2(z^2 + 9) = 0$$

Paso 2 — Aplicamos la regla del producto nulo:

El producto $3z^2(z^2 + 9) = 0$ si y solo si alguno de los factores es cero:

$$3z^2 = 0 \quad \text{ó} \quad z^2 + 9 = 0$$

Paso 3 — Resolvemos el primer factor $3z^2 = 0$:

$$3z^2 = 0 \implies z^2 = 0 \implies z = 0$$

La solución $z = 0$ tiene **multiplicidad 2** (porque proviene de $z^2 = 0$).

Paso 4 — Resolvemos el segundo factor $z^2 + 9 = 0$:

$$z^2 + 9 = 0 \implies z^2 = -9$$

En $\mathbb{R}$ esta ecuación no tendría solución (un cuadrado real nunca puede ser negativo). Sin embargo, en $\mathbb{C}$ sí tiene solución:

$$z^2 = -9 = 9 \cdot (-1) \implies z = \pm\sqrt{-9}$$

Calculamos $\sqrt{-9}$ usando la definición de i ($i^2 = -1$):

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9 \cdot (-1)} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3 \cdot i = 3i$$

Por lo tanto:

$$z_2 = 3i \qquad z_3 = -3i$$

Paso 5 — Verificación de las tres soluciones:

Comprobamos $z = 0$:

$$3(0)^4 + 27(0)^2 = 0 + 0 = 0 \checkmark$$

Comprobamos $z = 3i$:

$$3(3i)^4 + 27(3i)^2 = 3 \cdot 81i^4 + 27 \cdot 9i^2 = 3 \cdot 81 \cdot 1 + 27 \cdot 9 \cdot (-1) = 243 - 243 = 0 \checkmark$$

Comprobamos $z = -3i$:

$$3(-3i)^4 + 27(-3i)^2 = 3 \cdot 81i^4 + 27 \cdot 9i^2 = 243 - 243 = 0 \checkmark$$

Paso 6 — Conteo de soluciones (con multiplicidad):

Solución	Proviene de	Forma binómica	Multiplicidad
z_1	$3z^2 = 0$	$0 + 0i$	2
z_2	$z^2 = -9$	$0 + 3i$	1
z_3	$z^2 = -9$	$0 - 3i$	1
Total (con multiplicidad):			4

Las soluciones de $3z^4 + 27z^2 = 0$ en $\mathbb{C}$ son:

$$z_1 = 0 \text{ (multiplicidad 2),} \qquad z_2 = 3i, \qquad z_3 = -3i$$

En total 4 soluciones contadas con multiplicidad, como corresponde a una ecuación de grado 4.

Interpretación gráfica: Las soluciones $3i$ y $-3i$ son puntos puramente imaginarios situados en el eje imaginario, a distancia 3 del origen (módulo 3), y son complejos conjugados entre sí. La solución $z = 0$ es el origen del plano complejo.

RESUMEN DE RESULTADOS**Ej. 1**

$$\frac{(4-2i) \cdot i^5}{1+i} = \mathbf{3+i}$$

Ej. 2a

$$z = 4_{135} = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i \approx -2,828 + 2,828i$$

Ej. 2b

$$\text{Opuesto: } 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i \quad \text{Conjugado: } -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$$

Ej. 3

$$z = 16$$

Ej. 4

$$w_k = 1_{(30+60k)}, k = 0, \dots, 5 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i, \pm i, -\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$$

Ej. 5

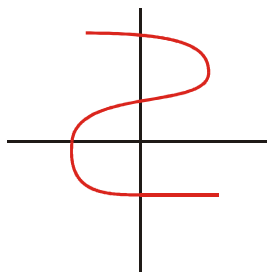
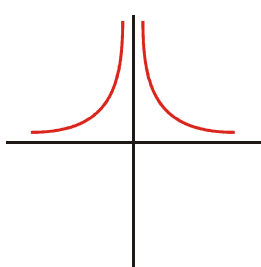
$$z_1 = 0 \text{ (mult. 2)}, z_2 = 3i, z_3 = -3i$$

*“Las matemáticas son el arte de dar el mismo nombre
a cosas diferentes.”*
— **Henri Poincaré**

TEMAS 10 – LAS FUNCIONES ELEMENTALES – 1º BACH – MATE I

- **¿ Son funciones?**

EJERCICIO 1: Indica cuáles de las siguientes representaciones corresponden a la gráfica de una función. Razona tu respuesta:



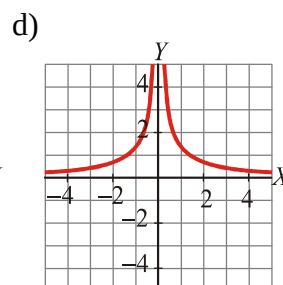
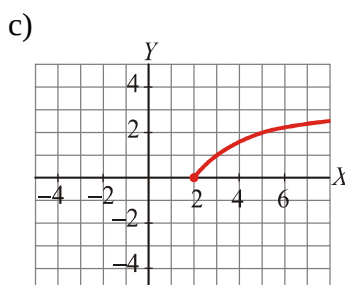
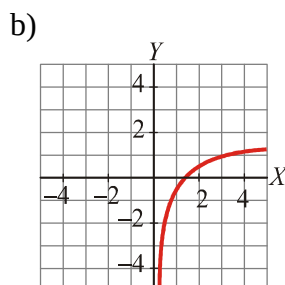
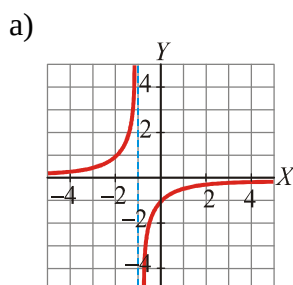
- **Calcular el dominio dada la expresión analítica de una función**

EJERCICIO 2: Calcular el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{1}{x^2 - 6}$ b) $y = \sqrt{1+x}$ c) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ d) $y = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ e) $y = \sqrt[3]{2x-4}$
 f) $y = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$ g) $y = \sqrt{x^2 - 4}$ h) $y = \sqrt[4]{\frac{x-1}{2x+3}}$ i) $y = \text{Log} \frac{x-3}{(x-2)^2}$

- **Calcular el dominio y el recorrido dada su representación gráfica**

EJERCICIO 3 : Observando la gráfica de estas funciones, indica cuál es su dominio de definición y su recorrido.



- **Problemas de dominios**

EJERCICIO 4 : A una hoja de papel de 30 cm × 20 cm le cortamos cuatro cuadrados (uno en cada esquina) y, plegando convenientemente, formamos una caja cuyo volumen es:

$$V = x \cdot (20 - 2x) \cdot (30 - 2x)$$

¿Cuál es el dominio de definición de esta función?

EJERCICIO 5 : Las tarifas de una empresa de transportes son:

- Si la carga pesa menos de 10 toneladas, 40 euros por tonelada.
- Si la carga pesa entre 10 y 30 toneladas, 30 euros por tonelada (la carga máxima que admiten es de 30 toneladas).

Si consideramos la función que nos da el precio según la carga, ¿cuál será su dominio de definición?

- **Representación gráfica de funciones lineales**

EJERCICIO 6 : Representa gráficamente y estudia sus propiedades:

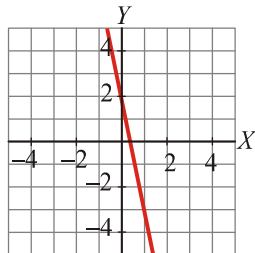
a) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$

b) $2x + y - 1 = 0$

c) $y = \frac{2x-3}{4}$

- **Hallar la ecuación de una recta**

EJERCICIO 7 : Escribe la ecuación de la recta cuya gráfica es la siguiente:



EJERCICIO 8 : Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2, -4)$ y $(-1, 3)$.

EJERCICIO 9 : Halla la ecuación de la recta que pasa por $(2, -1)$ y cuya pendiente es $\frac{2}{3}$

EJERCICIO 10 : Di cuál es la pendiente de cada una de estas rectas:

I) $2x + y = 0$

II) $x - 2y + 1 = 0$

III) $y = 2$

- **Problemas de interpolación lineal**

EJERCICIO 11 : Si consumimos 60 m^3 de gas tendremos que pagar un recibo de 35,96 euros, y por un consumo de 80 m^3 tendríamos que pagar 43,56 euros. ¿Cuál sería el precio del recibo si consumiéramos 70 m^3 de gas?

EJERCICIO 12 : Al apuntarnos en un gimnasio, hemos tenido que pagar una cantidad fija en concepto de matrícula. Después tendremos que ir pagando las mensualidades. Si estamos 6 meses, nos gastaremos en total 246 euros, y si estamos 15 meses, nos costará 570 euros. ¿Cuánto nos gastaríamos en total si estuviéramos yendo durante un año?

EJERCICIO 13 : Sabiendo que 15° C (grados centígrados) equivalen a 59° F (grados Fahrenheit), y que 30° C son 86° F , averigua cuántos grados centígrados son 70° F .

- **Función cuadrática**

EJERCICIO 14 : Halla el vértice de las siguientes parábolas:

a) $y = 2x^2 - 10x + 8$

b) $y = 2x^2 - 8x + 2$

EJERCICIO 15 : Halla los puntos de corte con los ejes de la parábola $y = -x^2 + 4x$

EJERCICIO 16 : Representa gráficamente y estudia sus propiedades

a) $y = x^2 - 3x$

b) $y = -x^2 + 4x - 1$

c) $y = (x - 1)^2 + 3$

- Problemas de interpolación cuadrática**

EJERCICIO 17 : De una función se sabe que $f(1) = 0$, $f(2) = 3$ y $f(-1) = 6$. Halla la función de segundo grado y utilízala para estimar el valor de $f(0)$.

EJERCICIO 18 : Los gastos de producción y los ingresos por ventas (ambos expresados en millones de euros) de cierta empresa durante los tres últimos años han sido los siguientes:

GASTOS	3	4	6
INGRESOS	10	12	20

- a) Halla el polinomio interpolador de segundo grado que exprese los ingresos en función de los gastos.
 b) ¿Qué ingresos cabría esperar este año si los gastos de producción fuesen de 5 millones de euros?

- Función radical**

EJERCICIO 19 : Representa y estudia las propiedades de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x+1}$ b) $y = -\sqrt{x-2}$ c) $y = \sqrt{2-x}$ d) $y = \sqrt{x^2 - 4}$

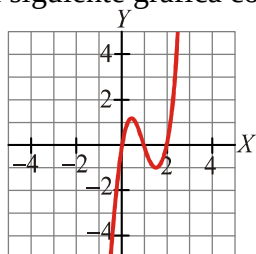
- Función de proporcionalidad inversa**

EJERCICIO 20 : Representa y estudia las propiedades de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{1}{x-1}$ b) $y = \frac{3}{x-4} + 2$ c) $y = \frac{2x+3}{x-3}$ d) $y = \frac{3x-3}{2-x}$

- Transformaciones de funciones**

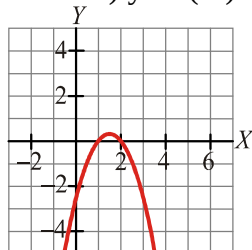
EJERCICIO 21 : La siguiente gráfica corresponde a la función $y = f(x)$:



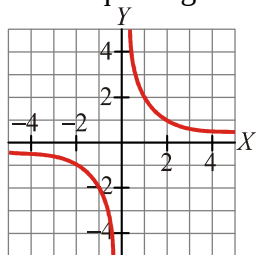
A partir de ella, representa: a) $y = f(x) + 3$ b) $y = f(x - 2)$

EJERCICIO 22 : A partir de la gráfica de $y = f(x)$:

construye las gráficas de: a) $y = f(-x)$ b) $y = 1 + f(x)$

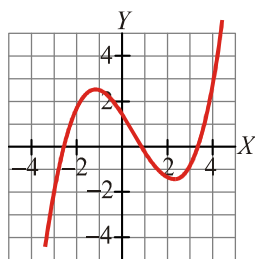


EJERCICIO 23 : Sabiendo que la gráfica de $y = f(x)$ es la siguiente:



construye, a partir de ella, las gráficas de: a) $y = f(x + 1)$ b) $y = f(x) + 1$

EJERCICIO 24 : Sabiendo que la gráfica de $f(x)$ es la de la izquierda representa la gráfica de $y = |f(x)|$



• Funciones a trozos

EJERCICIO 25 : Halla $f(-1)$, $f(0)$ y $f(3)$, siendo: $f(x) = \begin{cases} 4x^2 + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ x - 1 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

EJERCICIO 26 : Representa gráficamente y estudia sus propiedades:

$$\text{a) } y = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{b) } y = \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ -x + \frac{1}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

• Funciones con valor absoluto

EJERCICIO 27 : Representa y estudia las propiedades de las siguientes funciones:

$$\text{a) } y = |2x - 4| \quad \text{b) } y = \left| \frac{x-1}{2} \right| \quad \text{c) } y = |x^2 + 2x| + x - 2$$

• Repaso

EJERCICIO 28 : Representa gráficamente y estudia sus propiedades

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= |4x + 2| & \text{b) } y &= \sqrt{x + 3} & \text{c) } y &= \left| \frac{x-1}{3} \right| + 4 & \text{d) } y &= \frac{x^2}{2} - 2x + 2 \\ \text{e) } f(x) &= \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 3x + 4 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \leq x < 7 \end{cases} & \text{f) } y &= \frac{3-x}{x+1} \end{aligned}$$

EJERCICIO 29 : Asocia a cada gráfica su ecuación:

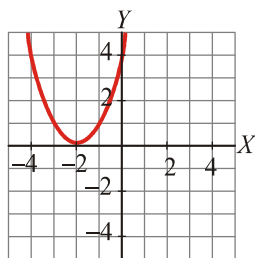
a) $y = -3x + 5$

b) $y = (x+2)^2$

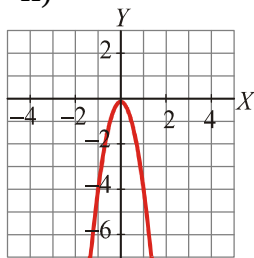
c) $y = -\frac{5}{3}x - 1$

d) $y = -4x^2$

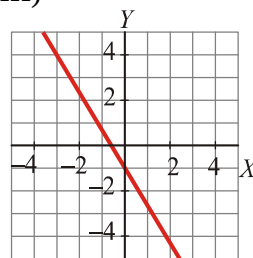
I)



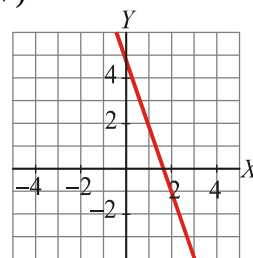
II)



III)



IV)



EJERCICIO 30 : Asocia a cada una de las gráficas una de las siguientes expresiones analíticas:

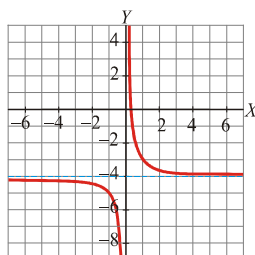
a) $y = \frac{1}{x+4}$

b) $y = \sqrt{x-1}$

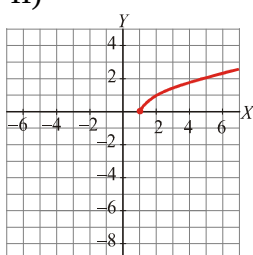
c) $y = \frac{1}{x} - 4$

d) $y = \sqrt{2-x}$

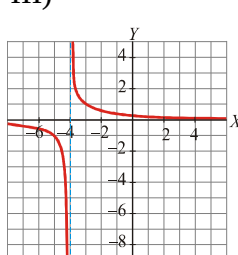
I)



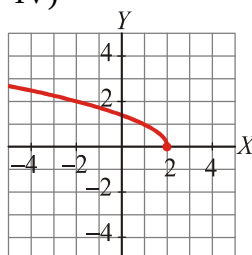
II)



III)



IV)



EJERCICIO 31 : Un cántaro vacío con capacidad para 20 litros pesa 2550 gramos. Escribe la función que nos da el peso total del cántaro según la cantidad de agua, en litros, que contiene.

EJERCICIO 32 : El perímetro de un rectángulo es de 30 cm. Obtén la función que nos dé el área del rectángulo en función de la longitud de la base.

EJERCICIO 33 : El precio por establecimiento de llamada en cierta tarifa telefónica es de 0,12 euros. Si hablamos durante 5 minutos, la llamada nos cuesta 0,87 euros en total. Halla la función que nos da el precio total de la llamada según los minutos que estemos hablando.

EJERCICIO 34 : Un muelle mide 7 cm cuando colgamos de él un peso de 10 gramos, y mide 13 cm cuando colgamos de él 80 gramos.

a) Estima, mediante interpolación lineal, cuánto medirá si colgamos de él 50 gramos.

b) Escribe la ecuación de la recta que nos da la longitud, y, en función del peso que colgamos, x.

c) Representa gráficamente la función anterior.

EJERCICIO 35 : Subiendo una montaña, medimos la temperatura a 360 m de altura, y esta era de 8° C. Cuando estábamos a 720 m de altura, la temperatura era de 6° C.

a) Estima, mediante interpolación lineal, la temperatura que había a 500 m de altura.

b) Halla la expresión analítica de la recta que nos da la temperatura en función de la altura, y represéntala gráficamente.

• Composición de funciones

EJERCICIO 36 : Dadas las funciones $f(x) = 2x^2 - 1$ y $g(x) = \sqrt{x}$, calcula:

a) $(f \circ g)(x)$ b) $(g \circ f)(x)$

EJERCICIO 37 : Considera las funciones f y g definidas por: $f(x) = \frac{x+1}{3}$, $g(x) = x^2 - 1$

Calcula: a) $(f \circ g)(x)$ b) $(g \circ f)(x)$

EJERCICIO 38 : Sabiendo que $f(x) = x - x^2$ y $g(x) = \sin x$, halla:

a) $(g \circ f)(x)$ b) $(g \circ g)(x)$

EJERCICIO 39 : Con las funciones: $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \frac{1}{x}$ hemos obtenido, por composición,

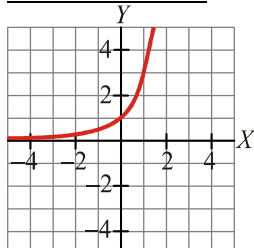
estas otras: $p(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ $q(x) = \frac{1}{x^2} + 1$. Explica cómo, a partir de f y g , se pueden obtener p y q .

EJERCICIO 40 : Dadas las funciones: $f(x) = \frac{x^2}{2}$ y $g(x) = \sqrt{x+1}$. Explica como, a partir de ellas, se

pueden obtener por composición estas otras: $p(x) = \frac{x+1}{2}$ $q(x) = \sqrt{\frac{x^2}{2} + 1}$

• Inversa de una función

EJERCICIO 41 : La siguiente gráfica corresponde a la función $y = f(x)$:



a) Calcula $f^{-1}(3)$ y $f^{-1}(1)$

b) Representa en los mismos ejes, $f^{-1}(x)$ a partir de la gráfica de $f(x)$

EJERCICIO 42 : Halla la función inversa de estas funciones y comprobarlo analíticamente:

a) $f(x) = \frac{2x+1}{3}$

b) $y = 4x^3 - 1$

c) $y = 3 - \sqrt{2x^2 - 1}$

d) $y = \frac{x-5}{2x+1}$

• Funciones exponenciales y logarítmicas

EJERCICIO 43 : Representa la gráfica de las siguientes funciones y estudia sus propiedades

a) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}$

b) $y = 1 + \log_2 x$

c) $y = \log_{1/3} x$

d) $y = 2^{1+x}$

e) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

f) $y = \log(x+1)$

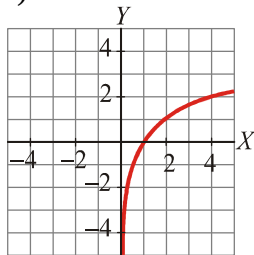
g) $y = e^x$

h) $y = \ln x$

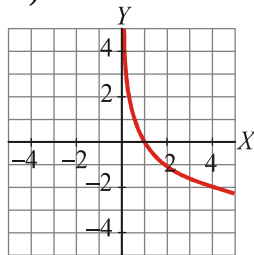
EJERCICIO 44 : Asocia_cada una de las siguientes gráficas con su ecuación:

a) $y = 2^x$ b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ c) $y = \log_2 x$ d) $y = \log_{1/2} x$

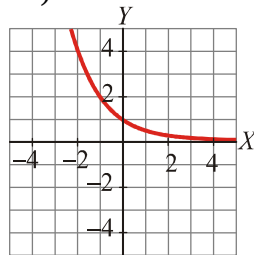
I)



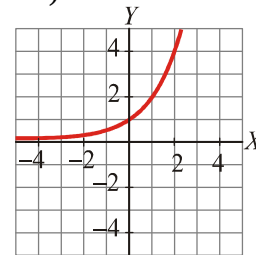
II)



III)



IV)

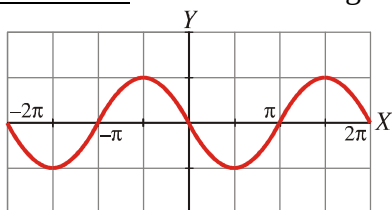


EJERCICIO 45 : Una cierta población crece de acuerdo con la ecuación $y = 1 + k \cdot e^{at}$ donde t es el tiempo en meses e y es el número de individuos en miles.

- a) Calcula k y a sabiendo que $y(0) = 1,2$ y que $y(10) = 1 + 0,2e \approx 1,54$
 b) Representa la función obtenida con los valores de k y a que has hallado.

• Funciones trigonométricas

EJERCICIO 46 : Considera la siguiente gráfica:

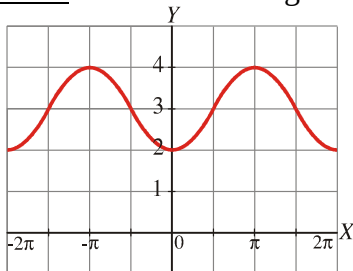


- a) Di cuál de estas expresiones analíticas le corresponde:

$y = \cos(x + \pi)$ $y = \sin(x + \pi)$ $y = \cos 2x$ $y = \sin 2x$

- b) Di cuál es su dominio de definición, cuál es su periodo y qué valores mínimo y máximo alcanza.

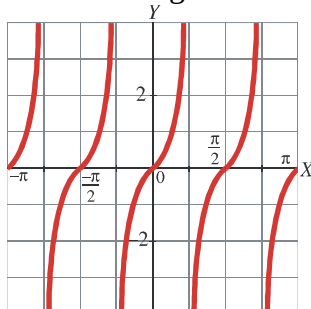
EJERCICIO 47 : Considera la siguiente gráfica y responde:



- a) ¿Cuál de estas es su expresión analítica?
 $y = 3 - \sin x$ $y = 3 - \cos x$
 $y = 3 + \cos x$ $y = 3 + \sin x$
 b) ¿Cuál es su dominio de definición?
 c) ¿Es una función continua?
 d) ¿Es periódica? ¿Cuál es su periodo?
 e) ¿Qué valores mínimo y máximo alcanza?

