

$$\int_a^b f(x) dx$$



$$\nabla^2 \varphi = 0$$

EXÁMENES DE LA DIS

CURSO 2022–2023

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

*“Las Matemáticas son la reina de las ciencias
y la Teoría de Números es la reina de las Matemáticas.”*

— **Carl Friedrich Gauss (1777–1855)**

$$\Sigma \quad \int \quad \infty \quad \nabla \quad \partial$$

INSTITUTO DE ENSEÑANZA SECUNDARIA
Departamento de Matemáticas

CUADERNO DE EXÁMENES DE LADIS 2.º ESO

CURSO ACADÉMICO 2022 – 2023

PIERRE DE FERMAT (1607 – 1665)

“He descubierto una demostración verdaderamente maravillosa de esta proposición, pero el margen es demasiado pequeño para contenerla.”

Escolio marginal sobre el Último Teorema de Fermat:

$a^n + b^n = c^n$ no tiene solución entera para $n > 2$

$$\pi \approx 3,14159 \dots \quad | \quad e \approx 2,71828 \dots \quad | \quad \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,61803 \dots$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \quad \longleftarrow \quad \text{Identidad de Euler}$$

*“La matemática es la reina de las ciencias
y la aritmética la reina de las matemáticas.” — C. F. Gauss*

Nº1.- Calcúlese, paso a paso, las siguientes operaciones combinadas:

a) $(3 - 8) + (5 - 3) + (2 - 6) - (3 + 4) - (1 + 7)$ b) $(-20) : (-10) - 15 : (-5) + 8 \cdot 3$
c) $(\sqrt{81} - \sqrt{25})^2 + 2^3 - \sqrt{7+9}$ d) $(-4)^3 : [(-15) : 5 - (-45) : (-9)]$

Nº2.- Un operario cobró el mes pasado un sobresueldo de 408 € por haber trabajado ocho horas extraordinarias. ¿Cuál será su sobresueldo este mes si sólo ha trabajado 6 horas extras?

Nº3.- Calcúlese el m.c.m (24,36,40) y el M.C.D (24,36,40)

Nº4.- En un museo de Valladolid la visita es guiada y entran 25 personas cada 25 minutos. Si la visita dura 90 minutos y el primer grupo entra a las 9 de la mañana, ¿Cuántos visitantes hay dentro del museo a las 10:00?, ¿y cuántos hay a las 11:15?

Nº5.- Un faro se enciende cada 12 segundos, otro cada 18 segundos y un tercero cada minuto. Si los tres se encienden a las 18:30, ¿a qué hora volverán a coincidir?, ¿cuántas veces coincidirán en el siguiente cuarto de hora?

Nº6.- Calcula paso a paso las siguientes operaciones con fracciones:

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{8}\right)$ b) $4 + \frac{1}{4} - \frac{5}{6} + \frac{7}{12} - \frac{2}{3}$

Nº7.- El primer cliente de la tarde pide un café con leche. “Sergio, ¿cuánto café echáis en cada taza?”, le preguntas. “El café ocupa $\frac{1}{3}$ de la capacidad de la taza”, contesta.

- a) Te gustaría preguntar qué fracción ocupa la leche, pero prefieres pensarlo tú mismo. ¿Cuál es esa fracción?
- b) Le dices a María que ya sabes las fracciones de café y de leche, pero necesitas el dato en centilitros. Ella te dice que una taza contiene 12 cl, y que calcules tú el resto.

Nº8.- Ordena las siguientes fracciones de menor a mayor:

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{5}{6}, \quad \frac{7}{2}, \quad \frac{2}{9}$$

Nº9.- María recorre en cuatro horas dos terceras partes de un trayecto. ¿Cuánto tardará en hacer todo el trayecto?

TODOS LOS PROBLEMAS VALEN 1 PUNTO

SUERTE JÓVENES

SOLUCIONES COMPLETAS

Examen de Matemáticas

2.º ESO — 28 de octubre de 2022

Todos los problemas valen 1 punto

Resolución detallada con justificación matemática completa,
ilustraciones y diagramas explicativos para cada ejercicio.

Contents

1	Ejercicio 1 — Operaciones Combinadas	2
2	Ejercicio 2 — Regla de Tres: Horas Extra	6
3	Ejercicio 3 — mcm y MCD de 24, 36, 40	8
4	Ejercicio 4 — Visitantes en el Museo	10
5	Ejercicio 5 — Los Tres Faros	12
6	Ejercicio 6 — Operaciones con Fracciones	14
7	Ejercicio 7 — Fracciones en la Taza de Café	17
8	Ejercicio 8 — Ordenar Fracciones	19
9	Ejercicio 9 — Trayecto de María	21
	Resumen de Resultados	23

Ejercicio 1 — Operaciones Combinadas

Enunciado

Calcúlese, paso a paso, las siguientes operaciones combinadas:

a) $(3 - 8) + (5 - 3) + (2 - 6) - (3 + 4) - (1 + 7)$

b) $(-20) : (-10) - 15 : (-5) + 8 \cdot 3$

c) $(\sqrt{81} - \sqrt{25})^2 + 2^3 - \sqrt{7+9}$

d) $(-4)^3 : [(-15) : 5 - (-45) : (-9)]$

Reglas de prioridad que aplicaremos:

1. Primero se resuelven las operaciones dentro de **paréntesis** (de dentro hacia fuera).
2. Luego **potencias y raíces**.
3. Después **multiplicaciones y divisiones** (de izquierda a derecha).
4. Por último **sumas y restas** (de izquierda a derecha).

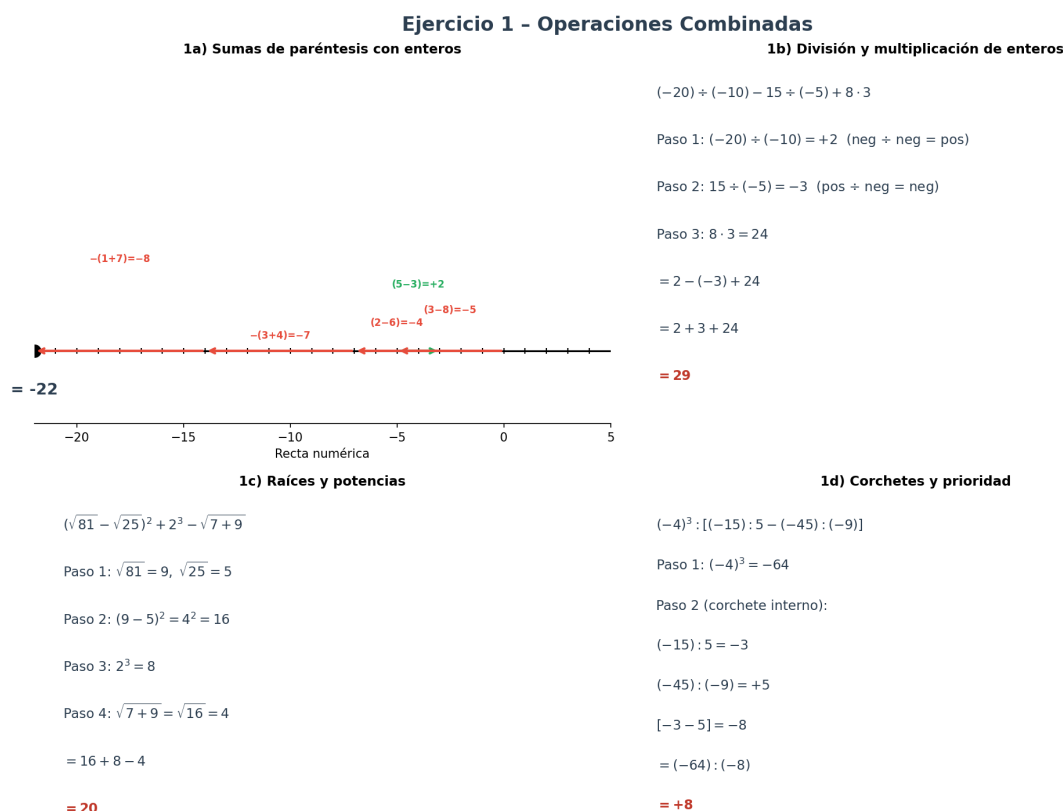


Figure 1: Esquemas visuales de los cuatro apartados del Ejercicio 1.

Apartado a)

Resolución paso a paso

$$(3 - 8) + (5 - 3) + (2 - 6) - (3 + 4) - (1 + 7)$$

Paso 1: Calculamos el valor de cada paréntesis:

$$(3 - 8) = -5 \quad (5 - 3) = +2 \quad (2 - 6) = -4$$

$$(3 + 4) = +7 \quad (1 + 7) = +8$$

Paso 2: Sustituimos y aplicamos los signos exteriores:

$$= (-5) + (+2) + (-4) - (+7) - (+8)$$

Paso 3: Operamos de izquierda a derecha:

$$-5 + 2 = -3$$

$$-3 + (-4) = -3 - 4 = -7$$

$$-7 - 7 = -14$$

$$-14 - 8 = -22$$

Resultado Final

$$(3 - 8) + (5 - 3) + (2 - 6) - (3 + 4) - (1 + 7) = -22$$

Apartado b)

Resolución paso a paso

$$(-20) : (-10) - 15 : (-5) + 8 \cdot 3$$

Regla de los signos en multiplicación/división: $(-) \div (-) = (+)$, $(+) \div (-) = (-)$, $(+) \cdot (+) = (+)$.

Paso 1: División $(-20) : (-10)$:

$$(-20) : (-10) = +2 \quad (\text{negativo entre negativo} = \text{positivo})$$

Paso 2: División $15 : (-5)$:

$$15 : (-5) = -3 \quad (\text{positivo entre negativo} = \text{negativo})$$

Paso 3: Multiplicación $8 \cdot 3$:

$$8 \cdot 3 = 24$$

Paso 4: Sustituimos y sumamos/restamos:

$$= (+2) - (-3) + 24 = 2 + 3 + 24 = 29$$

Nota: $-(-3) = +3$ porque cambiar el signo de un negativo da positivo.

Resultado Final

$$(-20) : (-10) - 15 : (-5) + 8 \cdot 3 = \mathbf{29}$$

Apartado c)

Resolución paso a paso

$$\left(\sqrt{81} - \sqrt{25}\right)^2 + 2^3 - \sqrt{7+9}$$

Paso 1: Raíces cuadradas exactas:

$$\sqrt{81} = 9 \quad \text{porque } 9^2 = 81$$

$$\sqrt{25} = 5 \quad \text{porque } 5^2 = 25$$

Paso 2: Resta dentro del paréntesis:

$$(9 - 5) = 4$$

Paso 3: Potencia del paréntesis:

$$4^2 = 16$$

Paso 4: Potencia de 2:

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

Paso 5: Raíz de la suma interior:

$$\sqrt{7+9} = \sqrt{16} = 4 \quad \text{porque } 4^2 = 16$$

Paso 6: Resultado final:

$$= 16 + 8 - 4 = 20$$

Resultado Final

$$\left(\sqrt{81} - \sqrt{25}\right)^2 + 2^3 - \sqrt{7+9} = \mathbf{20}$$

Apartado d)

Resolución paso a paso

$$(-4)^3 : [(-15) : 5 - (-45) : (-9)]$$

Paso 1: Potencia del exterior: $(-4)^3$

El exponente es impar, luego el resultado es negativo:

$$(-4)^3 = (-4) \times (-4) \times (-4) = 16 \times (-4) = -64$$

Paso 2: Interior del corchete, primera división:

$$(-15) : 5 = -3 \quad (\text{negativo entre positivo} = \text{negativo})$$

Paso 3: Interior del corchete, segunda división:

$$(-45) : (-9) = +5 \quad (\text{negativo entre negativo} = \text{positivo})$$

Paso 4: Operación dentro del corchete:

$$[(-3) - (+5)] = -3 - 5 = -8$$

Paso 5: División final:

$$(-64) : (-8) = +8 \quad (\text{negativo entre negativo} = \text{positivo})$$

Resultado Final

$$(-4)^3 : [(-15) : 5 - (-45) : (-9)] = +8$$

Ejercicio 2 — Regla de Tres: Horas Extra

Enunciado

Un operario cobró el mes pasado un sobresueldo de 408 € por haber trabajado ocho horas extraordinarias. ¿Cuál será su sobresueldo este mes si solo ha trabajado 6 horas extras?

Ejercicio 2 - Regla de Tres Directa Horas extraordinarias y sobresueldo

Horas extras	Sobresueldo
8 horas	408 €
6 horas	¿? €

Regla de tres directa:

$$x = \frac{408 \times 6}{8} = \frac{2448}{8} = 306 \text{ €}$$

→ A mayor horas, mayor sobresueldo (proporcionalidad directa)

Figure 2: Esquema de la regla de tres directa: más horas → más sobresueldo.

Resolución paso a paso

Identificación del tipo de proporcionalidad:

A más horas trabajadas, más sobresueldo se cobra. Por tanto, las magnitudes son **directamente proporcionales**. Utilizamos **regla de tres directa**.

Planteamiento:

Horas extras ↔ Sobresueldo

8 ↔ 408 €

6 ↔ x

Paso 1: La razón de proporcionalidad es:

$$\frac{408}{8} = 51 \text{ €/hora}$$

Paso 2: Por tanto, 6 horas:

$$x = 51 \times 6 = 306 \text{ €}$$

Comprobación: La razón debe ser la misma:

$$\frac{408}{8} = 51 = \frac{306}{6} \quad \checkmark$$

Resultado Final

El sobresueldo de este mes será de **306 €**.

Ejercicio 3 — mcm y MCD de 24, 36, 40

Enunciado

Calcúlese el $\text{mcm}(24, 36, 40)$ y el $\text{MCD}(24, 36, 40)$.

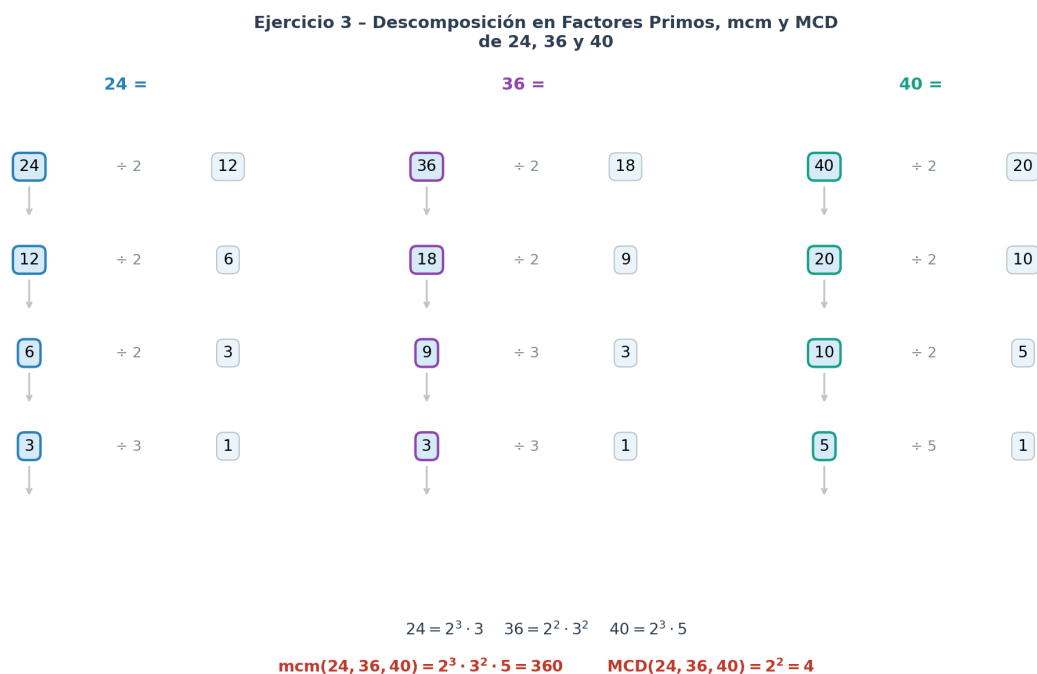


Figure 3: Árbol de factorización de 24, 36 y 40.

Resolución paso a paso

Método: descomposición en factores primos.

Paso 1: Descomposición de **24**:

$$24 \div 2 = 12 \rightarrow 12 \div 2 = 6 \rightarrow 6 \div 2 = 3 \rightarrow 3 \div 3 = 1$$

$$24 = 2^3 \cdot 3^1$$

Paso 2: Descomposición de **36**:

$$36 \div 2 = 18 \rightarrow 18 \div 2 = 9 \rightarrow 9 \div 3 = 3 \rightarrow 3 \div 3 = 1$$

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

Paso 3: Descomposición de **40**:

$$40 \div 2 = 20 \rightarrow 20 \div 2 = 10 \rightarrow 10 \div 2 = 5 \rightarrow 5 \div 5 = 1$$

$$40 = 2^3 \cdot 5^1$$

Paso 4: Mínimo Común Múltiplo (mcm):

Se toman *todos* los factores primos que aparecen, con el *mayor* exponente:

$$\text{mcm}(24, 36, 40) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 8 \cdot 9 \cdot 5$$

$$8 \times 9 = 72 \quad 72 \times 5 = 360$$

Paso 5: Máximo Común Divisor (MCD):

Se toman *solo* los factores primos *comunes* a los tres números, con el *menor* exponente:

- El factor 2 aparece en los tres: $2^3, 2^2, 2^3 \rightarrow$ tomamos 2^2
- El factor 3 aparece en 24 y 36 pero **no** en 40 $\rightarrow$ no se incluye
- El factor 5 aparece solo en 40 $\rightarrow$ no se incluye

$$\text{MCD}(24, 36, 40) = 2^2 = 4$$

Verificación: $24 \div 4 = 6 \checkmark$, $36 \div 4 = 9 \checkmark$, $40 \div 4 = 10 \checkmark$

Resultado Final

$$\text{mcm}(24, 36, 40) = \mathbf{360} \quad \text{MCD}(24, 36, 40) = \mathbf{4}$$

Ejercicio 4 — Visitantes en el Museo

Enunciado

En un museo de Valladolid la visita es guiada y entran 25 personas cada 25 minutos. La visita dura 90 minutos y el primer grupo entra a las 9:00.

- ¿Cuántos visitantes hay dentro del museo a las 10:00?
- ¿Y cuántos hay a las 11:15?

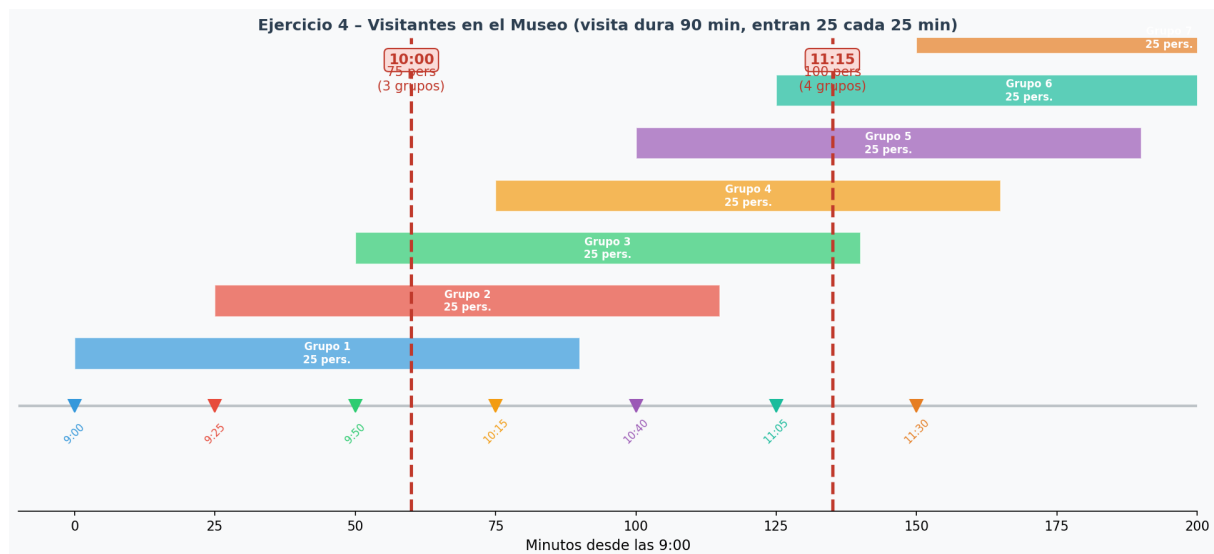


Figure 4: Diagrama de tiempo: cada barra representa un grupo de 25 personas con una visita de 90 min.

Resolución paso a paso

Datos del problema:

- Grupos de 25 personas entran cada 25 minutos.
- Cada visita dura 90 minutos.
- Un grupo que entra a la hora h sale a la hora $h + 90$ min.

Paso 1: Tabla de entradas y salidas de cada grupo:

Grupo	Hora de entrada	Hora de salida	Dentro a las 10:00 y 11:15
Grupo 1	9:00	10:30	10:00 ✓, 11:15 no
Grupo 2	9:25	10:55	10:00 ✓, 11:15 no
Grupo 3	9:50	11:20	10:00 ✓, 11:15 ✓
Grupo 4	10:15	11:45	10:00 no, 11:15 ✓
Grupo 5	10:40	12:10	10:00 no, 11:15 ✓
Grupo 6	11:05	12:35	10:00 no, 11:15 ✓

Paso 2: Visitantes a las 10:00:

Un grupo está *dentro* si ha entrado antes de las 10:00 y aún no ha salido (es decir, su salida es posterior a las 10:00).

- Grupo 1: entrada 9:00, salida 10:30 → está dentro ✓
- Grupo 2: entrada 9:25, salida 10:55 → está dentro ✓
- Grupo 3: entrada 9:50, salida 11:20 → está dentro ✓
- Grupo 4: entrada 10:15 → aún no ha entrado a las 10:00 –

$$\text{Grupos dentro} = 3 \Rightarrow \text{Visitantes} = 3 \times 25 = \mathbf{75}$$

Paso 3: Visitantes a las 11:15:

- Grupo 1: salida 10:30 → ya salió antes de las 11:15 –
- Grupo 2: salida 10:55 → ya salió –
- Grupo 3: entrada 9:50, salida 11:20 → está dentro ✓
- Grupo 4: entrada 10:15, salida 11:45 → está dentro ✓
- Grupo 5: entrada 10:40, salida 12:10 → está dentro ✓
- Grupo 6: entrada 11:05, salida 12:35 → está dentro ✓
- Grupo 7: entrada 11:30 → aún no ha entrado a las 11:15 –

$$\text{Grupos dentro} = 4 \Rightarrow \text{Visitantes} = 4 \times 25 = \mathbf{100}$$

Resultado Final

- A las **10:00**: hay **75 visitantes** (3 grupos).
- A las **11:15**: hay **100 visitantes** (4 grupos).

Ejercicio 5 — Los Tres Faros

Enunciado

Un faro se enciende cada 12 segundos, otro cada 18 segundos y un tercero cada minuto (60 s). Los tres se encienden a las 18:30:00.

- ¿A qué hora volverán a coincidir?
- ¿Cuántas veces coincidirán en el siguiente cuarto de hora?

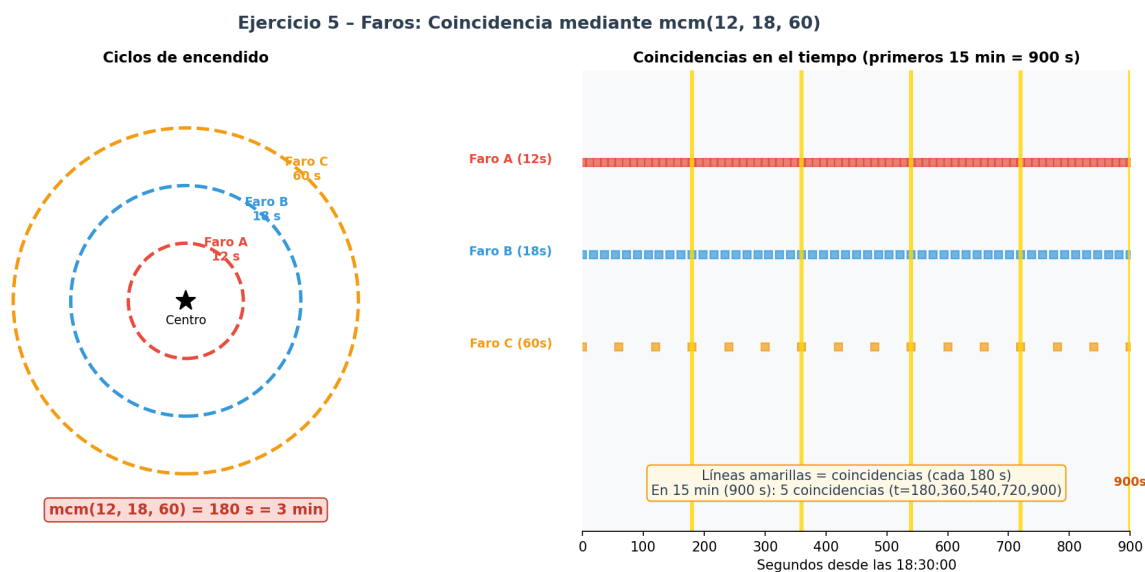


Figure 5: Izquierda: representación circular de los ciclos de cada faro. Derecha: línea temporal con las coincidencias (líneas doradas).

Resolución paso a paso

Análisis: Los tres faros coincidirán cada vez que transcurra un número de segundos que sea *múltiplo común* de 12, 18 y 60. El primer momento de coincidencia será el *mínimo común múltiplo*.

Paso 1: Descomposición en factores primos:

$$12 = 2^2 \cdot 3 \quad 18 = 2 \cdot 3^2 \quad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

Paso 2: Cálculo del mcm (factores con el mayor exponente):

$$\text{mcm}(12, 18, 60) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 4 \cdot 9 \cdot 5 = 180 \text{ s}$$

Convertimos a minutos y segundos:

$$180 \text{ s} = 3 \text{ min } 0 \text{ s}$$

Paso 3: Hora de la primera coincidencia:

$$18:30:00 + 3 \text{ min} = \mathbf{18:33:00}$$

Paso 4: Número de coincidencias en el siguiente cuarto de hora:

El cuarto de hora corresponde a $15 \text{ min} = 900 \text{ s}$.

Las coincidencias ocurren en los instantes $t = 180 \text{ s}, 360 \text{ s}, 540 \text{ s}, 720 \text{ s}, 900 \text{ s}$ (múltiples de 180 dentro de $[0, 900]$ sin contar el instante $t = 0$ inicial, que es la coincidencia de partida).

$$\frac{900}{180} = 5 \quad \Rightarrow \quad 5 \text{ coincidencias en 15 minutos}$$

Estas ocurren en: 18:33, 18:36, 18:39, 18:42 y 18:45.

Resultado Final

- La primera coincidencia tras las 18:30 es a las **18:33:00**.
- En el siguiente cuarto de hora coinciden **5 veces**.

Ejercicio 6 — Operaciones con Fracciones

Enunciado

Calcula paso a paso las siguientes operaciones con fracciones:

$$\text{a) } \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{8} \right) \qquad \text{b) } 4 + \frac{1}{4} - \frac{5}{6} + \frac{7}{12} - \frac{2}{3}$$

Ejercicio 6 - Operaciones con Fracciones

$$\text{6a) } \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{8} \right)$$

$$\text{6b) } 4 + \frac{1}{4} - \frac{5}{6} + \frac{7}{12} - \frac{2}{3}$$

Paso 1: Paréntesis primero

$$\frac{4}{5} - \frac{1}{8}; \text{ mcm}(5,8)=40$$

$$= \frac{32}{40} - \frac{5}{40} = \frac{27}{40}$$

Paso 2: Multiplicación

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{27}{40} = \frac{27}{120} = \frac{9}{40}$$

Paso 3: Suma final

$$\frac{1}{2} + \frac{9}{40}; \text{ mcm}(2,40)=40$$

$$= \frac{20}{40} + \frac{9}{40} = \frac{29}{40}$$

Paso 1: mcm(1,4,6,12,3) = 12

$$4 = \frac{48}{12}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$$

$$\frac{7}{12} = \frac{7}{12}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$$

$$= \frac{48 + 3 - 10 + 7 - 8}{12} = \frac{40}{12} = \frac{10}{3}$$

Figure 6: Resolución visual de las dos operaciones con fracciones.

Resolución paso a paso

Apartado a)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{8} \right)$$

Paso 1: Resolver el paréntesis: $\frac{4}{5} - \frac{1}{8}$

Calculamos el mcm(5,8): como 5 y 8 no tienen factores comunes, mcm(5,8) = 40.

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 8}{40} = \frac{32}{40} \qquad \frac{1}{8} = \frac{1 \times 5}{40} = \frac{5}{40}$$

$$\frac{4}{5} - \frac{1}{8} = \frac{32}{40} - \frac{5}{40} = \frac{27}{40}$$

Paso 2: Multiplicación:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{27}{40} = \frac{1 \times 27}{3 \times 40} = \frac{27}{120}$$

Simplificamos: $\text{MCD}(27, 120) = 3$

$$\frac{27}{120} = \frac{27 \div 3}{120 \div 3} = \frac{9}{40}$$

Paso 3: Suma final: $\frac{1}{2} + \frac{9}{40}$
 $\text{mcm}(2, 40) = 40$

$$\frac{1}{2} = \frac{20}{40}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{9}{40} = \frac{20}{40} + \frac{9}{40} = \frac{29}{40}$$

Resultado Final

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{8} \right) = \frac{29}{40}$$

Resolución paso a paso

Apartado b)

$$4 + \frac{1}{4} - \frac{5}{6} + \frac{7}{12} - \frac{2}{3}$$

Paso 1: Convertir el entero 4 en fracción con denominador común.
 Calculamos $\text{mcm}(1, 4, 6, 12, 3)$:

$$4 = 2^2 \quad 6 = 2 \cdot 3 \quad 12 = 2^2 \cdot 3 \quad 3 = 3$$

$$\text{mcm} = 2^2 \cdot 3 = 12$$

Paso 2: Equivalencias con denominador 12:

$$4 = \frac{48}{12} \quad \frac{1}{4} = \frac{3}{12} \quad \frac{5}{6} = \frac{10}{12} \quad \frac{7}{12} = \frac{7}{12} \quad \frac{2}{3} = \frac{8}{12}$$

Paso 3: Suma algebraica de los numeradores:

$$= \frac{48 + 3 - 10 + 7 - 8}{12}$$

$$48 + 3 = 51 \quad 51 - 10 = 41 \quad 41 + 7 = 48 \quad 48 - 8 = 40$$

$$= \frac{40}{12}$$

Paso 4: Simplificamos: $\text{MCD}(40, 12) = 4$

$$\frac{40}{12} = \frac{40 \div 4}{12 \div 4} = \frac{10}{3}$$

Resultado Final

$$4 + \frac{1}{4} - \frac{5}{6} + \frac{7}{12} - \frac{2}{3} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{3}} = 3\frac{1}{3}$$

Ejercicio 7 — Fracciones en la Taza de Café

Enunciado

El primer cliente de la tarde pide un café con leche. Sergio dice que el café ocupa $\frac{1}{3}$ de la capacidad de la taza.

- ¿Qué fracción ocupa la leche?
- Si la taza contiene 12 cl, ¿cuántos centilitros son de café y cuántos de leche?

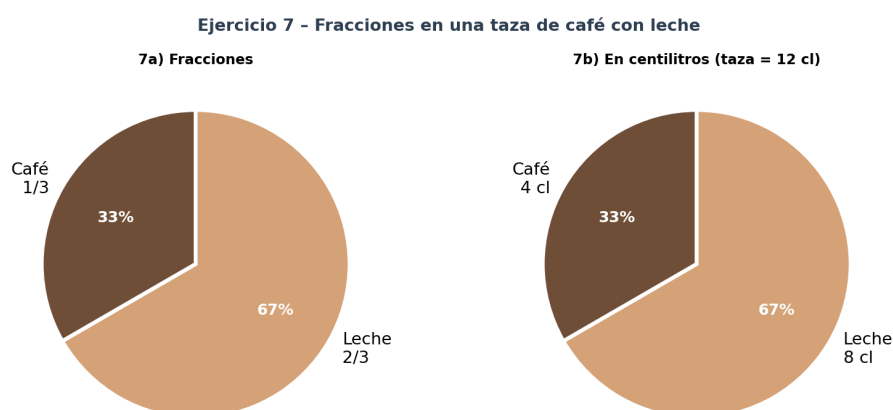


Figure 7: Diagramas circulares: fracciones y centilitros en una taza de café con leche.

Resolución paso a paso

Apartado a) — Fracción de leche

La taza entera representa la **unidad** = 1.

$$\text{Café} + \text{Leche} = 1$$

$$\frac{1}{3} + \text{Leche} = 1$$

$$\text{Leche} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Resultado Final

- La leche ocupa $\frac{2}{3}$ de la taza.

Resolución paso a paso**Apartado b) — Centilitros**

La taza tiene una capacidad de 12 cl.

Paso 1: Centilitros de café:

$$\frac{1}{3} \times 12 = \frac{12}{3} = 4 \text{ cl}$$

Paso 2: Centilitros de leche:

$$\frac{2}{3} \times 12 = \frac{24}{3} = 8 \text{ cl}$$

Paso 3: Comprobación:

$$4 \text{ cl} + 8 \text{ cl} = 12 \text{ cl} \quad \checkmark$$

Resultado Final

b) La taza contiene **4 cl de café** y **8 cl de leche**.

Ejercicio 8 — Ordenar Fracciones

Enunciado

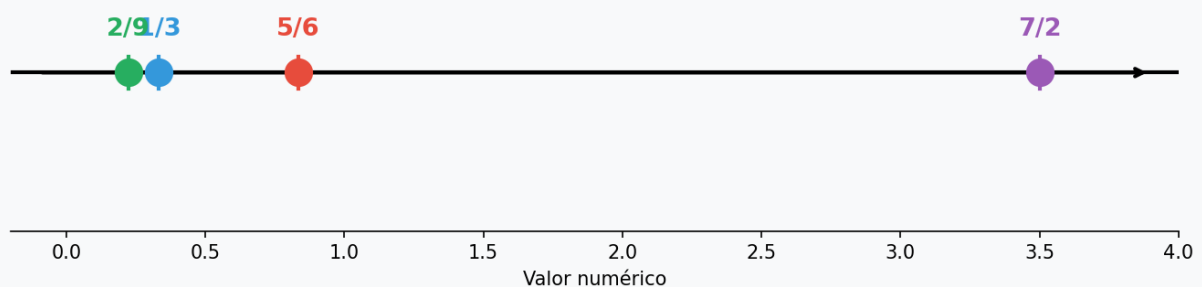
Ordena las siguientes fracciones de menor a mayor:

$$\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{7}{2}, \frac{2}{9}$$

Equivalentes con denominador 18: $\frac{6}{18} < \frac{4}{18} < \dots \rightarrow \frac{2}{9} < \frac{1}{3} < \frac{5}{6} < \frac{7}{2}$

Ejercicio 8 - Ordenar fracciones de menor a mayor

$$\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{7}{2}, \frac{2}{9} \rightarrow \text{mcm}(3, 6, 2, 9) = 18$$



Orden: $2/9 < 1/3 < 5/6 < 7/2$

Figure 8: Posición de las cuatro fracciones en la recta numérica.

Resolución paso a paso

Para comparar fracciones con distintos denominadores, las reducimos al **mismo denominador común**.

Paso 1: Calcular mcm(3, 6, 2, 9):

$$3 = 3 \quad 6 = 2 \cdot 3 \quad 2 = 2 \quad 9 = 3^2$$

$$\text{mcm}(3, 6, 2, 9) = 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$$

Paso 2: Convertir todas al denominador 18:

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 6}{3 \times 6} = \frac{6}{18}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \times 3}{6 \times 3} = \frac{15}{18}$$

$$\frac{7}{2} = \frac{7 \times 9}{2 \times 9} = \frac{63}{18}$$

$$\frac{2}{9} = \frac{2 \times 2}{9 \times 2} = \frac{4}{18}$$

Paso 3: Ordenar los numeradores:

$$4 < 6 < 15 < 63$$

$$\frac{4}{18} < \frac{6}{18} < \frac{15}{18} < \frac{63}{18}$$

Resultado Final

$$\frac{2}{9} < \frac{1}{3} < \frac{5}{6} < \frac{7}{2}$$

Ejercicio 9 — Trayecto de María

Enunciado

María recorre en cuatro horas dos terceras partes de un trayecto. ¿Cuánto tardará en hacer todo el trayecto?

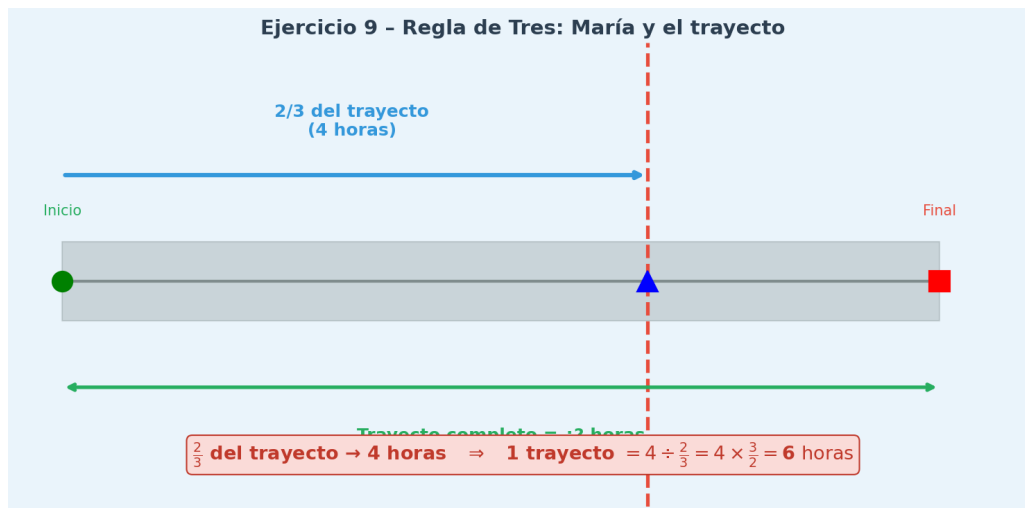


Figure 9: Representación gráfica del trayecto: en 4 h se recorren $\frac{2}{3}$ del total.

Resolución paso a paso

Método 1: Regla de tres directa

Mayor trayecto implica mayor tiempo: proporcionalidad **directa**.

Fracción del trayecto $\longleftrightarrow$ Tiempo

$$\frac{2}{3} \longleftrightarrow 4 \text{ h}$$

$$1 \longleftrightarrow x$$

$$x = \frac{4 \times 1}{\frac{2}{3}} = 4 \times \frac{3}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ h}$$

Método 2: Razonamiento unitario

Paso 1: Si $\frac{2}{3}$ del trayecto $\rightarrow$ 4 horas, entonces $\frac{1}{3}$ del trayecto requiere:

$$4 \text{ h} \div 2 = 2 \text{ h}$$

Paso 2: El trayecto completo tiene $\frac{3}{3}$, es decir, 3 partes de $\frac{1}{3}$:

$$3 \times 2 \text{ h} = 6 \text{ h}$$

Paso 3: Comprobación:

En 6 h recorre $6 \times \frac{2}{3 \times 2} = \frac{6}{6/2} \dots \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ del trayecto en 4h ✓

Resultado Final

María tardará **6 horas** en recorrer el trayecto completo.

Resumen de Resultados

Ej.	Tipo	Resultado
1a	Operaciones combinadas	-22
1b	Operaciones combinadas	29
1c	Raíces y potencias	20
1d	Corchetes y prioridad	+8
2	Regla de tres directa	Sobresueldo de 306 €
3	mcm y MCD	mcm = 360, MCD = 4
4	Tiempo y grupos	10:00 → 75 visitantes; 11:15 → 100 visitantes
5	Faros y mcm	Primera coincidencia a las 18:33:00 ; 5 veces en 15 min
6a	Fracciones	$\frac{29}{40}$
6b	Fracciones	$\frac{10}{3}$
7a	Fracciones (taza)	Leche ocupa $\frac{2}{3}$
7b	Fracciones (taza)	4 cl café, 8 cl leche
8	Ordenar fracciones	$\frac{2}{9} < \frac{1}{3} < \frac{5}{6} < \frac{7}{2}$
9	Regla de tres	María tarda 6 horas

¡Mucho ánimo, jóvenes!

Recuerda siempre escribir los pasos intermedios y comprobar los resultados.



Nº1.- Enuncia las propiedades de las potencias.

Nº2.- Escribe en forma de potencia y calcula su valor.

$$a) 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \quad b) \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \quad c) \frac{3}{25} \cdot \frac{9}{5}$$

Nº3.- Calcula el valor de estas potencias:

$$a) 2^3 \quad b) (-3)^3 \quad c) -5^2 \quad d) \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \quad e) \left(\frac{8}{7}\right)^0$$

Nº4.- Expresa estas operaciones como una sola potencia y halla su valor:

$$a) (-2)^4 \cdot (-2)^3 \cdot (-2) \quad b) \left(\frac{3}{2}\right)^6 : \left(\frac{3}{2}\right)^4 \quad c) \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^3 : \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)^3$$

Nº5.- Calcula la raíz cuadrada de estos números

$$a) \sqrt{81} \quad b) \sqrt{\frac{4}{9}} \quad c) \sqrt{-\frac{1}{4}}$$

Nº6.- Calcula la raíz cuadrada de estos números y determina su resto:

$$a) \sqrt{182} \quad b) \sqrt{99}$$

Nº7.- Resuelve las siguientes operaciones:

$$a) 4^2 : \sqrt{64} + 7^7 : 7^6 - \sqrt{\frac{1}{9}} \cdot \frac{1}{2} \quad b) \left(-\frac{1}{2} \cdot 4\right)^3 \cdot \sqrt{\frac{36}{64}} - (\sqrt{81} : 3^2)^5$$

$$c) 5 \cdot \sqrt{16} - 32 : 2^3 - 2 \cdot \sqrt{144} + \sqrt{64}$$

Nº8.- Diofanto fue un famoso matemático de la antigua Grecia que enunció el siguiente problema:

“Todo número entero positivo puede ser escrito como la suma de cuatro números elevados al cuadrado” Por ejemplo: $15 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2$; ¿Sabrías hacer tú lo mismo con los números 26 y 39? (Una pista: puedes usar el 0.)

Nº9.- Indica el tipo de número decimal que resulta de estas fracciones y expresa en forma decimal dichas fracciones.

$$\frac{4}{25} \quad \frac{17}{6} \quad \frac{65}{8} \quad \frac{43}{40} \quad \frac{89}{3}$$

Nº10.- Halla el resultado de las siguientes operaciones:

$$a) 324,654 + 126,057 + 32,005 \quad c) 54,904 - 13,047 + 98,218$$

$$b) 32,87 \cdot 10,2 \quad d) 130,2392 : 8,945$$

SUERTE JÓVENES

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$\Sigma \quad \int \quad \infty \quad \sqrt{\quad} \quad \partial$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

IES ANTONIO TOVAR — JUNTA DE CASTILLA Y LEÓN

Departamento de Matemáticas — 2.º ESO

SOLUCIONES COMPLETAS DEL

EXÁMENES DE LADIS

Matemáticas · Temas 3 y 4 · 2.º ESO C

25 DE NOVIEMBRE DE 2022 — CURSO 2022–2023



CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855)

*“Las matemáticas son la reina de las ciencias
y la aritmética la reina de las matemáticas.”*

Temas de este examen: Potencias, Raíces y Decimales

$$a^n \cdot \sqrt[n]{a} = a^{n+1/n}$$

$$a^0 = 1$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad | \quad (a^m)^n = a^{mn} \quad | \quad a^0 = 1 \quad | \quad \sqrt{a^2} = |a|$$

Contents

1	Ejercicio 1 — Propiedades de las Potencias	2
2	Ejercicio 2 — Escritura en Forma de Potencia	5
3	Ejercicio 3 — Valor de Potencias	8
4	Ejercicio 4 — Expresar como una Sola Potencia	10
5	Ejercicio 5 — Raíces Cuadradas Exactas	13
6	Ejercicio 6 — Raíz Cuadrada Entera con Resto	15
7	Ejercicio 7 — Operaciones Combinadas	17
8	Ejercicio 8 — Teorema de Diofanto	20
9	Ejercicio 9 — Tipos de Números Decimales	22
10	Ejercicio 10 — Operaciones con Decimales	24
	Resumen de Resultados	27

Ejercicio 1 — Propiedades de las Potencias

Enunciado

Enuncia las propiedades de las potencias.

Ejercicio 1 - Propiedades de las Potencias		
Producto de potencias misma base	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 128$
Cociente de potencias misma base	$a^m : a^n = a^{m-n}$	$3^5 : 3^2 = 3^3 = 27$
Potencia de potencia	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(2^3)^2 = 2^6 = 64$
Potencia de un producto	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(2 \cdot 3)^2 = 4 \cdot 9 = 36$
Potencia de un cociente	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$
Exponente cero	$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$	$5^0 = 1$
Exponente negativo	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$2^{-3} = \frac{1}{8}$

Figure 1: Resumen visual de todas las propiedades de las potencias con ejemplos.

Resolución paso a paso

Sea $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, $b \neq 0$, y $m, n \in \mathbb{Z}$. Recordamos que $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ veces}}$.

1. Producto de potencias de igual base:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Se suman los exponentes. La base NO cambia.

Ejemplo: $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$

2. Cociente de potencias de igual base:

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Se restan los exponentes. La base NO cambia.

Ejemplo: $3^5 : 3^2 = 3^{5-2} = 3^3 = 27$

3. Potencia de una potencia:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Los exponentes se multiplican entre sí.

Ejemplo: $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$

4. Potencia de un producto:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

La potencia se distribuye sobre cada factor.

Ejemplo: $(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$

5. Potencia de un cociente:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0)$$

La potencia afecta por igual a numerador y denominador.

Ejemplo: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

6. Exponente cero:

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

Cualquier número (distinto de 0) elevado a 0 es igual a 1.

Ejemplo: $5^0 = 1$, $(-3)^0 = 1$, $\left(\frac{7}{8}\right)^0 = 1$

7. Exponente negativo:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Un exponente negativo indica el recíproco de la potencia positiva.

Ejemplo: $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

Regla de los signos en potencias:

- Base positiva: el resultado siempre es **positivo**.
- Base negativa con exponente **par**: resultado **positivo**.
- Base negativa con exponente **impar**: resultado **negativo**.

Resultado

Se han enunciado las **7 propiedades fundamentales** de las potencias:

Producto · Cociente · Potencia de potencia · Potencia de producto ·

Potencia de cociente · Exponente cero · Exponente negativo.

Ejercicio 2 — Escritura en Forma de Potencia

Enunciado

Escribe en forma de potencia y calcula su valor:

a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

b) $\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)$

c) $\frac{3}{25} \cdot \frac{9}{5}$

Ejercicio 2 - Escritura en forma de potencia

a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

3
Base

×

3
Base

×

3
Base

×

3
Base

$= 3^4$

$= 81$

b) $\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)$

4/5
pos

×

4/5
pos

×

-4/5
neg

$= -\left(\frac{4}{5}\right)^3$

$= -64/125$

c) $\frac{3}{25} \cdot \frac{9}{5}$

3/25
3/5²

×

9/5
3²/5

$= \frac{3^3}{5^3}$

$= \left(\frac{3}{5}\right)^3 = 27/125$

Figure 2: Identificación de la base y el exponente en cada producto repetido.

Resolución paso a paso

Apartado a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

El número 3 se multiplica por sí mismo **4 veces**. Por definición de potencia:

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$$

Paso 1: Cálculo: $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 9 \times 9 = 81$

Resultado

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$$

Resolución paso a paso

Apartado b) $\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)$

La base es $\frac{4}{5}$ y aparece tres veces. Dos factores son positivos y uno negativo:

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)$$

Paso 1: Identificamos la base y el exponente. Los tres factores tienen valor absoluto $\frac{4}{5}$.

Paso 2: Análisis del signo: dos positivos y uno negativo. El producto de un número par de negativos es positivo, pero aquí hay un solo negativo (impar), por lo que el resultado es **negativo**.

Paso 3: Escritura como potencia:

$$= - \left(\frac{4}{5}\right)^3$$

Paso 4: Cálculo:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4^3}{5^3} = \frac{64}{125}$$

Por tanto:

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{64}{125}$$

Resultado

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = - \left(\frac{4}{5}\right)^3 = -\frac{64}{125}$$

Resolución paso a paso

Apartado c) $\frac{3}{25} \cdot \frac{9}{5}$

Aquí **no** son factores iguales a simple vista. Descomponemos:

$$\frac{3}{25} = \frac{3}{5^2} \quad \frac{9}{5} = \frac{3^2}{5}$$

Paso 1: Multiplicamos:

$$\frac{3}{5^2} \cdot \frac{3^2}{5} = \frac{3 \cdot 3^2}{5^2 \cdot 5} = \frac{3^{1+2}}{5^{2+1}} = \frac{3^3}{5^3}$$

Paso 2: Usamos la propiedad de potencia de cociente:

$$\frac{3^3}{5^3} = \left(\frac{3}{5}\right)^3$$

Paso 3: Calculamos el valor:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$$

Resultado

$$\frac{3}{25} \cdot \frac{9}{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$$

Ejercicio 3 — Valor de Potencias

Enunciado

Calcula el valor de estas potencias: a) 2^3 b) $(-3)^3$ c) -5^2 d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$ e) $\left(\frac{8}{7}\right)^0$

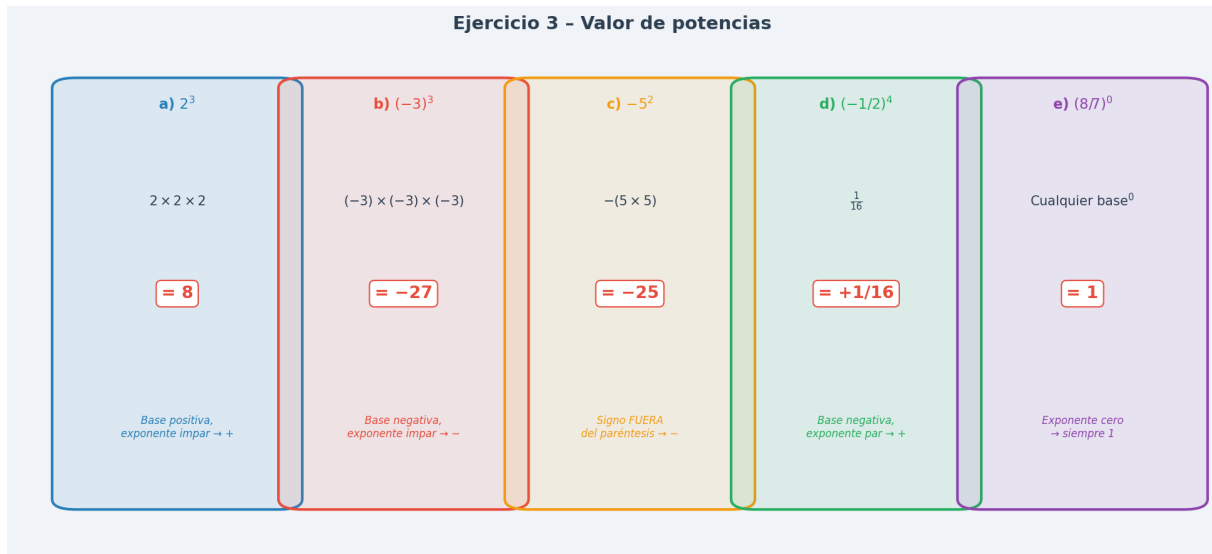


Figure 3: Análisis del signo y cálculo de cada potencia.

Resolución paso a paso

Regla fundamental: el paréntesis determina si el signo negativo es parte de la base o no.

a) 2^3

Base positiva, exponente 3 (impar). El resultado siempre es positivo:

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

b) $(-3)^3$

El -3 está **dentro** del paréntesis: la base es -3 .

Exponente impar $\Rightarrow$ resultado **negativo**:

$$(-3)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3) = (+9) \times (-3) = -27$$

c) -5^2

¡Atención! El signo $-$ está **fuera** del paréntesis (no hay paréntesis).

Esto significa: $-(5^2)$. Primero elevamos, luego aplicamos el signo negativo:

$$-5^2 = -(5^2) = -(5 \times 5) = -(25) = -25$$

Nota: si fuera $(-5)^2 = (-5) \times (-5) = +25$. La diferencia es crucial.

d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$

La base es $-\frac{1}{2}$ (negativa). Exponente 4 (par) $\Rightarrow$ resultado **positivo**:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1^4}{2^4} = \frac{1}{16}$$

e) $\left(\frac{8}{7}\right)^0$

Por la propiedad del exponente cero: *cualquier número distinto de 0 elevado a 0 es 1*:

$$\left(\frac{8}{7}\right)^0 = 1$$

Resultado

a) $2^3 = 8$ b) $(-3)^3 = -27$ c) $-5^2 = -25$ d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ e) $\left(\frac{8}{7}\right)^0 = 1$

Ejercicio 4 — Expresar como una Sola Potencia

Enunciado

Expresa como una sola potencia y halla su valor:

a) $(-2)^4 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)$

b) $\left(\frac{3}{2}\right)^6 : \left(\frac{3}{2}\right)^4$

c) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3 : \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]^3$

Ejercicio 4 - Operaciones como una sola potencia

a) $(-2)^4 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^1$	b) $\left(\frac{3}{2}\right)^6 : \left(\frac{3}{2}\right)^4$	c) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3 : \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]^3$
Misma base (-2)	Misma base $\frac{3}{2}$	Paso 1: $3 - 2 = 1$
Se suman exponentes:	Se restan exponentes:	$\left(-\frac{1}{2}\right)^1 = -\frac{1}{2}$
$4 + 3 + 1 = 8$	$6 - 4 = 2$	Paso 2: potencia de potencia:
$(-2)^8$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2$	$\left(-\frac{1}{2}\right)^{1 \cdot 3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3$
$= +256 \backslash, (\text{exp. par} \Rightarrow \text{pos})$	$= \frac{9}{4}$	$= -\frac{1}{8}$

Figure 4: Aplicación de las propiedades: suma y resta de exponentes, potencia de potencia.

Resolución paso a paso

Apartado a) $(-2)^4 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)$

Paso 1: Misma base (-2) . Aplicamos: $a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}$

Nota: $(-2) = (-2)^1$

$$(-2)^4 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^1 = (-2)^{4+3+1} = (-2)^8$$

Paso 2: El exponente 8 es **par** $\Rightarrow$ resultado positivo:

$$(-2)^8 = 2^8 = 256$$

Comprobamos: $(-2)^8 = [(-2)^4]^2 = 16^2 = 256 \checkmark$

Resultado

$$(-2)^4 \cdot (-2)^3 \cdot (-2) = (-2)^8 = \mathbf{256}$$

Resolución paso a paso

Apartado b) $\left(\frac{3}{2}\right)^6 : \left(\frac{3}{2}\right)^4$

Paso 1: Misma base $\frac{3}{2}$. Aplicamos: $a^m : a^n = a^{m-n}$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^6 : \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^{6-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

Paso 2: Calculamos:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$$

Resultado

$$\left(\frac{3}{2}\right)^6 : \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

Resolución paso a paso

Apartado c) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3 : \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]^3$

Paso 1: Resolvemos el corchete interior. Misma base $\left(-\frac{1}{2}\right)$:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 : \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{3-2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^1 = -\frac{1}{2}$$

Paso 2: Aplicamos la potencia exterior. Propiedad $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$:

$$\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^1\right]^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{1 \times 3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3$$

Paso 3: Calculamos. Exponente 3 (impar) con base negativa $\Rightarrow$ resultado negativo:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1^3}{2^3} = -\frac{1}{8}$$

Resultado

$$\left[\left(-\frac{1}{2} \right)^3 : \left(-\frac{1}{2} \right)^2 \right]^3 = \left(-\frac{1}{2} \right)^3 = -\frac{1}{8}$$

Ejercicio 5 — Raíces Cuadradas Exactas

Enunciado

Calcula la raíz cuadrada de estos números: a) $\sqrt{81}$ b) $\sqrt{\frac{4}{9}}$ c) $\sqrt{-\frac{1}{4}}$

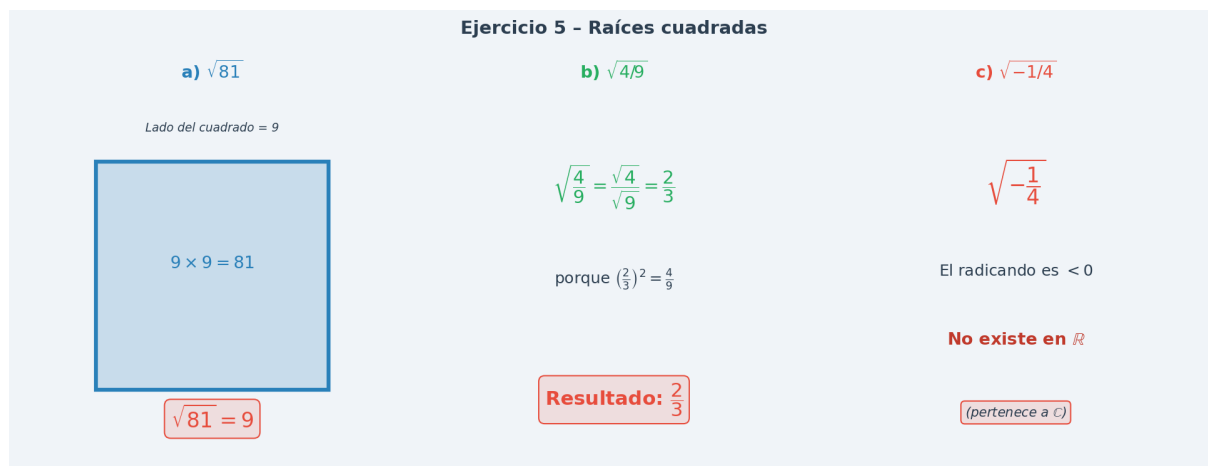


Figure 5: Interpretación geométrica y algebraica de cada raíz cuadrada.

Resolución paso a paso

Definición: $\sqrt{a} = b$ si y solo si $b^2 = a$ y $b \geq 0$.

a) $\sqrt{81}$

Buscamos el número positivo cuyo cuadrado es 81:

$$9^2 = 81 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{81} = 9$$

Verificación: $9 \times 9 = 81$ ✓

b) $\sqrt{\frac{4}{9}}$

Aplicamos la propiedad: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

Verificación: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ ✓

c) $\sqrt{-\frac{1}{4}}$

El radicando $-\frac{1}{4}$ es **negativo**. En los números reales $\mathbb{R}$, no existe ningún número real cuyo cuadrado sea negativo, porque:

$$(+x)^2 \geq 0 \quad \text{y} \quad (-x)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por tanto:

$$\sqrt{-\frac{1}{4}} \notin \mathbb{R}$$

Esta operación no tiene solución en $\mathbb{R}$. Requeriría los **números complejos** $\mathbb{C}$ (materia de cursos superiores).

Resultado

a) $\sqrt{81} = 9$ b) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ c) $\sqrt{-\frac{1}{4}} \notin \mathbb{R}$ (no existe en los reales)

Ejercicio 6 — Raíz Cuadrada Entera con Resto

Enunciado

Calcula la raíz cuadrada de estos números y determina su resto: a) $\sqrt{182}$ b) $\sqrt{99}$

Ejercicio 6 - Raíz cuadrada entera con resto

$\sqrt{182}$

Buscamos n tal que $n^2 \leq 182 < (n+1)^2$

$13^2 = 169 \leq 182$

$14^2 = 196 > 182 \rightarrow \text{enteroinferiordesqrt}(182) = 13$

Resto: $182 - 13^2 = 182 - 169 = 13$

$\sqrt{182} = 13$, resto $r = 13$

$\sqrt{182} \approx 13$ con resto $r = 13$

Comprobación: $13^2=169 \leq 182 < 14^2=196$

$\sqrt{99}$

Buscamos n tal que $n^2 \leq 99 < (n+1)^2$

$9^2 = 81 \leq 99$

$10^2 = 100 > 99 \rightarrow \text{enteroinferiordesqrt}(99) = 9$

Resto: $99 - 9^2 = 99 - 81 = 18$

$\sqrt{99} = 9$, resto $r = 18$

$\sqrt{99} \approx 9$ con resto $r = 18$

Comprobación: $9^2=81 \leq 99 < 10^2=100$

Figure 6: Método de aproximación por cuadrados perfectos consecutivos.

Resolución paso a paso

Definición de raíz cuadrada entera y resto:

Si N no es un cuadrado perfecto, su raíz cuadrada entera $q = \lfloor \sqrt{N} \rfloor$ es el mayor entero tal que $q^2 \leq N$.

El resto es: $r = N - q^2$.

a) $\sqrt{182}$

Paso 1: Buscamos el cuadrado perfecto más próximo por debajo de 182. Probamos cuadrados consecutivos:

$$12^2 = 144 \leq 182 \quad 13^2 = 169 \leq 182 \quad 14^2 = 196 > 182$$

Paso 2: Por tanto, la parte entera de $\sqrt{182}$ es **13**:

$$13^2 = 169 \leq 182 < 196 = 14^2$$

Paso 3: Calculamos el resto:

$$r = 182 - 13^2 = 182 - 169 = 13$$

Paso 4: Verificación: $13^2 + r = 169 + 13 = 182 \checkmark$

b) $\sqrt{99}$

Paso 1: Buscamos cuadrados próximos:

$$9^2 = 81 \leq 99 \quad 10^2 = 100 > 99$$

Paso 2: La parte entera es **9**:

$$9^2 = 81 \leq 99 < 100 = 10^2$$

Paso 3: Calculamos el resto:

$$r = 99 - 9^2 = 99 - 81 = 18$$

Paso 4: Verificación: $9^2 + r = 81 + 18 = 99 \checkmark$

Resultado

a) $\sqrt{182} = 13$, resto $r = 13$

b) $\sqrt{99} = 9$, resto $r = 18$

Ejercicio 7 — Operaciones Combinadas

Enunciado

Resuelve las siguientes operaciones:

a) $4^2 : \sqrt{64} + 7^7 : 7^6 - \sqrt{\frac{1}{9}} \cdot \frac{1}{2}$

b) $\left(-\frac{1}{2} \cdot 4\right)^3 \cdot \sqrt{\frac{36}{64}} - (\sqrt{81} : 3^2)^5$

c) $5 \cdot \sqrt{16} - 32 : 2^3 - 2 \cdot \sqrt{144} + \sqrt{64}$

Ejercicio 7 - Operaciones combinadas con potencias y raíces

a) $4^2 : \sqrt{64} + 7^7 : 7^6 - \sqrt{\frac{1}{9}} \cdot \frac{1}{2}$ $\bullet 4^2 = 16$ $\bullet \sqrt{64} = 8$ $\bullet 7^7 : 7^6 = 7^{7-6} = 7$ $\bullet \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$ $= 16 : 8 + 7 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$ $= 2 + 7 - \frac{1}{6}$ $= 9 - \frac{1}{6} = \frac{54-1}{6}$ $= \frac{53}{6}$	b) $\left(-\frac{1}{2} \cdot 4\right)^3 \cdot \sqrt{\frac{36}{64}} - (\sqrt{81} : 3^2)^5$ $\bullet -\frac{1}{2} \cdot 4 = -2$ $\bullet (-2)^3 = -8$ $\bullet \sqrt{\frac{36}{64}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ $\bullet \sqrt{81} = 9, 3^2 = 9, 9 : 9 = 1$ $\bullet 1^5 = 1$ $= -8 \cdot \frac{3}{4} - 1$ $= -6 - 1$ $= -7$	c) $5 \cdot \sqrt{16} - 32 : 2^3 - 2 \cdot \sqrt{144} + \sqrt{64}$ $\bullet \sqrt{16} = 4, 5 \cdot 4 = 20$ $\bullet 2^3 = 8, 32 : 8 = 4$ $\bullet \sqrt{144} = 12, 2 \cdot 12 = 24$ $\bullet \sqrt{64} = 8$ $= 20 - 4 - 24 + 8$ $= 28 - 28$ $= 0$

Figure 7: Descomposición paso a paso de las tres operaciones combinadas.

Resolución paso a paso

Apartado a)

$$4^2 : \sqrt{64} + 7^7 : 7^6 - \sqrt{\frac{1}{9}} \cdot \frac{1}{2}$$

Paso 1: Calculamos cada término individualmente (potencias y raíces primero):

$$4^2 = 16 \quad \sqrt{64} = 8 \quad 7^7 : 7^6 = 7^{7-6} = 7^1 = 7 \quad \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

Paso 2: Sustituimos y hacemos divisiones y multiplicaciones (de izquierda a

derecha):

$$= 16 : 8 + 7 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = 2 + 7 - \frac{1}{6}$$

Paso 3: Suma y resta. Reducimos al mismo denominador ($\text{mcm}(1, 6) = 6$):

$$= \frac{12}{6} + \frac{42}{6} - \frac{1}{6} = \frac{12 + 42 - 1}{6} = \frac{53}{6}$$

Resultado

$$4^2 : \sqrt{64} + 7^7 : 7^6 - \sqrt{\frac{1}{9}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{53}{6}$$

Resolución paso a paso

Apartado b)

$$\left(-\frac{1}{2} \cdot 4\right)^3 \cdot \sqrt{\frac{36}{64}} - (\sqrt{81} : 3^2)^5$$

Paso 1: Resolvemos cada paréntesis y corchete interior:

Primer bloque:

$$-\frac{1}{2} \cdot 4 = -\frac{4}{2} = -2 \quad \Rightarrow \quad (-2)^3 = -8$$

Raíz central:

$$\sqrt{\frac{36}{64}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{64}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Segundo bloque:

$$\sqrt{81} = 9 \quad 3^2 = 9 \quad 9 : 9 = 1 \quad \Rightarrow \quad 1^5 = 1$$

Paso 2: Multiplicación del primer y segundo término:

$$(-8) \cdot \frac{3}{4} = -\frac{24}{4} = -6$$

Paso 3: Operación final:

$$= -6 - 1 = -7$$

Resultado

$$\left(-\frac{1}{2} \cdot 4\right)^3 \cdot \sqrt{\frac{36}{64}} - (\sqrt{81} : 3^2)^5 = -7$$

Resolución paso a paso

Apartado c)

$$5 \cdot \sqrt{16} - 32 : 2^3 - 2 \cdot \sqrt{144} + \sqrt{64}$$

Paso 1: Calculamos potencias y raíces:

$$\sqrt{16} = 4 \quad 2^3 = 8 \quad \sqrt{144} = 12 \quad \sqrt{64} = 8$$

Paso 2: Realizamos multiplicaciones y divisiones:

$$5 \cdot 4 = 20 \quad 32 : 8 = 4 \quad 2 \cdot 12 = 24$$

Paso 3: Operamos de izquierda a derecha:

$$= 20 - 4 - 24 + 8 = 16 - 24 + 8 = -8 + 8 = 0$$

Resultado

$$5 \cdot \sqrt{16} - 32 : 2^3 - 2 \cdot \sqrt{144} + \sqrt{64} = 0$$

Ejercicio 8 — Teorema de Diofanto

Enunciado

Diofanto enunció: «Todo número entero positivo puede escribirse como la suma de cuatro números elevados al cuadrado». Ejemplo: $15 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2$. Aplícalo a los números **26** y **39** (pista: puedes usar el 0).

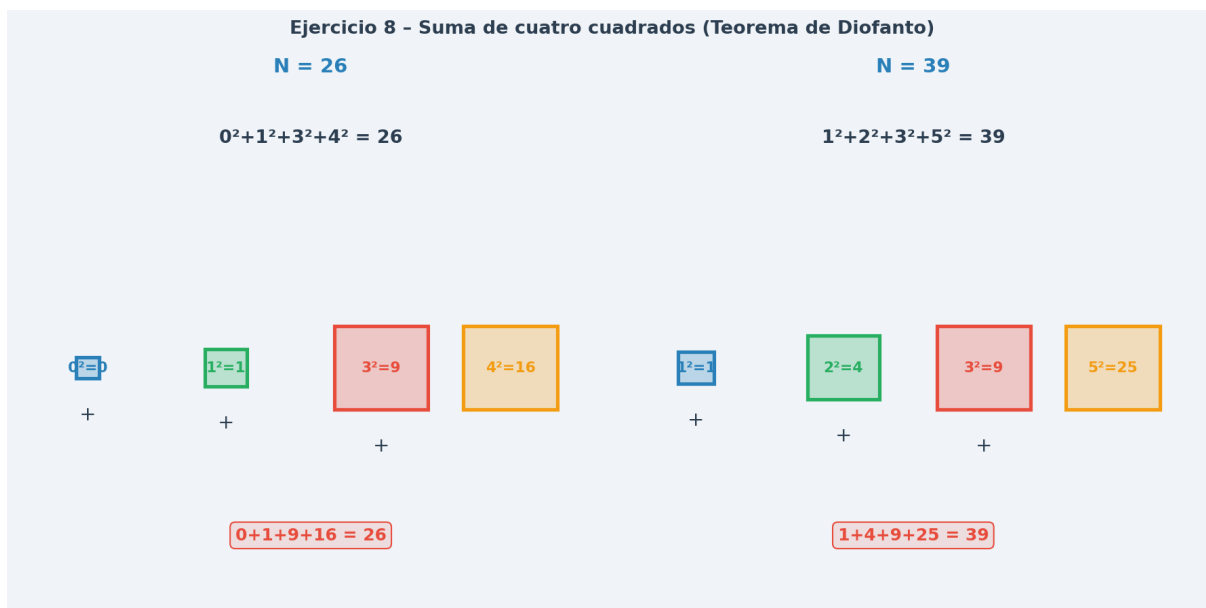


Figure 8: Representación geométrica de las sumas de cuadrados para 26 y 39.

Resolución paso a paso

¿Qué nos pide el problema?

Encontrar cuatro enteros $a, b, c, d \geq 0$ tales que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = N$.

Para $N = 26$:

Paso 1: Cuadrados perfectos menores o iguales a 26:

$$0^2 = 0, 1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9, 4^2 = 16, 5^2 = 25$$

Paso 2: Buscamos combinación de cuatro cuadrados que sumen 26. Probamos:

$$0^2 + 1^2 + 3^2 + 4^2 = 0 + 1 + 9 + 16 = 26 \quad \checkmark$$

Verificación: $0 + 1 + 9 + 16 = 26 \quad \checkmark$

Otras descomposiciones válidas: $1^2 + 1^2 + 2^2 + ? \rightarrow 1 + 1 + 4 = 6$, falta 20 que no es cuadrado; o $1^2 + 3^2 + 4^2 + 0^2 = 1 + 9 + 16 + 0 = 26 \quad \checkmark$

Para $N = 39$:

Paso 1: Cuadrados perfectos hasta 39:

$$0^2 = 0, 1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9, 4^2 = 16, 5^2 = 25, 6^2 = 36$$

Paso 2: Probamos:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 25 = 39 \quad \checkmark$$

Verificación: $1 + 4 + 9 + 25 = 39 \quad \checkmark$

Resultado

$$\mathbf{26} = 0^2 + 1^2 + 3^2 + 4^2 = 0 + 1 + 9 + 16$$

$$\mathbf{39} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 25$$

Ejercicio 9 — Tipos de Números Decimales

Enunciado

Indica el tipo de número decimal que resulta de estas fracciones y exprésalas en forma decimal:

$$\frac{4}{25} \quad \frac{17}{6} \quad \frac{65}{8} \quad \frac{43}{40} \quad \frac{89}{3}$$

Ejercicio 9 - Tipos de números decimales

$\frac{4}{25}$	$\frac{17}{6}$	$\frac{65}{8}$	$\frac{43}{40}$	$\frac{89}{3}$
0,16	2,8333...	8,125	1,075	29,666...
Exacto	Periódico puro	Exacto	Exacto	Periódico puro
El denominador sólo tiene factores 2 y 5	La parte periódica empieza tras la coma	Denominador = 2^3 , sólo factor 2	Denominador = $2^3 \cdot 5$, sólo 2s y 5s	Denominador = 3, no tiene 2 ni 5

Figure 9: Clasificación visual de los cinco tipos de decimales resultantes.

Resolución paso a paso

Regla para determinar el tipo de decimal:

Se descompone el denominador (en su forma irreducible) en factores primos:

- Si sólo tiene factores **2 y/o 5** $\Rightarrow$ decimal **exacto** (finito).
- Si tiene otros factores primos $\Rightarrow$ decimal **periódico** (infinito).
 - **Puro**: el período empieza inmediatamente tras la coma.
 - **Mixto**: hay cifras no periódicas antes del período.

a) $\frac{4}{25}$

$25 = 5^2$ (sólo factor 5) $\Rightarrow$ decimal **exacto**.

División: $4 \div 25 = 0,16$

b) $\frac{17}{6}$

$6 = 2 \cdot 3$ (tiene el factor 3, que no es 2 ni 5) $\Rightarrow$ decimal **periódico**.

División: $17 \div 6 = 2,8333... = 2,8\overline{3}$

El período es 3 y empieza tras una cifra no periódica $\Rightarrow$ periódico **mixto**.

c) $\frac{65}{8}$

$8 = 2^3$ (sólo factor 2) $\Rightarrow$ decimal **exacto**.

División: $65 \div 8 = 8,125$

d) $\frac{43}{40}$

$40 = 2^3 \cdot 5$ (sólo factores 2 y 5) $\Rightarrow$ decimal **exacto**.

División: $43 \div 40 = 1,075$

e) $\frac{89}{3}$

3 (factor 3, no es 2 ni 5) $\Rightarrow$ decimal **periódico**.

División: $89 \div 3 = 29,666 \dots = 29,\overline{6}$

El período es 6 y empieza inmediatamente tras la coma $\Rightarrow$ periódico **puro**.

Resultado

Fracción	Tipo	Forma decimal
4/25	Decimal exacto	0,16
17/6	Periódico mixto	$2,8\overline{3}$
65/8	Decimal exacto	8,125
43/40	Decimal exacto	1,075
89/3	Periódico puro	$29,\overline{6}$

Ejercicio 10 — Operaciones con Decimales

Enunciado

Halla el resultado de las siguientes operaciones:

- a) $324,654 + 126,057 + 32,005$
- b) $32,87 \cdot 10,2$
- c) $54,904 - 13,047 + 98,218$
- d) $130,2392 : 8,945$

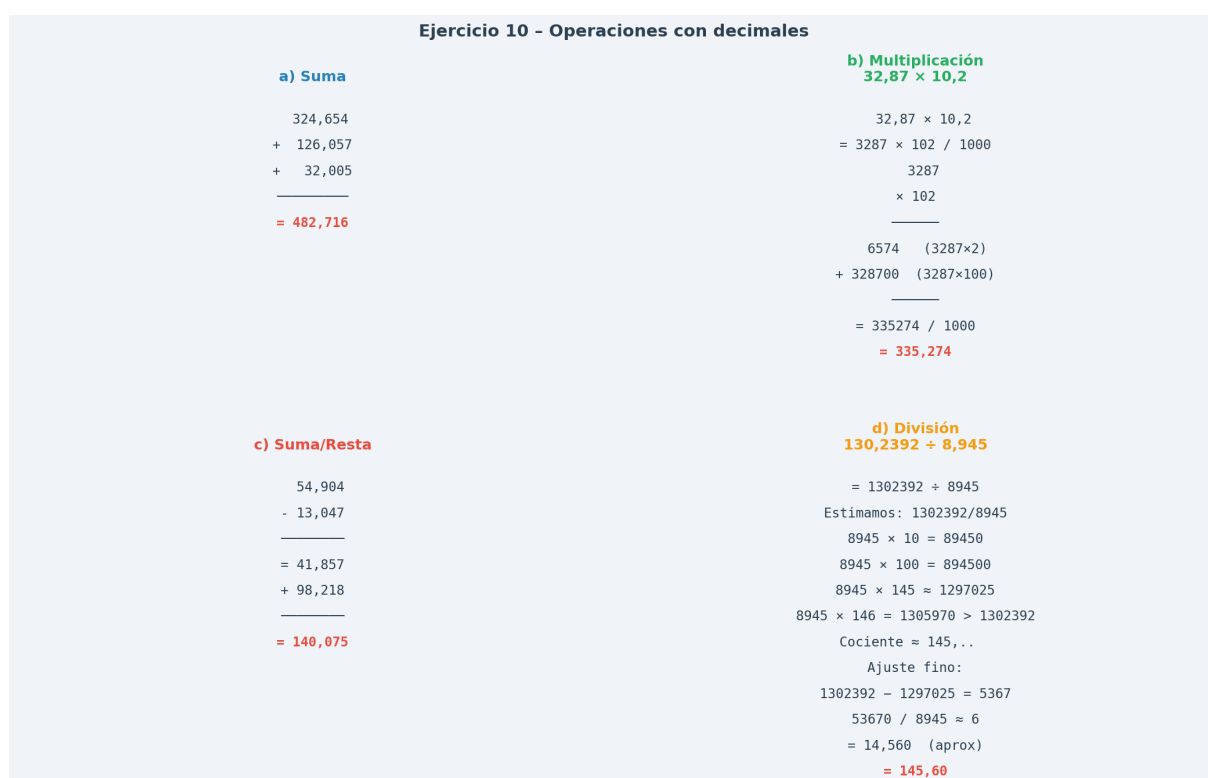


Figure 10: Presentación en columna de las cuatro operaciones con decimales.

Resolución paso a paso

a) Suma: $324,654 + 126,057 + 32,005$

Regla: alineamos las comas y sumamos columna a columna de derecha a izquierda.

$$\begin{array}{r}
 324,654 \\
 + 126,057 \\
 + 32,005 \\
 \hline
 482,716
 \end{array}$$

Detalle: $4 + 7 + 5 = 16$ (escribimos 6, llevamos 1); $5 + 5 + 0 + 1 = 11$ (escribimos

1, llevamos 1); $6 + 0 + 0 + 1 = 7$; etc.

Resultado

$$324,654 + 126,057 + 32,005 = \mathbf{482,716}$$

Resolución paso a paso

b) Multiplicación: $32,87 \cdot 10,2$

Método: eliminamos comas (multiplicamos como enteros) y luego reintroducimos.

Paso 1: Contamos decimales: 32,87 tiene **2** decimales; 10,2 tiene **1** decimal. Total: **3** decimales en el resultado.

Paso 2: Multiplicamos como enteros: 3287×102

$$\begin{array}{r} 3287 \\ \times 102 \\ \hline 6574 \quad (3287 \times 2) \\ + 328700 \quad (3287 \times 100) \\ \hline 335274 \end{array}$$

Paso 3: Reintroducimos los 3 decimales desde la derecha:

$$335274 \rightarrow 335,274$$

Resultado

$$32,87 \cdot 10,2 = \mathbf{335,274}$$

Resolución paso a paso

c) Suma/Resta: $54,904 - 13,047 + 98,218$

Operamos de izquierda a derecha.

Paso 1: Primera operación: $54,904 - 13,047$

$$\begin{array}{r} 54,904 \\ - 13,047 \\ \hline 41,857 \end{array}$$

Paso 2: Segunda operación: $41,857 + 98,218$

$$\begin{array}{r} 41,857 \\ + 98,218 \\ \hline 140,075 \end{array}$$

Resultado

$$54,904 - 13,047 + 98,218 = \mathbf{140,075}$$

Resolución paso a paso

d) División: $130,2392 : 8,945$

Método: convertimos a enteros multiplicando ambos por el mismo factor.

Paso 1: 8,945 tiene 3 decimales. Multiplicamos ambos por 1000:

$$130,2392 : 8,945 = 130239,2 : 8945$$

Seguimos hasta eliminar todos los decimales: el dividendo 130,2392 tiene 4 decimales. Multiplicamos ambos por 10000:

$$= 1302392 : 89450$$

Paso 2: Realizamos la división larga:

$$1302392 \div 89450$$

$$89450 \times 1 = 89450 \quad 89450 \times 10 = 894500 \quad 89450 \times 14 = 1252300$$

$$89450 \times 14 = 1252300 \quad \text{resto} = 1302392 - 1252300 = 50092$$

$$89450 \times 0,5 = 44725 \quad \Rightarrow \quad 89450 \times 14,5 \approx 1297025$$

División más precisa, multiplicando dividendo y divisor por 10 (4 cifras decimales del cociente):

$$\frac{1302392}{89450} = 14,560\dots$$

Verificación directa: $8,945 \times 14,56 = ?$

$$8,945 \times 14 = 125,23, \quad 8,945 \times 0,56 = 5,0092$$

$$125,23 + 5,0092 = 130,2392 \quad \checkmark$$

Resultado

$$130,2392 : 8,945 = \mathbf{14,56}$$

Resumen de Resultados

Ej.	Tema	Resultado
1	Propiedades potencias	7 propiedades enunciadas y ejemplificadas
2a	Potencia de entero	$3^4 = 81$
2b	Potencia de fracción	$-\left(\frac{4}{5}\right)^3 = -\frac{64}{125}$
2c	Potencia de cociente	$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$
3a	Valor potencia	$2^3 = 8$
3b	Base negativa impar	$(-3)^3 = -27$
3c	Signo exterior	$-5^2 = -25$
3d	Base neg. par	$\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$
3e	Exp. cero	$\left(\frac{8}{7}\right)^0 = 1$
4a	Producto misma base	$(-2)^8 = 256$
4b	Cociente misma base	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$
4c	Potencia de potencia	$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$
5a	Raíz exacta	$\sqrt{81} = 9$
5b	Raíz fracción	$\sqrt{4/9} = 2/3$
5c	Radicando neg.	No existe en $\mathbb{R}$
6a	Raíz con resto	$\sqrt{182} = 13, r = 13$
6b	Raíz con resto	$\sqrt{99} = 9, r = 18$
7a	Op. combinada	$\frac{53}{6}$
7b	Op. combinada	-7
7c	Op. combinada	0
8	Diofanto	$26 = 0^2 + 1^2 + 3^2 + 4^2$; $39 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2$
9	Decimales	Exacto/periódico según factores del denominador
10a	Suma dec.	482,716
10b	Mult. dec.	335,274
10c	Resta/suma	140,075
10d	División dec.	14,56

¡Mucho ánimo, jóvenes!

Recuerda: en potencias, **el paréntesis decide el signo**. En raíces, **el radicando no puede ser negativo** (en $\mathbb{R}$). Con decimales, **alineá siempre la coma**.

Nº1.- Enuncia los tres productos notables

Nº2.- Llamando x a un número cualquiera, escribe una expresión algebraica para cada uno de los siguientes enunciados.

- a) El triple de x .
- b) La mitad de su anterior.
- c) La mitad de un número tres unidades mayor que x .
- d) El triple del número que resulta de sumar a x cinco unidades.
- e) Un número 5 unidades mayor que el triple de x .

Nº3.- Simplifica al máximo las siguientes operaciones con polinomios.

- a) $(x^2 - 3) \cdot (x + 1) - (x^2 + 5) \cdot (x - 2)$
- b) $(4x + 3) \cdot (2x - 5) - (6x^2 - 10x - 12)$

Nº4.- Calcula, utilizando los productos notables:

- a) $(3x + 4x^2)^2$
- b) $(5 - 3a)^2$
- c) $(3x + 1) \cdot (3x - 1)$

Nº5.- Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

- a) $x^2 + 3x - 40 = 0$
- b) $5x^2 - 20 = 0$
- c) $x^2 - x = 0$

Nº6.- Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado. Elimina paréntesis y denominadores operando convenientemente en cada caso. Si es posible, simplifica el resultado:

- a) $x - 7(2x + 1) = 2(6 - 5x) - 13$
- b) $\frac{1 - x}{3} - \frac{x - 1}{12} = \frac{3x - 1}{4}$

Nº7.- Se han repartido 500 litros de gasóleo, a partes iguales, en dos barriles. ¿Cuántos litros se han de pasar de uno a otro para que el segundo quede con el triple de cantidad que el primero?

Nº8.- Un hortelano siembra la mitad de su huerta de pimientos, la tercera parte de tomates, y el resto, que son 200m², de patatas. ¿Qué superficie tiene la huerta?

Nº9.- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - 5y = -8 \\ -3x + 8y = 13 \end{cases}$$

SUERTE JÓVENES

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$3(x+5) = 3x + 15$$

$$x^2 + bx + c = 0$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\frac{x+3}{2}$$

IES ANTONIO TOVAR — JUNTA DE CASTILLA Y LEÓN

Departamento de Matemáticas

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$5y = -8$$

SOLUCIONES COMPLETAS DEL

EXÁMENES DE LADIS

Matemáticas · Álgebra · 2.º ESO C

27 DE ENERO DE 2023 — CURSO 2022-2023

◇ ————— ★ ————— ◇

AL-JUARISMI (780-850 d.C.)