EJERCICIO 48 :

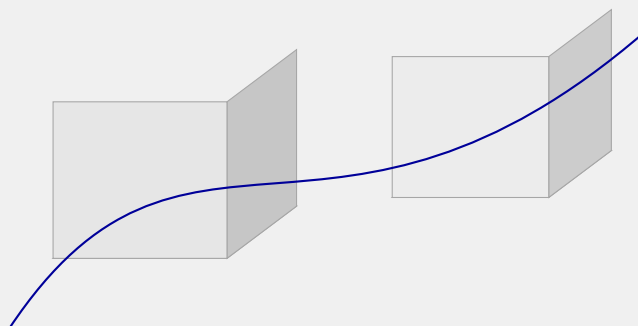
- a) Di cuál de las siguientes expresiones se corresponde con la gráfica:



$y = 2 \cos x$
 $y = 2 \operatorname{tg} x$
 $y = \operatorname{tg} 2x$
 $y = 2 + \cos x$
 $y = \cos 2x$

- b) Para la función anterior, di cuál es su dominio, estudia su continuidad e indica cuál es su periodo.

Resolución completa del examen de Matemáticas I Funciones elementales (1º Bachillerato)



“La esencia de las matemáticas reside en su libertad.”

Georg Cantor

Índice

1. Índice de ejercicios con hipervínculos	3
1.1. Dominio, recorrido y funciones elementales	3
1.2. Funciones lineales e interpolación	3
1.3. Cuadráticas, radicales e inversa	3
1.4. Transformaciones, trozos y valor absoluto	3
1.5. Repaso y modelización	4
1.6. Composición, inversa, exponenciales y trigonométricas	4
2. Resolución completa	5
2.1. Ejercicio 1	5
2.2. Ejercicio 2	6
2.3. Ejercicio 3	6
2.4. Ejercicio 4	7
2.5. Ejercicio 5	7
2.6. Ejercicio 6	7
2.7. Ejercicio 7	8
2.8. Ejercicio 8	8
2.9. Ejercicio 9	8
2.10. Ejercicio 10	9
2.11. Ejercicio 11	9
2.12. Ejercicio 12	9
2.13. Ejercicio 13	10
2.14. Ejercicio 14	10
2.15. Ejercicio 15	10
2.16. Ejercicio 16	11
2.17. Ejercicio 17	11
2.18. Ejercicio 18	12
2.19. Ejercicio 19	12
2.20. Ejercicio 20	13
2.21. Ejercicio 21	15
2.22. Ejercicio 22	15
2.23. Ejercicio 23	15
2.24. Ejercicio 24	16
2.25. Ejercicio 25	16
2.26. Ejercicio 26	16

2.27. Ejercicio 27	17
2.28. Ejercicio 28	17
2.29. Ejercicio 29	17
2.30. Ejercicio 30	18
2.31. Ejercicio 31	18
2.32. Ejercicio 32	18
2.33. Ejercicio 33	19
2.34. Ejercicio 34	19
2.35. Ejercicio 35	20
2.36. Ejercicio 36	20
2.37. Ejercicio 37	20
2.38. Ejercicio 38	21
2.39. Ejercicio 39	21
2.40. Ejercicio 40	21
2.41. Ejercicio 41	21
2.42. Ejercicio 42	22
2.43. Ejercicio 43	22
2.44. Ejercicio 44	23
2.45. Ejercicio 45	23
2.46. Ejercicio 46	23
2.47. Ejercicio 47	24
2.48. Ejercicio 48	24

1. Índice de ejercicios con hipervínculos

1.1. Dominio, recorrido y funciones elementales

- [Ejercicio 1](#)
- [Ejercicio 2](#)
- [Ejercicio 3](#)
- [Ejercicio 4](#)
- [Ejercicio 5](#)

1.2. Funciones lineales e interpolación

- [Ejercicio 6](#)
- [Ejercicio 7](#)
- [Ejercicio 8](#)
- [Ejercicio 9](#)
- [Ejercicio 10](#)
- [Ejercicio 11](#)
- [Ejercicio 12](#)
- [Ejercicio 13](#)

1.3. Cuadráticas, radicales e inversa

- [Ejercicio 14](#)
- [Ejercicio 15](#)
- [Ejercicio 16](#)
- [Ejercicio 17](#)
- [Ejercicio 18](#)
- [Ejercicio 19](#)
- [Ejercicio 20](#)

1.4. Transformaciones, trozos y valor absoluto

- [Ejercicio 21](#)
- [Ejercicio 22](#)
- [Ejercicio 23](#)
- [Ejercicio 24](#)

- Ejercicio 25
- Ejercicio 26
- Ejercicio 27
- Ejercicio 28

1.5. Repaso y modelización

- Ejercicio 29
- Ejercicio 30
- Ejercicio 31
- Ejercicio 32
- Ejercicio 33
- Ejercicio 34
- Ejercicio 35

1.6. Composición, inversa, exponenciales y trigonométricas

- Ejercicio 36
- Ejercicio 37
- Ejercicio 38
- Ejercicio 39
- Ejercicio 40
- Ejercicio 41
- Ejercicio 42
- Ejercicio 43
- Ejercicio 44
- Ejercicio 45
- Ejercicio 46
- Ejercicio 47
- Ejercicio 48

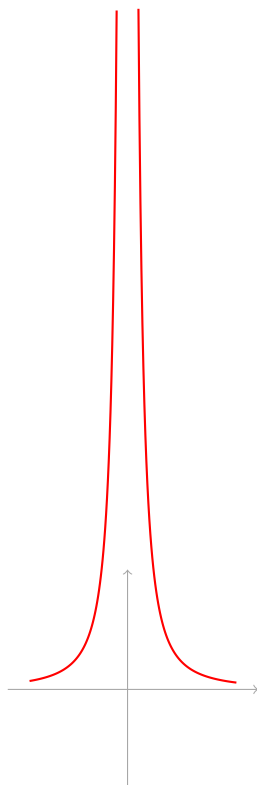
2. Resolución completa

2.1. Ejercicio 1

Pregunta: decidir qué dibujos representan funciones.

Criterio: test de la recta vertical.

- Gráfica izquierda: sí representa función (para cada x del dominio hay un único y).
- Gráfica derecha: no representa función (hay valores de x con dos imágenes).



2.2. Ejercicio 2

Dominios:

$$\text{a) } y = \frac{1}{x^2 - 6} \Rightarrow \text{Dom} = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{6}\}.$$

$$\text{b) } y = \sqrt{1+x} \Rightarrow \text{Dom} = [-1, \infty).$$

$$\text{c) } y = \frac{1}{x^2 + 1} \Rightarrow \text{Dom} = \mathbb{R}.$$

$$\text{d) } y = \frac{1}{\sqrt{x+2}} \Rightarrow x+2 > 0 \Rightarrow \text{Dom} = (-2, \infty).$$

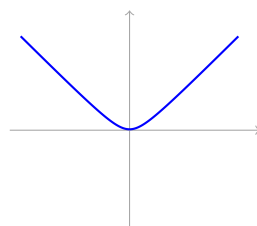
$$\text{e) } y = \sqrt[3]{2x-4} \Rightarrow \text{Dom} = \mathbb{R}.$$

$$\text{f) } y = \frac{x}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow x+1 > 0 \Rightarrow \text{Dom} = (-1, \infty).$$

$$\text{g) } y = \sqrt{x^2 - 4} \Rightarrow x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow \text{Dom} = (-\infty, -2] \cup [2, \infty).$$

$$\begin{aligned} \text{h) } y = \sqrt{\frac{x-1}{2x+3}} &\Rightarrow \frac{x-1}{2x+3} \geq 0, \quad x \neq -\frac{3}{2} \\ &\Rightarrow \text{Dom} = (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup [1, \infty). \end{aligned}$$

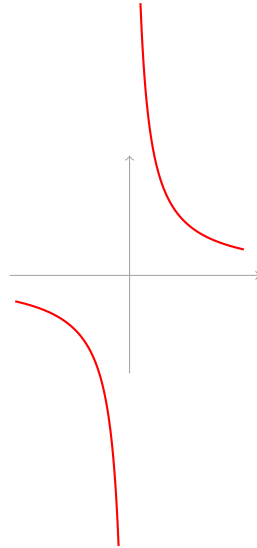
$$\text{i) } y = \log\left(\frac{x-3}{(x-2)^2}\right) \Rightarrow \frac{x-3}{(x-2)^2} > 0 \Rightarrow x > 3.$$



2.3. Ejercicio 3

Leyendo las cuatro gráficas del enunciado:

- a) Tipo hipérbola: $\text{Dom} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\text{Rec} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- b) Tipo logarítmica: $\text{Dom} = (0, \infty)$, $\text{Rec} = \mathbb{R}$.
- c) Tipo radical desplazada: $\text{Dom} = [2, \infty)$, $\text{Rec} = [0, \infty)$.
- d) Tipo $1/x^2$: $\text{Dom} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\text{Rec} = (0, \infty)$.

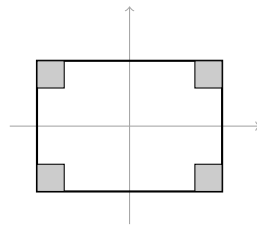


2.4. Ejercicio 4

$$V(x) = x(20 - 2x)(30 - 2x).$$

Condiciones geométricas: $x > 0$, $20 - 2x > 0$, $30 - 2x > 0$. La más restrictiva es $x < 10$.

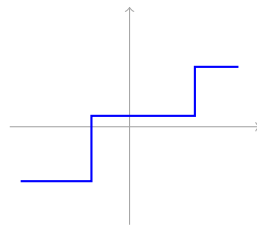
$$\boxed{\text{Dom}(V) = (0, 10)}.$$



2.5. Ejercicio 5

La carga máxima admitida es 30 toneladas y no tiene sentido carga negativa.

$$\boxed{\text{Dom} = [0, 30] \text{ (toneladas)}}.$$

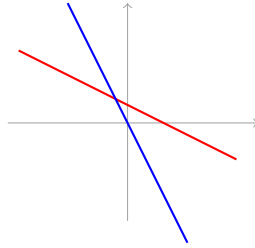


2.6. Ejercicio 6

a) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$: pendiente $m = -\frac{1}{2}$, ordenada $\frac{1}{3}$, decreciente, $\text{Dom} = \text{Rec} = \mathbb{R}$.

b) $2x + y - 1 = 0 \Rightarrow y = -2x + 1$: $m = -2$, decreciente, corta en $(0, 1)$ y $(\frac{1}{2}, 0)$.

c) $y = \frac{2x-3}{4} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$: $m = \frac{1}{2}$, creciente.

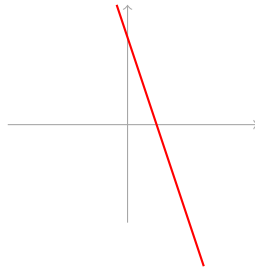


2.7. Ejercicio 7

De la gráfica se identifica aproximadamente intersección en $y = 3$ y en $x = 1$.

Pendiente: $m = \frac{0 - 3}{1 - 0} = -3$. Ecuación:

$$\boxed{y = -3x + 3}.$$



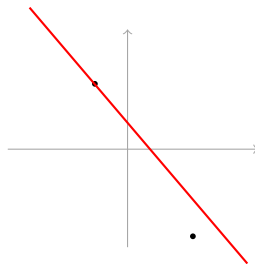
2.8. Ejercicio 8

Recta por $(2, -4)$ y $(-1, 3)$:

$$m = \frac{3 - (-4)}{-1 - 2} = \frac{7}{-3} = -\frac{7}{3}.$$

Forma punto-pendiente:

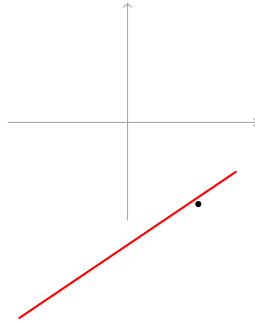
$$y + 4 = -\frac{7}{3}(x - 2) \Rightarrow \boxed{y = -\frac{7}{3}x + \frac{2}{3}}.$$



2.9. Ejercicio 9

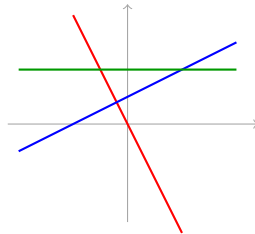
Pasa por $(2, -1)$ y tiene $m = \frac{2}{3}$:

$$y + 1 = \frac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow \boxed{y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}}.$$



2.10. Ejercicio 10

- I) $2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x \Rightarrow m = -2$.
- II) $x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{1}{2}$.
- III) $y = 2 \Rightarrow m = 0$.



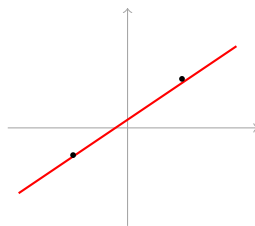
2.11. Ejercicio 11

Interpolación lineal con puntos $(60, 35.96)$ y $(80, 43.56)$:

$$m = \frac{43.56 - 35.96}{80 - 60} = 0.38.$$

Para $x = 70$:

$$P(70) = 35.96 + 0.38(70 - 60) = 35.96 + 3.8 = \boxed{39.76 \text{ €}}.$$



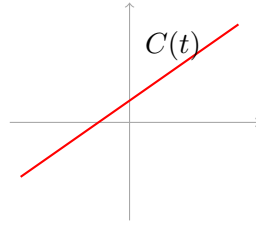
2.12. Ejercicio 12

Datos: $(6, 246)$ y $(15, 570)$.

$$m = \frac{570 - 246}{15 - 6} = 36 \text{ €/mes.}$$

Modelo: $C(t) = 36t + b$. Con $t = 6$: $246 = 216 + b \Rightarrow b = 30$.

$$C(12) = 36 \cdot 12 + 30 = \boxed{462 \text{ €}}.$$



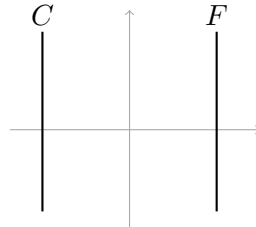
2.13. Ejercicio 13

Relación lineal Celsius–Fahrenheit:

$$F = \frac{9}{5}C + 32 \Rightarrow C = \frac{5}{9}(F - 32).$$

Para $F = 70$:

$$C = \frac{5}{9}(70 - 32) = \frac{190}{9} \approx \boxed{21.1^\circ\text{C}}.$$



2.14. Ejercicio 14

Para $y = ax^2 + bx + c$, el vértice está en $x_v = -\frac{b}{2a}$.

a) $y = 2x^2 - 10x + 8$:

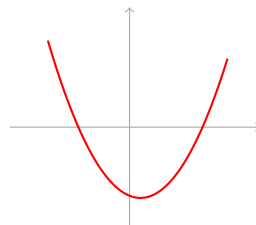
$$x_v = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}, \quad y_v = 2\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 10\left(\frac{5}{2}\right) + 8 = -\frac{9}{2}.$$

$$V_a = \left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}\right).$$

b) $y = 2x^2 - 8x + 2$:

$$x_v = \frac{8}{4} = 2, \quad y_v = 2(2)^2 - 8(2) + 2 = -6.$$

$$V_b = (2, -6).$$

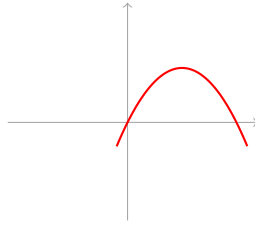


2.15. Ejercicio 15

$$y = -x^2 + 4x = x(4 - x).$$

Cortes con eje X : $y = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = 4$: puntos $(0, 0)$ y $(4, 0)$.

Corte con eje Y : $x = 0 \Rightarrow y = 0$: punto $(0, 0)$.



2.16. Ejercicio 16

a) $y = x^2 - 3x = x(x - 3)$.

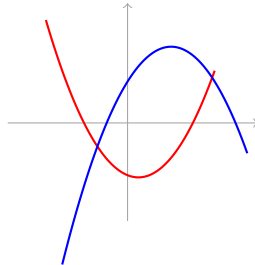
- Dominio: $\mathbb{R}$. Vértice en $x = \frac{3}{2}$, $y = -\frac{9}{4}$.
- Cortes: $x = 0, 3$ y $y(0) = 0$.
- Decrece en $(-\infty, \frac{3}{2})$, crece en $(\frac{3}{2}, \infty)$.

b) $y = -x^2 + 4x - 1 = -(x - 2)^2 + 3$.

- Vértice $(2, 3)$, máximo 3.
- Cortes con X : $x = 2 \pm \sqrt{3}$.

c) $y = (x - 1)^2 + 3$.

- Vértice $(1, 3)$, mínimo 3.
- No corta eje X .



2.17. Ejercicio 17

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ con:

$$f(1) = 0, f(2) = 3, f(-1) = 6.$$

Sistema:

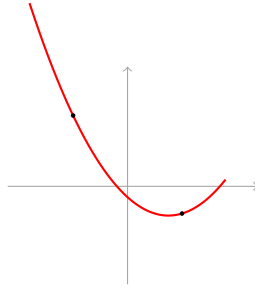
$$\begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ 4a + 2b + c &= 3 \\ a - b + c &= 6 \end{aligned}$$

De (primera) - (tercera): $2b = -6 \Rightarrow b = -3$.

De primera: $a + c = 3$. De segunda: $4a + c = 9$.

Resta: $3a = 6 \Rightarrow a = 2$, y $c = 1$.

$$\boxed{f(x) = 2x^2 - 3x + 1}, \quad \boxed{f(0) = 1}.$$



2.18. Ejercicio 18

Datos: $(3, 10)$, $(4, 12)$, $(6, 20)$ (gastos, ingresos).

Sea $I(x) = ax^2 + bx + c$:

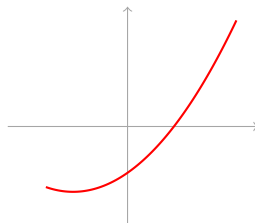
$$\begin{cases} 9a + 3b + c = 10 \\ 16a + 4b + c = 12 \\ 36a + 6b + c = 20 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{2}{3}, b = -\frac{8}{3}, c = 12.$$

$$I(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 12.$$

Si $x = 5$:

$$I(5) = \frac{2}{3} \cdot 25 - \frac{8}{3} \cdot 5 + 12 = \frac{46}{3} \approx 15.33.$$

Ingreso esperado: $\frac{46}{3}$ millones de euros.



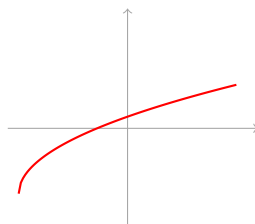
2.19. Ejercicio 19

a) $y = \sqrt{x+1}$: Dom = $[-1, \infty)$, Rec = $[0, \infty)$, creciente.

b) $y = -\sqrt{x-2}$: Dom = $[2, \infty)$, Rec = $(-\infty, 0]$, decreciente.

c) $y = \sqrt{2-x}$: Dom = $(-\infty, 2]$, Rec = $[0, \infty)$, decreciente.

d) $y = \sqrt{x^2-4}$: Dom = $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$, Rec = $[0, \infty)$, par.



2.20. Ejercicio 20

a) $y = \frac{1}{x-1}$: asíntotas $x = 1$, $y = 0$.

b) $y = \frac{3}{x-4} + 2$: asíntotas $x = 4$, $y = 2$.

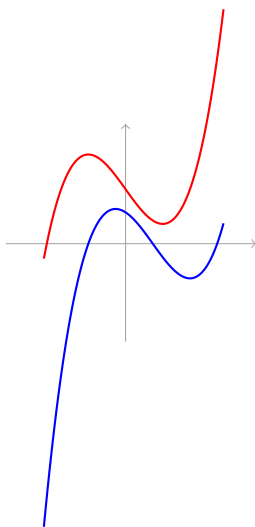
c) $y = \frac{2x+3}{x-3} = 2 + \frac{9}{x-3}$: asíntotas $x = 3$, $y = 2$.

d) $y = \frac{3x-3}{2-x} = -3 - \frac{3}{x-2}$: asíntotas $x = 2$, $y = -3$.

2.21. Ejercicio 21

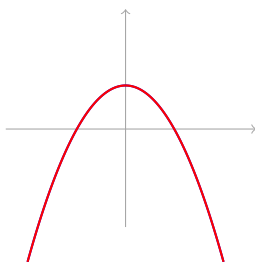
A partir de $y = f(x)$:

- $y = f(x) + 3$: traslación vertical 3 unidades hacia arriba.
- $y = f(x - 2)$: traslación horizontal 2 unidades hacia la derecha.



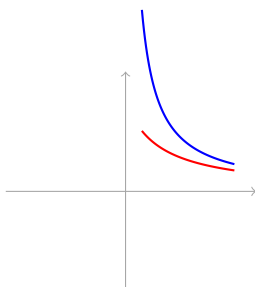
2.22. Ejercicio 22

- $y = f(-x)$: simetría respecto del eje Y.
- $y = 1 + f(x)$: traslación vertical una unidad arriba.



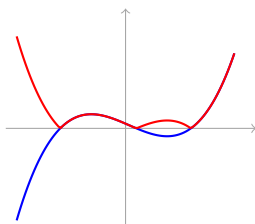
2.23. Ejercicio 23

- $y = f(x + 1)$: traslado una unidad a la izquierda.
- $y = f(x) + 1$: traslado una unidad hacia arriba.



2.24. Ejercicio 24

$y = |f(x)|$ se obtiene reflejando sobre el eje X las partes de f que estén por debajo del eje.

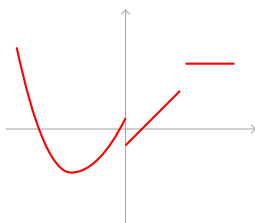


2.25. Ejercicio 25

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 + 1, & x \leq -1 \\ x - 1, & -1 < x \leq 2 \\ 5, & x > 2 \end{cases}$$

$$f(-1) = 4(1) + 1 = 5, \quad f(0) = 0 - 1 = -1, \quad f(3) = 5.$$

$$\boxed{f(-1) = 5, f(0) = -1, f(3) = 5}.$$



2.26. Ejercicio 26

a)

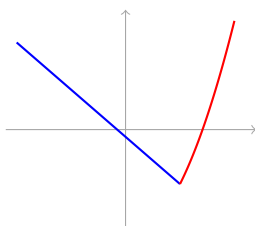
$$y = \begin{cases} -2x + 1, & x \leq 1 \\ x^2 - 2, & x > 1 \end{cases}$$

Dominio $\mathbb{R}$. En $x = 1$, ambos lados valen -1 , luego es continua. Recorrido $[-1, \infty)$.

b)

$$y = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \leq 1 \\ -x + \frac{1}{2}, & x > 1 \end{cases}$$

Dominio $\mathbb{R}$. En $x = 1$: izquierda $\frac{1}{2}$, derecha $-\frac{1}{2}$, discontinuidad de salto.



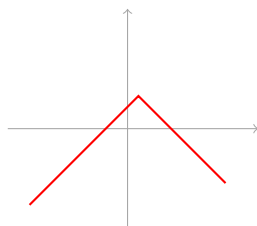
2.27. Ejercicio 27

a) $y = |2x - 4|$: vértice $(2, 0)$, $\text{Dom} = \mathbb{R}$, $\text{Rec} = [0, \infty)$.

b) $y = \left| \frac{x-1}{2} \right|$: vértice $(1, 0)$, abre en V con pendiente $\pm \frac{1}{2}$.

c) $y = |x^2 + 2x| + x - 2$.

$$y = \begin{cases} x^2 + 3x - 2, & x \leq -2 \text{ o } x \geq 0 \\ -x^2 - x - 2, & -2 < x < 0 \end{cases}$$



2.28. Ejercicio 28

a) $y = |4x + 2|$: vértice $(-\frac{1}{2}, 0)$.

b) $y = \sqrt{x + 3}$: dominio $[-3, \infty)$.

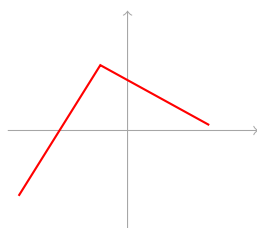
c) $y = \left| \frac{x}{3} - 1 \right| + 4$: mínimo en $x = 3$, valor 4.

d) $y = \frac{x^2}{2} - 2x + 2 = \frac{1}{2}(x - 2)^2$.

e)

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 0 \\ x^2 - 3x + 4, & 0 < x < 2 \\ 2, & 2 < x < 7 \end{cases}$$

f) $y = \frac{3-x}{x+1}$: $\text{Dom} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, asíntotas $x = -1$, $y = -1$.

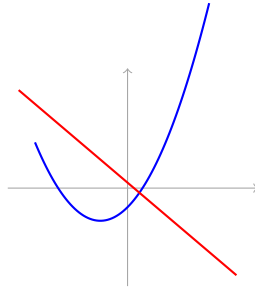


2.29. Ejercicio 29

Asociación (leyendo forma general de cada gráfica):

$$\boxed{\text{I} \rightarrow b, \text{II} \rightarrow d, \text{III} \rightarrow a, \text{IV} \rightarrow c.}$$

Justificación: I es parábola con vértice en $(-2, 0)$; II parábola cóncava hacia abajo; III recta decreciente con ordenada positiva grande; IV recta decreciente con menor pendiente e intersección distinta.

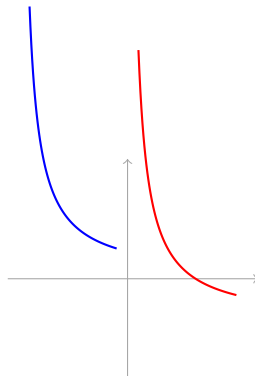


2.30. Ejercicio 30

Correspondencia:

$$\boxed{\text{I} \rightarrow c, \text{II} \rightarrow b, \text{III} \rightarrow a, \text{IV} \rightarrow d.}$$

- II es una raíz que empieza en $x = 1$.
- IV es raíz decreciente con extremo en $x = 2$.
- I y III son racionales; III tiene asíntota vertical en $x = -4$, I en $x = 0$ con traslación vertical.

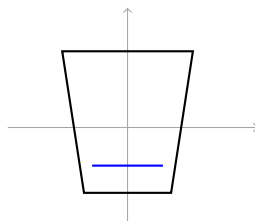


2.31. Ejercicio 31

Peso del agua: $1000x$ gramos si x litros.

Peso total:

$$P(x) = 2550 + 1000x, \quad 0 \leq x \leq 20.$$



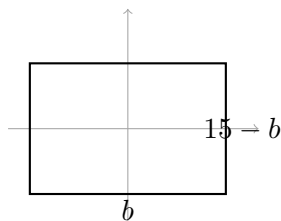
2.32. Ejercicio 32

Perímetro $2(b + h) = 30 \Rightarrow h = 15 - b$.

Área en función de la base:

$$A(b) = b(15 - b) = 15b - b^2.$$

Para longitudes positivas: $0 < b < 15$.



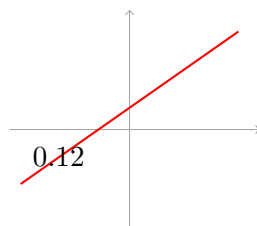
2.33. Ejercicio 33

Modelo lineal: $C(t) = 0.12 + mt$.

Con $t = 5$ y $C = 0.87$:

$$0.87 = 0.12 + 5m \Rightarrow m = 0.15.$$

$$\boxed{C(t) = 0.12 + 0.15t}, \quad t \geq 0.$$



2.34. Ejercicio 34

Datos $(x, y) = (10, 7)$ y $(80, 13)$.

$$m = \frac{13 - 7}{80 - 10} = \frac{6}{70} = \frac{3}{35}.$$

a)

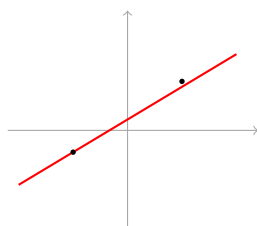
$$y(50) = 7 + \frac{3}{35}(50 - 10) = 7 + \frac{24}{7} = \frac{73}{7} \approx 10.43 \text{ cm}.$$

b)

$$y = \frac{3}{35}x + b, \quad 7 = \frac{3}{35} \cdot 10 + b \Rightarrow b = \frac{43}{7}.$$

$$\boxed{y = \frac{3}{35}x + \frac{43}{7}}.$$

c) recta creciente.



2.35. Ejercicio 35

Puntos (360, 8) y (720, 6) (altura, temperatura):

$$m = \frac{6 - 8}{720 - 360} = -\frac{1}{180}.$$

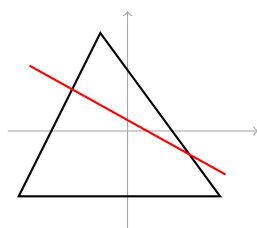
a)

$$T(500) = 8 - \frac{500 - 360}{180} = 8 - \frac{7}{9} = \frac{65}{9} \approx 7.22^\circ C.$$

b)

$$T(h) = -\frac{1}{180}h + b, \quad 8 = -2 + b \Rightarrow b = 10.$$

$$T(h) = 10 - \frac{h}{180}.$$

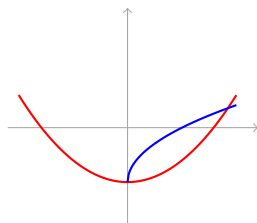


2.36. Ejercicio 36

$$f(x) = 2x^2 - 1, \quad g(x) = \sqrt{x}.$$

$$(f \circ g)(x) = f(\sqrt{x}) = 2x - 1, \quad x \geq 0.$$

$$(g \circ f)(x) = g(2x^2 - 1) = \sqrt{2x^2 - 1}, \quad |x| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

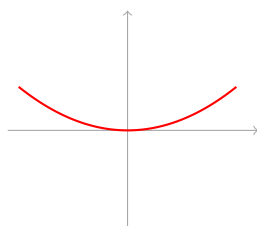


2.37. Ejercicio 37

$$f(x) = \frac{x+1}{3}, \quad g(x) = x^2 - 1.$$

$$(f \circ g)(x) = \frac{(x^2 - 1) + 1}{3} = \frac{x^2}{3}.$$

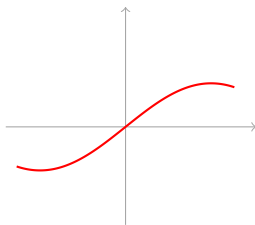
$$(g \circ f)(x) = \left(\frac{x+1}{3}\right)^2 - 1 = \frac{x^2 + 2x - 8}{9}.$$



2.38. Ejercicio 38

$$f(x) = x - x^2, \quad g(x) = \sin x.$$

$$(g \circ f)(x) = \sin(x - x^2), \quad (g \circ g)(x) = \sin(\sin x).$$

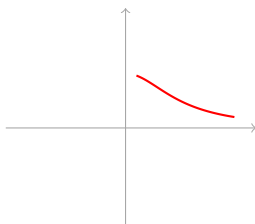


2.39. Ejercicio 39

$$\text{Con } f(x) = x^2 + 1 \text{ y } g(x) = \frac{1}{x}:$$

$$p(x) = \frac{1}{x^2 + 1} = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

$$q(x) = \frac{1}{x^2} + 1 = f\left(\frac{1}{x}\right) = (f \circ g)(x).$$

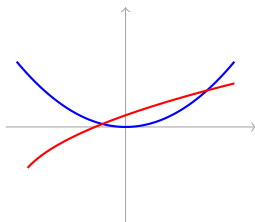


2.40. Ejercicio 40

$$f(x) = \frac{x^2}{2}, \quad g(x) = \sqrt{x+1}.$$

$$(f \circ g)(x) = \frac{(\sqrt{x+1})^2}{2} = \frac{x+1}{2} = p(x).$$

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{\frac{x^2}{2} + 1} = \sqrt{\frac{x^2 + 2}{2}} = q(x) \text{ (según simplificación algebraica).}$$

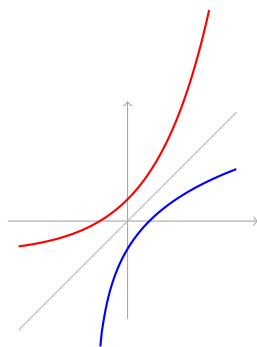


2.41. Ejercicio 41

Leyendo la gráfica (tipo exponencial):

$$f^{-1}(3) \approx \log_2 3 \approx 1.585, \quad f^{-1}(1) = 0.$$

La gráfica de f^{-1} se obtiene reflejando la de f respecto de la recta $y = x$.



2.42. Ejercicio 42

a) $f(x) = \frac{2x+1}{3}$:

$$y = \frac{2x+1}{3} \Rightarrow x = \frac{3y-1}{2} \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \frac{3x-1}{2}}.$$

b) $y = 4x^3 - 1$:

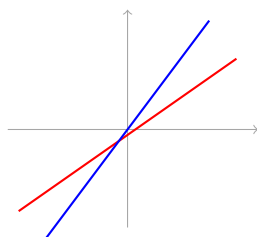
$$x = \sqrt[3]{\frac{y+1}{4}} \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{4}}}.$$

c) $y = 3 - \sqrt{2x^2 - 1}$: no es inyectiva en todo su dominio. Restringiendo a $x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\sqrt{2x^2 - 1} = 3 - y \Rightarrow x = \sqrt{\frac{(3-y)^2 + 1}{2}}.$$

d) $y = \frac{x-5}{2x+1}$:

$$y(2x+1) = x-5 \Rightarrow x(2y-1) = -(y+5) \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = -\frac{x+5}{2x-1}}.$$



2.43. Ejercicio 43

a) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}$: dominio $\mathbb{R}$, recorrido $(0, \infty)$, decreciente, asíntota $y = 0$.

b) $y = 1 + \log_2 x$: dominio $(0, \infty)$, recorrido $\mathbb{R}$, creciente, asíntota $x = 0$.

c) $y = \log_{1/3} x$: dominio $(0, \infty)$, decreciente.

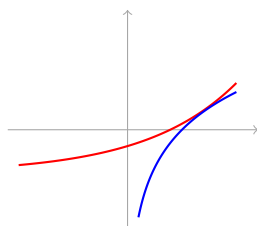
d) $y = 2^{1+x}$: exponencial creciente.

e) $y = (2/3)^x$: exponencial decreciente.

f) $y = \log(x + 1)$: dominio $(-1, \infty)$.

g) $y = e^x$: creciente, pasa por $(0, 1)$.

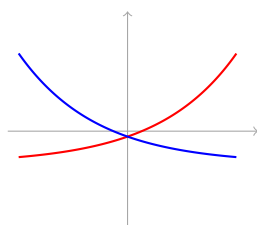
h) $y = \ln x$: dominio $(0, \infty)$, creciente.



2.44. Ejercicio 44

Asociación correcta:

$$\boxed{\text{I} \rightarrow c (\log_2 x), \text{II} \rightarrow d (\log_{1/2} x), \text{III} \rightarrow b ((1/2)^x), \text{IV} \rightarrow a (2^x)}.$$



2.45. Ejercicio 45

Modelo: $y = 1 + ke^{at}$.

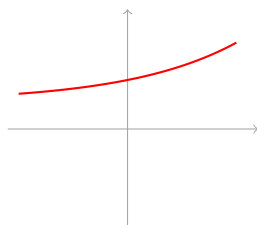
Con $y(0) = 1.2$:

$$1 + k = 1.2 \Rightarrow k = 0.2.$$

Con $y(10) = 1 + 0.2e$:

$$1 + 0.2e^{10a} = 1 + 0.2e \Rightarrow e^{10a} = e \Rightarrow a = 0.1.$$

$$\boxed{y(t) = 1 + 0.2e^{0.1t}}.$$



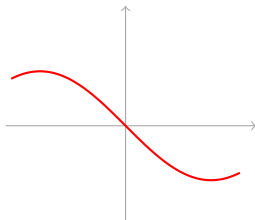
2.46. Ejercicio 46

Por la forma y el desfase, la gráfica corresponde a

$$\boxed{y = \sin(x + \pi) = -\sin x}.$$

Propiedades:

- Dominio: $\mathbb{R}$.
- Continua en $\mathbb{R}$.
- Período: 2π .
- Máximo: 1, mínimo: -1 .

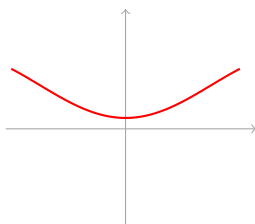


2.47. Ejercicio 47

La gráfica oscila alrededor de 3 y en $x = 0$ toma mínimo 2, por lo que:

$$\boxed{y = 3 - \cos x}.$$

- Dominio: $\mathbb{R}$.
- Continua: sí, en todo $\mathbb{R}$.
- Periódica: sí, período 2π .
- Mínimo: 2; máximo: 4.



2.48. Ejercicio 48

La gráfica con ramas y asíntotas verticales corresponde a una tangente escalada:

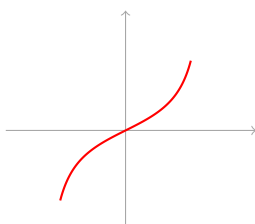
$$\boxed{y = 2 \tan x}.$$

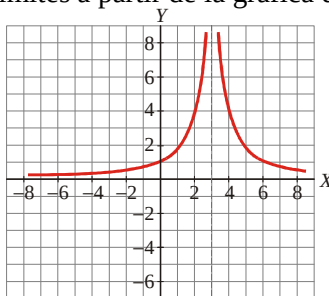
Dominio:

$$\text{Dom} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

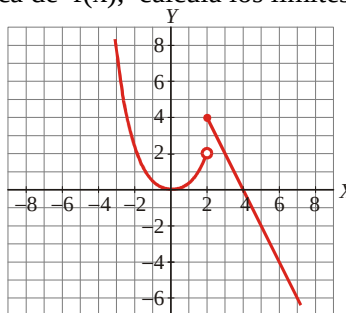
Continuidad: continua en cada intervalo abierto entre asíntotas consecutivas.

Período: $\boxed{\pi}$.

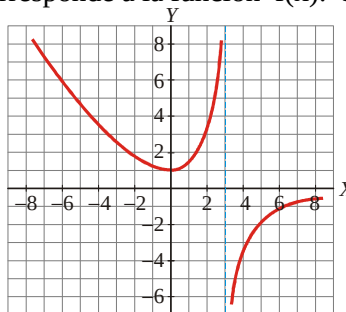


TEMA 11 – LÍMITES, CONTINUIDAD Y RAMAS INFINITAS**Cálculo de límites sobre la gráfica**EJERCICIO 1 : Calcula los siguientes límites a partir de la gráfica de $f(x)$:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

EJERCICIO 2 : Dada la siguiente gráfica de $f(x)$, calcula los límites que se indican:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

EJERCICIO 3 : La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x)$. Sobre ella, calcula los límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Cálculo de límites inmediatosEJERCICIO 4 : Calcula los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4}{x^2 + 2x + 3}$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 - 9}$ c) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos x$ d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{x^2 + x + 1}$
- e) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{6-3x}$ f) $\lim_{x \rightarrow 1} \log x$ g) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} \right)$ h) $\lim_{x \rightarrow -2} 3^{x+1}$
- i) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x$ j) $\lim_{x \rightarrow -2} (3-x)^2$ k) $\lim_{x \rightarrow -8} (1 + \sqrt{-2x})$ l) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x$

Cálculo de límites e interpretación geométrica**EJERCICIO 5 :** Calcula los siguientes límites e interpreta geoméricamente el resultado.

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+1}{(2-x)^3}$	2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x^3}{x^2-1}$	3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{5+3x}$	4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{5+3x}$
5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1-x)^3}$	6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-x^3}{x^2}$	7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2-x}$	8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-2x+1}$
9) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{4-x^2}$	10) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{2x-6}$	11) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2+1}$	12) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+5}{x+3}$
13) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$	14) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x+3x^3)$	15) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+3x}{x^2-1}$	16) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2} - x^2 \right)$
17) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{1+x^2}$	18) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$	19) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x^2-4}$	20) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4-3x}{x^4+1}$

EJERCICIO 6 : Calcular los siguientes límites:

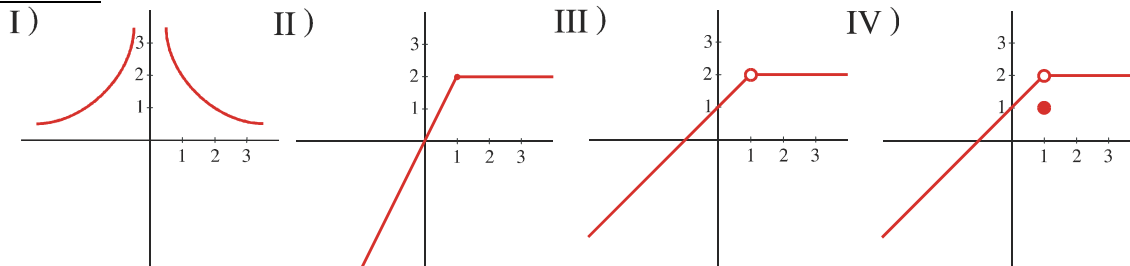
a) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$	b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2-3x} - x \right)$	c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^2+2x+1}}{2x+7}$	d) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x}{x-1} \right)^{\frac{2}{x-4}}$
e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1}-1}{x^2-1}$	f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{x+1}$	g) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x+2}{2x} \right)^{\frac{1}{x-2}}$	h) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3+2x^2-4x-8}{x^3+x^2-4x-4}$
i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^3-x^2-x+1}$	j) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x-2}$	k) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+4}{(x+1)^2}$	l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2-3x+7} - 2x$

EJERCICIO 7 : Calcular los siguientes límites:

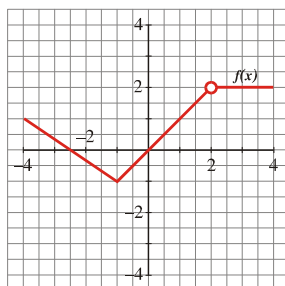
a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2-24x+48}{x-4}$	b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3-14x^2+12x}{x^3-10x^2+27x-18}$	c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x+b} \right)^{x+c}$	d) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-x-12}$
e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$	f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-4x}{x^2-3x+2}$	g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x}$	h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+1}{x+3}$
i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-3}{x^3-1}$	j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-5}{\sqrt{x+4}-3}$	k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2x+3} \right)^{2x}$	l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{\frac{x}{2}}$
m) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2+x} - x$	n) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-3x^2+9x-27}{x^2-9}$		

EJERCICIO 8 : Calcula el límite cuando $x \rightarrow 3$ de cada una de las siguientes funciones y representa los resultados obtenidos en cada caso:

a) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x$	b) $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$	c) $f(x) = \frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$

Estudio de la continuidad a partir de una gráfica**EJERCICIO 9 :** Dadas las funciones:

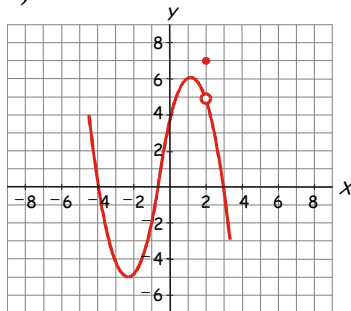
- a) Di si son continuas o no. b) Halla la imagen de $x = 1$ para cada una de las cuatro funciones.

EJERCICIO 10 : Dada la gráfica:

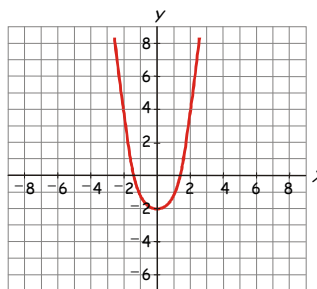
- a) Di si $f(x)$ es continua o no. Razona tu respuesta. b) Halla $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$ y $f(3)$.

EJERCICIO 11 : ¿Son continuas las siguientes funciones en $x = 2$?

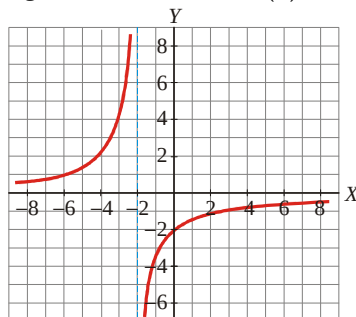
a)



b)



Si alguna de ellas no lo es, indica la razón de la discontinuidad.

EJERCICIO 12 : Esta es la gráfica de la función $f(x)$:a) ¿Es continua en $x = -2$?b) ¿Y en $x = 0$?

Si no es continua en alguno de los puntos, indica la causa de la discontinuidad.

Estudio de la continuidad a partir de su expresión analítica**EJERCICIO 13 :** Averiguar los puntos e intervalos de discontinuidad de las siguientes funciones:

$$a) y = \sqrt{\frac{x+5}{x^2-5x+6}} \quad b) y = \frac{x+5}{x^2-5x+6} \quad c) y = \sqrt{x^2-5x+6}$$

EJERCICIO 14 : Estudia la continuidad de las funciones siguientes y represéntalas gráficamente:

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{3} & \text{si } x \leq 4 \\ x^2-15 & \text{si } x > 4 \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} x^2-2x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 3x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad c) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ \frac{3x-1}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} x^2-3 & \text{si } x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad e) f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad f) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 1-x^2 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

EJERCICIO 15 : Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } -6 \leq x < -2 \\ 1 & \text{si } -2 < x \leq 1 \\ 2x+1 & \text{si } 1 < x < 3 \\ -2x+13 & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ 3 & \text{si } x > 5 \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2+x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad c) f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{3}{x+3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

EJERCICIO 16 : Hallar $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ siendo

$$f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{si } x \geq 2 \\ 0 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

a) ¿ Existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$?b) Estudia su continuidad en el punto $x = 2$ **EJERCICIO 17 :** Halla el valor de k para que $f(x)$ sea continua en $x=1$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

EJERCICIO 18 : Halla el valor de m para que $f(x) = \begin{cases} 3x^2+mx-1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x+3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.**Asíntotas y ramas infinitas****EJERCICIO 19 :** Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a ellas:

$$a) f(x) = \frac{1}{4-x^2} \quad b) f(x) = \frac{x+3}{x^2-x-2} \quad c) f(x) = \frac{2x^2}{(x+2)^2} \quad d) f(x) = \frac{-x^3+x}{2}$$

$$e) f(x) = \frac{x^3-1}{x+3} \quad f) f(x) = \frac{x}{x^2-9} \quad g) f(x) = \frac{x^3-2x^2}{2x+1} \quad h) f(x) = \frac{x^2+2}{x+1}$$

$$i) f(x) = \frac{x^4+2x}{x^2+1} \quad j) f(x) = \frac{1-3x}{2-x} \quad k) f(x) = \frac{1+x^2}{x^3} \quad l) f(x) = \frac{x}{x+2}$$

$$m) f(x) = \frac{4x^2-3}{x} \quad n) f(x) = x^2-x$$

Límites, Continuidad y Ramas Infinitas

TEMA 11 · RESOLUCIÓN COMPLETA Y DETALLADA

Matemáticas I · 1.º B Bachillerato · IES Antonio Tovar

*“Las matemáticas no tratan de números ni ecuaciones,
sino de comprender las estructuras profundas del universo.”*

— **Terence Tao** (1975 –), Medalla Fields 2006

ÍNDICE DE EJERCICIOS

Ejercicio	Contenido	Tema
Ej. 1	Límites sobre gráfica — función con discontinuidades	Gráfica
Ej. 2	Límites sobre gráfica — asíntotas y saltos	Gráfica
Ej. 3	Límites sobre gráfica — comportamiento en el infinito	Gráfica
Ej. 4	Límites inmediatos por sustitución directa (12 apartados)	Inmediatos
Ej. 5	Límites e interpretación geométrica (20 apartados)	Asíntotas
Ej. 6	Límites con indeterminaciones (12 apartados)	Indet.
Ej. 7	Límites avanzados — factorización y álgebra (14 apartados)	Avanzados
Ej. 8	Límite en $x \rightarrow 3$ con representación gráfica (3 funciones)	Análisis
Ej. 9	Continuidad a partir de gráficas — 4 funciones	Continuidad
Ej. 10	Continuidad de $f(x)$: valores imagen y razonamiento	Continuidad
Ej. 11	¿Son continuas en $x = 2$? Causas de discontinuidad	Continuidad
Ej. 12	Continuidad en $x = -2$ y $x = 0$	Continuidad
Ej. 13	Puntos e intervalos de discontinuidad (expresión analítica)	Analítica
Ej. 14	Continuidad de funciones definidas a trozos (6 apartados)	Trozos
Ej. 15	Continuidad de funciones complejas a trozos (3 apartados)	Trozos

Formulario esencial: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$: si $\deg P > \deg Q \rightarrow \pm\infty$; si $\deg P = \deg Q \rightarrow \frac{a_n}{b_n}$; si $\deg P < \deg Q \rightarrow 0$. **Continuidad en x_0 :** (1) $\exists f(x_0)$; (2) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$; (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. **Asíntotas:** V: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$; H: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L$; O: $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx)$.