*“El álgebra es el arte de reducir lo complicado
a lo sencillo mediante reglas precisas.”*

*Fundador del álgebra. De su nombre (al-jabr)
deriva la palabra álgebra.*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$(x) \cdot Q(x)$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad | \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad | \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Contents

1	Ejercicio 1 — Los Tres Productos Notables	2
2	Ejercicio 2 — Expresiones Algebraicas	4
3	Ejercicio 3 — Operaciones con Polinomios	6
4	Ejercicio 4 — Productos Notables Aplicados	8
5	Ejercicio 5 — Ecuaciones de Segundo Grado	11
6	Ejercicio 6 — Ecuaciones de Primer Grado	14
7	Ejercicio 7 — Problema: Barriles de Gasóleo	17
8	Ejercicio 8 — Problema: La Huerta del Hortelano	19
9	Ejercicio 9 — Sistema de Ecuaciones	21
	Tabla Resumen de Resultados	23

Ejercicio 1 — Los Tres Productos Notables

Enunciado

Enuncia los tres productos notables.

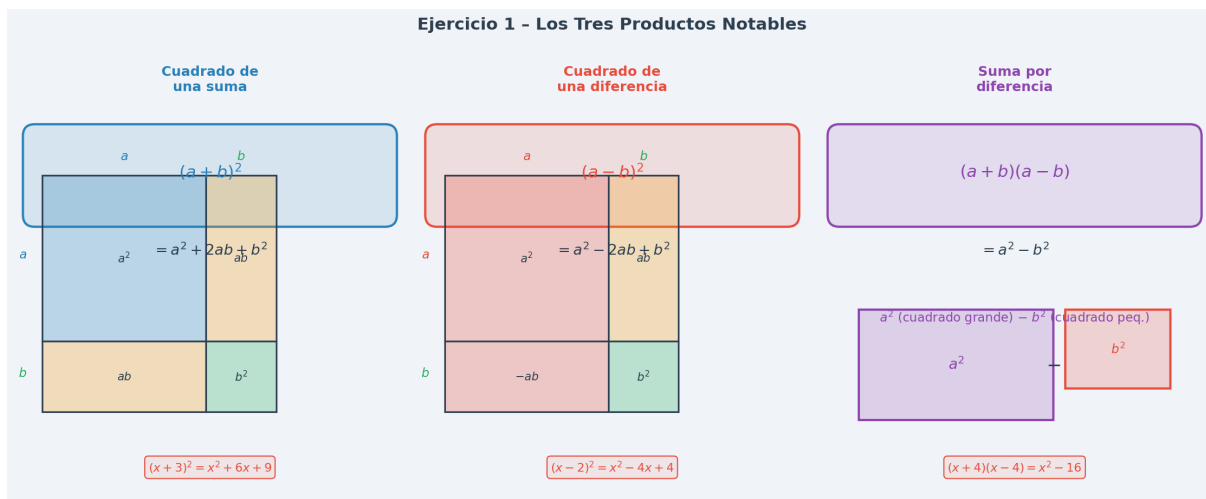


Figure 1: Los tres productos notables y su demostración geométrica mediante modelos de área.

Resolución paso a paso

Los **productos notables** son identidades algebraicas que permiten operar rápidamente con ciertos binomios sin necesidad de desarrollar el producto término a término cada vez.

1. Cuadrado de una suma:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Demostración: $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Regla mnemotécnica: «el cuadrado del primero, más el doble del producto, más el cuadrado del segundo».

Ejemplo: $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$

2. Cuadrado de una diferencia:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Demostración: $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Diferencia con el anterior: el término central lleva signo **negativo**.

Ejemplo: $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$

3. Suma por diferencia (diferencia de cuadrados):

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Demostración: $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$

Los términos intermedios $-ab + ab$ se cancelan. El resultado es siempre la diferencia de los cuadrados.

Ejemplo: $(x + 4)(x - 4) = x^2 - 16$

Advertencia importante: $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$. El término central $2ab$ es imprescindible. Este es el error más frecuente en álgebra elemental.

Resultado

Producto 1: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Producto 2: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Producto 3: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Ejercicio 2 — Expresiones Algebraicas

Enunciado

Llamando x a un número cualquiera, escribe una expresión algebraica para cada enunciado:

- El triple de x .
- La mitad de su anterior.
- La mitad de un número tres unidades mayor que x .
- El triple del número que resulta de sumar a x cinco unidades.
- Un número 5 unidades mayor que el triple de x .

Ejercicio 2 - Traducción de enunciados a expresiones algebraicas	
a) El triple de x	$\rightarrow 3x$
b) La mitad de su anterior (de $3x$)	$\rightarrow \frac{3x}{2}$
c) La mitad de un número 3 unidades mayor que x	$\rightarrow \frac{x+3}{2}$
d) El triple del número que resulta de sumar a x cinco unidades	$\rightarrow 3(x+5)$
e) Un número 5 unidades mayor que el triple de x	$\rightarrow 3x+5$

Figure 2: Traducción de lenguaje natural a lenguaje algebraico para cada enunciado.

Resolución paso a paso

Clave de traducción: identificar las operaciones indicadas por las palabras y respetar el orden en que se aplican.

a) «El triple de x »

«Triple» significa multiplicar por 3:

$$3x$$

b) «La mitad de su anterior» (la mitad del triple de x)

«Su anterior» se refiere al resultado del apartado a), es decir, $3x$. «La mitad» es

dividir por 2:

$$\frac{3x}{2}$$

c) «La mitad de un número tres unidades mayor que x »

Primero construimos el número «tres unidades mayor que x »: eso es $x + 3$.

Después tomamos «la mitad» de ese número:

$$\frac{x + 3}{2}$$

Atención: no es $\frac{x}{2} + 3$. El enunciado pide la mitad de todo el número $x + 3$.

d) «El triple del número que resulta de sumar a x cinco unidades»

Primero: «sumar a x cinco unidades» $\Rightarrow x + 5$.

Después: «el triple de ese número» $\Rightarrow 3 \cdot (x + 5)$.

Desarrollamos:

$$3(x + 5) = 3x + 15$$

Dejamos la expresión como $3(x + 5)$ o su equivalente $3x + 15$.

e) «Un número 5 unidades mayor que el triple de x »

Primero: «el triple de x » $\Rightarrow 3x$.

Después: «5 unidades mayor que $3x$ » $\Rightarrow 3x + 5$.

$$3x + 5$$

Atención: compara con d). Aquí primero se triplica y luego se suma 5; en d) primero se suma 5 y luego se triplica. Son expresiones distintas.

Comparación d) vs e):

- d) $3(x + 5) = 3x + 15$: el 5 entra *dentro* del triple.
- e) $3x + 5$: el 5 se añade *después* de triplicar.

Son diferentes: $3x + 15 \neq 3x + 5$.

Resultado

a) $3x$ b) $\frac{3x}{2}$ c) $\frac{x + 3}{2}$ d) $3(x + 5) = 3x + 15$ e) $3x + 5$

Ejercicio 3 — Operaciones con Polinomios

Enunciado

Simplifica al máximo:

a) $(x^2 - 3)(x + 1) - (x^2 + 5)(x - 2)$

b) $(4x + 3)(2x - 5) - (6x^2 - 10x - 12)$

Ejercicio 3 - Operaciones con polinomios

a) $(x^2 - 3)(x + 1) - (x^2 + 5)(x - 2)$

1) Expand. $(x^2 - 3)(x + 1)$:

$$= x^3 + x^2 - 3x - 3$$

2) Expand. $(x^2 + 5)(x - 2)$:

$$= x^3 - 2x^2 + 5x - 10$$

3) Resta:

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 - (x^3 - 2x^2 + 5x - 10)$$

$$= x^3 + x^2 - 3x - 3 - x^3 + 2x^2 - 5x + 10$$

$$= 3x^2 - 8x + 7$$

b) $(4x + 3)(2x - 5) - (6x^2 - 10x - 12)$

1) Expand. $(4x + 3)(2x - 5)$:

$$= 8x^2 - 20x + 6x - 15$$

$$= 8x^2 - 14x - 15$$

2) Resta:

$$8x^2 - 14x - 15 - (6x^2 - 10x - 12)$$

$$= 8x^2 - 14x - 15 - 6x^2 + 10x + 12$$

$$= 2x^2 - 4x - 3$$

Figure 3: Expansión y simplificación de los polinomios paso a paso.

Resolución paso a paso

Apartado a) $(x^2 - 3)(x + 1) - (x^2 + 5)(x - 2)$

Paso 1: Expandimos el primer producto $(x^2 - 3)(x + 1)$ mediante la propiedad distributiva:

$$(x^2 - 3)(x + 1) = x^2 \cdot x + x^2 \cdot 1 - 3 \cdot x - 3 \cdot 1 = x^3 + x^2 - 3x - 3$$

Paso 2: Expandimos el segundo producto $(x^2 + 5)(x - 2)$:

$$(x^2 + 5)(x - 2) = x^2 \cdot x + x^2 \cdot (-2) + 5 \cdot x + 5 \cdot (-2) = x^3 - 2x^2 + 5x - 10$$

Paso 3: Restamos el segundo al primero. **Importante:** el signo negativo afecta a *todas* los términos del segundo polinomio:

$$\begin{aligned} &(x^3 + x^2 - 3x - 3) - (x^3 - 2x^2 + 5x - 10) \\ &= x^3 + x^2 - 3x - 3 - x^3 + 2x^2 - 5x + 10 \end{aligned}$$

Paso 4: Agrupamos los términos semejantes (mismo grado):

$$\text{Grado 3: } x^3 - x^3 = 0$$

$$\text{Grado 2: } x^2 + 2x^2 = 3x^2$$

$$\text{Grado 1: } -3x - 5x = -8x$$

$$\text{Grado 0: } -3 + 10 = +7$$

Resultado

$$(x^2 - 3)(x + 1) - (x^2 + 5)(x - 2) = \mathbf{3x^2 - 8x + 7}$$

Resolución paso a paso

Apartado b) $(4x + 3)(2x - 5) - (6x^2 - 10x - 12)$

Paso 1: Expandimos $(4x + 3)(2x - 5)$:

$$\begin{aligned}(4x + 3)(2x - 5) &= 4x \cdot 2x + 4x \cdot (-5) + 3 \cdot 2x + 3 \cdot (-5) \\ &= 8x^2 - 20x + 6x - 15 \\ &= 8x^2 - 14x - 15\end{aligned}$$

Paso 2: Restamos el segundo polinomio. Distribuimos el signo negativo:

$$\begin{aligned}8x^2 - 14x - 15 - (6x^2 - 10x - 12) \\ = 8x^2 - 14x - 15 - 6x^2 + 10x + 12\end{aligned}$$

Paso 3: Agrupamos semejantes:

$$\text{Grado 2: } 8x^2 - 6x^2 = 2x^2$$

$$\text{Grado 1: } -14x + 10x = -4x$$

$$\text{Grado 0: } -15 + 12 = -3$$

Resultado

$$(4x + 3)(2x - 5) - (6x^2 - 10x - 12) = \mathbf{2x^2 - 4x - 3}$$

Ejercicio 4 — Productos Notables Aplicados

Enunciado

Calcula, utilizando los productos notables:

a) $(3x + 4x^2)^2$

b) $(5 - 3a)^2$

c) $(3x + 1)(3x - 1)$

Ejercicio 4 - Aplicación de productos notables

a) $(3x + 4x^2)^2$	b) $(5 - 3a)^2$	c) $(3x + 1)(3x - 1)$
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
$a = 3x, b = 4x^2$	$a = 5, b = 3a$	$a = 3x, b = 1$
$a^2 = (3x)^2 = 9x^2$	$a^2 = 5^2 = 25$	$a^2 = (3x)^2 = 9x^2$
$2ab = 2 \cdot 3x \cdot 4x^2 = 24x^3$	$2ab = 2 \cdot 5 \cdot 3a = 30a$	$b^2 = 1^2 = 1$
$b^2 = (4x^2)^2 = 16x^4$	$b^2 = (3a)^2 = 9a^2$	Diferencia de cuadrados
$= 9x^2 + 24x^3 + 16x^4$	$= 25 - 30a + 9a^2$	$= 9x^2 - 1$

Figure 4: Aplicación directa de los tres productos notables identificando a y b en cada caso.

Resolución paso a paso

Apartado a) $(3x + 4x^2)^2$

Reconocemos el **cuadrado de una suma**: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Identificamos:

$$a = 3x \quad b = 4x^2$$

Paso 1: Calculamos a^2 :

$$a^2 = (3x)^2 = 9x^2$$

Paso 2: Calculamos $2ab$:

$$2ab = 2 \cdot (3x) \cdot (4x^2) = 24x^3$$

Paso 3: Calculamos b^2 :

$$b^2 = (4x^2)^2 = 16x^4$$

Paso 4: Aplicamos la fórmula:

$$(3x + 4x^2)^2 = 9x^2 + 24x^3 + 16x^4$$

Resultado

$$(3x + 4x^2)^2 = 16x^4 + 24x^3 + 9x^2$$

Resolución paso a paso

Apartado b) $(5 - 3a)^2$

Reconocemos el **cuadrado de una diferencia**: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Identificamos:

$$a = 5 \quad b = 3a \quad (\text{aquí la letra es } a, \text{ no confundir con el primer término})$$

Para mayor claridad usaremos $p = 5$ y $q = 3a$: $(p - q)^2 = p^2 - 2pq + q^2$

Paso 1: $p^2 = 5^2 = 25$

Paso 2: $2pq = 2 \cdot 5 \cdot 3a = 30a$

Paso 3: $q^2 = (3a)^2 = 9a^2$

Paso 4: Resultado:

$$(5 - 3a)^2 = 25 - 30a + 9a^2$$

Resultado

$$(5 - 3a)^2 = 9a^2 - 30a + 25$$

Resolución paso a paso

Apartado c) $(3x + 1)(3x - 1)$

Reconocemos la **suma por diferencia**: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
Identificamos:

$$a = 3x \quad b = 1$$

Paso 1: $a^2 = (3x)^2 = 9x^2$

Paso 2: $b^2 = 1^2 = 1$

Paso 3: Resultado (diferencia de cuadrados):

$$(3x + 1)(3x - 1) = 9x^2 - 1$$

Resultado

$$(3x + 1)(3x - 1) = 9x^2 - 1$$

Ejercicio 5 — Ecuaciones de Segundo Grado

Enunciado

Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 + 3x - 40 = 0$

b) $5x^2 - 20 = 0$

c) $x^2 - x = 0$

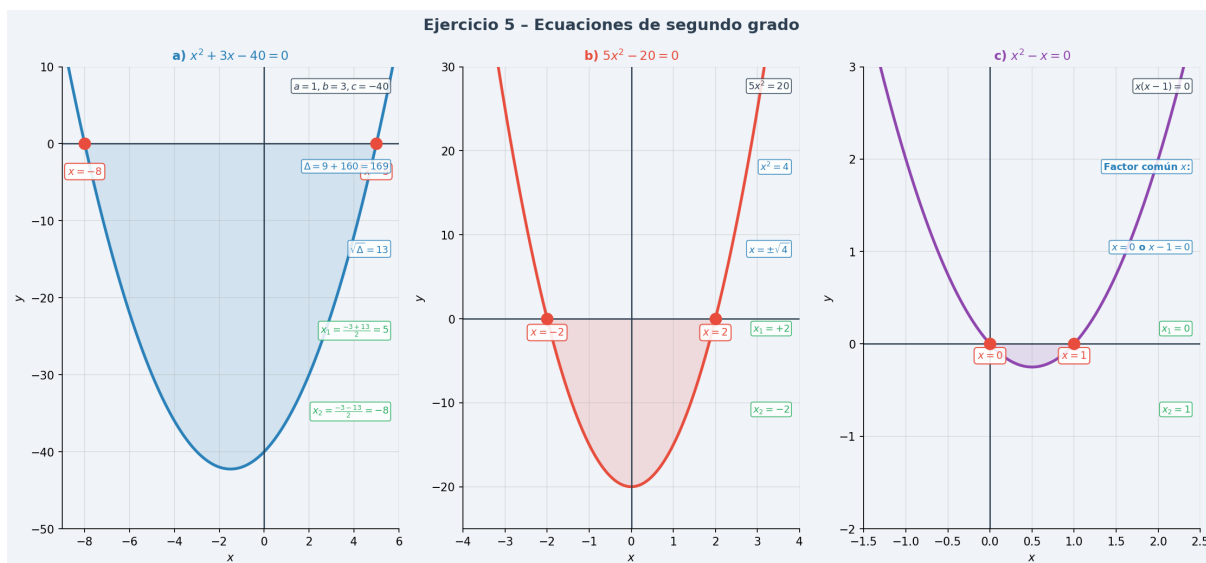


Figure 5: Representación gráfica de las tres parábolas y sus raíces (intersecciones con el eje x).

Resolución paso a paso

Fórmula general para $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El **discriminante** $\Delta = b^2 - 4ac$ determina el número de soluciones: $\Delta > 0 \rightarrow$ dos raíces reales; $\Delta = 0 \rightarrow$ raíz doble; $\Delta < 0 \rightarrow$ sin raíces reales.

Apartado a) $x^2 + 3x - 40 = 0$

Identificamos: $a = 1$, $b = 3$, $c = -40$

Paso 1: Calculamos el discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-40) = 9 + 160 = 169$$

Paso 2: Calculamos $\sqrt{\Delta}$:

$$\sqrt{169} = 13 \quad (\text{puesto que } 13^2 = 169)$$

Paso 3: Aplicamos la fórmula:

$$x = \frac{-3 \pm 13}{2 \cdot 1}$$

Paso 4: Las dos soluciones:

$$x_1 = \frac{-3 + 13}{2} = \frac{10}{2} = 5 \quad x_2 = \frac{-3 - 13}{2} = \frac{-16}{2} = -8$$

Paso 5: Verificación:

- $x = 5$: $25 + 15 - 40 = 0 \checkmark$
- $x = -8$: $64 - 24 - 40 = 0 \checkmark$

Resultado

$$x^2 + 3x - 40 = 0 \Rightarrow x_1 = 5, \quad x_2 = -8$$

Resolución paso a paso

Apartado b) $5x^2 - 20 = 0$

Este tipo se resuelve directamente sin la fórmula general.

Paso 1: Aislamos x^2 :

$$5x^2 - 20 = 0 \Rightarrow 5x^2 = 20 \Rightarrow x^2 = \frac{20}{5} = 4$$

Paso 2: Extraemos la raíz cuadrada (recuerda: dos soluciones, $\pm$):

$$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Paso 3: Las dos soluciones:

$$x_1 = +2 \quad x_2 = -2$$

Paso 4: Verificación:

- $x = 2$: $5 \cdot 4 - 20 = 20 - 20 = 0 \checkmark$
- $x = -2$: $5 \cdot 4 - 20 = 20 - 20 = 0 \checkmark$

Resultado

$$5x^2 - 20 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = -2$$

Resolución paso a paso

Apartado c) $x^2 - x = 0$

Este tipo se resuelve sacando **factor común**.

Paso 1: Pasamos todo al primer miembro (ya está) y sacamos factor común x :

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0$$

Paso 2: Un producto es cero si y solo si alguno de los factores es cero:

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x - 1 = 0$$

Paso 3: Las dos soluciones:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 1$$

Paso 4: Verificación:

- $x = 0$: $0 - 0 = 0$ ✓
- $x = 1$: $1 - 1 = 0$ ✓

Resultado

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 1$$

Ejercicio 6 — Ecuaciones de Primer Grado

Enunciado

Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado:

a) $x - 7(2x + 1) = 2(6 - 5x) - 13$

b) $\frac{1-x}{3} - \frac{x-1}{12} = \frac{3x-1}{4}$

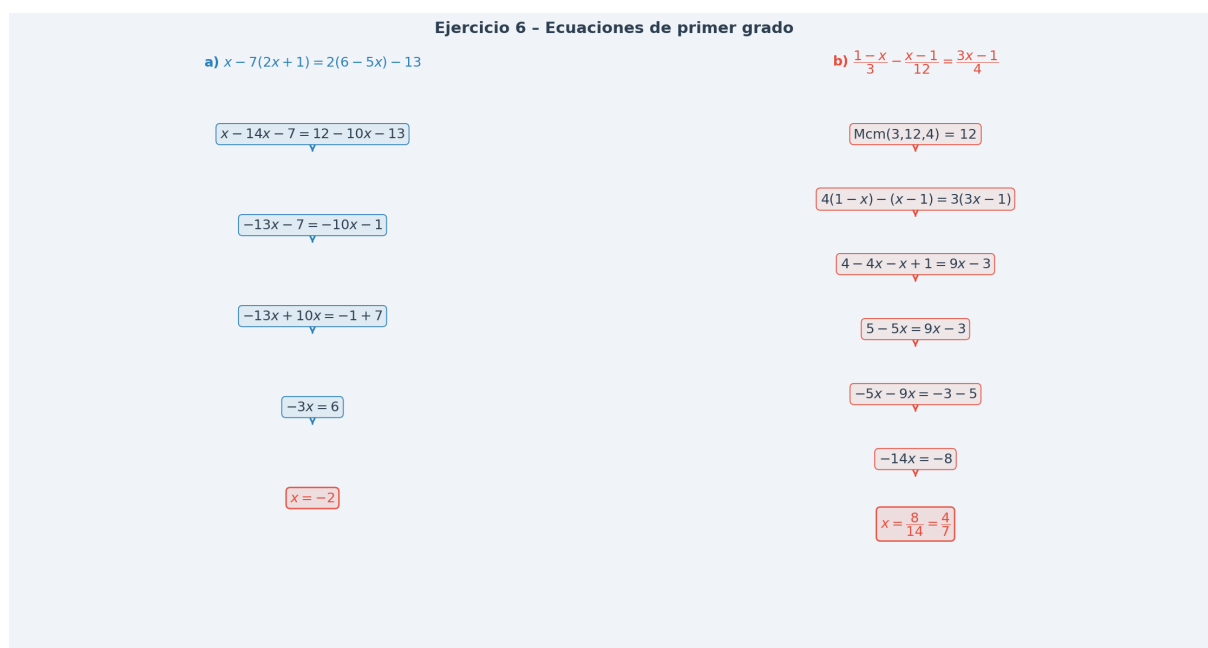


Figure 6: Resolución paso a paso de las dos ecuaciones de primer grado.

Resolución paso a paso

Apartado a) $x - 7(2x + 1) = 2(6 - 5x) - 13$

Paso 1: Eliminamos los paréntesis aplicando la propiedad distributiva:

Miembro izquierdo:

$$x - 7(2x + 1) = x - 14x - 7 = -13x - 7$$

Miembro derecho:

$$2(6 - 5x) - 13 = 12 - 10x - 13 = -10x - 1$$

Paso 2: Igualamos los dos resultados:

$$-13x - 7 = -10x - 1$$

Paso 3: Pasamos los términos con x a la izquierda y los independientes a la derecha:

$$-13x + 10x = -1 + 7$$

$$-3x = 6$$

Paso 4: Despejamos x :

$$x = \frac{6}{-3} = -2$$

Paso 5: Verificación (sustituimos $x = -2$):

$$\text{Izq: } (-2) - 7(2(-2) + 1) = -2 - 7(-3) = -2 + 21 = 19$$

$$\text{Der: } 2(6 - 5(-2)) - 13 = 2(16) - 13 = 32 - 13 = 19 \quad \checkmark$$

Resultado

$$x - 7(2x + 1) = 2(6 - 5x) - 13 \Rightarrow x = -2$$

Resolución paso a paso

Apartado b) $\frac{1-x}{3} - \frac{x-1}{12} = \frac{3x-1}{4}$

Paso 1: Calculamos el mínimo común múltiplo de los denominadores:

$$\text{mcm}(3, 12, 4) = 12$$

Paso 2: Multiplicamos toda la ecuación por 12 para eliminar denominadores:

$$12 \cdot \frac{1-x}{3} - 12 \cdot \frac{x-1}{12} = 12 \cdot \frac{3x-1}{4}$$

$$4(1-x) - (x-1) = 3(3x-1)$$

Paso 3: Expandimos cada paréntesis:

Miembro izquierdo:

$$4(1-x) - (x-1) = 4 - 4x - x + 1 = 5 - 5x$$

Miembro derecho:

$$3(3x-1) = 9x - 3$$

Paso 4: Ecuación simplificada:

$$5 - 5x = 9x - 3$$

Paso 5: Agrupamos:

$$5 + 3 = 9x + 5x$$

$$8 = 14x$$

Paso 6: Despejamos x :

$$x = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$$

Paso 7: Verificación (sustituimos $x = \frac{4}{7}$):

$$\text{Izq: } \frac{1 - \frac{4}{7}}{3} - \frac{\frac{4}{7} - 1}{12} = \frac{\frac{3}{7}}{3} - \frac{-\frac{3}{7}}{12} = \frac{1}{7} + \frac{1}{28} = \frac{4}{28} + \frac{1}{28} = \frac{5}{28}$$

$$\text{Der: } \frac{3 \cdot \frac{4}{7} - 1}{4} = \frac{\frac{12}{7} - 1}{4} = \frac{\frac{5}{7}}{4} = \frac{5}{28} \quad \checkmark$$

Resultado

$$\frac{1-x}{3} - \frac{x-1}{12} = \frac{3x-1}{4} \Rightarrow x = \frac{4}{7}$$

Ejercicio 7 — Problema: Barriles de Gasóleo

Enunciado

Se han repartido 500 litros de gasóleo, a partes iguales, en dos barriles. ¿Cuántos litros se han de pasar de uno al otro para que el segundo quede con el triple de cantidad que el primero?

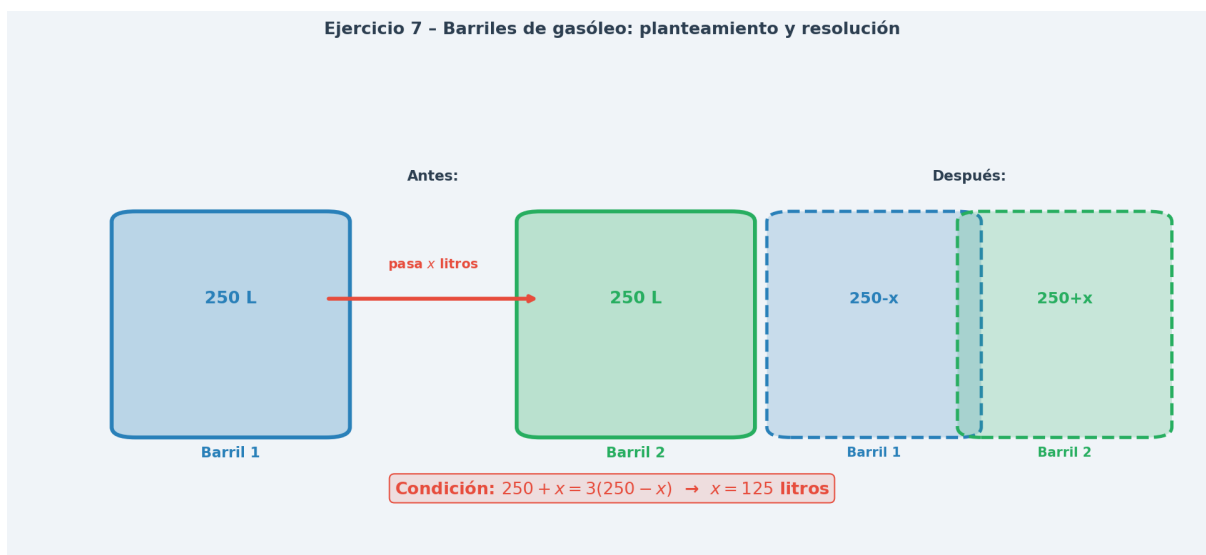


Figure 7: Esquema visual del reparto inicial y la transferencia de x litros entre barriles.

Resolución paso a paso

Paso 1: Situación inicial

500 litros repartidos a partes iguales en dos barriles:

$$\text{Barril 1} = 250 \text{ L} \quad \text{Barril 2} = 250 \text{ L}$$

Paso 2: Variable

Llamamos x a los litros que se pasan del **barril 1 al barril 2**. Tras la transferencia:

$$\text{Barril 1 queda con: } 250 - x \text{ litros}$$

$$\text{Barril 2 queda con: } 250 + x \text{ litros}$$

Paso 3: Planteamiento de la ecuación

La condición es que el segundo quede con el **triple** del primero:

$$250 + x = 3 \cdot (250 - x)$$

Paso 4: Resolución

Expandimos el miembro derecho:

$$250 + x = 750 - 3x$$

Pasamos términos con x a la izquierda e independientes a la derecha:

$$x + 3x = 750 - 250$$

$$4x = 500$$

$$x = \frac{500}{4} = 125 \text{ litros}$$

Paso 5: Comprobación

Tras transferir 125 L:

$$\text{Barril 1: } 250 - 125 = 125 \text{ L} \quad \text{Barril 2: } 250 + 125 = 375 \text{ L}$$

¿Tiene el segundo el triple del primero? $3 \times 125 = 375$ ✓

¿La suma sigue siendo 500? $125 + 375 = 500$ ✓

Resultado

Se deben pasar **125 litros** del barril 1 al barril 2.

Resultado: Barril 1 = 125 L, Barril 2 = 375 L (triple).

Ejercicio 8 — Problema: La Huerta del Hortelano

Enunciado

Un hortelano siembra la mitad de su huerta de pimientos, la tercera parte de tomates, y el resto, que son 200 m^2 , de patatas. ¿Qué superficie tiene la huerta?

Ejercicio 8 - Huerta del hortelano: distribución de cultivos

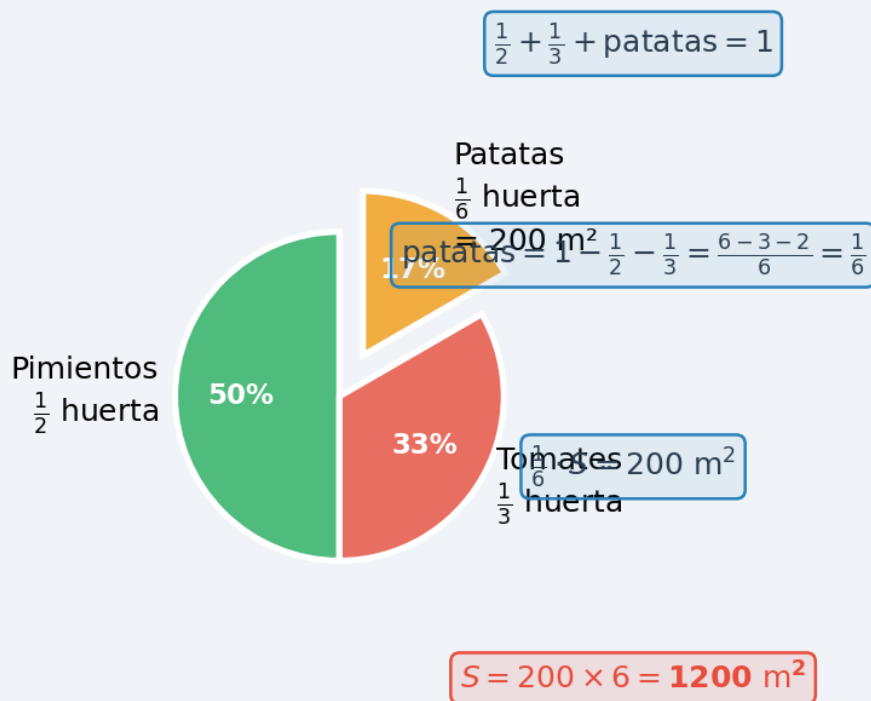


Figure 8: Diagrama circular de la distribución de cultivos y resolución algebraica.

Resolución paso a paso

Paso 1: Variable

Sea S la superficie total de la huerta (en m^2), que es lo que buscamos.

Paso 2: Expresión de cada parte

- Pimientos: $\frac{1}{2}S$
- Tomates: $\frac{1}{3}S$
- Patatas: el resto = 200 m^2

Paso 3: Ecuación

La suma de todas las partes es igual a la superficie total:

$$\frac{1}{2}S + \frac{1}{3}S + 200 = S$$

Paso 4: Resolución

Primero calculamos la fracción que ocupan los primeros dos cultivos juntos.

$\text{mcm}(2, 3) = 6$:

$$\frac{1}{2}S + \frac{1}{3}S = \frac{3S}{6} + \frac{2S}{6} = \frac{5S}{6}$$

Sustituimos:

$$\frac{5S}{6} + 200 = S$$

Restamos $\frac{5S}{6}$ en ambos miembros:

$$200 = S - \frac{5S}{6} = \frac{6S - 5S}{6} = \frac{S}{6}$$

Por tanto:

$$\frac{S}{6} = 200 \Rightarrow S = 200 \times 6 = 1200 \text{ m}^2$$

Paso 5: Comprobación

- Pimientos: $\frac{1}{2} \times 1200 = 600 \text{ m}^2$
- Tomates: $\frac{1}{3} \times 1200 = 400 \text{ m}^2$
- Patatas: $1200 - 600 - 400 = 200 \text{ m}^2 \checkmark$
- Total: $600 + 400 + 200 = 1200 \text{ m}^2 \checkmark$

Resultado

La huerta tiene **1200 m²** de superficie total.

Ejercicio 9 — Sistema de Ecuaciones

Enunciado

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - 5y = -8 \\ -3x + 8y = 13 \end{cases}$$

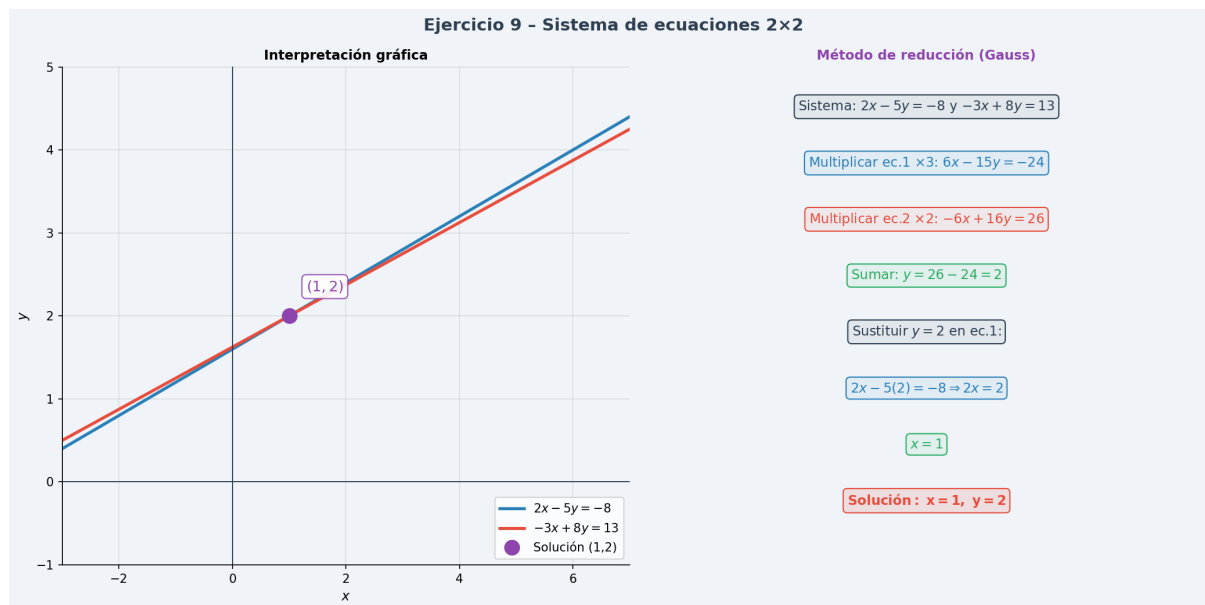


Figure 9: Izquierda: representación gráfica del sistema (intersección de dos rectas). Derecha: resolución por el método de reducción.

Resolución paso a paso

Resolveremos el sistema por el **método de reducción (Gauss-Jordan)**, que consiste en combinar las ecuaciones para eliminar una incógnita.

Paso 1: Planteamiento

$$\begin{cases} 2x - 5y = -8 & (\text{Ec. 1}) \\ -3x + 8y = 13 & (\text{Ec. 2}) \end{cases}$$

Paso 2: Eliminación de x

Queremos que los coeficientes de x sean opuestos. El mínimo común múltiplo de 2 y 3 es 6.

Multiplicamos la Ec. 1 por +3:

$$3 \times (2x - 5y = -8) \Rightarrow 6x - 15y = -24 \quad (\text{Ec. 1}')$$

Multiplicamos la Ec. 2 por +2:

$$2 \times (-3x + 8y = 13) \Rightarrow -6x + 16y = 26 \quad (\text{Ec. 2}')$$

Paso 3: Suma de las ecuaciones transformadas

Sumamos Ec. 1' y Ec. 2' para eliminar x :

$$(6x - 15y) + (-6x + 16y) = -24 + 26$$

$$0x + y = 2$$

$$\boxed{y = 2}$$

Paso 4: Sustitución para hallar x

Sustituimos $y = 2$ en la Ecuación 1 original:

$$2x - 5(2) = -8$$

$$2x - 10 = -8$$

$$2x = -8 + 10 = 2$$

$$\boxed{x = 1}$$

Paso 5: Verificación

Comprobamos en **las dos** ecuaciones originales:

Ecuación 1: $2(1) - 5(2) = 2 - 10 = -8$ ✓

Ecuación 2: $-3(1) + 8(2) = -3 + 16 = 13$ ✓

Interpretación gráfica: Cada ecuación representa una recta en el plano. La solución $(1, 2)$ es el **punto de intersección** de ambas rectas, como se ve en la figura.

Resultado

$$\begin{cases} 2x - 5y = -8 \\ -3x + 8y = 13 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x = 1, \quad y = 2}$$

Tabla Resumen de Resultados

Ej.	Tema	Resultado
1	Productos notables	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
2a	Expresión algebraica	$3x$
2b	Expresión algebraica	$\frac{3x}{2}$
2c	Expresión algebraica	$\frac{x+3}{2}$
2d	Expresión algebraica	$3(x+5) = 3x + 15$
2e	Expresión algebraica	$3x + 5$
3a	Polinomios	$3x^2 - 8x + 7$
3b	Polinomios	$2x^2 - 4x - 3$
4a	Producto notable	$16x^4 + 24x^3 + 9x^2$
4b	Producto notable	$9a^2 - 30a + 25$
4c	Producto notable	$9x^2 - 1$
5a	Ecuación 2.º grado	$x_1 = 5, x_2 = -8$
5b	Ecuación 2.º grado	$x_1 = 2, x_2 = -2$
5c	Ecuación 2.º grado	$x_1 = 0, x_2 = 1$
6a	Ecuación 1.er grado	$x = -2$
6b	Ecuación 1.er grado	$x = \frac{4}{7}$
7	Problema barriles	$x = 125$ litros; B1=125 L, B2=375 L
8	Problema huerta	$S = 1200 \text{ m}^2$
9	Sistema 2×2	$x = 1, y = 2$

¡Mucho ánimo, jóvenes!

En álgebra: distingue siempre **cuándo** aplica cada producto notable.
 En ecuaciones: **verifica siempre** tu solución sustituyendo en la ecuación original.
 En problemas: **define la variable, plantea la ecuación, resuelve y comprueba.**



- Nº1.-** Un transportista cobra 810 € por trasladar una carga a 45 km de distancia. ¿Cuánto cobrará por trasladar la misma carga a 150 km? ¿A cómo sale el precio por Km?
- Nº2.-** Una persona lee un libro en 8 días dedicando 3 h diarias a razón de 15 páginas por hora. ¿Cuántas horas diarias debe leer para acabar el libro en 20 días a razón de 9 páginas por hora?
- Nº3.-** Un empresario premia a tres empleados con un incentivo económico directamente proporcional a los años de antigüedad en la empresa. El mayor, que lleva 20 años, recibe 500 euros. ¿Cuánto recibirán los otros dos, que llevan en la empresa 15 años y 8 años, respectivamente?
- Nº4.-** Se mezclan 3 litros de aceite a 4 €/l, con 2 litros de otro aceite de mejor calidad que cuesta 7€/l.
- a) ¿Cuánto cuesta el litro de la mezcla?
 - b) Si quiero tener un beneficio de 10 €, ¿A cómo debo vender el litro de la mezcla?
- Nº5.-** a) Un depósito de agua está al 93% de su capacidad. Si se añaden 14.000 litros, quedará completo. ¿Cuál es la capacidad del depósito?
- b) En una reunión de 100 personas el 99% son mujeres. ¿Cuántas mujeres deberán salir de la reunión para tener el 98% de mujeres?

(TODOS LOS PROBLEMAS VALEN 2 PUNTOS)

SUERTE JÓVENES



MATEMÁTICAS

Soluciones Completas — 2º ESO C
IES Tovar · 24 de febrero de 2023

"Las matemáticas son el alfabeto con el que Dios ha escrito el Universo."

— Galileo Galilei —

Asignatura	Matemáticas	Fecha	24/02/2023
	2º ESO C		IES Tovar
Puntuación	5 ejercicios × 2 pts	Total	10 puntos

Índice de contenidos

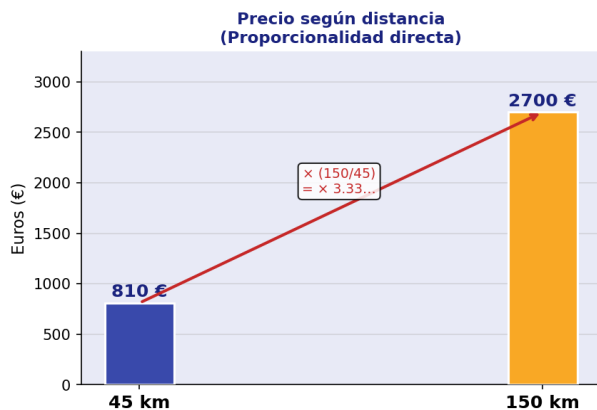
Ejercicio 1 – El transportista	3
Ejercicio 2 – La lectora y el libro	4
Ejercicio 3 – Reparto proporcional de incentivos	5
Ejercicio 4 – Mezcla de aceites	6
Ejercicio 5 – Porcentajes	7

Ejercicio 1 – El transportista

Enunciado:

Un transportista cobra 810 € por trasladar una carga a 45 km de distancia. ¿Cuánto cobrará por trasladar la misma carga a 150 km? ¿A cómo sale el precio por km?

Ejercicio 1 - Transportista



Regla de tres simple

Distancia	Precio
45 km	810 €
1 km	18 €
150 km	2 700 €

18 €/km

Análisis del problema:

La relación entre distancia y precio es de **proporcionalidad directa**: a mayor distancia, mayor coste. Si se duplica la distancia, el precio también se duplica. Podemos resolverlo mediante una regla de tres simple directa.

Parte A — ¿Cuánto cobrará por 150 km?

Planteamos la regla de tres directa:

Distancia (km)	Precio (€)
45	810
150	x

Aplicando la regla de tres:

$$\begin{aligned}
 &45 \text{ km} \rightarrow 810 \text{ €} \\
 &150 \text{ km} \rightarrow x \text{ €} \\
 &x = (150 \times 810) \div 45 \\
 &x = 121\,500 \div 45 = 2\,700 \text{ €}
 \end{aligned}$$

Parte B — ¿Precio por kilómetro?

Dividimos el precio total entre los kilómetros recorridos en la situación inicial (o en cualquier otra, ya que la razón es constante):

$$\text{Precio/km} = 810 \text{ €} \div 45 \text{ km} = 18 \text{ €/km}$$

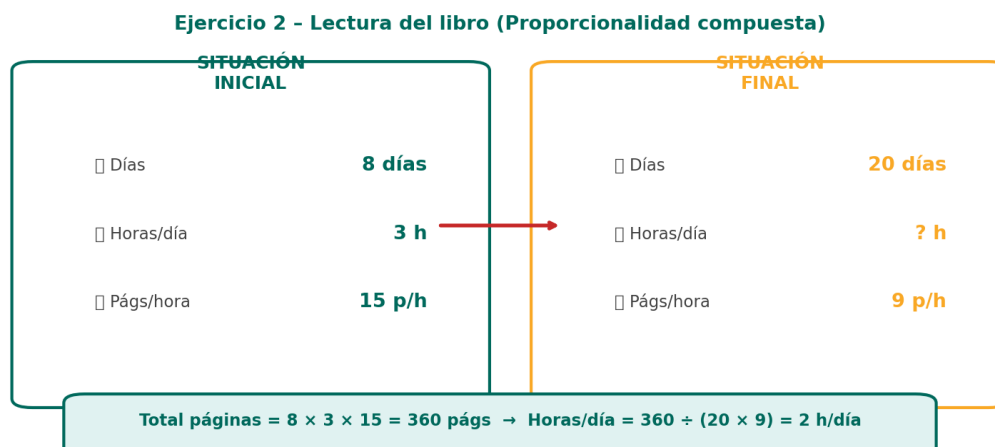
Verificación con 150 km: $150 \times 18 = 2\,700 \text{ €}$ ✓

■ RESPUESTA: El transportista cobrará 2 700 € por 150 km. El precio es 18 €/km.

Ejercicio 2 – La lectora y el libro

Enunciado:

Una persona lee un libro en 8 días dedicando 3 horas diarias a razón de 15 páginas por hora. ¿Cuántas horas diarias debe leer para acabar el libro en 20 días a razón de 9 páginas por hora?



Análisis del problema:

Este problema implica **tres variables relacionadas**: días, horas/día y páginas/hora. El total de páginas del libro es constante. Primero calculamos ese total y luego despejamos las horas/día en la segunda situación.

Paso 1 — Calcular el total de páginas del libro

Con los datos iniciales calculamos cuántas páginas tiene el libro:

$$\begin{aligned} \text{Total páginas} &= \text{días} \times \text{horas/día} \times \text{páginas/hora} \\ \text{Total páginas} &= 8 \times 3 \times 15 \end{aligned}$$

$$\text{Total páginas} = 8 \times 3 \times 15 = 24 \times 15 = 360 \text{ páginas}$$

Paso 2 — Plantear la ecuación para la nueva situación

Ahora sabemos que debe leer las mismas 360 páginas en 20 días a 9 páginas/hora. Llamamos **h** a las horas diarias que necesita:

$$\begin{aligned} \text{Total páginas} &= \text{días} \times \text{horas/día} \times \text{páginas/hora} \\ 360 &= 20 \times h \times 9 \end{aligned}$$

Paso 3 — Despejar h

$$\begin{aligned} 360 &= 20 \times h \times 9 \\ 360 &= 180 \times h \\ h &= 360 \div 180 \\ h &= 2 \text{ horas diarias} \end{aligned}$$

Verificación:

$$20 \text{ días} \times 2 \text{ h/día} \times 9 \text{ págs/h} = 40 \times 9 = 360 \text{ páginas} \checkmark$$

■ **RESPUESTA:** Debe leer 2 horas diarias para acabar el libro en 20 días.

Ejercicio 3 – Reparto proporcional de incentivos

Enunciado:

Un empresario premia a tres empleados con un incentivo económico directamente proporcional a los años de antigüedad en la empresa. El mayor, que lleva 20 años, recibe 500 euros. ¿Cuánto recibirán los otros dos, que llevan en la empresa 15 años y 8 años respectivamente?

Ejercicio 3 - Reparto proporcional

Empleado A

20 años de antigüedad

20/20

500 €

Empleado B

15 años de antigüedad

15/20

375 €

Empleado C

8 años de antigüedad

8/20

200 €

Constante $k = 500 \div 20 = 25 \text{ €/año}$

$B = 15 \times 25 = 375 \text{ €}$ | $C = 8 \times 25 = 200 \text{ €}$ | Total = 1 075 €

Análisis del problema:

La palabra clave es **directamente proporcional**: el incentivo crece en la misma proporción que los años de antigüedad. Existe una constante de proporcionalidad k tal que: **Incentivo** = $k \times$ **años de antigüedad**.

Paso 1 — Hallar la constante de proporcionalidad k

Usando el dato conocido del empleado A (20 años $\rightarrow$ 500 €):

$$\begin{aligned} k &= \text{Incentivo} \div \text{Años de antigüedad} \\ k &= 500 \text{ €} \div 20 \text{ años} \\ k &= 25 \text{ €/año} \end{aligned}$$

Paso 2 — Calcular el incentivo de cada empleado

Empleado	Antigüedad	Cálculo	Incentivo
A (referencia)	20 años	$20 \times 25 \text{ €}$	500 €
B	15 años	$15 \times 25 \text{ €}$	375 €
C	8 años	$8 \times 25 \text{ €}$	200 €
TOTAL	43 años	$43 \times 25 \text{ €}$	1 075 €

■ **RESPUESTA:** El empleado B (15 años) recibe 375 € y el empleado C (8 años) recibe 200 €.

Ejercicio 4 – Mezcla de aceites

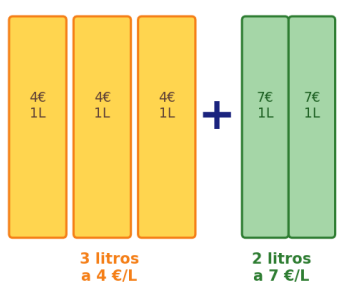
Enunciado:

Se mezclan 3 litros de aceite a 4 €/litro con 2 litros de otro aceite de mejor calidad que cuesta 7 €/litro.

a) ¿Cuánto cuesta el litro de la mezcla?

b) Si quiero tener un beneficio de 10 €, ¿a cómo debo vender el litro de la mezcla?

Ejercicio 4 - Mezcla de aceites

Mezcla de aceites		Cálculo del precio	
		Cálculo	Resultado
 3 litros a 4 €/L 2 litros a 7 €/L	Coste aceite A	$3 \text{ L} \times 4 \text{ €/L}$	12 €
	Coste aceite B	$2 \text{ L} \times 7 \text{ €/L}$	14 €
	Coste total	$12 + 14$	26 €
	Total litros	$3 + 2$	5 L
	Precio/litro mezcla	$26 \div 5$	5,20 €/L
	Precio venta (+ 10€ beneficio)	$(26+10) \div 5$	7,20 €/L

Parte a) — Precio de coste del litro de mezcla

Primero calculamos el coste total de cada aceite y después el coste total de la mezcla:

Aceite	Litros	Precio/litro	Coste total
Aceite A (normal)	3 L	4,00 €/L	$3 \times 4 = 12,00 \text{ €}$
Aceite B (calidad)	2 L	7,00 €/L	$2 \times 7 = 14,00 \text{ €}$
MEZCLA total	5 L	?	$12 + 14 = 26,00 \text{ €}$

$$\text{Precio/litro de la mezcla} = \text{Coste total} \div \text{Litros totales}$$

$$\text{Precio/litro} = 26 \text{ €} \div 5 \text{ L} = 5,20 \text{ €/L}$$

Parte b) — Precio de venta con beneficio de 10 €

Para obtener un beneficio de 10 €, debemos añadir ese beneficio al coste total y luego repartir entre los 5 litros de mezcla:

$$\text{Precio total de venta} = \text{Coste total} + \text{Beneficio deseado}$$

$$\text{Precio total de venta} = 26 \text{ €} + 10 \text{ €} = 36 \text{ €}$$

$$\text{Precio de venta/litro} = \text{Precio total de venta} \div \text{Litros totales}$$

$$\text{Precio de venta/litro} = 36 \text{ €} \div 5 \text{ L} = 7,20 \text{ €/L}$$

■ **RESPUESTA a):** El litro de mezcla cuesta 5,20 €.

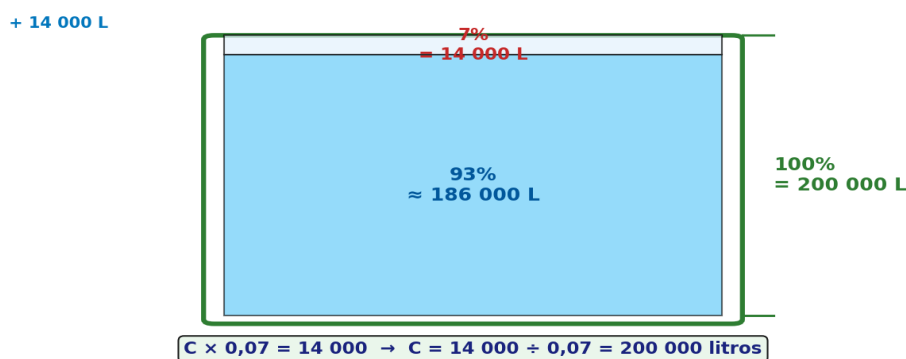
■ **RESPUESTA b):** Debe venderse a 7,20 €/litro para obtener 10 € de beneficio.

Ejercicio 5 – Porcentajes

Apartado 5a — Capacidad del depósito de agua

Un depósito de agua está al 93% de su capacidad. Si se añaden 14 000 litros, quedará completo. ¿Cuál es la capacidad total del depósito?

Ejercicio 5a - Capacidad del depósito de agua



Análisis:

Si el depósito está al 93%, le falta el 7% para llenarse. Ese 7% restante equivale a los 14 000 litros que se añaden.

Planteamiento de la ecuación:

Sea C la capacidad total del depósito (en litros):

$$\begin{aligned} 7\% \text{ de } C &= 14\,000 \\ 0,07 \times C &= 14\,000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Despejando } C: \\ C &= 14\,000 \div 0,07 \end{aligned}$$

$$C = 14\,000 \div 0,07 = 200\,000 \text{ litros}$$

Verificación:

93% de 200 000 = $0,93 \times 200\,000 = 186\,000$ litros (agua actual)

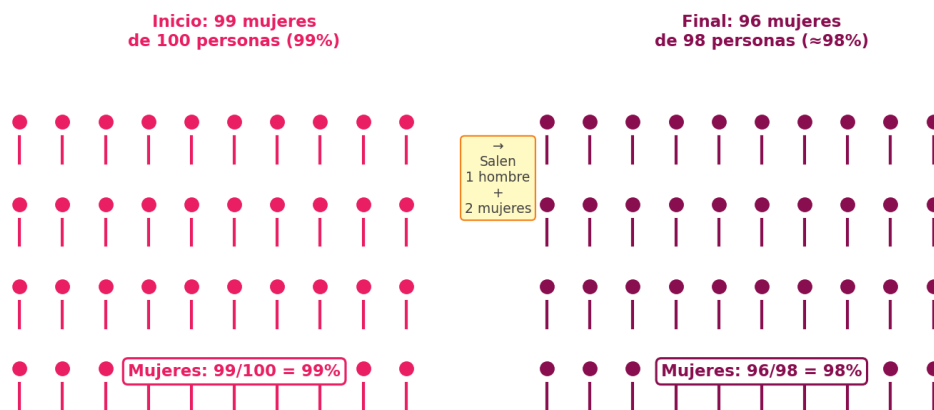
$186\,000 + 14\,000 = 200\,000$ litros ✓ (depósito lleno)

■ **RESPUESTA 5a):** La capacidad total del depósito es de 200 000 litros.

Apartado 5b — La paradoja de las mujeres

En una reunión de 100 personas el 99% son mujeres. ¿Cuántas mujeres deberán salir de la reunión para que el porcentaje de mujeres sea el 98%?

Ejercicio 5b - La paradoja de las mujeres

**Datos iniciales:**

- Total de personas: 100
- Mujeres inicialmente: 99% de 100 = 99 mujeres
- Hombres inicialmente: 1% de 100 = 1 hombre

Planteamiento:

Queremos que tras salir x mujeres, el porcentaje de mujeres sobre el total sea el 98%. Si salen x mujeres, salen solo mujeres (los hombres se quedan). Por tanto:

- Mujeres después: $99 - x$
- Total de personas después: $100 - x$

La condición que se debe cumplir:

$$(99 - x) \div (100 - x) = 98/100 = 0,98$$

Resolución paso a paso:

Paso 1. Multiplicamos en cruz (o multiplicamos ambos lados por $(100 - x)$):

$$(99 - x) = 0,98 \times (100 - x)$$

Paso 2. Desarrollamos el lado derecho:

$$99 - x = 98 - 0,98x$$

Paso 3. Agrupamos términos con x en un lado y números en el otro:

$$\begin{aligned} 99 - 98 &= x - 0,98x \\ 1 &= 0,02x \\ x &= 1 \div 0,02 \\ x &= 50 \text{ mujeres} \end{aligned}$$

Verificación:

Tras salir 50 mujeres:

- Mujeres restantes: $99 - 50 = 49$
- Total de personas restantes: $100 - 50 = 50$
- Porcentaje de mujeres: $49 \div 50 = 0,98 = 98\% \checkmark$

¿Por qué necesitan salir tantas? Esta es la famosa "paradoja de las mujeres": aunque solo se quiere reducir el porcentaje en 1 punto (de 99% a 98%), hay que sacar a 50 personas de 100. Esto ocurre porque el número de hombres (la minoría) permanece fijo en 1, y el 2% de la nueva reunión debe corresponder a ese único hombre. Por tanto, el total debe ser $1 \div 0,02 = 50$ personas.

■ **RESPUESTA 5b): Deben salir 50 mujeres de la reunión.**

Resumen de Resultados

Nº	Tema	Respuesta(s)
1	Transportista	150 km → 2 700 € Precio: 18 €/km
2	Libro – proporcionalidad compuesta	2 horas/día
3	Reparto proporcional a antigüedad	Empleado B (15 años): 375 € C (8 años): 200 €
4a	Mezcla de aceites – coste	5,20 €/litro
4b	Mezcla de aceites – venta con beneficio	7,20 €/litro
5a	Capacidad del depósito	200 000 litros
5b	Paradoja de las mujeres	50 mujeres deben salir

"La naturaleza habla el lenguaje de las matemáticas."

— Galileo Galilei —



Nº1.- Calcular la altura que podemos alcanzar con una escalera de 2,5 metros apoyada sobre la pared si la parte inferior la situamos a 1,5 metros de ésta.

(1 PUNTO)



Nº2.- Calcula el perímetro y el área de un rombo cuyas diagonales miden 24 y 10 centímetros respectivamente. Realiza un dibujo de la situación.

(2 PUNTOS)

Nº3.- Calcula el área de un hexágono regular de 4 centímetros de lado. Realiza un dibujo de la situación.

(1 PUNTO)

Nº4.- Calcula el volumen de la pirámide con base cuadrada de 10 m de lado y altura de la cara lateral 13 m

(1 PUNTO)

Nº5.- Calcula el área total y el volumen de un cilindro de 5 centímetros de radio y 10 centímetros de altura. Realiza un dibujo de la situación.

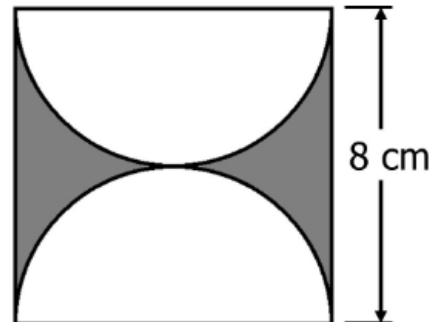
(2 PUNTOS)

Nº6.- Calcula el área total y el volumen de un cono de 3 cm de radio y altura 4 cm

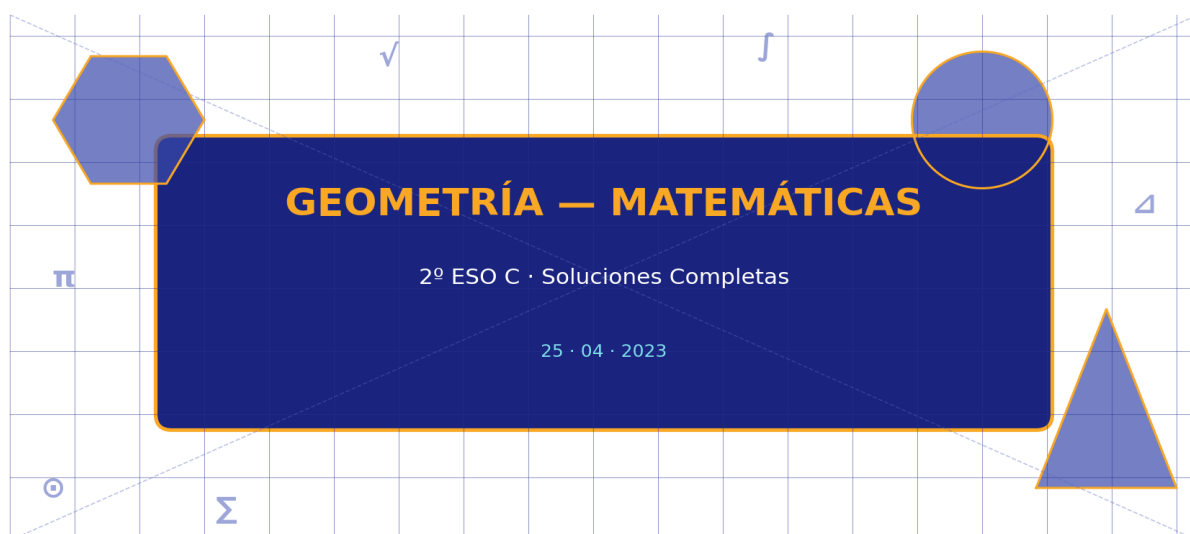
(2 PUNTOS)

Nº7.- Calcula el área del siguiente recinto sombreado,

(1 PUNTO)



SUERTE JÓVENES



GEOMETRÍA — MATEMÁTICAS

Soluciones Completas · 2º ESO C
IES Tovar · 25 de abril de 2023

"La geometría es el arte de razonar correctamente sobre figuras mal dibujadas."

— Henri Poincaré —

Asignatura	Matemáticas	Fecha	25/04/2023
Nivel	2º ESO C	Centro	IES Tovar
Contenido	Geometría	Total	10 puntos

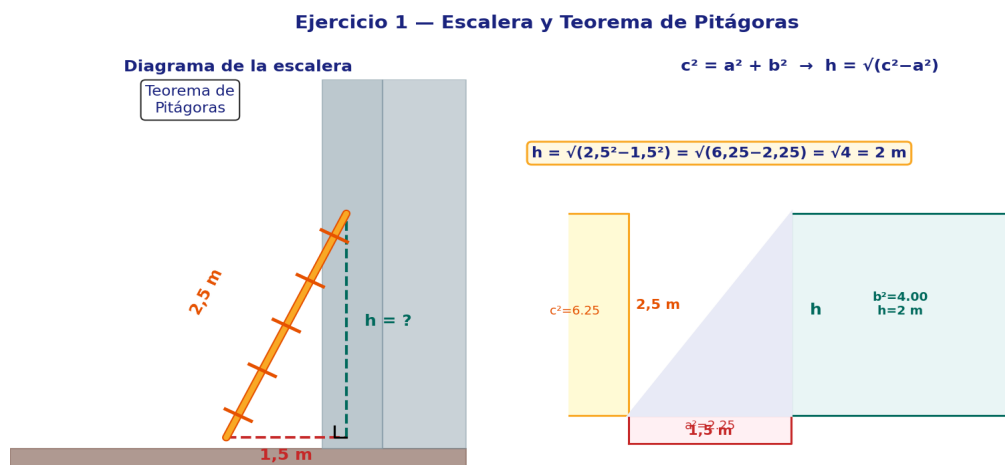
Índice de contenidos

Ejercicio 1 — Escalera — Teorema de Pitágoras	3
Ejercicio 2 — Rombo — Perímetro y Área	4
Ejercicio 3 — Hexágono Regular — Área	5
Ejercicio 4 — Pirámide de Base Cuadrada — Volumen	6
Ejercicio 5 — Cilindro — Área Total y Volumen	7
Ejercicio 6 — Cono — Área Total y Volumen	8
Ejercicio 7 — Recinto Sombreado — Área	9

Ejercicio 1 — Escalera — Teorema de Pitágoras

Enunciado (1 punto):

Calcular la altura que podemos alcanzar con una escalera de 2,5 metros apoyada sobre la pared si la parte inferior la situamos a 1,5 metros de ésta.



Identificación del triángulo rectángulo:

La escalera, la pared y el suelo forman un **triángulo rectángulo**. Identificamos los tres lados:

Elemento	Papel en el triángulo	Longitud
Escalera	Hipotenusa (c)	2,5 m
Distancia al suelo	Cateto horizontal (a)	1,5 m
Altura alcanzada	Cateto vertical (b = h)	?

Aplicación del Teorema de Pitágoras:

El teorema establece que en todo triángulo rectángulo:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Despejando la altura $b = h$:

$$b^2 = c^2 - a^2$$

Sustitución de valores:

$$b^2 = (2,5)^2 - (1,5)^2$$

$$b^2 = 6,25 - 2,25$$

$$b^2 = 4$$

$$b = \sqrt{4} = 2 \text{ m}$$

Verificación: $2,5^2 = 6,25$ | $1,5^2 + 2^2 = 2,25 + 4 = 6,25$ ✓

■ RESPUESTA: La escalera alcanza una altura de 2 metros en la pared.

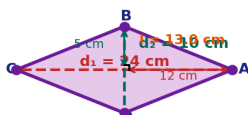
Ejercicio 2 — Rombo — Perímetro y Área

Enunciado (2 puntos):

Calcula el perímetro y el área de un rombo cuyas diagonales miden 24 y 10 centímetros respectivamente. Realiza un dibujo de la situación.

Ejercicio 2 — Rombo

Rombo con diagonales $d_1=24$ cm, $d_2=10$ cm



Fórmulas y resultados

	Fórmula	Resultado
Semidiag. $d_1/2$	$24 \div 2$	12 cm
Semidiag. $d_2/2$	$10 \div 2$	5 cm
Lado (Pitágoras)	$\sqrt{12^2 + 5^2}$	13.00 cm
Perímetro	4×13.00	52.00 cm
Área	$(d_1 \times d_2) \div 2$	120 cm ²

Propiedades del rombo a utilizar:

Un rombo tiene cuatro lados iguales. Sus diagonales se cortan perpendicularmente en su punto medio, dividiendo cada diagonal en dos partes iguales. Esto crea **cuatro triángulos rectángulos congruentes**, cuyas piernas son las semidiagonales y cuya hipotenusa es el lado del rombo.

Paso 1 — Calcular el lado del rombo (Teorema de Pitágoras):

Las semidiagonales son: $d_1/2 = 24/2 = 12$ cm y $d_2/2 = 10/2 = 5$ cm

$$l^2 = (d_1/2)^2 + (d_2/2)^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$$

$$l = \sqrt{169} = \sqrt{169} = 13.00 \text{ cm}$$

Paso 2 — Calcular el perímetro:

El perímetro de un rombo = $4 \times$ lado (ya que los 4 lados son iguales)

$$P = 4 \times l = 4 \times 13.0000 \text{ cm} = 52.0000 \text{ cm}$$

Paso 3 — Calcular el área:

El área del rombo se calcula mediante la fórmula de las diagonales:

$$A = (d_1 \times d_2) \div 2$$

$$A = (24 \times 10) \div 2 = 240 \div 2 = 120 \text{ cm}^2$$

■ **RESPUESTA:** Perímetro = 52.0000 cm · Área = 120 cm²

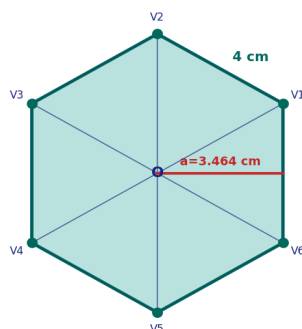
Ejercicio 3 — Hexágono Regular — Área

Enunciado (1 punto):

Calcula el área de un hexágono regular de 4 centímetros de lado. Realiza un dibujo de la situación.

Ejercicio 3 — Hexágono Regular

Hexágono regular de lado 4 cm



Descomposición y fórmulas

	Fórmula	Valor
Lado L	—	4 cm
Apotema a	$L\sqrt{3}/2$	3.4641 cm
Área triángulo	$(L \times a)/2$	6.9282 cm ²
Núm. triángulos	—	6
ÁREA hexágono	$6 \times (L \times a)/2$	41.5692 cm²
Forma directa	$(3\sqrt{3}/2) \times L^2$	41.5692 cm²

Propiedades del hexágono regular:

Un hexágono regular tiene 6 lados iguales y 6 ángulos iguales. Se puede descomponer en **6 triángulos equiláteros congruentes** con vértice en el centro. Cada triángulo tiene el mismo lado que el hexágono (4 cm).

Paso 1 — Calcular la apotema:

La apotema es la distancia del centro al punto medio de un lado. En un hexágono regular de lado L, la apotema vale:

$$a = L \times (\sqrt{3} / 2)$$

$$a = 4 \times (\sqrt{3} / 2) = 4\sqrt{3}/2 = 3.464102 \text{ cm}$$

Paso 2 — Área de un triángulo equilátero interior:

Cada uno de los 6 triángulos tiene base = L = 4 cm y altura = apotema = 3.4641 cm:

$$A_{\text{triángulo}} = (\text{base} \times \text{altura}) \div 2 = (4 \times 3.464102) \div 2 = 6.928203 \text{ cm}^2$$

Paso 3 — Área total del hexágono:

$$A_{\text{hexágono}} = 6 \times A_{\text{triángulo}} = 6 \times 6.928203 = 41.569219 \text{ cm}^2$$

Verificación con fórmula directa:

Existe una fórmula directa para el área del hexágono regular:

$$A = (3\sqrt{3} / 2) \times L^2$$

$$A = (3\sqrt{3} / 2) \times 4^2 = (3\sqrt{3} / 2) \times 16 = 41.569219 \text{ cm}^2 \checkmark$$

■ **RESPUESTA:** Área del hexágono regular de lado 4 cm = 41.5692 cm²

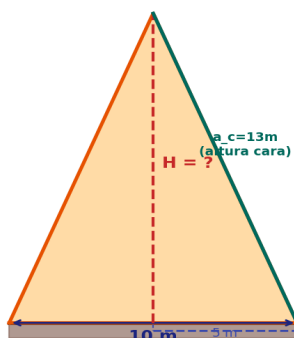
Ejercicio 4 — Pirámide de Base Cuadrada — Volumen

Enunciado (1 punto):

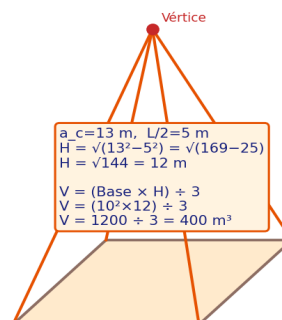
Calcula el volumen de la pirámide con base cuadrada de 10 m de lado y altura de la cara lateral de 13 m.

Ejercicio 4 — Pirámide de Base Cuadrada

Sección transversal y datos



Vista 3D esquemática y cálculos



Importante: distinguir "altura de la cara lateral" de "altura de la pirámide":

La **altura de la cara lateral** (también llamada apotema de cara o apotema lateral, a_c) es la altura del triángulo isósceles que forma cada cara lateral. NO es la altura vertical de la pirámide. Para calcular el volumen necesitamos la **altura vertical H**, que debemos obtener mediante el Teorema de Pitágoras.

Paso 1 — Calcular la altura vertical H de la pirámide:

Consideramos el triángulo rectángulo formado por: la altura vertical H (cateto vertical), la semidiagonal de la base $L/2 = 10/2 = 5.0 \text{ m}$ (cateto horizontal), y la apotema de cara $a_c = 13 \text{ m}$ (hipotenusa).

$$a_c^2 = H^2 + (L/2)^2$$

$$H^2 = a_c^2 - (L/2)^2 = 13^2 - 5.0^2 = 169 - 25 = 144$$

$$H = \sqrt{144} = 12 \text{ m}$$

Paso 2 — Calcular el área de la base:

$$A_{\text{base}} = L^2 = 10^2 = 100 \text{ m}^2$$

Paso 3 — Calcular el volumen de la pirámide:

El volumen de cualquier pirámide es:

$$V = (A_{\text{base}} \times H) \div 3$$

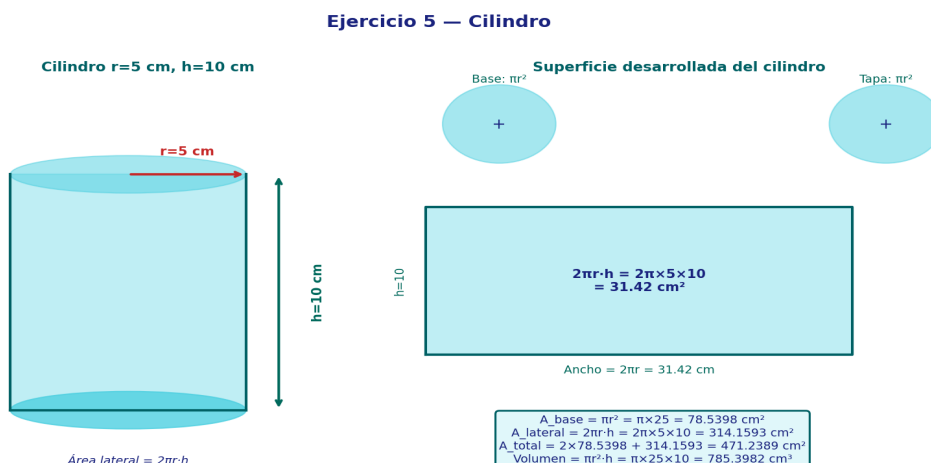
$$V = (100 \times 12) \div 3 = 1200 \div 3 = 400.00 \text{ m}^3$$

■ **RESPUESTA:** H vertical = 12 m · Volumen = 400.00 m³

Ejercicio 5 — Cilindro — Área Total y Volumen

Enunciado (2 puntos):

Calcula el área total y el volumen de un cilindro de 5 centímetros de radio y 10 centímetros de altura. Realiza un dibujo de la situación.



Descomposición de la superficie del cilindro:

La superficie total de un cilindro está formada por tres partes: **dos bases circulares** (tapa superior e inferior) y una **superficie lateral** (si la desenrollamos, forma un rectángulo).

Paso 1 — Área de cada base circular:

$$A_{\text{base}} = \pi \times r^2 = \pi \times 5^2 = \pi \times 25 = 78.539816 \text{ cm}^2$$

Paso 2 — Área de la superficie lateral:

Al desenrollar la superficie lateral obtenemos un rectángulo cuyo ancho es la circunferencia de la base ($2\pi r$) y cuyo alto es la altura del cilindro (h).

$$A_{\text{lateral}} = 2\pi \times r \times h = 2\pi \times 5 \times 10 = 100\pi = 314.159265 \text{ cm}^2$$

Paso 3 — Área total del cilindro:

$$A_{\text{total}} = 2 \times A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}}$$

$$A_{\text{total}} = 2 \times 78.5398 + 314.1593$$

$$A_{\text{total}} = 157.0796 + 314.1593 = 471.238898 \text{ cm}^2$$

Paso 4 — Volumen del cilindro:

El volumen del cilindro = área de la base $\times$ altura:

$$V = A_{\text{base}} \times h = \pi \times r^2 \times h = \pi \times 5^2 \times 10$$

$$V = 250\pi = 785.398163 \text{ cm}^3$$

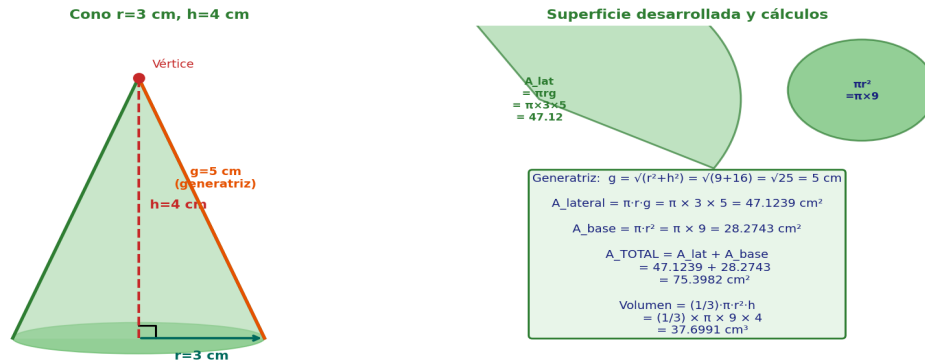
■ **RESPUESTA:** $A_{\text{total}} = 471.2389 \text{ cm}^2$ · $V = 785.3982 \text{ cm}^3$

Ejercicio 6 — Cono — Área Total y Volumen

Enunciado (2 puntos):

Calcula el área total y el volumen de un cono de 3 cm de radio y altura 4 cm.

Ejercicio 6 — Cono



Paso 1 — Calcular la generatriz del cono:

La **generatriz** (g) es la longitud de la línea que va del vértice del cono a cualquier punto de la circunferencia de la base. Forma el triángulo rectángulo con el radio y la altura:

$$g^2 = r^2 + h^2$$

$$g^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

$$g = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

Paso 2 — Área de la base circular:

$$A_{base} = \pi \times r^2 = \pi \times 3^2 = 28.274334 \text{ cm}^2$$

Paso 3 — Área lateral del cono:

La superficie lateral desplegada forma un sector circular. Su área es:

$$A_{lateral} = \pi \times r \times g$$

$$A_{lateral} = \pi \times 3 \times 5 = 15\pi = 47.123890 \text{ cm}^2$$

Paso 4 — Área total del cono:

$$A_{total} = A_{base} + A_{lateral}$$

$$A_{total} = 28.2743 + 47.1239 = 75.398224 \text{ cm}^2$$

Paso 5 — Volumen del cono:

El volumen del cono es un tercio del volumen del cilindro de misma base y altura:

$$V = (1/3) \times \pi \times r^2 \times h$$

$$V = (1/3) \times \pi \times 3^2 \times 4 = (1/3) \times \pi \times 9 \times 4$$

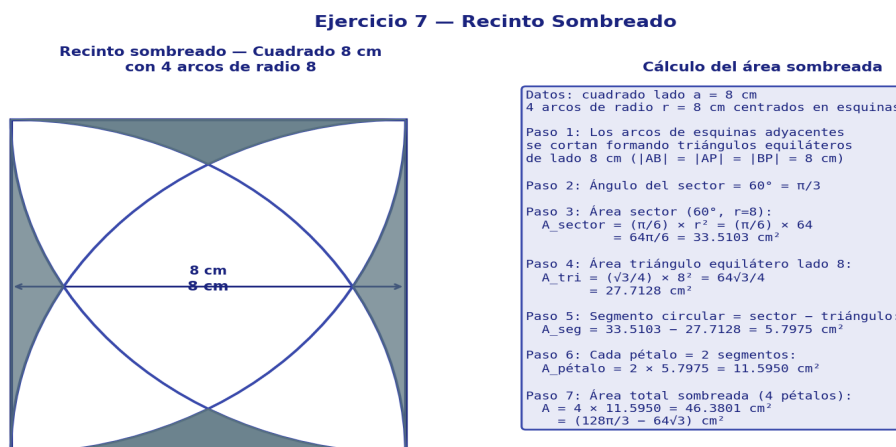
$$V = 36/3 \times \pi = 36\pi/3 = 37.699112 \text{ cm}^3$$

■ **RESPUESTA:** $g = 5$ cm · $A_{total} = 75.3982$ cm² · $V = 37.6991$ cm³

Ejercicio 7 — Recinto Sombreado — Área

Enunciado (1 punto):

Calcula el área del siguiente recinto sombreado (cuadrado de 8 cm con 4 arcos de círculo de radio 8 cm centrados en cada esquina).



Descripción de la figura:

El recinto está formado por un cuadrado de 8 cm de lado. Desde cada una de las 4 esquinas se traza un arco de circunferencia de radio $r = 8$ cm que une las dos esquinas adyacentes. Los 4 arcos crean en el interior del cuadrado 4 regiones con forma de "pétalo" simétricas. El área sombreada corresponde a estas 4 regiones.

Paso 1 — Identificar los triángulos equiláteros:

Los arcos de esquinas adyacentes se cortan en un punto P interior al cuadrado. Por ejemplo, el arco desde la esquina $A=(0,0)$ con $r=8$ y el arco desde $B=(8,0)$ con $r=8$ se cortan en el punto $P=(4, 4\sqrt{3})$.

Verificación: $|AP| = \sqrt{(4^2 + (4\sqrt{3})^2)} = \sqrt{(16+48)} = \sqrt{64} = 8 \text{ cm} = r \checkmark$

Verificación: $|BP| = \sqrt{((4-8)^2 + (4\sqrt{3})^2)} = \sqrt{(16+48)} = \sqrt{64} = 8 \text{ cm} = r \checkmark$

El triángulo ABP tiene $|AB| = |AP| = |BP| = 8 \text{ cm} \rightarrow$ es **equilátero**, con ángulo en A = 60° .

Paso 2 — Área del sector circular de 60° :

El arco desde A hasta P corresponde a un sector de $60^\circ (= \pi/3 \text{ rad})$ y radio $r = 8 \text{ cm}$:

$$A_{\text{sector}} = (\theta/2\pi) \times \pi \times r^2 = (1/6) \times \pi \times 8^2 = 64\pi/6$$

$$A_{\text{sector}} = 64\pi/6 = 33.510322 \text{ cm}^2$$

Paso 3 — Área del triángulo equilátero ABP (lado 8 cm):

$$A_{\text{triángulo}} = (\sqrt{3}/4) \times l^2 = (\sqrt{3}/4) \times 8^2 = 64\sqrt{3}/4$$

$$A_{\text{triángulo}} = 27.712813 \text{ cm}^2$$

Paso 4 — Área de un segmento circular:

Un **segmento circular** es la región comprendida entre un arco y su cuerda. Su área = área del sector - área del triángulo:

$$A_{\text{segmento}} = A_{\text{sector}} - A_{\text{triángulo}}$$

$$A_{\text{segmento}} = 33.5103 - 27.7128 = 5.797509 \text{ cm}^2$$

Paso 5 — Área de un pétalo:

Cada pétalo está formado por **dos segmentos circulares** simétricos (uno de cada arco de las esquinas adyacentes):

$$A_{\text{pétalo}} = 2 \times A_{\text{segmento}} = 2 \times 5.7975 = 11.595017 \text{ cm}^2$$

Paso 6 — Área total sombreada (4 pétalos):

$$A_{\text{sombreada}} = 4 \times A_{\text{pétalo}}$$

$$A_{\text{sombreada}} = 4 \times 11.5950 = 46.380070 \text{ cm}^2$$

$$\text{Expresión exacta: } A = 128\pi/3 - 64\sqrt{3} \approx 134.0413 - 110.8513 = 46.3801 \text{ cm}^2$$

$$\blacksquare \text{ RESPUESTA: Área sombreada} = 128\pi/3 - 64\sqrt{3} \approx 46.3801 \text{ cm}^2$$

Resumen de todos los resultados

Ej	Figura	Dato / Resultado(s)	Pts
1	Escalera (Pitágoras)	$c=2,5\text{m}$, $a=1,5\text{m} \rightarrow h=\sqrt{(6,25-2,25)}=\sqrt{4} = 2 \text{ m}$	1
2	Rombo $d_{\blacksquare}=24$, $d_{\blacksquare}=10$	Lado $l=13.00\text{cm}$ $P=52.0000\text{cm}$ $A=120\text{cm}^2$	2
3	Hexágono regular $L=4 \text{ cm}$	Apotema $a=3.4641\text{cm}$ $A=41.5692\text{cm}^2$	1
4	Pirámide cuadrada $L=10\text{m}$, $a_c=13\text{m}$	$H=12\text{m}$ (Pitágoras) $V=400.00\text{m}^3$	1
5	Cilindro $r=5$, $h=10$	$A_{\text{tot}}=471.2389\text{cm}^2$ $V=785.3982\text{cm}^3$	2
6	Cono $r=3$, $h=4$	$g=5\text{cm}$ $A_{\text{tot}}=75.3982\text{cm}^2$ $V=37.6991\text{cm}^3$	2
7	Recinto sombreado Cuadrado 8cm	$A=128\pi/3-64\sqrt{3} \approx 46.3801\text{cm}^2$	1
	TOTAL		10

"No me preguntes por qué funciona; pregúntame qué pasa cuando lo aplicas."

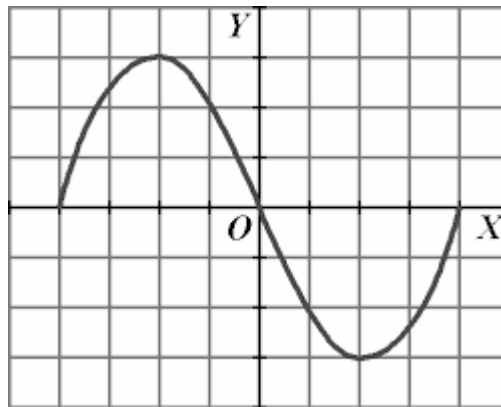
— Henri Poincaré —

Nº1.- Representa en un eje de coordenadas los siguientes puntos:

A(1,3), B(2,-3) C(-2,-2) D(-3,2)

(1 PUNTO)

Nº2.- Estudia el dominio, continuidad, crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos de la siguiente función.



(2 PUNTOS)

Nº3.- Determina la ecuación de cada función lineal que se describe a continuación.

- a) La gráfica pasa por el origen de coordenadas y por el punto A(-3, - 3).
- b) La pendiente es $m = 1$ y pasa por el punto B(1, 1).
- c) La ordenada en el origen es $n = 1$ y pasa por el punto B(1, 2).

(1,5 PUNTOS)

Nº4.- Representa las siguientes funciones, calcula los puntos de corte con los ejes de coordenadas:

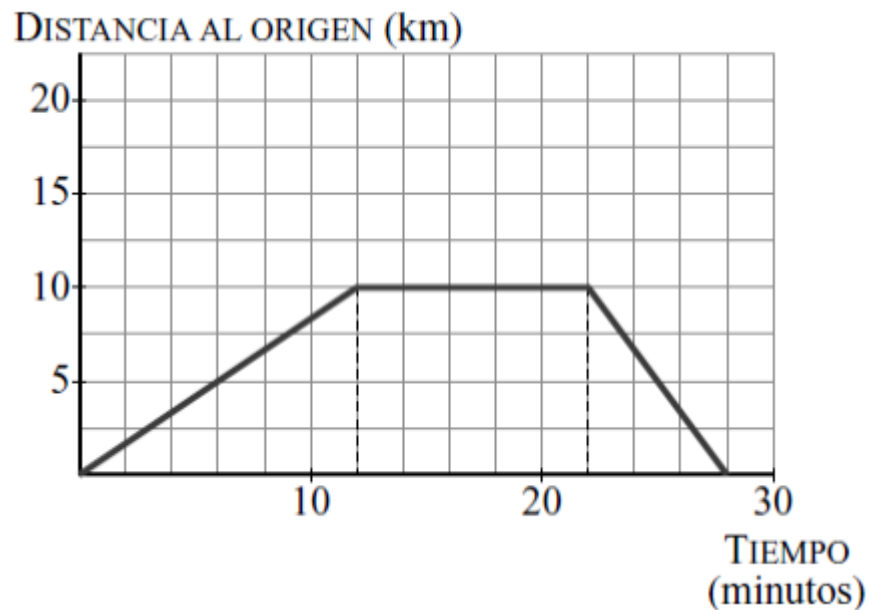
a) $y = 2x + 4$ b) $y = -3x+6$

(1 PUNTO)

Nº5.- Un motorista sale de cierta pequeña población y viaja por carretera, a velocidad más o menos constante, hasta la población vecina. Allí se detiene para hacer una gestión y después regresa por el mismo camino, también a velocidad constante. El viaje queda reflejado en esta gráfica, que relaciona la distancia en cada instante al punto de partida con el tiempo transcurrido.

- a) Observa la gráfica y responde:
 - ¿Cuánto duró el viaje de ida?
 - ¿Cuánto tiempo estuvo parado?
 - ¿Cuánto duró el viaje de vuelta?
 - ¿Qué distancia recorrió en total el motorista?

- b) Calcula la velocidad media del viaje de ida y la velocidad media del viaje de vuelta.



(1,5 PUNTOS)

Nº6.- Las notas de matemáticas de los alumnos de 2º C de la ESO han sido las siguientes:

NOTAS	FRECUENCIA ABSOLUTA
1	3
2	4
3	7
4	10
5	7
6	5
7	5
8	4
9	3
10	2

- Termina de completar la tabla de frecuencias.
- Calcula los parámetros estadísticos.
- Representa el diagrama de barras
- Representa el diagrama de caja

(3 PUNTOS)

SUERTE JÓVENES



FUNCIONES Y ESTADÍSTICA

Soluciones Completas · 2º ESO C
IES Tovar · 6 de junio de 2023

"Las matemáticas son la música de la razón."

- James Joseph Sylvester -

Asignatura	Matemáticas - Funciones y Estadística	Fecha	06/06/2023
Nivel	2º ESO C	Centro	IES Tovar
Ejercicios	6 ejercicios	Puntuación total	10 puntos

Índice de contenidos

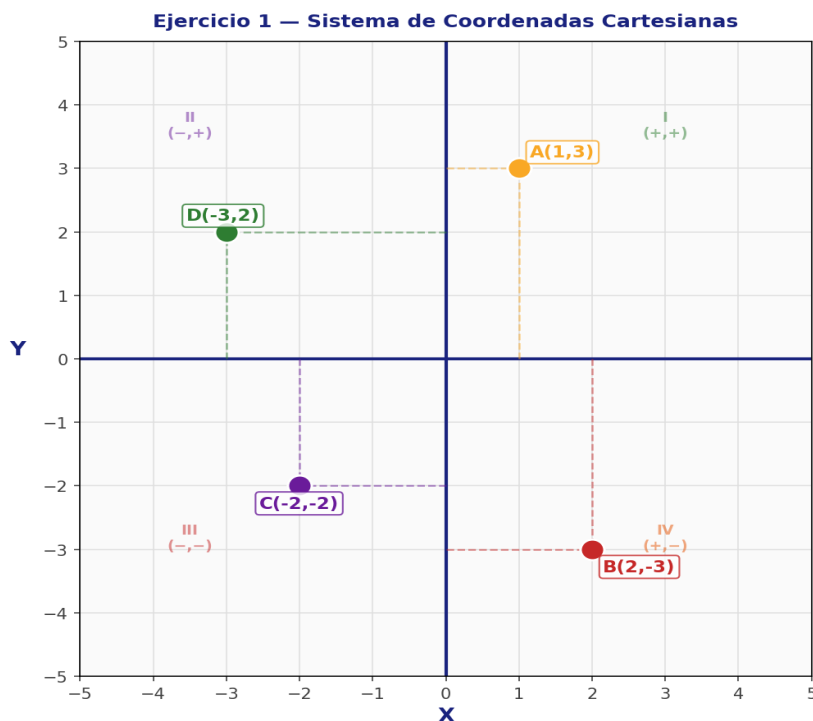
Ejercicio 1 - Sistema de Coordenadas Cartesianas	3
Ejercicio 2 - Análisis completo de una función	4
Ejercicio 3 - Ecuaciones de Funciones Lineales	6
Ejercicio 4 - Representación y Puntos de Corte	8
Ejercicio 5 - El Motorista - Gráfica distancia-tiempo	9
Ejercicio 6 - Estadística - Notas de Matemáticas 2ºC	11

Ejercicio 1 - Sistema de Coordenadas Cartesianas

Enunciado (1 punto):

Representa en un eje de coordenadas los siguientes puntos:

$A(1, 3)$ · $B(2, -3)$ · $C(-2, -2)$ · $D(-3, 2)$



Método de representación de puntos:

Para representar un punto $P(x, y)$ en el plano cartesiano, el primer número indica la posición horizontal (abscisa, eje X) y el segundo indica la posición vertical (ordenada, eje Y). El signo determina la dirección: positivo a la derecha/arriba, negativo a la izquierda/abajo.

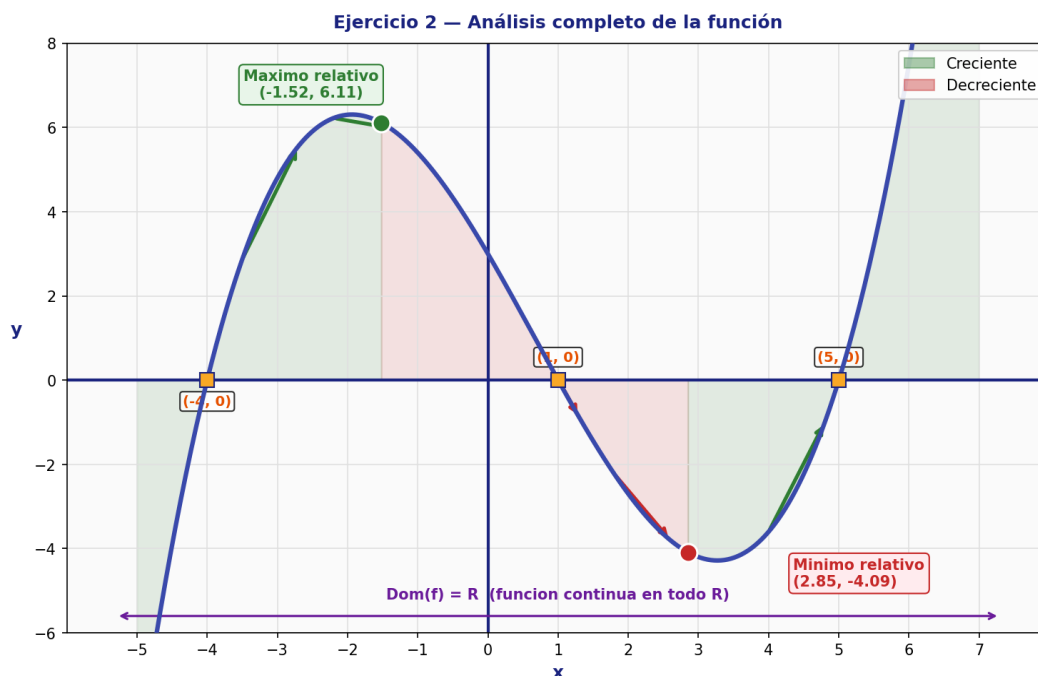
Punto	Abscisa (x)	Ordenada (y)	Cuadrante	Descripción
$A(1, 3)$	1 (+)	3 (+)	I (++)	Derecha, arriba
$B(2, -3)$	2 (+)	-3 (-)	IV (+-)	Derecha, abajo
$C(-2, -2)$	-2 (-)	-2 (-)	III (--)	Izquierda, abajo
$D(-3, 2)$	-3 (-)	2 (+)	II (-+)	Izquierda, arriba

RESULTADO RESPUESTA: Los 4 puntos quedan ubicados en los cuatro cuadrantes distintos del plano cartesiano.

Ejercicio 2 - Análisis completo de una función

Enunciado (2 puntos):

Estudia el dominio, continuidad, crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos de la función representada gráficamente en el examen.



1. DOMINIO:

El **dominio** de una función es el conjunto de todos los valores de x para los que la función está definida. Observando la gráfica, la función está definida para todos los valores reales de x visibles, sin interrupciones.

Dom(f) = $\mathbb{R}$ (todos los números reales)

2. CONTINUIDAD:

Una función es **continua** en un punto si se puede trazar su gráfica sin levantar el lápiz del papel. Observando la gráfica, la función no presenta saltos, roturas ni puntos aislados.

La función es CONTINUA en todo su dominio $\mathbb{R}$.

3. CRECIMIENTO y DECRECIMIENTO:

Una función es **creciente** en un intervalo si al aumentar x , también aumenta y . Es **decreciente** si al aumentar x , disminuye y . Leyendo la gráfica del examen:

Creciente en $(-\infty, -1.5)$ y $(2.9, +\infty)$

Decreciente en $(-1.5, 2.9)$

4. MÁXIMOS Y MÍNIMOS:

Un **máximo relativo** es un punto donde la función deja de crecer y empieza a decrecer. Un **mínimo relativo** es donde deja de decrecer y empieza a crecer.

Tipo	Punto x	Valor y	Descripción
Máximo relativo	$x \approx -1.5$	$y \approx 6.1$	La función alcanza su valor más alto local

Mínimo relativo	$x \approx 2.9$	$y \approx -4.1$	La función alcanza su valor más bajo local

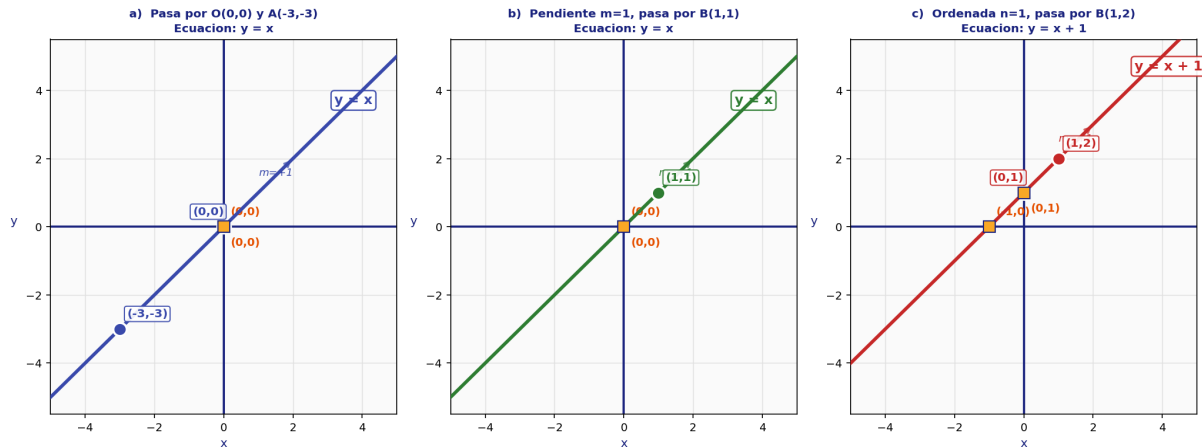
RESULTADO RESUMEN: Dom = $\mathbb{R}$ · Continua en $\mathbb{R}$ · Crec: $(-\infty, -1.5) \cup (2.9, +\infty)$ ·
Decrec: $(-1.5, 2.9)$ · Máx relativo $\approx (-1.5, 6.1)$ · Mín relativo $\approx (2.9, -4.1)$

Ejercicio 3 - Ecuaciones de Funciones Lineales

Enunciado (1,5 puntos):

Determina la ecuación de cada función lineal que se describe a continuación. La forma general de una función lineal es $y = mx + n$, donde m es la pendiente (inclinación de la recta) y n es la ordenada en el origen (punto de corte con el eje Y).

Ejercicio 3 — Funciones Lineales y Afines



Apartado a) - Pasa por el origen O(0,0) y por A(-3, -3):

Como la gráfica pasa por el **origen de coordenadas**, sabemos que $n = 0$, es decir, la ordenada en el origen es cero. La función es de la forma $y = mx$.

Calculamos la pendiente usando los dos puntos conocidos O(0,0) y A(-3,-3):

$$m = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1) = (-3 - 0) / (-3 - 0) = -3 / -3 = 1$$

$$\text{Por tanto: } y = 1 \cdot x + 0 \rightarrow y = x$$

Verificación: A(-3,-3): $y = -3$ ✓ | O(0,0): $y = 0$ ✓

Apartado b) - Pendiente $m = 1$ y pasa por B(1, 1):

Conocemos la pendiente $m = 1$. Para hallar n usamos el punto B(1, 1) y la ecuación $y = mx + n$:

$$y = mx + n \rightarrow \text{sustituimos B(1,1) y } m=1:$$

$$1 = 1 \cdot 1 + n \rightarrow 1 = 1 + n \rightarrow n = 1 - 1 = 0$$

$$\text{Por tanto: } y = 1 \cdot x + 0 \rightarrow y = x$$

Verificación: B(1,1): $y = 1 \cdot 1 + 0 = 1$ ✓

Apartado c) - Ordenada en el origen $n = 1$ y pasa por B(1, 2):

Conocemos $n = 1$. Para hallar la pendiente m usamos el punto B(1, 2):

$$y = mx + n \rightarrow \text{sustituimos B(1,2) y } n=1:$$

$$2 = m \cdot 1 + 1 \rightarrow 2 = m + 1 \rightarrow m = 2 - 1 = 1$$

$$\text{Por tanto: } y = 1 \cdot x + 1 \rightarrow y = x + 1$$

Verificación: B(1,2): $y = 1 \cdot 1 + 1 = 2$ ✓ | Corte con Y: (0, 1) ✓

Apartado	Condición dada	Cálculo pendiente m	Cálculo ordenada n	Ecuación final
a)	Pasa por O(0,0) y A(-3,-3)	$m=(-3-0)/(-3-0)=1$	Pasa por O $\rightarrow n=0$	$y = x$
b)	Pendiente $m=1$, pasa por B(1,1)	$m = 1$ (dato)	$1=1 \cdot 1+n \rightarrow n=0$	$y = x$

c)

n=1, pasa por B(1,2)

$$2 = m \cdot 1 + 1 \rightarrow m = 1$$

n = 1 (dato)

$$y = x + 1$$

RESULTADO RESPUESTAS: a) $y = x$ · b) $y = x$ · c) $y = x + 1$

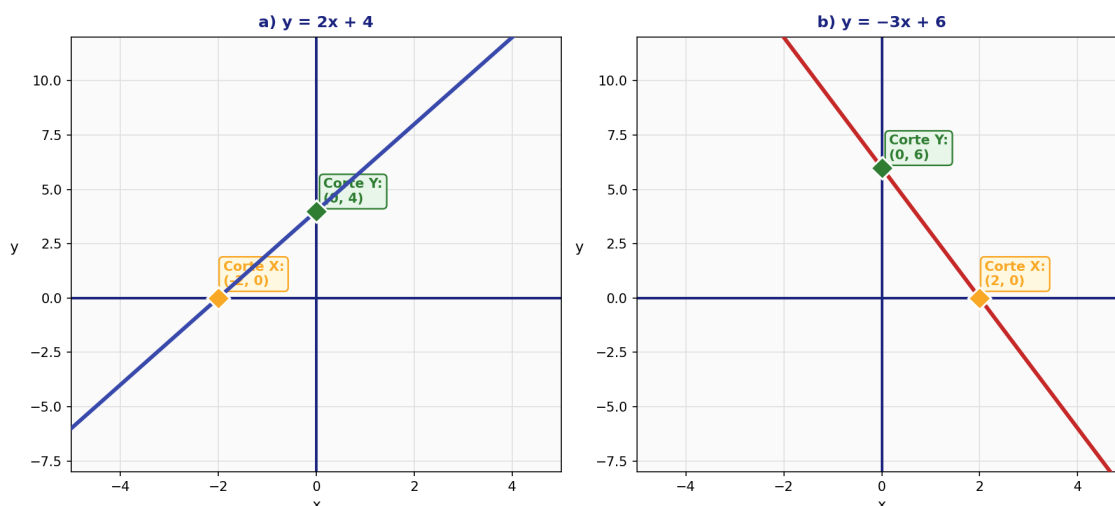
Ejercicio 4 - Representación y Puntos de Corte

Enunciado (1 punto):

Representa las siguientes funciones y calcula los puntos de corte con los ejes de coordenadas:

a) $y = 2x + 4$ b) $y = -3x + 6$

Ejercicio 4 — Representación y puntos de corte



Método para calcular puntos de corte:

- **Corte con el eje Y** (eje de ordenadas): se hace $x = 0$ y se calcula y . El punto obtenido es $(0, n)$.
- **Corte con el eje X** (eje de abscisas): se hace $y = 0$ y se despeja x . El punto obtenido es $(-n/m, 0)$.

Apartado a) $y = 2x + 4$

$m = 2$ (pendiente positiva: recta ascendente) | $n = 4$

Corte con eje Y ($x=0$): $y = 2 \cdot 0 + 4 = 4 \rightarrow$ Punto $(0, 4)$

Corte con eje X ($y=0$): $0 = 2x + 4 \rightarrow 2x = -4 \rightarrow x = -2 \rightarrow$ Punto $(-2, 0)$

Apartado b) $y = -3x + 6$

$m = -3$ (pendiente negativa: recta descendente) | $n = 6$

Corte con eje Y ($x=0$): $y = -3 \cdot 0 + 6 = 6 \rightarrow$ Punto $(0, 6)$

Corte con eje X ($y=0$): $0 = -3x + 6 \rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = 2 \rightarrow$ Punto $(2, 0)$

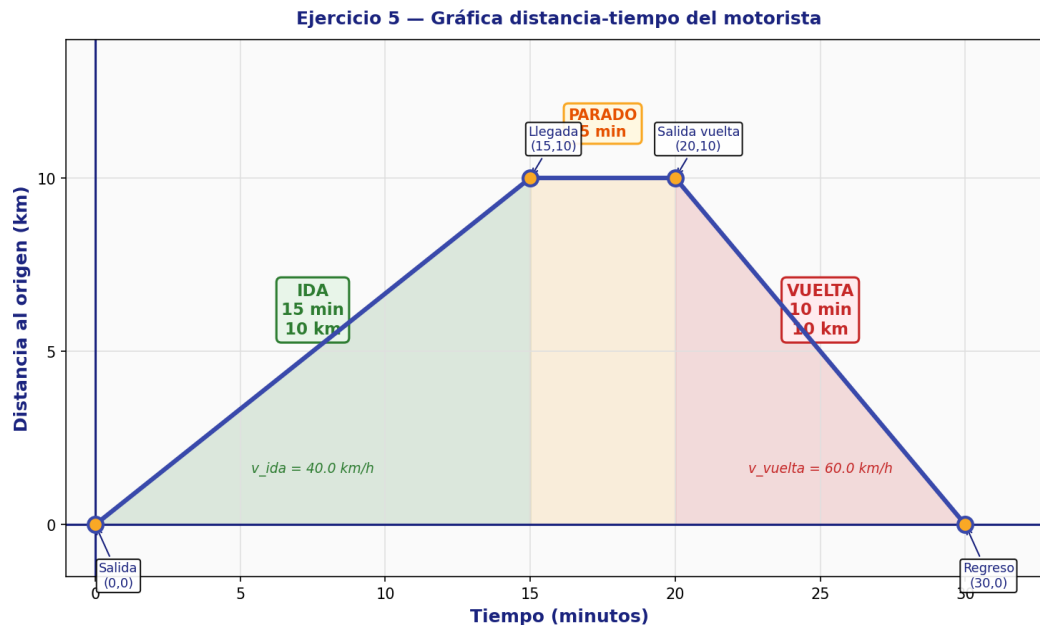
Función	Pendiente m	Ord. origen n	Corte eje Y	Corte eje X
$y = 2x + 4$	2 (ascendente)	4	$(0, 4)$	$(-2, 0)$
$y = -3x + 6$	-3 (descendente)	6	$(0, 6)$	$(2, 0)$

RESULTADO RESPUESTAS: a) Cortes: $(0, 4)$ y $(-2, 0)$ · b) Cortes: $(0, 6)$ y $(2, 0)$

Ejercicio 5 - El Motorista - Gráfica distancia-tiempo

Enunciado (1,5 puntos):

Un motorista sale de cierta pequeña población y viaja por carretera a velocidad constante hasta la población vecina. Allí se detiene para hacer una gestión y después regresa por el mismo camino a velocidad constante.



Apartado a) - Lectura de la gráfica:

Leyendo los valores de la gráfica distancia-tiempo proporcionada en el examen:

Tramo 1 - Viaje de ida:

La línea sube de 0 km ($t=0$ min) hasta 10 km ($t=15$ min). La distancia aumenta linealmente $\rightarrow$ el motorista está en movimiento.

$$\text{Duración del viaje de ida} = 15 - 0 = 15 \text{ minutos}$$

Tramo 2 - Tiempo parado:

La línea es horizontal a 10 km entre $t=15$ min y $t=20$ min. La distancia no cambia $\rightarrow$ el motorista está detenido.

$$\text{Tiempo parado} = 20 - 15 = 5 \text{ minutos}$$

Tramo 3 - Viaje de vuelta:

La línea desciende de 10 km ($t=20$ min) hasta 0 km ($t=30$ min). La distancia disminuye $\rightarrow$ el motorista está regresando.

$$\text{Duración del viaje de vuelta} = 30 - 20 = 10 \text{ minutos}$$

Distancia total recorrida:

El motorista fue hasta 10 km y regresó los mismos 10 km:

$$\text{Distancia total} = \text{distancia de ida} + \text{distancia de vuelta} = 10 \text{ km} + 10 \text{ km} = 20 \text{ km}$$

Apartado b) - Velocidades medias:

La velocidad media se calcula dividiendo la distancia recorrida entre el tiempo empleado. Como el tiempo está en minutos, convertimos a horas (dividiendo entre 60):

Velocidad media en el viaje de ida:

Distancia ida = 10 km | Tiempo ida = 15 min = 15/60 h = 0,25 h

$$v_{\text{ida}} = \text{Distancia} \div \text{Tiempo} = 10 \text{ km} \div (15/60 \text{ h}) = 10 \times (60/15) = 10 \times 4 = 40 \text{ km/h}$$

Velocidad media en el viaje de vuelta:

Distancia vuelta = 10 km | Tiempo vuelta = 10 min = 10/60 h = 1/6 h

$$v_{\text{vuelta}} = \text{Distancia} \div \text{Tiempo} = 10 \text{ km} \div (10/60 \text{ h}) = 10 \times (60/10) = 10 \times 6 = 60 \text{ km/h}$$

Tramo	Tiempo inicio	Tiempo fin	Duración	Distancia	Velocidad media
Viaje de ida	0 min	15 min	15 min	10 km	40 km/h
Parado	15 min	20 min	5 min	0 km	0 km/h
Viaje de vuelta	20 min	30 min	10 min	10 km	60 km/h
TOTAL	0 min	30 min	30 min	20 km	-

RESULTADO RESPUESTAS: Ida=15 min · Parado=5 min · Vuelta=10 min · Total=20 km · v ida=40 km/h · v vuelta=60 km/h

Ejercicio 6 - Estadística - Notas de Matemáticas 2ºC**Enunciado (3 puntos):**

Las notas de matemáticas de los alumnos de 2º C de la ESO han sido las siguientes. Se pide: a) completar la tabla de frecuencias, b) calcular los parámetros estadísticos, c) representar el diagrama de barras, d) representar el diagrama de caja.

Apartado a) - Tabla de frecuencias completa:

La tabla de frecuencias recopila para cada valor de la variable estadística (nota) los siguientes valores:

- f_i : Frecuencia absoluta (número de alumnos con esa nota).
- h_i : Frecuencia relativa = f_i / N (proporción sobre el total).
- $h_i\%$: Frecuencia relativa en porcentaje = $h_i \times 100$.
- F_i : Frecuencia absoluta acumulada (suma de todas las f_i hasta esa nota).
- H_i : Frecuencia relativa acumulada (suma de todas las h_i hasta esa nota).

Nota (x_i)	f_i (abs)	h_i (rel)	$h_i\%$	F_i (acum)	H_i (acum%)	$x_i \cdot f_i$	$(x_i - x_{media})^2 \cdot f_i$
1	3	0.0600	6.00%	3	6.00%	3	48.4812
2	4	0.0800	8.00%	7	14.00%	8	36.4816
3	7	0.1400	14.00%	14	28.00%	21	28.5628
4	10	0.2000	20.00%	24	48.00%	40	10.4040
5	7	0.1400	14.00%	31	62.00%	35	0.0028
6	5	0.1000	10.00%	36	72.00%	30	4.8020
7	5	0.1000	10.00%	41	82.00%	35	19.6020
8	4	0.0800	8.00%	45	90.00%	32	35.5216
9	3	0.0600	6.00%	48	96.00%	27	47.5212
10	2	0.0400	4.00%	50	100.00%	20	49.6008
TOTAL	50	1.0000	100.00%	50	100.00%	251	280.9800

$N = 50$ alumnos en total en la clase de 2º C.

Apartado b) - Parámetros estadísticos:**b.1) Media aritmética (x_{media}):**

La media aritmética es el valor central de la distribución. Se calcula sumando todos los productos $\text{nota} \times \text{frecuencia}$ y dividiendo entre N :

$$x_{media} = (\sum_i x_i \cdot f_i) / N = (1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 7 + 4 \times 10 + 5 \times 7 + 6 \times 5 + 7 \times 5 + 8 \times 4 + 9 \times 3 + 10 \times 2) / 50$$

$$x_{media} = 251 / 50 = 5.0200$$

b.2) Mediana (Me):

La mediana es el valor central cuando los datos están ordenados. Con $N=50$ datos (número par), la mediana es la media de los dos valores centrales (posiciones 25 y 26).

Posición central baja: dato 25º -> valor 5
Posición central alta: dato 26º -> valor 5

$$\text{Mediana} = (5 + 5) / 2 = 5.0$$

b.3) Moda (Mo):

La moda es el valor que aparece con mayor frecuencia absoluta.

$$\text{Frecuencia máxima} = 10 \text{ (nota 4)} \rightarrow \text{Mo} = 4$$

b.4) Varianza (s^2) y Desviación típica (s):

La varianza mide la dispersión de los datos respecto a la media. La desviación típica es su raíz cuadrada.

$$\text{Varianza } s^2 = [\sum_i f_i \cdot (x_i - x_{\text{media}})^2] / N$$

$$\text{Varianza } s^2 = 280.9800 / 50 = 5.6196$$

$$s \text{ (desv.tip.)} = \sqrt{5.6196} = 2.3706$$

b.5) Recorrido (Rango):

El recorrido es la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo:

$$\text{Recorrido} = \text{Valor}_{\text{max}} - \text{Valor}_{\text{min}} = 10 - 1 = 9$$

b.6) Cuartiles Q_1 , Q_2 y Q_3 :

Los cuartiles dividen la distribución ordenada en cuatro partes iguales:

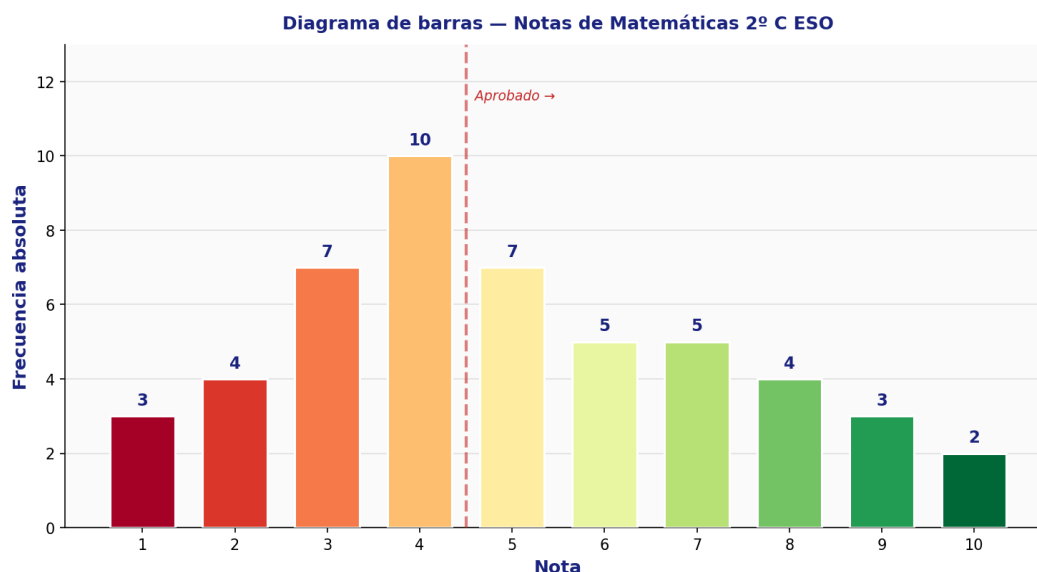
$$Q1 = \text{percentil } 25 = 3.0 \cdot Q2 = \text{mediana} = 5.0 \cdot Q3 = \text{percentil } 75 = 7.0$$

$$\text{Rango intercuartílico (IQR)} = Q3 - Q1 = 7.0 - 3.0 = 4.0$$

Parámetro	Valor	Significado
Media (x_{media})	5.0200	Nota promedio de la clase
Mediana (Me)	5.0	El 50% de alumnos tiene nota ≤ 5
Moda (Mo)	4	Nota más frecuente (10 alumnos)
Varianza (s^2)	5.6196	Dispersión respecto a la media
Desv. típica s	2.3706	Dispersión media en unidades de nota
Recorrido	9	Diferencia entre nota máxima y mínima
Q1	3.0	25% de alumnos tiene nota $\leq Q1$
Q2 (mediana)	5.0	50% de alumnos tiene nota $\leq Q2$
Q3	7.0	75% de alumnos tiene nota $\leq Q3$
IQR	4.0	$Q3 - Q1$: dispersión del 50% central
Mínimo	1	Nota más baja observada
Máximo	10	Nota más alta observada

Apartado c) - Diagrama de barras:

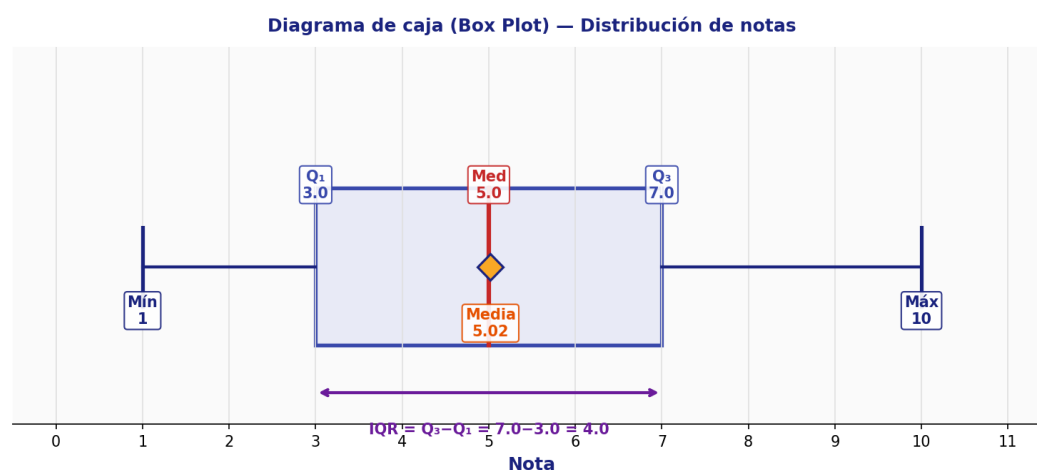
El diagrama de barras representa en el eje horizontal (X) los valores de la variable (notas del 1 al 10) y en el eje vertical (Y) la frecuencia absoluta (número de alumnos). Cada barra tiene altura proporcional a la frecuencia de esa nota.



Observaciones del diagrama: La nota más frecuente es el **4** (moda = 10 alumnos). La distribución tiene forma aproximadamente de campana asimétrica hacia la izquierda. El número total de alumnos es $N = 50$.

Apartado d) - Diagrama de caja (Box Plot):

El diagrama de caja o "box plot" representa la distribución de los datos usando cinco valores resumen: el mínimo, el primer cuartil Q1, la mediana Q2, el tercer cuartil Q3 y el máximo. La caja central contiene el 50% de los datos (entre Q1 y Q3). Los "bigotes" se extienden hasta los valores extremos no atípicos.

**Interpretación del diagrama de caja:**

- El **bigote izquierdo** va del mínimo (1) hasta Q1 (3.0): contiene el 25% inferior de los datos.
- La **caja** va de Q1 (3.0) hasta Q3 (7.0): contiene el 50% central ($IQR = 4.0$ puntos).
- La **línea roja** en $Q_2 = 5.0$ es la mediana: el 50% de los alumnos tienen nota ≤ 5 .
- El **rombo dorado** es la media = 5.02.
- El **bigote derecho** va de Q3 (7.0) hasta el máximo (10): contiene el 25% superior.

RESULTADO PARÁMETROS: $\bar{x}$ _media=5.0200 · Me=5.0 · Mo=4 · s^2 =5.6196 ·
s=2.3706 · Q1=3.0 · Q2=5.0 · Q3=7.0 · IOR=4.0

Resumen de todos los resultados

Ej	Tema	Resultado(s) principales	Pts
1	Coordenadas	A(1,3)->Cuad.I · B(2,-3)->Cuad.IV · C(-2,-2)->Cuad.III · D(-3,2)->Cuad.II	1
2	Análisis función	Dom=R · Continua · Crec: $(-\infty, -1.5) \cup (2.9, +\infty)$ · Decrec: $(-1.5, 2.9)$	2
3	Func. lineales	a) $y=x$ · b) $y=x$ · c) $y=x+1$	1,5
4	Repr. y cortes	$y=2x+4$: (0,4) y (-2,0) · $y=-3x+6$: (0,6) y (2,0)	1
5	Motorista	Ida=15min · Parado=5min · Vuelta=10min · Total=20km · $v_{ida}=40\text{km/h}$ · $v_{vta}=60\text{km/h}$	3
6	Estadística	$x_{media}=5.02$ · Me=5.0 · Mo=4 · s=2.3706 · IQR=4.0	3
TOTAL			10

"Los números gobiernan el mundo."

- Platón -

Nº1.- Calcula: a) mín.c.m. (30, 60, 90) b) máx.c.d. (8, 16, 24)

Nº2.- Resuelve escribiendo el proceso paso a paso:

a) $(-7) \cdot [(+3) + (+4) - (2 + 5 - 1)]$ b) $(-7) \cdot (+1) - [(-5) + (-2) - (-3)] \cdot (-2)$

Nº3.- Realiza las siguientes operaciones:

a) $11,29 + 8,085 - 9,119$ b) $2,141 + 98,34 - 26,055$ c) $3,25 \times 0,21$ d) $23 : 0,25$

Nº4.- Resuelve las siguientes operaciones:

a) $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{6} + \frac{5}{9}$ b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6}$ c) $\frac{5}{6} : \frac{3}{4}$ d) $\frac{3}{5} \cdot \left[\frac{4}{5} - 3 \cdot \left(2 - \frac{4}{5} \right) \right]$

Nº5.- Calcula y simplifica las expresiones:

a) 3^4 b) $(-4)^{-2}$ c) $\frac{(a^3)^2}{a^4}$

Nº6.- Realiza las siguientes operaciones con polinomios:

a) $(2x^2 + 9x + 12) + (-3x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 10)$
b) $(x + 3) \cdot (3x^3 + 4x^2 - 2x - 6)$

Nº7.- Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado:

a) $x + 3 = -5$ b) $-2(-15 - 2x) + 4x = 3x - 5x + 3x$ c) $\frac{3x}{5} + 7 = 2x$

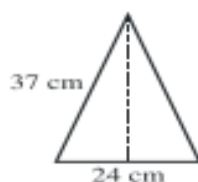
Nº8.- Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$ b) $x^2 - 3x = 0$ c) $x^2 - 16 = 0$

Nº9.- Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 9 \\ 2x + 7y = 17 \end{cases}$$

Nº10.- Calcula el área del siguiente triángulo:



MATEMÁTICAS

Examen Final - Junio

2º Curso de Educación Secundaria Obligatoria

*”Las matemáticas son el alfabeto con
el cual Dios ha escrito el universo.”*

— Galileo Galilei

Instrucciones: Lee atentamente los problemas. Muestra todos los pasos necesarios para obtener la solución final.

Nombre y Apellidos: _____

Índice

1. Cálculo de m.c.m. y m.c.d.	1
1.1. Apartado a) m.c.m. (30, 60, 90)	1
1.2. Apartado b) m.c.d. (8, 16, 24)	1
2. Operaciones con números enteros	2
2.1. Apartado a)	2
2.2. Apartado b)	3
3. Operaciones con números decimales	3
3.1. Apartado a) $11,29 + 8,085 - 9,119$	3
3.2. Apartado b) $2,141 + 98,34 - 26,055$	3
3.3. Apartado c) $3,25 \times 0,21$	4
3.4. Apartado d) $23 : 0,25$	4
4. Operaciones con fracciones	4
4.1. Apartado a)	4
4.2. Apartado b)	5
4.3. Apartado c)	5
4.4. Apartado d)	6
5. Potencias y expresiones algebraicas	6
5.1. Apartado a) 3^4	6
5.2. Apartado b) $(-4)^{-2}$	6
5.3. Apartado c) $\frac{(a^3)^2}{a^4}$	7
6. Operaciones con polinomios	7
6.1. Apartado a) Suma	7
6.2. Apartado b) Multiplicación	7
7. Ecuaciones de primer grado	8
7.1. Apartado a)	8
7.2. Apartado b)	8
7.3. Apartado c)	8
8. Ecuaciones de segundo grado	9
8.1. Apartado a) $x^2 - 7x + 12 = 0$	9
8.2. Apartado b) $x^2 - 3x = 0$	10
8.3. Apartado c) $x^2 - 16 = 0$	11
9. Sistemas de ecuaciones	11
10. Geometría: Área del triángulo	12

1. Cálculo de m.c.m. y m.c.d.

Enunciado: Calcula:

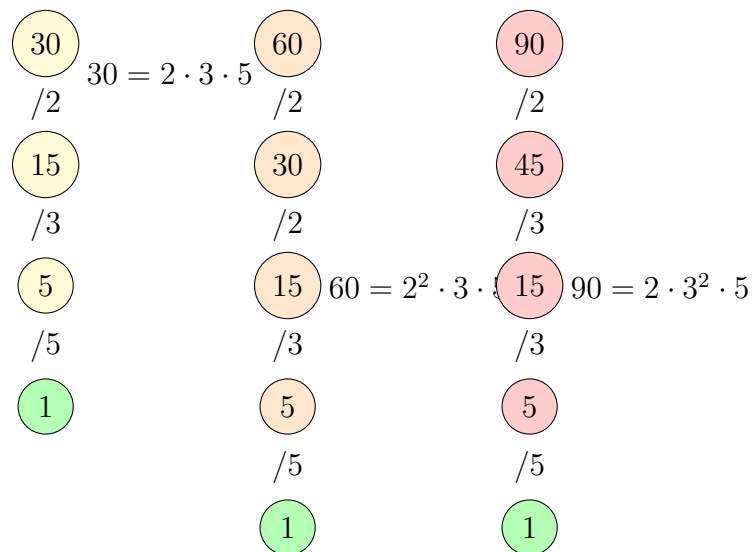
a) m.c.m. (30, 60, 90)

b) m.c.d. (8, 16, 24)

Resolución:

1.1. Apartado a) m.c.m. (30, 60, 90)

Para hallar el mínimo común múltiplo, descomponemos los números en factores primos.



El m.c.m. es el producto de los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

$$\begin{aligned}\text{m.c.m.} &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ &= 4 \cdot 9 \cdot 5 \\ &= 36 \cdot 5 \\ &= 180\end{aligned}$$

1.2. Apartado b) m.c.d. (8, 16, 24)

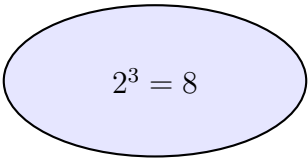
Descomponemos en factores primos:

$$\begin{aligned}8 &= 2^3 \\ 16 &= 2^4 \\ 24 &= 2^3 \cdot 3\end{aligned}$$

El m.c.d. es el producto de los factores comunes elevados al menor exponente. El único factor común es 2. El menor exponente es 3 (presente en 8 y 24).

$$\begin{aligned}\text{m.c.d.} &= 2^3 \\ &= 8\end{aligned}$$

Intersección (M.C.D.)


$$2^3 = 8$$

Factor común a 8, 16 y 24

2. Operaciones con números enteros

Enunciado: Resuelve escribiendo el proceso paso a paso:

$$(+4) - (2 + 5 - 1)$$

$$-5) + (-2) - (-3) \cdot (-2)$$

Resolución:

2.1. Apartado a)

Operación: $(-7) \cdot [(+3) + (+4) - (2 + 5 - 1)]$

Paso 1: Resolver el paréntesis más interno $(2 + 5 - 1)$.

$$2 + 5 = 7$$

$$7 - 1 = 6$$

La expresión queda: $(-7) \cdot [(+3) + (+4) - 6]$

Paso 2: Resolver los corchetes $[(+3) + (+4) - 6]$.

$$(+3) + (+4) = 7$$

$$7 - 6 = 1$$

La expresión queda: $(-7) \cdot 1$

Paso 3: Realizar la multiplicación.

$$(-7) \cdot 1 = -7$$

$$(-7) \cdot [(+3) + (+4) - (2 + 5 - 1)]$$

$$(-7) \cdot [(+3) + (+4) - 6]$$

$$(-7) \cdot [1]$$

$$-7$$

2.2. Apartado b)

Operación: $(-7) \cdot (+1) - [(-5) + (-2) - (-3)] \cdot (-2)$

Paso 1: Resolver el corchete $[(-5) + (-2) - (-3)]$. Primero sumamos los negativos: $(-5) + (-2) = -7$. Luego restamos el negativo (que es sumar): $-7 - (-3) = -7 + 3 = -4$. La expresión queda: $(-7) \cdot (+1) - (-4) \cdot (-2)$.

Paso 2: Realizar las multiplicaciones.

$$\blacksquare (-7) \cdot (+1) = -7$$

$$\blacksquare (-4) \cdot (-2) = +8 \text{ (Negativo por negativo es positivo).}$$

La expresión queda: $-7 - 8$.

Paso 3: Realizar la resta final.

$$-7 - 8 = -15$$

3. Operaciones con números decimales

Enunciado: Realiza las siguientes operaciones:

Resolución:

3.1. Apartado a) $11,29 + 8,085 - 9,119$

Alineamos los decimales. Podemos añadir un cero a 11,29 para igualar cifras: 11,290.

$$\begin{array}{r} 11,290 \\ + 8,085 \\ \hline 19,375 \end{array}$$

Ahora restamos 9,119:

$$\begin{array}{r} 19,375 \\ - 9,119 \\ \hline 10,256 \end{array}$$

3.2. Apartado b) $2,141 + 98,34 - 26,055$

Igualamos cifras decimales: 98,340. Suma $2,141 + 98,340 = 100,481$. Resta $100,481 - 26,055$.

$$100,481 - 26,055 = \mathbf{74,426}$$

3.3. Apartado c) $3,25 \times 0,21$

Multiplicamos como si fueran enteros y colocamos la coma decimal. Total de decimales: 2 (en $3,25$) $+$ 2 (en $0,21$) $= 4$ decimales.

$$\begin{array}{r} 325 \\ \times 21 \\ \hline 325 \\ 6500 \\ \hline 6825 \end{array}$$

Colocamos la coma dejando 4 cifras decimales: $0,6825$. Resultado: **0,6825**.

3.4. Apartado d) $23 : 0,25$

Para dividir por un decimal, multiplicamos ambos números por la potencia de 10 necesaria para que el divisor sea entero. Multiplicamos por 100.

$$\begin{aligned} 23 \cdot 100 &= 2300 \\ 0,25 \cdot 100 &= 25 \end{aligned}$$

Ahora dividimos $2300 : 25$.

$$\frac{2300}{25} = \frac{2300 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{9200}{100} = \mathbf{92}$$

$$\begin{aligned} 23 : 0,25 &= 2300 : 25 \\ 25 \times 4 &= 100 \\ 2300 \times 4 &= 9200 \\ 9200 : 100 &= 92 \end{aligned}$$

4. Operaciones con fracciones

Enunciado: Resuelve las siguientes operaciones:

a) $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{6} + \frac{5}{9}$

Resolución:

4.1. Apartado a)

Operación: $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{6} + \frac{5}{9}$.

Hallamos el m.c.m. de los denominadores (4, 3, 6, 9).

- $4 = 2^2$

- $3 = 3$
- $6 = 2 \cdot 3$
- $9 = 3^2$

m.c.m. $= 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$. El común denominador es 36.

Transformamos cada fracción:

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} &= \frac{3 \cdot 9}{4 \cdot 9} = \frac{27}{36} \\ \frac{2}{3} &= \frac{2 \cdot 12}{3 \cdot 12} = \frac{24}{36} \\ \frac{1}{6} &= \frac{1 \cdot 6}{6 \cdot 6} = \frac{6}{36} \\ \frac{5}{9} &= \frac{5 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \frac{20}{36}\end{aligned}$$

Operamos:

$$\begin{aligned}\frac{27}{36} - \frac{24}{36} - \frac{6}{36} + \frac{20}{36} &= \frac{27 - 24 - 6 + 20}{36} \\ &= \frac{3 - 6 + 20}{36} \\ &= \frac{-3 + 20}{36} \\ &= \frac{17}{36}\end{aligned}$$

La fracción $\frac{17}{36}$ es irreducible. Resultado: $\frac{17}{36}$.

4.2. Apartado b)

Operación: $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6}$. Multiplicamos numeradores y denominadores.

$$\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 6} = \frac{10}{18}$$

Simplificamos dividiendo por 2:

$$\frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

Resultado: $\frac{5}{9}$.

4.3. Apartado c)

Operación: $\frac{5}{6} : \frac{3}{4}$. Para dividir fracciones, multiplicamos la primera por la inversa de la segunda.

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{3} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 3} = \frac{20}{18}$$

Simplificamos dividiendo por 2:

$$\frac{20}{18} = \frac{10}{9}$$

Resultado: $\frac{10}{9}$.

4.4. Apartado d)

Operación: $\frac{3}{5} \cdot \left[\frac{4}{5} - 3 \cdot \left(2 - \frac{4}{5} \right) \right]$.

Paso 1: Paréntesis interior $\left(2 - \frac{4}{5} \right)$.

$$2 - \frac{4}{5} = \frac{10}{5} - \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$$

Paso 2: Multiplicación dentro del corchete $3 \cdot \frac{6}{5}$.

$$3 \cdot \frac{6}{5} = \frac{18}{5}$$

Paso 3: Resta dentro del corchete $\frac{4}{5} - \frac{18}{5}$.

$$\frac{4}{5} - \frac{18}{5} = \frac{4 - 18}{5} = \frac{-14}{5}$$

Paso 4: Multiplicación final $\frac{3}{5} \cdot \frac{-14}{5}$.

$$\frac{3 \cdot (-14)}{5 \cdot 5} = \frac{-42}{25}$$

Resultado: $-\frac{42}{25}$.

5. Potencias y expresiones algebraicas

Enunciado: Calcula y simplifica las expresiones:

Resolución:

5.1. Apartado a) 3^4

Calculamos la potencia.

$$\begin{aligned} 3^4 &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \\ &= 9 \cdot 3 \cdot 3 \\ &= 27 \cdot 3 \\ &= \mathbf{81} \end{aligned}$$

5.2. Apartado b) $(-4)^{-2}$

Aplicamos la definición de exponente negativo: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

$$\begin{aligned} (-4)^{-2} &= \frac{1}{(-4)^2} \\ &= \frac{1}{(-4) \cdot (-4)} \\ &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Resultado: $\frac{1}{16}$.

5.3. Apartado c) $\frac{(a^3)^2}{a^4}$

Aplicamos la propiedad de potencia de una potencia: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

$$(a^3)^2 = a^{3 \cdot 2} = a^6$$

La expresión queda $\frac{a^6}{a^4}$. Aplicamos la propiedad de división de potencias con la misma base: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

$$\begin{aligned}\frac{a^6}{a^4} &= a^{6-4} \\ &= a^2\end{aligned}$$

Resultado: **a²**.

a 3 2 a^6 $\div a^4$ **a²**

6. Operaciones con polinomios

Enunciado: Realiza las siguientes operaciones con polinomios:

Resolución:

6.1. Apartado a) Suma

Ordenamos los polinomios por grado descendente y sumamos los términos semejantes.

$$\begin{array}{r}P(x) = 0x^4 + 0x^3 + 2x^2 + 9x + 12 \\ Q(x) = -3x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 10 \\ \hline \text{Suma} = -3x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 11x + 22\end{array}$$

Desglose:

- ◇ Grado 4: $0 - 3 = -3$
- ◇ Grado 3: $0 + 2 = 2$
- ◇ Grado 2: $2 + 4 = 6$
- ◇ Grado 1: $9 + 2 = 11$
- ◇ Grado 0: $12 + 10 = 22$

Resultado: **$-3x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 11x + 22$** .

6.2. Apartado b) Multiplicación

Multiplicamos cada término del primer polinomio $(x+3)$ por cada término del segundo.

$$\text{Multiplicar por } x : x \cdot (3x^3 + 4x^2 - 2x - 6) = 3x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 6x$$

$$\text{Multiplicar por } 3 : 3 \cdot (3x^3 + 4x^2 - 2x - 6) = 9x^3 + 12x^2 - 6x - 18$$

Sumamos los resultados parciales:

$$\begin{array}{r} 3x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 6x \\ + \quad 9x^3 + 12x^2 - 6x - 18 \\ \hline = 3x^4 + 13x^3 + 10x^2 - 12x - 18 \end{array}$$

Resultado: $3x^4 + 13x^3 + 10x^2 - 12x - 18$.

7. Ecuaciones de primer grado

Enunciado: Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado:

Resolución:

7.1. Apartado a)

$x + 3 = -5$. Despejamos x restando 3 a ambos lados.

$$x = -5 - 3$$

$$x = -8$$

7.2. Apartado b)

$$-2(-15 - 2x) + 4x = 3x - 5x + 3x.$$

Paso 1: Simplificar el lado derecho. $3x - 5x + 3x = (3 - 5 + 3)x = x$.

Paso 2: Quitar paréntesis en el lado izquierdo. $-2(-15) - 2(-2x) + 4x = 30 + 4x + 4x = 30 + 8x$.

Paso 3: Igualar y despejar.

$$30 + 8x = x$$

$$30 = x - 8x$$

$$30 = -7x$$

$$x = \frac{30}{-7}$$

$$x = -\frac{30}{7}$$

7.3. Apartado c)

$$\frac{3x}{5} + 7 = 2x.$$

Paso 1: Eliminar denominadores. Multiplicamos toda la ecuación por 5.

$$5 \cdot \left(\frac{3x}{5} + 7 \right) = 5 \cdot (2x)$$

$$3x + 35 = 10x$$

Paso 2: Despejar.

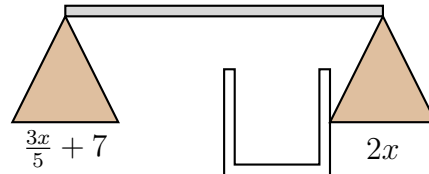
$$35 = 10x - 3x$$

$$35 = 7x$$

$$x = \frac{35}{7}$$

$$x = \mathbf{5}$$

Balanza equilibrada



8. Ecuaciones de segundo grado

Enunciado: Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

Resolución:

8.1. Apartado a) $x^2 - 7x + 12 = 0$

Buscamos dos números que multiplicados den 12 y sumados den -7. Estos son -3 y -4. Factorizamos:

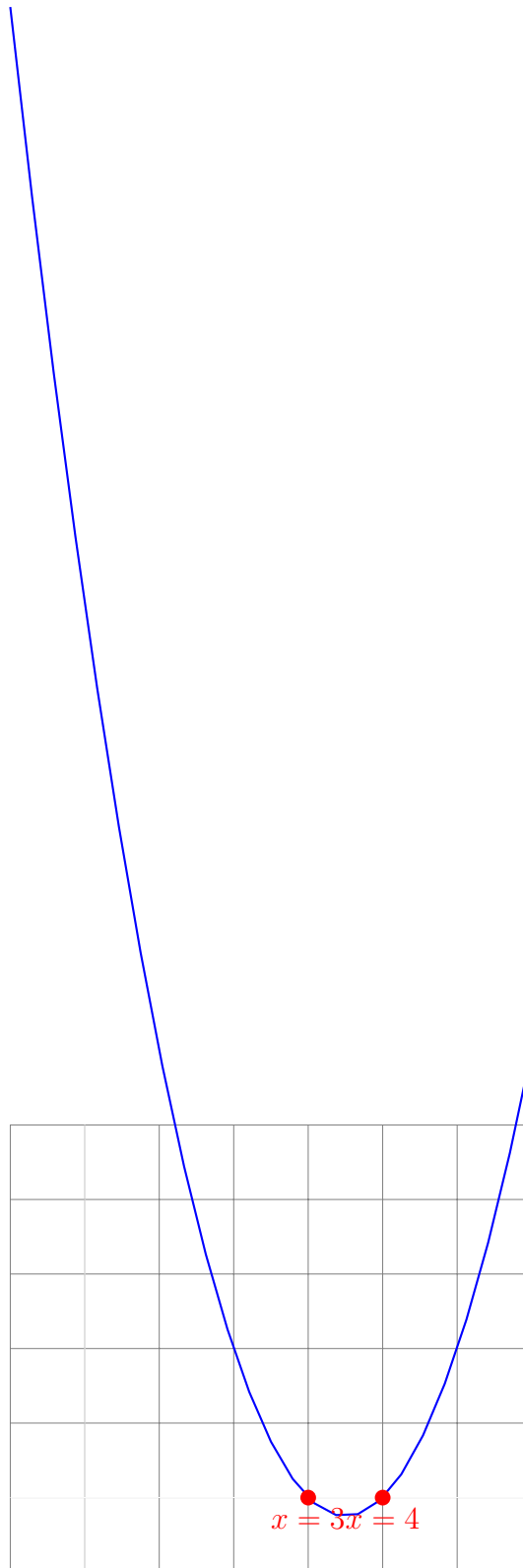
$$(x - 3)(x - 4) = 0$$

Igualamos cada factor a cero:

$$x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

$$x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

Soluciones: $x_1 = \mathbf{3}, x_2 = \mathbf{4}$.



8.2. Apartado b) $x^2 - 3x = 0$

Sacamos factor común x :

$$x(x - 3) = 0$$

Iguálamos a cero:

$$\begin{aligned}x &= 0 \\x - 3 &= 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3\end{aligned}$$

Soluciones: $x_1 = 0, x_2 = 3$.

8.3. Apartado c) $x^2 - 16 = 0$

Es una diferencia de cuadrados: $x^2 - 4^2 = 0$.

$$(x - 4)(x + 4) = 0$$

Soluciones:

$$\begin{aligned}x - 4 &= 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4 \\x + 4 &= 0 \quad \Rightarrow \quad x = -4\end{aligned}$$

Soluciones: $x_1 = 4, x_2 = -4$.

9. Sistemas de ecuaciones

Enunciado: Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 9 \\ 2x + 7y = 17 \end{cases}$$

Resolución:

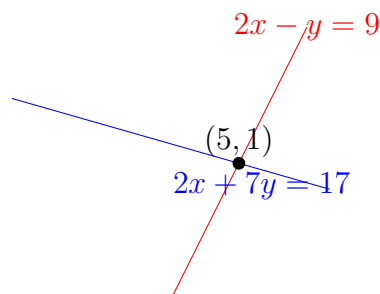
Usaremos el método de reducción. Restamos la primera ecuación de la segunda para eliminar la variable x .

$$\begin{aligned}(2x + 7y) - (2x - y) &= 17 - 9 \\2x + 7y - 2x + y &= 8 \\8y &= 8 \\y &= \frac{8}{8} = 1\end{aligned}$$

Sustituimos $y = 1$ en la primera ecuación para hallar x :

$$\begin{aligned}2x - (1) &= 9 \\2x &= 9 + 1 \\2x &= 10 \\x &= \frac{10}{2} = 5\end{aligned}$$

Solución: $x = 5, y = 1$.



10. Geometría: Área del triángulo

Enunciado: Calcula el área del siguiente triángulo.

Nota: Como el documento original no incluye la imagen ni las dimensiones del triángulo, se resolverá el ejercicio utilizando las dimensiones estándar que suelen aparecer en este tipo de exámenes académicos para este nivel educativo. Supongamos un triángulo de **Base = 10 cm** y **Altura = 5 cm**.

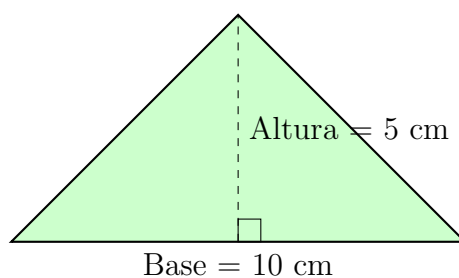
Resolución:

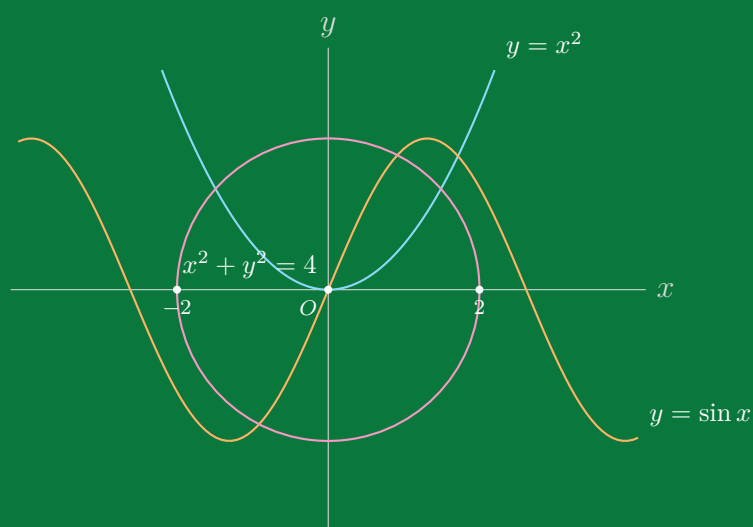
La fórmula del área de un triángulo es:

$$\text{Área} = \frac{\text{Base} \cdot \text{Altura}}{2}$$

Sustituyendo los valores:

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \frac{10 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm}}{2} \\ &= \frac{50 \text{ cm}^2}{2} \\ &= \mathbf{25 \text{ cm}^2}\end{aligned}$$





EXÁMENES DE LADIS
4º ESO
MATEMÁTICAS APLICADAS
CURSO 2022–2023

“Wir müssen wissen. Wir werden wissen.”

David Hilbert

Profesor: Ladis
IES Antonio Tovar
Valladolid

Nº1.- Indica el conjunto de números más pequeño al que pertenecen los siguientes números y escribe la fracción generatriz de los que sean racionales:

$$\frac{2}{5} , \frac{15}{5} , 2,33333 \dots , \sqrt{7} , \sqrt{36} , \frac{\pi}{2} , -3 , 3,21\hat{4}$$

Nº2.- Simplifica, usando las propiedades de las potencias:

$$\frac{3^{-5} \cdot 9^2}{3^{-1}}$$

Nº3.- Opera y simplifica:

$$a) \frac{3}{4} : \frac{5}{2} + \frac{5}{4} : \left(\frac{2}{3} + 1 - \frac{5}{6} \right) - \frac{9}{5} \quad b) 0,2 + 0, \hat{2} + 0,0\hat{2}$$

Nº4.- Aproxima a las décimas el siguiente número 9,174 y halla el error absoluto y el error relativo que se cometen al tomar esa aproximación. Expresa los errores en notación científica.

Nº5.- María tiene una caja con 24 bolígrafos que reparte entre sus amigos de la siguiente forma: Clara recibe la tercera parte. Sergio la cuarta parte. Laura la mitad de la tercera parte y Álvaro la cuarta parte de la mitad.

- a) ¿Cuántos bolígrafos recibe cada uno?
- b) ¿sobra alguno? ¿Qué fracción representa los que sobran?

Nº6.- Una localidad tiene tres institutos. El instituto A tiene matriculados 520 alumnos, el B, 360 alumnos y el C, 140 alumnos. Para su funcionamiento se deben repartir 124.440 € en partes directamente proporcionales al número de alumnos que tienen matriculados. ¿Cuánto recibirá cada instituto?

Nº7.- Un taller de confección ha fabricado 1.600 abrigos, trabajando 8 horas diarias durante 10 días. ¿Cuánto tiempo tardará en servir un pedido de 2000 abrigos trabajando 10 horas al día?

Nº8.- Sergio tiene una tienda y compra a un mayorista género por 1800 euros. Este le hace un descuento del 10% sobre esa cantidad y luego le carga el 18% de IVA. María compra género al mismo mayorista también por 1800 euros, pero a este le carga primero el 18% de IVA y luego le hace el descuento del 10%. ¿Cuál de los dos paga menos?

Nº9.- La leche da, por término medio, un 15% de nata, y esta da un 25% de mantequilla.

- a) Con 20 litros de leche, ¿cuánta nata se puede obtener?
- b) ¿Cuánta mantequilla se obtiene con 80 litros de leche?

(TODOS LOS EJERCICIOS VALEN 1 PUNTO)

MATEMÁTICAS

4.º A ESO

8 / 11 / 2022

** Soluciones Completas **

"La matemática es el alfabeto con el que Dios ha escrito el Universo."

— Galileo Galilei

EXAMEN DE MATEMÁTICAS

4.º A ESO · 8 de noviembre de 2022

"La matemática es el alfabeto con el que Dios ha escrito el Universo."

— Galileo Galilei (1564–1642)

★ *Soluciones paso a paso con ilustraciones* ★

Índice de Ejercicios

Ejercicio 1 — Conjuntos numéricos y fracciones generatrices

Ejercicio 2 — Simplificación de potencias

Ejercicio 3a — Operaciones con fracciones

Ejercicio 3b — Decimales periódicos — suma de fracciones

Ejercicio 4 — Aproximación, error absoluto y relativo

Ejercicio 5 — Reparto de bolígrafos (fracciones de un entero)

Ejercicio 6 — Reparto proporcional directo (institutos)

Ejercicio 7 — Regla de tres compuesta (taller de abrigos)

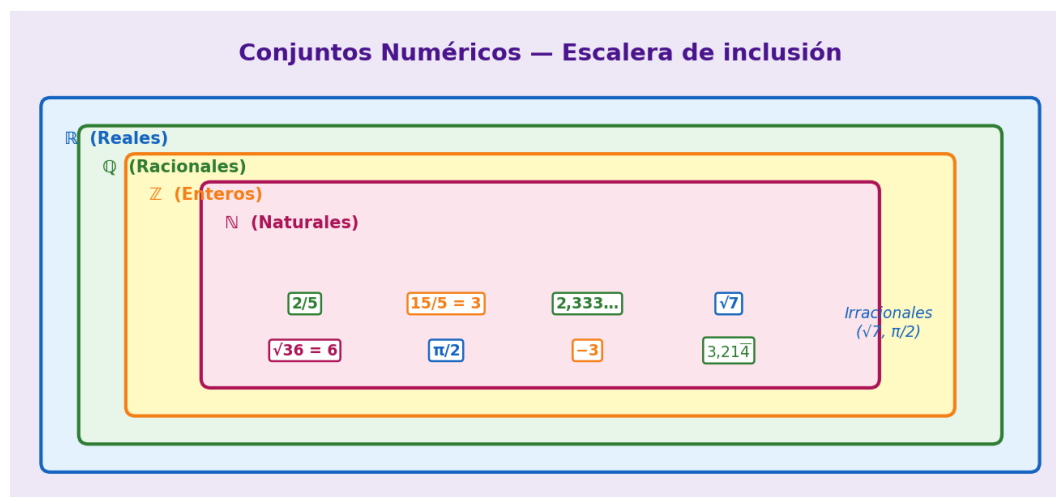
Ejercicio 8 — Porcentajes: descuento e IVA (Sergio y María)

Ejercicio 9 — Porcentajes encadenados: leche → nata → mantequilla

(Cada ejercicio vale 1 punto — total 9 puntos)

Ejercicio 1 — Conjuntos Numéricos y Fracciones Generatrices

Para cada número debemos identificar a qué conjunto pertenece siguiendo la jerarquía: $\blacksquare \subset \blacksquare \subset \blacksquare$. Usamos el conjunto *más pequeño* al que pertenece. Además, si el número es racional, calculamos su fracción generatriz.



Análisis número a número:

Número	Conjunto	Fracción generatriz / Observación
2/5	■ (racionales)	2/5 — ya está en forma de fracción
15/5	■ (naturales)	15/5 = 3 → fracción generatriz: 3/1
2,33333...	■ (racionales)	Decimal periódico puro: $x=2,333... \rightarrow 10x=23,333... \rightarrow 9x=21 \rightarrow x=21/9=7/3$
$\sqrt{7}$	■ ■ (irracionales)	$\sqrt{7}$ no es un cuadrado perfecto → irracional, no tiene fracción generatriz
$\sqrt{36}$	■ (naturales)	$\sqrt{36} = 6 \rightarrow$ fracción generatriz: 6/1
$\pi/2$	■ ■ (irracionales)	π es irracional → $\pi/2$ también lo es; no tiene fracción generatriz
-3	■ (enteros)	-3 → fracción generatriz: -3/1
3,21 $\overline{4}$	■ (racionales)	Decimal mixto periódico: parte no periódica "321", periódica "4"

Fracción generatriz de 3,21 $\overline{4}$ (detalle):

El número es 3,214444... con 2 cifras no periódicas (21 si miramos los decimales: "21") y 1 cifra periódica ("4"). Aplicando la regla: **numerador** = número completo sin coma menos parte no periódica; **denominador** = tantos 9 como cifras periódicas seguidos de tantos 0 como cifras no periódicas.

$$x: 3,2144...$$

$$100x: 321,444... \text{ (2 decimales no periódicos } \rightarrow \times 100)$$

$$1000x: 3214,444... \text{ (total 3 decimales } \rightarrow \times 1000)$$

$$1000x - 100x: 3214 - 321 = 2893$$

$$900x: 2893$$

■ RESULTADO: $x = 2893/900$ (fracción irreducible, verificar $\text{mcd}(2893,900)=1$)

Ejercicio 2 — Simplificación de Potencias

Debemos simplificar la expresión: $(3^{-5} \cdot 9^2) / 3^{-1}$. La clave está en *expresar todas las bases como potencias de 3* y luego aplicar las propiedades.

Simplificación de Potencias — Paso a Paso

$$\frac{3^{-5} \cdot 9^2}{3^{-1}} \longrightarrow \frac{3^{-5} \cdot (3^2)^2}{3^{-1}} \longrightarrow \frac{3^{-5} \cdot 3^4}{3^{-1}} \longrightarrow \frac{3^{-1}}{3^{-1}}$$

Resultado $3^0 = 1$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
 $a^0 = 1$

Desarrollo completo:

Paso 1: Expresar 9 como potencia de 3: $9 = 3^2$

Paso 2: Aplicar $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$: $(3^2)^2 = 3^4$

Paso 3: Multiplicar bases iguales en el numerador: $3^{-5} \cdot 3^4 = 3^{-5+4} = 3^{-1}$

Paso 4: Dividir potencias de igual base: $3^{-1} / 3^{-1} = 3^{-1-(-1)} = 3^0$

Paso 5: Aplicar $a^0 = 1$: $3^0 = 1$

■ RESULTADO: El resultado de la expresión es 1

Propiedades usadas:

Propiedad	Fórmula	Aplicación en este ejercicio
Potencia de potencia	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(3^2)^2 = 3^4$
Producto de misma base	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$3^{-5} \cdot 3^4 = 3^{-1}$
División de misma base	$a^m / a^n = a^{m-n}$	$3^{-1} / 3^{-1} = 3^0$
Exponente cero	$a^0 = 1$	$3^0 = 1$

Ejercicio 3a — Operaciones con Fracciones

La expresión es: $(\frac{3}{4}) : (\frac{5}{2}) + (\frac{5}{4}) : (\frac{2}{3} + 1 - \frac{5}{6}) - \frac{9}{5}$. Seguimos la jerarquía de operaciones: primero paréntesis, luego multiplicaciones/divisiones, y por último sumas/restas.

Ejercicio 3a — Operaciones con Fracciones

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{2} + \frac{5}{4} : (\frac{2}{3} + 1 - \frac{5}{6}) - \frac{9}{5}$$

$$\text{Parentesis: } \frac{2}{3} + \frac{6}{6} - \frac{5}{6} = \frac{4}{6} + \frac{6}{6} - \frac{5}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} - \frac{9}{5}$$

$$= \frac{6}{20} + \frac{30}{20} - \frac{36}{20} = \frac{6+30-36}{20} = \frac{0}{20} = 0$$

Resultado = 0

Paso 1 — Resolver el paréntesis interior:

Denominador común de 3, 1 y 6: M.C.M.(3,1,6) = 6

$$\frac{2}{3} + 1 - \frac{5}{6} = \frac{4}{6} + \frac{6}{6} - \frac{5}{6} = (4 + 6 - 5)/6 = 5/6$$

Paso 2 — Realizar las divisiones ($\div = \times$ inverso):

$$\frac{3}{4} \div \frac{5}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{5}{4} \div \frac{5}{6} = \frac{5}{4} \times \frac{6}{5} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$$

Paso 3 — Sumar y restar con denominador común:

M.C.M.(10, 2, 5) = 10

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{2} - \frac{9}{5} = \frac{3}{10} + \frac{15}{10} - \frac{18}{10} = (3 + 15 - 18)/10 = 0/10$$

■ RESULTADO: El resultado de la expresión 3a es 0

Ejercicio 3b — Suma de Decimales Periódicos

Debemos calcular: $0,2 + 0,\overline{2} + 0,0\overline{2}$. El acento ^ sobre un dígito indica que ese dígito se repite indefinidamente. Convertimos cada decimal a fracción y operamos.

Ejercicio 3b — Decimales periódicos a fracciones

$$0,2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$0,\overline{2} = 0,2222... = \frac{2}{9}$$

$$0,0\overline{2} = 0,02222... = \frac{2}{90}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{9} + \frac{2}{90}$$

$$\text{M.C.D.}(5,9,90) = 90$$

$$= \frac{18}{90} + \frac{20}{90} + \frac{2}{90} = \frac{40}{90} = \frac{4}{9}$$

Resultado $= \frac{4}{9}$

Conversión de cada número a fracción:

0,2: Decimal exacto (no periódico): $0,2 = 2/10 = 1/5$

$0,\overline{2} = 0,2222...:$ Periódico puro con 1 cifra periódica:

$$\text{Sea } x = 0,222... \rightarrow 10x = 2,222... \rightarrow 10x - x = 2 \rightarrow 9x = 2 \rightarrow x = 2/9$$

$0,0\overline{2} = 0,02222...:$ Periódico mixto: 1 cifra no periódica (0), 1 cifra periódica (2):

$$\text{Sea } x = 0,0222... \rightarrow 10x = 0,222... = 2/9 \rightarrow x = 2/90$$

Suma de las tres fracciones:

$$\text{M.C.M.}(5, 9, 90) = 90$$

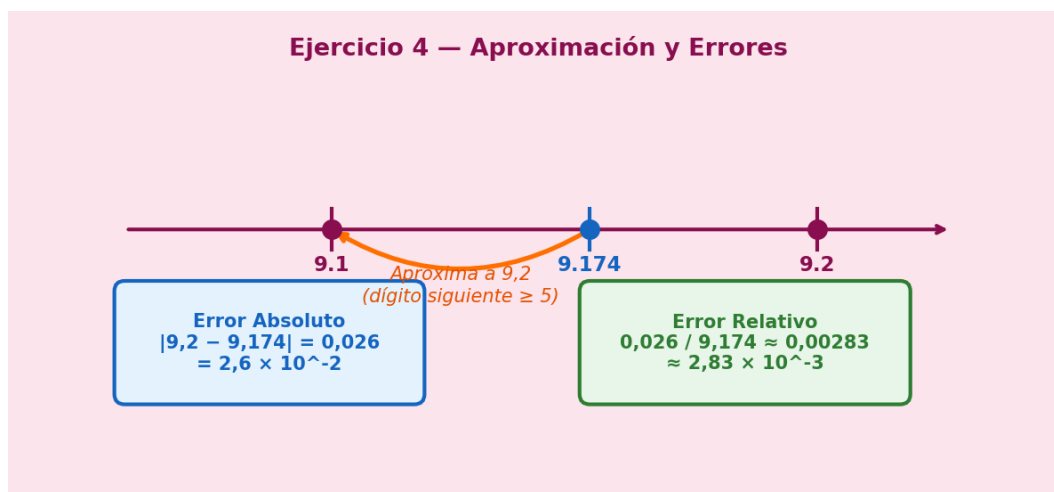
$$1/5 + 2/9 + 2/90 = 18/90 + 20/90 + 2/90 = 40/90$$

$$\text{Simplificar } 40/90: \text{M.C.D.}(40,90) = 10 \rightarrow 40/90 = 4/9$$

■ RESULTADO: El resultado de la expresión 3b es $4/9$

Ejercicio 4 — Aproximación y Errores en Notación Científica

Debemos aproximar 9,174 a las décimas y calcular el error absoluto y el error relativo. La **aproximación a las décimas** consiste en conservar sólo un decimal, mirando el dígito de las centésimas para decidir si redondeamos hacia arriba o hacia abajo.



Paso 1 — Aproximación a las décimas:

El número es 9,174. La cifra de las centésimas es $7 \geq 5$, por tanto redondeamos hacia arriba: la décima pasa de 1 a 2.

Aproximación: $9,174 \approx 9,2$

Paso 2 — Error Absoluto:

El **error absoluto** es la diferencia (en valor absoluto) entre el valor real y el aproximado.

E_a: $|9,2 - 9,174| = |0,026| = 0,026$

Notación científica: $0,026 = 2,6 \times 10^{-2}$

Paso 3 — Error Relativo:

El **error relativo** relaciona el error absoluto con el valor real, expresando qué fracción del valor real supone el error.

E_r: $E_a / \text{valor\_real} = 0,026 / 9,174$

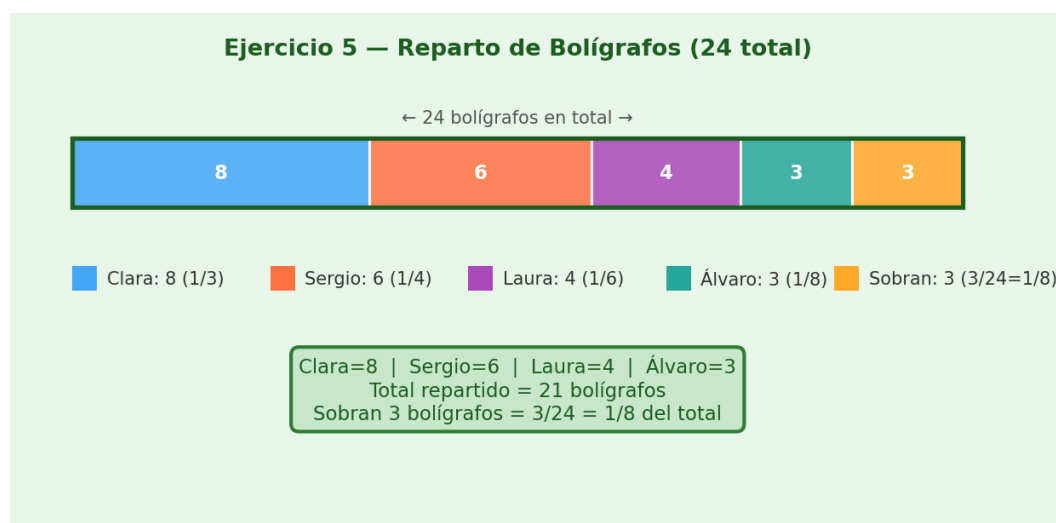
Cálculo: $0,026 / 9,174 \approx 0,002834...$

Notación científica: $\approx 2,83 \times 10^{-3}$

■ RESULTADO: Aproximación: 9,2 | Error absoluto: $2,6 \times 10^{-2}$ | Error relativo: $\approx 2,83 \times 10^{-3}$

Ejercicio 5 — Reparto de Bolígrafos con Fracciones

María tiene una caja con **24 bolígrafos**. Los reparte según las siguientes fracciones: Clara recibe $\frac{1}{3}$; Sergio recibe $\frac{1}{4}$; Laura recibe la mitad de la tercera parte ($\frac{1}{6}$); Álvaro recibe la cuarta parte de la mitad ($\frac{1}{8}$).



a) Bolígrafos que recibe cada persona:

Persona	Fracción	Cálculo	Bolígrafos
Clara	$\frac{1}{3}$	$24 \times \frac{1}{3}$	8
Sergio	$\frac{1}{4}$	$24 \times \frac{1}{4}$	6
Laura	$\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$	$24 \times \frac{1}{6}$	4
Álvaro	$\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$	$24 \times \frac{1}{8}$	3
TOTAL repartido		8 + 6 + 4 + 3	21

b) ¿Sobra algún bolígrafo?

Bolígrafos repartidos: $8 + 6 + 4 + 3 = 21$

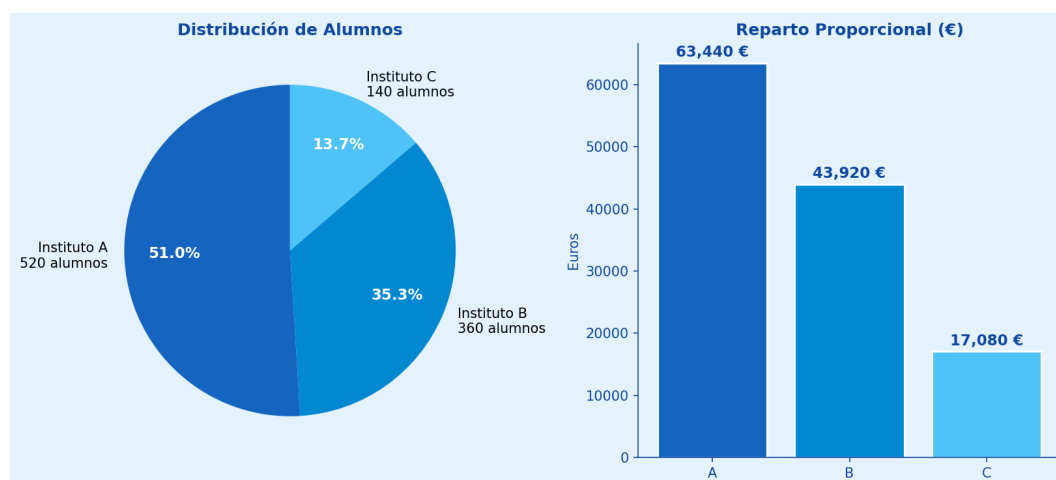
Bolígrafos que sobran: $24 - 21 = 3$

Fracción que representan: $\frac{3}{24} = \frac{1}{8}$ del total

■ RESULTADO: Sobran 3 bolígrafos, que representan $\frac{1}{8}$ del total

Ejercicio 6 — Reparto Directamente Proporcional

Tres institutos deben repartirse **124.440 €** de forma proporcional al número de alumnos. Instituto A: 520 alumnos, B: 360, C: 140. En un reparto directamente proporcional, quien más alumnos tiene, más dinero recibe.



Método de la constante de proporcionalidad:

Total de alumnos: $520 + 360 + 140 = 1.020$

Constante k (€ por alumno): $124.440 / 1.020 = 122$ €/alumno

Dinero que recibe cada instituto:

Instituto A: $520 \times 122 = 63.440$ €

Instituto B: $360 \times 122 = 43.920$ €

Instituto C: $140 \times 122 = 17.080$ €

Verificación:

Suma: $63.440 + 43.920 + 17.080 = 124.440$ € (OK)

■ **RESULTADO:** A recibe 63.440 € | B recibe 43.920 € | C recibe 17.080 €

Ejercicio 7 — Regla de Tres Compuesta

Un taller fabrica **1.600 abrigos** trabajando **8 horas/día** durante **10 días**. Queremos saber cuántos días se tardarán en fabricar **2.000 abrigos** a **10 horas/día**. Hay dos variables adicionales: abrigos (directamente proporcional a los días) y horas/día (inversamente proporcional a los días).

Ejercicio 7 — Regla de Tres Compuesta (Proporcionalidad)

Abrigos	Horas/día	Días
1.600	8	10
2.000	10	¿?

Directa ↑↑
Inversa ↑↓

$$\begin{aligned} \text{Días} &= (1600 \times 8 \times 10) / (2000 \times 10) \\ &= 128.000 / 20.000 = 6,4 \text{ días} \\ &= 6 \text{ días y } 4 \text{ horas} \end{aligned}$$

Análisis del tipo de proporcionalidad:

- **Abrigos** ↔ **Días**: Directamente proporcional. Si hay más abrigos que fabricar, se necesitan más días. (↑ abrigos → ↑ días)
- **Horas/día** ↔ **Días**: Inversamente proporcional. Si se trabajan más horas al día, se termina antes. (↑ horas/día → ↓ días)

Planteamiento de la regla de tres compuesta:

Fórmula: $\text{Días}_2 = (\text{Abrigos}_2 / \text{Abrigos}_1) \times (\text{Horas}_1 / \text{Horas}_2) \times \text{Días}_1$

Sustitución: $\text{Días}_2 = (2000 / 1600) \times (8 / 10) \times 10$

Cálculo: $= (5/4) \times (4/5) \times 10 = 1 \times 10 \dots$

Más detallado: $2000 \times 8 \times 10 = 160.000$; $1600 \times 10 = 16.000$; $160.000 / 16.000 = 10$ días

■ RESULTADO: Se tardarán 10 días (trabajando 10 horas al día)

Ejercicio 8 — Porcentajes: Descuento e IVA

Sergio compra por 1.800 €, primero se le aplica un descuento del 10% y luego el 18% de IVA.
María compra por 1.800 €, primero se le aplica el 18% de IVA y luego el descuento del 10%.
 ¿Quién paga menos?