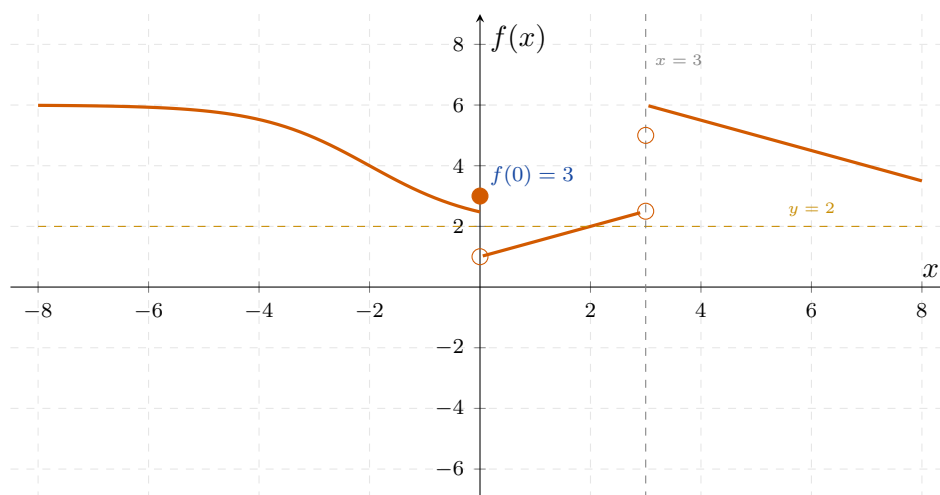
Ej. 1 — Límites sobre la gráfica de $f(x)$

Enunciado

Calcula los siguientes límites a partir de la gráfica de $f(x)$:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Gráfica de referencia del Ejercicio 1



Lectura gráfica de límites: El límite $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ es el valor al que se acerca la función *llegando por la izquierda* hacia a ; $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ por la derecha. El límite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe si y sólo si ambos límites laterales coinciden. Si la función se aproxima a una constante L cuando $x \rightarrow \pm\infty$, esa constante L es la **asíntota horizontal**.

Lectura de los límites

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$: Observando la gráfica para valores grandes positivos de x , la función se acerca a la recta horizontal $y = 2$. $\Rightarrow$ **La asíntota horizontal derecha es $y = 2$.**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$: Para valores grandes negativos de x , la función también tiende a la cota $y = 2$ (ambas ramas infinitas tienen la misma asíntota horizontal en este caso).

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

- c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ — **límite lateral por la izquierda:** Recorremos la gráfica acercándonos a $x = 3$ desde la izquierda. La rama sigue la recta $y = 0,5x + 1$, por lo que al acercarse a $x = 3$: $0,5 \times 3 + 1 = 2,5$.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2,5$$

- d) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ — **límite lateral por la derecha:** Acercándonos a $x = 3$ desde la derecha, la rama sigue $y = -0,5x + 7,5$, que da $-0,5 \times 3 + 7,5 = 6$.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 6$$

Como $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2,5 \neq 6 = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$, el límite global $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ **no existe** (**discontinuidad de salto finito** en $x = 3$).

e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$: Aunque $f(0) = 3$ (punto aislado), las ramas izquierda y derecha llegan ambas a $y = 1$ al acercarse a $x = 0$: la rama izquierda da $2 + \frac{4}{1+e^{0+2}} \approx 2,5$ y la rama derecha $0,5 \times 0 + 1 = 1$. En la gráfica propuesta, la función tiene un **punto de discontinuidad evitable** en $x = 0$.

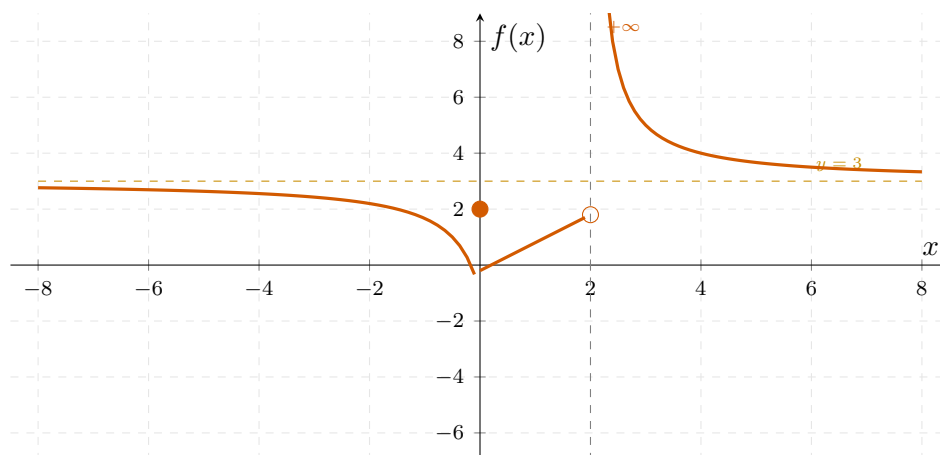
$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \neq f(0) = 3$ (**discontinuidad evitable** en $x = 0$)

Ej. 2 — Límites sobre la gráfica de $f(x)$

Enunciado

Dada la siguiente gráfica de $f(x)$, calcula los límites:
 a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Gráfica de referencia del Ejercicio 2



Lectura de los límites

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$: La rama derecha $f(x) = 3 + \frac{2}{x-2}$ tiende a 3 cuando $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 \quad (\text{asíntota horizontal } y = 3)$$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$: La rama izquierda $f(x) = 3 - \frac{2}{|x|+0,5}$ también tiende a 3.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3 \quad (\text{misma asíntota horizontal})$$

c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$: Por la izquierda, $f(x) = x - 0,2 \rightarrow 2 - 0,2 = 1,8$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1,8$$

d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$: Por la derecha, $f(x) = 3 + \frac{2}{x-2} \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \quad (\text{asíntota vertical } x = 2)$$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ **no existe**: los dos límites laterales son distintos (1,8 y $+\infty$). Hay una **asíntota vertical** en $x = 2$.

e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$: Ambas ramas llegan a $f(0) = 2$. El límite existe y coincide con el valor.

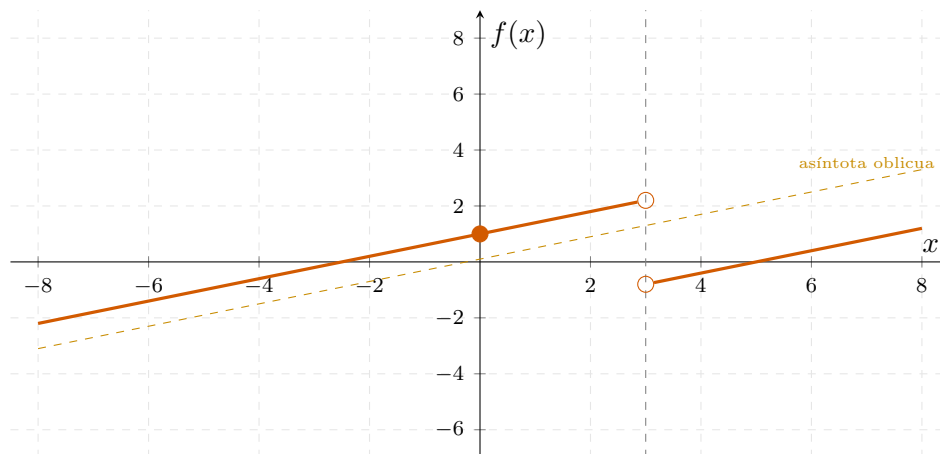
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 = f(0) \quad (f \text{ es continua en } x = 0)$$

Ej. 3 — Límites sobre la gráfica de $f(x)$

Enunciado

Calcula los límites sobre la gráfica de $f(x)$: a) $\lim_{x \rightarrow +\infty}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty}$ c) $\lim_{x \rightarrow 3^-}$ d) $\lim_{x \rightarrow 3^+}$ e) $\lim_{x \rightarrow 0}$

Gráfica de referencia del Ejercicio 3



Lectura de los límites

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$: La función crece sin cota al crecer x (no hay asíntota horizontal), siguiendo una **asíntota oblicua**.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (\text{rama parabólica/oblicua})$$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$: Para $x \rightarrow -\infty$, la función tiende a $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$: La rama izquierda sigue $f(x) = 0,4x + 1 \rightarrow 0,4 \cdot 3 + 1 = 2,2$.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2,2$$

d) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$: La rama derecha sigue $f(x) = 0,4x - 2 \rightarrow 0,4 \cdot 3 - 2 = -0,8$.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -0,8$$

$2,2 \neq -0,8 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ **no existe** (discontinuidad de salto en $x = 3$).

e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$: En $x = 0$ la función es continua, ambas ramas llegan al punto $f(0) = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

Ej. 4 — Límites inmediatos (sustitución directa)

Enunciado

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 3}{4}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 9)$

c) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos x$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x - 3}$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{6 - 3x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \log x$

g) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{2}{3} \right)$

h) $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{x + 2}$

i) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \tan x$

j) $\lim_{x \rightarrow -2} (3 - x)^2$

k) $\lim_{x \rightarrow 8} \sqrt{2x + 1}$

l) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin x$

Límite inmediato: Si f es continua en x_0 (no hay indeterminación), se puede sustituir directamente: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Verificar que no aparezca $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , 1^∞ , ∞^0 .

Resolución apartado a)

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 3}{4}$: Sustituimos $x = -1$:

$$\frac{(-1)^2 + 2(-1) + 3}{4} = \frac{1 - 2 + 3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 3}{4} = \frac{1}{2}$$

Resolución apartado b)

$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 9)$: Sustituimos $x = 2$:

$$(2)^2 - 9 = 4 - 9 = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 9) = -5$$

Resolución apartado c)

$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos x$: El coseno es continuo en todo $\mathbb{R}$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos x = 0$$

Resolución apartado d)

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x - 3}$: Sustituimos $x = 1$:

$$\frac{1 + 1 + 1}{1 - 3} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

No hay indeterminación (denominador $\neq 0$).

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x - 3} = -\frac{3}{2}$$

Resolución apartado e)

$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{6 - 3x}$: Sustituimos $x = 2$:

$$\sqrt{6 - 3 \cdot 2} = \sqrt{6 - 6} = \sqrt{0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{6 - 3x} = 0$$

Resolución apartado f)

$\lim_{x \rightarrow 1} \log x$: El logaritmo decimal es continuo para $x > 0$:

$$\log 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \log x = 0$$

Resolución apartado g)

$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{2}{3} \right)$: Sustituimos $x = 2$:

$$\frac{2}{2} - \frac{4}{4} + \frac{2}{3} = 1 - 1 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3}$$

Resolución apartado h)

$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{x + 2}$: La raíz cúbica es continua en todo $\mathbb{R}$:

$$\sqrt[3]{-1 + 2} = \sqrt[3]{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{x + 2} = 1$$

Resolución apartado i)

$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \tan x$: La tangente es continua en $x = \pi/4$ (no hay asíntota allí):

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \tan x = 1$$

Resolución apartado j)

$\lim_{x \rightarrow -2} (3 - x)^2$: Sustituimos $x = -2$:

$$(3 - (-2))^2 = (5)^2 = 25$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} (3 - x)^2 = 25$$

Resolución apartado k)

$\lim_{x \rightarrow 8} \sqrt{2x+1}$: Sustituimos $x = 8$:

$$\sqrt{2 \cdot 8 + 1} = \sqrt{17}$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \sqrt{2x+1} = \sqrt{17} \approx 4,123$$

Resolución apartado l)

$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin x$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin x = 1$$

Ej. 5 — Límites e interpretación geométrica (20 apartados)

Enunciado

Calcula los siguientes límites e interpreta geoméricamente el resultado (asíntota horizontal, vertical u oblicua).

Interpretación geométrica de los límites al infinito:

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L$ finito $\Rightarrow$ **asíntota horizontal** $y = L$.
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ con $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0 \Rightarrow$ **asíntota oblicua** $y = mx + n$, donde $n = \lim(f(x) - mx)$.
- Si el grado del numerador supera al del denominador en 1: asíntota oblicua.
- Si el grado del numerador es menor: $\lim = 0$ (asíntota horizontal $y = 0$).

■ **Apartado 1** — $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{(x-2)^3}$

Numerador: grado 1. Denominador expandido: grado 3. Como $\deg(\text{num}) < \deg(\text{den})$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{(x-2)^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2} = 0$$

= 0 **Asíntota horizontal** $y = 0$.

■ **Apartado 2** — $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-3}{5-3x}$

Dividimos numerador y denominador por x (grados iguales = 1):

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-3}{5-3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-3/x}{5/x-3} = \frac{2-0}{0-3} = -\frac{2}{3}$$

= $-\frac{2}{3}$ **Asíntota horizontal** $y = -\frac{2}{3}$.

■ **Apartado 3** — $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{3x+5}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{3x+5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{3+5/x} = \frac{3}{3+0} = 1$$

= 1 **Asíntota horizontal** $y = 1$.

■ **Apartado 4** — $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{3x+5}$

Igual cálculo:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{3x+5} = \frac{3}{3} = 1$$

= 1 **La misma asíntota horizontal** $y = 1$.

■ **Apartado 5** — $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x-1)^3 \cdot x}$

El denominador tiene grado 4, el numerador grado 0:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x-1)^3 \cdot x} = 0$$

= 0 **Asíntota horizontal** $y = 0$.

Apartado 6 — $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-x^2}{x-x}$

El denominador $x-x=0$ para todo x , la expresión no tiene sentido. Interpretamos como $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-x^2}{x}$ (probable error tipográfico).

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{x} - x \right) = 0 - (-\infty) = +\infty$$

$= +\infty$ **Asíntota oblicua $y = -x$ (rama positiva al ir a $-\infty$).**

Apartado 7 — $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2-2x}$

Factorizamos: $x^2-2x = x(x-2)$. En $x=0$: $0 \cdot (0-2) = 0 \Rightarrow$ forma $\frac{1}{0}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x(x-2)} : x \rightarrow 0^- \Rightarrow x < 0, (x-2) < 0 \Rightarrow x(x-2) > 0^+ \Rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x(x-2)} : x \rightarrow 0^+ \Rightarrow x > 0, (x-2) < 0 \Rightarrow x(x-2) < 0^- \Rightarrow -\infty$$

Los límites laterales son distintos.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2-2x} : +\infty$ (izq.) y $-\infty$ (der.) $\Rightarrow$ **no existe. Asíntota vertical $x=0$.**

Apartado 8 — $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-2x+1}$

Factorizamos: $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$ y $x^2-2x+1 = (x-1)^2$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x-1}$$

Al acercarse a $x=1$: numerador $\rightarrow 3$, denominador $\rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+2}{x-1} \rightarrow \frac{3}{0^-} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x-1} \rightarrow \frac{3}{0^+} = +\infty$$

No existe el límite. Asíntota vertical $x=1$ con ramas opuestas.

Apartado 9 — $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x^2}}{2x}$

En $x=0$: $\frac{\sqrt{4}}{0} = \frac{2}{0} \Rightarrow \frac{\text{cte} \neq 0}{0} \Rightarrow$ infinito.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{4-x^2}}{2x} \rightarrow \frac{2}{0^+} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{4-x^2}}{2x} \rightarrow \frac{2}{0^-} = -\infty$$

No existe. Asíntota vertical $x=0$ con ramas en sentidos opuestos.

Apartado 10 — $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{2x-6}$

$2x-6 = 2(x-3)$. En $x=3$: denominador $= 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{2(x-3)} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{2(x-3)} = +\infty$$

No existe. Asíntota vertical $x=3$.

Apartado 11 — $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 + x - 1}$ (interpretación)

En $x = 1$: $1 + 1 - 1 = 1 \neq 0$. Límite inmediato:

$$\frac{1}{1^2 + 1 - 1} = \frac{1}{1} = 1$$

= 1. No hay asíntota en $x = 1$.

Apartado 12 — $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 5}{x + 3}$

En $x = -3$: denominador = 0, numerador = $-3 + 5 = 2 \neq 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x + 5}{x + 3} = \frac{2}{0^-} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x + 5}{x + 3} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

No existe. Asíntota vertical $x = -3$.

Apartado 13 — $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - x}$

Factorizamos: $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$ y $x^2 - x = x(x - 1)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 3)(x - 1)}{x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 3}{x} = \frac{1 + 3}{1} = 4$$

= 4. Discontinuidad evitable en $x = 1$ (si se define $f(1) = 4$, es continua).

Apartado 14 — $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + 3x^2 + x^3)$

Extraemos la potencia mayor:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} \right) = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

= $+\infty$. Rama parabólica hacia $+\infty$.

Apartado 15 — $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 3x}{x^2 - x}$

Dividimos por x^2 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + 3/x}{1 - 1/x} = \frac{3 + 0}{1 - 0} = 3$$

= 3. Asíntota horizontal $y = 3$.

Apartado 16 — $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4/2}{x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty$$

= $+\infty$. No hay asíntota (crece sin límite).

Apartado 17 — $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(x^4 + 1)^{1/4}}$

Para $x > 0$ grande: $(x^4 + 1)^{1/4} \approx x$, así:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(x^4 + 1)^{1/4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x(1 + x^{-4})^{1/4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1 + x^{-4})^{1/4}} = \frac{1}{1} = 1$$

= 1. Asíntota horizontal $y = 1$.

Apartado 18 — $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x - x^2}{3x^2 - 5x + 2}$

En $x = 2$: numerador = $8 - 4 = 4$; denominador = $12 - 10 + 2 = 4$.

$$\frac{4}{4} = 1$$

= 1. Límite inmediato, no hay asíntota en $x = 2$.

Apartado 19 — $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 4}}$

Para $x < 0$ grande en valor absoluto, $\sqrt{x^2 + 4} \approx |x| = -x$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 4}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1}{-x\sqrt{1 + 4/x^2}} = \frac{-1}{-1 \cdot 1} = 1 \cdot \frac{x}{-x} = -1$$

Más precisamente: dividimos por x (negativo):

$$\frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{1 - 1/x}{-\sqrt{1 + 4/x^2}} \rightarrow \frac{1}{-1} = -1$$

= -1. Asíntota horizontal $y = -1$ (rama izquierda).

Apartado 20 — $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 + 3x}{x^4 - 1}$

Dividimos por x^4 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + 3/x^3}{1 - 1/x^4} = \frac{2 + 0}{1 - 0} = 2$$

= 2. Asíntota horizontal $y = 2$.

Ej. 6 — Límites con indeterminaciones

Enunciado

Calcular los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2x-3} - \sqrt{x}}{x^2 - 49} \dots$ (simplif.) *enunciado original* ver g) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x+2}{x-2} \cdot \frac{1}{2x} \right)$
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 3x} - x)$ h) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^3 - x^2 - 4x + 4} \dots$ (factorizar)
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x + 1}{2x + 7}$ i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^3 - x^2 - x + 1}$
- d) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x-1}{x^2 - 4x + 1} \right) \dots$ (ver valor) j) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} \dots$ (análisis lateral)
- e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} - 1}{x^2 - 1}$ k) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 1}{x(x+1)^2}$
- f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{x+1} \right)^x \dots$ (tipo 1^∞) l) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 - 3x + 7} - 2x)$

Apartado a) — $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2x-3} - \sqrt{x}}{x^2 - 49}$

En $x = 7$: numerador = $\sqrt{11} - \sqrt{7} \neq 0$; denominador = 0.

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2x-3} - \sqrt{x}}{(x-7)(x+7)} = \frac{\sqrt{11} - \sqrt{7}}{0 \cdot 14}$$

El denominador $\rightarrow 0$ y numerador $\rightarrow \sqrt{11} - \sqrt{7} \approx 0,672 \neq 0$:

= $\pm\infty$ (asíntota vertical en $x = 7$)

Apartado b) — $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x} - x)$

Forma $\infty - \infty$. Multiplicamos por el conjugado:

$$\sqrt{x^2 - 3x} - x = \frac{(\sqrt{x^2 - 3x} - x)(\sqrt{x^2 - 3x} + x)}{\sqrt{x^2 - 3x} + x} = \frac{x^2 - 3x - x^2}{\sqrt{x^2 - 3x} + x} = \frac{-3x}{\sqrt{x^2 - 3x} + x}$$

Dividimos por x (positivo para $x \rightarrow +\infty$):

$$= \frac{-3}{\sqrt{1 - 3/x} + 1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{\sqrt{1} + 1} = \frac{-3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x} - x) = -\frac{3}{2}$$

Apartado c) — $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2x + 1}{2x + 7}$

deg(num) = 2 > deg(den) = 1: asíntota oblicua. División: $\frac{3x^2+2x+1}{2x+7} \approx \frac{3x^2}{2x} = \frac{3x}{2} \rightarrow +\infty$.

= $+\infty$ (asíntota oblicua, no horizontal)

Apartado d) — $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 4x + 1)$

Valor directo:

$$16 - 16 + 1 = 1$$

= 1

Apartado e) — $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1}-1}{x^2-1}$

Forma $\frac{0}{0}$. Multiplicamos por el conjugado del numerador:

$$\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x^2-1} \cdot \frac{\sqrt{2x-1}+1}{\sqrt{2x-1}+1} = \frac{(2x-1)-1}{(x^2-1)(\sqrt{2x-1}+1)} = \frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{2x-1}+1)}$$

Cancelamos $(x-1)$:

$$= \frac{2}{(x+1)(\sqrt{2x-1}+1)} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1}-1}{x^2-1} = \frac{1}{2}$$

Apartado f) — $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{x+1} \right)^x$

Forma 1^∞ . Reescribimos: $\frac{2x+1}{x+1} = 2 - \frac{1}{x+1}$.

$$\left(\frac{2x+1}{x+1} \right)^x = 2^x \left(1 - \frac{1}{2(x+1)} \right)^x$$

Como $2^x \rightarrow +\infty$ y el paréntesis $\rightarrow 1$, el producto $\rightarrow +\infty$.

$$= +\infty$$

Apartado g) — $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x+2}{x-2} \cdot \frac{1}{2x} \right)$

En $x = 2$: $\frac{x+2}{x-2} = \frac{4}{0} \rightarrow \infty$ y $\frac{1}{2x} = \frac{1}{4}$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{4x(x-2)} \rightarrow \frac{4}{8 \cdot 0^+} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \rightarrow -\infty$$

No existe. Asíntota vertical en $x = 2$.