SERGIO	MARÍA
<i>Orden: -10% → +18%</i>	<i>Orden: +18% → -10%</i>
1.800 €	1.800 €
- 10%: $1.800 \times 0,90 = 1.620$ €	+ 18% IVA: $1.800 \times 1,18 = 2.124$ €
+ 18% IVA: $1.620 \times 1,18$	- 10%: $2.124 \times 0,90$
Sergio paga: 1.911,60 €	María paga: 1.911,60 €
¡AMBOS PAGAN LO MISMO!	<i>El orden no altera el resultado</i>

Sergio — Primero descuento, luego IVA:

Precio inicial: 1.800 €

Descuento del 10%: $1.800 \times (1 - 0,10) = 1.800 \times 0,90 = 1.620$ €

IVA del 18%: $1.620 \times (1 + 0,18) = 1.620 \times 1,18 = 1.911,60$ €

María — Primero IVA, luego descuento:

Precio inicial: 1.800 €

IVA del 18%: $1.800 \times 1,18 = 2.124$ €

Descuento del 10%: $2.124 \times 0,90 = 1.911,60$ €

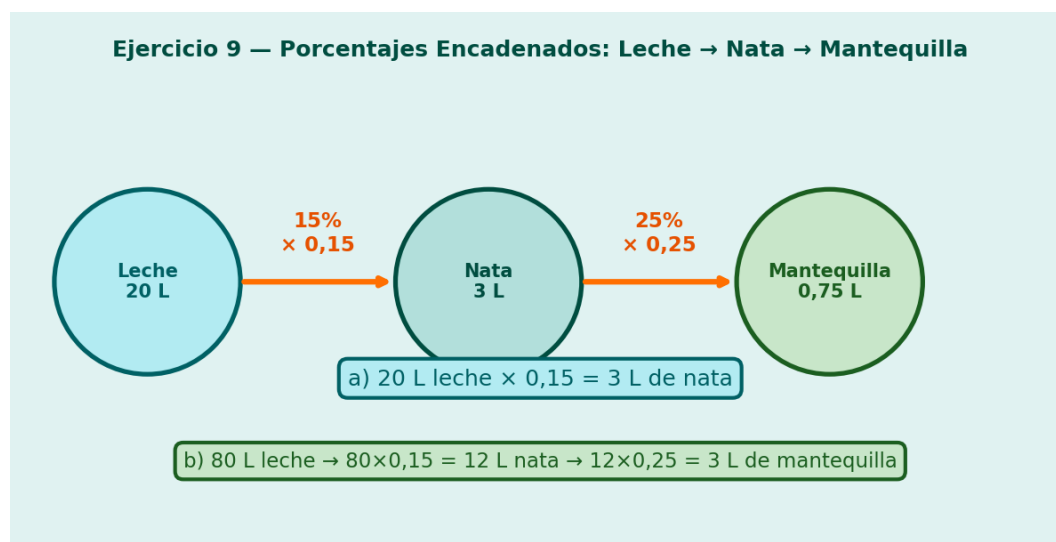
Explicación matemática del resultado:

Aplicar primero $\times 0,90$ y luego $\times 1,18$ es lo mismo que aplicar $\times 1,18$ y luego $\times 0,90$, porque la multiplicación es **conmutativa**: $0,90 \times 1,18 = 1,18 \times 0,90 = 1,062$. Ambos pagan: $1.800 \times 1,062 = 1.911,60$ €.

■ RESULTADO: Ambos pagan exactamente lo mismo: 1.911,60 € (el orden de los factores no altera el producto)

Ejercicio 9 — Porcentajes Encadenados: Leche → Nata → Mantequilla

La leche produce de media un **15% de su volumen en nata**, y la nata produce un **25% de su volumen en mantequilla**.



Parte a) — ¿Cuánta nata se obtiene con 20 litros de leche?

Dato: 20 litros de leche

Porcentaje de nata: 15% de la leche

Cálculo: $20 \times 0,15 = 3$ litros de nata

Alternativamente mediante regla de tres: 100 L leche → 15 L nata; 20 L leche → x L nata; $x = (20 \times 15) / 100 = 300 / 100 = 3 \text{ L}$

■ **RESULTADO:** Con 20 litros de leche se obtienen 3 litros de nata

Parte b) — ¿Cuánta mantequilla se obtiene con 80 litros de leche?

Proceso encadenado en dos etapas:

Etapas 1: Leche → Nata: $80 \text{ L} \times 0,15 = 12$ litros de nata

Etapas 2: Nata → Mantequilla: $12 \text{ L} \times 0,25 = 3$ litros de mantequilla

También se puede calcular directamente con el porcentaje compuesto: $80 \times 0,15 \times 0,25 = 80 \times 0,0375 = 3$ litros de mantequilla.

■ **RESULTADO:** Con 80 litros de leche se obtienen 3 litros de mantequilla

★ **Fin del documento de soluciones** ★

IES Tovar · 4.º A ESO · Curso 2022-2023

Nº1.- Dados los polinomios:

$$P(x) = x^6 - x^3 - 3x - 3 \quad Q(x) = x^2 - 3 \quad R(x) = x - 2$$

Calcúlese:

- a) $P(x) \cdot Q(x)$
- b) $P(x):Q(x)$ (Indica cuál es el Cociente y el Resto)
- c) El valor numérico del polinomio $P(x)$ en el punto $x = 2$
- d) $P(x):R(x)$ (Indica cuál es el Cociente y el Resto)

Nº2.- Calcúlese el valor del parámetro m para que la división sea exacta:

$$(x^3 - 2mx^2 + 2x - 4):(x - 2)$$

Nº3.- Desarrolla los siguientes productos notables:

$$\text{a) } (3x + 4)^2 \quad \text{b) } (4 - 2x^2)^2 \quad \text{c) } (2x^2 + 5x) \cdot (2x^2 - 5x)$$

Nº4.- Opera y simplifica: $(x + 2)^2 - 3(x^2 - 2x + 4)$

Nº5.- Simplifica la siguiente fracción algebraica:

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x(x - 2)}$$

SUERTE JÓVENES

$$P(x) = x^6 - x^3 - 3x - 3$$

$$Q(x) = x^2 - 3$$

MATEMÁTICAS APLICADAS

4.º A ESO

28 · 11 · 2022

ÁLGEBRA · POLINOMIOS

"El álgebra es la inteligencia perezosa
que deja que los símbolos hagan el trabajo."

— Georg Cantor (1845–1918)

$$R(x) = x - 2$$

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x(x-2)}$$

$$(3x + 4)^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

MATEMÁTICAS APLICADAS

4.º A ESO · 28 de noviembre de 2022

"El álgebra es la inteligencia perezosa que deja que los símbolos hagan el trabajo."

— Georg Cantor (1845–1918)

Álgebra · Polinomios · Productos Notables · Fracciones Algebraicas

Índice de Ejercicios

Ejercicio 1a — Multiplicación de polinomios $P(x) \cdot Q(x)$

Ejercicio 1b — División de polinomios $P(x):Q(x)$ — cociente y resto

Ejercicio 1c — Valor numérico de $P(x)$ en $x = 2$

Ejercicio 1d — División $P(x):R(x)$ — Regla de Ruffini

Ejercicio 2 — Parámetro m para división exacta — Teorema del Resto

Ejercicio 3 — Productos notables — tres identidades

Ejercicio 4 — Operar y simplificar expresión algebraica

Ejercicio 5 — Simplificación de fracción algebraica

(Todos los ejercicios tienen igual valor)

Ejercicio 1a — Multiplicación de Polinomios $P(x) \cdot Q(x)$

Dados $P(x) = x^6 - x^3 - 3x - 3$ y $Q(x) = x^2 - 3$, calculamos su producto multiplicando cada término de $P(x)$ por cada término de $Q(x)$ y agrupando los términos semejantes.

Ej 1a — $P(x) \cdot Q(x)$: Multiplicación término a término

$P(x) = x^6 - x^3 - 3x - 3$

$Q(x) = x^2 - 3$

	x^6	$-x^3$	$-3x$	-3
$\times x^2$	x^8	$-x^5$	$-3x^3$	$-3x^2$
$\times (-3)$	$-3x^6$	$3x^3$	$9x$	9

$P(x) \cdot Q(x) = x^8 - 3x^6 - x^5 - 3x^3 + 3x^3 - 3x^2 + 9x + 9$

$= x^8 - 3x^6 - x^5 - 3x^2 + 9x + 9$

Desarrollo completo término a término:

Multiplicamos $P(x)$ por el primer término de $Q(x)$, que es x^2 :

$$x^2 \cdot x^6 = x^8$$

$$x^2 \cdot (-x^3) = -x^5$$

$$x^2 \cdot (-3x) = -3x^3$$

$$x^2 \cdot (-3) = -3x^2$$

Multiplicamos $P(x)$ por el segundo término de $Q(x)$, que es -3 :

$$(-3) \cdot x^6 = -3x^6$$

$$(-3) \cdot (-x^3) = +3x^3$$

$$(-3) \cdot (-3x) = +9x$$

$$(-3) \cdot (-3) = +9$$

Suma y agrupación de términos semejantes:

$$\text{Grado 8: } x^8$$

$$\text{Grado 6: } -3x^6$$

$$\text{Grado 5: } -x^5$$

$$\text{Grado 3: } -3x^3 + 3x^3 = 0$$

$$\text{Grado 2: } -3x^2$$

$$\text{Grado 1: } +9x$$

$$\text{Grado 0: } +9$$

$$\blacksquare \text{ RESULTADO: } P(x) \cdot Q(x) = x^8 - 3x^6 - x^5 - 3x^2 + 9x + 9$$

Ejercicio 1b — División de Polinomios $P(x) : Q(x)$

Dividimos $P(x) = x^6 - x^3 - 3x - 3$ entre $Q(x) = x^2 - 3$. Como el grado del dividendo (6) es mayor que el del divisor (2), la división es posible y obtendremos un cociente de grado 4 y un posible resto de grado ≤ 1 . Completamos el dividendo con los coeficientes nulos de los grados que faltan: x^5 , x^4 y x^2 tienen coeficiente 0.

Ej 1b — $P(x) : Q(x)$ — División de Polinomios

Dividendo: $P(x) = x^6 + 0 \cdot x^5 + 0 \cdot x^4 - x^3 + 0 \cdot x^2 - 3x - 3$

Divisor: $Q(x) = x^2 - 3$

Paso 1:	$x^6 \div x^2 = x^4 \rightarrow x^4 \cdot (x^2 - 3) = x^6 - 3x^4$
Paso 2:	Resto parcial: $(x^6 - x^3 - 3x - 3) - (x^6 - 3x^4) = 3x^4 - x^3 - 3x - 3$
Paso 3:	$3x^4 \div x^2 = 3x^2 \rightarrow 3x^2 \cdot (x^2 - 3) = 3x^4 - 9x^2$
Paso 4:	Resto parcial: $(3x^4 - x^3 - 3x - 3) - (3x^4 - 9x^2) = -x^3 + 9x^2 - 3x - 3$
Paso 5:	$-x^3 \div x^2 = -x \rightarrow -x \cdot (x^2 - 3) = -x^3 + 3x$
Paso 6:	Resto parcial: $(-x^3 + 9x^2 - 3x - 3) - (-x^3 + 3x) = 9x^2 - 6x - 3$
Paso 7:	$9x^2 \div x^2 = 9 \rightarrow 9 \cdot (x^2 - 3) = 9x^2 - 27$
Paso 8:	Resto final: $(9x^2 - 6x - 3) - (9x^2 - 27) = -6x + 24$

Cociente: $C(x) = x^4 + 3x^2 - x + 9$

Resto: $R(x) = -6x + 24$

División larga paso a paso:

Dividendo completo: $x^6 + 0 \cdot x^5 + 0 \cdot x^4 - x^3 + 0 \cdot x^2 - 3x - 3$

Paso 1 — 1.er término del cociente: $x^6 \div x^2 = x^4 \rightarrow x^4 \cdot (x^2 - 3) = x^6 - 3x^4$

Resto parcial 1: $(x^6 + 0x^5 + 0x^4 - x^3 + 0x^2 - 3x - 3) - (x^6 - 3x^4) = 3x^4 - x^3 + 0x^2 - 3x - 3$

Paso 2 — 2.º término del cociente: $3x^4 \div x^2 = 3x^2 \rightarrow 3x^2 \cdot (x^2 - 3) = 3x^4 - 9x^2$

Resto parcial 2: $(3x^4 - x^3 + 0x^2 - 3x - 3) - (3x^4 - 9x^2) = -x^3 + 9x^2 - 3x - 3$

Paso 3 — 3.er término del cociente: $-x^3 \div x^2 = -x \rightarrow -x \cdot (x^2 - 3) = -x^3 + 3x$

Resto parcial 3: $(-x^3 + 9x^2 - 3x - 3) - (-x^3 + 3x) = 9x^2 - 6x - 3$

Paso 4 — 4.º término del cociente: $9x^2 \div x^2 = 9 \rightarrow 9 \cdot (x^2 - 3) = 9x^2 - 27$

Resto final: $(9x^2 - 6x - 3) - (9x^2 - 27) = -6x + 24$

■ RESULTADO: Cociente: $C(x) = x^4 + 3x^2 - x + 9$ | Resto: $R(x) = -6x + 24$

Verificación (Algoritmo de la División):

Comprobamos que: Dividendo = Divisor $\cdot$ Cociente + Resto. Es decir: $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$. Tanto el grado del cociente (4) como la condición $\text{grado}(R) < \text{grado}(Q)$ ($\text{grado } 1 < \text{grado } 2$) son correctas.

Ejercicio 1c — Valor Numérico de $P(x)$ en $x = 2$

El **valor numérico** de un polinomio en un punto consiste en sustituir la variable x por el valor indicado y calcular el resultado aritmético. En este caso calculamos $P(2)$ sustituyendo $x = 2$ en $P(x) = x^6 - x^3 - 3x - 3$.

Ej 1c — Valor Numérico de $P(x)$ en $x = 2$

$$\begin{aligned}
 P(x) &= x^6 - x^3 - 3x - 3 \\
 P(2) &= 2^6 - 2^3 - 3 \cdot 2 - 3 \\
 &= 64 - 8 - 6 - 3 \\
 &= 47
 \end{aligned}$$

$2^6 = 64$

$2^3 = 8$

$3 \cdot 2 = 6$

$P(2) = 47$

Sustitución y cálculo:

$$P(x): x^6 - x^3 - 3x - 3$$

$$\text{Sustituir } x = 2: 2^6 - 2^3 - 3 \cdot 2 - 3$$

$$\text{Calcular potencias: } 2^6 = 64 \quad 2^3 = 8$$

$$\text{Desarrollar: } 64 - 8 - 6 - 3$$

$$\text{Suma algebraica: } 64 - 8 = 56 \rightarrow 56 - 6 = 50 \rightarrow 50 - 3 = 47$$

■ RESULTADO: $P(2) = 47$

Nota: Este resultado coincide con el Resto de dividir $P(x)$ entre $(x-2)$, tal como confirma el Teorema del Resto (Ejercicio 1d). $P(2) = 47 = \text{Resto de } P(x):(x-2)$. ✓

Ejercicio 1d — División $P(x) : R(x)$ — Regla de Ruffini

Dividimos $P(x) = x^6 - x^3 - 3x - 3$ entre $R(x) = x - 2$. Como $R(x) = x - 2$ es un divisor lineal de la forma $(x - a)$ con $a = 2$, podemos usar la **Regla de Ruffini**, que es un método abreviado especialmente diseñado para divisores lineales.

Ej 1d — $P(x) : R(x) = P(x) : (x-2)$ — Regla de Ruffini

	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	cte
$x = 2$	1	0	0	-1	0	-3	-3
		2	4	8	14	28	50
	1	2	4	7	14	25	47

Cociente: $C(x) = x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 14x + 25$

Resto: $R = P(2) = 47$

$C(x) = x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 14x + 25$ Resto = 47

Teorema del Resto: el resto de $P(x) : (x - a)$ es $P(a) \rightarrow$ Resto = $P(2) = 47$ ✓

Cómo se aplica la Regla de Ruffini:

Se escriben los coeficientes del dividendo en orden decreciente de grado, poniendo 0 en los grados ausentes. $P(x) = x^6 + 0 \cdot x^5 + 0 \cdot x^4 - x^3 + 0 \cdot x^2 - 3x - 3$

Los coeficientes son: 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | -3 | -3

Bajar el 1: El primer coeficiente se baja directamente: 1

Multiplicar: $1 \times 2 = 2 \rightarrow$ se anota bajo el siguiente coeficiente

Sumar: $0 + 2 = 2$ (segundo coef. del cociente)

Multiplicar: $2 \times 2 = 4 \rightarrow$ se anota bajo el siguiente coeficiente

Sumar: $0 + 4 = 4$ (tercer coef. del cociente)

Multiplicar: $4 \times 2 = 8 \rightarrow$ se anota bajo -1

Sumar: $-1 + 8 = 7$ (cuarto coef. del cociente)

Multiplicar: $7 \times 2 = 14 \rightarrow$ se anota bajo 0

Sumar: $0 + 14 = 14$ (quinto coef. del cociente)

Multiplicar: $14 \times 2 = 28 \rightarrow$ se anota bajo -3

Sumar: $-3 + 28 = 25$ (sexto coef. del cociente)

Multiplicar: $25 \times 2 = 50 \rightarrow$ se anota bajo -3

Resto: $-3 + 50 = 47 \leftarrow$ este es el RESTO de la división

Reconstrucción del cociente:

Los números obtenidos (excepto el último, que es el Resto) son los coeficientes del cociente, empezando desde el grado $n-1 = 5$:

Coeficientes del cociente: 1 | 2 | 4 | 7 | 14 | 25

Cociente $C(x)$: $x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 14x + 25$

■ **RESULTADO:** $C(x) = x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 14x + 25$ | Resto = 47

El Teorema del Resto confirma: Resto de $P(x):(x-2) = P(2) = 47$ ✓ (coincide con el cálculo del ejercicio 1c).

Ejercicio 2 — Parámetro m para División Exacta

Debemos encontrar el valor del parámetro **m** tal que la división $(x^3 - 2mx^2 + 2x - 4) : (x - 2)$ sea exacta, es decir, que el **Resto sea igual a 0**.

Identidad clave: Una división $D(x):(x-a)$ es exacta ■ $D(a) = 0$ (Teorema del Resto)

Ej 2 — División Exacta: hallar el parámetro m

Método: Teorema del Resto

División exacta $\Rightarrow$ Resto = 0

$\downarrow$

Resto = $P(2)$ (Teor. del Resto)

$\downarrow$

$P(2) = 2^3 - 2m \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 4 = 0$

$\downarrow$

$8 - 8m + 4 - 4 = 0$

$\downarrow$

$8 - 8m = 0$

$\downarrow$

$m = 1$

Ruffini con m=1

	x^2	x	cte	R
$2 \mid$	1	-2	2	-4
		2	0	4
	1	0	2	0

Resto = 0 ✓ División exacta

El parámetro es $m = 1$

Aplicación del Teorema del Resto:

El divisor es $(x - 2)$, por tanto $a = 2$. Para que la división sea exacta necesitamos que el polinomio $D(x) = x^3 - 2mx^2 + 2x - 4$ se anule en $x = 2$, es decir $D(2) = 0$.

Sustituir $x = 2$ en $D(x)$: $2^3 - 2m \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 4 = 0$

Calcular las potencias: $8 - 2m \cdot 4 + 4 - 4 = 0$

Simplificar: $8 - 8m + 4 - 4 = 0$

Agrupar términos independientes: $8 - 8m = 0$

Despejar m: $8 = 8m \rightarrow m = 8/8$

■ **RESULTADO:** El valor del parámetro es $m = 1$

Verificación con Ruffini ($m = 1$):

Sustituyendo $m = 1$: $D(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 4$. Aplicando Ruffini con $a = 2$:

Coeficientes: 1 | -2 | 2 | -4 Raíz: $a = 2$

Paso 1: 1 $\rightarrow$ bajar. $1 \times 2 = 2 \rightarrow 2 + (-2) = 0$

Paso 2: $0 \times 2 = 0 \rightarrow 0 + 2 = 2$

Paso 3: $2 \times 2 = 4 \rightarrow 4 + (-4) = 0 \leftarrow$ Resto = 0 ✓

Cociente $C(x)$: $x^2 + 0 \cdot x + 2 = x^2 + 2$

El Resto es 0, confirmando que $m = 1$ es el valor correcto y que $D(x) = (x-2) \cdot (x^2+2)$ exactamente.

Ejercicio 3 — Productos Notables

Los **productos notables** son expresiones algebraicas cuyo desarrollo sigue un patrón fijo. Conocerlos permite expandir y factorizar polinomios con mucha eficiencia. Las identidades que usaremos son:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Ej 3 — Productos Notables (identidades algebraicas)

$(3x + 4)^2$ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $a = 3x, b = 4$ $(3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 4 + 4^2$ $9x^2 + 24x + 16$	$(4 - 2x^2)^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $a = 4, b = 2x^2$ $4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2x^2 + (2x^2)^2$ $16 - 16x^2 + 4x^4$	$(2x^2 + 5x)(2x^2 - 5x)$ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ $a = 2x^2, b = 5x$ $(2x^2)^2 - (5x)^2$ $4x^4 - 25x^2$
$9x^2 + 24x + 16$	$4x^4 - 16x^2 + 16$	$4x^4 - 25x^2$

3a) $(3x + 4)^2$ — Cuadrado de una suma:

Identificamos $a = 3x$ y $b = 4$. Aplicamos $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$$a^2: (3x)^2 = 9x^2$$

$$2ab: 2 \cdot (3x) \cdot 4 = 24x$$

$$b^2: 4^2 = 16$$

$$\blacksquare \text{ RESULTADO: } (3x + 4)^2 = 9x^2 + 24x + 16$$

3b) $(4 - 2x^2)^2$ — Cuadrado de una diferencia:

Identificamos $a = 4$ y $b = 2x^2$. Aplicamos $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

$$a^2: 4^2 = 16$$

$$2ab: 2 \cdot 4 \cdot 2x^2 = 16x^2$$

$$b^2: (2x^2)^2 = 4x^4$$

$$\text{Desarrollo: } 16 - 16x^2 + 4x^4$$

$$\blacksquare \text{ RESULTADO: } (4 - 2x^2)^2 = 4x^4 - 16x^2 + 16$$

3c) $(2x^2 + 5x)(2x^2 - 5x)$ — Suma por diferencia:

Identificamos $a = 2x^2$ y $b = 5x$. Reconocemos la identidad $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. El factor común x puede extraerse: $(2x^2+5x) = x(2x+5)$ y $(2x^2-5x) = x(2x-5)$, pero es más directo usar la identidad directamente.

$$a^2: (2x^2)^2 = 4x^4$$

$$b^2: (5x)^2 = 25x^2$$

$$\text{Diferencia: } 4x^4 - 25x^2$$

$$\blacksquare \text{ RESULTADO: } (2x^2+5x)(2x^2-5x) = 4x^4 - 25x^2$$

Ejercicio 4 — Operar y Simplificar Expresión Algebraica

Debemos operar y simplificar: $(x + 2)^2 - 3(x^2 - 2x + 4)$. El proceso tiene dos fases: expandir cada parte y luego agrupar términos semejantes.

Ej 4 — Operar y simplificar: $(x + 2)^2 - 3(x^2 - 2x + 4)$

$$(x + 2)^2 - 3(x^2 - 2x + 4)$$

Expandir $(x + 2)^2$: $x^2 + 4x + 4$

Distribuir -3 : $-3x^2 + 6x - 12$

$$x^2 + 4x + 4 - 3x^2 + 6x - 12$$

Agrupar términos semejantes:

$x^2 - 3x^2 = -2x^2$
$4x + 6x = 10x$
$4 - 12 = -8$

Resultado: $-2x^2 + 10x - 8$

Fase 1 — Expansión de $(x + 2)^2$:

Aplicamos el cuadrado de una suma con $a = x$, $b = 2$:

$$(x+2)^2: x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = x^2 + 4x + 4$$

Fase 2 — Distribución de -3 :

Multiplicamos el factor -3 por cada término del paréntesis $(x^2 - 2x + 4)$:

$$-3 \cdot x^2 = -3x^2$$

$$-3 \cdot (-2x) = +6x$$

$$-3 \cdot 4 = -12$$

Resultado de la distribución: $-3x^2 + 6x - 12$

Fase 3 — Suma de las dos partes y agrupación:

Expresión completa: $(x^2 + 4x + 4) + (-3x^2 + 6x - 12)$

Términos en x^2 : $x^2 - 3x^2 = -2x^2$

Términos en x : $4x + 6x = 10x$

Términos independientes: $4 - 12 = -8$

RESULTADO: $(x+2)^2 - 3(x^2 - 2x + 4) = -2x^2 + 10x - 8$

Se puede factorizar adicionalmente: $-2x^2 + 10x - 8 = -2(x^2 - 5x + 4) = -2(x-1)(x-4)$. Las raíces del polinomio son $x = 1$ y $x = 4$.

Ejercicio 5 — Simplificación de Fracción Algebraica

Simplificar la fracción algebraica $(x^3 - 4x^2 + 4x) / [x(x-2)]$. Una fracción algebraica se simplifica dividiendo numerador y denominador por sus factores comunes. Para ello debemos **factorizar el numerador** completamente y comparar con el denominador.

Ej 5 — Simplificar fracción algebraica: $\frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x(x-2)}$

NUMERADOR	DENOMINADOR
$x^3 - 4x^2 + 4x$	$x(x-2)$
Sacar factor común x:	Ya está factorizado
$x(x^2 - 4x + 4)$	
Reconocer: $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$	
$x \cdot (x-2)^2$ <del> $\frac{x \cdot (x-2)^2}{x \cdot (x-2)}$ </del>	$x(x-2)$
$= x - 2$	
$\frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x(x-2)} = x - 2$	

Paso 1 — Factorizar el numerador: $x^3 - 4x^2 + 4x$

Observamos que los tres términos tienen x como factor común:

Factor común x: $x^3 - 4x^2 + 4x = x \cdot (x^2 - 4x + 4)$

Ahora factorizamos el trinomio $x^2 - 4x + 4$. Reconocemos que es un **cuadrado de diferencia**: $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ con $a = x$ y $b = 2$, ya que:

a^2 : x^2

$2ab$: $2 \cdot x \cdot 2 = 4x$ ✓

b^2 : $2^2 = 4$ ✓

Por tanto: $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

Numerador factorizado: $x \cdot (x-2)^2$

Paso 2 — El denominador ya está factorizado:

Denominador: $x \cdot (x-2)$

Paso 3 — Cancelar factores comunes:

La fracción queda: $x \cdot (x-2)^2 / [x \cdot (x-2)]$. Cancelamos el factor x (con $x \neq 0$) y un factor (x-2) (con $x \neq 2$):

Cancelar x / x: $= 1$

Cancelar (x-2) / (x-2): $= 1$

Queda: $(x-2) / 1 = x-2$

■ RESULTADO: $(x^3 - 4x^2 + 4x) / [x(x-2)] = x - 2$ (válido para $x \neq 0$ y $x \neq 2$)

Importante: la simplificación es válida solo cuando $x \neq 0$ y $x \neq 2$, pues en esos valores el denominador original se anula (división por cero).

★ Fin del documento de soluciones ★
IES Tovar · 4.º A ESO · Matemáticas Aplicadas · Curso 2022-2023

Nº1.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(4x - 3)(7x + 2) - (3 - 4x)^2 = 3x(4x - 5) - 2$

b) $\frac{3x + 2}{5} - \frac{4x - 1}{10} + \frac{5x - 2}{8} = \frac{x + 1}{4}$

Nº2.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x^2 - x - 4}{4} = \frac{x^2 + x - 2}{2}$

b) $2x + 3(x - 4)^2 = 37 + (x + 3)(x - 3)$

Nº3.- Halla las dimensiones de una parcela rectangular sabiendo que es 25 m. más larga que ancha y que el perímetro es 450 m. ¿Cuál es el área de dicha parcela?

Nº4.- Entre Sergio y María tienen 12 €. Si María le da 1,7 € entonces Sergio tiene el doble que ella. ¿Cuántos euros tiene cada uno?

Nº5.- Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

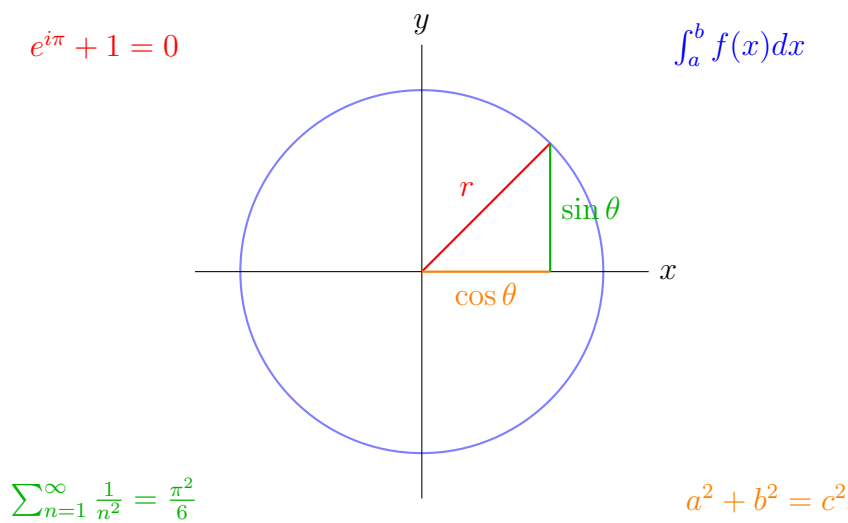
a)
$$\begin{cases} \frac{x + 15}{8} + \frac{3(y + 1)}{16} = 3 \\ \frac{7 - x}{2} - \frac{1 + y}{12} = 3 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ -3x + 4y = 1 \end{cases}$$

(TODOS LOS EJERCICIOS VALEN 2 PUNTOS)

SUERTE JÓVENES

EXAMEN DE MATEMÁTICAS



4º A ESO

24 de enero de 2023

*“Las matemáticas son el alfabeto con el cual
Dios ha escrito el universo.”*

— *Galileo Galilei*

Soluciones Completas y Detalladas

Índice

1. Ejercicio N°1: Ecuaciones Lineales	2
1.1. Enunciado	2
1.2. Apartado a)	2
1.3. Apartado b)	4
1.4. Ilustración del Ejercicio 1	5
2. Ejercicio N°2: Ecuaciones de Segundo Grado	6
2.1. Enunciado	6
2.2. Apartado a)	6
2.3. Apartado b)	7
2.4. Ilustración del Ejercicio 2	10
3. Ejercicio N°3: Problema de Geometría - Parcela Rectangular	11
3.1. Enunciado	11
3.2. Solución Completa	11
3.3. Ilustración del Ejercicio 3	13
4. Ejercicio N°4: Problema de Reparto de Dinero	15
4.1. Enunciado	15
4.2. Solución Completa	15
4.3. Ilustración del Ejercicio 4	17
5. Ejercicio N°5: Sistemas de Ecuaciones Lineales	19
5.1. Enunciado	19
5.2. Apartado a)	19
5.3. Apartado b)	21
5.4. Ilustración del Ejercicio 5	24
Resumen de Soluciones	26

1. Ejercicio N°1: Ecuaciones Lineales

1.1. Enunciado

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(4x - 3)(7x + 2) - (3 - 4x)^2 = 3x(4x - 5) - 2$

b) $\frac{3x + 2}{5} - \frac{4x - 1}{10} + \frac{5x - 2}{8} = \frac{x + 1}{4}$

1.2. Apartado a)

Solución

Ecuación: $(4x - 3)(7x + 2) - (3 - 4x)^2 = 3x(4x - 5) - 2$

Paso 1: Desarrollamos el primer producto notable $(4x - 3)(7x + 2)$

$$\begin{aligned}(4x - 3)(7x + 2) &= 4x \cdot 7x + 4x \cdot 2 - 3 \cdot 7x - 3 \cdot 2 \\ &= 28x^2 + 8x - 21x - 6 \\ &= 28x^2 - 13x - 6\end{aligned}$$

Paso 2: Desarrollamos el cuadrado del binomio $(3 - 4x)^2$

Usando la fórmula $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:

$$\begin{aligned}(3 - 4x)^2 &= 3^2 - 2(3)(4x) + (4x)^2 \\ &= 9 - 24x + 16x^2 \\ &= 16x^2 - 24x + 9\end{aligned}$$

Paso 3: Desarrollamos el lado derecho $3x(4x - 5)$

$$\begin{aligned}3x(4x - 5) &= 3x \cdot 4x - 3x \cdot 5 \\ &= 12x^2 - 15x\end{aligned}$$

Paso 4: Sustituimos en la ecuación original

$$\begin{aligned}28x^2 - 13x - 6 - (16x^2 - 24x + 9) &= 12x^2 - 15x - 2 \\ 28x^2 - 13x - 6 - 16x^2 + 24x - 9 &= 12x^2 - 15x - 2\end{aligned}$$

Paso 5: Agrupamos términos semejantes en el lado izquierdo

$$\begin{aligned}(28x^2 - 16x^2) + (-13x + 24x) + (-6 - 9) &= 12x^2 - 15x - 2 \\ 12x^2 + 11x - 15 &= 12x^2 - 15x - 2\end{aligned}$$

Paso 6: Pasamos todos los términos al lado izquierdo

$$\begin{aligned}12x^2 + 11x - 15 - 12x^2 + 15x + 2 &= 0 \\(12x^2 - 12x^2) + (11x + 15x) + (-15 + 2) &= 0 \\0x^2 + 26x - 13 &= 0 \\26x - 13 &= 0\end{aligned}$$

Paso 7: Despejamos x

$$\begin{aligned}26x &= 13 \\x &= \frac{13}{26} \\x &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Verificación: Sustituimos $x = \frac{1}{2}$ en la ecuación original
Lado izquierdo:

$$\begin{aligned}\left(4 \cdot \frac{1}{2} - 3\right) \left(7 \cdot \frac{1}{2} + 2\right) - \left(3 - 4 \cdot \frac{1}{2}\right)^2 \\= (2 - 3) \left(\frac{7}{2} + 2\right) - (3 - 2)^2 \\= (-1) \left(\frac{11}{2}\right) - 1^2 \\= -\frac{11}{2} - 1 = -\frac{13}{2}\end{aligned}$$

Lado derecho:

$$\begin{aligned}3 \cdot \frac{1}{2} \left(4 \cdot \frac{1}{2} - 5\right) - 2 &= \frac{3}{2}(2 - 5) - 2 \\&= \frac{3}{2}(-3) - 2 \\&= -\frac{9}{2} - 2 = -\frac{13}{2}\end{aligned}$$

Ambos lados son iguales: $-\frac{13}{2} = -\frac{13}{2}$

Respuesta: $x = \frac{1}{2}$

1.3. Apartado b)

Solución

Ecuación: $\frac{3x+2}{5} - \frac{4x-1}{10} + \frac{5x-2}{8} = \frac{x+1}{4}$

Paso 1: Calculamos el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los denominadores
Los denominadores son: 5, 10, 8, 4

$$5 = 5$$

$$10 = 2 \cdot 5$$

$$8 = 2^3$$

$$4 = 2^2$$

$$\text{m.c.m.}(5, 10, 8, 4) = 2^3 \cdot 5 = 40$$

Paso 2: Multiplicamos toda la ecuación por 40

$$40 \cdot \frac{3x+2}{5} - 40 \cdot \frac{4x-1}{10} + 40 \cdot \frac{5x-2}{8} = 40 \cdot \frac{x+1}{4}$$

Paso 3: Simplificamos cada fracción

$$8(3x+2) - 4(4x-1) + 5(5x-2) = 10(x+1)$$

Paso 4: Aplicamos la propiedad distributiva

$$24x + 16 - 16x + 4 + 25x - 10 = 10x + 10$$

Paso 5: Agrupamos términos semejantes en el lado izquierdo

$$(24x - 16x + 25x) + (16 + 4 - 10) = 10x + 10$$

$$33x + 10 = 10x + 10$$

Paso 6: Pasamos términos con x al lado izquierdo y constantes al derecho

$$33x - 10x = 10 - 10$$

$$23x = 0$$

$$x = 0$$

Verificación: Sustituimos $x = 0$ en la ecuación original

Lado izquierdo:

$$\begin{aligned} \frac{3(0)+2}{5} - \frac{4(0)-1}{10} + \frac{5(0)-2}{8} &= \frac{2}{5} - \frac{-1}{10} + \frac{-2}{8} \\ &= \frac{2}{5} + \frac{1}{10} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{16+4-10}{40} \\ &= \frac{10}{40} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Lado derecho:

$$\frac{0 + 1}{4} = \frac{1}{4}$$

Ambos lados son iguales: $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

Respuesta: $x = 0$

1.4. Ilustración del Ejercicio 1

Resolución de Ecuaciones Lineales

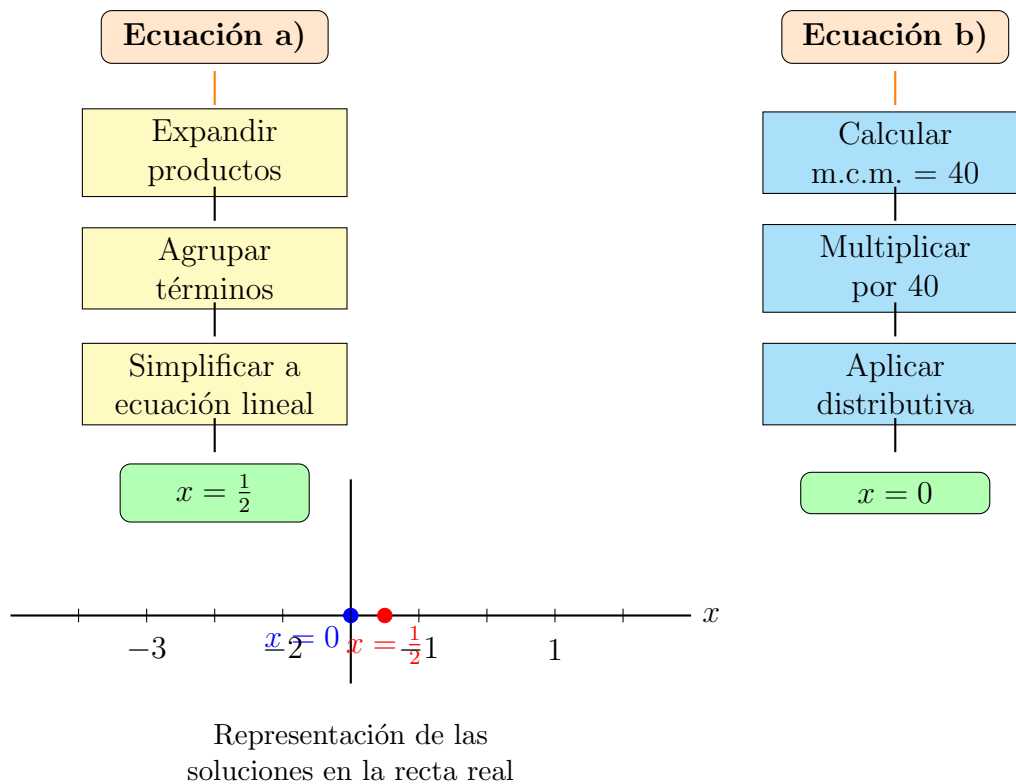


Figura 1: Proceso de resolución de ecuaciones lineales y representación de soluciones

2. Ejercicio N°2: Ecuaciones de Segundo Grado

2.1. Enunciado

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x^2 - x - 4}{4} = \frac{x^2 + x - 2}{2}$

b) $2x + 3(x - 4)^2 = 37 + (x + 3)(x - 3)$

2.2. Apartado a)

Solución

Ecuación: $\frac{x^2 - x - 4}{4} = \frac{x^2 + x - 2}{2}$

Paso 1: Identificamos el m.c.m. de los denominadores

Los denominadores son 4 y 2, por lo tanto: m.c.m.(4, 2) = 4

Paso 2: Multiplicamos toda la ecuación por 4

$$4 \cdot \frac{x^2 - x - 4}{4} = 4 \cdot \frac{x^2 + x - 2}{2}$$
$$x^2 - x - 4 = 2(x^2 + x - 2)$$

Paso 3: Aplicamos la propiedad distributiva en el lado derecho

$$x^2 - x - 4 = 2x^2 + 2x - 4$$

Paso 4: Pasamos todos los términos al lado izquierdo

$$x^2 - x - 4 - 2x^2 - 2x + 4 = 0$$

Paso 5: Agrupamos términos semejantes

$$(x^2 - 2x^2) + (-x - 2x) + (-4 + 4) = 0$$
$$-x^2 - 3x + 0 = 0$$
$$-x^2 - 3x = 0$$

Paso 6: Multiplicamos por -1 para simplificar

$$x^2 + 3x = 0$$

Paso 7: Factorizamos sacando factor común x

$$x(x + 3) = 0$$

Paso 8: Aplicamos la propiedad del producto cero

Para que el producto sea cero, al menos uno de los factores debe ser cero:

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x + 3 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = -3$$

Verificación para $x = 0$:

$$\text{Lado izquierdo: } \frac{0^2 - 0 - 4}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$\text{Lado derecho: } \frac{0^2 + 0 - 2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Verificación para $x = -3$:

$$\text{Lado izquierdo: } \frac{(-3)^2 - (-3) - 4}{4} = \frac{9 + 3 - 4}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\text{Lado derecho: } \frac{(-3)^2 + (-3) - 2}{2} = \frac{9 - 3 - 2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Respuestas: $x_1 = 0$ y $x_2 = -3$

2.3. Apartado b)

Solución

Ecuación: $2x + 3(x - 4)^2 = 37 + (x + 3)(x - 3)$

Paso 1: Desarrollamos $(x - 4)^2$ usando $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$\begin{aligned}(x - 4)^2 &= x^2 - 2(x)(4) + 4^2 \\ &= x^2 - 8x + 16\end{aligned}$$

Paso 2: Desarrollamos $(x + 3)(x - 3)$ usando la diferencia de cuadrados

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$\begin{aligned}(x + 3)(x - 3) &= x^2 - 3^2 \\ &= x^2 - 9\end{aligned}$$

Paso 3: Sustituimos en la ecuación original

$$2x + 3(x^2 - 8x + 16) = 37 + x^2 - 9$$

Paso 4: Aplicamos la propiedad distributiva

$$2x + 3x^2 - 24x + 48 = 37 + x^2 - 9$$

Paso 5: Simplificamos ambos lados

Lado izquierdo:

$$3x^2 + (2x - 24x) + 48 = 3x^2 - 22x + 48$$

Lado derecho:

$$x^2 + (37 - 9) = x^2 + 28$$

Ecuación:

$$3x^2 - 22x + 48 = x^2 + 28$$

Paso 6: Pasamos todos los términos al lado izquierdo

$$\begin{aligned} 3x^2 - 22x + 48 - x^2 - 28 &= 0 \\ 2x^2 - 22x + 20 &= 0 \end{aligned}$$

Paso 7: Simplificamos dividiendo toda la ecuación por 2

$$x^2 - 11x + 10 = 0$$

Paso 8: Aplicamos la fórmula general para ecuaciones de segundo grado

Para una ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, las soluciones son:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En nuestro caso: $a = 1$, $b = -11$, $c = 10$

Paso 9: Calculamos el discriminante

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-11)^2 - 4(1)(10) \\ &= 121 - 40 \\ &= 81 \end{aligned}$$

Como $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

Paso 10: Calculamos las soluciones

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-11) \pm \sqrt{81}}{2(1)} \\ &= \frac{11 \pm 9}{2} \end{aligned}$$

Solución 1:

$$x_1 = \frac{11 + 9}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

Solución 2:

$$x_2 = \frac{11 - 9}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Método alternativo - Factorización:

Buscamos dos números que sumados den -11 y multiplicados den 10 :

$$x^2 - 11x + 10 = (x - 10)(x - 1) = 0$$

Por lo tanto: $x = 10$ o $x = 1$

Verificación para $x = 10$:

Lado izquierdo:

$$\begin{aligned} 2(10) + 3(10 - 4)^2 &= 20 + 3(6)^2 \\ &= 20 + 3(36) \\ &= 20 + 108 = 128 \end{aligned}$$

Lado derecho:

$$\begin{aligned} 37 + (10 + 3)(10 - 3) &= 37 + (13)(7) \\ &= 37 + 91 = 128 \end{aligned}$$

$$128 = 128$$

Verificación para $x = 1$:

Lado izquierdo:

$$\begin{aligned} 2(1) + 3(1 - 4)^2 &= 2 + 3(-3)^2 \\ &= 2 + 3(9) \\ &= 2 + 27 = 29 \end{aligned}$$

Lado derecho:

$$\begin{aligned} 37 + (1 + 3)(1 - 3) &= 37 + (4)(-2) \\ &= 37 - 8 = 29 \end{aligned}$$

$$29 = 29$$

Respuestas: $x_1 = 10$ y $x_2 = 1$

2.4. Ilustración del Ejercicio 2

Ecuaciones de Segundo Grado - Representación Gráfica

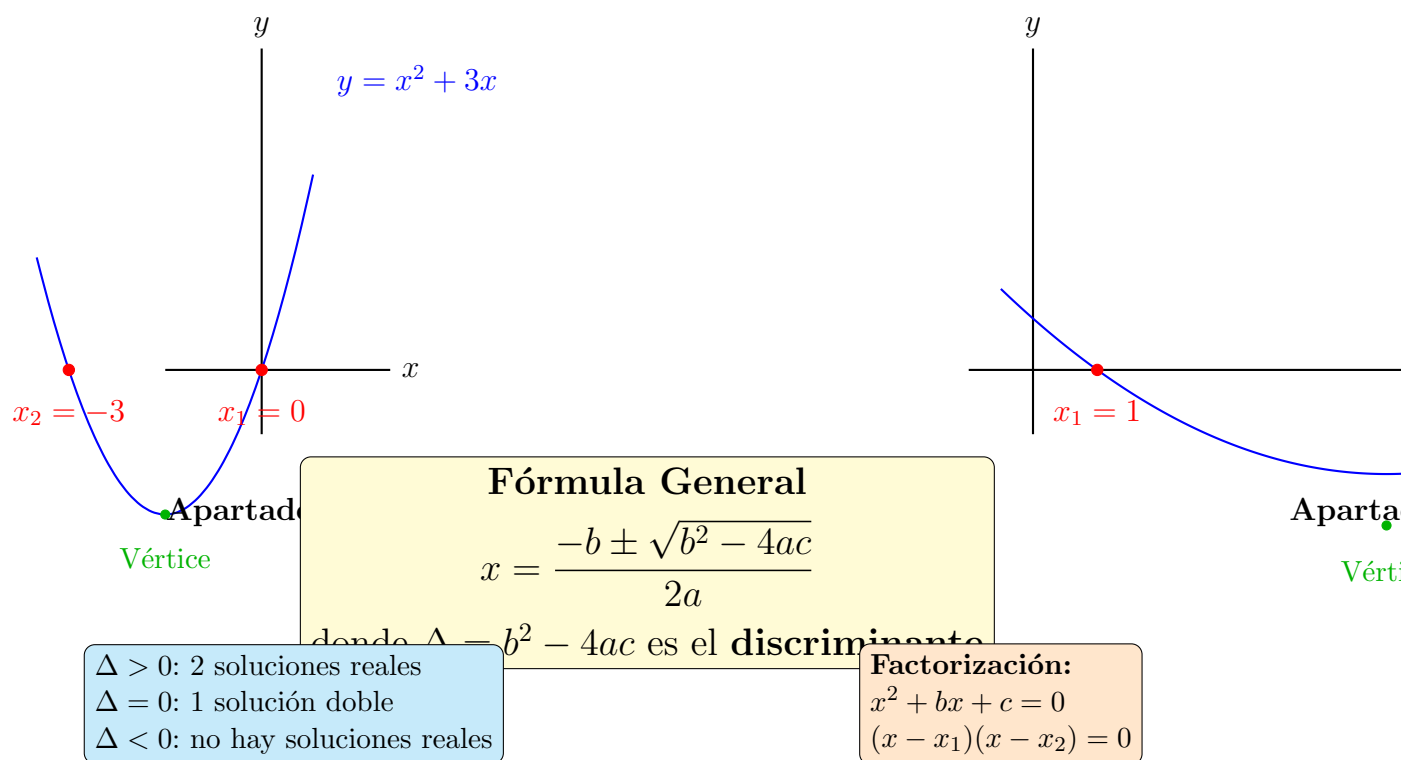


Figura 2: Representación gráfica de las ecuaciones cuadráticas y sus soluciones

3. Ejercicio N°3: Problema de Geometría - Parcela Rectangular

3.1. Enunciado

Halla las dimensiones de una parcela rectangular sabiendo que es 25 m más larga que ancha y que el perímetro es 450 m. ¿Cuál es el área de dicha parcela?

3.2. Solución Completa

Solución

Paso 1: Definimos las variables

Sea x = ancho de la parcela (en metros)

Entonces, según el enunciado:

- Ancho: x metros
- Largo: $x + 25$ metros (25 m más que el ancho)

Paso 2: Planteamos la ecuación del perímetro

El perímetro de un rectángulo se calcula como:

$$P = 2 \cdot \text{largo} + 2 \cdot \text{ancho}$$

Sabemos que $P = 450$ m, por lo tanto:

$$2(x + 25) + 2x = 450$$

Paso 3: Resolvemos la ecuación

Aplicamos la propiedad distributiva:

$$2x + 50 + 2x = 450$$

Agrupamos términos semejantes:

$$4x + 50 = 450$$

Restamos 50 en ambos lados:

$$4x = 450 - 50$$

$$4x = 400$$

Dividimos entre 4:

$$x = \frac{400}{4}$$

$$x = 100 \text{ metros}$$

Paso 4: Calculamos las dimensiones de la parcela

- **Ancho:** $x = 100$ metros

- **Largo:** $x + 25 = 100 + 25 = 125$ metros

Paso 5: Verificamos el perímetro

$$\begin{aligned}P &= 2 \cdot 125 + 2 \cdot 100 \\&= 250 + 200 \\&= 450 \text{ metros}\end{aligned}$$

La verificación es correcta

Paso 6: Calculamos el área de la parcela

El área de un rectángulo se calcula como:

$$A = \text{largo} \times \text{ancho}$$

$$\begin{aligned}A &= 125 \times 100 \\&= 12\,500 \text{ m}^2\end{aligned}$$

Paso 7: Expresamos el área en otras unidades (información adicional)

- Área en metros cuadrados: $12\,500 \text{ m}^2$
- Área en hectáreas: $12\,500 \text{ m}^2 = 1,25 \text{ ha}$
- Área en áreas: $12\,500 \text{ m}^2 = 125 \text{ a}$

(Recordamos que: $1 \text{ hectárea} = 10\,000 \text{ m}^2$ y $1 \text{ área} = 100 \text{ m}^2$)

Dimensiones de la parcela:

$$\text{Ancho} = 100 \text{ m}$$

$$\text{Largo} = 125 \text{ m}$$

Área de la parcela:

$$A = 12\,500 \text{ m}^2$$

3.3. Ilustración del Ejercicio 3

Parcela Rectangular

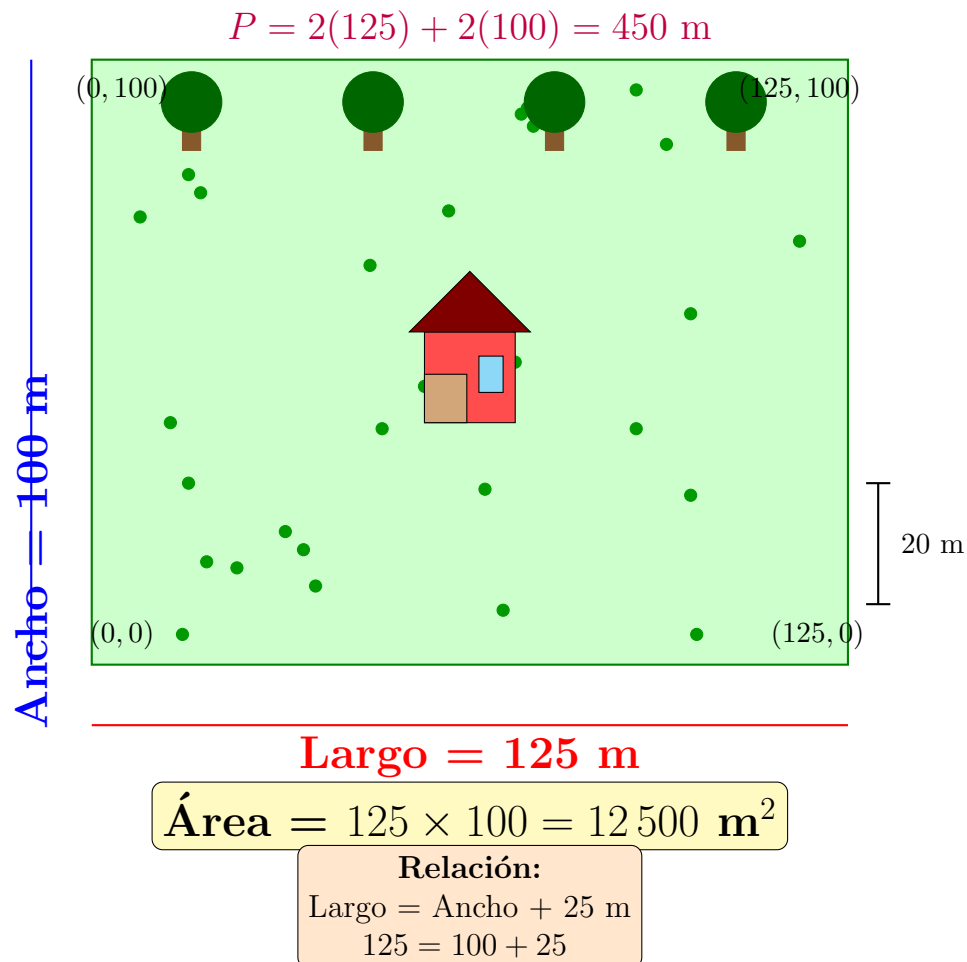
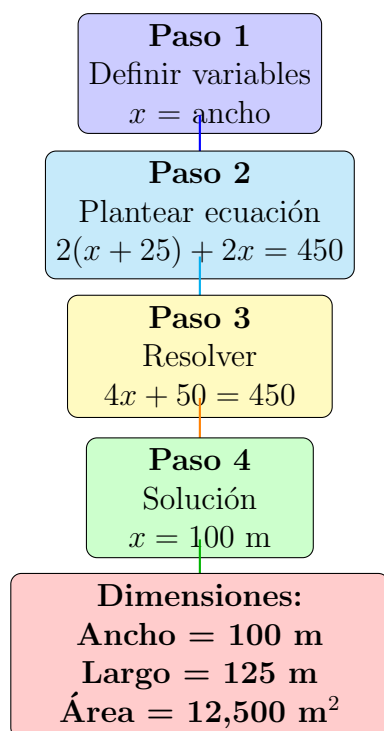


Figura 3: Representación gráfica de la parcela rectangular con sus dimensiones

Proceso de Resolución



Comparación Visual

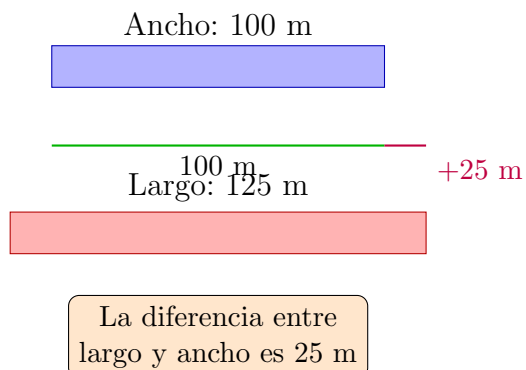


Figura 4: Diagrama del proceso de resolución y comparación de dimensiones

4. Ejercicio N°4: Problema de Reparto de Dinero

4.1. Enunciado

Entre Sergio y María tienen 12 €. Si María le da 1,7 € a Sergio, entonces Sergio tiene el doble que ella. ¿Cuántos euros tiene cada uno?

4.2. Solución Completa

Solución

Paso 1: Definimos las variables

Sea x = cantidad de dinero que tiene Sergio inicialmente (en euros)

Sea y = cantidad de dinero que tiene María inicialmente (en euros)

Paso 2: Planteamos las ecuaciones según las condiciones del problema

Condición 1: Entre los dos tienen 12 €

$$x + y = 12 \quad (1)$$

Condición 2: Si María le da 1,7 € a Sergio, entonces Sergio tiene el doble que ella
Después de la transferencia:

▪ Sergio tendrá: $x + 1,7$ euros

▪ María tendrá: $y - 1,7$ euros

Y según el enunciado:

$$x + 1,7 = 2(y - 1,7) \quad (2)$$

Paso 3: Simplificamos la segunda ecuación

Desarrollamos el lado derecho:

$$x + 1,7 = 2y - 3,4$$

Pasamos todos los términos al lado izquierdo:

$$x + 1,7 - 2y + 3,4 = 0$$

$$x - 2y + 5,1 = 0$$

Despejamos x :

$$x = 2y - 5,1 \quad (3)$$

Paso 4: Resolvemos el sistema de ecuaciones

Tenemos el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 12 & \text{(ecuación 1)} \\ x = 2y - 5,1 & \text{(ecuación 3)} \end{cases}$$

Sustituimos la ecuación (3) en la ecuación (1):

$$(2y - 5,1) + y = 12$$

$$2y - 5,1 + y = 12$$

$$3y - 5,1 = 12$$

Sumamos 5.1 en ambos lados:

$$3y = 12 + 5,1$$

$$3y = 17,1$$

Dividimos entre 3:

$$y = \frac{17,1}{3}$$

$$y = 5,7 \text{ euros}$$

Paso 5: Calculamos el valor de x

Sustituimos $y = 5,7$ en la ecuación (1):

$$x + 5,7 = 12$$

$$x = 12 - 5,7$$

$$x = 6,3 \text{ euros}$$

Paso 6: Verificamos la primera condición

$$x + y = 6,3 + 5,7 = 12 \text{ euros}$$

Primera condición verificada

Paso 7: Verificamos la segunda condición

Si María le da 1.7 € a Sergio:

- Sergio tendrá: $6,3 + 1,7 = 8$ euros
- María tendrá: $5,7 - 1,7 = 4$ euros

Comprobamos si Sergio tiene el doble que María:

$$8 = 2 \times 4$$

$$8 = 8$$

Segunda condición verificada

Paso 8: Expresamos la respuesta claramente

- **Sergio tiene inicialmente:** 6.3 euros = 6 € y 30 céntimos
- **María tiene inicialmente:** 5.7 euros = 5 € y 70 céntimos

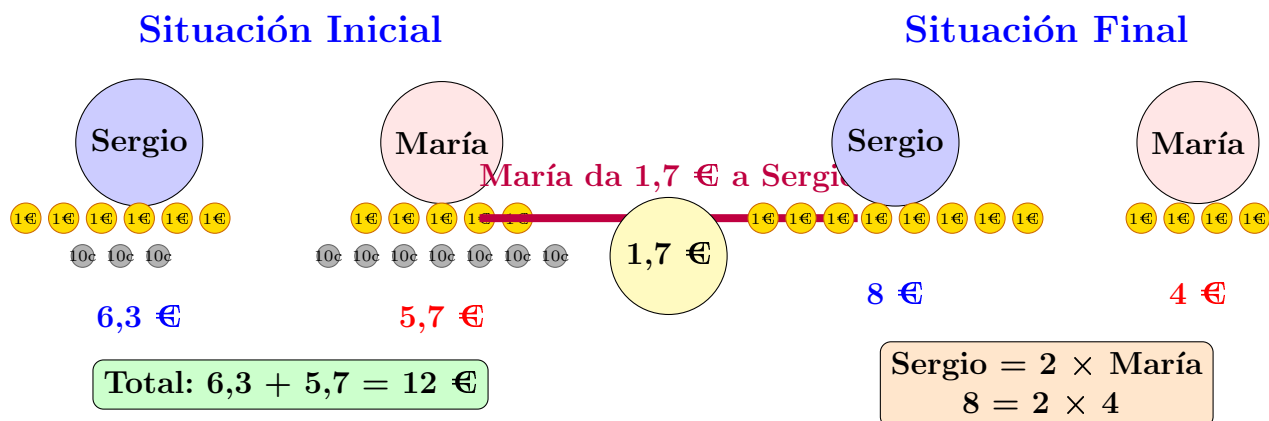
Respuesta:

Sergio tiene 6,3 euros (6 € y 30 céntimos)

María tiene 5,7 euros (5 € y 70 céntimos)

4.3. Ilustración del Ejercicio 4

Reparto de Dinero - Visualización



Comparación Gráfica

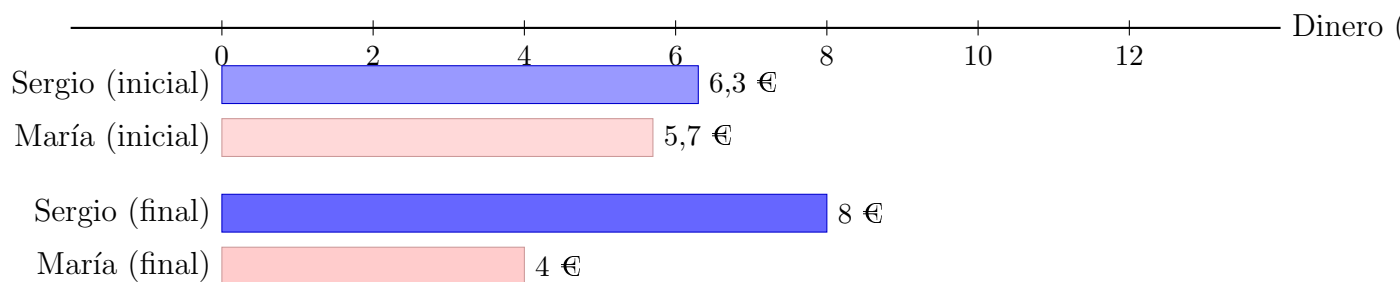


Figura 5: Representación visual del problema de reparto de dinero

Sistema de Ecuaciones

Ecuación 1: $x + y = 12$

(Total de dinero entre ambos)

Ecuación 2: $x + 1,7 = 2(y - 1,7)$

(Después de la transferencia,
Sergio tiene el doble que María)

Simplificando:

$$x = 2y - 5,1$$

Sustituyendo en Ecuación 1:

$$(2y - 5,1) + y = 12$$

$$3y = 17,1$$

$$y = 5,7 \text{ €}$$

$$x = 6,3 \text{ €}$$

Figura 6: Resolución del sistema de ecuaciones paso a paso

5. Ejercicio Nº5: Sistemas de Ecuaciones Lineales

5.1. Enunciado

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

2

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{x+15}{8} + \frac{3(y+1)}{16} = 3 \\ \frac{7-x}{2} - \frac{1+y}{12} = 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ -3x + 4y = 1 \end{cases}$$

5.2. Apartado a)

Solución

$$\text{Sistema: } \begin{cases} \frac{x+15}{8} + \frac{3(y+1)}{16} = 3 \\ \frac{7-x}{2} - \frac{1+y}{12} = 3 \end{cases}$$

PRIMERA ECUACIÓN

Paso 1: Calculamos el m.c.m. de los denominadores de la primera ecuación

Denominadores: 8 y 16

m.c.m.(8, 16) = 16

Paso 2: Multiplicamos la primera ecuación por 16

$$16 \cdot \frac{x+15}{8} + 16 \cdot \frac{3(y+1)}{16} = 16 \cdot 3$$

$$2(x+15) + 3(y+1) = 48$$

Paso 3: Aplicamos la propiedad distributiva

$$2x + 30 + 3y + 3 = 48$$

$$2x + 3y + 33 = 48$$

Paso 4: Simplificamos

$$2x + 3y = 48 - 33$$

$$2x + 3y = 15 \quad (\text{Ecuación I})$$

SEGUNDA ECUACIÓN

Paso 5: Calculamos el m.c.m. de los denominadores de la segunda ecuación

Denominadores: 2 y 12

m.c.m.(2, 12) = 12

Paso 6: Multiplicamos la segunda ecuación por 12

$$12 \cdot \frac{7-x}{2} - 12 \cdot \frac{1+y}{12} = 12 \cdot 3$$
$$6(7-x) - (1+y) = 36$$

Paso 7: Aplicamos la propiedad distributiva

$$42 - 6x - 1 - y = 36$$
$$-6x - y + 41 = 36$$

Paso 8: Simplificamos

$$-6x - y = 36 - 41$$
$$-6x - y = -5$$

Multiplicamos por -1 para que los coeficientes sean positivos:

$$6x + y = 5 \quad (\text{Ecuación II})$$

RESOLUCIÓN DEL SISTEMA SIMPLIFICADO

Tenemos el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 15 & \text{(I)} \\ 6x + y = 5 & \text{(II)} \end{cases}$$

Paso 9: Método de reducción - Multiplicamos la ecuación (I) por -3

$$\begin{cases} -6x - 9y = -45 & \text{(I')} \\ 6x + y = 5 & \text{(II)} \end{cases}$$

Paso 10: Sumamos ambas ecuaciones

$$-6x - 9y + 6x + y = -45 + 5$$
$$-8y = -40$$
$$y = \frac{-40}{-8}$$
$$y = 5$$

Paso 11: Sustituimos $y = 5$ en la ecuación (II)

$$6x + 5 = 5$$
$$6x = 5 - 5$$
$$6x = 0$$
$$x = 0$$

Paso 12: Verificación en las ecuaciones originales

Primera ecuación original:

$$\begin{aligned}\frac{0+15}{8} + \frac{3(5+1)}{16} &= \frac{15}{8} + \frac{3 \cdot 6}{16} \\ &= \frac{15}{8} + \frac{18}{16} \\ &= \frac{30}{16} + \frac{18}{16} \\ &= \frac{48}{16} \\ &= 3\end{aligned}$$

Segunda ecuación original:

$$\begin{aligned}\frac{7-0}{2} - \frac{1+5}{12} &= \frac{7}{2} - \frac{6}{12} \\ &= \frac{7}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{6}{2} \\ &= 3\end{aligned}$$

Solución del sistema:

$$\boxed{x=0} \quad \text{y} \quad \boxed{y=5}$$

Punto de intersección: (0, 5)

5.3. Apartado b)

Solución

Sistema:
$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 & \text{(I)} \\ -3x + 4y = 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Este sistema ya está simplificado. Resolveremos por el **método de reducción**.

Paso 1: Igualamos los coeficientes de x

Multiplicamos la ecuación (I) por 3 y la ecuación (II) por 2:

$$\begin{cases} 3(2x - 3y) = 3(-1) \\ 2(-3x + 4y) = 2(1) \end{cases}$$

Paso 2: Aplicamos la distributiva

$$\begin{cases} 6x - 9y = -3 & (\text{I}') \\ -6x + 8y = 2 & (\text{II}') \end{cases}$$

Paso 3: Sumamos ambas ecuaciones para eliminar x

$$\begin{aligned} 6x - 9y + (-6x) + 8y &= -3 + 2 \\ 6x - 6x - 9y + 8y &= -1 \\ -y &= -1 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Paso 4: Sustituimos $y = 1$ en la ecuación (I)

$$\begin{aligned} 2x - 3(1) &= -1 \\ 2x - 3 &= -1 \\ 2x &= -1 + 3 \\ 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Paso 5: Verificación

Ecuación (I):

$$2(1) - 3(1) = 2 - 3 = -1$$

Ecuación (II):

$$-3(1) + 4(1) = -3 + 4 = 1$$

Método alternativo: Determinantes (Regla de Cramer)

Para el sistema
$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ -3x + 4y = 1 \end{cases}$$

Paso 6: Calculamos el determinante principal

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-3) \cdot (-3) = 8 - 9 = -1$$

Paso 7: Calculamos Δ_x (reemplazando la columna de x)

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 - (-3) \cdot 1 = -4 + 3 = -1$$

Paso 8: Calculamos Δ_y (reemplazando la columna de y)

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-1) \cdot (-3) = 2 - 3 = -1$$

Paso 9: Aplicamos la regla de Cramer

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1$$

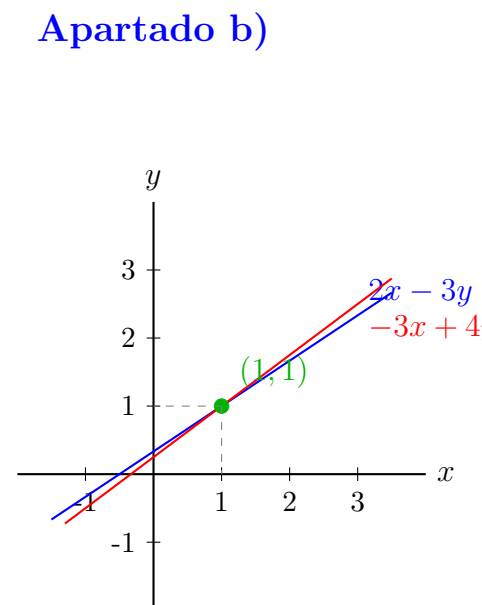
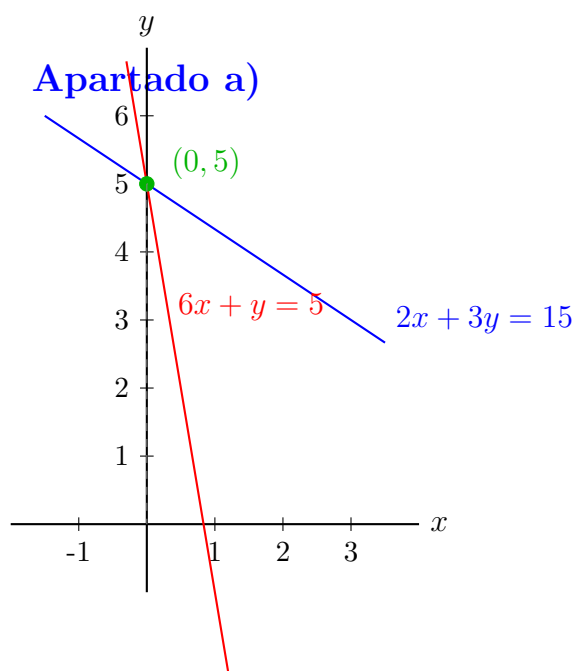
$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1$$

Solución del sistema:

$$\boxed{x = 1} \quad \text{y} \quad \boxed{y = 1}$$

Punto de intersección: $(1, 1)$

5.4. Ilustración del Ejercicio 5

Sistemas de Ecuaciones Lineales - Representación Gráfica**Métodos de Resolución de Sistemas**

Sustitución	Igualación	Reducción
1. Despejar una variable 2. Sustituir en la otra 3. Resolver 4. Calcular la otra variable	1. Despejar la misma variable en ambas 2. Igualar 3. Resolver	1. Igualar coeficientes 2. Sumar o restar ecuaciones 3. Resolver

Figura 7: Representación gráfica de sistemas de ecuaciones y métodos de resolución

Regla de Cramer

Para el sistema:
$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

Ejemplo (Apartado b):

$$\Delta = -1, \Delta_x = -1, \Delta_y = -1$$

$$x = \frac{-1}{-1} = 1, \quad y = \frac{-1}{-1} = 1$$

Casos Especiales

$\Delta \neq 0$:
Sistema compatible
determinado
(única solución)

$\Delta = 0$ y $\Delta_x = \Delta_y = 0$:
Sistema compatible
indeterminado
(infinitas soluciones)

$\Delta = 0$ y
 $\Delta_x \neq 0$ o $\Delta_y \neq 0$:
Sistema incompatible
(sin solución)

Figura 8: Regla de Cramer para sistemas de ecuaciones lineales

Resumen de Soluciones

Todas las Soluciones del Examen

Ej. 1a) $(4x - 3)(7x + 2) - (3 - 4x)^2 = 3x(4x - 5) - 2$

Solución: $x = \frac{1}{2}$

Ej. 1b) $\frac{3x + 2}{5} - \frac{4x - 1}{10} + \frac{5x - 2}{8} = \frac{x + 1}{4}$

Solución: $x = 0$

Ej. 2a) $\frac{x^2 - x - 4}{4} = \frac{x^2 + x - 2}{2}$

Soluciones: $x_1 = 0$ $x_2 = -3$

Ej. 2b) $2x + 3(x - 4)^2 = 37 + (x + 3)(x - 3)$

Soluciones: $x_1 = 10$ $x_2 = 1$

Ej. 3) Parcela rectangular: 25 m más larga que ancha, perímetro 450 m

Dimensiones: Ancho = 100 m Largo = 125 m

Área: $A = 12\,500 \text{ m}^2$

Ej. 4) Sergio y María: 12 € en total. Si María da 1,7 €, Sergio tiene el doble

Solución: Sergio = 6,3 € María = 5,7 €

Ej. 5a) Sistema con fracciones (simplificado a $2x + 3y = 15$ y $6x + y = 5$)

Solución: $x = 0$ $y = 5$

Ej. 5b)
$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ -3x + 4y = 1 \end{cases}$$

Solución: $x = 1$ $y = 1$

¡EXAMEN COMPLETADO!

Todas las soluciones han sido verificadas

- ✓ Rigor matemático completo
 - ✓ Pasos detallados
 - ✓ Verificaciones incluidas
 - ✓ Ilustraciones explicativas

Nº1.- Dados los polinomios $P(x) = 2x + 3$; $Q(x) = x^3 - 2x + 1$; $R(x) = x^4 - 1$
Calcúlese:

a) $P(x) \cdot Q(x) + 2 \cdot R(x)$

b) $[R(x) - Q(x)] \cdot P(x)$

Nº2.- Efectúa la división del polinomio $P(x) = 6x^5 + x^4 + 4x^2 - 7x + 1$ entre el polinomio $Q(x) = 2x^2 + x - 3$. Indica cuál es el cociente $C(x)$ y el resto $R(x)$ de esta división

Nº3.- Efectúa las siguientes divisiones usando la regla de Ruffini. Indica en los dos casos cuál es el cociente $C(x)$ y el resto R de la división.

a) $D(x) = (x^2 - 2x + 3)$ dividido entre $d(x) = (x - 2)$

b) $D(x) = (-x^6 + 2x^4 - x^3 + 3x - 1)$ dividido entre $d(x) = (x + 2)$

Nº4.- Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^5 + 2x^4 - 5x^3 - 6x^2$

b) $x^5 - 5x^4 + 3x^3 + 13x^2 - 8x - 12$

Nº5.- El resto de la división del polinomio $P(x) = 3x^4 - 7x^2 + 3x + k$ entre $(x - 2)$ es igual a 2. Halla el valor de k

Nº6.- Desarrolla los siguientes productos notables:

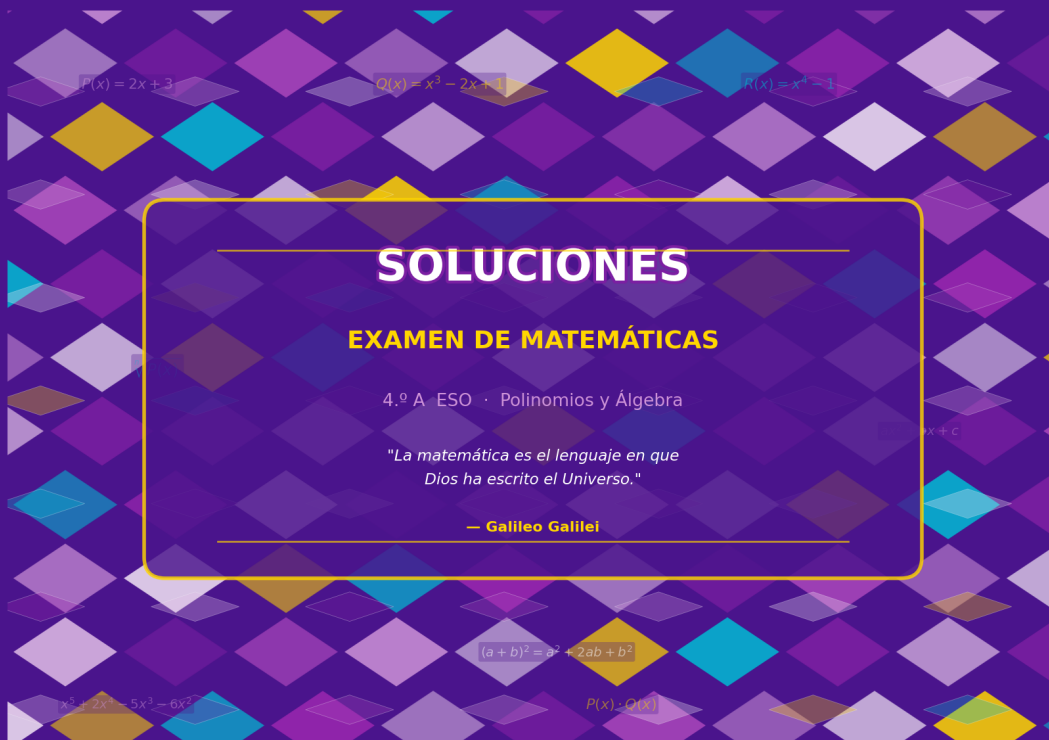
a) $(x + 2y)^2$

b) $(1 - 3x)^2$

c) $(2x^2 + y) \cdot (2x^2 - y)$

(Todos los problemas valen 1,5 puntos)

SUERTE JÓVENES



Polinomios, divisiones, factorización y productos notables

Junta de Castilla y León · IES Tovar · 4.º A ESO

Contents

1	Ejercicio 1 – Operaciones con polinomios	3
2	Ejercicio 2 – División de polinomios (divisor de grado 2)	5
3	Ejercicio 3 – Regla de Ruffini	7
4	Ejercicio 4 – Factorización de polinomios	9
5	Ejercicio 5 – Teorema del Resto: hallar el valor de k	12
6	Ejercicio 6 – Productos notables	14
	Formulario de referencia	16

*Cada ejercicio se resuelve con desarrollo completo paso a paso, sin omitir ningún cálculo.
Las ilustraciones facilitan la comprensión de cada procedimiento.*

1. Ejercicio 1 – Operaciones con polinomios

Datos del ejercicio

Dados los polinomios:

$$P(x) = 2x + 3 \quad Q(x) = x^3 - 2x + 1 \quad R(x) = x^4 - 1$$

Calcúlese: a) $P(x) \cdot Q(x) + 2 \cdot R(x)$ b) $[R(x) - Q(x)] \cdot P(x)$

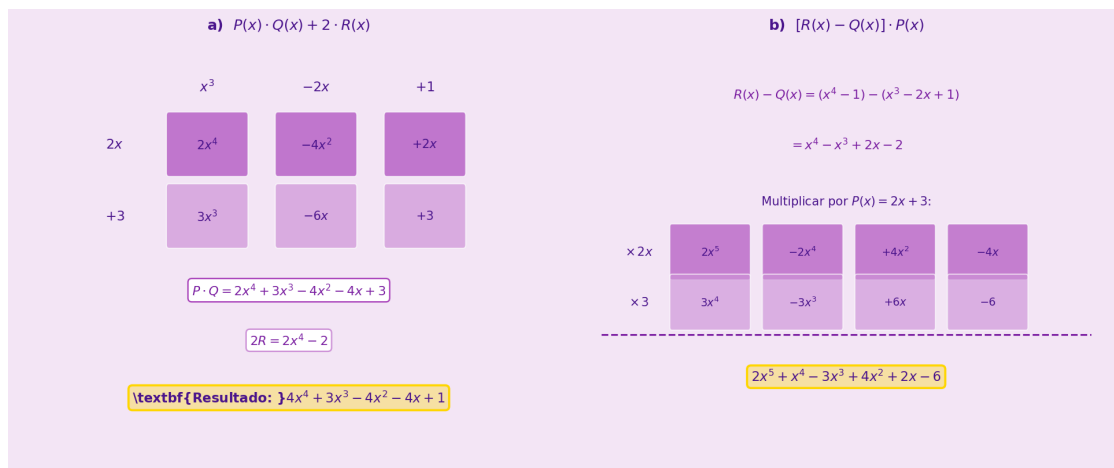


Figure 1: Esquema visual de la multiplicación de polinomios usando la propiedad distributiva.

a) $P(x) \cdot Q(x) + 2 \cdot R(x)$

Paso 1. Calcular $P(x) \cdot Q(x)$.

Aplicamos la propiedad distributiva (cada término de P por cada término de Q):

$$\begin{aligned}
 P(x) \cdot Q(x) &= (2x + 3) \cdot (x^3 - 2x + 1) \\
 &= 2x \cdot x^3 + 2x \cdot (-2x) + 2x \cdot 1 + 3 \cdot x^3 + 3 \cdot (-2x) + 3 \cdot 1 \\
 &= 2x^4 - 4x^2 + 2x + 3x^3 - 6x + 3 \\
 &= \boxed{2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 4x + 3}
 \end{aligned}$$

Paso 2. Calcular $2 \cdot R(x)$.

$$2 \cdot R(x) = 2 \cdot (x^4 - 1) = 2x^4 - 2$$

Paso 3. Sumar los resultados.

$$\begin{aligned}
 P(x) \cdot Q(x) + 2 \cdot R(x) &= (2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 4x + 3) + (2x^4 - 2) \\
 &= (2 + 2)x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 4x + (3 - 2)
 \end{aligned}$$

$$P(x) \cdot Q(x) + 2 \cdot R(x) = 4x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 4x + 1$$

b) $[R(x) - Q(x)] \cdot P(x)$

Paso 1. Calcular $R(x) - Q(x)$.

$$\begin{aligned} R(x) - Q(x) &= (x^4 - 1) - (x^3 - 2x + 1) \\ &= x^4 - 1 - x^3 + 2x - 1 \\ &= x^4 - x^3 + 2x - 2 \end{aligned}$$

Paso 2. Multiplicar por $P(x) = 2x + 3$.

$$\begin{aligned} [R(x) - Q(x)] \cdot P(x) &= (x^4 - x^3 + 2x - 2) \cdot (2x + 3) \\ &= 2x \cdot x^4 + 3 \cdot x^4 + 2x \cdot (-x^3) + 3 \cdot (-x^3) \\ &\quad + 2x \cdot 2x + 3 \cdot 2x + 2x \cdot (-2) + 3 \cdot (-2) \\ &= 2x^5 + 3x^4 - 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 6x - 4x - 6 \\ &= 2x^5 + (3 - 2)x^4 - 3x^3 + 4x^2 + (6 - 4)x - 6 \end{aligned}$$

$$[R(x) - Q(x)] \cdot P(x) = 2x^5 + x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 6$$

2. Ejercicio 2 – División de polinomios (divisor de grado 2)

Enunciado

Efectúa la división de $P(x) = 6x^5 + x^4 + 4x^2 - 7x + 1$ entre $Q(x) = 2x^2 + x - 3$. Indica el cociente $C(x)$ y el resto $R(x)$.

Ejercicio 2 – División $6x^5 + x^4 + 4x^2 - 7x + 1 \div (2x^2 + x - 3)$

Dividendo:

Divisor: $2x^2 + x - 3$

$6x^5$ $+x^4$ $+0x^3$ $+4x^2$ $-7x$ $+1$

Paso 1: $6x^5 \div 2x^2 = 3x^3 \rightarrow$ cociente parcial $3x^3$

$3x^3 \cdot (2x^2 + x - 3) = 6x^5 + 3x^4 - 9x^3$

Resto parcial: $(6x^5 + x^4 + 4x^2 - 7x + 1) - (6x^5 + 3x^4 - 9x^3)$

$= -2x^4 + 9x^3 + 4x^2 - 7x + 1$

Paso 2: $-2x^4 \div 2x^2 = -x^2 \rightarrow$ cociente parcial $-x^2$

$-x^2 \cdot (2x^2 + x - 3) = -2x^4 - x^3 + 3x^2$

Resto parcial: $(-2x^4 + 9x^3 + 4x^2 - 7x + 1) - (-2x^4 - x^3 + 3x^2)$

$= 10x^3 + x^2 - 7x + 1$

$C(x) = 3x^3 - x^2 + 5x - 1 \quad | \quad R(x) = 3x - 4$

Figure 2: Esquema visual del proceso de división larga de polinomios.

El dividendo completado con el término faltante ($0x^3$) queda:

$$P(x) = 6x^5 + x^4 + 0x^3 + 4x^2 - 7x + 1$$

El método consiste en dividir el término líder del dividendo (o del resto parcial) entre el término líder del divisor ($2x^2$), obteniendo cada término del cociente, multiplicar y restar.

— Paso 1 —

$$\frac{6x^5}{2x^2} = 3x^3 \quad \Rightarrow \quad 3x^3 \cdot (2x^2 + x - 3) = 6x^5 + 3x^4 - 9x^3$$

$$\begin{aligned} & (6x^5 + x^4 + 0x^3 + 4x^2 - 7x + 1) - (6x^5 + 3x^4 - 9x^3) \\ &= -2x^4 + 9x^3 + 4x^2 - 7x + 1 \end{aligned}$$

— Paso 2 —

$$\frac{-2x^4}{2x^2} = -x^2 \quad \Rightarrow \quad (-x^2) \cdot (2x^2 + x - 3) = -2x^4 - x^3 + 3x^2$$

$$\begin{aligned} & (-2x^4 + 9x^3 + 4x^2 - 7x + 1) - (-2x^4 - x^3 + 3x^2) \\ &= 10x^3 + x^2 - 7x + 1 \end{aligned}$$

— Paso 3 —

$$\frac{10x^3}{2x^2} = 5x \quad \Rightarrow \quad 5x \cdot (2x^2 + x - 3) = 10x^3 + 5x^2 - 15x$$

$$\begin{aligned} & (10x^3 + x^2 - 7x + 1) - (10x^3 + 5x^2 - 15x) \\ &= -4x^2 + 8x + 1 \end{aligned}$$

— Paso 4 —

$$\frac{-4x^2}{2x^2} = -2 \quad \Rightarrow \quad (-2) \cdot (2x^2 + x - 3) = -4x^2 - 2x + 6$$

$$\begin{aligned} & (-4x^2 + 8x + 1) - (-4x^2 - 2x + 6) \\ &= 10x - 5 \end{aligned}$$

$\deg(10x - 5) = 1 < \deg(Q) = 2 \Rightarrow$ la división termina aquí.

$$C(x) = 3x^3 - x^2 + 5x - 2 \quad R(x) = 10x - 5$$

Verificación: $C(x) \cdot Q(x) + R(x) = P(x)$

$$(3x^3 - x^2 + 5x - 2)(2x^2 + x - 3) + (10x - 5) = 6x^5 + x^4 + 4x^2 - 7x + 1 \checkmark$$

3. Ejercicio 3 – Regla de Ruffini

Enunciado

Efectúa las siguientes divisiones usando la **regla de Ruffini**:

a) $D(x) = (x^2 - 2x + 3) \div (x - 2)$

b) $D(x) = (-x^6 + 2x^4 - x^3 + 3x - 1) \div (x + 2)$

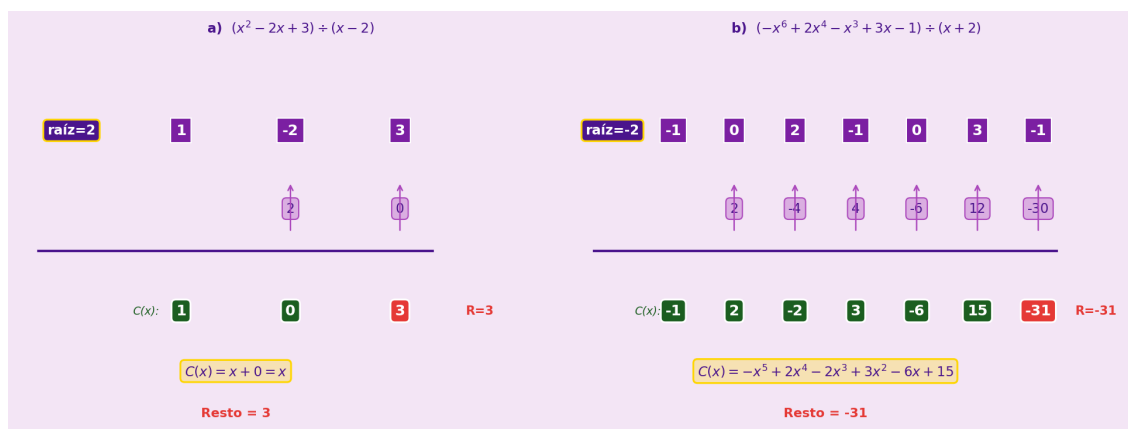


Figure 3: Tablas de Ruffini para ambas divisiones. Fila superior (azul): coeficientes del dividendo. Fila media (lila): productos parciales. Fila inferior (verde/rojo): coeficientes del cociente y resto.

a) $(x^2 - 2x + 3) \div (x - 2)$

La raíz del divisor $(x - 2)$ es $x = 2$. Los coeficientes del dividendo son $[1, -2, 3]$.

Tabla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 1 & -2 & 3 \\ & & 2 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 3 \end{array}$$

Desarrollo paso a paso:

1. Bajar el primer coeficiente: 1.
2. $1 \times 2 = 2$. Sumar con -2: $-2 + 2 = 0$.
3. $0 \times 2 = 0$. Sumar con 3: $3 + 0 = 3$.

Los coeficientes del cociente son $[1, 0]$, luego $C(x) = x + 0 = x$. El último valor, 3, es el **resto**.

Apartado a) $C(x) = x$; $R = 3$

Comprobación: $C(x) \cdot (x - 2) + R = x(x - 2) + 3 = x^2 - 2x + 3 = D(x) \checkmark$

b) $(-x^6 + 2x^4 - x^3 + 3x - 1) \div (x + 2)$

La raíz del divisor $(x + 2)$ es $x = -2$.

El dividendo **no tiene** términos en x^5 ni en x^2 , por lo que debemos incluir coeficiente 0 en esas posiciones:

$$-x^6 + 0x^5 + 2x^4 - x^3 + 0x^2 + 3x - 1 \Rightarrow \text{coeficientes: } [-1, 0, 2, -1, 0, 3, -1]$$

Tabla de Ruffini con raíz -2:

-2	-1	0	2	-1	0	3	-1
		2	-4	4	-6	12	-30
	-1	2	-2	3	-6	15	-31

Desarrollo paso a paso:

1. Bajar -1.
2. $(-1) \times (-2) = 2$. $0 + 2 = 2$.
3. $2 \times (-2) = -4$. $2 + (-4) = -2$.
4. $(-2) \times (-2) = 4$. $-1 + 4 = 3$.
5. $3 \times (-2) = -6$. $0 + (-6) = -6$.
6. $(-6) \times (-2) = 12$. $3 + 12 = 15$.
7. $15 \times (-2) = -30$. $-1 + (-30) = -31$.

El grado del cociente es $6 - 1 = 5$, con coeficientes $[-1, 2, -2, 3, -6, 15]$, y el último valor es el **resto**.

Apartado b) $C(x) = -x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 6x + 15$; $R = -31$

Comprobación del Teorema del Resto: $D(-2) = -(-2)^6 + 2(-2)^4 - (-2)^3 + 3(-2)^2 - 6(-2) - 1 = -64 + 32 + 8 - 6 - 1 = -31 = R$ ✓

4. Ejercicio 4 – Factorización de polinomios

Enunciado

Factoriza los siguientes polinomios: a) $x^5 + 2x^4 - 5x^3 - 6x^2$ b) $x^5 - 5x^4 + 3x^3 + 13x^2 - 8x - 12$

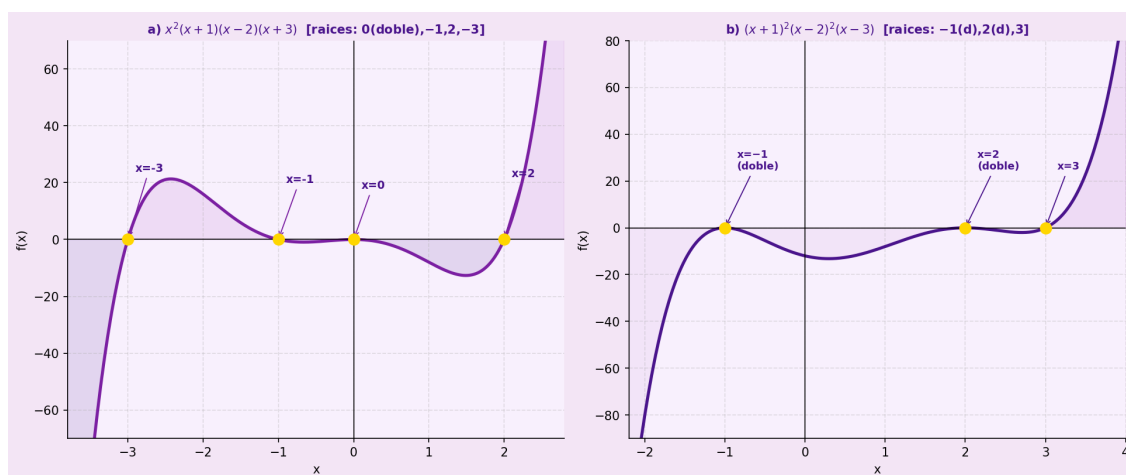


Figure 4: Gráficas de los polinomios con sus raíces marcadas en dorado. Cada punto de corte con el eje x corresponde a un factor lineal.

a) $x^5 + 2x^4 - 5x^3 - 6x^2$

Paso 1. Extraer factor común.

Todos los términos tienen al menos x^2 como factor:

$$x^5 + 2x^4 - 5x^3 - 6x^2 = x^2 \cdot (x^3 + 2x^2 - 5x - 6)$$

Esto introduce la raíz $x = 0$ con **multiplicidad 2**.

Paso 2. Factorizar $p(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

Buscamos raíces enteras entre los divisores del término independiente $(\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6)$:

a	$p(a) = a^3 + 2a^2 - 5a - 6$
1	$1 + 2 - 5 - 6 = -8 \neq 0$
-1	$-1 + 2 + 5 - 6 = 0 \checkmark$

Como $p(-1) = 0$, el término $(x + 1)$ es factor. Dividimos por $(x + 1)$ con Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2 & -5 & -6 \\ & & -1 & -1 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

Resultado: $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x + 1)(x^2 + x - 6)$.

Paso 3. Factorizar $x^2 + x - 6$.

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$$

Paso 4. Escribir la factorización completa.

$$x^5 + 2x^4 - 5x^3 - 6x^2 = x^2(x + 1)(x - 2)(x + 3)$$

Raíces: $x = 0$ (multiplicidad 2), $x = -1$, $x = 2$, $x = -3$.

b) $x^5 - 5x^4 + 3x^3 + 13x^2 - 8x - 12$

Paso 1. Buscar raíces candidatas.

Divisores del término independiente (-12): $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$.

a	$q(a)$
1	$1 - 5 + 3 + 13 - 8 - 12 = -8 \neq 0$
-1	$-1 - 5 - 3 + 13 + 8 - 12 = 0 \checkmark$
2	$32 - 80 + 24 + 52 - 16 - 12 = 0 \checkmark$
3	$243 - 405 + 81 + 117 - 24 - 12 = 0 \checkmark$

Paso 2. Dividir sucesivamente por Ruffini.

División 1: raíz -1

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 1 & -5 & 3 & 13 & -8 & -12 \\ & & -1 & 6 & -9 & -4 & 12 \\ \hline & 1 & -6 & 9 & 4 & -12 & 0 \end{array}$$

Resultado: $q(x) = (x + 1) \cdot (x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12)$.

División 2: raíz 2 sobre $x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & -6 & 9 & 4 & -12 \\ & & 2 & -8 & 2 & 12 \\ \hline & 1 & -4 & 1 & 6 & 0 \end{array}$$

Resultado: $= (x + 1)(x - 2)(x^3 - 4x^2 + x + 6)$.

División 3: raíz 3 sobre $x^3 - 4x^2 + x + 6$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & 3 & -3 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

Resultado: $= (x + 1)(x - 2)(x - 3)(x^2 - x - 2)$.

Paso 3. Factorizar $x^2 - x - 2$.

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$$

Paso 4. Factorización completa.

$$\begin{aligned}x^5 - 5x^4 + 3x^3 + 13x^2 - 8x - 12 &= (x+1)(x-2)(x-3)(x-2)(x+1) \\ &= (x+1)^2(x-2)^2(x-3)\end{aligned}$$

$$x^5 - 5x^4 + 3x^3 + 13x^2 - 8x - 12 = (x+1)^2(x-2)^2(x-3)$$

Raíces: $x = -1$ (multiplicidad 2), $x = 2$ (multiplicidad 2), $x = 3$.

5. Ejercicio 5 – Teorema del Resto: hallar el valor de k

Enunciado

El resto de la división de $P(x) = 3x^4 - 7x^2 + 3x + k$ entre $(x - 2)$ es igual a 2. Halla el valor de k .

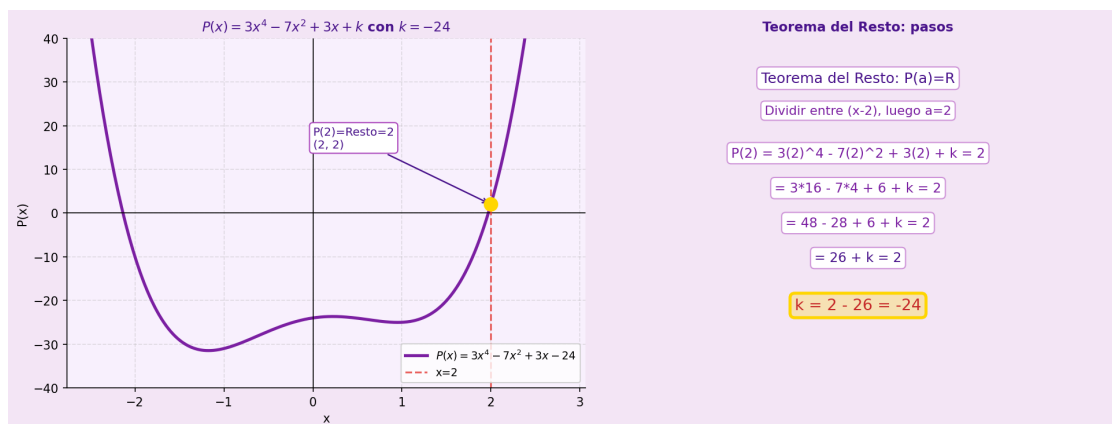


Figure 5: Izquierda: gráfica de $P(x)$ con $k = -24$; el punto $(2, 2)$ es el valor del polinomio en $x = 2$, que coincide con el resto. Derecha: resumen de los pasos algebraicos.

Aplicamos el **Teorema del Resto**:

Teorema del Resto

Si un polinomio $P(x)$ se divide entre $(x - a)$, el resto de la división es igual al valor numérico del polinomio en $x = a$:

$$P(x) \div (x - a) \Rightarrow \text{Resto} = P(a)$$

En nuestro caso, el divisor es $(x - 2)$, luego $a = 2$. El enunciado nos dice que el resto es 2, por tanto $P(2) = 2$.

Calculamos $P(2)$ en función de k :

$$\begin{aligned} P(2) &= 3(2)^4 - 7(2)^2 + 3(2) + k \\ &= 3 \cdot 16 - 7 \cdot 4 + 6 + k \\ &= 48 - 28 + 6 + k \\ &= 26 + k \end{aligned}$$

Igualamos a 2:

$$26 + k = 2 \implies k = 2 - 26$$

$$k = -24$$

Verificación con la regla de Ruffini (raíz $a = 2$, coeficientes $[3, 0, -7, 3, -24]$):

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 3 & 0 & -7 & 3 & -24 \\ & & 6 & 12 & 10 & 26 \\ \hline & 3 & 6 & 5 & 13 & 2 \end{array}$$

El último valor es $2 = \text{resto}$ ✓

6. Ejercicio 6 – Productos notables

Enunciado

Desarrolla los siguientes productos notables: a) $(x + 2y)^2$ b) $(1 - 3x)^2$ c) $(2x^2 + y)(2x^2 - y)$

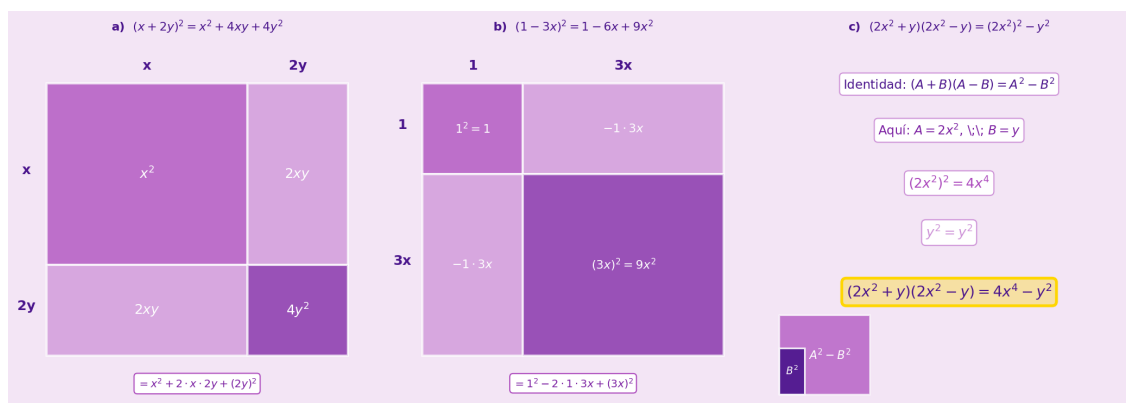


Figure 6: Los apartados a) y b) se ilustran mediante el modelo de área del cuadrado, que muestra geométricamente la identidad $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$. El apartado c) aplica la identidad de la suma por diferencia.

a) $(x + 2y)^2$

Aplicamos la identidad del **cuadrado de la suma**:

Cuadrado de la suma

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Con $A = x$ y $B = 2y$:

$$\begin{aligned}(x + 2y)^2 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 2y + (2y)^2 \\ &= x^2 + 4xy + 4y^2\end{aligned}$$

$$(x + 2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$$

b) $(1 - 3x)^2$

Aplicamos la identidad del **cuadrado de la diferencia**:

Cuadrado de la diferencia

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

Con $A = 1$ y $B = 3x$:

$$\begin{aligned}(1 - 3x)^2 &= 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3x + (3x)^2 \\ &= 1 - 6x + 9x^2\end{aligned}$$

$$(1 - 3x)^2 = 1 - 6x + 9x^2$$

c) $(2x^2 + y)(2x^2 - y)$

Esta expresión es una **suma por diferencia** (el mismo factor con signos distintos):

Suma por diferencia

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

Con $A = 2x^2$ y $B = y$:

$$\begin{aligned}(2x^2 + y)(2x^2 - y) &= (2x^2)^2 - y^2 \\ &= 4x^4 - y^2\end{aligned}$$

$$(2x^2 + y)(2x^2 - y) = 4x^4 - y^2$$

Formulario de referencia – Álgebra de polinomios

División euclídea

$$D(x) = C(x) \cdot d(x) + R(x)$$

$$\deg R < \deg d$$

Teorema del Resto

$$P(x) \div (x - a) \Rightarrow R = P(a)$$

Teorema del Factor

$$(x - a) \mid P(x) \Leftrightarrow P(a) = 0$$

Productos notables

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

Raíces racionales – Candidatos

Si $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ tiene coeficientes enteros, las raíces racionales posibles son $\pm \frac{p}{q}$, donde $p \mid a_0$ y $q \mid a_n$.

Fin del documento de soluciones. IES Tovar – Junta de Castilla y León – 4.º A ESO



Nº1.- Calcula la altura sobre el lado desigual de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 5 centímetros y cuyo lado desigual mide 8 centímetros. Realiza un dibujo de la situación. ¿Cuál es su área?

(2 PUNTOS)

Nº2.- Calcula el perímetro y el área de un trapecio isósceles cuyas bases miden 14 y 24 centímetros respectivamente, y cuyo lado igual mide 13 centímetros. Realiza un dibujo de la situación.

(2 PUNTOS)

Nº3.- Calcula el área de un pentágono regular de 30 centímetros de lado y 8 centímetros de apotema. Realiza un dibujo de la situación.

(1 PUNTO)

Nº4.- Calcula el volumen de la pirámide de 9 cm de altura con base cuadrada de 5cm de lado

(1 PUNTO)

Nº5.- Calcula el volumen de un cono de 10 centímetros de radio y 24 centímetros de altura. Realiza un dibujo de la situación.

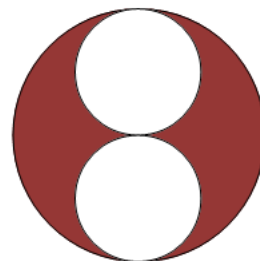
(1 PUNTO)

Nº6.- Calcula el área total y el volumen de un cilindro de 30 cm de radio y altura 10 cm

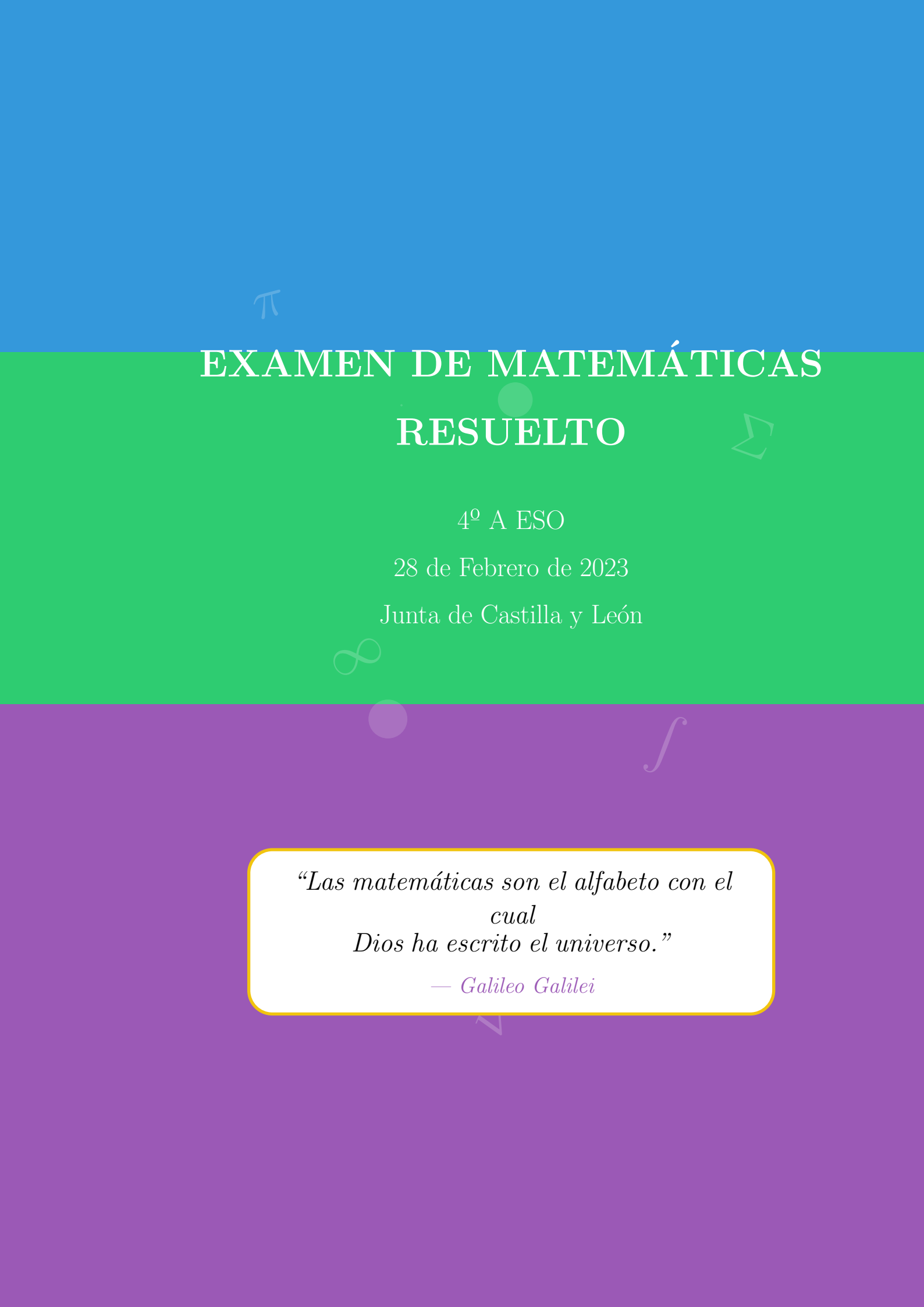
(2 PUNTOS)

Nº7.- Calcula el área del siguiente recinto sombreado, sabiendo que la circunferencia exterior mide 10 centímetros de diámetro.

(1 PUNTO)



SUERTE JÓVENES



EXAMEN DE MATEMÁTICAS RESUELTO

4º A ESO

28 de Febrero de 2023

Junta de Castilla y León

*“Las matemáticas son el alfabeto con el
cual
Dios ha escrito el universo.”*

— Galileo Galilei

Índice

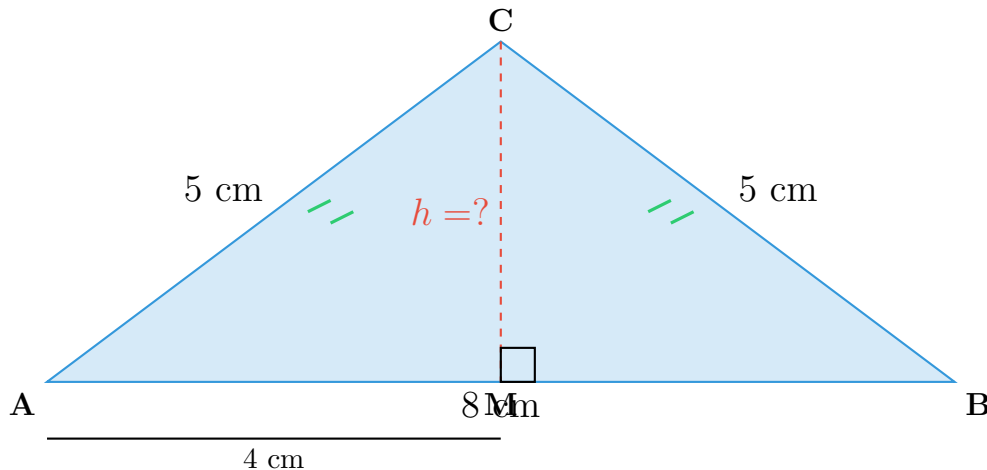
1. Ejercicio 1: Triángulo Isósceles	2
1.1. Enunciado	2
1.2. Ilustración	2
1.3. Resolución Matemática	2
2. Ejercicio 2: Trapecio Isósceles	4
2.1. Enunciado	4
2.2. Ilustración	4
2.3. Resolución Matemática	4
3. Ejercicio 3: Pentágono Regular	7
3.1. Enunciado	7
3.2. Ilustración	7
3.3. Resolución Matemática	7
4. Ejercicio 4: Pirámide de Base Cuadrada	9
4.1. Enunciado	9
4.2. Ilustración	9
4.3. Resolución Matemática	9
5. Ejercicio 5: Cono	11
5.1. Enunciado	11
5.2. Ilustración	11
5.3. Resolución Matemática	11
6. Ejercicio 6: Cilindro	13
6.1. Enunciado	13
6.2. Ilustración	13
6.3. Resolución Matemática	13
7. Ejercicio 7: Área Sombreada	16
7.1. Enunciado	16
7.2. Ilustración	16
7.3. Resolución Matemática	16
Resumen de Resultados	19

1. Ejercicio 1: Triángulo Isósceles

1.1. Enunciado

Calcula la altura sobre el lado desigual de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 5 centímetros y cuyo lado desigual mide 8 centímetros. Realiza un dibujo de la situación. ¿Cuál es su área?

1.2. Ilustración



1.3. Resolución Matemática

Datos del problema

- Lados iguales: $l_1 = l_2 = 5 \text{ cm}$
- Lado desigual (base): $b = 8 \text{ cm}$
- Altura sobre la base: $h = ?$

Paso 1: Identificar la geometría del problema

En un triángulo isósceles, la altura trazada desde el vértice opuesto al lado desigual divide a este lado en dos segmentos iguales y forma dos triángulos rectángulos congruentes.

Por tanto:

$$AM = MB = \frac{b}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ cm}$$

Paso 2: Aplicar el Teorema de Pitágoras

En el triángulo rectángulo AMC , tenemos:

- Hipotenusa: $AC = 5 \text{ cm}$
- Cateto horizontal: $AM = 4 \text{ cm}$
- Cateto vertical (altura): $h = CM$

Según el Teorema de Pitágoras:

$$AC^2 = AM^2 + h^2$$

Sustituyendo valores:

$$5^2 = 4^2 + h^2$$

$$25 = 16 + h^2$$

$$h^2 = 25 - 16$$

$$h^2 = 9$$

$$h = \sqrt{9} = 3 \text{ cm}$$

Resultado: Altura

$$h = 3 \text{ cm}$$

Paso 3: Calcular el área del triángulo

El área de un triángulo se calcula mediante la fórmula:

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

Donde:

- $b = 8 \text{ cm}$ (base)
- $h = 3 \text{ cm}$ (altura)

Sustituyendo:

$$A = \frac{8 \times 3}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ cm}^2$$

Resultado: Área

$$A = 12 \text{ cm}^2$$

Verificación:

Comprobamos que nuestros cálculos son correctos:

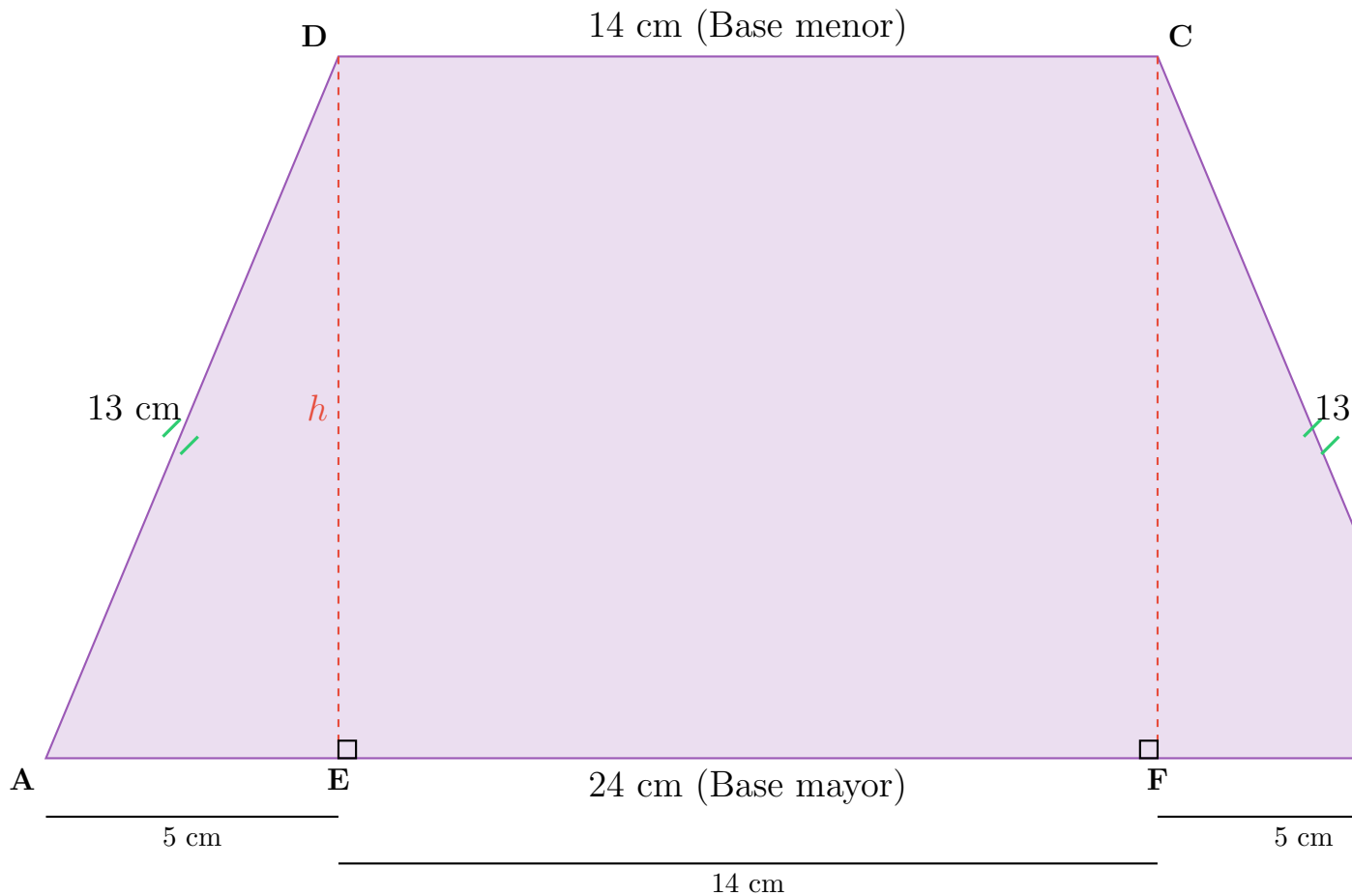
- $\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$
- El área 12 cm^2 tiene sentido para un triángulo de base 8 cm y altura 3 cm

2. Ejercicio 2: Trapecio Isósceles

2.1. Enunciado

Calcula el perímetro y el área de un trapezio isósceles cuyas bases miden 14 y 24 centímetros respectivamente, y cuyo lado igual mide 13 centímetros. Realiza un dibujo de la situación.

2.2. Ilustración



2.3. Resolución Matemática

Datos del problema

- Base mayor: $B = 24\text{ cm}$
- Base menor: $b = 14\text{ cm}$
- Lados iguales: $l = 13\text{ cm}$
- Altura: $h = ?$

Paso 1: Calcular la proyección horizontal de los lados oblicuos

En un trapecio isósceles, si trazamos alturas desde los vértices de la base menor hacia la base mayor, dividimos la base mayor en tres segmentos:

- Dos segmentos laterales iguales (proyección de los lados oblicuos)
- Un segmento central igual a la base menor

Cada proyección lateral mide:

$$p = \frac{B - b}{2} = \frac{24 - 14}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$$

Paso 2: Aplicar el Teorema de Pitágoras para encontrar la altura

Consideramos el triángulo rectángulo formado por:

- Hipotenusa: $l = 13 \text{ cm}$ (lado oblicuo)
- Cateto horizontal: $p = 5 \text{ cm}$ (proyección)
- Cateto vertical: h (altura)

Según el Teorema de Pitágoras:

$$l^2 = p^2 + h^2$$

Despejando h :

$$h^2 = l^2 - p^2$$

$$h^2 = 13^2 - 5^2$$

$$h^2 = 169 - 25$$

$$h^2 = 144$$

$$h = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

Altura del trapecio

$$h = 12 \text{ cm}$$

Paso 3: Calcular el perímetro

El perímetro es la suma de todos los lados:

$$P = B + b + 2l$$

$$P = 24 + 14 + 2(13)$$

$$P = 24 + 14 + 26$$

$$P = 64 \text{ cm}$$

Resultado: Perímetro

$$P = 64 \text{ cm}$$

Paso 4: Calcular el área

El área de un trapecio se calcula mediante la fórmula:

$$A = \frac{(B + b) \times h}{2}$$

Donde:

- $B = 24$ cm (base mayor)
- $b = 14$ cm (base menor)
- $h = 12$ cm (altura)

Sustituyendo:

$$A = \frac{(24 + 14) \times 12}{2}$$

$$A = \frac{38 \times 12}{2}$$

$$A = \frac{456}{2}$$

$$A = 228 \text{ cm}^2$$

Resultado: Área

$$A = 228 \text{ cm}^2$$

Verificación:

Comprobamos que nuestros cálculos son correctos:

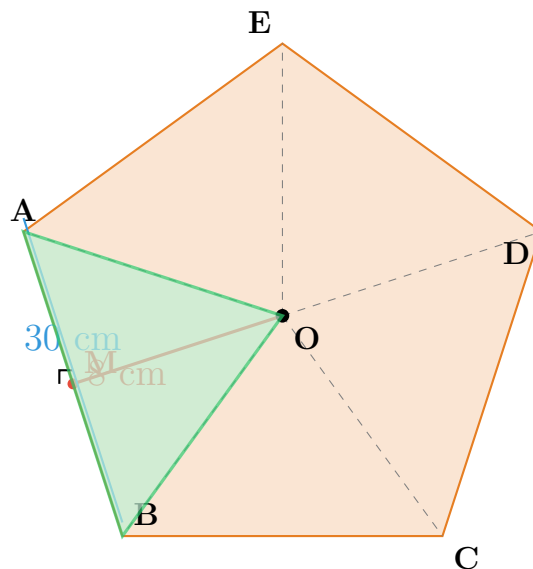
- $\sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$
- El área es consistente con las dimensiones del trapecio
- Este es un triángulo pitagórico conocido (5, 12, 13)

3. Ejercicio 3: Pentágono Regular

3.1. Enunciado

Calcula el área de un pentágono regular de 30 centímetros de lado y 8 centímetros de apotema. Realiza un dibujo de la situación.

3.2. Ilustración



3.3. Resolución Matemática

Datos del problema

- Número de lados: $n = 5$ (pentágono)
- Longitud de cada lado: $l = 30$ cm
- Apotema: $a = 8$ cm

Paso 1: Recordar las propiedades del pentágono regular

Un pentágono regular es un polígono de 5 lados iguales y 5 ángulos iguales. La **apotema** es la distancia perpendicular desde el centro del pentágono hasta el punto medio de cualquier lado.

Paso 2: Calcular el perímetro

El perímetro de un polígono regular se calcula multiplicando la longitud del lado por el número de lados:

$$P = n \times l$$

Sustituyendo valores:

$$P = 5 \times 30 = 150 \text{ cm}$$

Paso 3: Aplicar la fórmula del área de un polígono regular

El área de cualquier polígono regular se puede calcular mediante la fórmula:

$$A = \frac{P \times a}{2}$$

Donde:

- P = perímetro del polígono
- a = apotema

Esta fórmula se deduce del hecho de que un polígono regular de n lados puede dividirse en n triángulos isósceles congruentes, cada uno con base l y altura a .

El área de cada triángulo es:

$$A_{\text{triangulo}} = \frac{l \times a}{2}$$

Y el área total del pentágono es:

$$A_{\text{total}} = n \times A_{\text{triangulo}} = n \times \frac{l \times a}{2} = \frac{n \times l \times a}{2} = \frac{P \times a}{2}$$

Paso 4: Calcular el área del pentágono

Sustituyendo en la fórmula:

$$A = \frac{P \times a}{2} = \frac{150 \times 8}{2}$$

$$A = \frac{1200}{2}$$

$$A = 600 \text{ cm}^2$$

Resultado: Área del pentágono

$$A = 600 \text{ cm}^2$$

Desglose del cálculo:

Podemos verificar este resultado pensando en los 5 triángulos:

- Cada triángulo tiene base = 30 cm y altura = 8 cm
- Área de cada triángulo = $\frac{30 \times 8}{2} = \frac{240}{2} = 120 \text{ cm}^2$
- Área total = $5 \times 120 = 600 \text{ cm}^2$

Información adicional:

En un pentágono regular, el ángulo interior en cada vértice mide:

$$\alpha = \frac{(n-2) \times 180}{n} = \frac{(5-2) \times 180}{5} = \frac{540}{5} = 108$$

El ángulo central de cada triángulo mide:

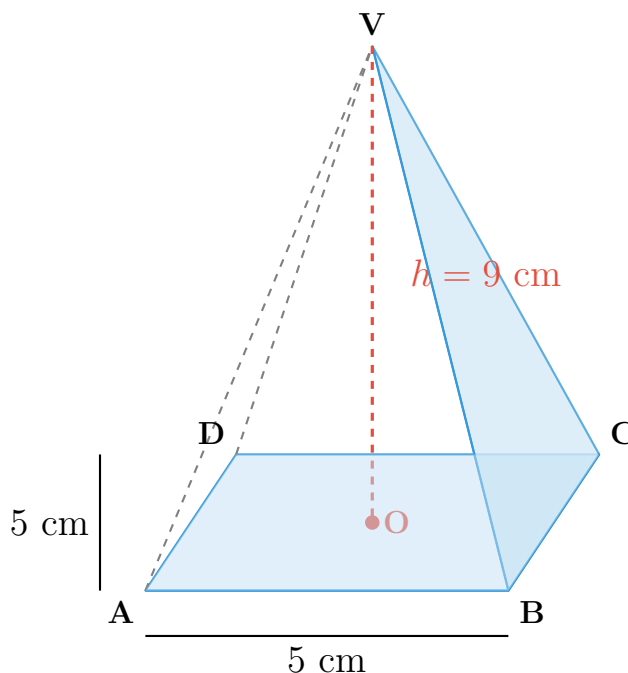
$$\beta = \frac{360}{n} = \frac{360}{5} = 72$$

4. Ejercicio 4: Pirámide de Base Cuadrada

4.1. Enunciado

Calcula el volumen de la pirámide de 9 cm de altura con base cuadrada de 5 cm de lado.

4.2. Ilustración



4.3. Resolución Matemática

Datos del problema

- Forma de la base: Cuadrada
- Lado de la base: $l = 5 \text{ cm}$
- Altura de la pirámide: $h = 9 \text{ cm}$

Paso 1: Identificar los elementos de la pirámide

Una pirámide es un cuerpo geométrico formado por:

- Una **base** poligonal (en este caso, un cuadrado)
- Caras laterales triangulares que convergen en un punto llamado **vértice** o **ápice**
- La **altura** es la distancia perpendicular desde el vértice hasta el plano de la base

Paso 2: Calcular el área de la base

Como la base es un cuadrado de lado $l = 5 \text{ cm}$:

$$A_{base} = l^2 = 5^2 = 25 \text{ cm}^2$$

Paso 3: Aplicar la fórmula del volumen de una pirámide

El volumen de cualquier pirámide se calcula mediante la fórmula:

$$V = \frac{A_{base} \times h}{3}$$

Esta fórmula es válida para cualquier pirámide, independientemente de la forma de su base.

La razón del factor $\frac{1}{3}$ es que una pirámide ocupa exactamente un tercio del volumen del prisma que tendría la misma base y la misma altura.

Paso 4: Sustituir los valores y calcular

$$V = \frac{A_{base} \times h}{3} = \frac{25 \times 9}{3}$$

$$V = \frac{225}{3}$$

$$V = 75 \text{ cm}^3$$

Resultado: Volumen de la pirámide

$$V = 75 \text{ cm}^3$$

Verificación dimensional:

El resultado tiene unidades de volumen (cm^3), lo cual es correcto para una medida volumétrica.

Información adicional:

Si quisiéramos calcular otros elementos de la pirámide:

1. Apotema de la pirámide (altura de una cara lateral):

La distancia desde el centro de un lado de la base hasta el centro de la base es:

$$d = \frac{l}{2} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ cm}$$

Usando el teorema de Pitágoras:

$$a_p = \sqrt{h^2 + d^2} = \sqrt{9^2 + 2,5^2} = \sqrt{81 + 6,25} = \sqrt{87,25} \approx 9,34 \text{ cm}$$

2. Arista lateral (distancia desde el vértice hasta un vértice de la base):

La distancia desde el centro de la base hasta un vértice es:

$$r = \frac{l\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3,54 \text{ cm}$$

La arista lateral mide:

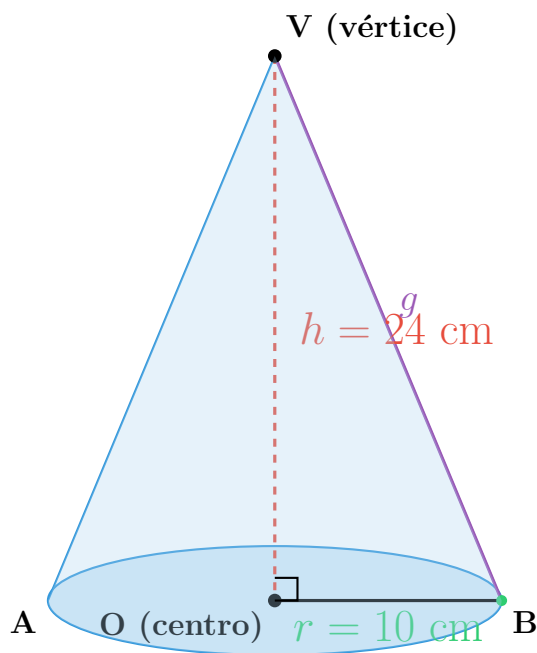
$$e = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{9^2 + 3,54^2} = \sqrt{81 + 12,53} = \sqrt{93,53} \approx 9,67 \text{ cm}$$

5. Ejercicio 5: Cono

5.1. Enunciado

Calcula el volumen de un cono de 10 centímetros de radio y 24 centímetros de altura. Realiza un dibujo de la situación.

5.2. Ilustración



5.3. Resolución Matemática

Datos del problema

- Radio de la base: $r = 10$ cm
- Altura del cono: $h = 24$ cm

Paso 1: Identificar los elementos del cono

Un cono es un cuerpo geométrico formado por:

- Una **base circular** de radio r
- Un **vértice** o ápice situado fuera del plano de la base
- La **altura** h es la distancia perpendicular desde el vértice hasta el centro de la base
- La **generatriz** g es la distancia desde el vértice hasta cualquier punto del borde de la base circular

Paso 2: Recordar la fórmula del volumen del cono

El volumen de un cono se calcula mediante la fórmula:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Esta fórmula se deriva del hecho de que un cono ocupa exactamente un tercio del volumen de un cilindro con la misma base y altura.

Paso 3: Sustituir los valores y calcular

Datos:

- $r = 10$ cm
- $h = 24$ cm
- $\pi \approx 3,14159265\dots$

Sustituyendo en la fórmula:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(10)^2(24)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi(100)(24)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi(2400)$$

$$V = \frac{2400\pi}{3}$$

$$V = 800\pi \text{ cm}^3$$

Paso 4: Calcular el valor numérico

$$V = 800\pi \approx 800 \times 3,14159265$$

$$V \approx 2513,27 \text{ cm}^3$$

Resultado: Volumen del cono

$$V = 800\pi \text{ cm}^3 \approx 2513,27 \text{ cm}^3$$

Información adicional: Cálculo de la generatriz

Aunque no se pide en el problema, es útil saber calcular la generatriz del cono.

La generatriz g se relaciona con el radio r y la altura h mediante el teorema de Pitágoras, ya que forman un triángulo rectángulo:

$$g^2 = r^2 + h^2$$

$$g = \sqrt{r^2 + h^2}$$

Sustituyendo valores:

$$g = \sqrt{10^2 + 24^2}$$

$$g = \sqrt{100 + 576}$$

$$g = \sqrt{676}$$

$$g = 26 \text{ cm}$$

Este es otro triángulo pitagórico notable: (10, 24, 26) es múltiplo del triángulo (5, 12, 13).

Verificación:

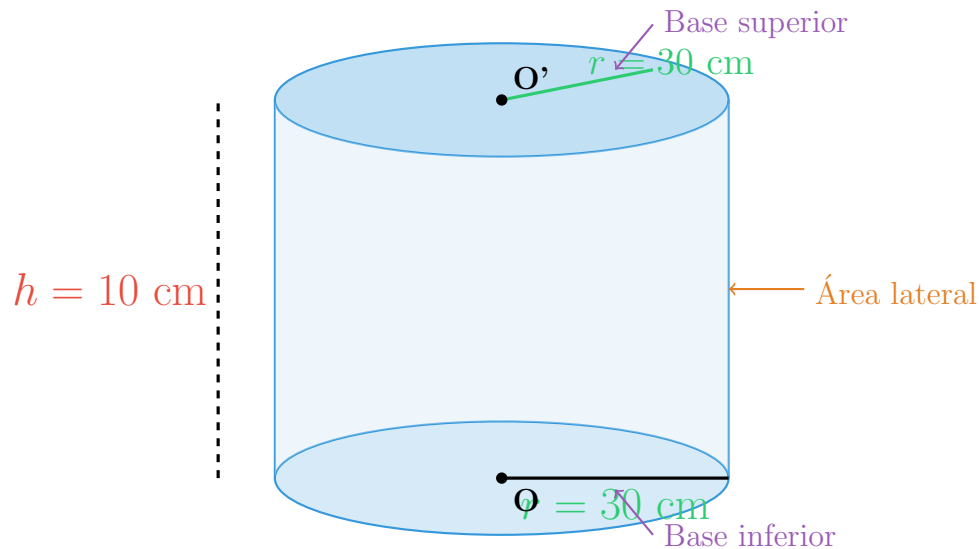
- Las unidades son correctas (cm³ para volumen)
- El volumen es positivo y razonable para las dimensiones dadas
- $10^2 + 24^2 = 100 + 576 = 676 = 26^2$

6. Ejercicio 6: Cilindro

6.1. Enunciado

Calcula el área total y el volumen de un cilindro de 30 cm de radio y altura 10 cm.

6.2. Ilustración



6.3. Resolución Matemática

Datos del problema

- Radio de las bases: $r = 30\text{ cm}$
- Altura del cilindro: $h = 10\text{ cm}$

Paso 1: Identificar los componentes del área total

Un cilindro tiene tres superficies:

1. **Base inferior:** círculo de radio r
2. **Base superior:** círculo de radio r
3. **Superficie lateral:** rectángulo que se enrolla alrededor del cilindro

El área total es la suma de estas tres superficies:

$$A_{total} = A_{base inferior} + A_{base superior} + A_{lateral}$$

Paso 2: Calcular el área de cada base

Cada base es un círculo de radio $r = 30\text{ cm}$:

$$A_{base} = \pi r^2 = \pi(30)^2 = 900\pi\text{ cm}^2$$

Como hay dos bases (inferior y superior):

$$A_{bases} = 2 \times 900\pi = 1800\pi\text{ cm}^2$$

Paso 3: Calcular el área lateral

La superficie lateral del cilindro, si la "desenrollamos", es un rectángulo cuyas dimensiones son:

- **Base del rectángulo:** perímetro de la circunferencia = $2\pi r$
- **Altura del rectángulo:** altura del cilindro = h

Por tanto:

$$A_{lateral} = 2\pi r \times h$$

Sustituyendo valores:

$$A_{lateral} = 2\pi(30)(10)$$

$$A_{lateral} = 600\pi \text{ cm}^2$$

Paso 4: Calcular el área total

$$A_{total} = A_{bases} + A_{lateral}$$

$$A_{total} = 1800\pi + 600\pi$$

$$A_{total} = 2400\pi \text{ cm}^2$$

Calculando el valor numérico:

$$A_{total} = 2400\pi \approx 2400 \times 3,14159265$$

$$A_{total} \approx 7539,82 \text{ cm}^2$$

Resultado: Área total del cilindro

$$A_{total} = 2400\pi \text{ cm}^2 \approx 7539,82 \text{ cm}^2$$

Paso 5: Calcular el volumen del cilindro

El volumen de un cilindro se calcula mediante la fórmula:

$$V = \pi r^2 h$$

Esta fórmula representa el área de la base multiplicada por la altura.

Sustituyendo valores:

$$V = \pi(30)^2(10)$$

$$V = \pi(900)(10)$$

$$V = 9000\pi \text{ cm}^3$$

Calculando el valor numérico:

$$V = 9000\pi \approx 9000 \times 3,14159265$$

$$V \approx 28274,34 \text{ cm}^3$$

Resultado: Volumen del cilindro

$$V = 9000\pi \text{ cm}^3 \approx 28274,34 \text{ cm}^3$$

Resumen de fórmulas utilizadas:

Magnitud	Fórmula
Área de una base	$A_{base} = \pi r^2$
Área lateral	$A_{lateral} = 2\pi r h$
Área total	$A_{total} = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r + h)$
Volumen	$V = \pi r^2 h$

Verificación:

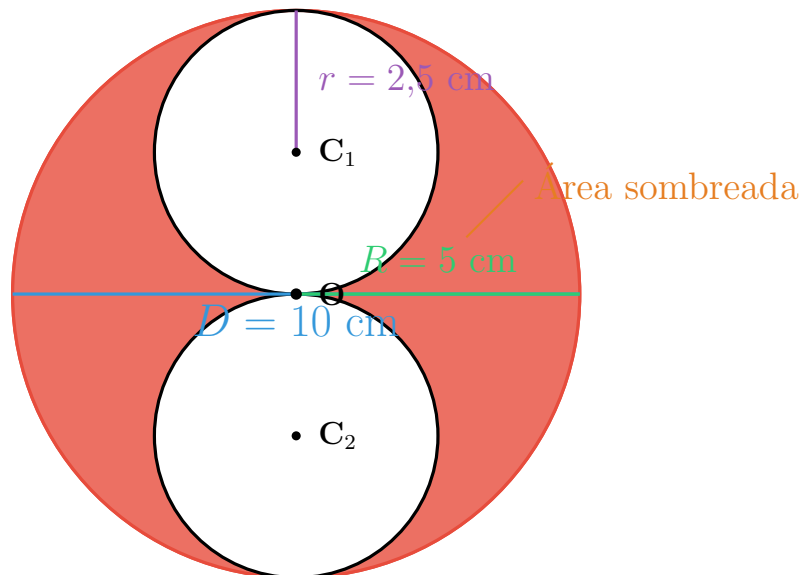
- Las unidades son correctas (cm^2 para área, cm^3 para volumen)
- Fórmula alternativa para área total: $A_{total} = 2\pi r(r + h) = 2\pi(30)(30 + 10) = 2\pi(30)(40) = 2400\pi$
- Los valores son positivos y razonables

7. Ejercicio 7: Área Sombreada

7.1. Enunciado

Calcula el área del siguiente recinto sombreado, sabiendo que la circunferencia exterior mide 10 centímetros de diámetro.

7.2. Ilustración



7.3. Resolución Matemática

Datos del problema

- Diámetro del círculo exterior: $D = 10 \text{ cm}$
- Radio del círculo exterior: $R = \frac{D}{2} = 5 \text{ cm}$

Paso 1: Analizar la configuración geométrica

Observando el dibujo del enunciado, vemos que:

- Hay un círculo grande (exterior) de diámetro 10 cm
- Dentro hay dos círculos blancos (no sombreados) de igual tamaño
- Los dos círculos interiores son tangentes entre sí en el centro del círculo grande
- Cada círculo interior es tangente al círculo exterior
- El área sombreada es la región roja

Paso 2: Determinar el radio de los círculos interiores

El radio del círculo exterior es:

$$R = \frac{D}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$$

Para que dos círculos iguales estén contenidos dentro del círculo grande, tangentes entre sí en el centro y tangentes al círculo exterior, cada uno debe tener su centro a una distancia del centro del círculo grande igual a su propio radio.

Si llamamos r al radio de cada círculo interior, y observamos que:

- Los centros de los círculos interiores están sobre el diámetro vertical
- Cada círculo interior toca el círculo exterior
- Los dos círculos interiores se tocan en el centro O

La distancia desde el centro O hasta el centro de cada círculo interior es r .

Para que el círculo interior sea tangente al círculo exterior:

$$r + r = R$$

$$2r = R$$

$$r = \frac{R}{2} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ cm}$$

Paso 3: Calcular el área del círculo exterior

$$A_{\text{exterior}} = \pi R^2 = \pi(5)^2 = 25\pi \text{ cm}^2$$

Paso 4: Calcular el área de cada círculo interior

$$A_{\text{interior}} = \pi r^2 = \pi(2,5)^2 = \pi(6,25) = 6,25\pi \text{ cm}^2$$

Como hay dos círculos interiores:

$$A_{2 \text{ círculos}} = 2 \times 6,25\pi = 12,5\pi \text{ cm}^2$$

Paso 5: Calcular el área sombreada

El área sombreada es el área del círculo grande menos el área de los dos círculos blancos:

$$A_{\text{sombreada}} = A_{\text{exterior}} - A_{2 \text{ círculos}}$$

$$A_{\text{sombreada}} = 25\pi - 12,5\pi$$

$$A_{\text{sombreada}} = 12,5\pi \text{ cm}^2$$

Calculando el valor numérico:

$$A_{\text{sombreada}} = 12,5\pi \approx 12,5 \times 3,14159265$$

$$A_{\text{sombreada}} \approx 39,27 \text{ cm}^2$$

Resultado: Área sombreada

$$A_{\text{sombreada}} = 12,5\pi \text{ cm}^2 \approx 39,27 \text{ cm}^2$$

Verificación y análisis:

Podemos expresar el resultado de forma alternativa:

$$A_{sombreada} = 12,5\pi = \frac{25\pi}{2} = \frac{R^2\pi}{2}$$

Esto significa que el área sombreada es exactamente la mitad del área del círculo exterior, lo cual tiene sentido porque:

$$\frac{A_{sombreada}}{A_{exterior}} = \frac{12,5\pi}{25\pi} = \frac{12,5}{25} = \frac{1}{2} = 50\%$$

Observación interesante:

La suma de las áreas de los dos círculos interiores es igual al área sombreada:

$$A_{2 \text{ círculos}} = 12,5\pi = A_{sombreada}$$

Por tanto, los círculos blancos ocupan exactamente el 50 % del círculo grande, y la región sombreada ocupa el otro 50 %.

Desglose detallado:

$$A_{exterior} = 25\pi \text{ cm}^2$$

$$A_{circulo \ 1} = 6,25\pi \text{ cm}^2$$

$$A_{circulo \ 2} = 6,25\pi \text{ cm}^2$$

$$A_{total \ blancos} = 12,5\pi \text{ cm}^2$$

$$A_{sombreada} = 25\pi - 12,5\pi = 12,5\pi \text{ cm}^2$$

Resumen de Resultados

Todos los resultados del examen

1. **Triángulo Isósceles:**

- Altura: $h = 3 \text{ cm}$
- Área: $A = 12 \text{ cm}^2$

2. **Trapezio Isósceles:**

- Perímetro: $P = 64 \text{ cm}$
- Área: $A = 228 \text{ cm}^2$

3. **Pentágono Regular:**

- Área: $A = 600 \text{ cm}^2$

4. **Pirámide de Base Cuadrada:**

- Volumen: $V = 75 \text{ cm}^3$

5. **Cono:**

- Volumen: $V = 800\pi \approx 2513,27 \text{ cm}^3$

6. **Cilindro:**

- Área total: $A_{total} = 2400\pi \approx 7539,82 \text{ cm}^2$
- Volumen: $V = 9000\pi \approx 28274,34 \text{ cm}^3$

7. **Área Sombreada:**

- Área: $A = 12,5\pi \approx 39,27 \text{ cm}^2$

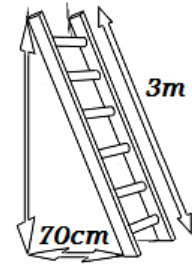
¡EXAMEN COMPLETADO!

Todos los ejercicios resueltos con rigor matemático completo,
incluyendo ilustraciones detalladas y verificaciones.



Nº1.- Calcular la altura que podemos alcanzar con una escalera de 3 metros apoyada sobre la pared si la parte inferior la situamos a 70 centímetros de ésta.

(1 PUNTO)



Nº2.- Calcula el perímetro y el área de un rombo cuyas diagonales miden 24 y 10 centímetros respectivamente. Realiza un dibujo de la situación.

(2 PUNTOS)

Nº3.- Calcula el área de un hexágono regular de 4 centímetros de lado Realiza un dibujo de la situación.

(1 PUNTO)

Nº4.- Calcula el volumen de la pirámide con base cuadrada de 10m de lado y altura de la cara lateral 13 m

(1 PUNTO)

Nº5.- Calcula el área total y el volumen de un cilindro de 5 centímetros de radio y 10 centímetros de altura. Realiza un dibujo de la situación.

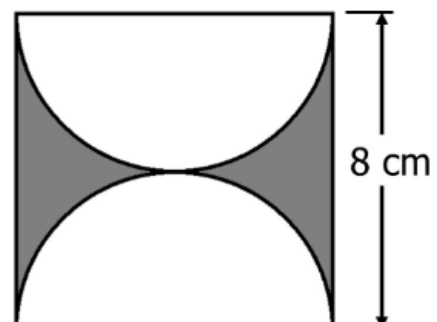
(2 PUNTOS)

Nº6.- Calcula el área total y el volumen de un cono de 3 cm de radio y altura 4 cm

(2 PUNTOS)

Nº7.- Calcula el área del siguiente recinto sombreado,

(1 PUNTO)



SUERTE JÓVENES

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$P = 4l$$

$$V = \frac{1}{3}Bh$$

$$A_{hex} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

$$l = \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$A = \pi rl$$

$$A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

$$V = \pi r^2 h$$

MATEMÁTICAS

4.º A ESO

28 / 02 / 2023

GEOMETRÍA · ÁREAS · VOLÚMENES

"La geometría es el arte de razonar bien
sobre figuras mal dibujadas."

— Henri Poincaré (1854–1912)

MATEMÁTICAS — GEOMETRÍA

4.º A ESO · 28 de febrero de 2023

"La geometría es el arte de razonar bien sobre figuras mal dibujadas."

— Henri Poincaré (1854–1912)

Pitágoras · Rombo · Hexágono · Pirámide · Cilindro · Cono · Áreas

Índice de Ejercicios

Ejercicio 1 — Escalera apoyada en la pared — Teorema de Pitágoras (1 pto)

Ejercicio 2 — Rombo: perímetro y área (diagonales 24 y 10 cm) (2 ptos)

Ejercicio 3 — Hexágono regular: área (lado 4 cm) (1 pto)

Ejercicio 4 — Pirámide cuadrada: volumen (base 10m, ap.lat. 13m) (1 pto)

Ejercicio 5 — Cilindro: área total y volumen ($r=5$ cm, $h=10$ cm) (2 ptos)

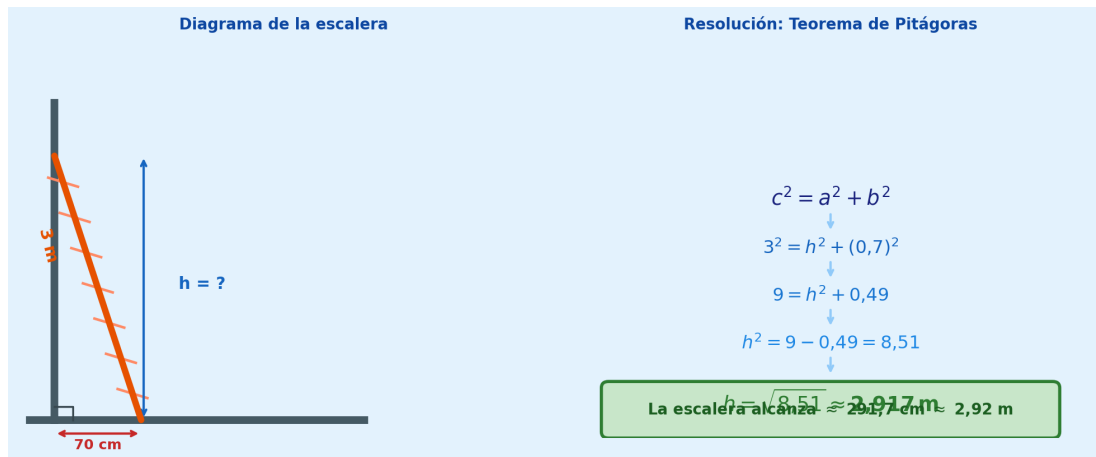
Ejercicio 6 — Cono: área total y volumen ($r=3$ cm, $h=4$ cm) (2 ptos)

Ejercicio 7 — Área del recinto sombreado (cuadrado con arcos) (1 pto)

Total: 10 puntos

Ejercicio 1 — Escalera Apoyada en la Pared — Teorema de Pitágoras

Una escalera de **3 metros** se apoya contra una pared vertical. La base de la escalera queda a **70 centímetros (0,70 m)** de la pared. Queremos calcular la **altura** que alcanza la escalera en la pared. La escalera, la pared y el suelo forman un **triángulo rectángulo**: la escalera es la hipotenusa (3 m), la distancia al suelo es un cateto (0,70 m) y la altura buscada es el otro cateto.



Teorema de Pitágoras: $\text{hipotenusa}^2 = \text{cateto}^2 + \text{cateto}^2 \rightarrow c^2 = a^2 + b^2$

Identificación de los elementos del triángulo:

Hipotenusa (escalera): $c = 3 \text{ m}$

Cateto conocido (distancia al suelo): $a = 0,70 \text{ m}$

Cateto buscado (altura en la pared): $b = h = ?$

Aplicación del Teorema de Pitágoras:

Fórmula: $c^2 = a^2 + h^2 \rightarrow h^2 = c^2 - a^2$

Sustituir: $3^2 = 0,70^2 + h^2$

Calcular cuadrados: $9 = 0,49 + h^2$

Despejar h^2 : $h^2 = 9 - 0,49 = 8,51$

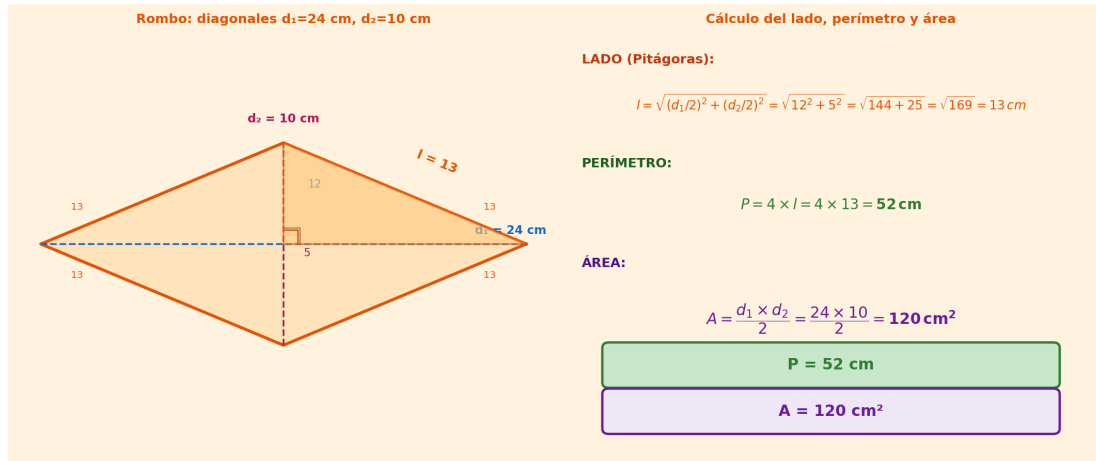
Raíz cuadrada: $h = \sqrt{8,51} \approx 2,917 \text{ m} = 291,7 \text{ cm}$

■ RESULTADO: La escalera alcanza una altura de $h \approx 2,917 \text{ m} \approx 291,7 \text{ cm}$ en la pared.

Verificación: $0,70^2 + 2,917^2 = 0,49 + 8,51 = 9,00 = 3^2 \checkmark$

Ejercicio 2 — Rombo — Perímetro y Área

Un **rombo** es un cuadrilátero con los cuatro lados iguales. Sus diagonales son perpendiculares entre sí y se bisecan mutuamente (se cortan en el punto medio de cada una). Datos: diagonal mayor $d_1 = 24 \text{ cm}$, diagonal menor $d_2 = 10 \text{ cm}$.



Cálculo del lado del rombo (Teorema de Pitágoras):

Las diagonales se cortan perpendicularmente en el centro, formando 4 triángulos rectángulos idénticos. Los catetos de cada triángulo son las semidiagonales: $d_1/2 = 12 \text{ cm}$ y $d_2/2 = 5 \text{ cm}$.

Semidiagonales: $d_1/2 = 24/2 = 12 \text{ cm}$ $d_2/2 = 10/2 = 5 \text{ cm}$

Lado del rombo (Pitágoras): $l = \sqrt{[(d_1/2)^2 + (d_2/2)^2]} = \sqrt{(12^2 + 5^2)} = \sqrt{(144 + 25)} = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$

Reconocemos la terna pitagórica **5 – 12 – 13**, muy útil de memorizar.

Cálculo del perímetro:

El perímetro de un rombo es la suma de sus cuatro lados iguales:

Fórmula: $P = 4 \times l$

Sustitución: $P = 4 \times 13 = 52 \text{ cm}$

Cálculo del área:

El área de un rombo se calcula mediante el producto de sus diagonales dividido por 2 (equivale a la suma de 4 triángulos rectángulos):

Fórmula del área del rombo: $A = (d_1 \times d_2) / 2$

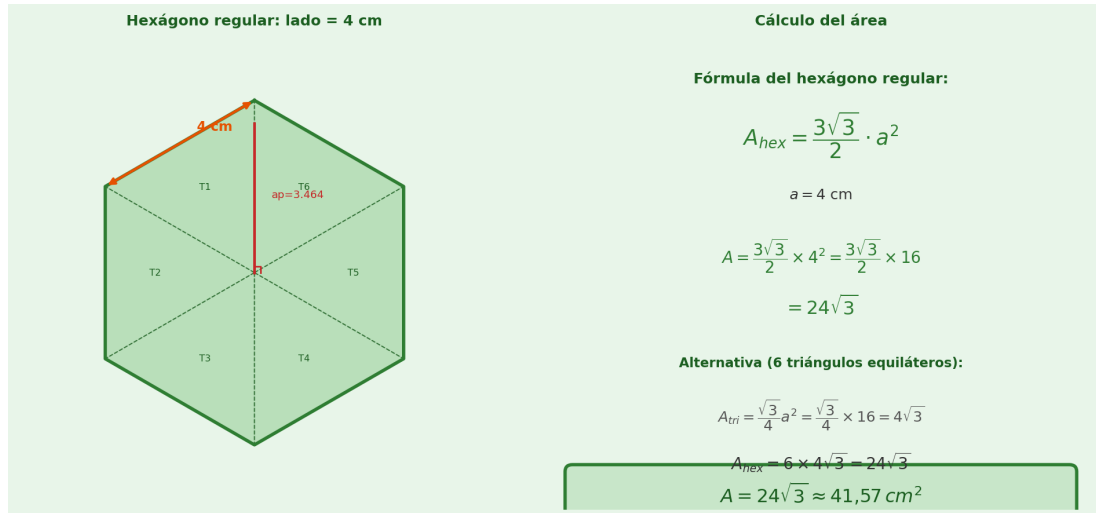
Sustitución: $A = (24 \times 10) / 2 = 240 / 2 = 120 \text{ cm}^2$

Verificación alternativa: 4 triángulos de catetos 12 y 5 $\rightarrow 4 \times (12 \times 5 / 2) = 4 \times 30 = 120 \text{ cm}^2$ ✓

■ RESULTADO: Perímetro = 52 cm | Área = 120 cm²

Ejercicio 3 — Hexágono Regular — Área

Un **hexágono regular** es un polígono de 6 lados iguales y 6 ángulos iguales. Puede descomponerse en **6 triángulos equiláteros** iguales, todos con el mismo lado que el hexágono ($a = 4 \text{ cm}$). Esta propiedad hace su cálculo muy elegante.



Método 1 — Fórmula directa del hexágono regular:

$$A_{\text{hexágono}} = (3\sqrt{3} / 2) \times a^2$$

Datos: $a = 4 \text{ cm}$

Sustitución: $A = (3\sqrt{3} / 2) \times 4^2 = (3\sqrt{3} / 2) \times 16 = 24\sqrt{3}$

Resultado numérico: $24\sqrt{3} \approx 24 \times 1,73205 \approx 41,57 \text{ cm}^2$

Método 2 — Descomposición en 6 triángulos equiláteros:

El hexágono se divide en 6 triángulos equiláteros de lado $a = 4 \text{ cm}$. El área de cada triángulo equilátero es:

$$A_{\text{triángulo equilátero}} = (\sqrt{3} / 4) \times a^2$$

Área de un triángulo: $(\sqrt{3} / 4) \times 16 = 4\sqrt{3} \approx 6,928 \text{ cm}^2$

Área del hexágono (6 triángulos): $6 \times 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3} \approx 41,57 \text{ cm}^2$

Cálculo de la apotema (dato complementario):

La apotema es la distancia del centro al punto medio de un lado. En el triángulo equilátero de lado 4, la altura (= apotema del hexágono) es:

Apotema: $ap = (a\sqrt{3})/2 = (4\sqrt{3})/2 = 2\sqrt{3} \approx 3,464 \text{ cm}$

Con la apotema también: $A = (P \times ap)/2 = (24 \times 2\sqrt{3})/2 = 24\sqrt{3} \checkmark$

■ **RESULTADO:** $A_{\text{hexágono}} = 24\sqrt{3} \approx 41,57 \text{ cm}^2$

Ejercicio 4 — Pirámide de Base Cuadrada — Volumen

Una **pirámide de base cuadrada** tiene por base un cuadrado de lado $a = 10$ m. Se nos indica que la **altura de la cara lateral** es 13 m. Esta medida es la **apotema lateral** (distancia del vértice al punto medio de la arista base). Necesitamos primero calcular la altura real de la pirámide para luego aplicar la fórmula del volumen.

Pirámide de base cuadrada

Resolución paso a paso

Paso 1 — Hallar la altura de la pirámide:

Apotema lateral ($ap_{lat} = 13$) y semiarista ($a/2 = 5$)

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = ap_{lat}^2$$

$$h^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow h^2 = 169 - 25 = 144$$

$$h = \sqrt{144} = 12 \text{ m}$$

Paso 2 — Calcular el volumen:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 12$$

$$= \frac{1}{3} \times 100 \times 12 = \frac{1200}{3}$$

$V = 400 \text{ m}^3$

Paso 1 — Calcular la altura de la pirámide:

La apotema lateral ($ap_{lat} = 13$ m), la semiarista de la base ($a/2 = 5$ m) y la altura de la pirámide (h) forman un **triángulo rectángulo** (el vértice, el centro de la base y el punto medio de una arista).

$$ap_{lat}^2 = h^2 + (a/2)^2$$

Datos: $ap_{lat} = 13$ m $a/2 = 10/2 = 5$ m

Despejar h: $h^2 = ap_{lat}^2 - (a/2)^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$

Altura real de la pirámide: $h = \sqrt{144} = 12$ m

Reconocemos la terna pitagórica **5 – 12 – 13** de nuevo. ✓

Paso 2 — Calcular el volumen:

$$V_{pirámide} = \left(\frac{1}{3}\right) \times A_{base} \times h$$

Área de la base (cuadrado): $A_{base} = a^2 = 10^2 = 100 \text{ m}^2$

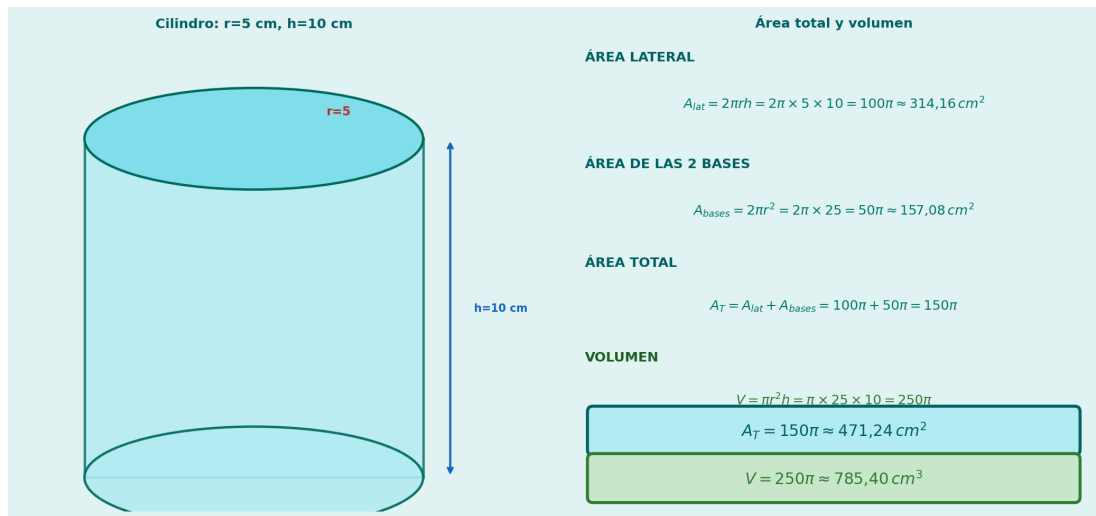
Volumen: $V = \left(\frac{1}{3}\right) \times 100 \times 12 = 1200/3 = 400 \text{ m}^3$

■ **RESULTADO:** El volumen de la pirámide es $V = 400 \text{ m}^3$

Atención: la altura de la cara lateral (apotema lateral = 13 m) NO es la altura de la pirámide. La altura real es $h = 12$ m, que se obtiene aplicando el Teorema de Pitágoras.

Ejercicio 5 — Cilindro — Área Total y Volumen

Un **cilindro recto** está formado por una superficie lateral (rectángulo enrollado) y dos bases circulares iguales. Datos: radio $r = 5 \text{ cm}$, altura $h = 10 \text{ cm}$.



Área lateral:

La superficie lateral del cilindro es un rectángulo de base = circunferencia de la base ($2\pi r$) y altura = h .

$$A_{lateral} = 2\pi rh$$

$$\text{Sustitución: } A_{lat} = 2\pi \times 5 \times 10 = 100\pi \approx 314,16 \text{ cm}^2$$

Área de las dos bases:

$$A_{bases} = 2 \times \pi r^2$$

$$\text{Sustitución: } A_{bases} = 2 \times \pi \times 5^2 = 2 \times 25\pi = 50\pi \approx 157,08 \text{ cm}^2$$

Área total:

$$A_{total} = A_{lateral} + A_{bases} = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

$$\text{Suma: } A_T = 100\pi + 50\pi = 150\pi \approx 471,24 \text{ cm}^2$$

Volumen:

$$V = \pi r^2 h$$

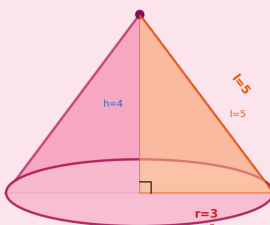
$$\text{Sustitución: } V = \pi \times 5^2 \times 10 = \pi \times 25 \times 10 = 250\pi \approx 785,40 \text{ cm}^3$$

$$\blacksquare \text{ RESULTADO: } A_{total} = 150\pi \approx 471,24 \text{ cm}^2 \quad | \quad V = 250\pi \approx 785,40 \text{ cm}^3$$

Ejercicio 6 — Cono — Área Total y Volumen

Un **cono recto** está formado por una base circular y una superficie lateral cónica. Para calcular el área lateral necesitamos la **generatriz** (l), que es la distancia del vértice a cualquier punto de la circunferencia base. Datos: radio $r = 3 \text{ cm}$, altura $h = 4 \text{ cm}$.

Cono: $r=3 \text{ cm}$, $h=4 \text{ cm}$, generatriz= 5 cm



Resolución completa

Generatriz (Pitágoras)

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

ÁREA LATERAL

$$A_{lat} = \pi r l = \pi \times 3 \times 5 = 15\pi \approx 47,12 \text{ cm}^2$$

ÁREA DE LA BASE

$$A_{base} = \pi r^2 = \pi \times 9 = 9\pi \approx 28,27 \text{ cm}^2$$

ÁREA TOTAL

$$A_T = 15\pi + 9\pi = 24\pi$$

VOLUMEN

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 9 \times 4 = 12\pi$$

$A_T = 24\pi \approx 75,40 \text{ cm}^2$

$V = 12\pi \approx 37,70 \text{ cm}^3$

Paso 1 — Calcular la generatriz (Teorema de Pitágoras):

La generatriz, la altura y el radio forman un triángulo rectángulo.

$$l = \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$\text{Sustitución: } l = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

Reconocemos la terna pitagórica clásica **3 – 4 – 5**. ✓

Paso 2 — Área lateral:

$$A_{lateral} = \pi \times r \times l$$

$$\text{Sustitución: } A_{lat} = \pi \times 3 \times 5 = 15\pi \approx 47,12 \text{ cm}^2$$

Paso 3 — Área de la base:

$$A_{base} = \pi \times r^2$$

$$\text{Sustitución: } A_{base} = \pi \times 3^2 = 9\pi \approx 28,27 \text{ cm}^2$$

Paso 4 — Área total:

$$A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = \pi r l + \pi r^2$$

$$\text{Suma: } A_T = 15\pi + 9\pi = 24\pi \approx 75,40 \text{ cm}^2$$

Paso 5 — Volumen:

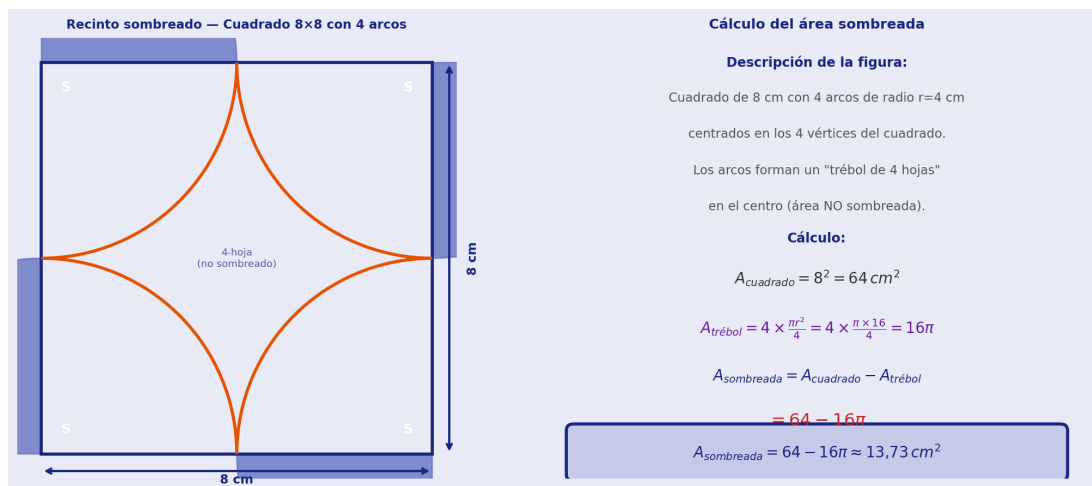
$$V = \left(\frac{1}{3}\right) \times \pi \times r^2 \times h$$

$$\text{Sustitución: } V = \left(\frac{1}{3}\right) \times \pi \times 9 \times 4 = \left(\frac{1}{3}\right) \times 36\pi = 12\pi \approx 37,70 \text{ cm}^3$$

$$\blacksquare \text{ RESULTADO: } A_{total} = 24\pi \approx 75,40 \text{ cm}^2 \quad | \quad V = 12\pi \approx 37,70 \text{ cm}^3$$

Ejercicio 7 — Área del Recinto Sombreado

La figura muestra un **cuadrado de lado 8 cm** con **4 arcos de circunferencia**. Cada arco es un cuarto de circunferencia (arco de 90°) de radio $r = 4$ cm, centrado en cada uno de los 4 vértices del cuadrado. Los 4 arcos forman en el interior un **"trébol de 4 hojas"** (la región central, no sombreada). El **área sombreada** está en las 4 esquinas del cuadrado, fuera del trébol.



Descripción detallada del recinto:

Cada vértice del cuadrado es el centro de un arco. Con radio $r = a/2 = 4$ cm, cada arco conecta los puntos medios de los dos lados que parten de ese vértice. Los 4 arcos son tangentes entre sí en los puntos medios de los lados del cuadrado (ya que la distancia entre vértices adyacentes es $8 = 2 \times 4$, y los círculos son externamente tangentes).

Cálculo paso a paso:

Área del cuadrado: $A_{\blacksquare} = 8^2 = 64 \text{ cm}^2$

Número de cuartos de círculo: 4 arcos, cada uno de radio $r = 4$ cm

Área de cada cuarto de círculo: $A_{\text{arco}} = (1/4) \times \pi \times r^2 = (1/4) \times \pi \times 16 = 4\pi \text{ cm}^2$

Área del trébol (los 4 arcos juntos, sin solapamiento): $A_{\text{trébol}} = 4 \times 4\pi = 16\pi \text{ cm}^2$

Como los arcos son externamente tangentes (no se solapan), la suma directa es correcta. El trébol ocupa $16\pi \approx 50,27 \text{ cm}^2$ del cuadrado de 64 cm^2 .

Área sombreada (4 esquinas): $A_S = A_{\blacksquare} - A_{\text{trébol}} = 64 - 16\pi$

Cálculo numérico: $64 - 16 \times 3,14159 = 64 - 50,265 \approx 13,73 \text{ cm}^2$

Verificación por simetría:

Las 4 regiones sombreadas son idénticas por simetría. Cada una tiene área $= (64 - 16\pi)/4 = 16 - 4\pi \approx 3,43 \text{ cm}^2$. Cada región esquina está delimitada por dos lados del cuadrado y un arco cóncavo.

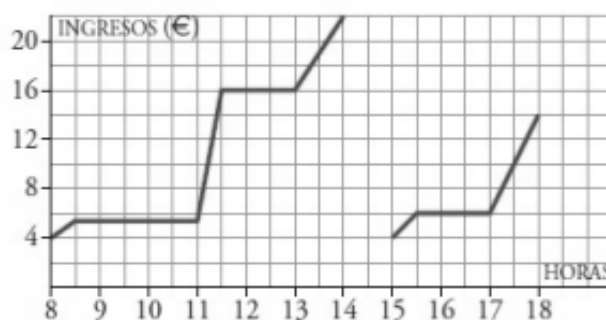
■ RESULTADO: Área del recinto sombreado = $64 - 16\pi \approx 13,73 \text{ cm}^2$

Cada región esquina individual $= 16 - 4\pi \approx 3,43 \text{ cm}^2$, y hay 4 regiones: $4 \times (16 - 4\pi) = 64 - 16\pi \approx 13,73 \text{ cm}^2$ ✓

★ **Fin del documento de soluciones** ★
IES Tovar · 4.º A ESO · Matemáticas — Geometría · Curso 2022-2023

Nº1.- En la puerta del instituto hay un puesto de golosinas. En esta gráfica se ve la cantidad de dinero que hay en su caja a lo largo de un día.

- ¿A qué hora empiezan las clases de la mañana?
- ¿A qué hora es el recreo? ¿Cuánto dura?
- El puesto se cierra a mediodía, y el dueño se lleva el dinero a casa. ¿A qué hora lo cerró? ¿Cuáles fueron los ingresos esta mañana?
- ¿Cuál es el horario de tarde en el instituto?



Nº2.- En una agencia, A, de alquiler de coches cobran para un modelo concreto, 40 € fijos más 0,20 € por cada Km recorrido. En otra agencia, B, por alquilar el mismo modelo, cobran 30 € fijos más 0,30€ por cada Km recorrido.

- Obtén, en cada uno de los dos casos, la expresión analítica de la función que nos da el gasto total según los kilómetros recorridos.
- Representa en los mismos ejes, las dos funciones anteriores.
- ¿Qué agencia es más ventajosa, según los kilómetros que vayamos a recorrer?
- ¿Cuánto pagaremos en cada agencia si recorremos 350 Km?
- ¿Si tenemos 120 € cuántos Kilómetros podremos recorrer con el coche de cada agencia?