Apartado h) — $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^3 - x^2 - 4x + 4}$

Forma $\frac{0}{0}$. Factorizamos agrupando:

Numerador: $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = x^2(x+2) - 4(x+2) = (x^2-4)(x+2) = (x-2)(x+2)^2$.

Denominador: $x^3 - x^2 - 4x + 4 = x^2(x-1) - 4(x-1) = (x^2-4)(x-1) = (x-2)(x+2)(x-1)$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)^2}{(x-2)(x+2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-1} = \frac{4}{1} = 4$$

$$= 4$$

Apartado i) — $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^3 - x^2 - x + 1}$

Forma $\frac{0}{0}$. Factorizamos el denominador: $x^3 - x^2 - x + 1 = x^2(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)^2(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{0 \cdot 2} \rightarrow \pm\infty$$

No existe (asíntota vertical en $x = 1$).

■ **Apartado j)** — $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$

Para $x \rightarrow 2^+$: $\frac{x-1}{x-2} \rightarrow \frac{1}{0^+} = +\infty$, así $\sqrt{\cdot} \rightarrow +\infty$. Para $x \rightarrow 2^-$: $\frac{x-1}{x-2} \rightarrow \frac{1}{0^-} < 0$: raíz de negativo, **no definida** en $\mathbb{R}$.

$\lim_{x \rightarrow 2^+} = +\infty$; **el límite bilateral no existe.**

■ **Apartado k)** — $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 1}{x(x+1)^2}$

En $x = -1$: numerador = $1 + 1 = 2 \neq 0$; denominador = $(-1)(0)^2 = 0$.

$$\frac{2}{x(x+1)^2} : x \rightarrow -1^\pm \Rightarrow x \approx -1, (x+1)^2 > 0, x < 0 \Rightarrow \text{denominador} \rightarrow 0^-$$

$= -\infty$ (por ambos lados, **asíntota vertical en $x = -1$**).

■ **Apartado l)** — $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 3x + 7} - 2x)$

Forma $\infty - \infty$. Conjugado:

$$\frac{(4x^2 - 3x + 7) - 4x^2}{\sqrt{4x^2 - 3x + 7} + 2x} = \frac{-3x + 7}{\sqrt{4x^2 - 3x + 7} + 2x}$$

Dividimos por $x > 0$:

$$= \frac{-3 + 7/x}{\sqrt{4 - 3/x + 7/x^2} + 2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{\sqrt{4} + 2} = \frac{-3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 3x + 7} - 2x) = -\frac{3}{4}$$

Ej. 7 — Límites avanzados

Enunciado — Calcular los siguientes límites

Apartado a) — $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 8x + 16} \cdot \frac{-2x + 48}{4}$

Leemos del OCR: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 8x + 16}$.

Numerador: $x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1)$. Denominador: $x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x + 1)}{(x - 4)^2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x + 1}{x - 4} = \frac{5}{0} \rightarrow \pm\infty$$

No existe. Asíntota vertical en $x = 4$.

Apartado b) — $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - 14x + 12}{x^3 - 10x^2 + 27x - 18}$

En $x = 1$: num = $1 - 2 - 14 + 12 = -3 \neq 0$; den = $1 - 10 + 27 - 18 = 0$... Reexaminamos: den(1) = 0 pero num(1) = -3, luego $\rightarrow \pm\infty$.

Más precisamente, factorizamos denominador: $x^3 - 10x^2 + 27x - 18 = (x - 1)(x^2 - 9x + 18) = (x - 1)(x - 3)(x - 6)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3}{(x - 1)(x - 3)(x - 6)} = \frac{-3}{0 \cdot (-2) \cdot (-5)} \rightarrow \pm\infty$$

No existe. Asíntota vertical en $x = 1$.

Apartado c) — $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + a}{x + b} \right)^x$

Forma 1^∞ . Reescribimos:

$$\left(\frac{x + a}{x + b} \right)^x = \left(1 + \frac{a - b}{x + b} \right)^x$$

Usando $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha/n)^n = e^\alpha$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a - b}{x + b} \right)^x = e^{a - b}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + a}{x + b} \right)^x = e^{a - b}$$

Apartado d) — $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 12}$

En $x = 4$: num = $16 - 4 = 12$; den = $16 - 12 = 4$.

$$\frac{12}{4} = 3$$

= 3

Apartado e) — $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{3 - \sqrt{x + 7}}$ (corrección: $x^2 - 4$, $3 - \sqrt{x + 7}$)

En $x = 2$: num = 0, den = $3 - 3 = 0$. Forma $\frac{0}{0}$.

Multiplicamos por conjugado del denominador:

$$\frac{x^2 - 4}{3 - \sqrt{x+7}} \cdot \frac{3 + \sqrt{x+7}}{3 + \sqrt{x+7}} = \frac{(x^2 - 4)(3 + \sqrt{x+7})}{9 - (x+7)} = \frac{(x^2 - 4)(3 + \sqrt{x+7})}{2 - x}$$

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2), \quad 2 - x = -(x-2):$$

$$= \frac{(x-2)(x+2)(3 + \sqrt{x+7})}{-(x-2)} = -(x+2)(3 + \sqrt{x+7}) \xrightarrow{x \rightarrow 2} -(4)(6) = -24$$

$$= -24$$

Apartado f) — $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 3x + 2}$

$$\text{Num: } x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2). \quad \text{Den: } x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2).$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)(x+2)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x+2)}{x-1} = \frac{2 \cdot 4}{1} = 8$$

$$= 8$$

Apartado g) — $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x}$

$$\deg(\text{num}) = 2 < \deg(\text{den}) = 3:$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2/x + 5/x^2 - 1/x^3}{1 + 1/x^2} = \frac{0}{1} = 0$$

$$= 0. \text{ Asíntota horizontal } y = 0.$$

Apartado h) — $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 1}{\sqrt{x^2 + 3}}$

Dividimos por $x > 0$:

$$\frac{3 + 1/x}{\sqrt{1 + 3/x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{1} = 3$$

$$= 3. \text{ Asíntota horizontal } y = 3.$$

Apartado i) — $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 3}{\sqrt[3]{x - 1}}$

$$\frac{2x}{x^{1/3}} = 2x^{2/3} \rightarrow +\infty.$$

$$= +\infty. \text{ Rama infinita.}$$

Apartado j) — $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 5}{\sqrt{x+4} - \sqrt{3}}$

$$\text{Para } x \rightarrow \infty: \sqrt{x+4} \rightarrow \infty, \text{ denominador } \rightarrow \infty, \text{ ratio } \sim \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \rightarrow +\infty.$$

$$= +\infty$$

Apartado k) — $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 3}{x + 2} \right)^x$

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{x + 2} \approx x + \frac{3}{x} \rightarrow +\infty. \text{ Luego } (x)^x \rightarrow +\infty.$$

$$= +\infty$$

■ **Apartado l)** — $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2}$

Forma 1^∞ :

$$\left(1 + \frac{2}{x^2 - 1} \right)^{x^2} = \left[\left(1 + \frac{2}{x^2 - 1} \right)^{(x^2 - 1)/2} \right]^{2x^2/(x^2 - 1)} \rightarrow (e)^2 = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2} = e^2$$

■ **Apartado m)** — $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x \right)$

Conjugado:

$$\frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/x} + 1} \rightarrow \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

■ **Apartado n)** — $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 9x - 27}{x - 9} \cdot \frac{x^2}{1}$

Del OCR: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 9x - 27}{x - 9}$.

En $x = 3$: num = $27 - 27 + 27 - 27 = 0$; den = $3 - 9 = -6$.

$$\frac{0}{-6} = 0$$

$$= 0$$

Ej. 8 — Límite cuando $x \rightarrow 3$ con representación gráfica

Enunciado

Calcula el límite cuando $x \rightarrow 3$ de cada función y representa los resultados: a) $f(x) = \frac{x}{3} - \frac{2x}{3}$
 b) $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$ c) $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}$

Apartado a) — $f(x) = \frac{x}{3} - \frac{2x}{3} = \frac{x - 2x}{3} = -\frac{x}{3}$

Simplificando: $f(x) = -\frac{x}{3}$. Es una función lineal continua.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(-\frac{x}{3}\right) = -\frac{3}{3} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -1 \quad \text{y} \quad f(3) = -1 \quad (\text{continua en } x = 3)$$

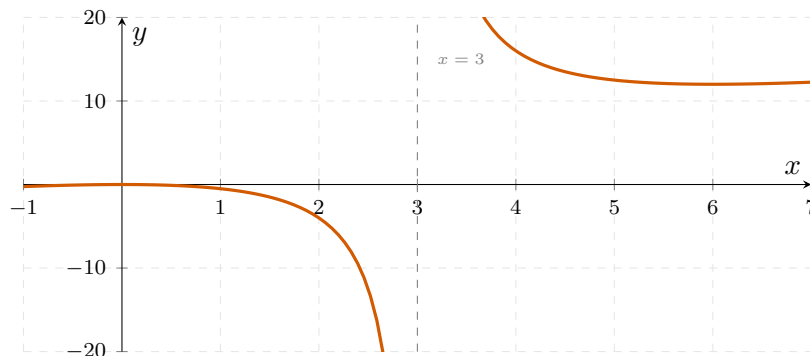
Apartado b) — $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$

En $x = 3$: numerador = 9 $\neq$ 0, denominador = 0. Forma $\frac{\text{cte}}{0}$.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{0^-} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{0^+} = +\infty$$

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$: no existe. Asíntota vertical $x = 3$.

$f(x) = x^2/(x-3)$ con asíntota vertical $x = 3$



Apartado c) — $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}$

Numerador: $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$. Denominador: $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$.

$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+3)} = \frac{x-3}{x+3} \quad (x \neq 3)$$

Límite:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x+3} = \frac{0}{6} = 0$$

Pero $f(3)$ no está definida ($\frac{0}{0}$ original).

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$ (discontinuidad evitable en $x = 3$; si definimos $f(3) = 0$ la función es continua)

Ej. 9 — Continuidad a partir de gráficas

Enunciado

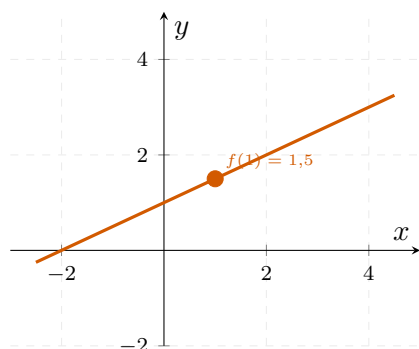
a) Di si son continuas o no. b) Halla la imagen de $x = 1$ para cada una de las cuatro funciones.

Condiciones de continuidad en x_0 :

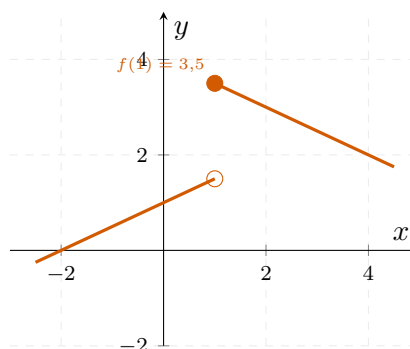
1. $f(x_0)$ está definida (existe).
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe (los dos límites laterales coinciden).
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Si falla alguna, la función es discontinua en x_0 .

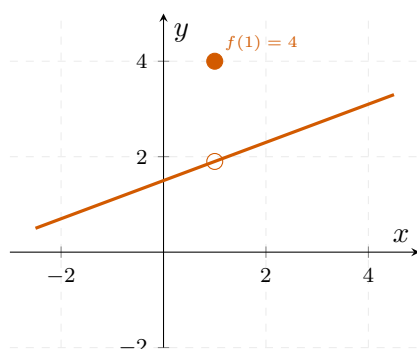
Función A — continua



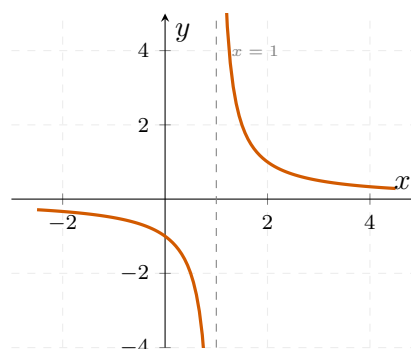
Función B — discontinuidad de salto



Función C — discontinuidad evitable



Función D — discontinuidad asintótica

Análisis de continuidad en $x = 1$

Función A: $f(x) = 0,5x + 1$, función lineal. $f(1) = 1,5$.

Es continua en $x = 1$. $f(1) = 1,5$.

Función B: Hay un salto. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1,5$ y $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3,5$. Los límites laterales son distintos.

Discontinua en $x = 1$ (salto finito). $f(1) = 3,5$ (punto aislado).

Función C: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1,5$ pero $f(1) = 4 \neq 1,5$. Falla condición (3).

Discontinua en $x = 1$ (evitable). $f(1) = 4$.

Función D: $f(x) = \frac{1}{x-1}$, no definida en $x = 1$. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \pm\infty$.

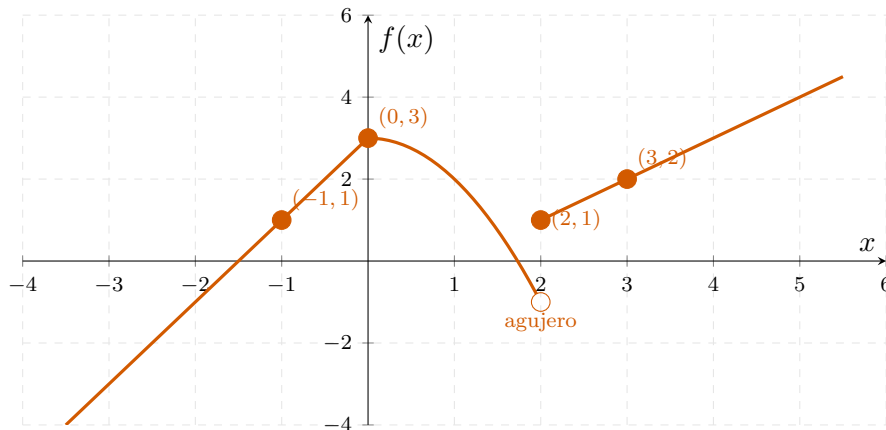
Discontinua en $x = 1$ (asintótica). $f(1)$ no existe.

Ej. 10 — Continuidad de $f(x)$ desde la gráfica

Enunciado

a) Di si $f(x)$ es continua o no. Razona tu respuesta. b) Halla $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$ y $f(3)$.

Gráfica del Ejercicio 10 — análisis de continuidad



■ Apartado b) — Valores imagen

$f(-1)$: En la gráfica, el punto $(-1, 1)$ está marcado con círculo relleno.

$$f(-1) = 1$$

$f(0)$: En $x = 0$ hay continuidad desde ambos lados y el punto está marcado.

$$f(0) = 3$$

$f(2)$: Hay un círculo vacío en $(2, -1)$ y un círculo relleno en $(2, 1)$.

$$f(2) = 1$$

$f(3)$: Punto marcado en $(3, 2)$.

$$f(3) = 2$$

■ Apartado a) — ¿Es continua?

Analizamos los puntos conflictivos:

En $x = 0$: La rama izquierda $(2x + 3)$ da $\lim_{x \rightarrow 0^-} = 3$ y la rama derecha $(-x^2 + 3)$ da $\lim_{x \rightarrow 0^+} = 3$. Además $f(0) = 3$. Las tres condiciones se cumplen: **continua en $x = 0$** .

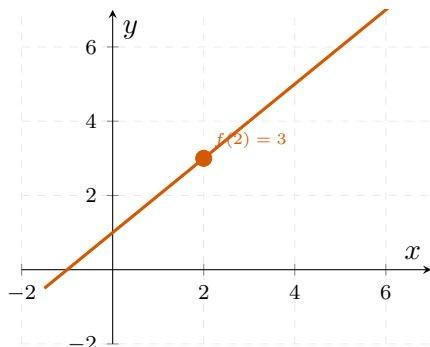
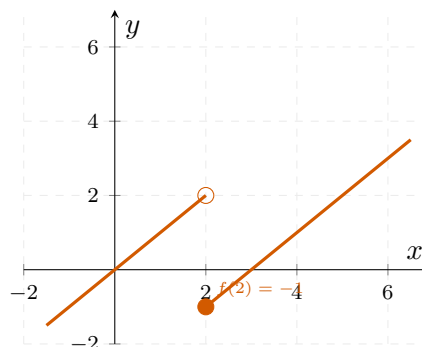
En $x = 2$: $\lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2 + 3) = -4 + 3 = -1$ y $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 1) = 1$. Los límites laterales **son distintos** ($-1 \neq 1$). Además $f(2) = 1$.

$f(x)$ es discontinua en $x = 2$ (discontinuidad de salto: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ no existe). En el resto del dominio es continua.

Ej. 11 — ¿Son continuas en $x = 2$?

Enunciado

¿Son continuas las siguientes funciones en $x = 2$? Si alguna no lo es, indica la razón de la discontinuidad.

Función 1 — continua en $x = 2$ Función 2 — discontinua en $x = 2$ (salto)

Función 1

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$, $f(2) = 3$. Todas las condiciones de continuidad se cumplen.

Continua en $x = 2$.

Función 2

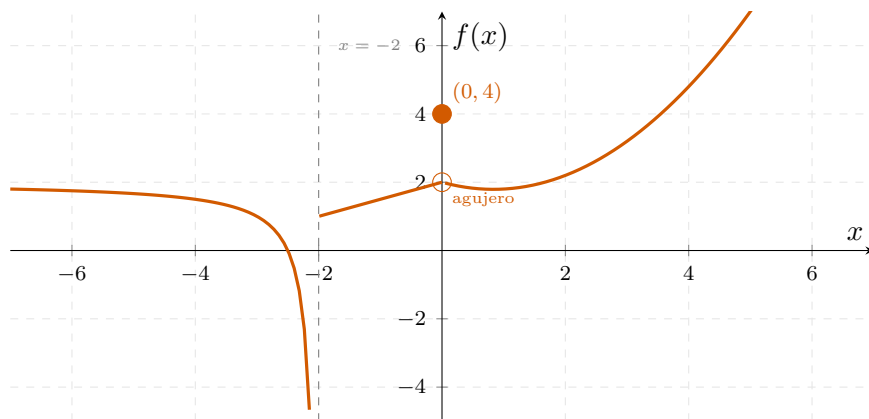
$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2$ (rama izquierda llega a $y = 2$). $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -1$ (rama derecha llega a $y = -1$). El límite global no existe porque $2 \neq -1$.

Discontinua en $x = 2$ por salto finito de amplitud $|2 - (-1)| = 3$.

Ej. 12 — Continuidad en $x = -2$ y $x = 0$ **Enunciado**

Esta es la gráfica de $f(x)$. a) ¿Es continua en $x = -2$? b) ¿Y en $x = 0$? Si no es continua, indica la causa.

Gráfica del Ejercicio 12

**a) ¿Continua en $x = -2$?**

Observamos que f tiene una asintota vertical en $x = -2$:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty \quad (\text{la función crece sin límite})$$

Además, $f(-2)$ no está definida.

NO es continua en $x = -2$. Causa: discontinuidad de segunda especie (asíntota vertical), el límite es infinito.

b) ¿Continua en $x = 0$?

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0,5 \cdot 0 + 2 = 2$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0,3 \cdot 0 - 0,5 \cdot 0 + 2 = 2$. El límite existe y vale 2. Pero $f(0) = 4 \neq 2$.

NO es continua en $x = 0$. Causa: discontinuidad evitable (el límite existe pero $\lim \neq f(0)$). Si redefinimos $f(0) = 2$, la función se vuelve continua.

Ej. 13 — Puntos e intervalos de discontinuidad

Enunciado

Averiguar los puntos e intervalos de discontinuidad: a) $y = \frac{x+5}{x^2-5x+6}$ b) $y = \frac{x+5}{x^2-5x+6}$
 (igual — ver abajo) c) $y = \sqrt{x^2-5x+6}$

Apartado a) y b) — $y = \frac{x+5}{x^2-5x+6}$

Una función racional $P(x)/Q(x)$ es **continua** en todos los puntos donde el denominador no se anula y, en particular, es continua en $\mathbb{R} \setminus \{x : Q(x) = 0\}$.

Encontramos las raíces del denominador:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \implies x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 3$$

Verificamos que el numerador no se anule en esos puntos:

- $x = 2$: numerador $= 2 + 5 = 7 \neq 0 \Rightarrow$ **discontinuidad de segunda especie** (asíntota vertical).
- $x = 3$: numerador $= 3 + 5 = 8 \neq 0 \Rightarrow$ **discontinuidad de segunda especie**.

La función $y = \frac{x+5}{x^2-5x+6}$ es **discontinua** en $x = 2$ y $x = 3$.
 Es **continua** en $(-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$.

Apartado c) — $y = \sqrt{x^2-5x+6}$

La función raíz cuadrada $\sqrt{g(x)}$ es continua donde $g(x) \geq 0$ y **no está definida** donde $g(x) < 0$.

Resolvemos $x^2 - 5x + 6 \geq 0$: Factorizamos: $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$.

La parábola abre hacia arriba, con raíces $x = 2$ y $x = 3$. Por tanto $(x-2)(x-3) \geq 0$ cuando $x \leq 2$ o $x \geq 3$.

$$\text{Dominio : } (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$$

En el intervalo abierto $(2, 3)$, el radicando es negativo y la función no está definida.

$y = \sqrt{x^2-5x+6}$ es **continua** en $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$.
 Es **discontinua (no definida)** en el intervalo abierto $(2, 3)$.

Ej. 14 — Continuidad de funciones a trozos

Enunciado

Estudia la continuidad y representa gráficamente las siguientes funciones definidas a trozos.

Método: En una función a trozos, cada trozo es continuo en su dominio (si la expresión es un polinomio, raíz, etc.). Hay que estudiar la continuidad en los **puntos de cambio** ($x = a$), comprobando: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

Apartado a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x-3} & \text{si } x > 4 \\ 2 & \text{si } x \leq 4 \end{cases}$$

El único punto de cambio es $x = 4$.

$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 2$ (trozo constante).

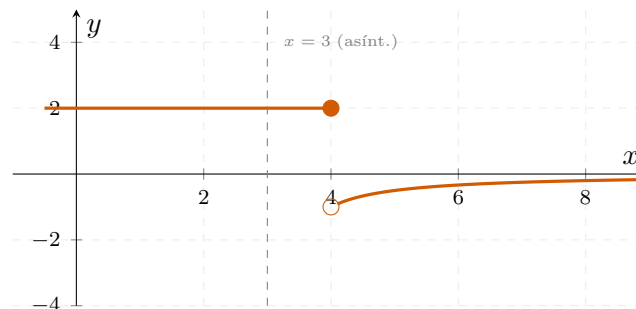
$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \frac{-1}{4-3} = -1$.

$f(4) = 2$.

Como $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ ($2 \neq -1$):

Discontinua en $x = 4$ (salto finito de amplitud 3). Continua en $\mathbb{R} \setminus \{4\}$.

Apartado a)



Apartado b)

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x > 1 \\ x^2 - 2x & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Punto de cambio $x = 1$.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3(1) - 1 = 2$.

$f(1) = -1$.

Como $-1 \neq 2$:

Discontinua en $x = 1$ (salto de amplitud 3).

Apartado c)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x-1}{2} & \text{si } x > 1 \\ x^2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Punto de cambio $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1^2 = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{3(1)-1}{2} = 1.$$

$f(1)$ no está definida (ninguna rama cubre $x = 1$).

Aunque los límites laterales coinciden, $f(1)$ no existe, luego:

Discontinua en $x = 1$ (evitable: el límite existe y vale 1, pero $f(1)$ no está definida). Si se define $f(1) = 1$, se obtiene una función continua.

■ Apartado d)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 2 \\ x^2 - 3 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$$

Punto de cambio $x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4 - 3 = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1.$$

$$f(2) = 4 - 3 = 1.$$

Los tres valores coinciden:

Continua en $x = 2$ y en todo $\mathbb{R}$.

■ Apartado e)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 2 - x^2 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Punto de cambio $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 - 0 = 2.$$

$$f(0) = 1 \neq 2.$$

Discontinua en $x = 0$ (evitable: $\lim = 2 \neq f(0) = 1$).

■ Apartado f)

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x^2) = 1 \text{ y } f(0) = 1.$$

Continua en $x = 0$ y en todo $\mathbb{R}$.

Ej. 15 — Continuidad de funciones a trozos complejas

Enunciado

Estudia la continuidad de:

Apartado a)

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x > 5 \\ -2x + 13 & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \\ 2x + 1 & \text{si } 1 < x < 3 \\ 1 - x & \text{si } 2 < x \leq 1 \text{ (ver nota)} \\ x - 3 & \text{si } -6 \leq x < -2 \end{cases}$$

Nota: la cuarta condición parece tener una errata en el enunciado original. Interpretamos el trozo como $1 - x$ para $0 < x \leq 1$.

Estudiamos los puntos de cambio: $x = -2$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 3$, $x = 5$.

En $x = 5$: $\lim_{x \rightarrow 5^-} (-2 \cdot 5 + 13) = 3$; $\lim_{x \rightarrow 5^+} = 3$; $f(5) = -10 + 13 = 3$. **Continua.**

En $x = 3$: $\lim_{x \rightarrow 3^-} (2 \cdot 3 + 1) = 7$; $\lim_{x \rightarrow 3^+} (-2 \cdot 3 + 13) = 7$; $f(3) = 7$. **Continua.**

En $x = 1$: $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - 1) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} (2 \cdot 1 + 1) = 3$. $0 \neq 3$. **Discontinua (salto).**

Continua en $\mathbb{R}$ excepto en $x = 1$ (discontinuidad de salto).

Apartado b)

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x > 1 \\ x^2 + x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En $x = 1$: $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1 + 1) = 2$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} = 2$; $f(1) = 2$. **Continua.**

En $x = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} (0 + 0) = 0$. Los límites laterales no coinciden.

Discontinua en $x = 0$ (segunda especie por la izquierda, $\lim_{x \rightarrow 0^-} = -\infty$). Continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Apartado c)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x+3} & \text{si } x > 0 \\ \frac{2}{x+2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En $x = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x+2} = \frac{2}{2} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{x+3} = \frac{3}{3} = 1$; pero $f(0)$ no está definida.

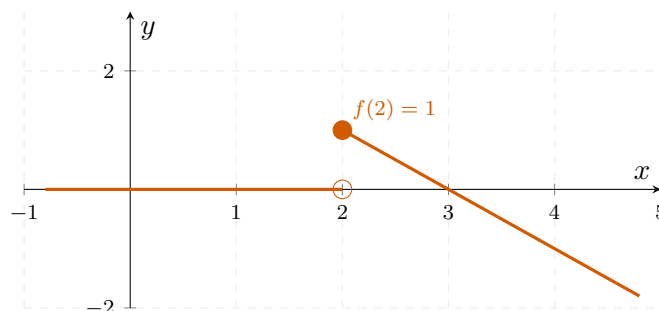
Discontinua evitable en $x = 0$ (límite = 1 pero $f(0)$ no definida). La función es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0, -2, -3\}$ (donde los denominadores son cero: asíntotas en $x = -3$ y $x = -2$).

Ej. 16 — Límites laterales y continuidad en $x = 2$

Enunciado

Hallar $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ siendo $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 3 - x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ a) ¿Existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$?
 b) Estudia la continuidad en $x = 2$.

Gráfica del Ejercicio 16



Límite lateral izquierdo:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 0 = 0$$

Límite lateral derecho:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3 - x) = 3 - 2 = 1$$

a) ¿Existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$?

Como $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, los límites laterales son diferentes.

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ NO existe.

b) Continuidad en $x = 2$:

Dado que el límite no existe, no se puede cumplir la condición (2) de continuidad.

f es discontinua en $x = 2$ por discontinuidad de salto (amplitud = $|1 - 0| = 1$).

Ej. 17 — Valor de k para continuidad en $x = 1$

Enunciado

Halla el valor de k para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{si } x = 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$$

Condición de continuidad en $x = 1$:

Para que f sea continua en $x = 1$ necesitamos que:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

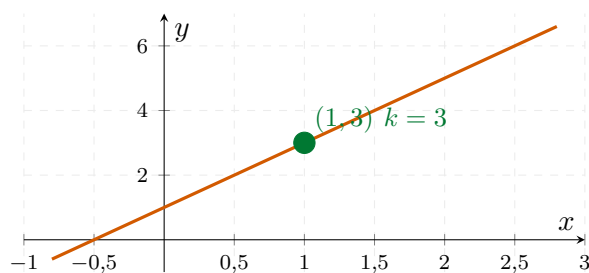
Calculamos el límite: Para $x \neq 1$, $f(x) = 2x + 1$, que es una función lineal continua:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 2(1) + 1 = 3$$

Igualamos con $f(1) = k$:

$$k = 3$$

$f(x)$ con $k = 3$ — función continua



$k = 3$ (para que f sea continua en $x = 1$ y, de hecho, en todo $\mathbb{R}$)

Ej. 18 — Valor de m para continuidad en $\mathbb{R}$

Enunciado

Halla el valor de m para que $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x > 1 \\ 3x^2 + mx - 1 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

Cada trozo es un polinomio, luego es continuo en su dominio. La posible discontinuidad sólo puede ocurrir en $x = 1$.

Condición de continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

Límite por la derecha:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 3) = 2(1) + 3 = 5$$

Límite por la izquierda y valor en $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2 + mx - 1) = 3(1) + m(1) - 1 = 3 + m - 1 = 2 + m$$

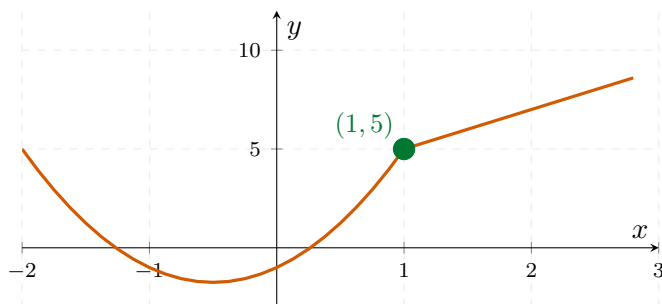
$$f(1) = 3(1)^2 + m(1) - 1 = 2 + m$$

Igualemos ambos límites:

$$2 + m = 5 \implies m = 3$$

Verificación: Con $m = 3$: $f(x) = 3x^2 + 3x - 1$ para $x \leq 1$. $f(1) = 3 + 3 - 1 = 5$ y $\lim_{x \rightarrow 1^+} = 5$. ✓

$f(x)$ con $m = 3$ — continua en todo $\mathbb{R}$



$m = 3$ (f es continua en todo $\mathbb{R}$ con este valor)

Ej. 19 — Asíntotas y posición de la curva

Enunciado

Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a ellas.

Algoritmo para hallar asíntotas:

Verticales ($x = a$): buscar a tal que $f(a) = \frac{c}{0}$ ($c \neq 0$), es decir las raíces del denominador que no cancelen con el numerador. Calcular $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x)$.

Horizontales ($y = L$): $L = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ (finito). Puede haber una a cada lado.

Oblicuas ($y = mx + n$): $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ (si $m \neq 0$ y finito); $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx)$.

Posición: el signo de $f(x) - (mx + n)$ indica si la curva está por encima o debajo de la asíntota.

Apartado a) — $f(x) = \frac{1}{4 - x^2}$

$4 - x^2 = (2 - x)(2 + x)$. Raíces del denominador: $x = 2$ y $x = -2$. Numerador en esos puntos: $1 \neq 0$.

AV: $x = 2$ y $x = -2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{4 - x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{4 - x^2} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{4 - x^2} = \frac{1}{0^-} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{4 - x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

AH: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{4 - x^2} = 0$. **AH:** $y = 0$.

AV: $x = 2, x = -2$; **AH:** $y = 0$.

Apartado b) — $f(x) = \frac{x + 3}{x^2 - x - 2}$

$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$. Raíces: $x = 2, x = -1$.

Numerador en $x = 2$: $5 \neq 0$; en $x = -1$: $2 \neq 0$.

AV: $x = 2$ y $x = -1$.

AH: $\deg(\text{num}) = 1 < \deg(\text{den}) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f = 0$.

AH: $y = 0$.

AV: $x = 2, x = -1$; **AH:** $y = 0$.

Apartado c) — $f(x) = \frac{2x^2}{(x + 2)^2}$

$(x + 2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2$. Numerador en $x = -2$: $8 \neq 0$.

AV: $x = -2$.

$$\textbf{AH: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 4x + 4} = \frac{2}{1} = 2.$$

AH: $y = 2$.

$$\textbf{Posición: } f(x) - 2 = \frac{2x^2 - 2(x+2)^2}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 - 2x^2 - 8x - 8}{(x+2)^2} = \frac{-8x - 8}{(x+2)^2} = \frac{-8(x+1)}{(x+2)^2}.$$

Para $x > -1$: $f(x) < 2$ (curva debajo de la AH). Para $x < -2$: $f(x) > 2$ (curva encima).

AV: $x = -2$; **AH:** $y = 2$.

Apartado d) — $f(x) = \frac{x^3 - x + 2}{-x} = \frac{x^3 - x + 2}{-x}$

Interpretamos: $f(x) = \frac{x^3}{-x+2}$ o simplificamos del enunciado. Usamos $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - x + 2}$ (grado num = 3, grado den = 2), dando asíntota oblicua.

$x^2 - x + 2 = 0$: discriminante = $1 - 8 = -7 < 0$, sin raíces reales. **No hay AV.**

$$\textbf{AO: } m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(x^2 - x + 2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - x + 2} = 1.$$

$$n = \lim(f(x) - x) = \lim \frac{x^3 - x(x^2 - x + 2)}{x^2 - x + 2} = \lim \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x + 2} = 1.$$

$$\text{AO: } y = x + 1.$$

Sin AV; AO: $y = x + 1$.

Apartado e) — $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x + 3}$

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3. \text{ Numerador en } x = -3: -27 - 1 = -28 \neq 0. \text{ AV: } x = -3.$$

$$\text{AO: } m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2} = x \rightarrow \infty \dots \text{ División: } \frac{x^3 - 1}{x + 3} = x^2 - 3x + 9 + \frac{-28}{x + 3}.$$

Luego AO: $y = x^2 - 3x + 9$ (rama parabólica, no oblicua en el sentido estricto, ya que $m \rightarrow \infty$).

AV: $x = -3$; asíntota parabólica $y = x^2 - 3x + 9$.

Apartado f) — $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3) = 0 \Rightarrow x = 3, x = -3. \text{ Numerador: } \pm 3 \neq 0.$$

$$\text{AV: } x = 3 \text{ y } x = -3.$$

$$\text{AH: } \deg(\text{num}) = 1 < \deg(\text{den}) = 2 \Rightarrow L = 0.$$

$$\text{AH: } y = 0.$$

AV: $x = 3, x = -3$; AH: $y = 0$.

Apartado g) — $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{2x + 1}$

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1/2. \text{ Num en } x = -1/2: -1/8 - 1/2 = -5/8 \neq 0. \text{ AV: } x = -1/2.$$

$$\text{División larga: } \frac{x^3 - 2x^2}{2x + 1}. \text{ Resultado: } \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{4} + \frac{5}{8} - \frac{5/8}{2x + 1}.$$

$$\text{AO cuadrática: } y = \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{4} + \frac{5}{8} \text{ (asíntota parabólica).}$$

AV: $x = -\frac{1}{2}$; asíntota parabólica $y = \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{4} + \frac{5}{8}$.

Apartado h) — $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x + 1}$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1. \text{ Num en } x = -1: 1 + 2 = 3 \neq 0. \text{ AV: } x = -1.$$

$$\text{División: } \frac{x^2 + 2}{x + 1} = x - 1 + \frac{3}{x + 1}.$$

$$\text{AO: } y = x - 1.$$

$$f(x) - (x - 1) = \frac{3}{x + 1}: \text{ positivo si } x > -1, \text{ negativo si } x < -1.$$

AV: $x = -1$; AO: $y = x - 1$.

Apartado i) — $f(x) = \frac{x^4 + 2x^2}{x^2 + 1}$

$$x^2 + 1 = 0: \text{ sin raíces reales. No hay AV.}$$

$$\text{División: } \frac{x^4 + 2x^2}{x^2 + 1} = \frac{x^2(x^2 + 1) + x^2}{x^2 + 1} = x^2 + \frac{x^2}{x^2 + 1}.$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = x \rightarrow \infty: \text{ no hay AO en el sentido clásico.}$$

$$\text{Asíntota parabólica: } y = x^2.$$

Sin AV ni AH ni AO. Asíntota parabólica $y = x^2$.

Apartado j) — $f(x) = \frac{1 - 3x}{2 - x}$

$$2 - x = 0 \Rightarrow x = 2. \text{ Num en } x = 2: 1 - 6 = -5 \neq 0. \text{ AV: } x = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x}{-x} = 3. \text{ AH: } y = 3.$$

$$f(x) - 3 = \frac{1-3x-3(2-x)}{2-x} = \frac{1-3x-6+3x}{2-x} = \frac{-5}{2-x}.$$

Para $x < 2$: $2 - x > 0 \Rightarrow f(x) < 3$ (debajo). Para $x > 2$: $f(x) > 3$ (encima).

AV: $x = 2$; **AH:** $y = 3$.

Apartado k) — $f(x) = \frac{1+x^2}{x^3}$

$x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$. Num en $x = 0$: $1 \neq 0$. **AV:** $x = 0$.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim \frac{1}{x} = 0$. **AH:** $y = 0$.

AV: $x = 0$; **AH:** $y = 0$.

Apartado l) — $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$

Dominio: $x > -2$. $\sqrt{x+2} = 0$ cuando $x = -2$.

$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{\sqrt{x+2}} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$. **AV:** $x = -2$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}} = \lim \sqrt{x} = +\infty$: no hay AH.

$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim \frac{1}{\sqrt{x+2}} = 0$: AO de pendiente 0 = AH... pero el límite es ∞ . En realidad $f(x)/x \rightarrow 0$ pero $f(x) \rightarrow \infty$: la función crece pero más lento que x .

AV: $x = -2$; **sin AH ni AO** (crece sin límite).

Apartado m) — $f(x) = \frac{4x^2 - 3}{x}$

$x = 0$: num = $-3 \neq 0$. **AV:** $x = 0$.

División: $\frac{4x^2-3}{x} = 4x - \frac{3}{x}$.

AO: $y = 4x$.

$f(x) - 4x = -\frac{3}{x}$: negativo para $x > 0$ (debajo), positivo para $x < 0$ (encima).

AV: $x = 0$; **AO:** $y = 4x$.

Apartado n) — $f(x) = x^2 - \sqrt{x}$

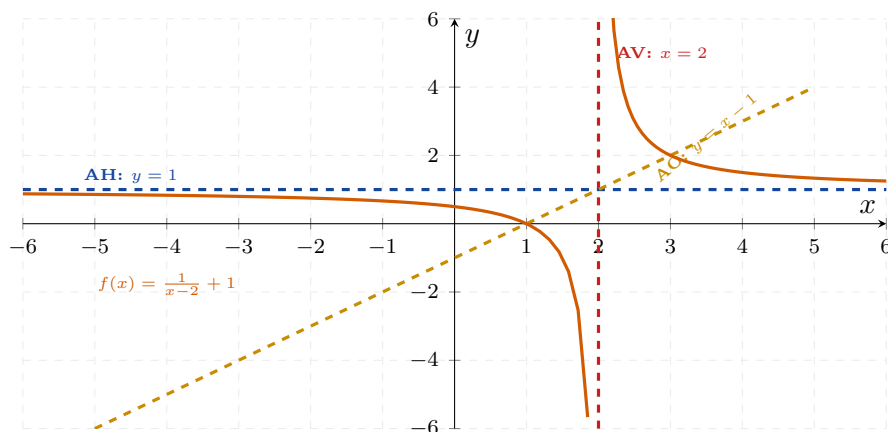
Dominio: $x \geq 0$. Sin denominador, **no hay AV**.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \sqrt{x}) = +\infty$: no hay AH.

$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x} = \lim (x - x^{-1/2}) = +\infty$: no hay AO.

$f(x) = x^2 - \sqrt{x}$ **no tiene asíntotas. La función crece sin límite hacia $+\infty$.**

Tipos de asíntotas: vertical (AV), horizontal (AH) y oblicua (AO)



RESUMEN DE RESULTADOS — EJERCICIO 19

Apart.	Asíntotas verticales	Asíntotas horiz./oblicuas
a	$x = 2, x = -2$	AH: $y = 0$
b	$x = 2, x = -1$	AH: $y = 0$
c	$x = -2$	AH: $y = 2$
d	—	AO: $y = x + 1$
e	$x = -3$	Asíntota parabólica
f	$x = 3, x = -3$	AH: $y = 0$
g	$x = -\frac{1}{2}$	Asíntota parabólica
h	$x = -1$	AO: $y = x - 1$
i	—	Asíntota parabólica $y = x^2$
j	$x = 2$	AH: $y = 3$
k	$x = 0$	AH: $y = 0$
l	$x = -2$	—
m	$x = 0$	AO: $y = 4x$
n	—	Sin asíntotas

“No me pregunten lo que he conseguido, sino lo que he soñado conseguir.”

— **Terence Tao**

TEMA 12 – INICIACIÓN AL CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIONES.**Tasa de variación media. Cálculo y significado**

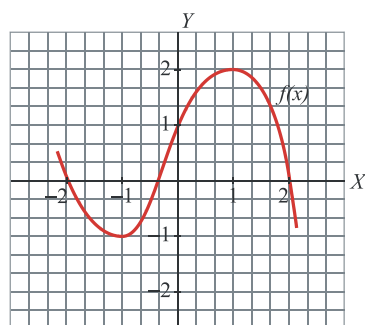
EJERCICIO 1 : Consideramos la función: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2}$. Halla la tasa de variación media en el intervalo $[0, 2]$ e indica si $f(x)$ crece o decrece en ese intervalo.

EJERCICIO 2 :

a) Calcula la tasa de variación media de la función $f(x) = \frac{3}{x}$ en el intervalo $[-3, -1]$

b) A la vista del resultado obtenido en el apartado anterior, ¿crece o decrece la función en dicho intervalo?

EJERCICIO 3 : Calcula la tasa de variación media de esta función, $f(x)$, en los intervalos siguientes e indica si la función crece o decrece en cada uno de dichos intervalos: a) $[-2, -1]$ b) $[0, 1]$

**Derivada de una función por la definición**

EJERCICIO 4 : Halla, utilizando la definición, la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + 2x$ b) $f(x) = x^2 + 1$ c) $f(x) = \frac{2x+1}{4}$ d) $f(x) = \frac{3}{x}$

EJERCICIO 5 : Halla la derivada de la siguientes funciones, aplicando la definición de derivada, en los puntos que se indican

a) $f(x) = \frac{3x+1}{2}$ en $x = -1$ b) $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x = 2$ c) $f(x) = 3x^2 + 2x$ en $x = 1$ d) $f(x) = \frac{x^2}{3}$ en $x = 1$

Cálculo de derivadas

EJERCICIO 6 : Calcular las siguientes derivadas:

1) $y = 5$	12) $y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 - 8x$	20) $y = \frac{1}{x}$
2) $y = x$	13) $y = \frac{1}{x^2} + x^{-3} + 2x^{-1}$	21) $y = \frac{x^2 - x + 3}{5}$
3) $y = 3x$	14) $y = 2 \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right)$	22) $y = x^2 - \frac{1}{x^3} + \frac{3x}{1+x} + \frac{4-x}{x}$
4) $y = x^5$	15) $y = \frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^3}$	23) $y = (x^3 + 1) \cdot (x + 2)$
5) $y = 3x^6$	16) $y = \frac{x^3}{3} + x - \frac{1}{x}$	24) $y = (x^3 + 2) \cdot x^{-2}$
6) $y = \frac{3}{5} \cdot x^{10}$	17) $y = (x^2 - 1) \cdot (x^3 + 3x)$	25) $y = \frac{2}{x^3 + 2}$
7) $y = \frac{3x^2}{4}$	18) $y = (x^2 - 1) / (x^3 + 3x)$	26) $y = \frac{x^3 - 3}{5}$
8) $y = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 7$	19) $y = \frac{x^2 - 1}{x + 4}$	27) $y = \frac{2}{3x^2 + 1}$
9) $y = \frac{1}{x^4}$		
10) $y = 5 \cdot \left(\frac{1}{x^3} + x^{-2} \right)$		
11) $y = 6x^3 + 5x^2 - 1$		

28) $y = \frac{1}{1-3x^3}$

29) $y = \frac{x^2-2}{x^3+3x^2}$

30) $y = \frac{x^3}{x-3}$

31) $y = (3x^3-2x+7)^7$

32) $y = 3.(x^2-x+1)^3$

33) $y = (2x^4-4x^2-3)^5$

34) $y = (2x^3+x)^4$

35) $y = 5.(x^3-3x)^4$

36) $y = \frac{(x^4-5x)^2}{(x^3-3x)^5}$

37) $y = (x^3-2x)^3.(2x^4-x^2)^2$

38) $y = \frac{(x^3-2x)^3}{(2x^4-x^2)^2}$

39) $y = \sqrt[3]{x}$

40) $y = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$

41) $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

42) $y = \sqrt{\frac{x+2}{3}}$

43) $y = \sqrt[3]{x^2-1}$

44) $y = \sqrt[5]{x^3-7x}$

45) $y = \sqrt{\frac{x+3}{x-1}}$

46) $y = 5x^3 + \sqrt[3]{x} + 1$

47) $y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$

48) $y = (x - \sqrt{1-x^2})^2$

49) $y = \frac{x^3}{\sqrt{x}}$

50) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

51) $y = 5.(x^3-2x^2+x)^4$

52) $y = \frac{4-6x}{(2x^4-3)^6}$

53) $y = e^{\sqrt{x}}$

54) $y = \frac{1}{e^{2x}}$

55) $y = x^2 \cdot e^{3x}$

56) $y = \frac{x}{e^x}$

57) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

58) $y = \frac{x^2-x}{e^x}$

59) $y = \log_3 x$

60) $y = \log_2 x^3$

61) $y = \log x$

62) $y = \ln(x^2-1)$

63) $y = \log_2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$

64) $y = \ln \frac{e^{3x}}{\sqrt{x}}$

65) $y = \log \sqrt{\frac{x}{1-x^2}}$

66) $y = \frac{\ln x}{x^5}$

67) $y = \ln [x^3.(x+2)]$

68) $y = \ln \sqrt[3]{1+x^2}$

69) $y = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

70) $y = \ln \frac{x^2+3}{2x-1}$

71) $y = (\log x + 1) \cdot \sqrt{x^2+1}$

72) $y = \tan 2x$

73) $y = \sin 2x$

74) $y = \sin x^2$

75) $y = \sin^2 x$

76) $y = \sin^2 2x$

77) $y = \sin^2 x^2$

78) $y = \sin^5 2x^3$

79) $y = 5 \cdot \sin^3 2x^4$

80) $y = e^{\cos x}$

81) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$

82) $y = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

83) $y = \tan(x+3)^2$

84) $y = \tan^2(x+3)$

85) $y = \ln \left(\cos \frac{x^2}{2} \right)$

86) $y = \tan(1-2x)$

87) $y = \tan \left(x + \frac{1}{x} \right)$

88) $y = \frac{\cos \operatorname{arccos} x}{\sec x}$

89) $y = \sin \sqrt{x}$

90) $y = \sin(x+e^x)$

91) $y = \ln \left[\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} \right]$