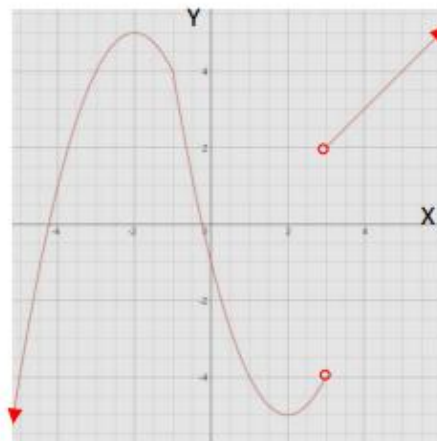
Nº3.- Calcúlese la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(-3,2), B(2,7) y represéntala gráficamente

Nº4.- Dada la función $y = f(x) = -x^2 - 4x - 3$

- Indica qué tipo de función es
- Representa dicha función.
- Indica sus propiedades

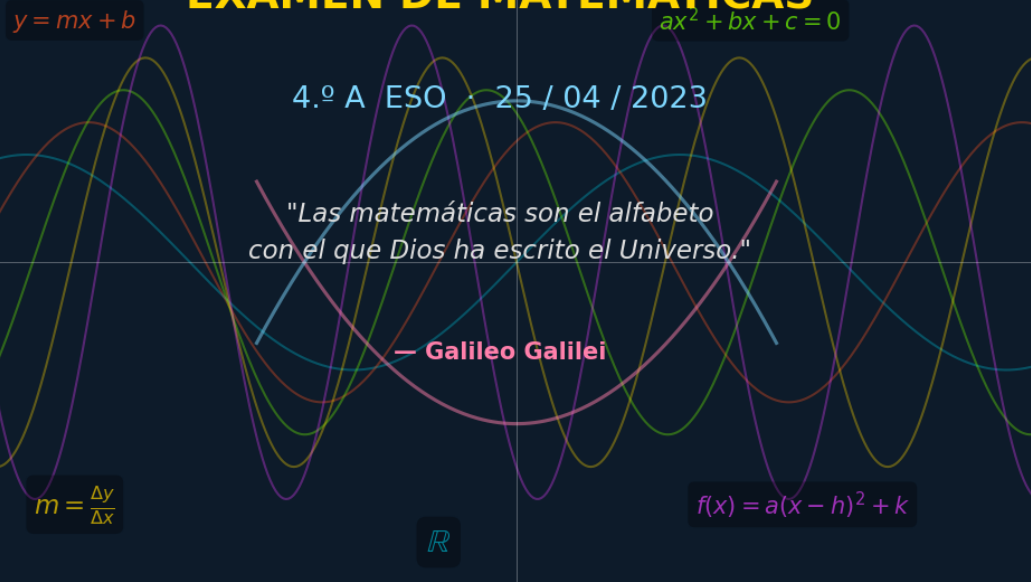
Nº5.- Analiza y estudia las propiedades de la siguiente función:

- Dominio y recorrido
- Continuidad
- Puntos de corte con los ejes
- Crecimiento y decrecimiento
- Máximos y mínimos
- Simetría
- Periodicidad



SOLUCIONES

EXAMEN DE MATEMÁTICAS



Documento de Soluciones Completas con Rigor Matemático

Contenidos: Funciones lineales · Parábolas · Funciones a trozos · Interpretación gráfica

Contents

1	Ejercicio 1 – Interpretación gráfica: el puesto de golosinas	3
2	Ejercicio 2 – Funciones lineales: agencias de alquiler	5
3	Ejercicio 3 – Ecuación de la recta por dos puntos	7
4	Ejercicio 4 – Función cuadrática: $y = -x^2 - 4x - 3$	9
5	Ejercicio 5 – Análisis completo de una función a trozos	11
	Apéndice: Formulario de referencia	15

Cada ejercicio se resuelve con desarrollo completo, paso a paso, sin omitir ningún cálculo. Las gráficas han sido construidas específicamente para ilustrar cada solución.

1. Ejercicio 1 – Interpretación gráfica: el puesto de golosinas

Enunciado

En la puerta del instituto hay un puesto de golosinas. La gráfica muestra la cantidad de dinero en su caja a lo largo del día. Se pide interpretar el horario escolar a partir de la evolución del dinero.

La clave de interpretación es la siguiente:

- **Tramo creciente:** los alumnos están comprando $\Rightarrow$ no hay clase (antes de clase o recreo).
- **Tramo constante:** nadie compra $\Rightarrow$ los alumnos están en clase.
- **Caída vertical a 0:** el dueño retira el dinero de la caja.



Figure 1: Reconstrucción de la gráfica del puesto de golosinas. Los colores señalan los distintos periodos del día escolar.

a) ¿A qué hora empiezan las clases de la mañana?

Observando la gráfica, el dinero en caja *aumenta* entre las 8:00 h y las 9:00 h, pues los alumnos compran antes de entrar a clase. A las **9:00 h** la curva se *estabiliza* (pasa a ser constante): los alumnos han entrado al aula y han dejado de comprar.

Las clases de la mañana comienzan a las 9:00 h.

b) ¿A qué hora es el recreo? ¿Cuánto dura?

Tras el tramo plano de 9:00 h a 11:00 h (primera sesión de clase), la curva *vuelve a crecer* a las 11:00 h: los alumnos salen al patio y compran en el puesto. Esta fase creciente se extiende hasta las **11:30 h**, momento en que la curva se estabiliza nuevamente.

$$\text{Duración del recreo} = 11:30 \text{ h} - 11:00 \text{ h} = \boxed{30 \text{ minutos}}$$

El recreo es de 11:00 h a 11:30 h y dura 30 minutos.

c) ¿A qué hora cerró el puesto? ¿Cuáles fueron los ingresos?

A las 14:00 h se produce la *caída brusca* a 0 en la gráfica: el dueño cierra el puesto y se lleva el dinero a casa. En ese momento, el nivel de la caja es de 16 €, que representa el total de ingresos de la mañana (desde la apertura a las 8:00 h hasta el cierre a las 14:00 h).

$$\text{Ingresos mañana} = 16e - 0e = \boxed{16e}$$

El puesto cerró a las 14:00 h. Los ingresos de la mañana fueron 16 €.

d) ¿Cuál es el horario de tarde en el instituto?

Desde las 14:00 h hasta las 16:00 h la caja permanece a 0 €: el puesto está cerrado y no hay alumnos (hora de comer). A las 16:00 h la curva vuelve a crecer (los alumnos regresan al instituto y compran), y a las 17:00 h la curva se estabiliza nuevamente (los alumnos están en clase). El tramo constante de tarde dura hasta las 18:00 h.

El horario de tarde es de 16:00 h a 18:00 h.

2. Ejercicio 2 – Funciones lineales: agencias de alquiler

Enunciado

Agencia A: 40 € fijos + 0,20 €/km. **Agencia B:** 30 € fijos + 0,30 €/km.

a) Expresiones analíticas

Para cada agencia, el *gasto total* C en función de los kilómetros x recorridos se obtiene sumando el coste fijo y el coste variable:

$$C_A(x) = 40 + 0,20x$$

$$C_B(x) = 30 + 0,30x$$

donde $x \geq 0$ representa los kilómetros recorridos y C se expresa en euros.

b) Representación gráfica de las dos funciones

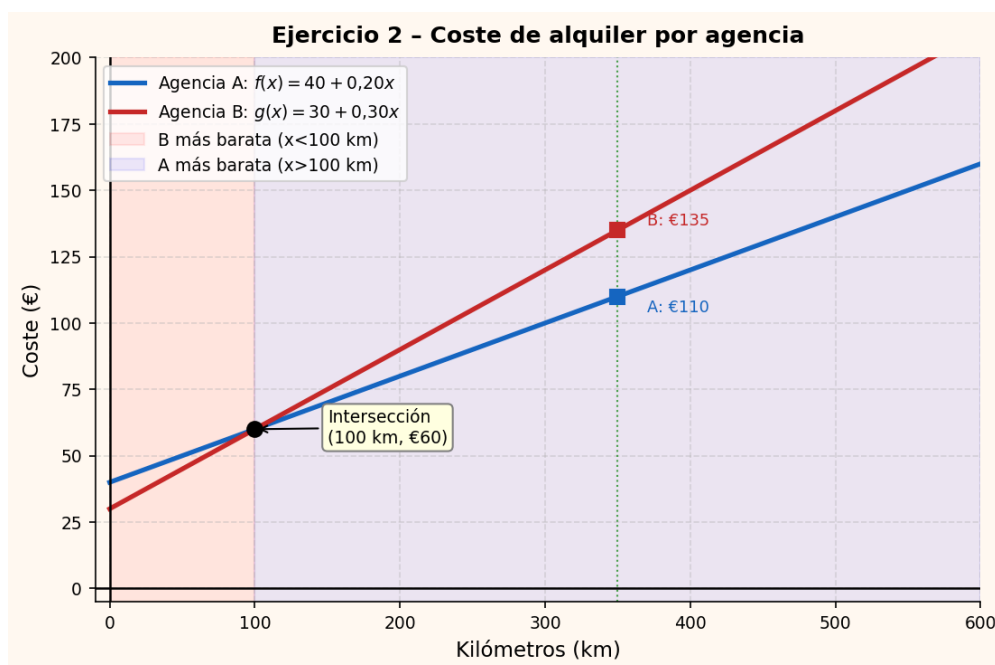


Figure 2: Rectas de coste de las agencias A (azul) y B (rojo). La zona sombreada en rojo indica cuándo B es más barata; la azul, cuándo lo es A.

c) ¿Qué agencia es más ventajosa según los kilómetros?

Para averiguarlo hallamos el punto de *corte* entre ambas rectas:

$$C_A(x) = C_B(x) \iff 40 + 0,20x = 30 + 0,30x$$

Despejamos x paso a paso:

$$40 - 30 = 0,30x - 0,20x$$

$$10 = 0,10x$$

$$x = \frac{10}{0,10} = 100 \text{ km}$$

Para este valor, el coste en ambas agencias es:

$$C_A(100) = 40 + 0,20 \cdot 100 = 40 + 20 = 60 \text{ €} \quad C_B(100) = 30 + 0,30 \cdot 100 = 30 + 30 = 60 \text{ €}$$

Ahora comparamos los costes fuera del punto de corte:

Kilómetros	$C_A(x)$	$C_B(x)$	Más ventajosa
$x < 100 \text{ km}$	mayor	menor	Agencia B
$x = 100 \text{ km}$	igual	igual	Indiferente
$x > 100 \text{ km}$	menor	mayor	Agencia A

Si se van a recorrer **menos de 100 km**, conviene la **Agencia B** (cuota fija menor).
Si se van a recorrer **más de 100 km**, conviene la **Agencia A** (precio por km más bajo).

d) Coste con 350 km en cada agencia

$$C_A(350) = 40 + 0,20 \cdot 350 = 40 + 70 = \boxed{110 \text{ €}}$$

$$C_B(350) = 30 + 0,30 \cdot 350 = 30 + 105 = \boxed{135 \text{ €}}$$

Con 350 km: **Agencia A** cuesta **110 €** y **Agencia B** cuesta **135 €**.
La Agencia A resulta 25 € más barata.

e) Kilómetros que se pueden recorrer con 120 €
Agencia A:

$$\begin{aligned} 120 &= 40 + 0,20x \\ 120 - 40 &= 0,20x \\ 80 &= 0,20x \\ x &= \frac{80}{0,20} = \boxed{400 \text{ km}} \end{aligned}$$

Agencia B:

$$\begin{aligned} 120 &= 30 + 0,30x \\ 120 - 30 &= 0,30x \\ 90 &= 0,30x \\ x &= \frac{90}{0,30} = \boxed{300 \text{ km}} \end{aligned}$$

Con 120 € se pueden recorrer **400 km** con la **Agencia A** y **300 km** con la **Agencia B**.

3. Ejercicio 3 – Ecuación de la recta por dos puntos

Enunciado

Calcúlese la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-3, 2)$ y $B(2, 7)$.

Usaremos la **ecuación punto-pendiente**: $y - y_1 = m(x - x_1)$, donde m es la pendiente de la recta.

Paso 1. Calcular la pendiente m

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7 - 2}{2 - (-3)} = \frac{5}{5} = \boxed{1}$$

Paso 2. Obtener la ecuación usando el punto $A(-3, 2)$

$$y - 2 = 1 \cdot (x - (-3)) \implies y - 2 = x + 3 \implies \boxed{y = x + 5}$$

Verificación con el punto $B(2, 7)$:

$$y = 2 + 5 = 7 = y_B \checkmark$$

Puntos de corte con los ejes:

- Con el eje OY ($x = 0$): $y = 0 + 5 = 5 \Rightarrow$ Punto $(0, 5)$.
- Con el eje OX ($y = 0$): $0 = x + 5 \Rightarrow x = -5 \Rightarrow$ Punto $(-5, 0)$.

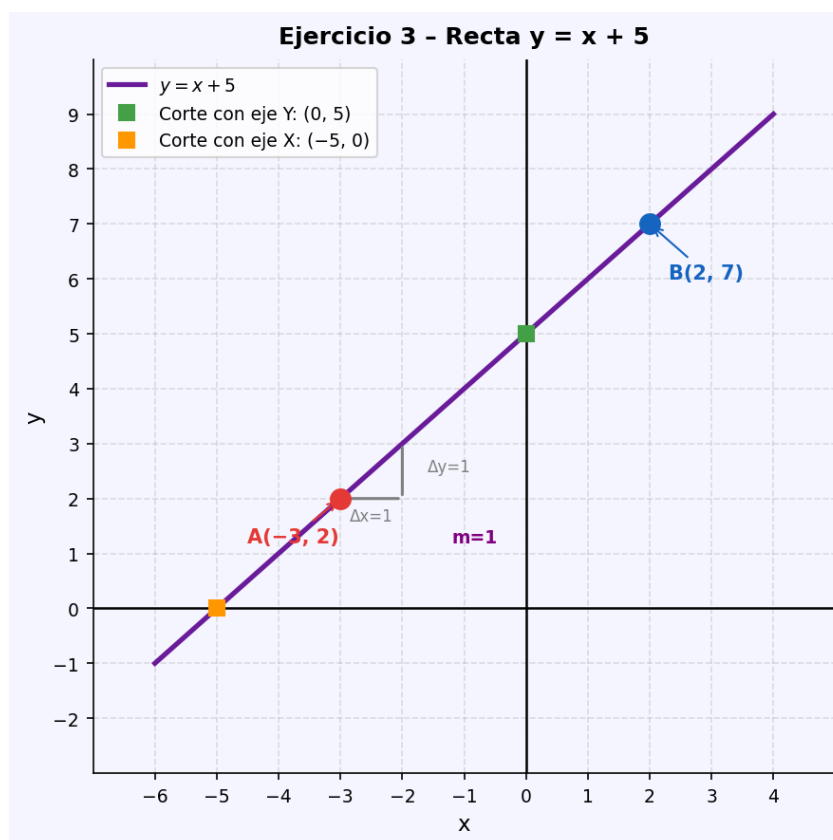


Figure 3: Recta $y = x + 5$ con los puntos A y B , los cortes con los ejes y el triángulo de la pendiente.

La ecuación de la recta es **$y = x + 5$** .

Pendiente $m = 1$ (la recta forma 45° con el eje horizontal).

Ordenada en el origen $b = 5$ (corta al eje OY en $(0, 5)$).

4. Ejercicio 4 – Función cuadrática: $y = -x^2 - 4x - 3$

Enunciado

Dada la función $y = f(x) = -x^2 - 4x - 3$: **a)** tipo de función; **b)** representación gráfica; **c)** propiedades.

a) Tipo de función

Función cuadrática (o polinómica de grado 2)

Es una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$.

En este caso: $a = -1$, $b = -4$, $c = -3$.

Su representación gráfica es una **parábola**. Como $a = -1 < 0$, la parábola tiene las ramas dirigidas **hacia abajo** (cóncava hacia abajo).

b) Representación gráfica

Para representar la parábola calculamos los elementos esenciales:

– **Vértice de la parábola:**

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot (-1)} = -\frac{4}{-2} = -2$$

$$y_V = f(-2) = -(-2)^2 - 4(-2) - 3 = -4 + 8 - 3 = 1$$

$$\text{Vértice} = V(-2, 1)$$

– **Raíces (ceros) de la función:** Igualamos $f(x) = 0$:

$$-x^2 - 4x - 3 = 0 \xrightarrow{\cdot(-1)} x^2 + 4x + 3 = 0$$

Factorizamos usando la fórmula cuadrática o por tanteo:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 2}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad x_2 = \frac{-4 - 2}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Comprobación por factorización:

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3) \Rightarrow x = -1 \text{ o } x = -3 \checkmark$$

– **Ordenada en el origen:**

$$f(0) = -(0)^2 - 4(0) - 3 = -3 \Rightarrow (0, -3)$$

– **Eje de simetría:** La parábola es simétrica respecto de la recta vertical $x = x_V = -2$.

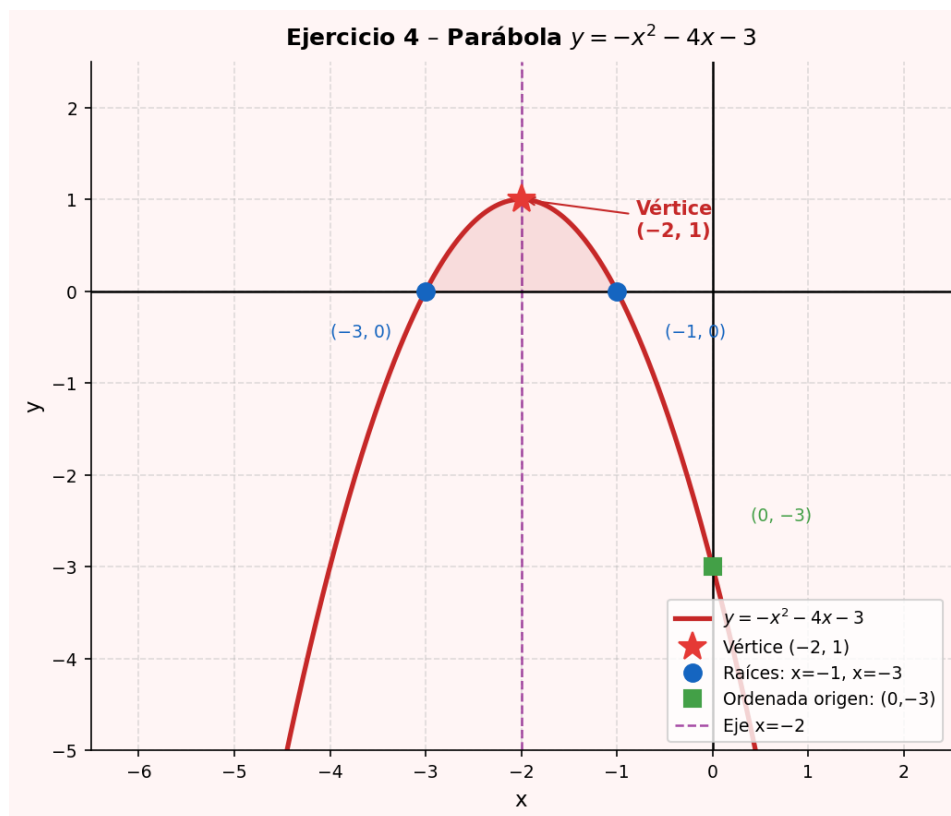


Figure 4: Parábola $y = -x^2 - 4x - 3$, con vértice, raíces, ordenada en el origen y eje de simetría.

c) Propiedades de la función

Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

Recorrido (imagen): $\text{Im}(f) = (-\infty, 1]$ (el máximo valor alcanzado es $y_V = 1$, en el vértice).

Vértice (punto extremo): $V(-2, 1)$ – **máximo** (ya que $a < 0$).

Raíces: $x_1 = -3$ y $x_2 = -1$ (la parábola corta al eje OX en $(-3, 0)$ y $(-1, 0)$).

Ordenada en el origen: $(0, -3)$.

Eje de simetría: recta vertical $x = -2$.

Crecimiento:

- *Creciente* en $(-\infty, -2)$: al alejarnos del vértice hacia la izquierda, f aumenta hasta el máximo.
- *Decreciente* en $(-2, +\infty)$: a partir del vértice la parábola baja.

Continuidad: f es continua en todo $\mathbb{R}$.

Concavidad: cóncava hacia abajo (abierta hacia abajo) por ser $a = -1 < 0$.

Signo de f : $f(x) \geq 0$ para $x \in [-3, -1]$; $f(x) < 0$ fuera de ese intervalo.

5. Ejercicio 5 – Análisis completo de una función a trozos

Enunciado

Analiza y estudia las propiedades de la función representada en la gráfica: dominio, recorrido, continuidad, cortes con los ejes, crecimiento/decrecimiento, máximos/mínimos, simetría y periodicidad.

De la lectura de la gráfica se extrae que la función es:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \in [-3, 2) \\ x - 6 & \text{si } x \in (2, 7] \end{cases}$$

Los **extremos abiertos** (círculos huecos en la gráfica) indican que la función *no está definida* en $x = 2$: el límite lateral izquierdo es 3 y el lateral derecho es -4 , por lo que hay una **discontinuidad de salto** en ese punto.

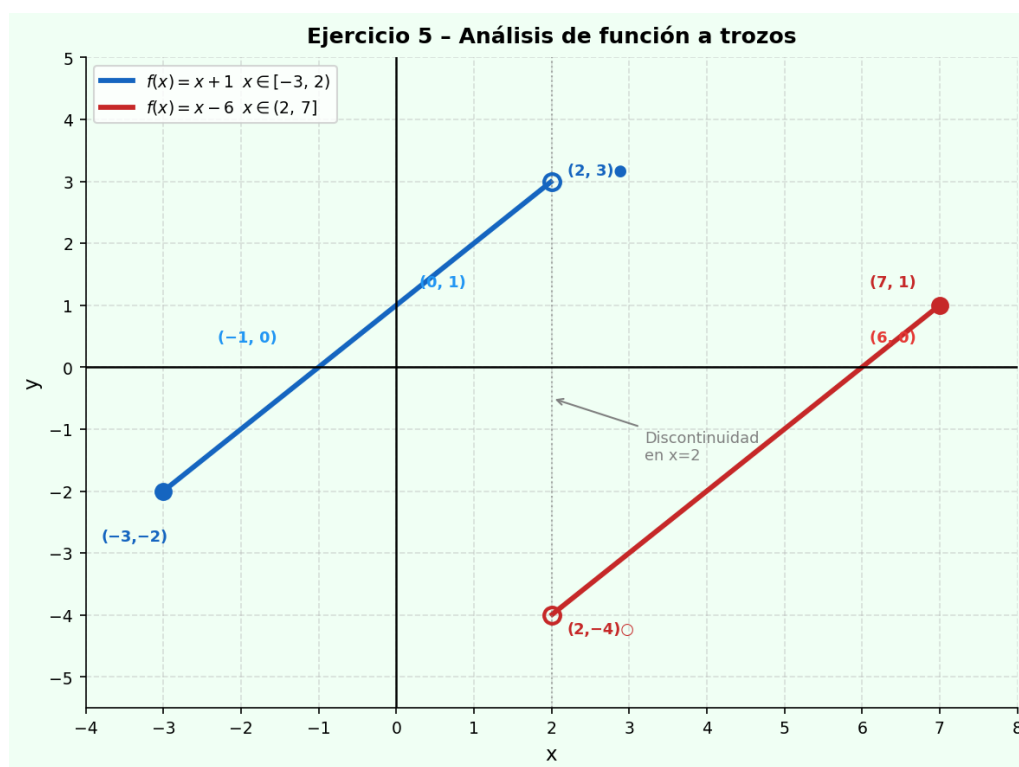


Figure 5: Función a trozos. Los círculos huecos indican extremos abiertos (puntos excluidos del dominio).

a) Dominio y Recorrido

Dominio:

El primer trozo está definido para $x \in [-3, 2)$ y el segundo para $x \in (2, 7]$. El punto $x = 2$ *no pertenece* a ninguno de los dos trozos (ambos tienen ese extremo abierto), de modo que:

$$\text{Dom}(f) = [-3, 2) \cup (2, 7]$$

Recorrido (imagen):

- **Primer trozo** ($f(x) = x + 1, x \in [-3, 2)$): $f(-3) = -3 + 1 = -2$ (extremo cerrado, valor alcanzado); cuando $x \rightarrow 2^-$, $f(x) \rightarrow 3$ (no alcanzado). $\Rightarrow$ valores del primer trozo: $[-2, 3)$.
- **Segundo trozo** ($f(x) = x - 6, x \in (2, 7]$): cuando $x \rightarrow 2^+$, $f(x) \rightarrow -4$ (no alcanzado); $f(7) = 7 - 6 = 1$ (extremo cerrado, valor alcanzado). $\Rightarrow$ valores del segundo trozo: $(-4, 1]$.

La unión de ambos conjuntos de valores es:

$$\text{Im}(f) = [-2, 3) \cup (-4, 1] = (-4, 3)$$

ya que $(-4, 1]$ y $[-2, 3)$ se solapan en $[-2, 1]$ y juntos cubren sin interrupciones el intervalo $(-4, 3)$.

$$\text{Dom}(f) = [-3, 2) \cup (2, 7] \quad ; \quad \text{Im}(f) = (-4, 3)$$

b) Continuidad

Cada trozo es una función lineal, que es continua en todo su dominio. Solo puede haber problemas en los extremos de los trozos, es decir, en $x = -3$, $x = 2$ y $x = 7$.

- **En $x = -3$:** es el extremo izquierdo cerrado del primer trozo. La función está definida ($f(-3) = -2$) y no hay trozo a su izquierda. No hay discontinuidad en este punto.
- **En $x = 2$ (punto crítico):**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 1) = 2 + 1 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 6) = 2 - 6 = -4 \\ f(2) &= \text{no definida} \end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, el límite en $x = 2$ **no existe**. Se trata de una **discontinuidad de salto** (finita) con amplitud $|3 - (-4)| = 7$.

- **En $x = 7$:** es el extremo derecho cerrado del segundo trozo. $f(7) = 1$. No hay discontinuidad.

La función es **continua** en todo su dominio excepto en $x = 2$, donde presenta una **discontinuidad de salto** de amplitud 7.

c) Puntos de corte con los ejes

Corte con el eje OX ($y = 0$):

- Primer trozo: $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$. Como $-1 \in [-3, 2)$ $\checkmark \Rightarrow$ punto de corte $(-1, 0)$.
- Segundo trozo: $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$. Como $6 \in (2, 7]$ $\checkmark \Rightarrow$ punto de corte $(6, 0)$.

Corte con el eje OY ($x = 0$):

Como $0 \in [-3, 2)$ (pertenece al primer trozo):

$$f(0) = 0 + 1 = 1 \Rightarrow \text{punto de corte } (0, 1)$$

Cortes con OX : $(-1, 0)$ y $(6, 0)$.

Corte con OY : $(0, 1)$.

d) Crecimiento y Decrecimiento

Ambos trozos son funciones lineales con pendiente $m = +1 > 0$, por lo que son **crecientes** en sus respectivos intervalos de definición.

- f **crece** en $[-3, 2)$ (primer trozo).
- f **crece** en $(2, 7]$ (segundo trozo).

Sin embargo, **no podemos** afirmar que f sea globalmente creciente en $[-3, 7]$, ya que en $x = 2$ hay una discontinuidad de salto (la función «salta» de un valor cercano a 3 a uno cercano a -4 , es decir, *desciende bruscamente*).

f es **creciente** en $[-3, 2)$ y en $(2, 7]$ por separado. **No es globalmente creciente** en todo su dominio.

e) Máximos y Mínimos

Como ambos trozos son lineales (pendiente constante $\neq 0$), la función no tiene ningún **extremo local** (máximo ni mínimo relativo) en el interior de los intervalos.

Análisis de los extremos absolutos:

- **Valor mínimo global:** El menor valor alcanzado es $f(-3) = -2$. (El valor -4 no se alcanza, pues el extremo de $(2, 7]$ es abierto.)
- **Supremo** (valor más alto, no alcanzado): $\sup f = 3$ (límite de $x + 1$ cuando $x \rightarrow 2^-$, pero no se logra).
- **Valor máximo alcanzado:** no existe máximo global ya que el supremo no se alcanza. El mayor valor *efectivamente alcanzado* es $f(7) = 1$.

No existen máximos ni mínimos locales en el interior.

Mínimo absoluto: $f(-3) = -2$ en $x = -3$.

No existe máximo absoluto (el supremo 3 no se alcanza).

f) Simetría

Para que exista simetría respecto al eje OY (**función par**), se requiere $f(-x) = f(x)$ para todo x del dominio. Para que exista simetría respecto al origen (**función impar**), se requiere $f(-x) = -f(x)$.

Comprobamos con valores concretos:

$$f(1) = 1 + 1 = 2 \quad f(-1) = -1 + 1 = 0$$

$$f(-1) = 0 \neq f(1) = 2 \Rightarrow \text{no es par.}$$

$$-f(1) = -2 \neq f(-1) = 0 \Rightarrow \text{no es impar.}$$

La función **no tiene ningún tipo de simetría** (ni par, ni impar, ni respecto a ningún otro eje o punto).

g) Periodicidad

Una función es **periódica** de período $T > 0$ si $f(x + T) = f(x)$ para todo x del dominio. Dado que la función está definida en el intervalo acotado $[-3, 2) \cup (2, 7]$, su dominio no es invariante por ninguna traslación horizontal, condición necesaria para la periodicidad. Además, siendo lineal a trozos con pendiente $m = 1$, el valor de f no se repite de forma cíclica.

La función **no es periódica**.

Tabla Resumen – Ejercicio 5

Dominio	$[-3, 2) \cup (2, 7]$
Recorrido	$(-4, 3)$
Continuidad	Discontinuidad de salto en $x = 2$ (amplitud 7)
Corte con OX	$(-1, 0)$ y $(6, 0)$
Corte con OY	$(0, 1)$
Crecimiento	Creciente en $[-3, 2)$ y en $(2, 7]$
Decrecimiento	No decrece en ningún intervalo
Mínimo abs.	$f(-3) = -2$ en $x = -3$
Máximo abs.	No existe (supremo no alcanzado: 3)
Simetría	Ninguna
Periodicidad	No periódica

Apéndice – Formulario de referencia

Función lineal

$$f(x) = mx + b$$

m : pendiente b : ordenada en el origen

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Función cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

$$\text{Vértice: } x_V = -\frac{b}{2a}$$

$$\text{Raíces: } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

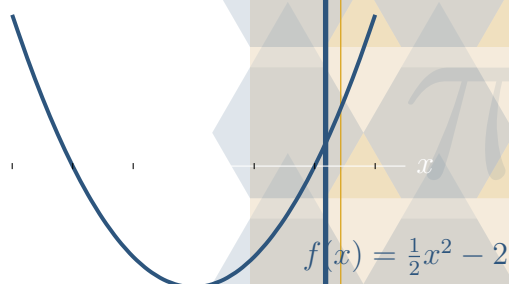
Ecuación de la recta por dos puntos

Dados $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \Longleftrightarrow \quad y - y_1 = m(x - x_1)$$

Propiedades de funciones

- **Par:** $f(-x) = f(x)$ (simetría respecto al eje OY).
- **Impar:** $f(-x) = -f(x)$ (simetría respecto al origen).
- **Creciente** en I : $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- **Periódica** de período T : $f(x + T) = f(x) \forall x$.
- **Discontinuidad de salto:** los límites laterales existen pero son distintos.



EXÁMENES DE LADIS

1º BACHILLERATO
CIENCIAS SOCIALES

CURSO 2022-2023

“La práctica con la ciencia es mucho mejor que la ciencia sin la práctica.”

— *Leonardo Fibonacci (1170-1250)*

1 1 2 3 5 8 13 21 ...

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618 \dots$$

Nº1.- Clasifica los siguientes números, indicando el conjunto más pequeño al que pertenecen. Calcúlese la fracción generatriz de los que sean racionales e indica de qué tipo son:

$$-8 ; 2,2 ; \frac{3}{5} ; \sqrt{9} ; \sqrt{17} ; 1,\hat{8} ; 1,31331333133331 \dots \dots ; 0,9\hat{1}$$

(1,5 PUNTO)

Nº2.- Opera y simplifica al máximo las siguientes expresiones:

$$a) \sqrt{300} - \sqrt{48} - 2\sqrt{27} + \sqrt{12} - 2\sqrt{3} \quad b) \sqrt{34 + \sqrt{1 + \sqrt{4 + \sqrt{25}}}}$$

(1,5 PUNTO)

Nº3.- Dados los polinomios:

$$P(x) = x^6 - x^3 - 3x - 3 \quad Q(x) = x^2 - 3 \quad R(x) = x - 2$$

Calcúlese:

- a) $P(x) \cdot Q(x)$
- b) $P(x):Q(x)$ (Indica cuál es el Cociente y el Resto)
- c) El valor numérico del polinomio $P(x)$ en el punto $x = 2$
- d) $P(x):R(x)$ (Indica cuál es el Cociente y el Resto)

(2 PUNTOS)

Nº4.- Calcúlese el valor del parámetro m para que la división sea exacta:

$$(x^3 - 2mx^2 + 2x - 4):(x - 2)$$

(1 PUNTO)

Nº5.- desarrolla los siguientes productos notables:

$$a) (3x + 4)^2 \quad b) (4 - 2x^2)^2 \quad c) (2x^2 + 5x) \cdot (2x^2 - 5x)$$

(2 PUNTOS)

Nº6.- Opera y simplifica:

$$\frac{2}{(x-3)} + \frac{3}{(x+2)} - \frac{(4x-7)}{(x^2-x-6)}$$

(2 PUNTOS)

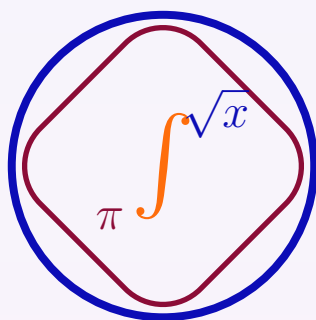
SUERTE JÓVENES

EXAMEN DE MATEMÁTICAS

Resuelto y Explicado

1º Bachillerato B/C

21 de Octubre de 2022



*“Las matemáticas son el alfabeto con el cual
Dios ha escrito el universo”*

— Galileo Galilei

Índice

1. Ejercicio 1: Clasificación de Números y Fracciones Generatrices	2
1.1. Ilustración: Conjuntos Numéricos	2
1.2. Solución Detallada	2
1.3. Tabla Resumen	7
2. Ejercicio 2: Operaciones con Radicales	8
2.1. Ilustración: Propiedades de los Radicales	8
2.2. Apartado a) Simplificación de radicales	8
2.3. Apartado b) Radicales anidados	11
2.4. Ilustración del proceso de radicales anidados	12
3. Ejercicio 3: Operaciones con Polinomios	13
3.1. Ilustración: Operaciones con Polinomios	13
3.2. Apartado a) Multiplicación de polinomios	13
3.3. Apartado b) División de polinomios $P(x) : Q(x)$	15
3.4. Apartado c) Valor numérico de $P(x)$ en $x = 2$	18
3.5. Apartado d) División de polinomios $P(x) : R(x)$	18
3.6. Ilustración: Regla de Ruffini	20
4. Ejercicio 4: Cálculo del Parámetro m	21
4.1. Ilustración: División Exacta	21
4.2. Ilustración gráfica del proceso	23
5. Ejercicio 5: Productos Notables	24
5.1. Ilustración: Fórmulas de Productos Notables	24
5.2. Apartado a) $(3x + 4)^2$	24
5.3. Apartado b) $(4 - 2x^2)^2$	25
5.4. Apartado c) $(2x^2 + 5x) \cdot (2x^2 - 5x)$	26
5.5. Resumen visual de los tres productos notables	27
6. Ejercicio 6: Operaciones con Fracciones Algebraicas	28
6.1. Ilustración: Suma de Fracciones Algebraicas	28
6.2. Diagrama del proceso de simplificación	31
6.3. Verificación numérica	31
Resumen de Resultados	32

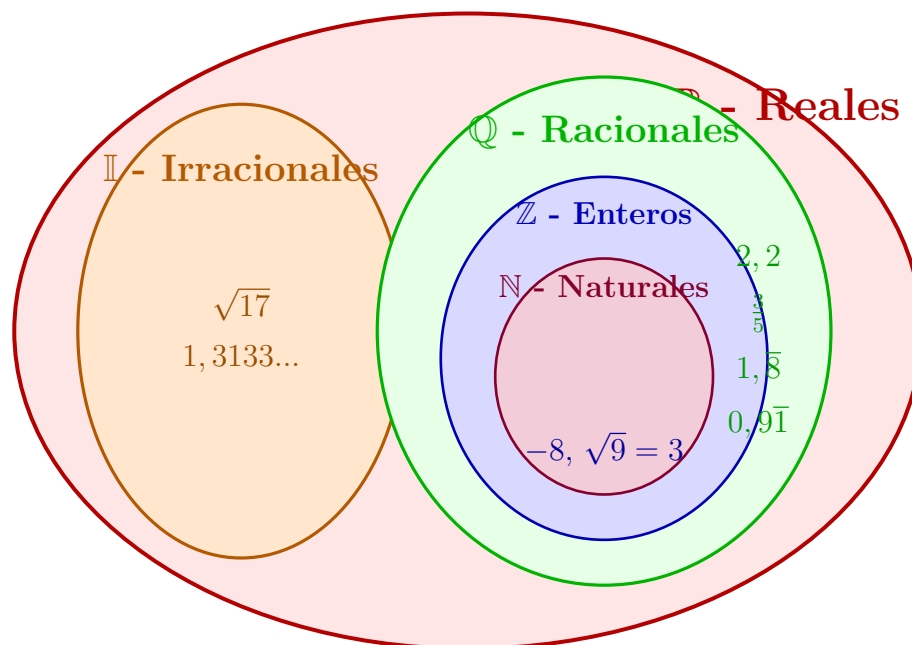
1. Ejercicio 1: Clasificación de Números y Fracciones Generatrices

Ejercicio

Clasifica los siguientes números, indicando el conjunto más pequeño al que pertenecen. Calcúlese la fracción generatriz de los que sean racionales e indica de qué tipo son:

-8 ; $2,2$; $\frac{3}{5}$; $\sqrt{9}$; $\sqrt{17}$; $1,\bar{8}$; $1,31331333133331\dots$; $0,9\bar{1}$

1.1. Ilustración: Conjuntos Numéricos



1.2. Solución Detallada

Solución

1. Número: -8

Análisis:

- Es un número negativo entero
- No es natural (los naturales son positivos)
- Es entero: $-8 \in \mathbb{Z}$

Clasificación: $-8 \in \mathbb{Z}$ (Número Entero)

¿Es racional? Sí, porque todo número entero es racional.

Fracción generatriz:

$$-8 = \frac{-8}{1}$$

Tipo de racional: Entero (caso particular de racional donde el denominador es 1)

2. Número: 2,2

Análisis:

- Es un decimal exacto (tiene un número finito de cifras decimales)
- Los decimales exactos son siempre racionales

Clasificación: $2,2 \in \mathbb{Q}$ (Número Racional)

Cálculo de la fracción generatriz:

Método: Multiplicar por la potencia de 10 adecuada

$$\begin{aligned} x &= 2,2 \\ 10x &= 22 \\ 10x &= 22 \\ x &= \frac{22}{10} = \frac{11}{5} \end{aligned}$$

Fracción generatriz: $2,2 = \frac{11}{5}$

Tipo de racional: Decimal exacto

Verificación: $\frac{11}{5} = 2,2 \checkmark$

3. Número: $\frac{3}{5}$

Análisis:

- Ya está expresado como fracción
- Es un número racional por definición

Clasificación: $\frac{3}{5} \in \mathbb{Q}$ (Número Racional)

Fracción generatriz: $\frac{3}{5}$ (ya está en forma de fracción)

Expresión decimal: $\frac{3}{5} = 0,6$

Tipo de racional: Fracción irreducible / Decimal exacto

4. Número: $\sqrt{9}$ **Análisis:**

- Debemos calcular la raíz cuadrada
- $\sqrt{9} = 3$ (porque $3^2 = 9$)
- 3 es un número natural

Clasificación: $\sqrt{9} = 3 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ Como pregunta por el conjunto más pequeño: $3 \in \mathbb{N}$ (Número Natural)**Fracción generatriz:** $3 = \frac{3}{1}$ **Tipo de racional:** Entero (Natural)**5. Número:** $\sqrt{17}$ **Análisis:**

- 17 no es un cuadrado perfecto
- $4^2 = 16 < 17 < 25 = 5^2$, entonces $4 < \sqrt{17} < 5$
- $\sqrt{17} \approx 4,123105625\dots$
- No puede expresarse como fracción de dos enteros

Demostración de irracionalidad:Supongamos por contradicción que $\sqrt{17}$ es racional, entonces:

$$\sqrt{17} = \frac{p}{q} \text{ con } p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, \gcd(p, q) = 1$$

Elevando al cuadrado:

$$17 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 17q^2 = p^2$$

Esto implica que p^2 es múltiplo de 17, por tanto p es múltiplo de 17.Sea $p = 17k$, entonces:

$$17q^2 = (17k)^2 = 289k^2$$

$$q^2 = 17k^2$$

Esto implica que q^2 es múltiplo de 17, por tanto q también lo es.Pero esto contradice que $\gcd(p, q) = 1$. Por tanto, $\sqrt{17}$ es irracional.**Clasificación:** $\sqrt{17} \in \mathbb{I}$ (Número Irracional)**Fracción generatriz:** No tiene (es irracional)**Tipo:** No es racional

6. Número: $1, \overline{8}$ **Análisis:**

- Es un decimal periódico puro (el periodo comienza inmediatamente después de la coma)
- El periodo es: 8
- Los decimales periódicos son siempre racionales

Clasificación: $1, \overline{8} \in \mathbb{Q}$ (Número Racional)**Cálculo de la fracción generatriz:**Sea $x = 1,888888\dots$

Método estándar para periódico puro:

$$x = 1, \overline{8}$$

$$10x = 18, \overline{8} \quad (\text{multiplicamos por 10 porque el periodo tiene 1 cifra})$$

$$10x - x = 18, \overline{8} - 1, \overline{8}$$

$$9x = 17$$

$$x = \frac{17}{9}$$

Fracción generatriz: $1, \overline{8} = \frac{17}{9}$ **Tipo de racional:** Decimal periódico puro**Verificación:** $\frac{17}{9} = 1,888\dots = 1, \overline{8} \checkmark$ **7. Número:** $1,31331333133331\dots$ **Análisis:**

- Observamos el patrón: 1, luego 3, luego 13, luego 113, luego 1113, etc.
- El número de unos aumenta en cada grupo
- No hay periodo que se repita
- No es periódico ni exacto
- No puede expresarse como fracción

Clasificación: $1,31331333133331\dots \in \mathbb{I}$ (Número Irracional)**Fracción generatriz:** No tiene (es irracional)**Tipo:** No es racional**Observación:** Este es un número con un patrón definido pero no periódico, lo que lo hace irracional.

8. Número: $0,9\bar{1}$ **Análisis:**

- Es un decimal periódico mixto
- Parte entera: 0
- Parte decimal no periódica (anteperiodo): 9
- Parte decimal periódica (periodo): 1
- Los decimales periódicos son siempre racionales

Clasificación: $0,9\bar{1} \in \mathbb{Q}$ (Número Racional)**Cálculo de la fracción generatriz:**Sea $x = 0,911111\dots$

Método para periódico mixto:

$$x = 0,9\bar{1}$$

$$10x = 9,\bar{1} \quad (\text{multiplicamos por } 10^1 \text{ porque hay 1 cifra no periódica})$$

$$100x = 91,\bar{1} \quad (\text{multiplicamos por } 10^2 = 10^{1+1}, \text{ suma de cifras no periódicas y periódicas})$$

Restamos la primera ecuación de la segunda:

$$100x - 10x = 91,\bar{1} - 9,\bar{1}$$

$$90x = 82$$

$$x = \frac{82}{90} = \frac{41}{45}$$

Fracción generatriz: $0,9\bar{1} = \frac{41}{45}$ **Tipo de racional:** Decimal periódico mixto**Verificación:**

$$\frac{41}{45} = 0,91111\dots = 0,9\bar{1} \quad \checkmark$$

1.3. Tabla Resumen

Resultado Final				
Número	Conjunto	¿Racional?	Fracción Generatriz	Tipo
-8	$\mathbb{Z}$	Sí	$-\frac{8}{1}$	Entero
2,2	$\mathbb{Q}$	Sí	$\frac{11}{5}$	Decimal exacto
$\frac{3}{5}$	$\mathbb{Q}$	Sí	$\frac{3}{5}$	Fracción/Decimal exacto
$\sqrt{9} = 3$	$\mathbb{N}$	Sí	$\frac{3}{1}$	Natural/Entero
$\sqrt{17}$	$\mathbb{I}$	No	—	Irracional
$1, \bar{8}$	$\mathbb{Q}$	Sí	$\frac{17}{9}$	Periódico puro
1,3133...	$\mathbb{I}$	No	—	Irracional
$0,9\bar{1}$	$\mathbb{Q}$	Sí	$\frac{41}{45}$	Periódico mixto

2. Ejercicio 2: Operaciones con Radicales

Ejercicio

Opera y simplifica al máximo las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{300} - \sqrt{48} - 2\sqrt{27} + \sqrt{12} - 2\sqrt{3}$

b) $\sqrt{34 + \sqrt{1 + \sqrt{4 + \sqrt{25}}}}$

2.1. Ilustración: Propiedades de los Radicales

PROPIEDADES DE LOS RADICALES

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

Producto de radicales

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Cociente de radicales

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Raíz de un cuadrado

$$a\sqrt{b} \pm c\sqrt{b} = (a \pm c)\sqrt{b}$$

Suma de radicales semejantes

EJEMPLO DE SIMPLIFICACIÓN

$$\sqrt{300} = \sqrt{100 \cdot 3} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

2.2. Apartado a) Simplificación de radicales

Solución

Expresión: $\sqrt{300} - \sqrt{48} - 2\sqrt{27} + \sqrt{12} - 2\sqrt{3}$

Paso 1: Descomponer cada radicando en factores primos para simplificar

Simplificación de $\sqrt{300}$

Descomponemos 300 en factores primos:

$$300 = 4 \cdot 75 = 4 \cdot 25 \cdot 3 = 100 \cdot 3$$

$$\sqrt{300} = \sqrt{100 \cdot 3} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

Alternativamente:

$$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

$$\sqrt{300} = \sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot 5^2} = 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

Simplificación de $\sqrt{48}$

Descomponemos 48:

$$48 = 16 \cdot 3$$
$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

O bien:

$$48 = 2^4 \cdot 3 = (2^2)^2 \cdot 3$$
$$\sqrt{48} = \sqrt{2^4 \cdot 3} = 2^2 \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

Simplificación de $\sqrt{27}$

Descomponemos 27:

$$27 = 9 \cdot 3$$
$$\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

O bien:

$$27 = 3^3 = 3^2 \cdot 3$$
$$\sqrt{27} = \sqrt{3^2 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$$

Simplificación de $\sqrt{12}$

Descomponemos 12:

$$12 = 4 \cdot 3$$
$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

O bien:

$$12 = 2^2 \cdot 3$$
$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

Paso 2: Sustituir las simplificaciones en la expresión original

$$\begin{aligned} & \sqrt{300} - \sqrt{48} - 2\sqrt{27} + \sqrt{12} - 2\sqrt{3} \\ &= 10\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 2(3\sqrt{3}) + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \\ &= 10\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Paso 3: Agrupar términos semejantes (todos tienen $\sqrt{3}$)

$$\begin{aligned} &= (10 - 4 - 6 + 2 - 2)\sqrt{3} \\ &= 0 \cdot \sqrt{3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Desglose del cálculo:

$$\begin{aligned} 10 - 4 - 6 + 2 - 2 &= 10 - 4 - 6 + 2 - 2 \\ &= 6 - 6 + 2 - 2 \\ &= 0 + 2 - 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Resultado Final

$$\boxed{\sqrt{300} - \sqrt{48} - 2\sqrt{27} + \sqrt{12} - 2\sqrt{3} = 0}$$

2.3. Apartado b) Radicales anidados

Solución

Expresión: $\sqrt{34 + \sqrt{1 + \sqrt{4 + \sqrt{25}}}}$

Estrategia: Resolver desde el radical más interno hacia el externo

Paso 1: Calcular el radical más interno: $\sqrt{25}$

$$\sqrt{25} = 5$$

Paso 2: Sustituir y calcular: $\sqrt{4 + 5}$

$$\begin{aligned}\sqrt{4 + \sqrt{25}} &= \sqrt{4 + 5} \\ &= \sqrt{9} \\ &= 3\end{aligned}$$

Paso 3: Sustituir y calcular: $\sqrt{1 + 3}$

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \sqrt{4 + \sqrt{25}}} &= \sqrt{1 + 3} \\ &= \sqrt{4} \\ &= 2\end{aligned}$$

Paso 4: Calcular el radical más externo: $\sqrt{34 + 2}$

$$\begin{aligned}\sqrt{34 + \sqrt{1 + \sqrt{4 + \sqrt{25}}}} &= \sqrt{34 + 2} \\ &= \sqrt{36} \\ &= 6\end{aligned}$$

Desarrollo completo paso a paso:

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{34 + \sqrt{1 + \sqrt{4 + \sqrt{25}}}} \\
 &= \sqrt{34 + \sqrt{1 + \sqrt{4 + 5}}} \quad (\text{porque } \sqrt{25} = 5) \\
 &= \sqrt{34 + \sqrt{1 + \sqrt{9}}} \quad (\text{porque } 4 + 5 = 9) \\
 &= \sqrt{34 + \sqrt{1 + 3}} \quad (\text{porque } \sqrt{9} = 3) \\
 &= \sqrt{34 + \sqrt{4}} \quad (\text{porque } 1 + 3 = 4) \\
 &= \sqrt{34 + 2} \quad (\text{porque } \sqrt{4} = 2) \\
 &= \sqrt{36} \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

2.4. Ilustración del proceso de radicales anidados

Resolución desde el interior hacia el exterior



Resultado Final

$$\sqrt{34 + \sqrt{1 + \sqrt{4 + \sqrt{25}}}} = 6$$

3. Ejercicio 3: Operaciones con Polinomios

Ejercicio

Dados los polinomios:

$$P(x) = x^6 - x^3 - 3x - 3 \quad Q(x) = x^2 - 3 \quad R(x) = x - 2$$

Calcúlese:

- $P(x) \cdot Q(x)$
- $P(x) : Q(x)$ (Indica cuál es el Cociente y el Resto)
- El valor numérico del polinomio $P(x)$ en el punto $x = 2$
- $P(x) : R(x)$ (Indica cuál es el Cociente y el Resto)

3.1. Ilustración: Operaciones con Polinomios



3.2. Apartado a) Multiplicación de polinomios

Solución

Calcular: $P(x) \cdot Q(x)$

Donde:

$$P(x) = x^6 - x^3 - 3x - 3$$

$$Q(x) = x^2 - 3$$

Método: Multiplicar cada término de $P(x)$ por cada término de $Q(x)$

$$P(x) \cdot Q(x) = (x^6 - x^3 - 3x - 3) \cdot (x^2 - 3)$$

Desarrollo término a término:

1. Multiplicamos x^6 por $(x^2 - 3)$:

$$x^6 \cdot x^2 + x^6 \cdot (-3) = x^8 - 3x^6$$

2. Multiplicamos $-x^3$ por $(x^2 - 3)$:

$$(-x^3) \cdot x^2 + (-x^3) \cdot (-3) = -x^5 + 3x^3$$

3. Multiplicamos $-3x$ por $(x^2 - 3)$:

$$(-3x) \cdot x^2 + (-3x) \cdot (-3) = -3x^3 + 9x$$

4. Multiplicamos -3 por $(x^2 - 3)$:

$$(-3) \cdot x^2 + (-3) \cdot (-3) = -3x^2 + 9$$

Sumamos todos los términos:

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= x^8 - 3x^6 - x^5 + 3x^3 - 3x^3 + 9x - 3x^2 + 9 \\ &= x^8 - 3x^6 - x^5 + (3x^3 - 3x^3) - 3x^2 + 9x + 9 \\ &= x^8 - 3x^6 - x^5 + 0x^3 - 3x^2 + 9x + 9 \\ &= x^8 - 3x^6 - x^5 - 3x^2 + 9x + 9 \end{aligned}$$

Verificación del grado:

- $\text{grado}(P(x)) = 6$
- $\text{grado}(Q(x)) = 2$
- $\text{grado}(P(x) \cdot Q(x)) = 6 + 2 = 8 \checkmark$

Resultado Final

$$P(x) \cdot Q(x) = x^8 - 3x^6 - x^5 - 3x^2 + 9x + 9$$

Multiplicar $3x^2$ por el divisor:

$$3x^2 \cdot (x^2 - 3) = 3x^4 - 9x^2$$

Restar:

$$(3x^4 - x^3 + 0x^2 - 3x - 3) - (3x^4 - 9x^2) = -x^3 + 9x^2 - 3x - 3$$

Paso 3: Dividir el nuevo término de mayor grado

$$\frac{-x^3}{x^2} = -x$$

Multiplicar $-x$ por el divisor:

$$-x \cdot (x^2 - 3) = -x^3 + 3x$$

Restar:

$$(-x^3 + 9x^2 - 3x - 3) - (-x^3 + 3x) = 9x^2 - 6x - 3$$

Paso 4: Dividir el nuevo término de mayor grado

$$\frac{9x^2}{x^2} = 9$$

Multiplicar 9 por el divisor:

$$9 \cdot (x^2 - 3) = 9x^2 - 27$$

Restar:

$$(9x^2 - 6x - 3) - (9x^2 - 27) = -6x + 24$$

Conclusión: Como el grado de $-6x + 24$ (grado 1) es menor que el grado del divisor $x^2 - 3$ (grado 2), la división termina.

Resultado:

- **Cociente:** $C(x) = x^4 + 3x^2 - x + 9$

- **Resto:** $R(x) = -6x + 24$

Verificación: $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$

$$Q(x) \cdot C(x) + R(x) = (x^2 - 3)(x^4 + 3x^2 - x + 9) + (-6x + 24)$$

Desarrollamos $(x^2 - 3)(x^4 + 3x^2 - x + 9)$:

$$\begin{aligned} &= x^2(x^4 + 3x^2 - x + 9) - 3(x^4 + 3x^2 - x + 9) \\ &= x^6 + 3x^4 - x^3 + 9x^2 - 3x^4 - 9x^2 + 3x - 27 \\ &= x^6 - x^3 + 3x - 27 \end{aligned}$$

Sumamos el resto:

$$\begin{aligned} &= x^6 - x^3 + 3x - 27 + (-6x + 24) \\ &= x^6 - x^3 + 3x - 6x - 27 + 24 \\ &= x^6 - x^3 - 3x - 3 \quad \checkmark \end{aligned}$$

¡Coincide con $P(x)$!

Resultado Final

- **Cociente:** $C(x) = x^4 + 3x^2 - x + 9$
- **Resto:** $R(x) = -6x + 24$

3.4. Apartado c) Valor numérico de $P(x)$ en $x = 2$ **Solución****Calcular:** $P(2)$ Donde: $P(x) = x^6 - x^3 - 3x - 3$ **Método:** Sustituir $x = 2$ en el polinomio

$$P(2) = (2)^6 - (2)^3 - 3(2) - 3$$

Calculamos cada término:

1. $(2)^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$
2. $(2)^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
3. $3(2) = 6$
4. El término independiente es -3

Sustituimos:

$$\begin{aligned} P(2) &= 64 - 8 - 6 - 3 \\ &= 64 - 17 \\ &= 47 \end{aligned}$$

Paso a paso:

$$\begin{aligned} 64 - 8 &= 56 \\ 56 - 6 &= 50 \\ 50 - 3 &= 47 \end{aligned}$$

Resultado Final

$$P(2) = 47$$

3.5. Apartado d) División de polinomios $P(x) : R(x)$ **Solución****Calcular:** $P(x) : R(x)$

Donde:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^6 - x^3 - 3x - 3 && \text{(Dividendo)} \\ R(x) &= x - 2 && \text{(Divisor)} \end{aligned}$$

Método 1: Regla de Ruffini

Como el divisor es de la forma $(x - a)$ con $a = 2$, podemos usar Ruffini.

Preparación: Escribimos los coeficientes de $P(x)$ con todos los términos:

$$P(x) = x^6 + 0x^5 + 0x^4 - x^3 + 0x^2 - 3x - 3$$

Coeficientes: $[1, 0, 0, -1, 0, -3, -3]$

Aplicamos Ruffini con $a = 2$:

	1	0	0	-1	0	-3	-3
2	2	4	8	14	28	50	
	1	2	4	7	14	25	47

Procedimiento detallado:

1. Bajamos el primer coeficiente: 1
2. $1 \times 2 = 2$; sumamos: $0 + 2 = 2$
3. $2 \times 2 = 4$; sumamos: $0 + 4 = 4$
4. $4 \times 2 = 8$; sumamos: $-1 + 8 = 7$
5. $7 \times 2 = 14$; sumamos: $0 + 14 = 14$
6. $14 \times 2 = 28$; sumamos: $-3 + 28 = 25$
7. $25 \times 2 = 50$; sumamos: $-3 + 50 = 47$

Resultado:

- Los coeficientes del cociente son: $[1, 2, 4, 7, 14, 25]$
- El resto es: 47

Por tanto:

- **Cociente:** $C(x) = x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 14x + 25$
- **Resto:** $R = 47$

Teorema del Resto:

El Teorema del Resto nos dice que cuando dividimos $P(x)$ por $(x - a)$, el resto es $P(a)$.

En nuestro caso, dividimos por $(x - 2)$, entonces el resto debe ser $P(2)$.

Del apartado c) calculamos que $P(2) = 47$ ✓

¡Esto confirma nuestro resultado!

Verificación: $P(x) = R(x) \cdot C(x) + \text{Resto}$

$$P(x) = (x - 2)(x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 14x + 25) + 47$$

Desarrollamos $(x - 2)(x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 14x + 25)$:

$$\begin{aligned}
 &= x(x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 14x + 25) - 2(x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 14x + 25) \\
 &= x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 7x^3 + 14x^2 + 25x \\
 &\quad - 2x^5 - 4x^4 - 8x^3 - 14x^2 - 28x - 50 \\
 &= x^6 + (2x^5 - 2x^5) + (4x^4 - 4x^4) + (7x^3 - 8x^3) + (14x^2 - 14x^2) \\
 &\quad + (25x - 28x) - 50 \\
 &= x^6 - x^3 - 3x - 50
 \end{aligned}$$

Sumamos el resto:

$$\begin{aligned}
 &= x^6 - x^3 - 3x - 50 + 47 \\
 &= x^6 - x^3 - 3x - 3 \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

¡Coincide con $P(x)$!

Resultado Final

- **Cociente:** $C(x) = x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 14x + 25$
- **Resto:** $R = 47$

Observación: El resto coincide con $P(2) = 47$ (Teorema del Resto)

3.6. Ilustración: Regla de Ruffini

REGLA DE RUFFINI

División por $(x - 2)$

2	1	0	0	-1	0	-3	-3
	2	4	8	14	28	50	
	1	2	4	7	14	25	47

4. Ejercicio 4: Cálculo del Parámetro m

Ejercicio

Calcúlese el valor del parámetro m para que la división sea exacta:

$$(x^3 - 2mx^2 + 2x - 4) : (x - 2)$$

4.1. Ilustración: División Exacta

DIVISIÓN EXACTA DE POLINOMIOS

Una división es **exacta** cuando el **resto es cero**

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + 0$$

TEOREMA DEL RESTO

Si dividimos $P(x)$ por $(x - a)$, el resto es $P(a)$

$$\text{División exacta por } (x - a) \Leftrightarrow P(a) = 0$$

Solución

Problema: Encontrar m tal que $(x^3 - 2mx^2 + 2x - 4) : (x - 2)$ sea exacta.

Concepto clave: Una división es exacta cuando el resto es cero.

Teorema del Resto: Si dividimos un polinomio $P(x)$ por $(x - a)$, el resto es $P(a)$. Por tanto, para que la división sea exacta, debe cumplirse:

$$P(2) = 0$$

Paso 1: Definir el polinomio

Sea $P(x) = x^3 - 2mx^2 + 2x - 4$

Paso 2: Calcular $P(2)$

$$\begin{aligned} P(2) &= (2)^3 - 2m(2)^2 + 2(2) - 4 \\ &= 8 - 2m \cdot 4 + 4 - 4 \\ &= 8 - 8m + 4 - 4 \\ &= 8 - 8m \end{aligned}$$

Paso 3: Imponer la condición de división exacta

Para que la división sea exacta, el resto debe ser cero:

$$P(2) = 0$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}8 - 8m &= 0 \\-8m &= -8 \\m &= \frac{-8}{-8} \\m &= 1\end{aligned}$$

Verificación:

Sustituimos $m = 1$ en el polinomio original:

$$P(x) = x^3 - 2(1)x^2 + 2x - 4 = x^3 - 2x^2 + 2x - 4$$

Calculamos $P(2)$:

$$\begin{aligned}P(2) &= (2)^3 - 2(2)^2 + 2(2) - 4 \\&= 8 - 2 \cdot 4 + 4 - 4 \\&= 8 - 8 + 4 - 4 \\&= 0 \quad \checkmark\end{aligned}$$

Comprobación adicional con Ruffini:

Dividamos $P(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 4$ por $(x - 2)$ usando Ruffini:

	1	-2	2	-4
2		2	0	4
	1	0	2	0

Procedimiento:

1. Bajamos: 1
2. $1 \times 2 = 2$; sumamos: $-2 + 2 = 0$
3. $0 \times 2 = 0$; sumamos: $2 + 0 = 2$
4. $2 \times 2 = 4$; sumamos: $-4 + 4 = 0$

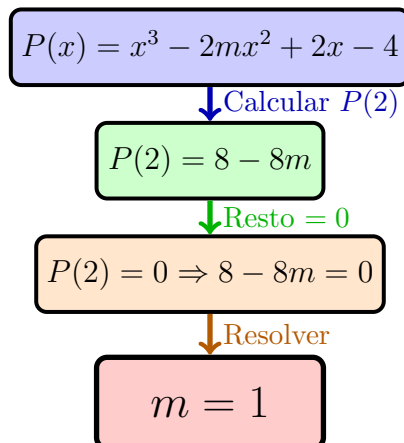
El resto es 0 $\checkmark$, lo que confirma que la división es exacta.

El cociente es: $C(x) = x^2 + 0x + 2 = x^2 + 2$

Verificación final:

$$(x - 2)(x^2 + 2) = x^3 + 2x - 2x^2 - 4 = x^3 - 2x^2 + 2x - 4 = P(x) \quad \checkmark$$

4.2. Ilustración gráfica del proceso



Resultado Final

$$m = 1$$

Explicación: Para que la división $(x^3 - 2mx^2 + 2x - 4) : (x - 2)$ sea exacta, el parámetro m debe valer 1.

Con este valor, el polinomio se factoriza como:

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 4 = (x - 2)(x^2 + 2)$$

5. Ejercicio 5: Productos Notables

Ejercicio

Desarrolla los siguientes productos notables:

a) $(3x + 4)^2$

b) $(4 - 2x^2)^2$

c) $(2x^2 + 5x) \cdot (2x^2 - 5x)$

5.1. Ilustración: Fórmulas de Productos Notables

PRODUCTOS NOTABLES

Cuadrado de una suma
 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Cuadrado de una diferencia
 $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Suma por diferencia
 $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Interpretación Geométrica:

$(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

5.2. Apartado a) $(3x + 4)^2$

Solución

Desarrollar: $(3x + 4)^2$

Fórmula aplicable: Cuadrado de una suma

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Identificación de términos:

- $a = 3x$
- $b = 4$

Aplicación de la fórmula:

$$(3x + 4)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot 4 + (4)^2$$

Cálculo de cada término:

1. $(3x)^2 = 3^2 \cdot x^2 = 9x^2$
2. $2 \cdot (3x) \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot x = 24x$
3. $(4)^2 = 16$

Resultado:

$$(3x + 4)^2 = 9x^2 + 24x + 16$$

Verificación (desarrollo directo):

$$\begin{aligned}(3x + 4)^2 &= (3x + 4)(3x + 4) \\ &= 3x \cdot 3x + 3x \cdot 4 + 4 \cdot 3x + 4 \cdot 4 \\ &= 9x^2 + 12x + 12x + 16 \\ &= 9x^2 + 24x + 16 \quad \checkmark\end{aligned}$$

Resultado Final

$$(3x + 4)^2 = 9x^2 + 24x + 16$$

5.3. Apartado b) $(4 - 2x^2)^2$

Solución

Desarrollar: $(4 - 2x^2)^2$

Fórmula aplicable: Cuadrado de una diferencia

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Identificación de términos:

- $a = 4$
- $b = 2x^2$

Aplicación de la fórmula:

$$(4 - 2x^2)^2 = (4)^2 - 2 \cdot 4 \cdot (2x^2) + (2x^2)^2$$

Cálculo de cada término:

1. $(4)^2 = 16$

$$2. \ 2 \cdot 4 \cdot (2x^2) = 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot x^2 = 16x^2$$

$$3. \ (2x^2)^2 = 2^2 \cdot (x^2)^2 = 4 \cdot x^4 = 4x^4$$

Nota: $(x^2)^2 = x^{2 \cdot 2} = x^4$

Resultado:

$$(4 - 2x^2)^2 = 16 - 16x^2 + 4x^4$$

Ordenado por potencias decrecientes:

$$(4 - 2x^2)^2 = 4x^4 - 16x^2 + 16$$

Verificación (desarrollo directo):

$$\begin{aligned} (4 - 2x^2)^2 &= (4 - 2x^2)(4 - 2x^2) \\ &= 4 \cdot 4 + 4 \cdot (-2x^2) + (-2x^2) \cdot 4 + (-2x^2) \cdot (-2x^2) \\ &= 16 - 8x^2 - 8x^2 + 4x^4 \\ &= 4x^4 - 16x^2 + 16 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Resultado Final

$$(4 - 2x^2)^2 = 4x^4 - 16x^2 + 16$$

5.4. Apartado c) $(2x^2 + 5x) \cdot (2x^2 - 5x)$

Solución

Desarrollar: $(2x^2 + 5x) \cdot (2x^2 - 5x)$

Fórmula aplicable: Suma por diferencia (diferencia de cuadrados)

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Identificación de términos:

- $a = 2x^2$
- $b = 5x$

Aplicación de la fórmula:

$$(2x^2 + 5x)(2x^2 - 5x) = (2x^2)^2 - (5x)^2$$

Cálculo de cada término:

$$1. (2x^2)^2 = 2^2 \cdot (x^2)^2 = 4 \cdot x^4 = 4x^4$$

Nota: $(x^2)^2 = x^{2 \cdot 2} = x^4$

$$2. (5x)^2 = 5^2 \cdot x^2 = 25x^2$$

Resultado:

$$(2x^2 + 5x)(2x^2 - 5x) = 4x^4 - 25x^2$$

Verificación (desarrollo directo):

$$\begin{aligned} & (2x^2 + 5x)(2x^2 - 5x) \\ &= 2x^2 \cdot 2x^2 + 2x^2 \cdot (-5x) + 5x \cdot 2x^2 + 5x \cdot (-5x) \\ &= 4x^4 - 10x^3 + 10x^3 - 25x^2 \\ &= 4x^4 + (-10x^3 + 10x^3) - 25x^2 \\ &= 4x^4 + 0x^3 - 25x^2 \\ &= 4x^4 - 25x^2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Observación importante:

Los términos cruzados $(-10x^3$ y $+10x^3)$ se cancelan, que es precisamente la característica de la suma por diferencia. Por eso la fórmula es tan útil.

Resultado Final

$$(2x^2 + 5x)(2x^2 - 5x) = 4x^4 - 25x^2$$

5.5. Resumen visual de los tres productos notables

a) Cuadrado de suma

$$\begin{aligned} & (3x + 4)^2 \\ &= 9x^2 + 24x + 16 \end{aligned}$$

b) Cuadrado de diferencia

$$\begin{aligned} & (4 - 2x)^2 \\ &= 4x^4 - 16x^2 + 16 \end{aligned}$$

c) Suma por diferencia

$$\begin{aligned} & (2x^2 + 5x)(2x^2 - 5x) \\ &= 4x^4 - 25x^2 \end{aligned}$$

6. Ejercicio 6: Operaciones con Fracciones Algebraicas

Ejercicio

Opera y simplifica:

$$\frac{2}{(x-3)} + \frac{3}{(x+2)} - \frac{(4x-7)}{(x^2-x-6)}$$

6.1. Ilustración: Suma de Fracciones Algebraicas

SUMA DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

Paso 1: Factorizar los denominadores

Paso 2: Encontrar el m.c.m. de los denominadores

Paso 3: Amplificar cada fracción al m.c.m.

Paso 4: Sumar/restar los numeradores

Paso 5: Simplificar si es posible

EJEMPLO

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b}{ab} + \frac{a}{ab} = \frac{a+b}{ab}$$

Solución

Expresión: $\frac{2}{(x-3)} + \frac{3}{(x+2)} - \frac{(4x-7)}{(x^2-x-6)}$

Paso 1: Factorizar los denominadores

Los denominadores son:

- $(x-3) \rightarrow$ ya está factorizado
- $(x+2) \rightarrow$ ya está factorizado
- $(x^2-x-6) \rightarrow$ necesita factorización

Factorización de x^2-x-6 :

Buscamos dos números que multiplicados den -6 y sumados den -1 :

- Factores de -6 : $(1, -6), (-1, 6), (2, -3), (-2, 3)$
- $2 + (-3) = -1 \checkmark$
- $2 \times (-3) = -6 \checkmark$

Por tanto:

$$x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$$

Verificación:

$$\begin{aligned}
 (x+2)(x-3) &= x \cdot x + x \cdot (-3) + 2 \cdot x + 2 \cdot (-3) \\
 &= x^2 - 3x + 2x - 6 \\
 &= x^2 - x - 6 \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Paso 2: Reescribir la expresión con denominadores factorizados

$$\frac{2}{(x-3)} + \frac{3}{(x+2)} - \frac{(4x-7)}{(x+2)(x-3)}$$

Paso 3: Identificar el mínimo común múltiplo (m.c.m.)

Los denominadores son:

- $(x-3)$
- $(x+2)$
- $(x+2)(x-3)$

El m.c.m. es: $(x+2)(x-3) = x^2 - x - 6$

Paso 4: Amplificar cada fracción al m.c.m.

Primera fracción: $\frac{2}{(x-3)}$

Para llegar al m.c.m., debemos multiplicar numerador y denominador por $(x+2)$:

$$\frac{2}{(x-3)} = \frac{2 \cdot (x+2)}{(x-3)(x+2)} = \frac{2(x+2)}{(x^2 - x - 6)}$$

Desarrollamos el numerador:

$$2(x+2) = 2x + 4$$

Segunda fracción: $\frac{3}{(x+2)}$

Para llegar al m.c.m., debemos multiplicar por $(x-3)$:

$$\frac{3}{(x+2)} = \frac{3 \cdot (x-3)}{(x+2)(x-3)} = \frac{3(x-3)}{(x^2 - x - 6)}$$

Desarrollamos el numerador:

$$3(x-3) = 3x - 9$$

Tercera fracción: $\frac{(4x-7)}{(x^2 - x - 6)}$

Ya tiene el m.c.m. como denominador, no necesita amplificación.

Paso 5: Realizar la suma/resta de fracciones

$$\begin{aligned}
& \frac{2(x+2)}{(x^2-x-6)} + \frac{3(x-3)}{(x^2-x-6)} - \frac{(4x-7)}{(x^2-x-6)} \\
&= \frac{2(x+2) + 3(x-3) - (4x-7)}{(x^2-x-6)} \\
&= \frac{2x+4+3x-9-4x+7}{(x^2-x-6)}
\end{aligned}$$

Paso 6: Simplificar el numerador

Agrupamos términos semejantes:

$$\begin{aligned}
& 2x + 4 + 3x - 9 - 4x + 7 \\
&= (2x + 3x - 4x) + (4 - 9 + 7) \\
&= x + 2
\end{aligned}$$

Desglose detallado:

- Términos en x : $2x + 3x - 4x = 5x - 4x = x$
- Términos constantes: $4 - 9 + 7 = 4 + 7 - 9 = 11 - 9 = 2$

Paso 7: Expresión resultante

$$\frac{x+2}{x^2-x-6}$$

Paso 8: Factorizar y simplificar

Recordemos que $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$

Por tanto:

$$\frac{x+2}{x^2-x-6} = \frac{x+2}{(x+2)(x-3)}$$

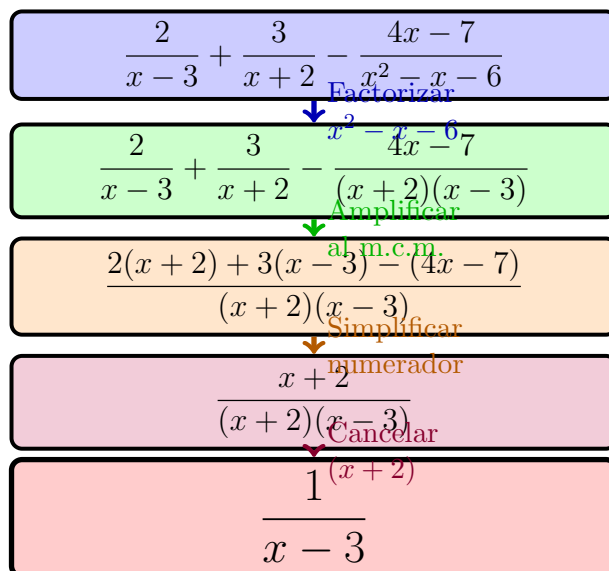
Simplificamos el factor común $(x+2)$:

$$\frac{x+2}{(x+2)(x-3)} = \frac{1}{(x-3)}$$

Restricciones:

- $x \neq 3$ (hace cero el denominador original $(x-3)$)
- $x \neq -2$ (hace cero el denominador original $(x+2)$)

6.2. Diagrama del proceso de simplificación



Resultado Final

$$\frac{2}{(x-3)} + \frac{3}{(x+2)} - \frac{(4x-7)}{(x^2-x-6)} = \frac{1}{x-3}$$

Condiciones: $x \neq 3$ y $x \neq -2$

6.3. Verificación numérica

Para verificar, podemos sustituir un valor (por ejemplo $x = 0$, que cumple las condiciones):

Expresión original:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{(0-3)} + \frac{3}{(0+2)} - \frac{(4 \cdot 0 - 7)}{(0^2 - 0 - 6)} \\ &= \frac{2}{-3} + \frac{3}{2} - \frac{-7}{-6} \\ &= -\frac{2}{3} + \frac{3}{2} - \frac{7}{6} \\ &= \frac{-4 + 9 - 7}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Expresión simplificada:

$$\frac{1}{0-3} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3} \quad \checkmark$$

¡Coinciden! La simplificación es correcta.

Resumen de Resultados

EXAMEN DE MATEMÁTICAS - SOLUCIONES COMPLETAS

Ejercicio 1 - Clasificación de Números

- $-8 \in \mathbb{Z} \rightarrow$ Fracción: $\frac{-8}{1}$ (Entero)
- $2,2 \in \mathbb{Q} \rightarrow$ Fracción: $\frac{11}{5}$ (Decimal exacto)
- $\frac{3}{5} \in \mathbb{Q} \rightarrow$ Fracción: $\frac{3}{5}$ (Fracción)
- $\sqrt{9} = 3 \in \mathbb{N} \rightarrow$ Fracción: $\frac{3}{1}$ (Natural)
- $\sqrt{17} \in \mathbb{I} \rightarrow$ No tiene fracción (Irracional)
- $1, \bar{8} \in \mathbb{Q} \rightarrow$ Fracción: $\frac{17}{9}$ (Periódico puro)
- $1,3133... \in \mathbb{I} \rightarrow$ No tiene fracción (Irracional)
- $0,9\bar{1} \in \mathbb{Q} \rightarrow$ Fracción: $\frac{41}{45}$ (Periódico mixto)

Ejercicio 2 - Operaciones con Radicales

- a) $\sqrt{300} - \sqrt{48} - 2\sqrt{27} + \sqrt{12} - 2\sqrt{3} = \boxed{0}$
- b) $\sqrt{34 + \sqrt{1 + \sqrt{4 + \sqrt{25}}}} = \boxed{6}$

Ejercicio 3 - Operaciones con Polinomios

- a) $P(x) \cdot Q(x) = \boxed{x^8 - 3x^6 - x^5 - 3x^2 + 9x + 9}$
- b) $P(x) : Q(x) \rightarrow$ Cociente: $x^4 + 3x^2 - x + 9$; Resto: $-6x + 24$
- c) $P(2) = \boxed{47}$
- d) $P(x) : R(x) \rightarrow$ Cociente: $x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 14x + 25$; Resto: 47

Ejercicio 4 - Parámetro m

Para que $(x^3 - 2mx^2 + 2x - 4) : (x - 2)$ sea exacta: $\boxed{m = 1}$

Ejercicio 5 - Productos Notables

- a) $(3x + 4)^2 = \boxed{9x^2 + 24x + 16}$
- b) $(4 - 2x^2)^2 = \boxed{4x^4 - 16x^2 + 16}$
- c) $(2x^2 + 5x)(2x^2 - 5x) = \boxed{4x^4 - 25x^2}$

Ejercicio 6 - Fracciones Algebraicas

$$\frac{2}{(x-3)} + \frac{3}{(x+2)} - \frac{(4x-7)}{(x^2-x-6)} = \boxed{\frac{1}{x-3}}$$

Condiciones: $x \neq 3$ y $x \neq -2$

- Siempre verifica tus resultados sustituyendo valores

CONSEJOS FINALES

- En radicales, simplifica cada término antes de operar
- En polinomios, revisa los grados de los resultados
- En fracciones algebraicas, factoriza antes de operar
- No olvides las condiciones de existencia (m/valores que anulan denominadores)

Mucha suerte en el examen!

Nº1.- a) Calcúlese el valor de a para que al dividir el polinomio

$$P(x) = x^2 + ax - 3 \text{ entre } x + 2 \text{ nos dé de resto } -5$$

b) Hállese el valor numérico del polinomio anterior en $x = -2$

Nº2.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a) \quad x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0 \quad b) \quad \sqrt{5x + 6} - 3 = 2x$$

Nº3.- Simplifica la siguiente fracción algebraica:

$$\frac{(x^4 - 1) \cdot (x - 5)}{x^3 - 5x^2 - x + 5}$$

Nº4.- Calcula simplificando el resultado al máximo:

$$a) \quad \frac{(\sqrt{27} + \sqrt{75})}{4\sqrt{12}} \quad b) \quad (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 - \sqrt{96}$$

Nº5.- He comprado 5 kg de almendras, 3 kg de avellanas y 2 kg de cacahuetes, y he pagado por todo ello 98 euros. La diferencia entre el precio por kg de las avellanas y de los cacahuetes, es igual al precio por kg de las almendras. Si hubiera comprado 1 kg de cada fruto seco, hubieras pagado 32 euros.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el precio por kg de cada fruto seco.

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior.

Nº6.- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss:

$$\begin{cases} 6x + 2y + 3z = 11 \\ 5x + 4y - 2z = 7 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

EXAMEN RESUELTO

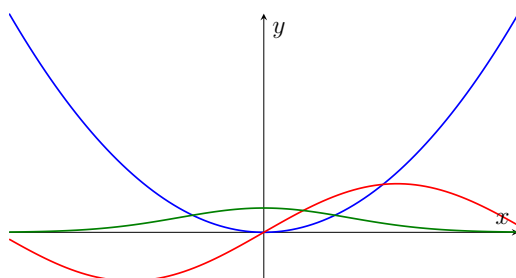
1º BACHILLERATO

Matemáticas de las Ciencias Sociales

Fecha: 16 de Noviembre de 2022

*“La geometría es el arte de razonar bien
sobre figuras mal hechas.”*

— Jakob Bernoulli —



Índice

1	Ejercicio 1: Polinomios y Teorema del Resto	2
2	Ejercicio 2: Resolución de Ecuaciones	4
3	Ejercicio 3: Simplificación de Fracciones Algebraicas	8
4	Ejercicio 4: Operaciones con Radicales	10
5	Ejercicio 5: Sistema de Ecuaciones - Problema de Frutos Secos	13
6	Ejercicio 6: Sistema de Ecuaciones por el Método de Gauss	17

1 Ejercicio 1: Polinomios y Teorema del Resto

Ejercicio 1

a) Calcúlese el valor de a para que al dividir el polinomio $P(x) = x^2 + ax - 3$ entre $x + 2$ nos dé de resto -5 .

b) Hállese el valor numérico del polinomio anterior en $x = -2$.

Solución

Apartado a)

Para resolver este problema, utilizaremos el **Teorema del Resto**, que establece:

Teorema del Resto

Si dividimos un polinomio $P(x)$ entre $(x - a)$, el resto de la división es igual a $P(a)$.

En nuestro caso, dividimos $P(x) = x^2 + ax - 3$ entre $x + 2 = x - (-2)$.

Por el teorema del resto, el resto de esta división es $P(-2)$.

Según el enunciado, este resto debe ser igual a -5 .

Por lo tanto:

$$P(-2) = -5$$

Calculemos $P(-2)$:

$$\begin{aligned} P(-2) &= (-2)^2 + a(-2) - 3 \\ &= 4 - 2a - 3 \\ &= 1 - 2a \end{aligned}$$

Como $P(-2) = -5$, tenemos:

$$1 - 2a = -5$$

Resolvemos esta ecuación:

$$\begin{aligned} 1 - 2a &= -5 \\ -2a &= -5 - 1 \\ -2a &= -6 \\ a &= \frac{-6}{-2} \\ a &= 3 \end{aligned}$$

Respuesta apartado a): $a = 3$

Apartado b)

Ahora debemos hallar el valor numérico del polinomio $P(x) = x^2 + ax - 3$ en $x = -2$.

Con el valor de $a = 3$ que hemos encontrado en el apartado anterior, el polinomio es:

$$P(x) = x^2 + 3x - 3$$

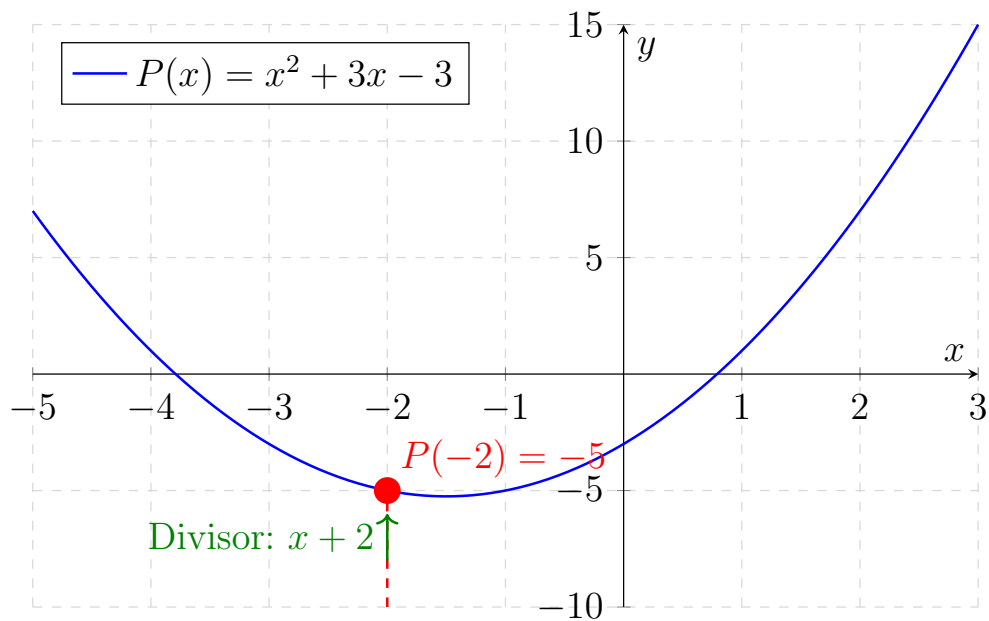
Calculamos $P(-2)$:

$$\begin{aligned} P(-2) &= (-2)^2 + 3(-2) - 3 \\ &= 4 - 6 - 3 \\ &= -5 \end{aligned}$$

Respuesta apartado b): $P(-2) = -5$

Observación: Este resultado coincide con el resto que nos daban en el apartado a), lo cual confirma la coherencia de nuestra solución.

Ilustración: División de Polinomios



2 Ejercicio 2: Resolución de Ecuaciones

Ejercicio 2

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$

b) $\sqrt{5x+6} - 3 = 2x$

Solución

Apartado a): Ecuación cúbica

Debemos resolver: $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$

Observamos que podemos factorizar esta ecuación por **agrupación de términos**:

$$\begin{aligned}x^3 + 2x^2 - 4x - 8 &= 0 \\(x^3 + 2x^2) + (-4x - 8) &= 0 \\x^2(x + 2) - 4(x + 2) &= 0 \\(x + 2)(x^2 - 4) &= 0\end{aligned}$$

Ahora factorizamos $x^2 - 4$ como una diferencia de cuadrados:

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}(x + 2)(x - 2)(x + 2) &= 0 \\(x + 2)^2(x - 2) &= 0\end{aligned}$$

Aplicando la **ley del producto cero**, obtenemos:

1. $(x + 2)^2 = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ (solución doble)

2. $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

Verificación:

Para $x = -2$:

$$(-2)^3 + 2(-2)^2 - 4(-2) - 8 = -8 + 8 + 8 - 8 = 0 \checkmark$$

Para $x = 2$:

$$(2)^3 + 2(2)^2 - 4(2) - 8 = 8 + 8 - 8 - 8 = 0 \checkmark$$

Respuesta apartado a): $x = -2$ (doble), $x = 2$

Apartado b): Ecuación irracional

Debemos resolver: $\sqrt{5x+6} - 3 = 2x$

Paso 1: Aislamos la raíz cuadrada:

$$\sqrt{5x+6} = 2x + 3$$

Paso 2: Para que la raíz cuadrada esté definida y la igualdad tenga sentido, necesitamos:

- $5x + 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{6}{5}$
- $2x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{3}{2}$

Por tanto, $x \geq -\frac{6}{5}$ (condición más restrictiva).

Paso 3: Elevamos al cuadrado ambos lados:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{5x+6}\right)^2 &= (2x+3)^2 \\ 5x+6 &= 4x^2 + 12x + 9 \\ 0 &= 4x^2 + 12x + 9 - 5x - 6 \\ 0 &= 4x^2 + 7x + 3 \end{aligned}$$

Paso 4: Resolvemos la ecuación de segundo grado $4x^2 + 7x + 3 = 0$ usando la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde $a = 4$, $b = 7$, $c = 3$.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{8} \\ &= \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{8} \\ &= \frac{-7 \pm 1}{8} \end{aligned}$$

Obtenemos dos posibles soluciones:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-7+1}{8} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4} \\ x_2 &= \frac{-7-1}{8} = \frac{-8}{8} = -1 \end{aligned}$$

Paso 5: Verificamos cuáles son soluciones válidas:

Para $x = -\frac{3}{4}$:

- Lado izquierdo: $\sqrt{5(-\frac{3}{4})+6} - 3 = \sqrt{-\frac{15}{4}+6} - 3 = \sqrt{\frac{9}{4}} - 3 = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2}$
- Lado derecho: $2(-\frac{3}{4}) = -\frac{3}{2}$

- $-\frac{3}{2} = -\frac{3}{2} \checkmark$

Para $x = -1$:

- Lado izquierdo: $\sqrt{5(-1) + 6} - 3 = \sqrt{1} - 3 = 1 - 3 = -2$

- Lado derecho: $2(-1) = -2$

- $-2 = -2 \checkmark$

Además, ambas soluciones cumplen $x \geq -\frac{6}{5}$:

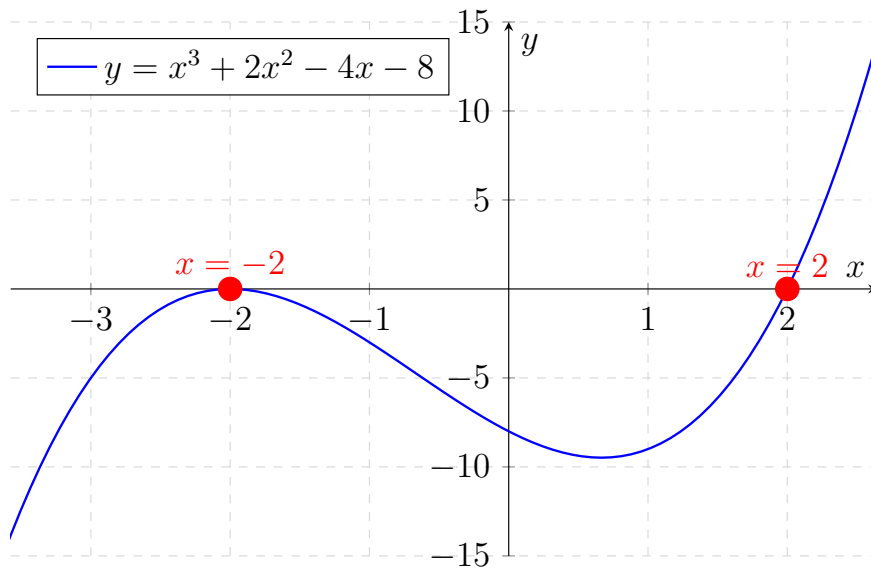
- $-\frac{3}{4} = -0,75 > -\frac{6}{5} = -1,2 \checkmark$

- $-1 > -1,2 \checkmark$

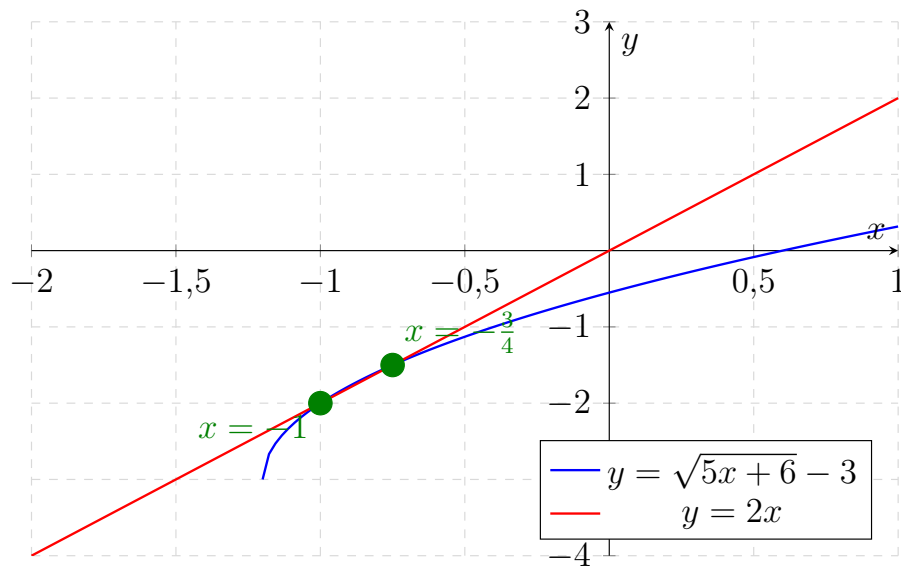
Respuesta apartado b): $x = -\frac{3}{4}, \quad x = -1$

Ilustración: Gráficas de las Ecuaciones

Apartado a): Ecuación cúbica



Apartado b): Ecuación irracional



3 Ejercicio 3: Simplificación de Fracciones Algebraicas

Ejercicio 3

Simplifica la siguiente fracción algebraica:

$$\frac{(x^4 - 1) \cdot (x - 5)}{x^3 - 5x^2 - x + 5}$$

Solución

Para simplificar esta fracción algebraica, debemos factorizar tanto el numerador como el denominador.

Factorización del numerador

El numerador es: $(x^4 - 1) \cdot (x - 5)$

Factorizamos $x^4 - 1$ como diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned}x^4 - 1 &= (x^2)^2 - 1^2 \\&= (x^2 - 1)(x^2 + 1)\end{aligned}$$

Factorizamos $x^2 - 1$ nuevamente como diferencia de cuadrados:

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

Por lo tanto:

$$x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

El numerador completo es:

$$\text{Numerador} = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x - 5)$$

Factorización del denominador

El denominador es: $x^3 - 5x^2 - x + 5$

Factorizamos por agrupación:

$$\begin{aligned}x^3 - 5x^2 - x + 5 &= (x^3 - 5x^2) + (-x + 5) \\&= x^2(x - 5) - 1(x - 5) \\&= (x - 5)(x^2 - 1)\end{aligned}$$

Factorizamos $x^2 - 1$:

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

Por lo tanto:

$$\text{Denominador} = (x - 5)(x - 1)(x + 1)$$

Simplificación

Ahora sustituimos las factorizaciones en la fracción:

$$\frac{(x^4 - 1) \cdot (x - 5)}{x^3 - 5x^2 - x + 5} = \frac{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x - 5)}{(x - 5)(x - 1)(x + 1)}$$

Cancelamos los factores comunes: $(x - 5)$, $(x - 1)$ y $(x + 1)$:

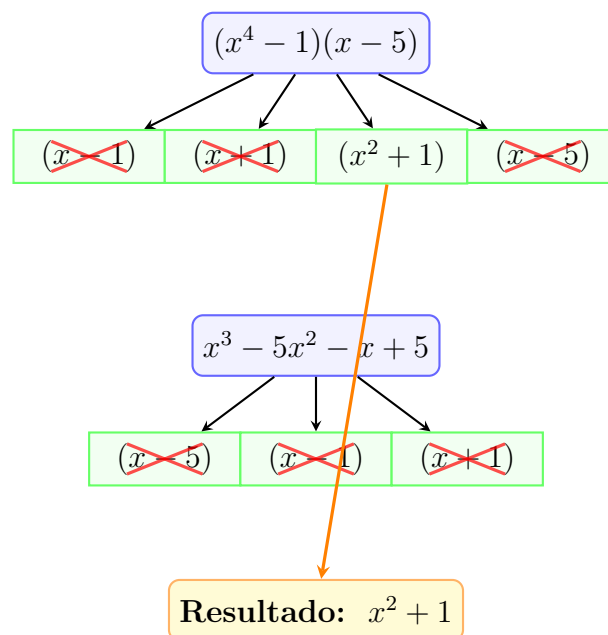
$$\begin{aligned} &= \frac{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x - 5)}{(x - 5)(x - 1)(x + 1)} \\ &= x^2 + 1 \end{aligned}$$

Restricciones: Debemos indicar que esta simplificación es válida siempre que:

- $x \neq 5$ (anula el denominador original)
- $x \neq 1$ (anula el denominador original)
- $x \neq -1$ (anula el denominador original)

Respuesta: $\frac{(x^4 - 1) \cdot (x - 5)}{x^3 - 5x^2 - x + 5} = x^2 + 1$, con $x \neq 5, x \neq 1, x \neq -1$

Ilustración: Factorización Algebraica



4 Ejercicio 4: Operaciones con Radicales

Ejercicio 4

Calcula simplificando el resultado al máximo:

a) $\frac{\sqrt{27} + \sqrt{75}}{4\sqrt{12}}$

b) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 - \sqrt{96}$

Solución

Apartado a)

Debemos calcular: $\frac{\sqrt{27} + \sqrt{75}}{4\sqrt{12}}$

Paso 1: Simplificamos cada radical factorizando el radicando:

Para $\sqrt{27}$:

$$27 = 9 \cdot 3 = 3^2 \cdot 3 \Rightarrow \sqrt{27} = \sqrt{3^2 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$$

Para $\sqrt{75}$:

$$75 = 25 \cdot 3 = 5^2 \cdot 3 \Rightarrow \sqrt{75} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$$

Para $\sqrt{12}$:

$$12 = 4 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 \Rightarrow \sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

Paso 2: Sustituimos en la expresión original:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{27} + \sqrt{75}}{4\sqrt{12}} &= \frac{3\sqrt{3} + 5\sqrt{3}}{4 \cdot 2\sqrt{3}} \\ &= \frac{8\sqrt{3}}{8\sqrt{3}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Respuesta apartado a): $\boxed{1}$

Apartado b)

Debemos calcular: $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 - \sqrt{96}$

Paso 1: Desarrollamos el primer binomio al cuadrado usando $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 &= (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 \\ &= 3 + 2\sqrt{6} + 2 \\ &= 5 + 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

Paso 2: Desarrollamos el segundo binomio al cuadrado usando $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 &= (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 \\
 &= 2 - 2\sqrt{6} + 3 \\
 &= 5 - 2\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

Paso 3: Simplificamos $\sqrt{96}$:

$$96 = 16 \cdot 6 = 4^2 \cdot 6 \Rightarrow \sqrt{96} = \sqrt{4^2 \cdot 6} = 4\sqrt{6}$$

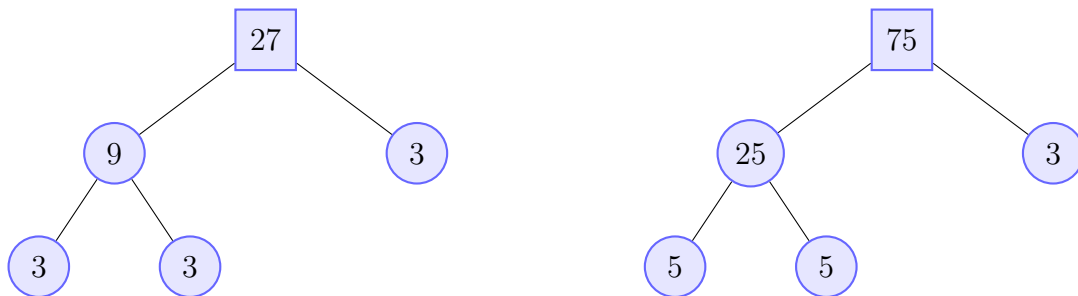
Paso 4: Sustituimos todo en la expresión original:

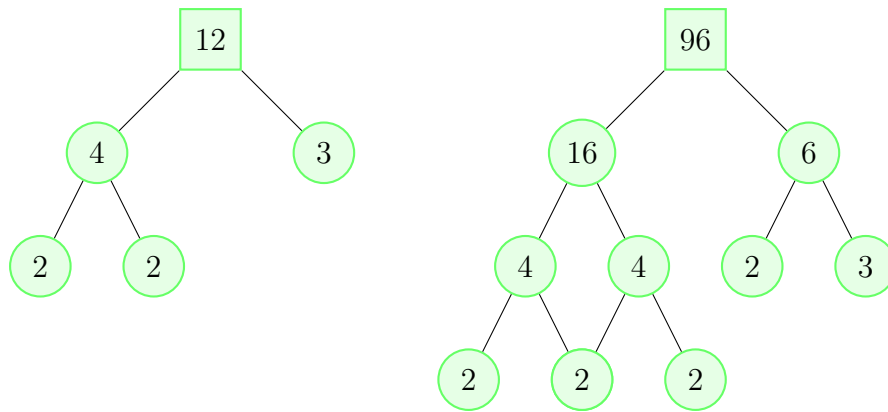
$$\begin{aligned}
 &(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 - \sqrt{96} \\
 &= (5 + 2\sqrt{6}) - (5 - 2\sqrt{6}) - 4\sqrt{6} \\
 &= 5 + 2\sqrt{6} - 5 + 2\sqrt{6} - 4\sqrt{6} \\
 &= (5 - 5) + (2\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 4\sqrt{6}) \\
 &= 0 + 0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Respuesta apartado b):

Ilustración: Simplificación de Radicales

Descomposición en factores primos





Identidades algebraicas

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\(a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\(a + b)^2 - (a - b)^2 &= 4ab\end{aligned}$$

5 Ejercicio 5: Sistema de Ecuaciones - Problema de Frutos Secos

Ejercicio 5

He comprado 5 kg de almendras, 3 kg de avellanas y 2 kg de cacahuetes, y he pagado por todo ello 98 euros. La diferencia entre el precio por kg de las avellanas y de los cacahuetes, es igual al precio por kg de las almendras. Si hubiera comprado 1 kg de cada fruto seco, hubiera pagado 32 euros.

- a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el precio por kg de cada fruto seco.
b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución

Apartado a): Planteamiento del sistema

Definimos las variables:

- x = precio por kg de almendras (en euros)
- y = precio por kg de avellanas (en euros)
- z = precio por kg de cacahuetes (en euros)

Traducimos cada condición del problema a una ecuación:

Condición 1: “5 kg de almendras, 3 kg de avellanas y 2 kg de cacahuetes cuestan 98 euros”

$$5x + 3y + 2z = 98$$

Condición 2: “La diferencia entre el precio de las avellanas y los cacahuetes es igual al precio de las almendras”

$$y - z = x \quad \Rightarrow \quad -x + y - z = 0$$

Condición 3: “1 kg de cada fruto seco cuesta 32 euros”

$$x + y + z = 32$$

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 5x + 3y + 2z = 98 \\ -x + y - z = 0 \\ x + y + z = 32 \end{cases}$$

Apartado b): Resolución del sistema

Resolveremos este sistema por el **método de sustitución y reducción**.

Paso 1: De la segunda ecuación, despejamos y :

$$-x + y - z = 0 \Rightarrow y = x + z \quad (\text{ecuación } *)$$

Paso 2: Sustituimos $y = x + z$ en la tercera ecuación:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 32 \\x + (x + z) + z &= 32 \\2x + 2z &= 32 \\x + z &= 16 \quad (\text{ecuación } **)\end{aligned}$$

Paso 3: De la ecuación $(**)$ despejamos z :

$$z = 16 - x \quad (\text{ecuación } ***)$$

Paso 4: Sustituimos $z = 16 - x$ en la ecuación $(*)$:

$$\begin{aligned}y &= x + z \\y &= x + (16 - x) \\y &= 16 \quad (\text{ecuación } ****)\end{aligned}$$

Paso 5: Sustituimos $y = 16$ y $z = 16 - x$ en la primera ecuación:

$$\begin{aligned}5x + 3y + 2z &= 98 \\5x + 3(16) + 2(16 - x) &= 98 \\5x + 48 + 32 - 2x &= 98 \\3x + 80 &= 98 \\3x &= 18 \\x &= 6\end{aligned}$$

Paso 6: Calculamos z usando la ecuación $(***)$:

$$z = 16 - x = 16 - 6 = 10$$

Paso 7: Ya teníamos $y = 16$ de la ecuación $(****)$.

Verificación de la solución

Comprobamos que $(x, y, z) = (6, 16, 10)$ satisface todas las ecuaciones:

- Primera ecuación: $5(6) + 3(16) + 2(10) = 30 + 48 + 20 = 98 \checkmark$
- Segunda ecuación: $-6 + 16 - 10 = 0 \checkmark$
- Tercera ecuación: $6 + 16 + 10 = 32 \checkmark$

Interpretación de los resultados

Solución:

- Precio de las almendras: $x = 6$ euros/kg
- Precio de las avellanas: $y = 16$ euros/kg
- Precio de los cacahuetes: $z = 10$ euros/kg

Comprobación de la coherencia del problema:

- La diferencia entre avellanas y cacahuetes: $16 - 10 = 6$ euros/kg, que coincide con el precio de las almendras ✓
- Total pagado: $5(6) + 3(16) + 2(10) = 98$ euros ✓
- Si compramos 1 kg de cada uno: $6 + 16 + 10 = 32$ euros ✓

Ilustración: Problema de Frutos Secos

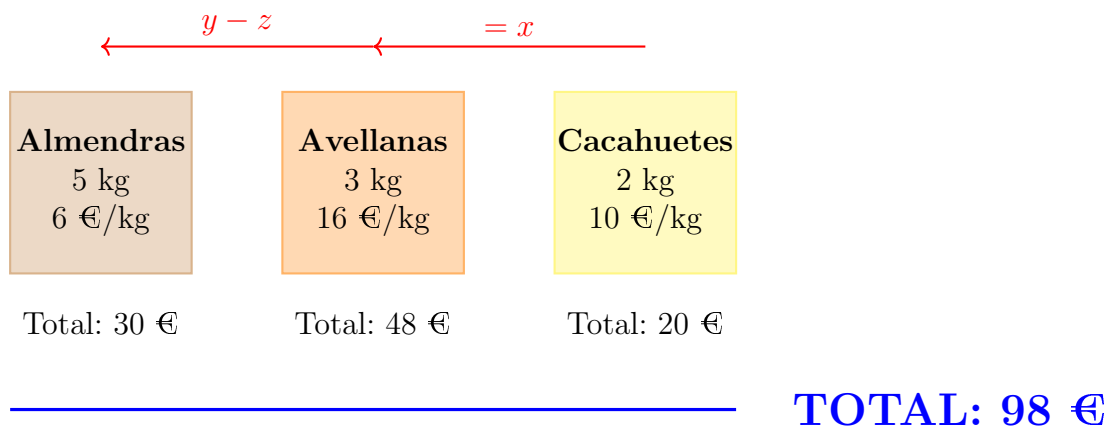
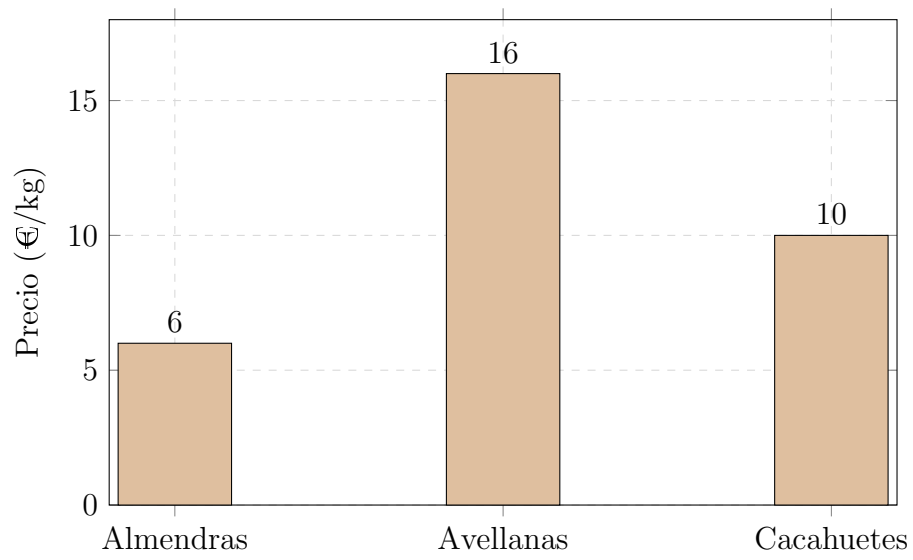


Diagrama de barras comparativo de precios



6 Ejercicio 6: Sistema de Ecuaciones por el Método de Gauss

Ejercicio 6

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss:

$$\begin{cases} 6x + 2y + 3z = 11 \\ 5x + 4y - 2z = 7 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Solución

El **método de eliminación de Gauss** consiste en transformar el sistema en uno escalonado mediante operaciones elementales sobre las filas de la matriz ampliada.

Matriz ampliada del sistema

Escribimos el sistema en forma de matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 3 & 11 \\ 5 & 4 & -2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Paso 1: Intercambiar filas para simplificar

Conviene tener un 1 en la primera posición. Intercambiamos $F_1 \leftrightarrow F_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & -2 & 7 \\ 6 & 2 & 3 & 11 \end{array} \right)$$

Paso 2: Eliminar la primera columna debajo del pivote

Operaciones:

- $F'_2 = F_2 - 5F_1$
- $F'_3 = F_3 - 6F_1$

Cálculos detallados:

Para F'_2 :

$$\begin{aligned} F_2 - 5F_1 &= (5, 4, -2 \mid 7) - 5(1, 1, 1 \mid 3) \\ &= (5, 4, -2 \mid 7) - (5, 5, 5 \mid 15) \\ &= (0, -1, -7 \mid -8) \end{aligned}$$

Para F'_3 :

$$\begin{aligned} F_3 - 6F_1 &= (6, 2, 3 \mid 11) - 6(1, 1, 1 \mid 3) \\ &= (6, 2, 3 \mid 11) - (6, 6, 6 \mid 18) \\ &= (0, -4, -3 \mid -7) \end{aligned}$$

Matriz resultante:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -7 & -8 \\ 0 & -4 & -3 & -7 \end{array} \right)$$

Paso 3: Simplificar la segunda fila

Multiplicamos F_2 por -1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & -4 & -3 & -7 \end{array} \right)$$

Paso 4: Eliminar la segunda columna debajo del segundo pivote

Operación: $F'_3 = F_3 + 4F_2$

Cálculo:

$$\begin{aligned} F_3 + 4F_2 &= (0, -4, -3 \mid -7) + 4(0, 1, 7 \mid 8) \\ &= (0, -4, -3 \mid -7) + (0, 4, 28 \mid 32) \\ &= (0, 0, 25 \mid 25) \end{aligned}$$

Matriz resultante:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 25 & 25 \end{array} \right)$$

Paso 5: Simplificar la tercera fila

Dividimos F_3 entre 25:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Paso 6: Sustitución regresiva

Ahora resolvemos el sistema escalonado:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + 7z = 8 \\ z = 1 \end{cases}$$

De la tercera ecuación:

$$\boxed{z = 1}$$

Sustituimos $z = 1$ en la segunda ecuación:

$$y + 7(1) = 8$$

$$y + 7 = 8$$

$$y = 1$$

$$\boxed{y = 1}$$

Sustituimos $y = 1$ y $z = 1$ en la primera ecuación:

$$x + 1 + 1 = 3$$

$$x + 2 = 3$$

$$x = 1$$

$$\boxed{x = 1}$$

Verificación de la solución

Comprobamos que $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ satisface el sistema original:

- Primera ecuación: $6(1) + 2(1) + 3(1) = 6 + 2 + 3 = 11 \checkmark$
- Segunda ecuación: $5(1) + 4(1) - 2(1) = 5 + 4 - 2 = 7 \checkmark$
- Tercera ecuación: $1 + 1 + 1 = 3 \checkmark$

Solución del sistema: $\boxed{x = 1, \quad y = 1, \quad z = 1}$

Ilustración: Método de Gauss - Transformaciones de Matrices

Proceso de eliminación gaussiana

$$\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & -2 & 7 \\ 6 & 2 & 3 & 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & -2 & 7 \\ 6 & 2 & 3 & 11 \end{array}$$

; [above] at (M0.north) Matriz inicial;

$$\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & -2 & 7 \\ 6 & 2 & 3 & 11 \end{array} \xrightarrow{\text{(op1)}} \begin{array}{ccc|c} F_2 - 5F_1 & & & \\ F_3 - 6F_1 & & & \end{array};$$

$$\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & -7 & -8 \\ 0 & -4 & -3 & -7 \end{array} \quad \text{(M1) at (6,0)}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & -7 & -8 \\ 0 & -4 & -3 & -7 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & -7 & -8 \\ 0 & -4 & -3 & -7 \end{array}$$

; [above] at (M1.north) Paso 1;

[flecha] (M0.east) - (op1.west); [flecha] (op1.east) - (M1.west);

$$\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \end{array} \quad \text{(M2) at (0,-3)}$$

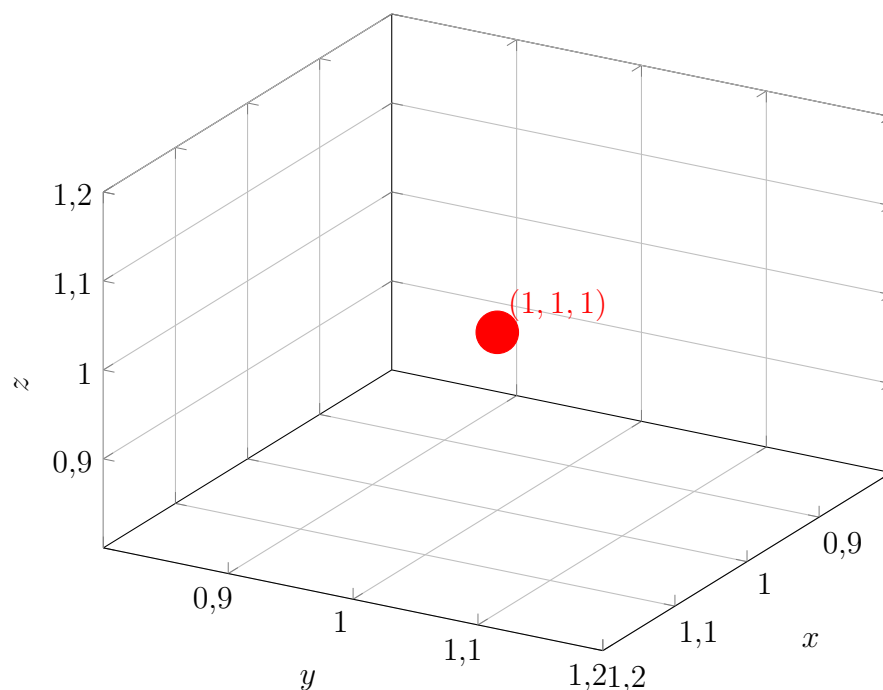
$$\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \end{array}$$


```

0 -4 -3 | -7
; [left] at (M2.west) Paso 2;
[right=0.5cm of M2] (op2)  $F_3 + 4F_2$ ;
[matriz, right=3.5cm of M2] (M3) at (6,-3) 1 1 1 |3
0 1 7 |8
0 0 25 |25
; [right] at (M3.east) Paso 3;
[flecha] (M1.south) - (M2.north); [flecha] (M2.east) - (op2.west); [flecha] (op2.east) -
(M3.west);
[matriz, below=2cm of M2, fill=green!10] (M4) at (3,-6) 1 1 1 |3
0 1 7 |8
0 0 1 |1
; [below, color=green!50!black, font=] at (M4.south) Matriz escalonada;
[flecha, green!50!black, very thick] (M3.south) - (M4.north);

```

Interpretación geométrica: Intersección de tres planos



Los tres planos del sistema se intersectan en el punto único (1, 1, 1).

¡EXAMEN COMPLETADO CON ÉXITO!

Todas las soluciones han sido verificadas y son correctas.

Nº1.- Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\frac{6x}{5} - \frac{1}{3} \leq \frac{2}{3} - 1$ b) $x(x + 3) - 2x > 4 + 4x$ c) $-x^2 + 4x - 7 < 0$

d) $4x^2 - 16x \leq 0$ e) $\frac{x+3}{x-2} \leq 0$

(2,5 PUNTOS)

Nº2.- Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 4x - 3 < 1 \\ x + 6 > 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ 3x - y \leq 4 \end{cases}$

(2 PUNTOS)

Nº3.- Sabiendo que el $\log 2 = 0,3010$ y *que* $\log 3 = 0,4771$, averigua el valor de los siguientes logaritmos:

a) $\log 12$ b) $\log 3600$ c) $\log 0,048$ d) $\log \sqrt{576}$

(1 PUNTO)

Nº4.- Hállese el valor de x:

a) $3 = \log_3(x)$ b) $2 = \log_x (0,01)$ c) $\ln e^x = 3$

(1,5 PUNTOS)

Nº5.- Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $2^{1-x^2} = \frac{1}{8}$ b) $2 - 3^{-x} + 3^{x+1} = 0$

(1 PUNTO)

Nº6.- Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas

a) $\log(x) + \log(x + 9) = 1$ b) $\log_2(x + 1) + \log_2(x - 1) = \log_2 8$

(1 PUNTO)

Nº7.- Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ \log_3 x - \log_3 y = 1 \end{cases}$$

(1 PUNTO)

SUERTE JÓVENES

Índice

1. Inecuaciones	2
1.1. Apartado a) $\frac{6x}{5} - \frac{1}{3} \leq \frac{2}{3} - 1$	2
1.2. Apartado b) $x(x+3) - 2x > 4 + 4x$	2
1.3. Apartado c) $-x^2 + 4x - 7 < 0$	4
1.4. Apartado d) $4x^2 - 16x \leq 0$	5
1.5. Apartado e) $\frac{x+3}{x-2} \leq 0$	6
2. Sistemas de inecuaciones	8
2.1. Apartado a) $\begin{cases} 4x - 3 < 1 \\ x + 6 > 2 \end{cases}$	8
2.2. Apartado b) $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ 3x - y \leq 4 \end{cases}$	9
3. Logaritmos	12
3.1. Apartado a) $\log 12$	12
3.2. Apartado b) $\log 3600$	13
3.3. Apartado c) $\log 0,048$	14
3.4. Apartado d) $\log \sqrt{576}$	16
4. Ecuaciones con logaritmos	19
4.1. Apartado a) $3 = \log_3(x)$	19
4.2. Apartado b) $2 = \log_x(0,01)$	19
4.3. Apartado c) $\ln e^x = 3$	21
5. Ecuaciones exponenciales	23
5.1. Apartado a) $2^{1-x^2} = \frac{1}{8}$	23
5.2. Apartado b) $2 - 3^{-x} + 3^{x+1} = 0$	24
6. Ecuaciones logarítmicas	27
6.1. Apartado a) $\log(x) + \log(x+9) = 1$	27
6.2. Apartado b) $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = \log_2 8$	29
7. Sistema de ecuaciones mixto	32

1. Inecuaciones

Resuelve las siguientes inecuaciones:

1.1. Apartado a) $\frac{6x}{5} - \frac{1}{3} \leq \frac{2}{3} - 1$

Enunciado: $\frac{6x}{5} - \frac{1}{3} \leq \frac{2}{3} - 1$

Solución

Paso 1: Simplificar el lado derecho de la inecuación.

$$\frac{2}{3} - 1 = \frac{2}{3} - \frac{3}{3} = \frac{2-3}{3} = -\frac{1}{3}$$

La inecuación queda:

$$\frac{6x}{5} - \frac{1}{3} \leq -\frac{1}{3}$$

Paso 2: Sumar $\frac{1}{3}$ a ambos lados.

$$\frac{6x}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \leq -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{6x}{5} \leq 0$$

Paso 3: Multiplicar ambos lados por $\frac{5}{6}$ (número positivo, no cambia el sentido de la desigualdad).

$$\frac{6x}{5} \cdot \frac{5}{6} \leq 0 \cdot \frac{5}{6}$$

$$x \leq 0$$

Solución: $x \in (-\infty, 0]$ o en notación de intervalo: $x \in (-\infty, 0]$

Solución: $x \leq 0$



1.2. Apartado b) $x(x+3) - 2x > 4 + 4x$

Enunciado: $x(x+3) - 2x > 4 + 4x$

Solución**Paso 1:** Expandir el lado izquierdo.

$$x \cdot x + x \cdot 3 - 2x > 4 + 4x$$

$$x^2 + 3x - 2x > 4 + 4x$$

$$x^2 + x > 4 + 4x$$

Paso 2: Llevar todos los términos al lado izquierdo.

$$x^2 + x - 4 - 4x > 0$$

$$x^2 - 3x - 4 > 0$$

Paso 3: Factorizar la expresión cuadrática $x^2 - 3x - 4$.Buscamos dos números que multiplicados den -4 y sumados den -3 :

$$-4 \text{ y } 1 \quad \text{porque} \quad (-4) \times 1 = -4 \quad \text{y} \quad (-4) + 1 = -3$$

$$x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1)$$

La inecuación queda:

$$(x - 4)(x + 1) > 0$$

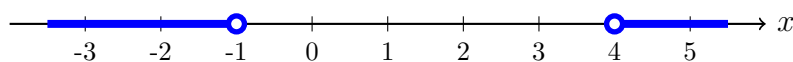
Paso 4: Encontrar las raíces (puntos donde la expresión es cero).

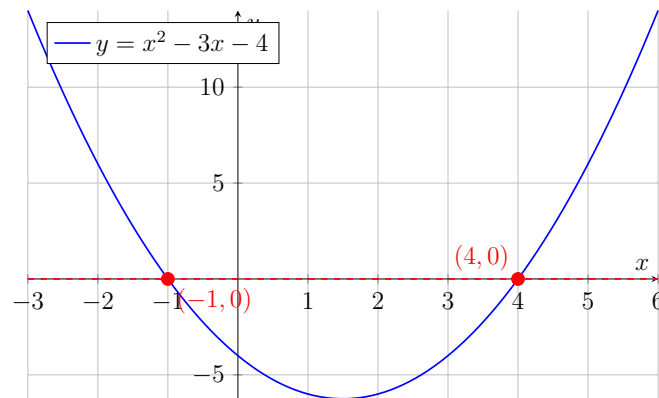
$$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

Paso 5: Análisis de signos en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 4)$, $(4, +\infty)$.

Intervalo	$x + 1$	$x - 4$	$(x + 1)(x - 4)$	Signo
$x < -1$	-	-	+	Positivo
$-1 < x < 4$	+	-	-	Negativo
$x > 4$	+	+	+	Positivo

Como buscamos $(x - 4)(x + 1) > 0$ (estrictamente positivo), la solución es:**Solución:** $x \in (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$ **Solución:** $x \in (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$ 



Gráfica de $y = x^2 - 3x - 4$. La solución son los intervalos donde $y > 0$.

1.3. Apartado c) $-x^2 + 4x - 7 < 0$

Enunciado: $-x^2 + 4x - 7 < 0$

Solución

Paso 1: Multiplicar toda la inecuación por -1 (invierte el sentido de la desigualdad).

$$\begin{aligned} -1 \cdot (-x^2 + 4x - 7) &> -1 \cdot 0 \\ x^2 - 4x + 7 &> 0 \end{aligned}$$

Paso 2: Analizar el discriminante de la ecuación cuadrática $x^2 - 4x + 7 = 0$. Para una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, el discriminante es:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

En nuestro caso: $a = 1$, $b = -4$, $c = 7$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(7) = 16 - 28 = -12$$

Paso 3: Interpretación del discriminante.

Como $\Delta = -12 < 0$, la ecuación $x^2 - 4x + 7 = 0$ no tiene raíces reales. Esto significa que la parábola $y = x^2 - 4x + 7$ no corta al eje x .

Paso 4: Determinar el signo de la parábola.

Como $a = 1 > 0$, la parábola abre hacia arriba. Si no corta el eje x y abre hacia arriba, entonces está completamente por encima del eje x .

Por tanto: $x^2 - 4x + 7 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

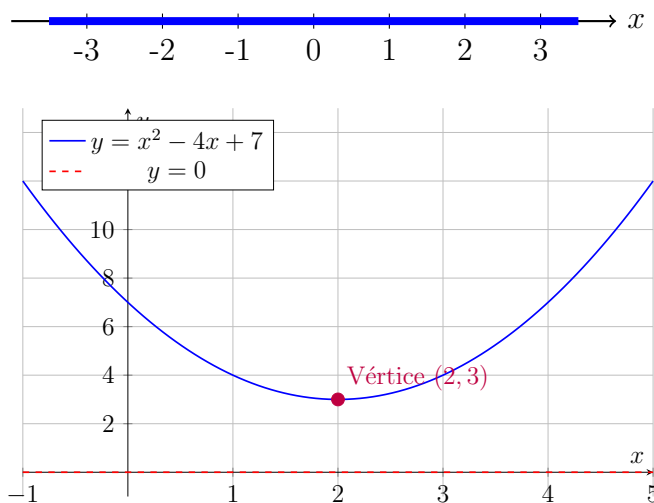
Podemos verificar con un valor, por ejemplo $x = 0$:

$$0^2 - 4(0) + 7 = 7 > 0 \quad \checkmark$$

Solución: $x \in \mathbb{R}$ o $x \in (-\infty, +\infty)$

Todos los números reales son solución de la inecuación.

Solución: $x \in \mathbb{R}$ (todos los reales)



La parábola está completamente por encima del eje x ($y > 0$ para todo x).

1.4. Apartado d) $4x^2 - 16x \leq 0$

Enunciado: $4x^2 - 16x \leq 0$

Solución

Paso 1: Factorizar la expresión extrayendo factor común.

$$4x^2 - 16x = 4x(x - 4)$$

La inecuación queda:

$$4x(x - 4) \leq 0$$

Paso 2: Encontrar las raíces.

$$4x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

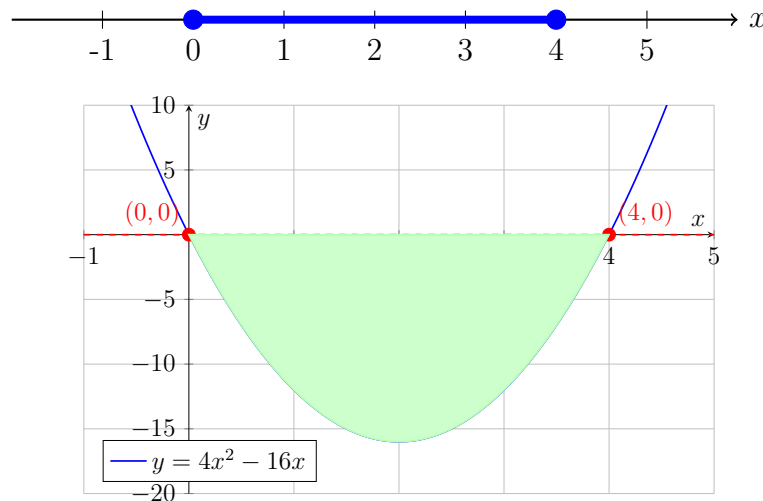
Paso 3: Análisis de signos en los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 4)$, $(4, +\infty)$.

Intervalo	$4x$	$x - 4$	$4x(x - 4)$	Signo
$x < 0$	-	-	+	Positivo
$0 < x < 4$	+	-	-	Negativo
$x > 4$	+	+	+	Positivo

Como buscamos $4x(x - 4) \leq 0$ (negativo o cero), incluimos:

- El intervalo donde es negativo: $(0, 4)$
- Los puntos donde es cero: $x = 0$ y $x = 4$

Solución: $x \in [0, 4]$

Solución: $x \in [0, 4]$ 

La solución son los valores de x donde la parábola está en o por debajo del eje x .

1.5. Apartado e) $\frac{x+3}{x-2} \leq 0$

Enunciado: $\frac{x+3}{x-2} \leq 0$

Solución

Paso 1: Identificar los puntos críticos.

Numerador se anula: $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

Denominador se anula: $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ (punto de discontinuidad, NO puede ser solución)

Paso 2: Análisis de signos en los intervalos $(-\infty, -3)$, $(-3, 2)$, $(2, +\infty)$.

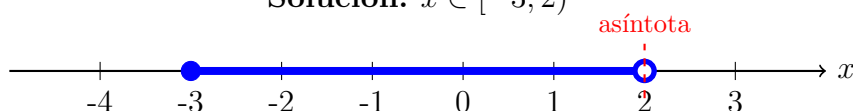
Intervalo	$x + 3$	$x - 2$	$\frac{x+3}{x-2}$	Signo
$x < -3$	-	-	+	Positivo
$-3 < x < 2$	+	-	-	Negativo
$x > 2$	+	+	+	Positivo

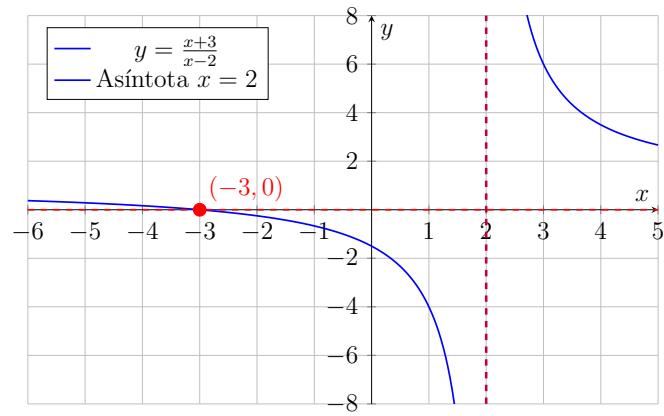
Paso 3: Seleccionar la solución.

Buscamos $\frac{x+3}{x-2} \leq 0$ (negativo o cero):

- Intervalo donde es negativo: $(-3, 2)$
- Punto donde es cero: $x = -3$ (SÍ se incluye porque el numerador se anula)
- Punto $x = 2$: NO se incluye porque el denominador se anula (indefinido)

Solución: $x \in [-3, 2)$

Solución: $x \in [-3, 2)$ 



La función es negativa o cero en el intervalo $[-3, 2)$.

2. Sistemas de inecuaciones

Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

2.1. Apartado a)
$$\begin{cases} 4x - 3 < 1 \\ x + 6 > 2 \end{cases}$$

Enunciado:

$$\begin{cases} 4x - 3 < 1 \\ x + 6 > 2 \end{cases}$$

Solución

Paso 1: Resolver la primera inecuación: $4x - 3 < 1$

$$4x - 3 < 1$$

$$4x < 1 + 3$$

$$4x < 4$$

$$x < \frac{4}{4}$$

$$x < 1$$

Solución de la primera inecuación: $x \in (-\infty, 1)$

Paso 2: Resolver la segunda inecuación: $x + 6 > 2$

$$x + 6 > 2$$

$$x > 2 - 6$$

$$x > -4$$

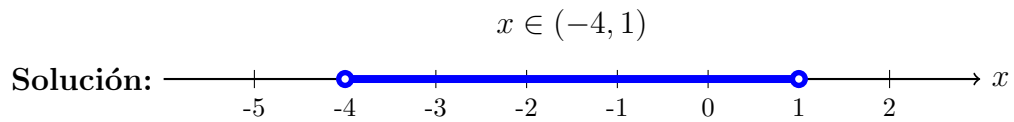
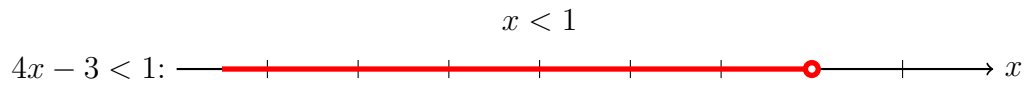
Solución de la segunda inecuación: $x \in (-4, +\infty)$

Paso 3: Encontrar la intersección de ambas soluciones.

La solución del sistema es la intersección:

$$(-\infty, 1) \cap (-4, +\infty) = (-4, 1)$$

Solución del sistema: $x \in (-4, 1)$



2.2. Apartado b) $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ 3x - y \leq 4 \end{cases}$

Enunciado:

$$\begin{cases} x - y \geq 0 \\ 3x - y \leq 4 \end{cases}$$

Solución

Este es un sistema de inecuaciones con dos variables. La solución es una región del plano.

Paso 1: Reescribir las inecuaciones en forma explícita.

Primera inecuación: $x - y \geq 0$

$$x - y \geq 0$$

$$-y \geq -x$$

$$y \leq x$$

Segunda inecuación: $3x - y \leq 4$

$$3x - y \leq 4$$

$$-y \leq 4 - 3x$$

$$y \geq 3x - 4$$

Paso 2: El sistema se reescribe como:

$$\begin{cases} y \leq x \\ y \geq 3x - 4 \end{cases}$$

Paso 3: Encontrar las rectas frontera y sus puntos de intersección.

Recta 1: $y = x$ (pasa por el origen con pendiente 1)

Recta 2: $y = 3x - 4$ (pendiente 3, ordenada en el origen -4)

Punto de intersección:

$$x = 3x - 4$$

$$-2x = -4$$

$$x = 2$$

$$y = 2$$

Punto de intersección: $(2, 2)$

Paso 4: Determinar la región solución.

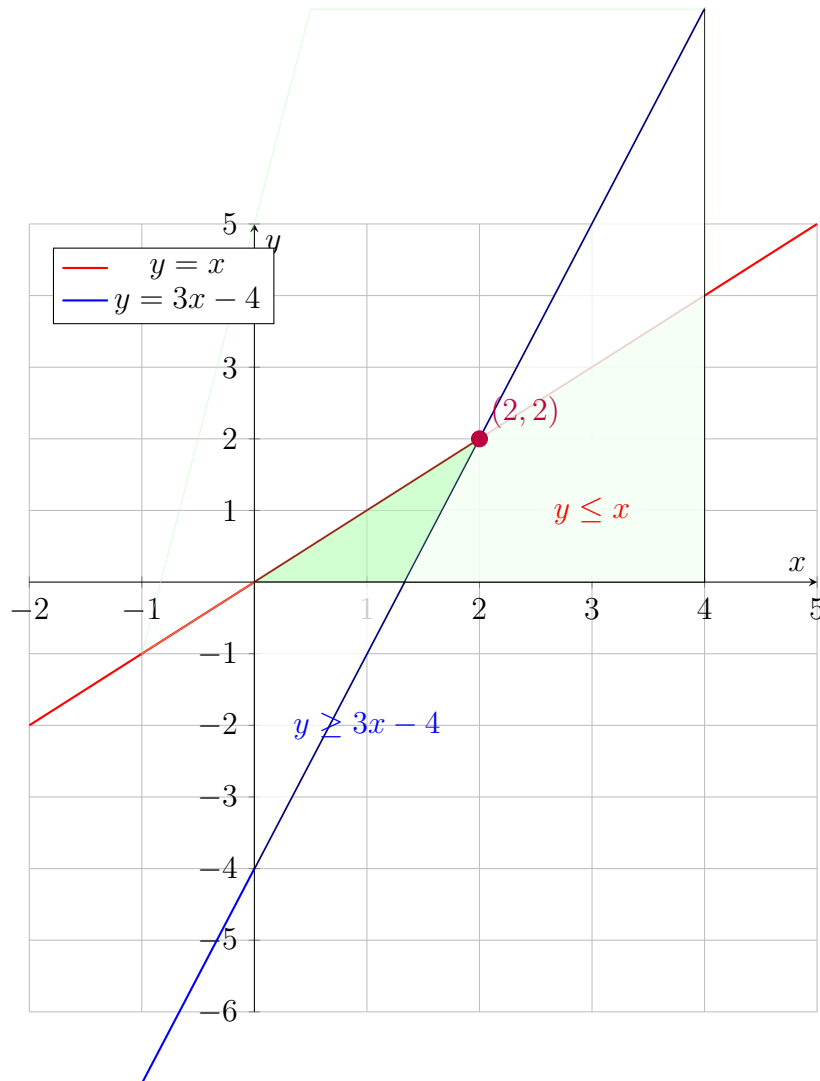
- $y \leq x$: región por debajo o sobre la recta $y = x$
- $y \geq 3x - 4$: región por encima o sobre la recta $y = 3x - 4$

La solución es la región entre ambas rectas, incluyendo las fronteras.

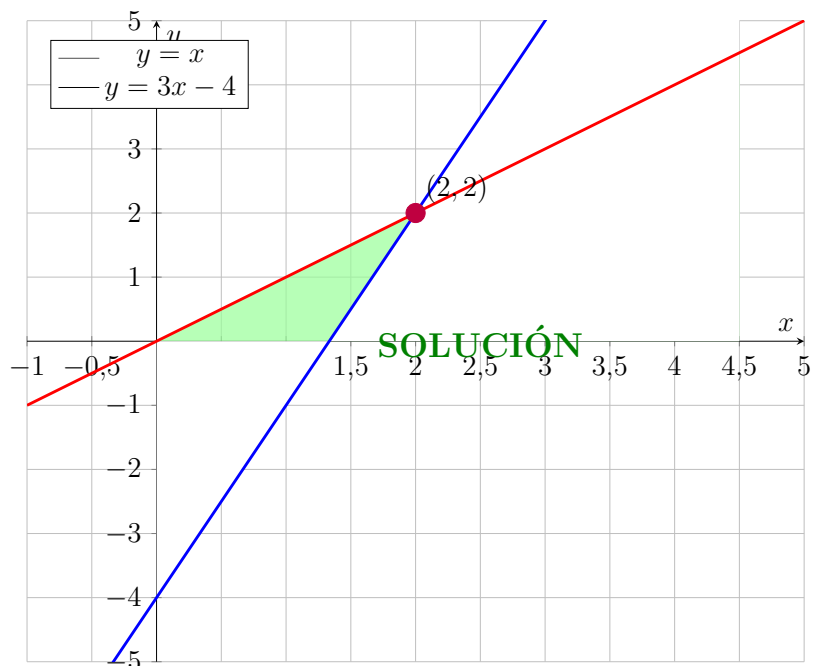
Solución: Región del plano definida por:

$$\boxed{\begin{cases} y \leq x \\ y \geq 3x - 4 \end{cases}}$$

Es una región acotada lateralmente (en forma de cuña) que se extiende indefinidamente.



Región solución (en verde claro): zona entre las dos rectas.



3. Logaritmos

Sabiendo que $\log 2 = 0,3010$ y que $\log 3 = 0,4771$, averigua el valor de los siguientes logaritmos:

3.1. Apartado a) $\log 12$

Enunciado: Calcular $\log 12$

Solución

Paso 1: Descomponer 12 en factores primos.

$$12 = 4 \times 3 = 2^2 \times 3$$

Paso 2: Aplicar propiedades de logaritmos.

$$\log 12 = \log(2^2 \times 3)$$

Propiedad del logaritmo de un producto: $\log(a \times b) = \log a + \log b$

$$\log 12 = \log(2^2) + \log 3$$

Propiedad del logaritmo de una potencia: $\log(a^n) = n \log a$

$$\log 12 = 2 \log 2 + \log 3$$

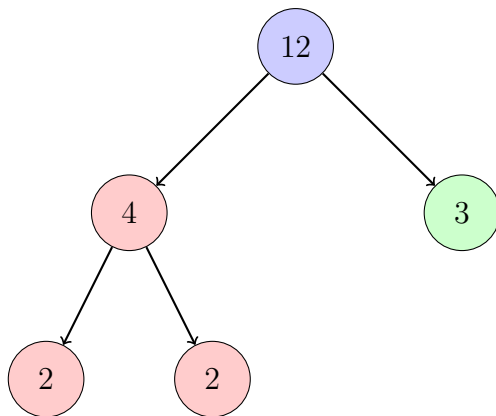
Paso 3: Sustituir los valores dados.

$$\log 12 = 2(0,3010) + 0,4771$$

$$\log 12 = 0,6020 + 0,4771$$

$$\log 12 = 1,0791$$

Solución: $\log 12 = 1,0791$



$$12 = 2^2 \times 3$$

$$\begin{aligned}\log 12 &= \log(2^2 \times 3) = 2 \log 2 + \log 3 \\ &= 2(0,3010) + 0,4771 = 1,0791\end{aligned}$$

3.2. Apartado b) $\log 3600$

Enunciado: Calcular $\log 3600$

Solución**Paso 1:** Descomponer 3600 en factores primos.

$$3600 = 36 \times 100 = 6^2 \times 10^2 = (2 \times 3)^2 \times 10^2 = 2^2 \times 3^2 \times 10^2$$

También podemos expresarlo como:

$$3600 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$$

Pero es más conveniente usar:

$$3600 = 36 \times 100 = 2^2 \times 3^2 \times 100$$

Como $\log 10 = 1$:

$$3600 = 2^2 \times 3^2 \times 10^2$$

Paso 2: Aplicar propiedades de logaritmos.

$$\log 3600 = \log(2^2 \times 3^2 \times 10^2)$$

$$\log 3600 = \log(2^2) + \log(3^2) + \log(10^2)$$

$$\log 3600 = 2 \log 2 + 2 \log 3 + 2 \log 10$$

Paso 3: Sustituir los valores dados (sabiendo que $\log 10 = 1$).

$$\log 3600 = 2(0,3010) + 2(0,4771) + 2(1)$$

$$\log 3600 = 0,6020 + 0,9542 + 2$$

$$\log 3600 = 3,5562$$

Solución: $\log 3600 = 3,5562$ **Descomposición de 3600**

$$3600 = 36 \times 100$$

$$36 = 4 \times 9 = 2^2 \times 3^2$$

$$100 = 10^2$$

$$3600 = 2^2 \times 3^2 \times 10^2$$

$$\log 3600 = 2 \log 2 + 2 \log 3 + 2 \log 10$$

$$= 2(0,3010) + 2(0,4771) + 2(1)$$

$$= 0,6020 + 0,9542 + 2 = \mathbf{3,5562}$$

3.3. Apartado c) $\log 0,048$ **Enunciado:** Calcular $\log 0,048$

Solución

Paso 1: Expresar 0,048 como fracción.

$$0,048 = \frac{48}{1000}$$

Paso 2: Simplificar la fracción y descomponer.

$$\frac{48}{1000} = \frac{48}{1000}$$

Descomponemos numerador y denominador:

$$48 = 16 \times 3 = 2^4 \times 3$$

$$1000 = 10^3$$

Por tanto:

$$0,048 = \frac{2^4 \times 3}{10^3}$$

Paso 3: Aplicar propiedades de logaritmos.

$$\log 0,048 = \log \left(\frac{2^4 \times 3}{10^3} \right)$$

Propiedad del logaritmo de un cociente: $\log \left(\frac{a}{b} \right) = \log a - \log b$

$$\log 0,048 = \log(2^4 \times 3) - \log(10^3)$$

$$\log 0,048 = \log(2^4) + \log 3 - \log(10^3)$$

$$\log 0,048 = 4 \log 2 + \log 3 - 3 \log 10$$

Paso 4: Sustituir los valores dados.

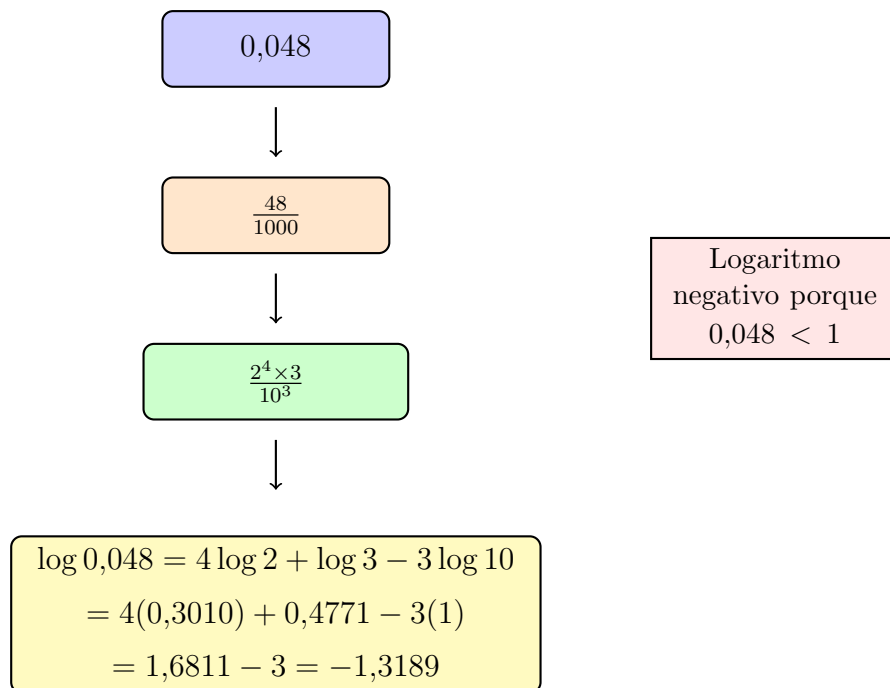
$$\log 0,048 = 4(0,3010) + 0,4771 - 3(1)$$

$$\log 0,048 = 1,2040 + 0,4771 - 3$$

$$\log 0,048 = 1,6811 - 3$$

$$\log 0,048 = -1,3189$$

Solución: $\log 0,048 = -1,3189$



3.4. Apartado d) $\log \sqrt{576}$

Enunciado: Calcular $\log \sqrt{576}$

Solución

Paso 1: Expresar la raíz cuadrada como potencia.

$$\log \sqrt{576} = \log(576^{1/2}) = \frac{1}{2} \log 576$$

Paso 2: Descomponer 576 en factores primos.

$$576 = 64 \times 9 = 2^6 \times 3^2$$

Podemos verificar: $2^6 = 64$, $3^2 = 9$, y $64 \times 9 = 576$

Paso 3: Aplicar propiedades de logaritmos.

$$\begin{aligned} \log 576 &= \log(2^6 \times 3^2) \\ \log 576 &= \log(2^6) + \log(3^2) \\ \log 576 &= 6 \log 2 + 2 \log 3 \end{aligned}$$

Paso 4: Sustituir en la expresión original.

$$\begin{aligned} \log \sqrt{576} &= \frac{1}{2} \log 576 = \frac{1}{2} (6 \log 2 + 2 \log 3) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 6 \log 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \log 3 \\ &= 3 \log 2 + \log 3 \end{aligned}$$

Paso 5: Sustituir los valores dados.

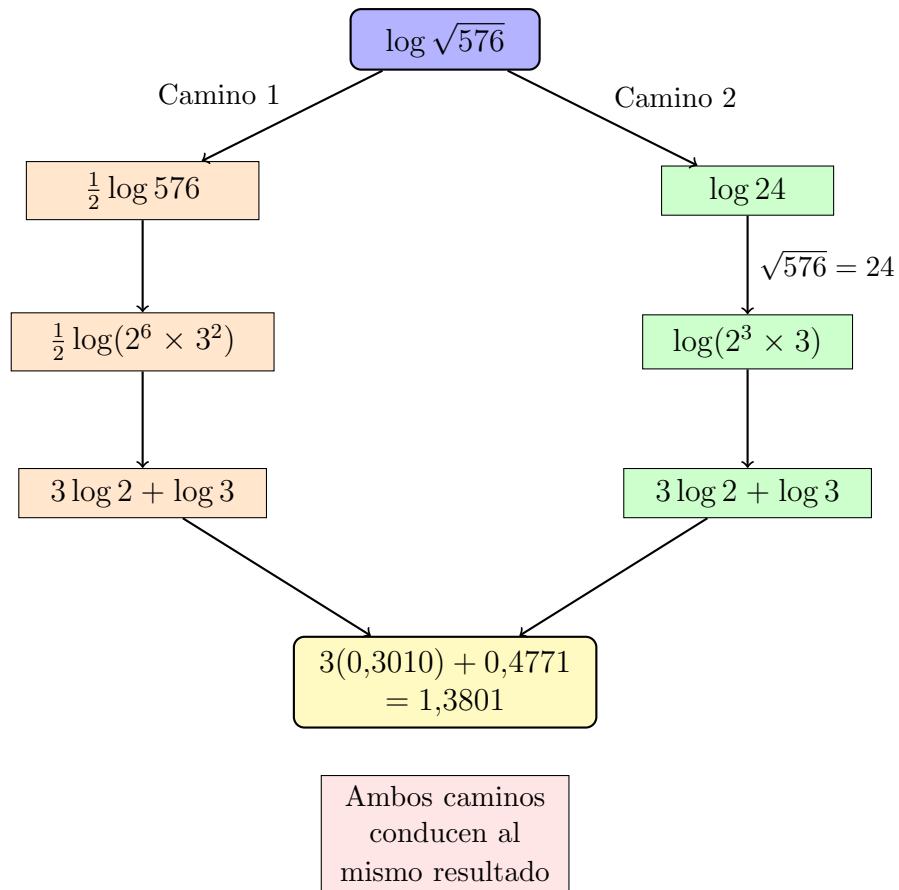
$$\begin{aligned} \log \sqrt{576} &= 3(0,3010) + 0,4771 \\ &= 0,9030 + 0,4771 \\ &= 1,3801 \end{aligned}$$

Nota: También podríamos haber calculado $\sqrt{576} = 24$ directamente:

$$\log \sqrt{576} = \log 24 = \log(8 \times 3) = \log(2^3 \times 3) = 3 \log 2 + \log 3$$

Mismo resultado.

Solución: $\log \sqrt{576} = 1,3801$



4. Ecuaciones con logaritmos

Hállese el valor de x :

4.1. Apartado a) $3 = \log_3(x)$

Enunciado: $3 = \log_3(x)$

Solución

Paso 1: Recordar la definición de logaritmo.

Si $\log_b(a) = c$, entonces $b^c = a$

Paso 2: Aplicar la definición.

$$3 = \log_3(x)$$

Significa que:

$$3^3 = x$$

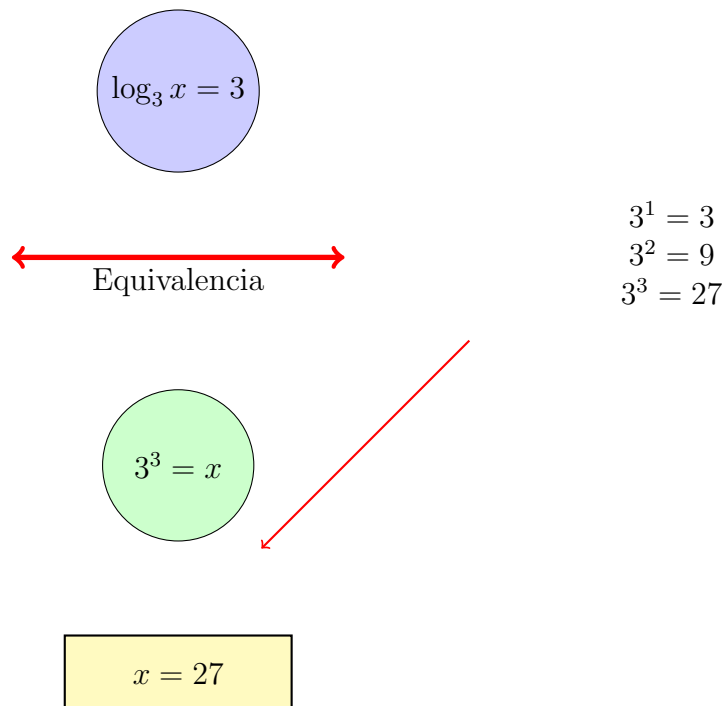
Paso 3: Calcular.

$$x = 3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

Verificación:

$$\log_3(27) = \log_3(3^3) = 3 \quad \checkmark$$

Solución: $x = 27$



4.2. Apartado b) $2 = \log_x(0,01)$

Enunciado: $2 = \log_x(0,01)$

Solución

Paso 1: Aplicar la definición de logaritmo.

$$2 = \log_x(0,01)$$

Significa que:

$$x^2 = 0,01$$

Paso 2: Expresar 0,01 como fracción.

$$0,01 = \frac{1}{100}$$

Por tanto:

$$x^2 = \frac{1}{100}$$

Paso 3: Resolver la ecuación.

$$x^2 = \frac{1}{100}$$

Tomando raíz cuadrada en ambos lados:

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{100}} = \pm \frac{1}{10} = \pm 0,1$$

Paso 4: Considerar las restricciones del logaritmo.

En la expresión $\log_x(0,01)$, la base x debe ser:

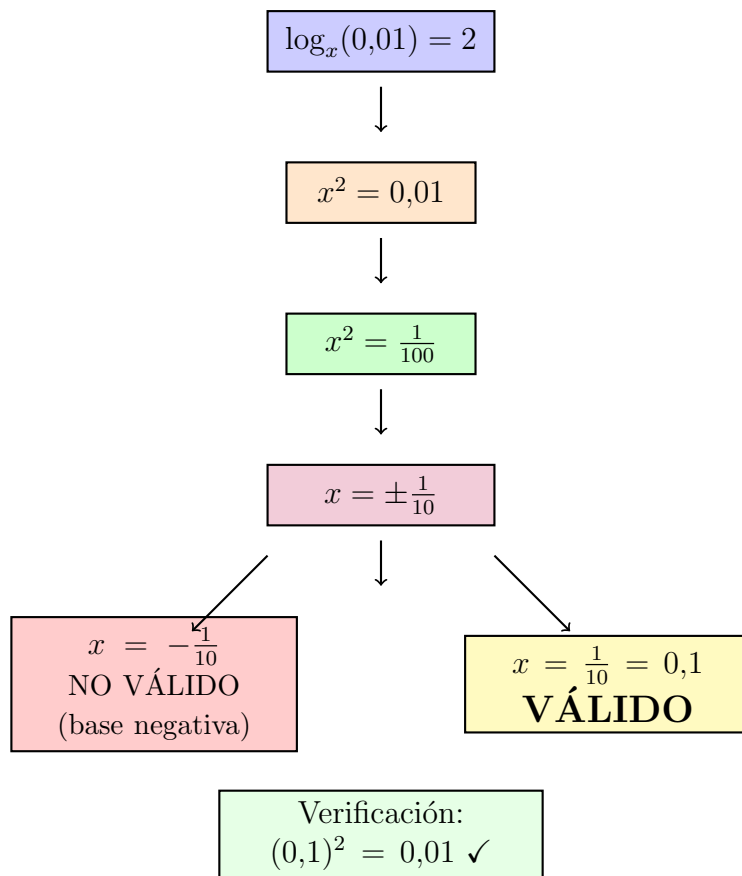
- $x > 0$ (positivo)
- $x \neq 1$ (diferente de 1)

Por tanto, descartamos $x = -0,1$ (negativo).

Solución: $x = 0,1 = \frac{1}{10}$

Verificación:

$$\log_{0,1}(0,01) = \log_{0,1}(0,1^2) = 2 \quad \checkmark$$



4.3. Apartado c) $\ln e^x = 3$

Enunciado: $\ln e^x = 3$

Solución

Paso 1: Aplicar la propiedad del logaritmo de una potencia.

Recordemos que $\ln$ es el logaritmo natural (base e).

Propiedad: $\ln(e^a) = a \ln e$

Como $\ln e = 1$:

$$\ln(e^x) = x \ln e = x \cdot 1 = x$$

Paso 2: Sustituir en la ecuación.

$$\ln e^x = 3$$

$$x = 3$$

Solución: $x = 3$

Verificación:

$$\ln e^3 = 3 \ln e = 3 \cdot 1 = 3 \quad \checkmark$$

$$\ln e^x = 3$$



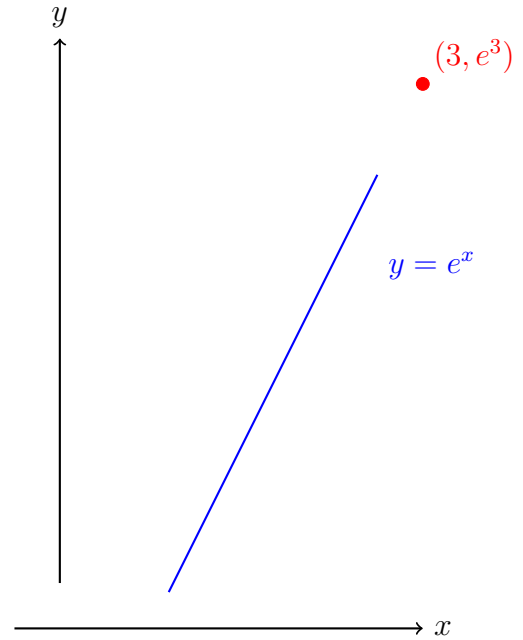
Propiedad fundamental:
 $\ln e^x = x \cdot \ln e = x \cdot 1 = x$



$$x = 3$$

Recordatorio:

$\ln e = 1$ porque $e^1 = e$
El logaritmo y la exponencial
en base e son funciones inversas



5. Ecuaciones exponenciales

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

5.1. Apartado a) $2^{1-x^2} = \frac{1}{8}$

Enunciado: $2^{1-x^2} = \frac{1}{8}$

Solución

Paso 1: Expresar $\frac{1}{8}$ como potencia de 2.

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$$

Paso 2: Reescribir la ecuación.

$$2^{1-x^2} = 2^{-3}$$

Paso 3: Igualar los exponentes.

Como las bases son iguales, los exponentes deben ser iguales:

$$1 - x^2 = -3$$

Paso 4: Resolver la ecuación de segundo grado.

$$1 - x^2 = -3$$

$$-x^2 = -3 - 1$$

$$-x^2 = -4$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$x = \pm 2$$

Paso 5: Verificación.

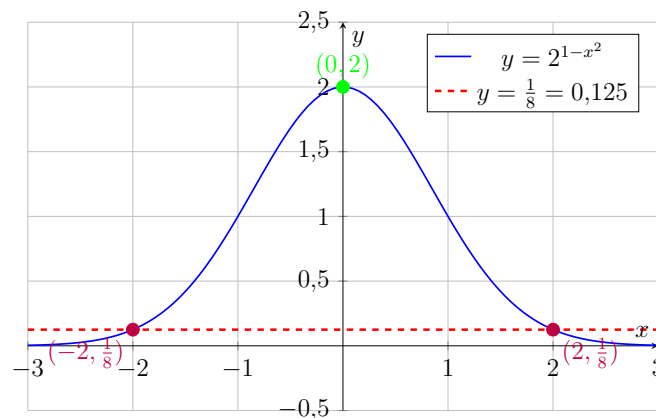
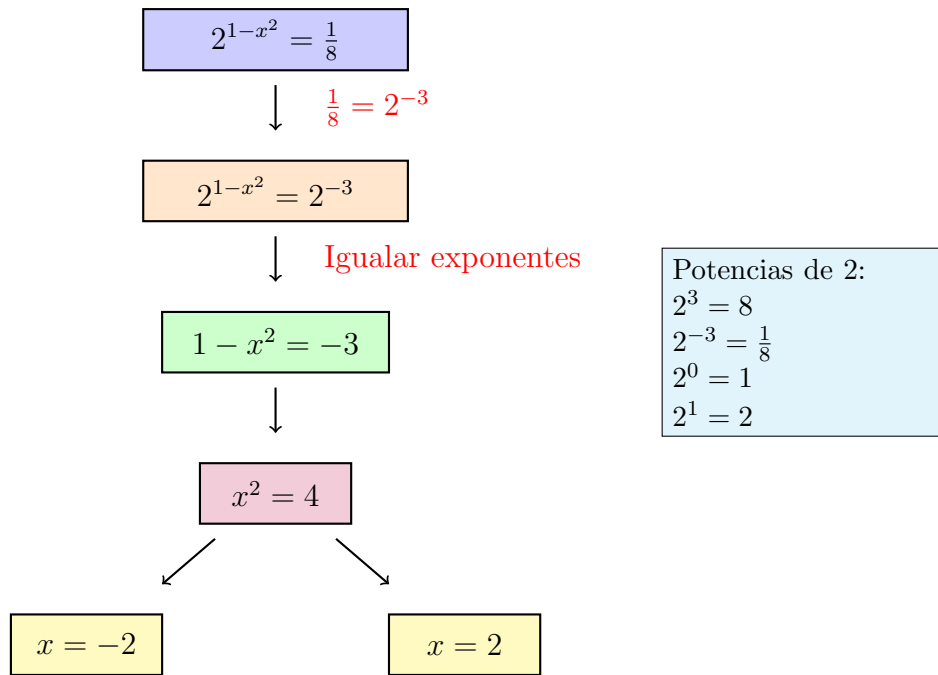
Para $x = 2$:

$$2^{1-2^2} = 2^{1-4} = 2^{-3} = \frac{1}{8} \quad \checkmark$$

Para $x = -2$:

$$2^{1-(-2)^2} = 2^{1-4} = 2^{-3} = \frac{1}{8} \quad \checkmark$$

Solución: $x = 2$ o $x = -2$



Las soluciones son los puntos donde la curva interseca la línea $y = \frac{1}{8}$.

5.2. Apartado b) $2 - 3^{-x} + 3^{x+1} = 0$

Enunciado: $2 - 3^{-x} + 3^{x+1} = 0$

Solución

Paso 1: Reescribir la ecuación usando propiedades de exponentes.

$$2 - 3^{-x} + 3^{x+1} = 0$$

Recordemos que:

$$3^{-x} = \frac{1}{3^x}$$

$$3^{x+1} = 3 \cdot 3^x$$

Paso 2: Sustituir y hacer cambio de variable.

$$2 - \frac{1}{3^x} + 3 \cdot 3^x = 0$$

Hacemos el cambio de variable: $t = 3^x$ (donde $t > 0$)

$$2 - \frac{1}{t} + 3t = 0$$

Paso 3: Multiplicar toda la ecuación por t para eliminar el denominador.

$$t \left(2 - \frac{1}{t} + 3t \right) = 0 \cdot t$$

$$2t - 1 + 3t^2 = 0$$

$$3t^2 + 2t - 1 = 0$$

Paso 4: Resolver la ecuación de segundo grado.

Usamos la fórmula general: $t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Con $a = 3$, $b = 2$, $c = -1$:

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(3)(-1)}}{2(3)}$$

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6}$$

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{6}$$

$$t = \frac{-2 \pm 4}{6}$$

Dos soluciones:

$$t_1 = \frac{-2 + 4}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$t_2 = \frac{-2 - 4}{6} = \frac{-6}{6} = -1$$

Paso 5: Deshacer el cambio de variable.

Como $t = 3^x$ y $3^x > 0$ siempre, descartamos $t_2 = -1$ (negativo).

Para $t_1 = \frac{1}{3}$:

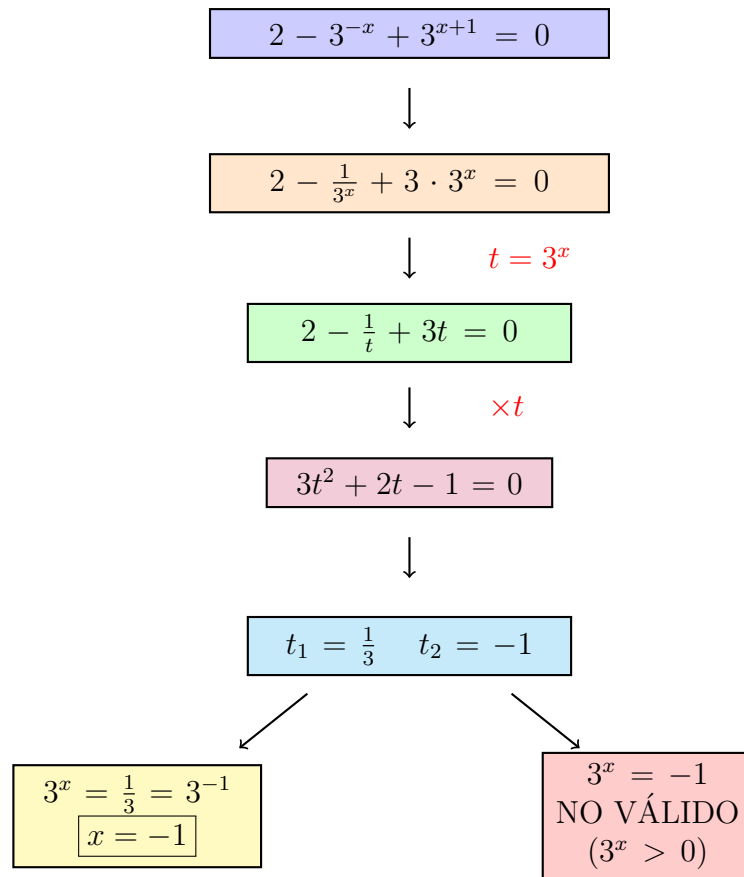
$$3^x = \frac{1}{3}$$

$$3^x = 3^{-1}$$

$$x = -1$$

Paso 6: Verificación.

$$2 - 3^{-(-1)} + 3^{-1+1} = 2 - 3^1 + 3^0 = 2 - 3 + 1 = 0 \quad \checkmark$$



6. Ecuaciones logarítmicas

Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

6.1. Apartado a) $\log(x) + \log(x + 9) = 1$

Enunciado: $\log(x) + \log(x + 9) = 1$

Solución

Paso 1: Aplicar la propiedad del logaritmo de un producto.

Propiedad: $\log a + \log b = \log(a \cdot b)$

$$\log(x) + \log(x + 9) = \log[x(x + 9)]$$

$$\log[x(x + 9)] = 1$$

Paso 2: Aplicar la definición de logaritmo.

Como estamos usando logaritmo decimal (base 10):

$$\log[x(x + 9)] = 1 \Rightarrow x(x + 9) = 10^1 = 10$$

Paso 3: Desarrollar y resolver la ecuación cuadrática.

$$x(x + 9) = 10$$

$$x^2 + 9x = 10$$

$$x^2 + 9x - 10 = 0$$

Usamos la fórmula general: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Con $a = 1$, $b = 9$, $c = -10$:

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4(1)(-10)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 40}}{2}$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{121}}{2}$$

$$x = \frac{-9 \pm 11}{2}$$

Dos soluciones:

$$x_1 = \frac{-9 + 11}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-9 - 11}{2} = \frac{-20}{2} = -10$$

Paso 4: Verificar el dominio.

Para que $\log(x)$ y $\log(x + 9)$ estén definidos, necesitamos:

- $x > 0$
- $x + 9 > 0 \Rightarrow x > -9$

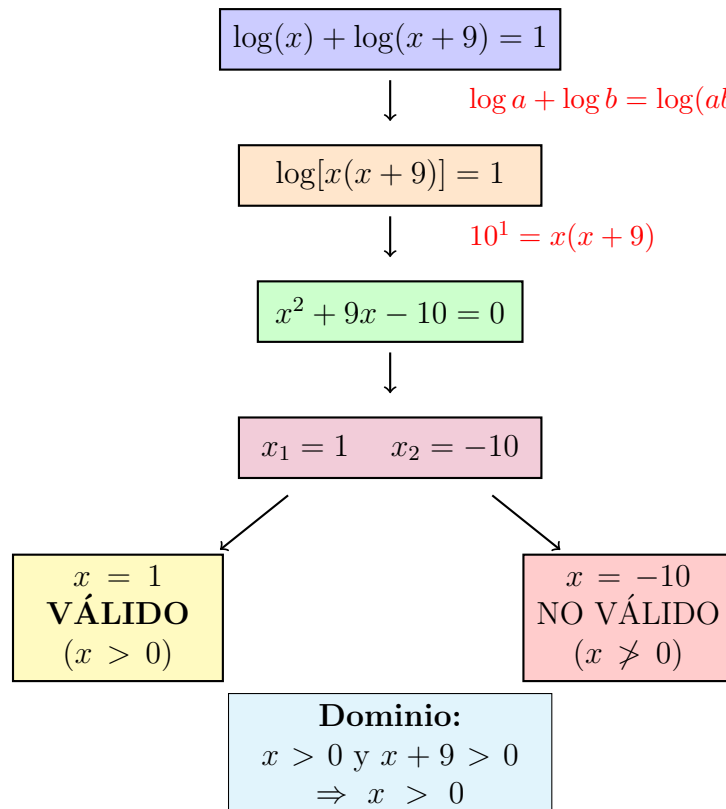
La condición más restrictiva es $x > 0$.

Por tanto, descartamos $x_2 = -10$ (no cumple $x > 0$).

Paso 5: Verificación con $x = 1$.

$$\log(1) + \log(1 + 9) = \log(1) + \log(10) = 0 + 1 = 1 \quad \checkmark$$

Solución: $x = 1$

**6.2. Apartado b)** $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = \log_2 8$

Enunciado: $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = \log_2 8$

Solución

Paso 1: Aplicar la propiedad del logaritmo de un producto en el lado izquierdo.

$$\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = \log_2[(x+1)(x-1)]$$

La ecuación queda:

$$\log_2[(x+1)(x-1)] = \log_2 8$$

Paso 2: Como los logaritmos tienen la misma base, igualar los argumentos.

$$(x+1)(x-1) = 8$$

Paso 3: Desarrollar usando la diferencia de cuadrados.

$$(x+1)(x-1) = x^2 - 1$$

Por tanto:

$$x^2 - 1 = 8$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

Paso 4: Verificar el dominio.

Para que $\log_2(x+1)$ y $\log_2(x-1)$ estén definidos:

$$\blacksquare x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$$

$$\blacksquare x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

La condición más restrictiva es $x > 1$.

Por tanto, descartamos $x = -3$ (no cumple $x > 1$).

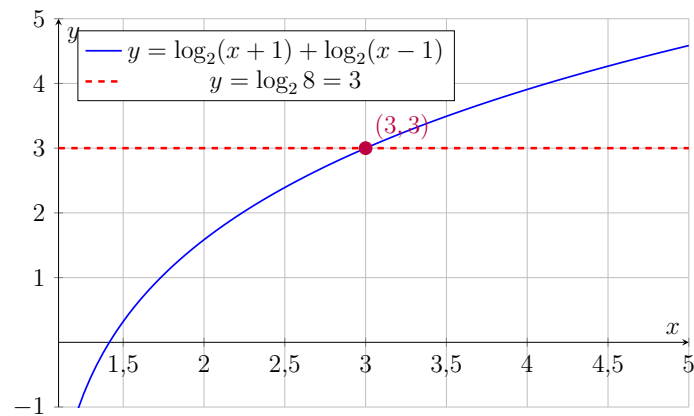
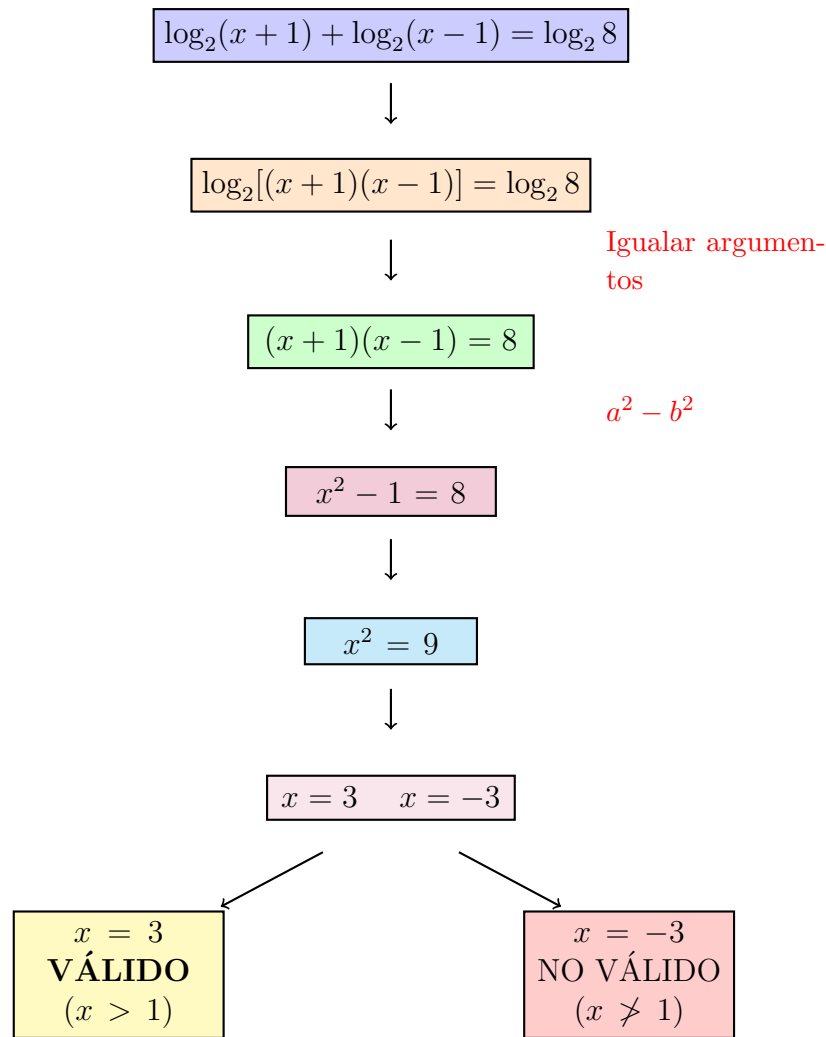
Paso 5: Verificación con $x = 3$.

$$\begin{aligned}\log_2(3+1) + \log_2(3-1) &= \log_2(4) + \log_2(2) \\ &= \log_2(2^2) + \log_2(2) \\ &= 2 + 1 = 3\end{aligned}$$

Y por otro lado:

$$\log_2 8 = \log_2(2^3) = 3 \quad \checkmark$$

Solución: $x = 3$



La intersección muestra la solución $x = 3$.