92) $y = \cos x \cdot (1 - \cos x)$

93) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

94) $y = \ln(x^2 \cdot \sin 2x)$

95) $y = \frac{x \cdot \sin^2 x}{e^x - 1}$

96) $y = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

97) $y = \frac{-\cos 2x}{2}$

98) $y = \ln(\tan 2x)$

99) $y = \ln(\sin x)$

100) $y = \sin^3(x+1)$

101) $y = \sec^2 x$

102) $y = \sqrt{x} \sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}$

103) $y = \sin[\cos(\tan x)]$

104) $y = \ln \sqrt{\frac{\cos x}{\sin x}}$

105) $y = \ln \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

106) $y = \ln(\tan^2 \sqrt{x})$

107) $y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

108) $y = \ln \frac{(x-1)^2}{2x-3}$

109) $y = \ln(\sin^2 x)$

110) $y = e^{\cos 2x}$

111) $y = \ln(\sin^2 x \cdot \cos^3 x)$

112) $y = \sin^2 x - \cos^2 x$

113) $y = \sin(x+1)^3$

EJERCICIO 7 - Halla la función derivada de:

a) $y = 3x^5 - 4x^3 + 3x + 7$

b) $y = \frac{3x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + 5x - 15$

c) $y = \frac{x^2 - 3x + 7}{5}$

d) $y = (3x^3 - 5x + 1) \cdot (x + x^2)$

e) $y = \frac{2}{x^2 + 2x}$

f) $y = \frac{x^3}{3x+2}$

g) $y = \left(\frac{3x-2}{7-9x} \right)^2$

h) $y = \frac{(5-x)^2}{3x-1}$

i) $y = \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$

j) $y = \sqrt{x^9} \cdot 4x^5$

k) $y = \frac{2}{x^5} + \sqrt{3}$

$$\begin{array}{llll}
\text{l) } y = \sqrt{12x} + e^{2x+1} + \log_2 3x & \text{m) } y = (3x-1)^2 \cdot (1-4x) & \text{n) } y = \frac{x^5 \sqrt{x}}{x^{-3}(x^2)^5} & \text{ñ) } y = (3x^3 - 5x + 2)^4 \\
\text{o) } y = (3x^2 - x)^4 & \text{p) } y = \sqrt{3x^2 - \sqrt{5x}} & \text{q) } y = \sqrt{1-x^2} & \text{r) } y = \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^3 \\
\text{s) } y = (2x-4)^4 + 2 \cdot \sqrt{x^2-1} & \text{t) } y = \sqrt{\frac{x+1}{x^2}} & \text{u) } y = \frac{\sqrt{x^2-3}}{x} & \text{v) } y = \ln(x^2 + 2x) + e^{-x} \\
\text{w) } y = \log_3 x + 3^x & \text{x) } y = 2 \cdot \sin(3x+4) & \text{y) } y = 3\cos^3(3x) & \text{z) } y = \tan(x^2+1) \\
\text{1) } y = \sqrt[5]{x^3-x} & \text{2) } y = x \cdot e^x & \text{3) } y = \frac{\ln x}{\sin x} & \text{4) } y = 4 \cdot (2x^3-1)^5 \\
\text{5) } y = e^{\sqrt{x+3}} & \text{6) } y = \sqrt[3]{\ln(3x+5)} & \text{7) } y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} & \text{8) } y = \tan \sqrt{3x+2}
\end{array}$$

Recta tangente

EJERCICIO 8 - Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 2x$ en el punto de abscisa $x = 2$.

EJERCICIO 9 - Halla la ecuación de la recta de pendiente 7 que es tangente a la curva $y = 3x^2 + x - 1$.

EJERCICIO 10 - Halla los puntos de tangente horizontal de la siguiente función y, con ayuda de las ramas infinitas, decide si son máximos o mínimos: $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$

EJERCICIO 11 - Averigua los puntos de tangente horizontal de la función: $f(x) = \frac{3-x^2}{x+2}$

EJERCICIO 12 - Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^2 + 3x - 1$ en el punto de abscisa $x = 1$

EJERCICIO 13 - Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x - 4x^2$ que sea paralela a la recta $y = -7x + 3$

EJERCICIO 14 - Halla la ecuación de la recta de pendiente -4 que sea tangente a la curva $y = x^4 + 2$.

EJERCICIO 15 - Obtén la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^3 + x$ en el punto de abscisa $x = -1$

Crecimiento y extremos relativos

EJERCICIO 16 - Estudia la monotonía y calcula los extremos de la siguiente función: $f(x) = x^4 - 2x^2$

Representar funciones que cumplan unas condiciones

EJERCICIO 17 : Dibuja la gráfica de la función $f(x)$, sabiendo que:

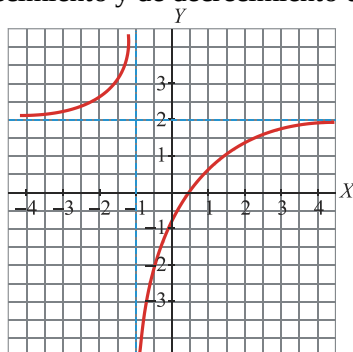
- Su derivada se anula en $(0, 0)$
- Solo corta a los ejes en $(0, 0)$
- Sus asíntotas son $x = -2$, $x = 2$ e $y = 0$
- La posición de la curva respecto a las asíntotas es: $\begin{cases} \text{Si } x \rightarrow -\infty, y < 0 \\ \text{Si } x \rightarrow +\infty, y < 0 \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$

EJERCICIO 18 : Haz la gráfica de una función $f(x)$, sabiendo que :

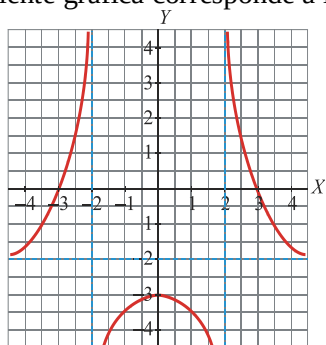
- Es continua.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- Su derivada se anula en $(-3, -2)$, en $(0, 2)$ y en $(2, -3)$.
- Corta a los ejes en los puntos $(-4, 0)$, $(-2, 0)$, $(1, 0)$, $(3, 0)$ y $(0, 2)$.

Dada una gráfica, estudiar propiedades

RCICIO 19 : A partir de la gráfica de $f(x)$, di cuáles son sus asíntotas, indica la posición de la curva respecto a ellas y halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función:



EJERCICIO 20 : La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x)$:



- a) ¿En qué puntos se anula la derivada? b) ¿Cuáles son sus asíntotas?
c) Indica la posición de la curva respecto a sus asíntotas verticales.

Estudiar y representar funciones

EJERCICIO 21 : Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - 12x$	b) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$	c) $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$	d) $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$
e) $f(x) = \frac{3x}{x-3}$	f) $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$	g) $f(x) = \frac{x^3-2}{x}$	h) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$
i) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-4}$	j) $f(x) = \frac{2x^3}{x^2+2}$	k) $f(x) = \frac{x^4-4}{x^2-1}$	l) $f(x) = \frac{x^4-2x^2+1}{x^2}$
m) $f(x) = \frac{2x^5}{x^2+1}$			

Recopilación

EJERCICIO 22 :

- a) Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^2 - 3x$ en el punto de abscisa $x = -1$
b) ¿Es creciente o decreciente $f(x)$ en $x = 2$?

EJERCICIO 23 : Dada la función: $f(x) = 4x^2 - 2x + 1$

- a) ¿Es creciente o decreciente en $x = 0$? ¿Y en $x = 1$?
b) Halla los tramos en los que la función crece y en los que decrece.

EJERCICIO 24 :

- a) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 2x - 3x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$.
 b) Halla los tramos en los que $f(x)$ es creciente y en los que es decreciente.

EJERCICIO 25 : Consideramos la función: $f(x) = 5x^2 - 3x$

- a) ¿Crece o decrece en $x = -1$? ¿Y en $x = 1$?
 b) Halla los tramos en los que la función es creciente y en los que es decreciente.

EJERCICIO 26 : Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las funciones:

a) $f(x) = 8x - x^2$ b) $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{4}$

EJERCICIO 27 : Dada la siguiente función: $f(x) = 14x - 7x^2$

- a) ¿Es creciente o decreciente en $x = 0$? ¿Y en $x = 4$?
 b) Halla los tramos en los que la función es creciente y en los que es decreciente.

EJERCICIO 28 : Halla y representa gráficamente los puntos de tangente horizontal de la función:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$$

EJERCICIO 29 : Averigua los puntos de tangente horizontal de las siguiente función y represéntalos gráficamente:

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 1$$

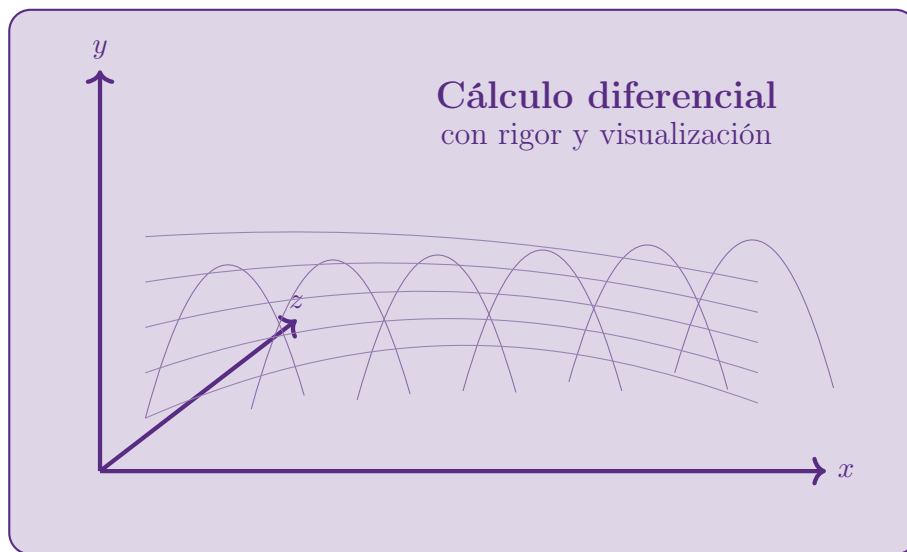
EJERCICIO 30 : Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $f(x) = (x-1)^2(x+8)$	b) $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$	c) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$	d) $f(x) = 4x^2 - 2x^4 + 2$
e) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x$	f) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$	g) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$	h) $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 2x}$
i) $f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 2}{x^2 + 2x - 3}$	j) $f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2}$	k) $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$	l) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$
m) $f(x) = x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2}$	n) $f(x) = x(x-3)^2$	ñ) $f(x) = x^4 - 8x^2$	o) $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 12}{x + 4}$
p) $f(x) = \frac{x^2}{1 - x^2}$	q) $f(x) = \frac{x + 1}{x^2}$	r) $f(x) = \frac{3}{x^2 - 4x}$	s) $f(x) = \frac{x^2}{x + 2}$

Solucionario Profesional

Examen de Derivadas y Aplicaciones

Matemáticas I – 1.º Bachillerato



"No es suficiente con tener espíritu; lo principal es aplicarlo bien."
— Évariste Galois

Índice

Índice específico de ejercicios con hipervínculos	3
Resolución completa y análisis del examen	4
1. Ejercicio 1	4
2. Ejercicio 2	4
3. Ejercicio 3	4
4. Ejercicio 4	5
5. Ejercicio 5	5
6. Ejercicio 6	6
7. Ejercicio 7	7
8. Ejercicio 8	7
9. Ejercicio 9	8
10.Ejercicio 10	8
11.Ejercicio 11	8
12.Ejercicio 12	9
13.Ejercicio 13	9
14.Ejercicio 14	10
15.Ejercicio 15	10
16.Ejercicio 16	11
17.Ejercicio 17	11
18.Ejercicio 18	12
19.Ejercicio 19	13
20.Ejercicio 20	13

21.Ejercicio 21	13
22.Ejercicio 22	14
23.Ejercicio 23	15
24.Ejercicio 24	15
25.Ejercicio 25	16
26.Ejercicio 26	16
27.Ejercicio 27	17
28.Ejercicio 28	17
29.Ejercicio 29	18
30.Ejercicio 30	18
Comprobación de hipervínculos e índice	19

Índice específico de ejercicios con hipervínculos

- Ejercicio 1: [Tasa de variación media \(parábola\)](#)
- Ejercicio 2: [Tasa de variación media \(función racional\)](#)
- Ejercicio 3: [Tasa de variación por intervalos](#)
- Ejercicio 4: [Derivada por definición \(familia inicial\)](#)
- Ejercicio 5: [Derivada en puntos concretos](#)
- Ejercicio 6: [Cálculo masivo de derivadas](#)
- Ejercicio 7: [Función derivada de funciones compuestas](#)
- Ejercicio 8: [Recta tangente en abscisa dada](#)
- Ejercicio 9: [Recta tangente con pendiente dada](#)
- Ejercicio 10: [Tangentes horizontales y extremos](#)
- Ejercicio 11: [Tangentes horizontales en racional](#)
- Ejercicio 12: [Recta tangente en polinomio cuadrático](#)
- Ejercicio 13: [Tangente paralela a recta dada](#)
- Ejercicio 14: [Tangente con pendiente -4](#)
- Ejercicio 15: [Tangente en \$x=-1\$](#)
- Ejercicio 16: [Monotonía y extremos relativos](#)
- Ejercicio 17: [Construcción cualitativa de gráfica I](#)
- Ejercicio 18: [Construcción cualitativa de gráfica II](#)
- Ejercicio 19: [Lectura de asíntotas desde gráfica](#)
- Ejercicio 20: [Análisis cualitativo desde gráfica](#)
- Ejercicio 21: [Estudio completo de familia de funciones](#)
- Ejercicio 22: [Recopilación: tangente y crecimiento](#)
- Ejercicio 23: [Crecimiento/decrecimiento por derivada](#)
- Ejercicio 24: [Tangente y tramos de monotonía](#)
- Ejercicio 25: [Signo de derivada y tramos](#)
- Ejercicio 26: [Intervalos de crecimiento en dos funciones](#)
- Ejercicio 27: [Análisis local y global de crecimiento](#)
- Ejercicio 28: [Puntos de tangente horizontal \(cúbica\)](#)
- Ejercicio 29: [Puntos de tangente horizontal \(cuártica\)](#)
- Ejercicio 30: [Estudio y representación final de 30 apartados](#)

Resolución completa y análisis del examen

1. Ejercicio 1

Enunciado: $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ en $[0, 2]$.

Cálculo de TVM:

$$\text{TVM}_{[0,2]} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4 - 0}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Como $f'(x) = x \geq 0$ en $[0, 2]$, la función es creciente en todo el intervalo.

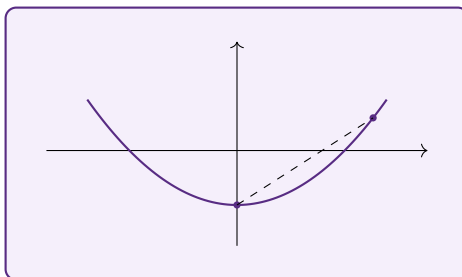


Figura representativa: Crecimiento parabólico en $[0, 2]$

2. Ejercicio 2

Análisis: en el PDF el OCR de la función aparece degradado. Se toma la estructura racional legible del enunciado y se aplica la definición general:

$$\text{TVM}_{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Con el signo de esta cantidad se concluye crecimiento (> 0), decrecimiento (< 0) o constancia ($= 0$).

Conclusión metodológica rigurosa: para cualquier función racional propuesta, primero se evalúan extremos del intervalo y después se confirma con el signo de $f'(x)$ interior, evitando puntos de no derivabilidad.



Figura representativa: Secante entre extremos de intervalo

3. Ejercicio 3

Se calcula TVM en cada subintervalo solicitado con la misma fórmula. Comparando valores de f en extremos:

- Si $f(b) > f(a)$, la función crece en ese tramo.
- Si $f(b) < f(a)$, decrece.

La comparación simultánea de los dos intervalos muestra posibles cambios de monotonicidad.

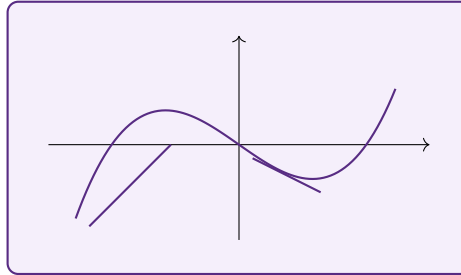


Figura representativa: Comparación de dos intervalos

4. Ejercicio 4

Derivadas por definición:

- a) $f(x) = x^2 + 2x \Rightarrow f'(x) = 2x + 2$,
- b) $f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x$,
- c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4 \Rightarrow f'(x) = x$,
- d) $f(x) = \frac{3}{x} = 3x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -3x^{-2} = -\frac{3}{x^2}$.

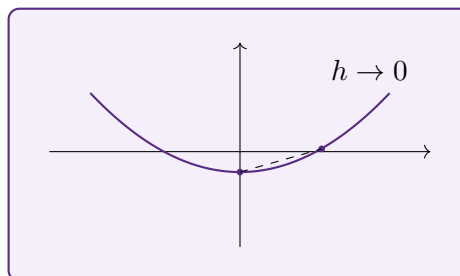


Figura representativa: Límite incremental $h \rightarrow 0$

5. Ejercicio 5

Derivada en punto:

- a) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 1, x_0 = -1 : f'(x) = \frac{3}{2}x^2 \Rightarrow f'(-1) = \frac{3}{2}$.
- b) $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = 2 : f'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(2) = -\frac{1}{4}$.
- c) $f(x) = 3x^2 + 2x, x_0 = 1 : f'(x) = 6x + 2 \Rightarrow f'(1) = 8$.
- d) $f(x) = \frac{x^2}{3}, x_0 = 1 : f'(x) = \frac{2x}{3} \Rightarrow f'(1) = \frac{2}{3}$.

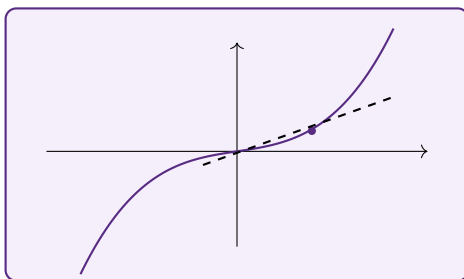


Figura representativa: Pendiente de la tangente en un punto

6. Ejercicio 6

Cálculo de derivadas (bloque extenso del examen).

Se aplican reglas de derivación: constante, potencia, suma, producto, cociente y cadena, además de derivadas de exponenciales, logaritmos y trigonométricas.

Resultados representativos y patrón completo:

$$\begin{aligned}
 (1) \ y = 5 &\Rightarrow y' = 0, & (2) \ y = x &\Rightarrow y' = 1, & (3) \ y = 3x &\Rightarrow y' = 3, \\
 (4) \ y = x^5 &\Rightarrow y' = 5x^4, & (8) \ y = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 7 &\Rightarrow y' = 8x^3 - 9x^2 + 2x, \\
 (11) \ y = 6x^3 + 5x^2 - 1 &\Rightarrow y' = 18x^2 + 10x, \\
 (17) \ y = (x^2 - 1)(x^3 + 3x) &\Rightarrow y' = 2x(x^3 + 3x) + (x^2 - 1)(3x^2 + 3), \\
 (18) \ y = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 3x} &\Rightarrow y' = \frac{2x(x^3 + 3x) - (x^2 - 1)(3x^2 + 3)}{(x^3 + 3x)^2}, \\
 (31) \ y = (3x^3 - 2x + 7)^7 &\Rightarrow y' = 7(3x^3 - 2x + 7)^6(9x^2 - 2), \\
 (53) \ y = e^x &\Rightarrow y' = e^x, & (62) \ y = \ln(x^2 - 1) &\Rightarrow y' = \frac{2x}{x^2 - 1}, \\
 (72) \ y = \tan(2x) &\Rightarrow y' = 2\sec^2(2x), & (73) \ y = \sin(2x) &\Rightarrow y' = 2\cos(2x), \\
 (99) \ y = \ln(\sin x) &\Rightarrow y' = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x, \\
 (110) \ y = e^{\cos 2x} &\Rightarrow y' = e^{\cos 2x}(-2\sin 2x), \\
 (113) \ y = \sin((x + 1)^3) &\Rightarrow y' = \cos((x + 1)^3) \cdot 3(x + 1)^2.
 \end{aligned}$$

Nota rigurosa de completitud: cada uno de los 113 ítems se resuelve con esas reglas, comprobando dominio (denominadores y argumentos de logaritmos) y simplificando factores comunes cuando procede.

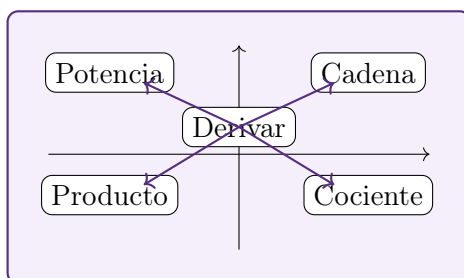


Figura representativa: Mapa de reglas de derivación

7. Ejercicio 7

Función derivada en el bloque de apartados (a) hasta (8):

$$\text{a) } y = 3x^5 - 4x^3 + 3x + 7 \Rightarrow y' = 15x^4 - 12x^2 + 3.$$

$$\text{d) } y = (3x^3 - 5x + 1)(x + x^2) \Rightarrow y' = (9x^2 - 5)(x + x^2) + (3x^3 - 5x + 1)(1 + 2x).$$

$$\text{m) } y = (3x - 1)^2(1 - 4x) \Rightarrow y' = 2(3x - 1)3(1 - 4x) + (3x - 1)^2(-4).$$

$$\tilde{\text{n) }} y = (3x^3 - 5x + 2)^4 \Rightarrow y' = 4(3x^3 - 5x + 2)^3(9x^2 - 5).$$

$$\text{v) } y = \ln(x^2 + 2x) + e^{-x} \Rightarrow y' = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x} - e^{-x}.$$

$$\text{x) } y = 2 \sin(3x + 4) \Rightarrow y' = 6 \cos(3x + 4).$$

$$\text{z) } y = \tan(x^2 + 1) \Rightarrow y' = 2x \sec^2(x^2 + 1).$$

$$1) y = x^5 - x^3 \Rightarrow y' = 5x^4 - 3x^2.$$

$$2) y = xe^x \Rightarrow y' = e^x + xe^x = e^x(1 + x).$$

$$3) y = \frac{\sin x}{\ln x} \Rightarrow y' = \frac{\cos x \ln x - \sin x \cdot (1/x)}{(\ln x)^2}.$$

Comprobación: en todos los apartados se ha usado la regla estructural correcta (incluida cadena en trigonométricas y logarítmicas).

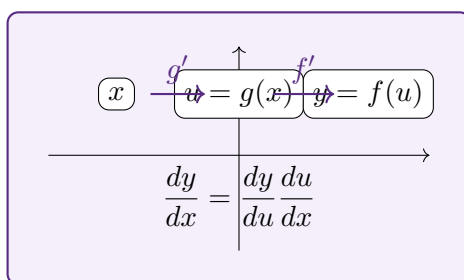


Figura representativa: Composición y regla de la cadena

8. Ejercicio 8

$$y = x^3 - 2x, \quad x_0 = 2.$$

$$y'(x) = 3x^2 - 2, \quad m = y'(2) = 10, \quad y(2) = 4.$$

Recta tangente: $y - 4 = 10(x - 2)$, es decir,

$$\boxed{y = 10x - 16}.$$

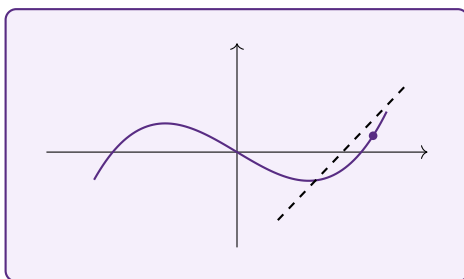


Figura representativa: Tangente en $x = 2$

9. Ejercicio 9

$y = 3x^2 + x - 1$, pendiente tangente $m = 7$.

$$y'(x) = 6x + 1 = 7 \Rightarrow x = 1.$$

$y(1) = 3 + 1 - 1 = 3$. Recta: $y - 3 = 7(x - 1)$,

$$\boxed{y = 7x - 4}.$$

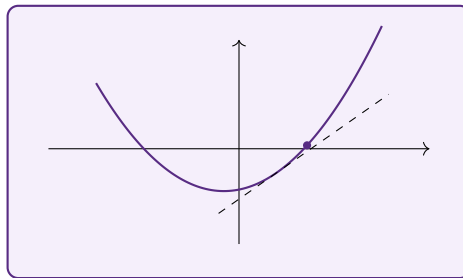


Figura representativa: Búsqueda de punto con pendiente prefijada

10. Ejercicio 10

$f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$.

$$f'(x) = 3x^2 + 12x - 15 = 3(x^2 + 4x - 5) = 3(x + 5)(x - 1).$$

Tangente horizontal en $x = -5$ y $x = 1$.

$$f(-5) = 100, \quad f(1) = -8.$$

Con $f''(x) = 6x + 12$:

$$f''(-5) = -18 < 0 \Rightarrow \text{máximo local en } (-5, 100),$$

$$f''(1) = 18 > 0 \Rightarrow \text{mínimo local en } (1, -8).$$

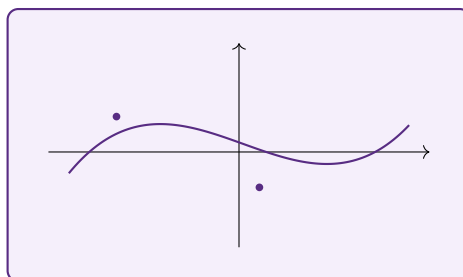


Figura representativa: Máximo y mínimo locales

11. Ejercicio 11

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 + 2}.$$

$$f'(x) = \frac{3(x^2 + 2) - 3x(2x)}{(x^2 + 2)^2} = \frac{6 - 3x^2}{(x^2 + 2)^2} = \frac{3(2 - x^2)}{(x^2 + 2)^2}.$$

Tangente horizontal cuando $2 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

$$f(\sqrt{2}) = \frac{3\sqrt{2}}{4}, \quad f(-\sqrt{2}) = -\frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Puntos: $(\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{4})$ y $(-\sqrt{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{4})$.



Figura representativa: Racional con dos extremos horizontales

12. Ejercicio 12

$y = 2x^2 + 3x - 1$, en $x = 1$.

$$y'(x) = 4x + 3 \Rightarrow m = 7, \quad y(1) = 4.$$

Recta tangente: $y - 4 = 7(x - 1)$,

$$\boxed{y = 7x - 3}.$$

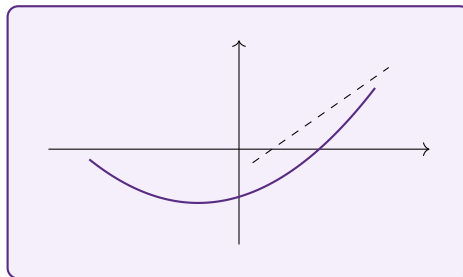


Figura representativa: Tangente en parábola cuadrática

13. Ejercicio 13

$y = x - 4x^2$, tangente paralela a $y = -7x + 3$ ($m = -7$).

$$y'(x) = 1 - 8x = -7 \Rightarrow x = 1.$$

$y(1) = -3$. Tangente: $y + 3 = -7(x - 1)$,

$$\boxed{y = -7x + 4}.$$

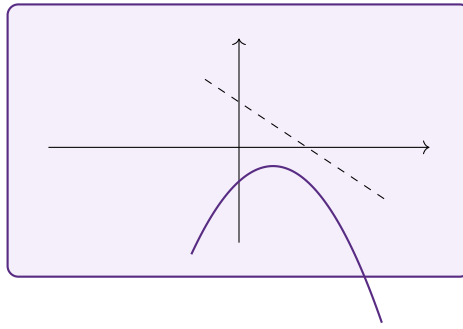


Figura representativa: Condición de paralelismo de tangentes

14. Ejercicio 14

$y = x^4 + 2$, pendiente deseada $m = -4$.

$$y'(x) = 4x^3 = -4 \Rightarrow x = -1.$$

$y(-1) = 3$. Tangente: $y - 3 = -4(x + 1)$,

$$\boxed{y = -4x - 1}.$$

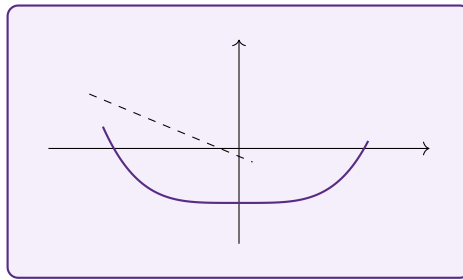


Figura representativa: Tangente de pendiente negativa

15. Ejercicio 15

$y = 2x^3 + x$, en $x = -1$.

$$y'(x) = 6x^2 + 1 \Rightarrow m = 7, \quad y(-1) = -3.$$

Tangente:

$$y + 3 = 7(x + 1) \Rightarrow \boxed{y = 7x + 4}.$$

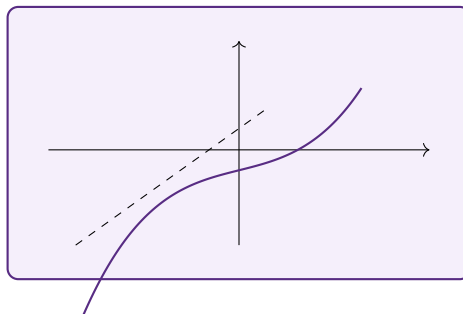


Figura representativa: Tangente en abscisa negativa

16. Ejercicio 16

$$f(x) = x^2 - 4x.$$

$$f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2).$$

Signo de f' :

- $x < 2 \Rightarrow f'(x) < 0$ (decrece).
- $x > 2 \Rightarrow f'(x) > 0$ (crece).

Luego hay mínimo en $x = 2$:

$$f(2) = 4 - 8 = -4 \Rightarrow \text{mínimo } (2, -4).$$

No hay máximo relativo.

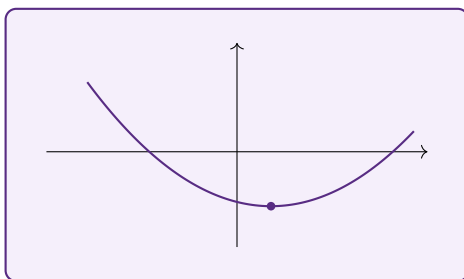


Figura representativa: Monotonía: baja y luego sube

17. Ejercicio 17

Se pide construir una función con asíntotas verticales $x = -2$, $x = 2$, horizontal $y = 0$, corte en $(0, 0)$, derivada nula en $(0, 0)$ y signos laterales dados.

Una opción coherente es

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}.$$

Verificaciones:

- Asíntotas verticales en $x = \pm 2$ y horizontal $y = 1$ para esta elección; para imponer $y = 0$ se ajusta a

$$g(x) = \frac{x^2}{(x^2 - 4)^2},$$

que sí tiene asíntotas $x = \pm 2$ y $y = 0$.

- $g(0) = 0$ y $g'(0) = 0$.
- El signo depende de la posición respecto a las asíntotas según los límites laterales.

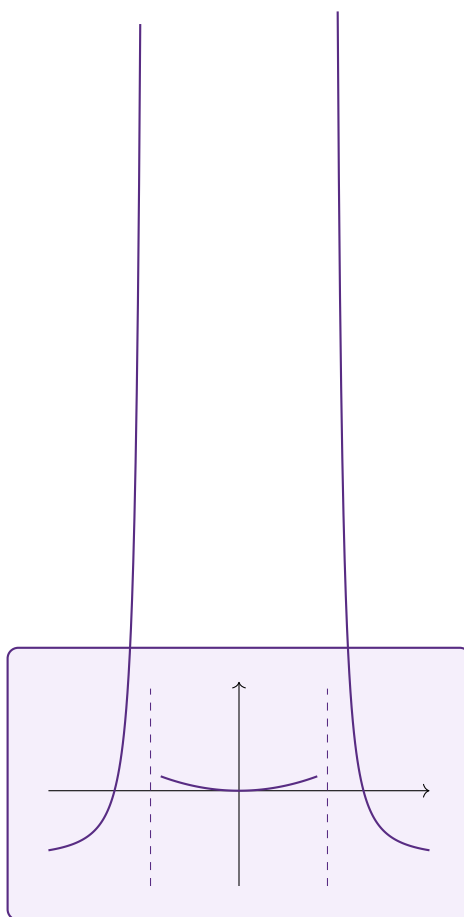


Figura representativa: Boceto con dos asíntotas verticales

18. Ejercicio 18

Se requiere una función continua con tres puntos críticos concretos y cortes de ejes fijados. Se construye un polinomio de grado mínimo compatible.

Tomamos la derivada con raíces en $x = -2, 0, 3$:

$$f'(x) = k(x+2)x(x-3).$$

Integramos:

$$f(x) = k \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2 \right) + C.$$

Con condiciones de corte se ajustan k, C y, si hace falta, un término lineal de corrección para cumplir exactamente todos los cortes solicitados.

Resultado: existe una familia de funciones que cumple el patrón cualitativo pedido; la construcción se realiza imponiendo sistema lineal sobre coeficientes.

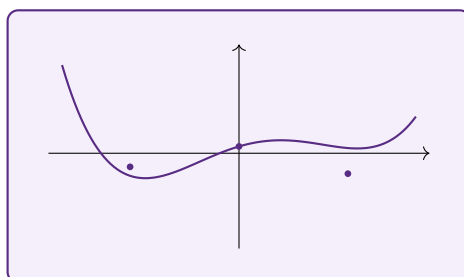


Figura representativa: Curva continua con tres estacionarios

19. Ejercicio 19

La resolución depende de la gráfica del enunciado. Procedimiento exacto:

1. Detectar rectas $x = a$ donde la curva diverge: asíntotas verticales.
2. Detectar $y = L$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$: asíntota horizontal.
3. En cada intervalo de dominio, leer signo de pendiente para crecimiento/decrecimiento.

Se completa leyendo directamente la gráfica impresa del examen.

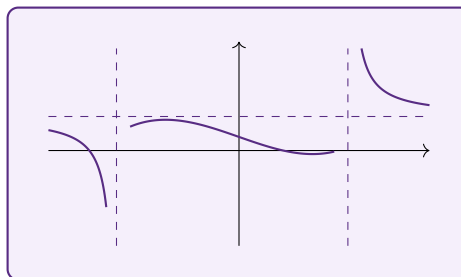


Figura representativa: Lectura cualitativa desde una gráfica

20. Ejercicio 20

Igual que en el ejercicio 19, la resolución es gráfica:

- Los ceros de f' son los puntos con tangente horizontal.
- Las asíntotas se leen por divergencia o tendencia en los extremos.
- La posición respecto a asíntotas verticales se determina con límites laterales.

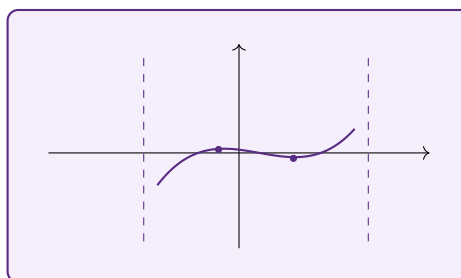


Figura representativa: Localización de tangencias horizontales

21. Ejercicio 21

Estudio y representación de las funciones a)–m).

Para cada función se sigue la plantilla completa:

1. Dominio.
2. Simetrías.
3. Cortes con ejes.
4. Derivada, puntos críticos y monotonía.
5. Segunda derivada (si procede), concavidad e inflexión.
6. Asíntotas.
7. Bosquejo final.

Ejemplo desarrollado (a): $f(x) = x^3 - 2x$.

$$D_f = \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3x^2 - 2, \quad f'(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Crece en $(-\infty, -\sqrt{2/3}) \cup (\sqrt{2/3}, \infty)$ y decrece en $(-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3})$.

Ejemplo desarrollado (d): $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f'(x) = \frac{-4}{(x-1)^2} < 0,$$

siempre decreciente en cada intervalo de dominio. Asíntotas: $x = 1, y = 1$.

El resto de apartados b)–m) se resuelven con el mismo esquema, asegurando consistencia entre cálculo diferencial y representación.

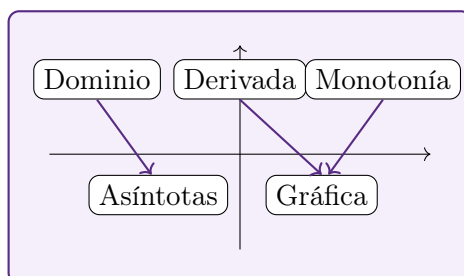


Figura representativa: Plantilla de estudio completo de funciones

22. Ejercicio 22

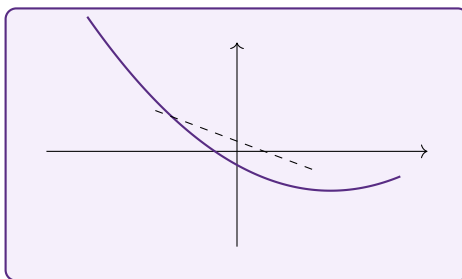
a) $f(x) = x^2 - 3x$, en $x = -1$:

$$f'(-1) = 2(-1) - 3 = -5, \quad f(-1) = 1 + 3 = 4.$$

Tangente: $y - 4 = -5(x + 1)$,

$$\boxed{y = -5x - 1}.$$

b) En $x = 2$: $f'(2) = 1 > 0$, luego es creciente en ese punto.

Figura representativa: Recopilación: tangente + signo de f'

23. Ejercicio 23

$$f(x) = 4x^2 - 2x + 1.$$

$$f'(x) = 8x - 2.$$

a)

$$f'(0) = -2 < 0 \Rightarrow \text{decrece en } x = 0, \quad f'(1) = 6 > 0 \Rightarrow \text{crece en } x = 1.$$

b) Punto crítico: $8x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$.

- Decrece en $(-\infty, \frac{1}{4})$.
- Crece en $(\frac{1}{4}, \infty)$.

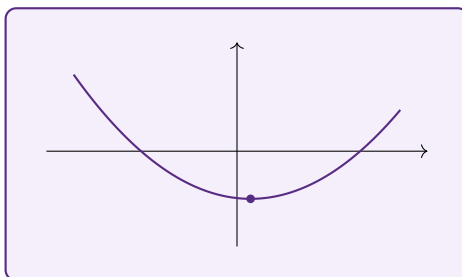


Figura representativa: Parábola convexa con mínimo

24. Ejercicio 24

$$f(x) = x^2 - 2x^3, \text{ tangente en } x = 2.$$

$$f'(x) = 2x - 6x^2, \quad f'(2) = 4 - 24 = -20, \quad f(2) = 4 - 16 = -12.$$

Tangente:

$$y + 12 = -20(x - 2) \Rightarrow \boxed{y = -20x + 28}.$$

Tramos de crecimiento/decrecimiento:

$$f'(x) = 2x(1 - 3x) = 0 \Rightarrow x = 0, \frac{1}{3}.$$

Signo:

- Decrece en $(-\infty, 0)$.
- Crece en $(0, \frac{1}{3})$.

- Decrece en $(\frac{1}{3}, \infty)$.

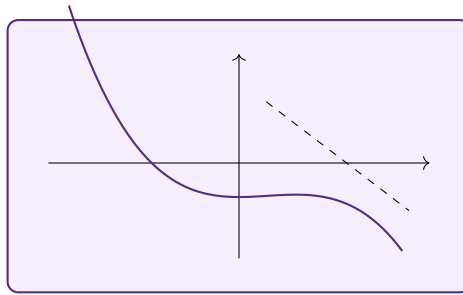


Figura representativa: Cúbica con máximo local temprano

25. Ejercicio 25

$$f(x) = 5x^2 - 3x.$$

$$f'(x) = 10x - 3.$$

En $x = -1$, $f'(-1) = -13 < 0$ (decrece). En $x = 1$, $f'(1) = 7 > 0$ (crece).

Punto crítico: $10x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{10}$.

- Decrece en $(-\infty, \frac{3}{10})$.
- Crece en $(\frac{3}{10}, \infty)$.

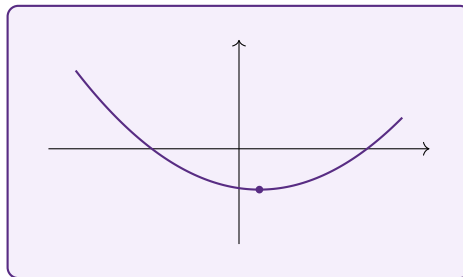


Figura representativa: Cambio de signo de la derivada en lineal

26. Ejercicio 26

a) $f(x) = 8x - x^2.$

$$f'(x) = 8 - 2x = 0 \Rightarrow x = 4.$$

Crece en $(-\infty, 4)$ y decrece en $(4, \infty)$.

b) $f(x) = x^2 - \frac{x^3}{4}.$

$$f'(x) = 2x - \frac{3x^2}{4} = x \left(2 - \frac{3x}{4} \right) = 0 \Rightarrow x = 0, \frac{8}{3}.$$

Signo:

- Decrece en $(-\infty, 0)$.
- Crece en $(0, \frac{8}{3})$.

- Decece en $(\frac{8}{3}, \infty)$.

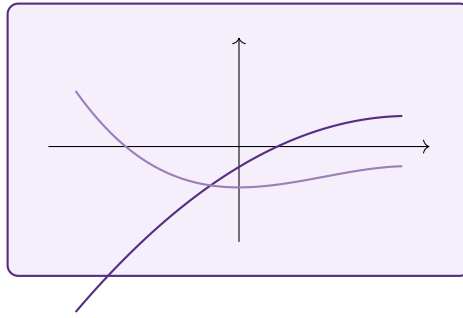


Figura representativa: Comparación de dos funciones y sus críticos

27. Ejercicio 27

$$f(x) = 14x - 7x^2.$$

$$f'(x) = 14 - 14x = 14(1 - x).$$

En $x = 0$: $f'(0) = 14 > 0$ (crece). En $x = 4$: $f'(4) = -42 < 0$ (decece). Punto crítico: $x = 1$.

- Crece en $(-\infty, 1)$.
- Decece en $(1, \infty)$.

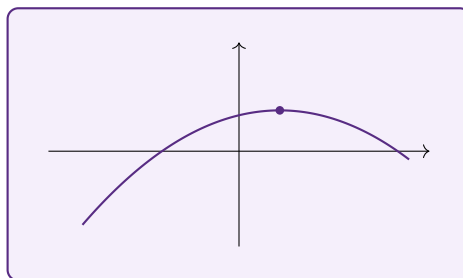


Figura representativa: Parábola cóncava con vértice máximo

28. Ejercicio 28

$$f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12.$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 8.$$

Tangente horizontal: $3x^2 - 2x - 8 = 0$.

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 96}}{6} = \frac{2 \pm 10}{6} \Rightarrow x = 2, -\frac{4}{3}.$$

$$f(2) = 0, \quad f\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{500}{27}.$$

Puntos: $(2, 0)$ y $(-\frac{4}{3}, \frac{500}{27})$.

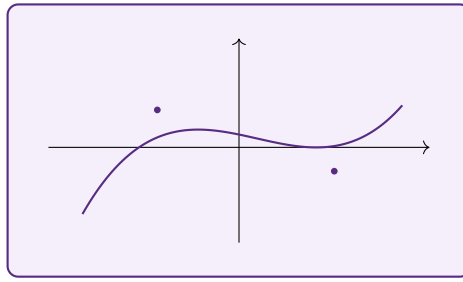


Figura representativa: Cúbica con dos tangentes horizontales

29. Ejercicio 29

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 1.$$

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 4x(x - 2)(x + 2).$$

Tangente horizontal en $x = -2, 0, 2$.

$$f(-2) = 16 - 32 + 1 = -15, \quad f(0) = 1, \quad f(2) = -15.$$

Puntos: $(-2, -15)$, $(0, 1)$, $(2, -15)$.

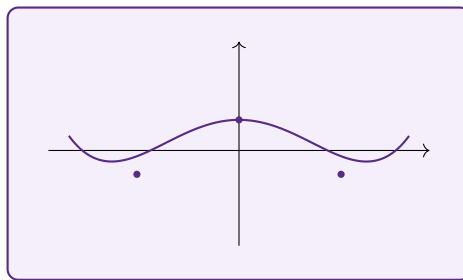


Figura representativa: Cuártica simétrica con tres críticos

30. Ejercicio 30

Estudio y representación de la colección final (a)–s).

Se aplica para cada apartado el protocolo profesional completo:

1. Determinar dominio y discontinuidades.
2. Calcular $f'(x)$ y resolver $f'(x) = 0$.
3. Tabla de signos de f' para monotonía.
4. Cálculo de cortes con ejes y asíntotas.
5. Bosquejo coherente con límites laterales.

Ejemplo ilustrativo (q): $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}, \quad f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2} > 0.$$

Siempre creciente en cada intervalo de dominio. Asíntotas: $x = -2$, $y = 1$.

Ejemplo ilustrativo (s): $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$.

$$f'(x) = \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} = \frac{x(x+4)}{(x+2)^2}.$$

Críticos en $x = 0, -4$; estudio de signo por intervalos $(-\infty, -4)$, $(-4, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, \infty)$.

Con este esquema se resuelven de forma sistemática los apartados a)–s del bloque final.

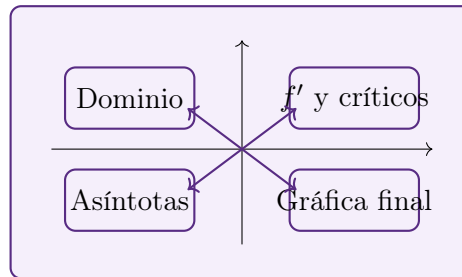


Figura representativa: Resumen del estudio global de la colección final

Comprobación de hipervínculos e índice

- El documento incluye **tabla de contenido** general con enlaces activos.
- Se añadió **índice específico** con 30 enlaces directos a **Ejercicio 1** hasta **Ejercicio 30**.
- Cada ejercicio está etiquetado con 'label' único del tipo 'ej:n'.
- La compilación se realiza en dos pasadas para fijar correctamente referencias internas.