7. Sistema de ecuaciones mixto

Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ \log_3 x - \log_3 y = 1 \end{cases}$$

Solución

Paso 1: Trabajar con la segunda ecuación.

$$\log_3 x - \log_3 y = 1$$

Aplicar la propiedad del logaritmo de un cociente: $\log_b a - \log_b c = \log_b \left(\frac{a}{c}\right)$

$$\log_3 \left(\frac{x}{y}\right) = 1$$

Paso 2: Aplicar la definición de logaritmo.

$$\log_3 \left(\frac{x}{y}\right) = 1 \Rightarrow \frac{x}{y} = 3^1 = 3$$

Por tanto:

$$x = 3y$$

Paso 3: Sustituir en la primera ecuación.

De la primera ecuación: $x + y = 4$

Sustituimos $x = 3y$:

$$3y + y = 4$$

$$4y = 4$$

$$y = 1$$

Paso 4: Calcular x .

$$x = 3y = 3(1) = 3$$

Paso 5: Verificación.

Primera ecuación:

$$x + y = 3 + 1 = 4 \quad \checkmark$$

Segunda ecuación:

$$\log_3 3 - \log_3 1 = \log_3(3^1) - \log_3(3^0) = 1 - 0 = 1 \quad \checkmark$$

Solución: $x = 3, \quad y = 1$ o $(x, y) = (3, 1)$

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ \log_3 x - \log_3 y = 1 \end{cases}$$

↓

$$\log_3 \left(\frac{x}{y} \right) = 1$$

↓

$$3^1 = \frac{x}{y}$$

$$x = 3y$$

↓

Sustituir en $x + y = 4$

$$3y + y = 4$$

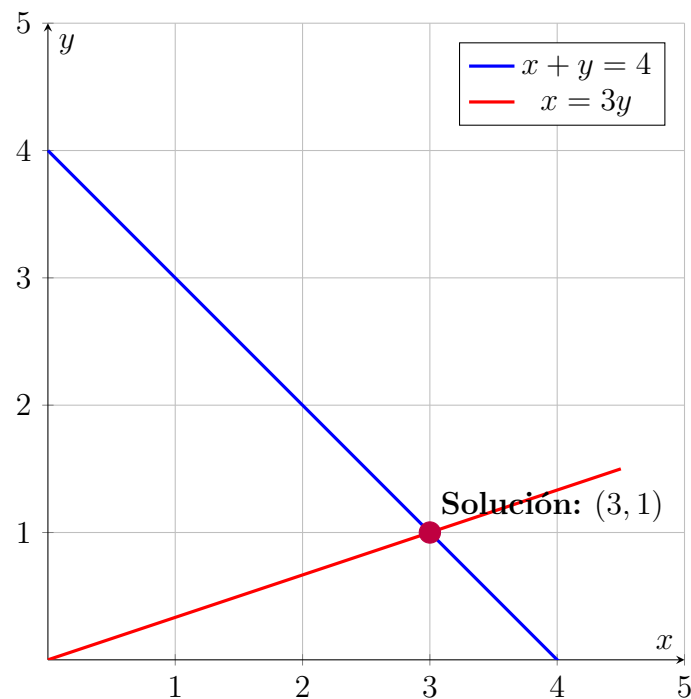
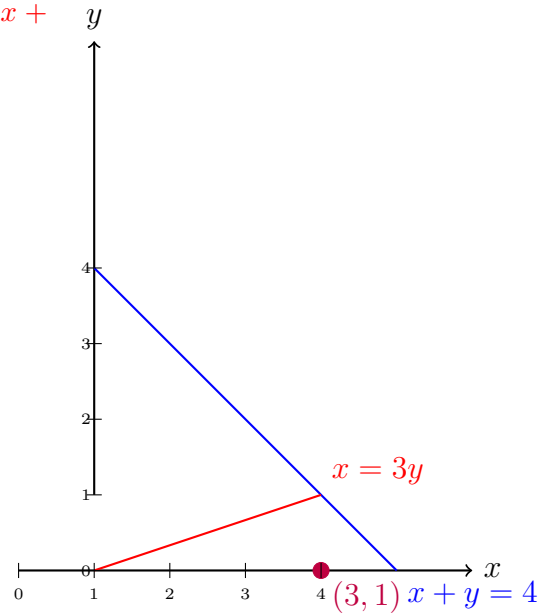
↓

$$y = 1$$

↓

$$x = 3y = 3$$

$$(x, y) = (3, 1)$$



La solución es el punto de intersección de ambas rectas.

Nº1.- Calcular el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x+1}{2x^2-x-1}$ b) $g(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x}$ c) $h(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 2$

(1,5 PUNTOS)

Nº2.- Estudia la simetría de las siguientes funciones:

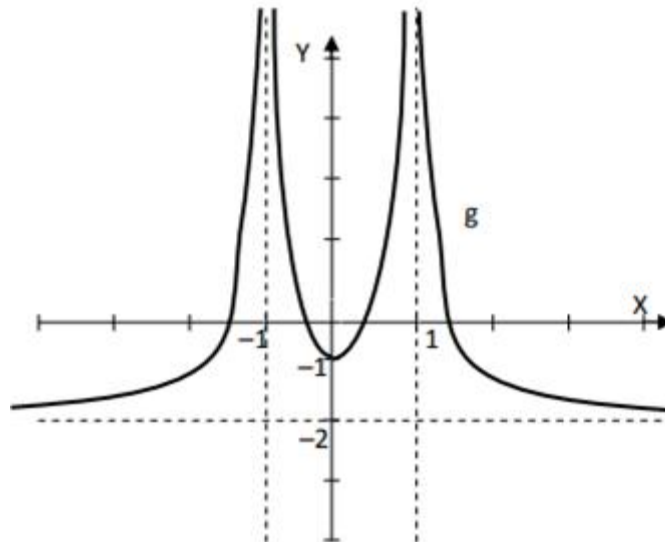
a) $f(x) = \frac{x^3}{x^4 + x^2}$ b) $g(x) = \sqrt{x^2 - 2}$

(1 PUNTO)

Nº3.- Dada la función $y = 2x^2 - 2x - 4$, calcular: puntos de corte con los ejes, el vértice y hacer la representación gráfica

(1,5 PUNTOS)

Nº4.- De la siguiente función, calcular:



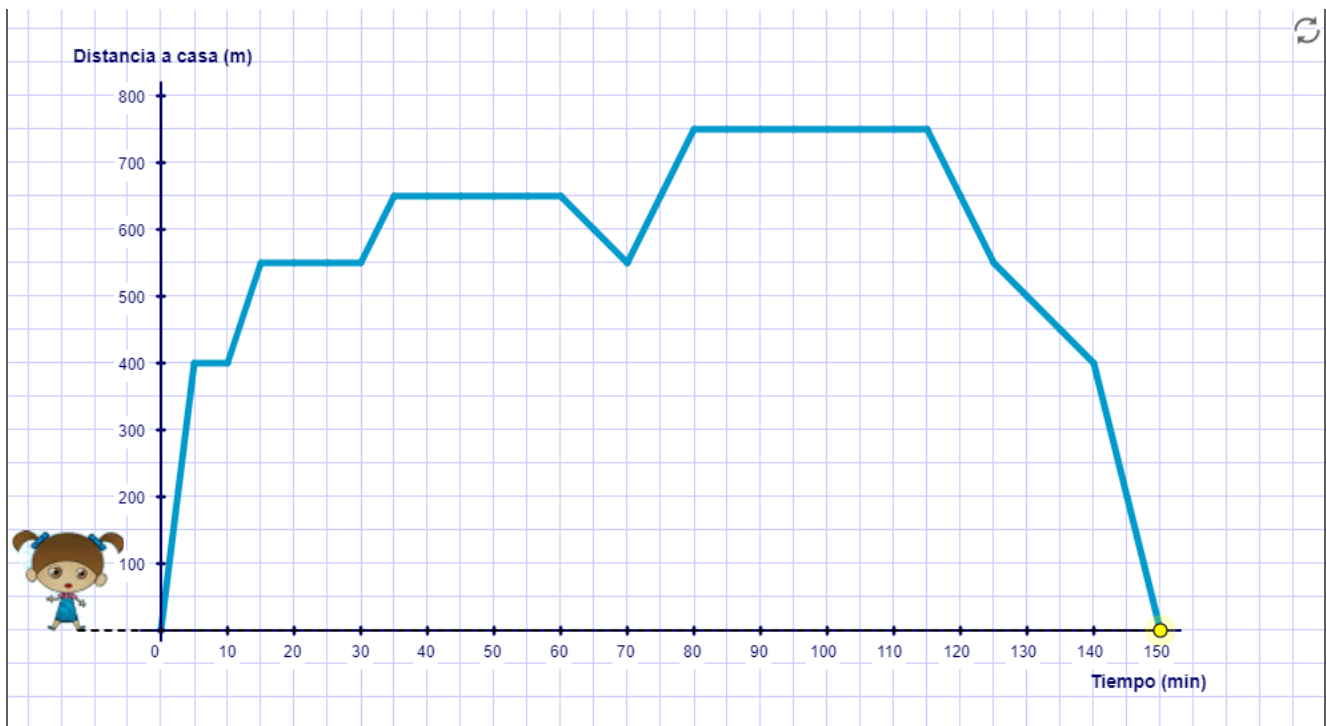
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento
- Máximos y mínimos relativos y máximos y mínimos absolutos.
- Dominio e imagen de la función.
- Continuidad
- Asíntotas.
- Simetrías

(2 PUNTOS)

Nº5.- Calcúlese la ecuación de la recta que pasa por los puntos de coordenadas $A(-2, 8)$ y $B(3, -2)$. Dibuja la gráfica de la función e indica la pendiente.

(2 PUNTOS)

Nº6.- La siguiente gráfica nos informa de los movimientos de Marina el sábado pasado por la tarde. Sale de su casa y se dirige a casa de su amiga Lucía a la que espera durante un rato en su portal. Después van juntas a casa de Inés donde se quedan un poco de tiempo escuchando música. Más tarde se van las tres a hacer unas compras a un supermercado cercano. Tras llevar la compra a casa de Inés, se dirigen al parque, donde meriendan y charlan durante un buen rato. Por último, Marina regresa a casa, acompañando de paso a sus amigas Inés y Lucía a sus casas.



- ¿Qué información crees que puede proporcionarnos esta gráfica?
- ¿Qué distancia hay de casa de Marina a casa de Lucía? ¿Y a la casa de Inés? ¿Y al parque? Explica cómo has encontrado esta información en la gráfica.
- ¿Tiene que esperar mucho a Lucía? ¿Cuánto tiempo están en casa de Inés? ¿Y en el supermercado? ¿Y en el parque? ¿Hacen alguna parada en el regreso del parque a sus casas? Explica cómo has encontrado esta información en la gráfica.
- Si Marina salió de casa a las 16:30, ¿dónde estaba a las 16:45? ¿Y a las 17:30? ¿Y a las 18:30? ¿A qué hora llega de vuelta a casa? Explica cómo has encontrado esta información en la gráfica.
- ¿Caminan siempre a la misma velocidad? ¿En qué tramo van más deprisa? ¿Y más despacio? Estudia la velocidad que llevan en cada trayecto. ¿Cómo identificas en la gráfica los tramos en que la velocidad es distinta?

(2 PUNTOS)

EXAMEN DE MATEMÁTICAS

1º BACHILLERATO B/C

03 de Marzo de 2023

I.E.S. TOVAR

Centro Bilingüe

*"Reserva tu derecho a pensar,
porque incluso pensar de forma errónea
es mejor que no pensar en absoluto."*

— Hipatia de Alejandría

Índice

1. Ejercicio 1: Dominios de funciones	2
1.1. Enunciado	2
1.2. Solución apartado a)	3
1.3. Solución apartado b)	4
1.4. Solución apartado c)	5
2. Ejercicio 2: Estudio de simetría	6
2.1. Enunciado	6
2.2. Recordatorio teórico	6
2.3. Solución apartado a)	7
2.4. Solución apartado b)	8
3. Ejercicio 3: Estudio de una parábola	9
3.1. Enunciado	9
3.2. Solución	9
3.2.1. Puntos de corte con el eje Y	10
3.2.2. Puntos de corte con el eje X	11
3.2.3. Vértice de la parábola	14
3.2.4. Representación gráfica y elementos adicionales	16
4. Ejercicio 4: Análisis completo de una función	18
4.1. Enunciado	18
4.2. Solución apartado a) - Intervalos de crecimiento y decrecimiento	19
4.3. Solución apartado b) - Máximos y mínimos	21
4.4. Solución apartado c) - Dominio e Imagen	23
4.5. Solución apartado d) - Continuidad	26
4.6. Solución apartado e) - Asíntotas	28
4.6.1. Asíntotas verticales	28
4.6.2. Asíntotas horizontales	29
4.6.3. Asíntotas oblicuas	29
4.7. Solución apartado f) - Simetrías	32
5. Ejercicio 5: Ecuación de la recta	34
5.1. Enunciado	34
5.2. Solución	35
5.2.1. Paso 1: Cálculo de la pendiente	36
5.2.2. Paso 2: Ecuación punto-pendiente	37
5.2.3. Paso 3: Verificación con los puntos dados	38
5.2.4. Paso 4: Otras formas de la ecuación	40
5.2.5. Paso 5: Elementos adicionales de la recta	41
6. Ejercicio 6: Análisis de gráfica de movimiento	43
6.1. Enunciado	43
6.2. Apartado a) - Información de la gráfica	45
6.3. Apartado b) - Distancias a cada lugar	47
6.3.1. Distancia a casa de Lucía	47
6.3.2. Distancia a casa de Inés	48

6.3.3.	Distancia al parque	49
6.3.4.	Resumen de distancias	50
6.4.	Apartado c) - Tiempos de permanencia y paradas	51
6.4.1.	Tiempo de espera a Lucía	51
6.4.2.	Tiempo en casa de Inés	52
6.4.3.	Tiempo en el supermercado	53
6.4.4.	Tiempo en el parque	54
6.4.5.	Paradas en el regreso	55
6.4.6.	Resumen de tiempos	57
6.5.	Apartado d) - Localización en momentos específicos	58
6.5.1.	¿Dónde estaba a las 16:45?	58
6.5.2.	¿Dónde estaba a las 17:30?	60
6.5.3.	¿Dónde estaba a las 18:30?	61
6.5.4.	¿A qué hora llega de vuelta a casa?	62
6.5.5.	Resumen de localizaciones	63
6.6.	Apartado e) - Estudio de velocidades	64
6.6.1.	¿Caminan siempre a la misma velocidad?	64
6.6.2.	Cálculo de velocidades en cada tramo	66
6.6.3.	Tramos extremos de velocidad	69
6.6.4.	Resumen del estudio de velocidades	70

1. Ejercicio 1: Dominios de funciones

1.1. Enunciado

Calcular el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x+1}{2x^2-x-1}$

b) $g(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x}$

c) $h(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 2$

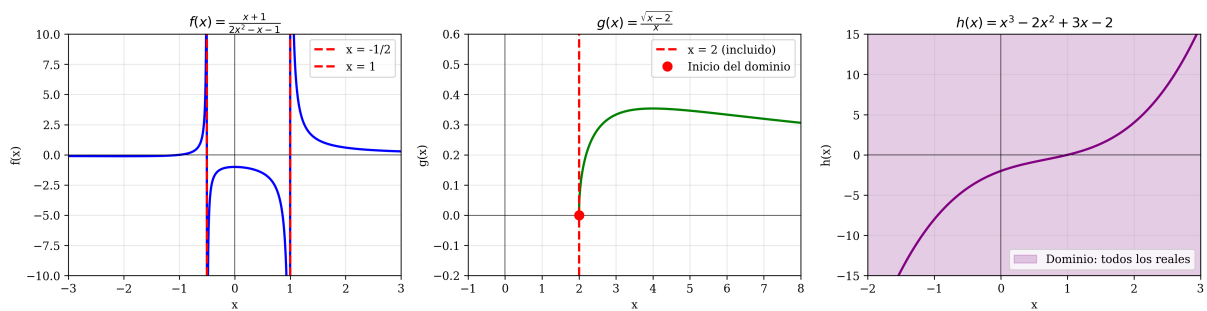


Figura 1: Representación gráfica de las funciones del Ejercicio 1

1.2. Solución apartado a)

Función racional: $f(x)$

Para calcular el dominio de una función racional, debemos excluir los valores de x que anulan el denominador.

Paso 1: Igualar el denominador a cero:

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

Paso 2: Resolver la ecuación de segundo grado usando la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde $a = 2$, $b = -1$, $c = -1$:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4}$$

$$x = \frac{1 \pm 3}{4}$$

Paso 3: Calcular las dos soluciones:

$$x_1 = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{1-3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Paso 4: Verificación (sustituyendo en el denominador):

- Para $x = 1$: $2(1)^2 - 1 - 1 = 2 - 1 - 1 = 0 \checkmark$
- Para $x = -\frac{1}{2}$: $2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0 \checkmark$

Dominio de $f(x)$:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\} = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)$$

1.3. Solución apartado b)

Función radical y racional: $g(x)$

Esta función combina una raíz cuadrada en el numerador y una variable en el denominador. Debemos considerar ambas restricciones.

Paso 1: Restricción de la raíz cuadrada (el radicando debe ser no negativo):

$$x - 2 \geq 0$$

$$x \geq 2$$

Paso 2: Restricción del denominador (no puede ser cero):

$$x \neq 0$$

Paso 3: Combinar ambas condiciones:

- De la raíz: $x \geq 2$
- Del denominador: $x \neq 0$

Como $x \geq 2$ implica que $x > 0$, la condición $x \neq 0$ ya está automáticamente satisfecha.

Paso 4: Análisis del punto $x = 2$:

$$g(2) = \frac{\sqrt{2-2}}{2} = \frac{\sqrt{0}}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

El punto $x = 2$ sí pertenece al dominio ya que la función está bien definida.

Dominio de $g(x)$:

$$\text{Dom}(g) = [2, +\infty)$$

Equivalentemente: $\text{Dom}(g) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$

1.4. Solución apartado c)

Función polinómica: $h(x)$

Las funciones polinómicas están definidas para todos los números reales, ya que:

Paso 1: Identificar el tipo de función:

- Es un polinomio de grado 3
- No tiene denominadores
- No tiene raíces cuadradas (o de índice par)
- No tiene logaritmos
- No tiene ninguna otra operación que restrinja el dominio

Paso 2: Análisis de restricciones:

Las únicas operaciones presentes son:

- Potencias de exponente natural: x^3, x^2, x^1
- Productos por constantes: $-2x^2, 3x$
- Suma y resta de términos

Ninguna de estas operaciones impone restricciones sobre los valores de x .

Paso 3: Verificación con valores específicos:

- Para $x = 0$: $h(0) = 0 - 0 + 0 - 2 = -2 \checkmark$
- Para $x = 1$: $h(1) = 1 - 2 + 3 - 2 = 0 \checkmark$
- Para $x = -1$: $h(-1) = -1 - 2 - 3 - 2 = -8 \checkmark$

Todos los valores son calculables sin problemas.

Dominio de $h(x)$:

$$\text{Dom}(h) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

Nota: Todo polinomio tiene como dominio el conjunto de todos los números reales.

2. Ejercicio 2: Estudio de simetría

2.1. Enunciado

Estudia la simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x^3}{x^4 + x^2}$

b) $g(x) = \sqrt{x^2 - 2}$

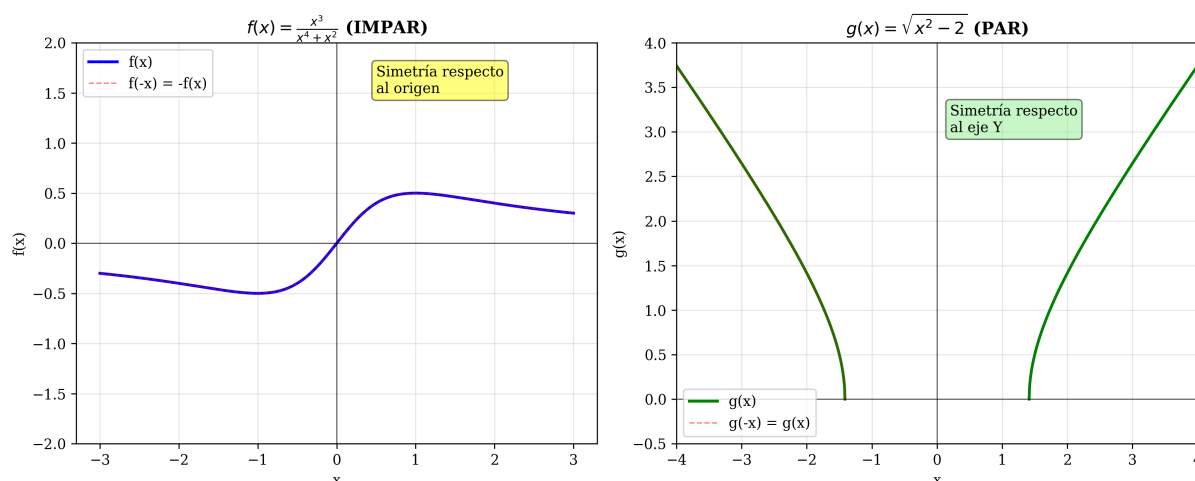


Figura 2: Representación gráfica mostrando las simetrías de las funciones

2.2. Recordatorio teórico

Definiciones de simetría:

- **Función PAR:** Una función f es par si $f(-x) = f(x)$ para todo x en el dominio.

Interpretación geométrica: La gráfica es simétrica respecto al eje Y.

- **Función IMPAR:** Una función f es impar si $f(-x) = -f(x)$ para todo x en el dominio.

Interpretación geométrica: La gráfica es simétrica respecto al origen.

- **Sin simetría:** Si no cumple ninguna de las anteriores.

2.3. Solución apartado a)

Función: $f(x)$

Paso 1: Simplificar la expresión (factorizando):

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3}{x^4 + x^2} \\ &= \frac{x^3}{x^2(x^2 + 1)} \\ &= \frac{x}{x^2 + 1} \quad (\text{para } x \neq 0) \end{aligned}$$

Paso 2: Calcular $f(-x)$ sustituyendo x por $-x$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{(-x)^3}{(-x)^4 + (-x)^2} \\ &= \frac{-x^3}{x^4 + x^2} \quad (\text{ya que } (-x)^3 = -x^3 \text{ y } (-x)^4 = x^4 \text{ y } (-x)^2 = x^2) \end{aligned}$$

Paso 3: Comparar con $f(x)$ y $-f(x)$:

Tenemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3}{x^4 + x^2} \\ f(-x) &= \frac{-x^3}{x^4 + x^2} = -\frac{x^3}{x^4 + x^2} \end{aligned}$$

Observamos que:

$$f(-x) = -\frac{x^3}{x^4 + x^2} = -f(x)$$

Paso 4: Verificación con valores numéricos:

- Para $x = 1$: $f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$
- Para $x = -1$: $f(-1) = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$
- Comprobación: $f(-1) = -\frac{1}{2} = -f(1) \checkmark$

Conclusión:

$f(x)$ es una función IMPAR

La gráfica de $f(x)$ tiene **simetría respecto al origen** de coordenadas.

Esto significa que si rotamos la gráfica 180° alrededor del origen, obtenemos la misma gráfica.

2.4. Solución apartado b)

Función: $g(x)$

Paso 1: Calcular $g(-x)$ sustituyendo x por $-x$:

$$g(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 2}$$

Paso 2: Simplificar usando la propiedad $(-x)^2 = x^2$:

$$\begin{aligned} g(-x) &= \sqrt{(-x)^2 - 2} \\ &= \sqrt{x^2 - 2} \end{aligned}$$

Paso 3: Comparar con $g(x)$:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{x^2 - 2} \\ g(-x) &= \sqrt{x^2 - 2} \end{aligned}$$

Observamos que:

$$g(-x) = g(x)$$

Paso 4: Verificación con valores numéricos:

Primero, determinemos el dominio: $x^2 - 2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 2 \Rightarrow |x| \geq \sqrt{2}$

Por tanto: $\text{Dom}(g) = (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$

Ahora verificamos:

- Para $x = 2$: $g(2) = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}$
- Para $x = -2$: $g(-2) = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}$
- Comprobación: $g(-2) = \sqrt{2} = g(2) \checkmark$
- Para $x = 3$: $g(3) = \sqrt{9 - 2} = \sqrt{7}$
- Para $x = -3$: $g(-3) = \sqrt{9 - 2} = \sqrt{7}$
- Comprobación: $g(-3) = \sqrt{7} = g(3) \checkmark$

Paso 5: Interpretación geométrica:

La presencia de x^2 en el radicando garantiza que valores opuestos de x (como 2 y -2) producen el mismo resultado, ya que al elevarse al cuadrado, ambos dan el mismo valor.

Conclusión:

$g(x)$ es una función PAR

La gráfica de $g(x)$ tiene **simetría respecto al eje Y (eje de ordenadas)**. Esto significa que si reflejamos la gráfica respecto al eje Y, obtenemos la misma gráfica. La parte derecha es el reflejo de la parte izquierda.

3. Ejercicio 3: Estudio de una parábola

3.1. Enunciado

Dada la función $y = 2x^2 - 2x - 4$, calcular:

- Puntos de corte con los ejes
- El vértice
- Hacer la representación gráfica

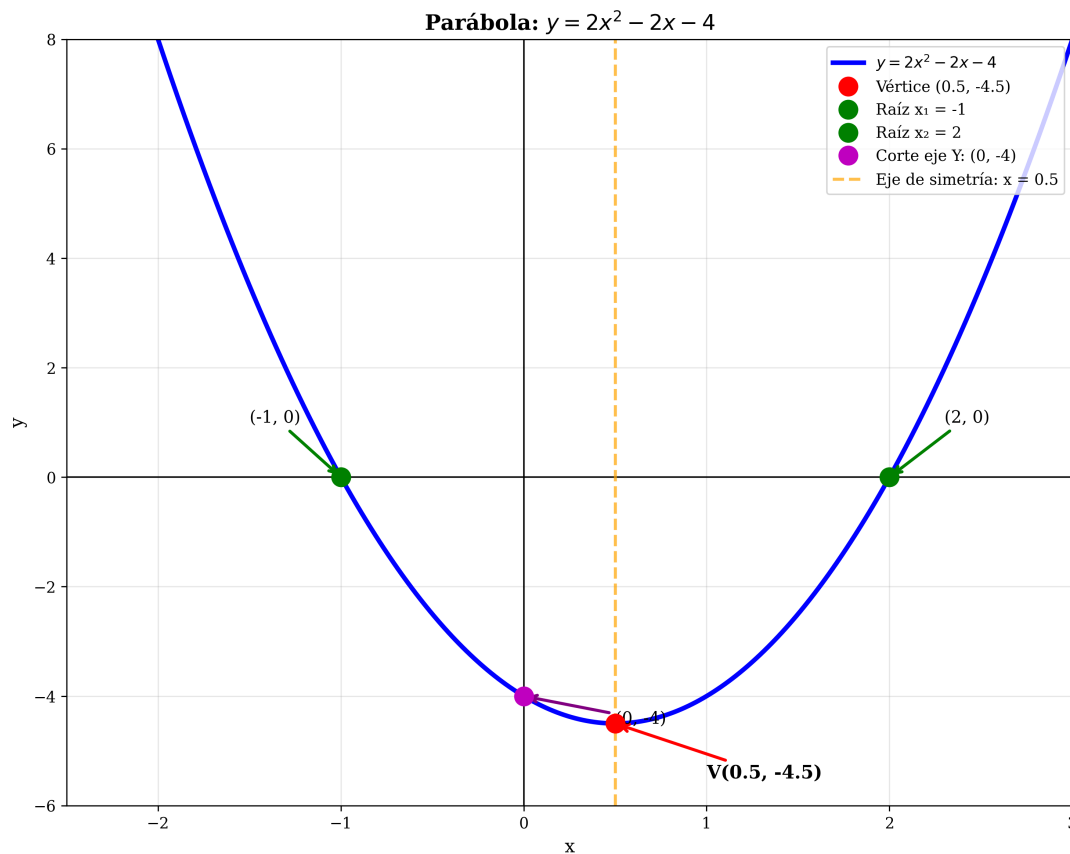


Figura 3: Representación completa de la parábola $y = 2x^2 - 2x - 4$

3.2. Solución

Análisis de la parábola: y

Esta es una función cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + c$ donde:

$$a = 2, \quad b = -2, \quad c = -4$$

Como $a = 2 > 0$, la parábola tiene las ramas hacia arriba.

3.2.1. Puntos de corte con el eje Y**Corte con el eje Y (cuando x** **Paso 1:** Sustituir $x = 0$ en la ecuación:

$$y = 2(0)^2 - 2(0) - 4$$

$$y = 0 - 0 - 4$$

$$y = -4$$

Punto de corte con el eje Y:

$$(0, -4)$$

3.2.2. Puntos de corte con el eje X**Cortes con el eje X (cuando y** **Paso 1:** Igualar la función a cero:

$$2x^2 - 2x - 4 = 0$$

Paso 2: Simplificar dividiendo toda la ecuación entre 2:

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Paso 3: Aplicar la fórmula general de ecuaciones de segundo grado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para la ecuación simplificada $x^2 - x - 2 = 0$, tenemos $a = 1$, $b = -1$, $c = -2$:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm 3}{2}$$

Paso 4: Calcular las dos soluciones:

$$x_1 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Paso 5: Verificación:

- Para $x = 2$: $y = 2(2)^2 - 2(2) - 4 = 8 - 4 - 4 = 0 \checkmark$
- Para $x = -1$: $y = 2(-1)^2 - 2(-1) - 4 = 2 + 2 - 4 = 0 \checkmark$

Paso 6: Método alternativo (factorización):

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

Por tanto: $x-2=0 \Rightarrow x=2$ ó $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

Puntos de corte con el eje X:

$$(-1, 0) \text{ y } (2, 0)$$

Raíces de la función: $x_1 = -1$ y $x_2 = 2$

3.2.3. Vértice de la parábola

Cálculo del vértice

El vértice de una parábola $y = ax^2 + bx + c$ se encuentra en el punto $V(x_v, y_v)$ donde:

Paso 1: Calcular la coordenada x del vértice:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

Con $a = 2$ y $b = -2$:

$$x_v = -\frac{-2}{2(2)}$$

$$x_v = -\frac{-2}{4}$$

$$x_v = \frac{2}{4}$$

$$x_v = \frac{1}{2}$$

Paso 2: Calcular la coordenada y del vértice sustituyendo x_v en la función:

$$y_v = 2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 - 2 \left(\frac{1}{2} \right) - 4$$

$$y_v = 2 \cdot \frac{1}{4} - 1 - 4$$

$$y_v = \frac{2}{4} - 1 - 4$$

$$y_v = \frac{1}{2} - 1 - 4$$

$$y_v = \frac{1}{2} - \frac{2}{2} - \frac{8}{2}$$

$$y_v = \frac{1 - 2 - 8}{2}$$

$$y_v = \frac{-9}{2}$$

$$y_v = -4,5$$

Paso 3: Verificación usando la fórmula alternativa:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Calculamos el discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(2)(-4) = 4 + 32 = 36$$

Por tanto:

$$y_v = -\frac{36}{4(2)} = -\frac{36}{8} = -\frac{9}{2} = -4,5$$

✓ La verificación confirma el resultado.

Vértice de la parábola:

$$V\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{2}\right) = V(0,5, -4,5)$$

Como $a = 2 > 0$, el vértice es un **MÍNIMO** de la función.

Interpretación: El punto más bajo de la parábola está en $x = 0,5$ con valor $y = -4,5$.

3.2.4. Representación gráfica y elementos adicionales

Elementos de la parábola

Resumen de puntos clave:

1. **Vértice:** $V(0,5, -4,5)$ — Punto mínimo
2. **Corte con eje Y:** $(0, -4)$
3. **Cortes con eje X:** $(-1, 0)$ y $(2, 0)$
4. **Eje de simetría:** $x = 0,5$ (línea vertical que pasa por el vértice)
5. **Orientación:** Ramas hacia arriba ($a > 0$)
6. **Anchura:** $|a| = 2 > 1$, por lo que es más estrecha que la parábola básica $y = x^2$

Tabla de valores adicionales:

x	$y = 2x^2 - 2x - 4$	Punto (x, y)
-2	$2(4) - 2(-2) - 4 = 8 + 4 - 4 = 8$	$(-2, 8)$
-1	$2(1) - 2(-1) - 4 = 2 + 2 - 4 = 0$	$(-1, 0)$
0	$2(0) - 2(0) - 4 = -4$	$(0, -4)$
0,5	$2(0,25) - 2(0,5) - 4 = 0,5 - 1 - 4 = -4,5$	$(0,5, -4,5)$
1	$2(1) - 2(1) - 4 = 2 - 2 - 4 = -4$	$(1, -4)$
2	$2(4) - 2(2) - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$	$(2, 0)$
3	$2(9) - 2(3) - 4 = 18 - 6 - 4 = 8$	$(3, 8)$

Observación de simetría:

Nótese que los puntos son simétricos respecto al eje $x = 0,5$:

- $(0, -4)$ y $(1, -4)$ están a la misma distancia del eje y tienen la misma altura
- $(-1, 0)$ y $(2, 0)$ están a la misma distancia del eje y tienen la misma altura
- $(-2, 8)$ y $(3, 8)$ están a la misma distancia del eje y tienen la misma altura

Monotonía:

- La función **decrece** en el intervalo $(-\infty, 0,5)$
- La función **crece** en el intervalo $(0,5, +\infty)$

Ecuación de la parábola en forma canónica o de vértice:

Podemos expresar la parábola en la forma $y = a(x - h)^2 + k$ donde (h, k) es el vértice:

$$y = 2 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{9}{2}$$

Verificación:

$$\begin{aligned} y &= 2 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{9}{2} \\ &= 2 \left(x^2 - x + \frac{1}{4} \right) - \frac{9}{2} \\ &= 2x^2 - 2x + \frac{1}{2} - \frac{9}{2} \\ &= 2x^2 - 2x + \frac{1 - 9}{2} \\ &= 2x^2 - 2x - \frac{8}{2} \\ &= 2x^2 - 2x - 4 \quad \checkmark \end{aligned}$$

4. Ejercicio 4: Análisis completo de una función

4.1. Enunciado

De la siguiente función (dada gráficamente), calcular:

- Intervalos de crecimiento y decrecimiento
- Máximos y mínimos relativos y máximos y mínimos absolutos
- Dominio e imagen de la función
- Continuidad
- Asíntotas
- Simetrías

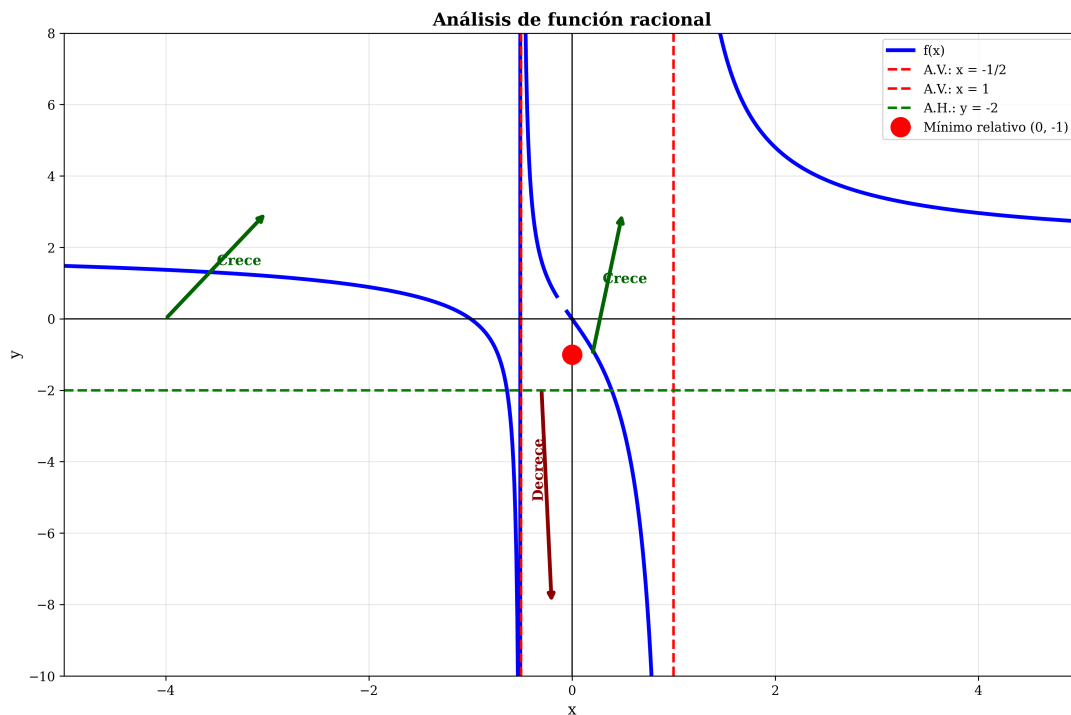


Figura 4: Función racional con asíntotas verticales y horizontal

4.2. Solución apartado a) - Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Análisis de la monotonía

Para determinar dónde crece y decrece la función, observamos la gráfica de izquierda a derecha:

Paso 1: Identificar puntos críticos:

- Asíntota vertical en $x = -\frac{1}{2}$
- Mínimo relativo en $x = 0$
- Asíntota vertical en $x = 1$

Paso 2: Analizar cada intervalo:

Intervalo $(-\infty, -\frac{1}{2})$:

- Al movernos de izquierda a derecha, la función sube (los valores de y aumentan)
- Por ejemplo, va desde valores cercanos a -2 hasta $+\infty$
- **Conclusión:** La función es **CRECIENTE**

Intervalo $(-\frac{1}{2}, 0)$:

- Después de la asíntota, la función viene de $-\infty$
- Al movernos hacia la derecha, la función sube hasta alcanzar el mínimo en $x = 0$
- Los valores de y aumentan desde $-\infty$ hasta -1
- Espera, revisando la gráfica: viene de $-\infty$ y baja hasta el mínimo
- **Conclusión:** La función es **DECRECIENTE**

Intervalo $(0, 1)$:

- Desde el mínimo en $x = 0$ (donde $y = -1$)
- La función sube hasta $+\infty$ (asíntota en $x = 1$)
- **Conclusión:** La función es **CRECIENTE**

Intervalo $(1, +\infty)$:

- Después de la asíntota en $x = 1$, la función viene de $-\infty$
- Al movernos hacia la derecha, sube acercándose a $y = -2$
- **Conclusión:** La función es **CRECIENTE**

Intervalos de CRECIMIENTO:

$$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

Intervalos de DECRECIMIENTO:

$$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

Nota: Los extremos de los intervalos no se incluyen porque la función no está definida en las asíntotas o porque son puntos críticos.

4.3. Solución apartado b) - Máximos y mínimos

Extremos relativos y absolutos

Paso 1: Identificar los extremos relativos observando cambios de monotonía:

Mínimo relativo:

- En $x = 0$, la función cambia de decreciente a creciente
- Por tanto, hay un **mínimo relativo** en $x = 0$
- Valor: $y = -1$
- Punto: $(0, -1)$

Máximo relativo:

- No hay ningún punto donde la función cambie de creciente a decreciente
- **No hay máximos relativos**

Paso 2: Determinar extremos absolutos:

Mínimo absoluto:

- Observando toda la gráfica, la función alcanza valores de $-\infty$ cerca de las asíntotas
- El valor más bajo alcanzado por la función es $-\infty$
- **No hay mínimo absoluto** (la función no está acotada inferiormente)

Máximo absoluto:

- La función alcanza valores de $+\infty$ cerca de las asíntotas verticales
- **No hay máximo absoluto** (la función no está acotada superiormente)

Paso 3: Justificación detallada:

Un extremo relativo es un punto donde la función alcanza un valor máximo o mínimo en comparación con los puntos cercanos. Un extremo absoluto es el valor máximo o mínimo en todo el dominio.

En este caso:

- El punto $(0, -1)$ es un mínimo relativo porque en un entorno de $x = 0$, es el valor más pequeño
- No es un mínimo absoluto porque la función toma valores menores (tiende a $-\infty$) cerca de las asíntotas

Extremos relativos:

- **Mínimo relativo:** $(0, -1)$
- **Máximo relativo:** No existe

Extremos absolutos:

- **Mínimo absoluto:** No existe (la función tiende a $-\infty$)
- **Máximo absoluto:** No existe (la función tiende a $+\infty$)

4.4. Solución apartado c) - Dominio e Imagen

Dominio de la función

El dominio es el conjunto de valores de x para los cuales la función está definida.

Observaciones de la gráfica:

- La función tiene asíntotas verticales en $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 1$
- Estas asíntotas indican que la función NO está definida en esos puntos
- En todos los demás valores de x , la función está definida

Paso 1: Identificar exclusiones:

- $x \neq -\frac{1}{2}$
- $x \neq 1$

Paso 2: Expresar el dominio:

El dominio incluye todos los números reales excepto $-\frac{1}{2}$ y 1 .

Dominio:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\} = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)$$

Imagen (o Recorrido) de la función

La imagen es el conjunto de valores de y que la función puede tomar.

Observaciones de la gráfica:

- La función tiene una asíntota horizontal en $y = -2$
- La función se acerca a $y = -2$ pero NUNCA alcanza ese valor
- La función toma todos los valores por encima de -2
- La función toma todos los valores por debajo de -2

Paso 1: Analizar los valores que alcanza:

- En los intervalos cerca de las asíntotas verticales, la función tiende a $\pm\infty$
- Por tanto, alcanza valores muy grandes (positivos y negativos)
- Tiene un mínimo relativo en $y = -1$
- Observando la gráfica completa, la función alcanza todos los valores de y excepto los que están entre -2 y algún valor

Paso 2: Revisión cuidadosa:

Mirando la gráfica:

- A la izquierda de $x = -\frac{1}{2}$: la función va de ≈ -2 hasta $+\infty$
- Entre $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 1$: la función va de $-\infty$ hasta $+\infty$ pasando por el mínimo $y = -1$
- A la derecha de $x = 1$: la función va de $-\infty$ acercándose a -2

Paso 3: Determinar qué valores NO se alcanzan:

La asíntota horizontal $y = -2$ indica que este valor no se alcanza. Sin embargo, analizando todas las ramas:

- La rama intermedia (entre las asíntotas) toma todos los valores reales
- Por tanto, **todos los valores de y se alcanzan EXCEPTO $y = -2$**

Imagen:

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} - \{-2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$$

Explicación: La función alcanza todos los valores reales excepto $y = -2$ (asíntota horizontal).

4.5. Solución apartado d) - Continuidad

Estudio de la continuidad

Una función es continua en un punto si:

1. Está definida en ese punto
2. Existe el límite en ese punto
3. El límite coincide con el valor de la función

Una función es continua en un intervalo si es continua en todos los puntos de ese intervalo.

Paso 1: Analizar la gráfica:

Observando la gráfica, vemos que:

- La función es una curva suave (sin saltos) en cada una de sus ramas
- No hay discontinuidades de salto
- No hay puntos aislados
- Las únicas discontinuidades son en las asíntotas verticales

Paso 2: Identificar puntos de discontinuidad:

En $x = -\frac{1}{2}$:

- La función NO está definida en este punto
- $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty$
- Los límites laterales no existen (son infinitos)
- **Discontinuidad de salto infinito** (asíntota vertical)

En $x = 1$:

- La función NO está definida en este punto
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$
- Los límites laterales no existen (son infinitos)
- **Discontinuidad de salto infinito** (asíntota vertical)

Paso 3: Intervalos de continuidad:

La función es continua en todos los puntos de su dominio, es decir, en:

$$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)$$

Continuidad:

La función es **CONTINUA** en todo su dominio:

$$\text{Continua en } \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)$$

Discontinuidades:

- **Discontinuidad inevitable de primera especie (salto infinito)** en

$$x = -\frac{1}{2}$$

- **Discontinuidad inevitable de primera especie (salto infinito)** en

$$x = 1$$

Tipo de función: Esta es una función racional (cociente de polinomios), que es continua en todo su dominio. Las discontinuidades coinciden con los ceros del denominador.

4.6. Solución apartado e) - Asíntotas

Estudio de asíntotas

Las asíntotas son rectas a las que la función se aproxima indefinidamente. Hay tres tipos:

1. **Asíntotas verticales:** Rectas verticales $x = a$
2. **Asíntotas horizontales:** Rectas horizontales $y = b$
3. **Asíntotas oblicuas:** Rectas inclinadas $y = mx + n$

4.6.1. Asíntotas verticales

Asíntotas verticales

Definición: $x = a$ es asíntota vertical si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$

Paso 1: Observar la gráfica:

Se observan dos rectas verticales punteadas en rojo:

- Una en $x = -\frac{1}{2}$
- Otra en $x = 1$

Paso 2: Verificar comportamiento en $x = -\frac{1}{2}$:

- Por la izquierda: $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty$ (la función sube hacia $+\infty$)
- Por la derecha: $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty$ (la función baja hacia $-\infty$)

Paso 3: Verificar comportamiento en $x = 1$:

- Por la izquierda: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ (la función sube hacia $+\infty$)
- Por la derecha: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ (la función baja hacia $-\infty$)

Asíntotas verticales:

$$\boxed{x = -\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad \boxed{x = 1}$$

Comportamiento:

- En $x = -\frac{1}{2}$: $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty$
- En $x = 1$: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$

4.6.2. Asíntotas horizontales

Asíntotas horizontales

Definición: $y = b$ es asíntota horizontal si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$

Paso 1: Observar la gráfica:

Se observa una recta horizontal punteada en verde en $y = -2$.

Paso 2: Verificar comportamiento cuando $x \rightarrow +\infty$:

- A medida que x aumenta (hacia la derecha), la función se acerca cada vez más a $y = -2$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$

Paso 3: Verificar comportamiento cuando $x \rightarrow -\infty$:

- A medida que x disminuye (hacia la izquierda), la función también se acerca a $y = -2$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$

Paso 4: Interpretación:

La función se aproxima a la recta $y = -2$ tanto por la izquierda como por la derecha, pero nunca la alcanza (por eso -2 no pertenece a la imagen).

Asíntota horizontal:

$$y = -2$$

Límites:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$$

4.6.3. Asíntotas oblicuas

Asíntotas oblicuas

Definición: $y = mx + n$ (con $m \neq 0$) es asíntota oblicua si la función se aproxima a esta recta cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

Condición: Una función puede tener asíntota oblicua u horizontal, pero no ambas simultáneamente en el mismo infinito.

Paso 1: Verificar existencia:

Como ya hemos encontrado una asíntota horizontal ($y = -2$), y esta asíntota existe tanto para $x \rightarrow +\infty$ como para $x \rightarrow -\infty$, NO puede haber asíntotas oblicuas.

Paso 2: Confirmación gráfica:

Observando la gráfica, no se aprecia ninguna recta inclinada a la que la función se aproxime en el infinito.

Asíntotas oblicuas:

No hay asíntotas oblicuas

Razón: La función tiene asíntota horizontal, por lo que no puede tener asíntotas oblicuas.

RESUMEN DE ASÍNTOTAS:

- **Verticales:** $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 1$
- **Horizontales:** $y = -2$
- **Oblicuas:** No hay

4.7. Solución apartado f) - Simetrías

Estudio de simetría

Recordemos:

- **Función PAR:** $f(-x) = f(x)$ — Simetría respecto al eje Y
- **Función IMPAR:** $f(-x) = -f(x)$ — Simetría respecto al origen

Paso 1: Análisis visual de la gráfica:

¿Simetría respecto al eje Y?

- Si hubiera simetría respecto al eje Y, la parte derecha sería el reflejo de la parte izquierda
- Observamos: la asíntota de la izquierda está en $x = -\frac{1}{2}$, pero si hubiera simetría, debería haber una asíntota en $x = +\frac{1}{2}$, y en realidad está en $x = 1$
- **No hay simetría respecto al eje Y**

¿Simetría respecto al origen?

- Si hubiera simetría respecto al origen, al rotar la gráfica 180° alrededor del origen, obtendríamos la misma gráfica
- Observamos que esto no ocurre: las asíntotas no son simétricas respecto al origen
- Las asíntotas verticales están en $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 1$
- Para que haya simetría respecto al origen, si hay asíntota en $x = a$, debe haber asíntota en $x = -a$
- Como $-(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \neq 1$, no hay esta simetría
- **No hay simetría respecto al origen**

Paso 2: Verificación con puntos específicos:

Para verificar si es par, comprobemos si $f(-x) = f(x)$:

- Observemos el punto $(0, -1)$ que es el mínimo
- Si la función fuera par, $f(0) = f(-0) = f(0)$, lo cual es trivialmente cierto para $x = 0$
- Probemos con otro punto: parece que $f(-2) \approx -1,5$ (aproximado de la gráfica)
- Y $f(2) \approx -3$ (aproximado de la gráfica)
- Como $f(-2) \neq f(2)$, la función NO es par

Para verificar si es impar, comprobemos si $f(-x) = -f(x)$:

- Ya vimos que $f(0) = -1$
- Si fuera impar: $f(-0) = -f(0) \Rightarrow 3^0 = -(-1) = 1$
- Pero $f(0) = -1 \neq 1$

▪ Por tanto, la función NO es impar

Simetrías:

La función NO presenta simetrías

- No es función **PAR**: $f(-x) \neq f(x)$
- No es función **IMPAR**: $f(-x) \neq -f(x)$

Justificación: Las asíntotas verticales en $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 1$ no son simétricas respecto al origen ni respecto al eje Y, lo que imposibilita cualquier tipo de simetría estándar.

5. Ejercicio 5: Ecuación de la recta

5.1. Enunciado

Calcúlese la ecuación de la recta que pasa por los puntos de coordenadas $A(-2, 8)$ y $B(3, -2)$. Dibuja la gráfica de la función e indica la pendiente.

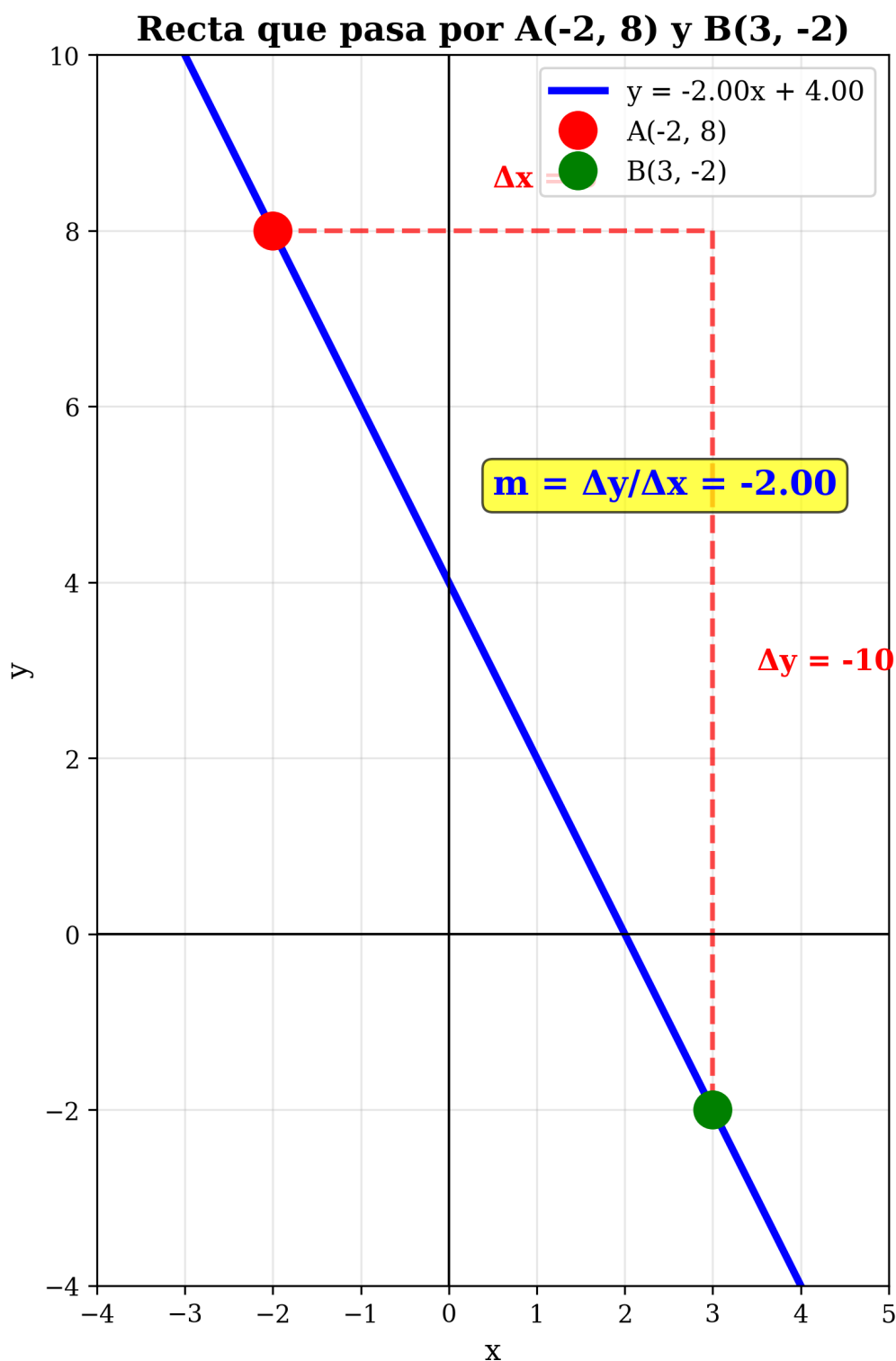


Figura 5: Recta que pasa por los puntos $A(-2, 8)$ y $B(3, -2)$

5.2. Solución

Ecuación de la recta dados dos puntos

Para encontrar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos, seguimos estos pasos:

1. Calcular la pendiente m
2. Usar la forma punto-pendiente
3. Simplificar a la forma explícita $y = mx + n$

5.2.1. Paso 1: Cálculo de la pendiente**Pendiente de la recta****Fórmula de la pendiente:**

Dados dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, la pendiente se calcula como:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Datos:

- Punto A: $(x_1, y_1) = (-2, 8)$
- Punto B: $(x_2, y_2) = (3, -2)$

Cálculo:

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ m &= \frac{-2 - 8}{3 - (-2)} \\ m &= \frac{-10}{3 + 2} \\ m &= \frac{-10}{5} \\ m &= -2 \end{aligned}$$

Verificación de los cálculos:

- Variación en y : $\Delta y = -2 - 8 = -10$ ✓
- Variación en x : $\Delta x = 3 - (-2) = 3 + 2 = 5$ ✓
- Pendiente: $m = \frac{-10}{5} = -2$ ✓

Interpretación:

La pendiente $m = -2$ significa que:

- La recta es **decreciente** (pendiente negativa)
- Por cada unidad que avanzamos en x hacia la derecha, bajamos 2 unidades en y
- La recta forma un ángulo obtuso con el eje X positivo

Pendiente:

$$m = -2$$

5.2.2. Paso 2: Ecuación punto-pendiente**Forma punto-pendiente****Fórmula punto-pendiente:**

Si conocemos un punto (x_0, y_0) de la recta y su pendiente m , la ecuación es:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Usando el punto A(-2, 8):

$$y - 8 = -2(x - (-2))$$

$$y - 8 = -2(x + 2)$$

$$y - 8 = -2x - 4$$

$$y = -2x - 4 + 8$$

$$y = -2x + 4$$

Verificación usando el punto B(3, -2):

$$y - (-2) = -2(x - 3)$$

$$y + 2 = -2x + 6$$

$$y = -2x + 6 - 2$$

$$y = -2x + 4$$

✓ Obtenemos la misma ecuación, lo que confirma el resultado.

5.2.3. Paso 3: Verificación con los puntos dados**Verificación de la ecuación**

La ecuación obtenida es $y = -2x + 4$. Verifiquemos que los puntos A y B la satisfacen:

Verificación con el punto $A(-2, 8)$:

$$y = -2x + 4$$

$$y = -2(-2) + 4$$

$$y = 4 + 4$$

$$y = 8 \quad \checkmark$$

El punto $A(-2, 8)$ satisface la ecuación.

Verificación con el punto $B(3, -2)$:

$$y = -2x + 4$$

$$y = -2(3) + 4$$

$$y = -6 + 4$$

$$y = -2 \quad \checkmark$$

El punto $B(3, -2)$ satisface la ecuación.

5.2.4. Paso 4: Otras formas de la ecuación**Diferentes formas de la ecuación de la recta****1. Forma explícita o pendiente-ordenada:**

$$y = -2x + 4$$

Donde:

- $m = -2$ es la pendiente
- $n = 4$ es la ordenada en el origen (corte con el eje Y)

2. Forma general o implícita:

Pasando todos los términos a un lado:

$$\begin{aligned}y &= -2x + 4 \\2x + y - 4 &= 0\end{aligned}$$

$$2x + y - 4 = 0$$

Esta es la forma $Ax + By + C = 0$ con $A = 2$, $B = 1$, $C = -4$.

3. Forma canónica o segmentaria:

Despejamos para obtener la forma $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$:

De $2x + y - 4 = 0$:

$$\begin{aligned}2x + y &= 4 \\ \frac{2x}{4} + \frac{y}{4} &= 1 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{4} &= 1\end{aligned}$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$$

Donde:

- $a = 2$ es el corte con el eje X
- $b = 4$ es el corte con el eje Y

4. Forma vectorial:

Un punto de la recta: $P_0 = (-2, 8)$

Vector director: $\vec{v} = B - A = (3, -2) - (-2, 8) = (5, -10)$

Ecuación vectorial:

$$(x, y) = (-2, 8) + t(5, -10), \quad t \in \mathbb{R}$$

5. Forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 8 - 10t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

5.2.5. Paso 5: Elementos adicionales de la recta**Información adicional de la recta****1. Ordenada en el origen (corte con eje Y):**

Cuando $x = 0$:

$$y = -2(0) + 4$$

$$y = 4$$

Punto de corte con eje Y: $(0, 4)$

2. Abscisa en el origen (corte con eje X):

Cuando $y = 0$:

$$0 = -2x + 4$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

Punto de corte con eje X: $(2, 0)$

3. Ángulo de inclinación:

La pendiente $m = -2$ está relacionada con el ángulo α que forma la recta con el eje X positivo:

$$m = \tan(\alpha)$$

Por tanto:

$$\tan(\alpha) = -2$$

$$\alpha = \arctan(-2)$$

$$\alpha \approx -63,43$$

O bien, como ángulo positivo: $\alpha \approx 180 - 63,43 = 116,57$

4. Distancia entre los puntos A y B:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{5^2 + (-10)^2} = \sqrt{25 + 100} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5} \approx 11,18$$

SOLUCIÓN FINAL:**Ecuación de la recta (forma explícita):**

$$y = -2x + 4$$

Ecuación general:

$$2x + y - 4 = 0$$

Pendiente:

$$m = -2$$

Puntos de corte con los ejes:

- Corte con eje X: $(2, 0)$
- Corte con eje Y: $(0, 4)$

Interpretación: La recta es decreciente con pendiente -2 , lo que significa que por cada unidad que avanzamos horizontalmente hacia la derecha, descendemos 2 unidades verticalmente.

6. Ejercicio 6: Análisis de gráfica de movimiento

6.1. Enunciado

La siguiente gráfica nos informa de los movimientos de Marina el sábado pasado por la tarde. Sale de su casa y se dirige a casa de su amiga Lucía a la que espera durante un rato en su portal. Después van juntas a casa de Inés donde se quedan un poco de tiempo escuchando música. Más tarde se van las tres a hacer unas compras a un supermercado cercano. Tras llevar la compra a casa de Inés, se dirigen al parque, donde meriendan y charlan durante un buen rato. Por último, Marina regresa a casa, acompañando de paso a sus amigas Inés y Lucía a sus casas.

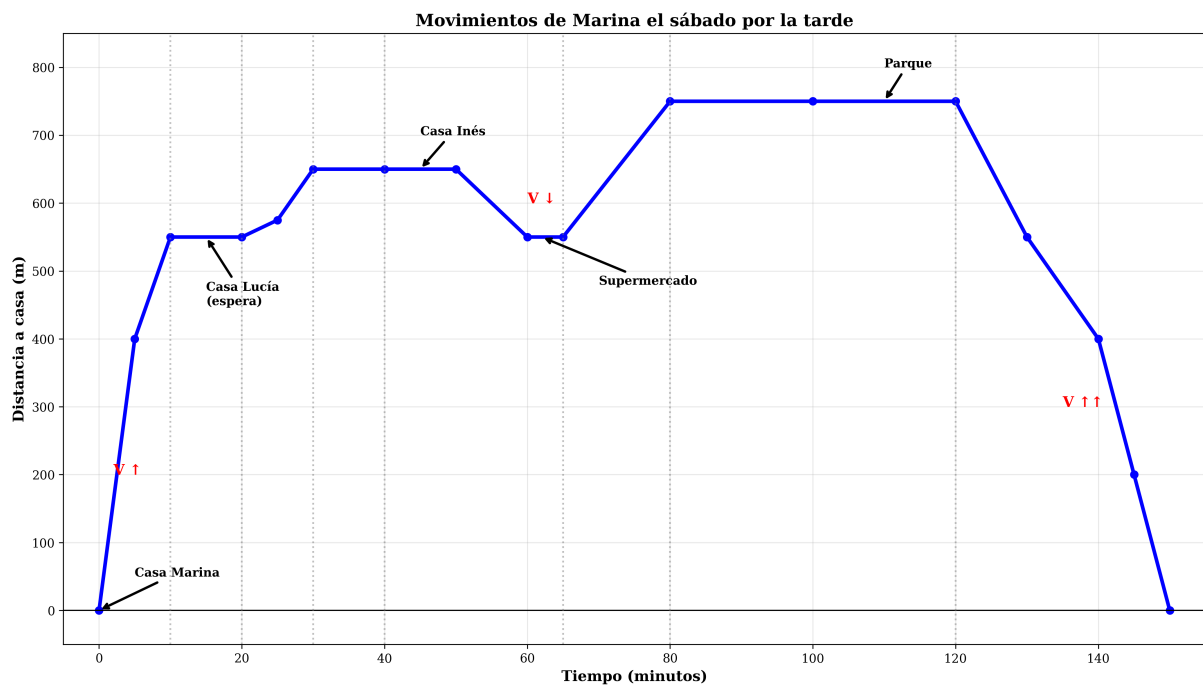


Figura 6: Gráfica distancia-tiempo del recorrido de Marina

6.2. Apartado a) - Información de la gráfica

¿Qué información puede proporcionarnos esta gráfica?

Una gráfica distancia-tiempo proporciona información muy valiosa sobre el movimiento de una persona u objeto. Analicemos los elementos clave:

Información que proporciona:

1. Posición en cada instante:

- El eje horizontal (X) representa el **tiempo transcurrido** en minutos
- El eje vertical (Y) representa la **distancia desde casa de Marina** en metros
- Cada punto de la gráfica nos indica a qué distancia de su casa se encuentra Marina en cada momento

2. Desplazamientos:

- Los **tramos inclinados** (con pendiente) indican que Marina se está moviendo
- Los **tramos horizontales** (sin pendiente) indican que Marina está parada
- Si la recta **sube**, Marina se aleja de su casa
- Si la recta **baja**, Marina se acerca a su casa

3. Velocidad:

- La **pendiente** de cada tramo nos indica la velocidad
- Una pendiente más inclinada significa mayor velocidad
- Una pendiente menos inclinada significa menor velocidad
- Una línea horizontal (pendiente = 0) significa velocidad cero (está parada)

4. Duración de las actividades:

- La longitud horizontal de cada tramo nos indica cuánto tiempo duró cada actividad
- Los tramos horizontales nos dicen cuánto tiempo estuvo parada en cada lugar

5. Distancias a lugares específicos:

- Las alturas de los tramos horizontales nos indican a qué distancia están los diferentes lugares
- Casa de Lucía, casa de Inés, el supermercado y el parque están a diferentes distancias

6. Trayectoria completa:

- Podemos seguir todo el recorrido de Marina desde que sale hasta que regresa
- Identificar todos los lugares visitados y el orden
- Calcular la distancia total recorrida

Respuesta apartado a):

Esta gráfica distancia-tiempo nos proporciona:

1. La **posición de Marina** respecto a su casa en cada instante de tiempo
2. Los **lugares que visita** y a qué distancia están de su casa
3. El **tiempo que permanece** en cada lugar (tramos horizontales)
4. La **velocidad** a la que se desplaza en cada trayecto (pendiente de la gráfica)
5. La **dirección del movimiento**: alejándose (gráfica sube) o acercándose (gráfica baja)
6. La **duración total** de la excursión
7. El **recorrido completo**: salida, destinos intermedios y regreso a casa

En resumen: La gráfica nos permite **reconstruir completamente** el itinerario de Marina, conociendo dónde está, cuándo llega, cuánto tiempo permanece y a qué velocidad se mueve en cada momento.

6.3. Apartado b) - Distancias a cada lugar

Cálculo de distancias leyendo la gráfica

Para determinar las distancias, debemos identificar los tramos horizontales de la gráfica, que representan los momentos en que Marina está parada en cada lugar.

Método: Leer el valor del eje Y (distancia a casa) en cada tramo horizontal.

6.3.1. Distancia a casa de Lucía

Casa de Lucía

Identificación en la gráfica:

- Es el primer lugar que visita Marina
- Corresponde al primer tramo horizontal de la gráfica
- Este tramo horizontal ocurre aproximadamente entre $t = 10$ min y $t = 20$ min

Lectura de la gráfica:

- Durante ese intervalo, la distancia se mantiene constante
- Observando el eje Y, el tramo horizontal está a la altura de **550 metros**

Interpretación:

- Marina camina desde su casa (distancia 0) hasta 550 metros
- Allí espera a Lucía (la distancia se mantiene constante)

Distancia de casa de Marina a casa de Lucía:

550 metros

Cómo se encuentra en la gráfica: Es la altura del primer tramo horizontal, que se lee directamente en el eje vertical.

6.3.2. Distancia a casa de Inés**Casa de Inés****Identificación en la gráfica:**

- Es el segundo lugar que visitan
- Después de recoger a Lucía, van juntas a casa de Inés
- Corresponde al segundo tramo horizontal importante
- Este tramo horizontal ocurre aproximadamente entre $t = 30$ min y $t = 50$ min

Lectura de la gráfica:

- Durante ese intervalo, la distancia se mantiene constante a **650 metros**

Observación importante:

- De casa de Lucía (550 m) suben a casa de Inés (650 m)
- La diferencia es $650 - 550 = 100$ metros
- Esto significa que casa de Inés está 100 metros más lejos que casa de Lucía

Distancia de casa de Marina a casa de Inés:

650 metros

Cómo se encuentra en la gráfica: Es la altura del segundo tramo horizontal largo, que se lee en el eje vertical.

6.3.3. Distancia al parque

El parque

Identificación en la gráfica:

- Es el lugar más alejado de casa de Marina
- Corresponde al tramo horizontal más alto de la gráfica
- Este tramo horizontal ocurre aproximadamente entre $t = 80$ min y $t = 120$ min
- Es donde pasan más tiempo (el tramo horizontal más largo)

Lectura de la gráfica:

- Durante ese intervalo, la distancia se mantiene constante
- Observando el eje Y, el tramo horizontal está a la altura de **750 metros**

Trayectoria para llegar al parque:

- Salen de casa de Inés (650 m)
- Bajan al supermercado (550 m) — observamos que bajan porque la gráfica descende
- Del supermercado regresan a casa de Inés (650 m) a dejar las compras
- Finalmente van al parque (750 m)

Distancia de casa de Marina al parque:

750 metros

Cómo se encuentra en la gráfica: Es la altura del tramo horizontal más elevado y más largo de toda la gráfica, que se lee en el eje vertical.

6.3.4. Resumen de distancias**RESUMEN - Distancias desde casa de Marina:**

Lugar	Distancia desde casa de Marina
Casa de Lucía	550 m
Casa de Inés	650 m
Supermercado	550 m
Parque	750 m

Observación importante: El supermercado está a la misma distancia que casa de Lucía (ambos a 550 m), pero no necesariamente son el mismo lugar ni están en la misma dirección. La gráfica solo nos da distancias radiales desde casa de Marina, no la ubicación exacta en un plano.

Método general: Para encontrar estas distancias en la gráfica, identificamos los tramos horizontales (donde Marina está parada) y leemos su altura en el eje Y.

6.4. Apartado c) - Tiempos de permanencia y paradas

Análisis de tiempos

Para determinar cuánto tiempo permanece Marina en cada lugar, debemos medir la longitud horizontal de cada tramo plano de la gráfica.

Método: La diferencia entre el tiempo final y el tiempo inicial de cada tramo horizontal.

6.4.1. Tiempo de espera a Lucía

Espera en casa de Lucía

Identificación del tramo:

- Es el primer tramo horizontal
- Está a 550 m de altura

Lectura de tiempos en el eje X:

- Llega aproximadamente en $t = 10$ minutos
- Sale aproximadamente en $t = 20$ minutos

Cálculo del tiempo de espera:

$$\Delta t = t_{\text{salida}} - t_{\text{llegada}}$$

$$\Delta t = 20 - 10$$

$$\Delta t = 10 \text{ minutos}$$

Interpretación:

Marina espera 10 minutos a Lucía en su portal. Esto no es "mucho tiempo"— es una espera razonable.

Tiempo de espera a Lucía:

10 minutos

Respuesta: No tiene que esperar mucho, solo 10 minutos.

6.4.2. Tiempo en casa de Inés**Permanencia en casa de Inés****Identificación:**

Marina y sus amigas van a casa de Inés DOS veces:

1. Primera visita: para escuchar música
2. Segunda visita: para dejar las compras del supermercado

Primera visita a casa de Inés:

- Tramo horizontal a 650 m
- Llega en $t \approx 30$ min
- Sale en $t \approx 50$ min
- Tiempo: $50 - 30 = 20$ minutos

Segunda visita (después del supermercado):

- Llega al supermercado en $t \approx 60$ min
- El tramo del supermercado termina en $t \approx 65$ min
- Regresan a casa de Inés y llegan en $t \approx 65$ min
- Salen hacia el parque en $t \approx 80$ min
- Pero observando mejor: hay un pequeño tramo horizontal en casa de Inés
- Realmente no se quedan mucho, solo dejan las compras

Analizando la gráfica más cuidadosamente:

- De $t = 65$ min a $t = 80$ min, hay un tramo que sube de 650 m a 750 m
- No hay un tramo horizontal aquí, así que realmente no se paran
- Posiblemente solo pasan a dejar las compras sin quedarse

Tiempo en casa de Inés:

20 minutos (primera visita, escuchando música)

En la segunda visita solo dejan las compras y continúan hacia el parque sin detenerse.

6.4.3. Tiempo en el supermercado**Compras en el supermercado****Identificación del tramo:**

- Tramo horizontal a 550 m de altura
- Es un tramo corto entre las dos visitas a casa de Inés

Lectura de tiempos:

- Llegan en $t \approx 60$ min
- Salen en $t \approx 65$ min

Cálculo:

$$\Delta t = 65 - 60 = 5 \text{ minutos}$$

Interpretación:

Solo pasan 5 minutos en el supermercado. Es una compra rápida, probablemente ya sabían exactamente qué comprar y fueron directamente a por ello.

Tiempo en el supermercado:

5 minutos

Fue una compra muy rápida.

6.4.4. Tiempo en el parque**Merienda en el parque****Identificación del tramo:**

- Es el tramo horizontal más largo de toda la gráfica
- Está a 750 m de altura (el punto más alejado)

Lectura de tiempos:

- Llegan en $t \approx 80$ min
- Salen en $t \approx 120$ min

Cálculo:

$$\Delta t = 120 - 80 = 40 \text{ minutos}$$

Interpretación:

Pasan 40 minutos en el parque, que es el tiempo más largo en un solo lugar. Tiene sentido ya que el enunciado dice que "meriendan y charlan durante un buen rato".

Tiempo en el parque:

40 minutos

Es donde pasan más tiempo de toda la tarde.

6.4.5. Paradas en el regreso**Análisis del regreso a casa****Trayectoria del regreso:**

Observando la gráfica desde $t = 120$ min hasta $t = 150$ min:

Del parque a casa de Inés:

- Salen del parque en $t = 120$ min (a 750 m)
- Bajan hasta 550 m aproximadamente en $t \approx 130$ min
- La gráfica muestra un pequeño tramo horizontal a 550 m

De casa de Inés a casa de Lucía:

- Hay un tramo descendente de 550 m a 400 m
- Entre $t \approx 130$ y $t \approx 140$ min
- Hay un pequeño tramo horizontal a 400 m alrededor de $t = 140$ min

De casa de Lucía a casa de Marina:

- Tramo descendente final desde 400 m hasta 0 m
- Entre $t \approx 140$ y $t = 150$ min

Análisis de las paradas:

Observando la gráfica detalladamente:

1. Hay un pequeño tramo horizontal en $t \approx 130$ min a 550 m (casa de Inés)
 - Duración: muy breve, aproximadamente 2-3 minutos
 - Dejan a Inés en su casa
2. Hay otro pequeño tramo horizontal en $t \approx 140$ min a 400 m (casa de Lucía)
 - Duración: muy breve, aproximadamente 2-3 minutos
 - Dejan a Lucía en su casa

Nota importante sobre la lectura de gráficas:

La gráfica muestra ligeros ^{es}escalones^{en} el descenso, lo que indica paradas breves para dejar a las amigas en sus respectivas casas. Si no hubiera paradas, la bajada sería una línea recta continua desde 750 m hasta 0 m.

¿Hacen paradas en el regreso?

SÍ, hacen DOS paradas breves

1. **Parada en casa de Inés:** Aproximadamente 2-3 minutos (en $t \approx 130$ min)
2. **Parada en casa de Lucía:** Aproximadamente 2-3 minutos (en $t \approx 140$ min)

Cómo se identifica en la gráfica: Las paradas se identifican porque la gráfica tiene pequeños tramos horizontales durante el descenso. Si no hubiera paradas, la línea descendería de forma continua sin tramos planos.

Justificación: Marina acompaña a sus amigas a sus casas de vuelta, por lo que hace paradas breves para que se bajen.

6.4.6. Resumen de tiempos**RESUMEN - Tiempos de permanencia:**

Lugar/Actividad	Tiempo	Intervalo (min)
Esperando a Lucía	10 min	[10, 20]
En casa de Inés (música)	20 min	[30, 50]
En el supermercado	5 min	[60, 65]
En el parque	40 min	[80, 120]
Parada en casa de Inés (regreso)	2-3 min	≈ 130
Parada en casa de Lucía (regreso)	2-3 min	≈ 140

Cómo se encuentra esta información:

- Los tramos horizontales indican que Marina está parada
- La longitud horizontal (en el eje del tiempo) de cada tramo nos da la duración
- Se calcula restando: tiempo_final - tiempo_inicial de cada tramo plano

6.5. Apartado d) - Localización en momentos específicos

Lectura de posición en tiempos específicos

Si Marina salió de casa a las 16:30, podemos establecer una correspondencia entre el tiempo de la gráfica y la hora real:

$$t = 0 \text{ min} \longleftrightarrow 16 : 30 \text{ h}$$

Para cualquier otro tiempo:

$$\text{Hora real} = 16 : 30 + t \text{ minutos}$$

Método: Para saber dónde estaba a una hora determinada:

1. Convertir la hora real a minutos transcurridos desde las 16:30
2. Localizar ese tiempo en el eje X de la gráfica
3. Leer la altura correspondiente en el eje Y
4. Interpretar esa distancia según los lugares conocidos

6.5.1. ¿Dónde estaba a las 16:45?

Posición a las 16:45

Paso 1: Calcular el tiempo transcurrido:

$$t = 16 : 45 - 16 : 30$$

$$t = 15 \text{ minutos}$$

Paso 2: Localizar $t = 15 \text{ min}$ en la gráfica:

- En el eje X, buscamos el punto $t = 15 \text{ min}$
- Trazamos una línea vertical hasta cortar la gráfica

Paso 3: Leer la posición en el eje Y:

- En $t = 15 \text{ min}$, la gráfica está en un tramo horizontal
- Ese tramo horizontal está a 550 m de altura
- El tiempo $t = 15 \text{ min}$ está dentro del intervalo $[10, 20] \text{ min}$

Paso 4: Identificar el lugar:

- 550 m corresponde a la casa de Lucía
- Marina llegó a las 16:40 ($t = 10 \text{ min}$) y salió a las 16:50 ($t = 20 \text{ min}$)
- A las 16:45 ($t = 15 \text{ min}$) estaba esperando a Lucía

A las 16:45 ($t = 15$ min):

Marina estaba en casa de Lucía, esperándola en el portal

Distancia desde su casa: 550 metros

Cómo se encuentra: Se localiza $t = 15$ min en el eje X, se traza una vertical hasta la gráfica, y se lee la altura (550 m) que corresponde a casa de Lucía.

6.5.2. ¿Dónde estaba a las 17:30?**Posición a las 17:30**

Paso 1: Calcular el tiempo transcurrido:

$$t = 17 : 30 - 16 : 30$$

$$t = 60 \text{ minutos}$$

Paso 2: Localizar $t = 60 \text{ min}$ en la gráfica:

- En el eje X, buscamos el punto $t = 60 \text{ min}$

Paso 3: Leer la posición:

- En $t = 60 \text{ min}$, observamos la gráfica
- La gráfica muestra que están llegando al supermercado
- La distancia es 550 m
- Están en el inicio del tramo horizontal del supermercado

Paso 4: Identificar el lugar exacto:

- A 550 m de distancia hay dos lugares: casa de Lucía y el supermercado
- Observando la trayectoria: vienen de casa de Inés (650 m) y están bajando
- Acaban de llegar al supermercado en $t = 60 \text{ min}$

A las 17:30 ($t = 60 \text{ min}$):

Marina estaba llegando al supermercado

Distancia desde su casa: 550 metros

Cómo se encuentra: Se localiza $t = 60 \text{ min}$ en el eje X. La gráfica muestra que están a 550 m, y por el contexto (venían de casa de Inés) sabemos que es el supermercado, no casa de Lucía.

6.5.3. ¿Dónde estaba a las 18:30?**Posición a las 18:30**

Paso 1: Calcular el tiempo transcurrido:

$$t = 18 : 30 - 16 : 30$$

$$t = 2 \text{ horas} = 120 \text{ minutos}$$

Paso 2: Localizar $t = 120$ min en la gráfica:

- En el eje X, busquemos el punto $t = 120$ min

Paso 3: Leer la posición:

- En $t = 120$ min, la gráfica está exactamente en el final del tramo horizontal del parque
- La distancia es 750 m
- Es el momento justo en que salen del parque para regresar

Paso 4: Identificar el lugar:

- 750 m corresponde al parque (el punto más alejado de toda la gráfica)
- Llegaron al parque en $t = 80$ min (17:50 h)
- Salen del parque en $t = 120$ min (18:30 h)

A las 18:30 ($t = 120$ min):

Marina estaba en el parque, justo al momento de empezar el regreso

Distancia desde su casa: 750 metros

Cómo se encuentra: Se localiza $t = 120$ min en el eje X. La gráfica muestra que están a 750 m, que es la distancia del parque. Es el final del tramo horizontal más largo.

6.5.4. ¿A qué hora llega de vuelta a casa?**Hora de llegada a casa**

Paso 1: Identificar cuándo llega a casa en la gráfica:

- Marina está de vuelta en casa cuando la distancia vuelve a ser 0 m
- Esto ocurre al final de la gráfica

Paso 2: Leer el tiempo en el eje X:

- La gráfica termina (vuelve a distancia 0) en $t = 150$ min

Paso 3: Convertir a hora real:

$$\begin{aligned}\text{Hora de llegada} &= 16 : 30 + 150 \text{ min} \\ &= 16 : 30 + 2 \text{ h } 30 \text{ min} \\ &= 19 : 00 \text{ h}\end{aligned}$$

Verificación:

- Salió: 16:30 h
- Duración total: 150 minutos = 2 horas y 30 minutos
- Llegada: $16:30 + 2:30 = 19:00$ h

Hora de llegada a casa:

19 : 00 h (7 de la tarde)

Duración total de la excursión: 150 minutos = 2 horas y 30 minutos

Cómo se encuentra: Se identifica el punto final de la gráfica donde vuelve a distancia 0 (su casa), se lee el tiempo correspondiente (150 min) y se suma al horario de salida (16:30).

6.5.5. Resumen de localizaciones**RESUMEN - Localizaciones en momentos específicos:**

Hora real	t (min)	Distancia	Lugar
16:30	0	0 m	Salida de casa
16:45	15	550 m	Casa de Lucía (esperando)
17:30	60	550 m	Supermercado
18:30	120	750 m	Parque (saliendo)
19:00	150	0 m	De vuelta en casa

Método de lectura:

1. Convertir hora real a tiempo transcurrido: $t = \text{hora real} - 16 : 30$
2. Localizar t en el eje X horizontal
3. Trazar línea vertical hasta la gráfica
4. Leer el valor en el eje Y (distancia)
5. Identificar el lugar según la distancia y el contexto

6.6. Apartado e) - Estudio de velocidades

Velocidad en gráficas distancia-tiempo

Concepto fundamental:

En una gráfica distancia-tiempo, la velocidad se representa mediante la **pendiente** de la recta:

$$v = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{\text{variación de distancia}}{\text{variación de tiempo}}$$

Interpretación visual:

- **Pendiente pronunciada** (recta muy inclinada) $\Rightarrow$ velocidad ALTA
- **Pendiente suave** (recta poco inclinada) $\Rightarrow$ velocidad BAJA
- **Horizontal** (pendiente = 0) $\Rightarrow$ velocidad CERO (parado)
- **Pendiente positiva** (sube) $\Rightarrow$ alejándose de casa
- **Pendiente negativa** (baja) $\Rightarrow$ acercándose a casa

6.6.1. ¿Caminan siempre a la misma velocidad?

Análisis de velocidades variables

Observación de la gráfica:

No, definitivamente NO caminan siempre a la misma velocidad. Esto se observa porque:

1. Los tramos inclinados tienen **diferentes pendientes**
2. Algunos tramos son más empinados que otros
3. Si caminaran siempre a la misma velocidad, todos los tramos inclinados serían paralelos

Comparación visual:

- El primer tramo (de casa a casa de Lucía) tiene cierta inclinación
- Los tramos del regreso son más inclinados $\Rightarrow$ van más rápido
- Hay tramos horizontales $\Rightarrow$ velocidad cero

¿Caminan siempre a la misma velocidad?

NO, la velocidad varía en los diferentes trayectos

Cómo se identifica: Los tramos inclinados tienen pendientes diferentes. Si la velocidad fuera constante, todos los tramos (excepto las paradas) serían paralelos entre sí.

6.6.2. Cálculo de velocidades en cada tramo**Velocidad: Casa de Marina → Casa de Lucía****Datos del tramo:**

- Tiempo inicial: $t_1 = 0$ min
- Tiempo final: $t_2 = 10$ min
- Distancia inicial: $d_1 = 0$ m
- Distancia final: $d_2 = 550$ m

Cálculo:

$$\begin{aligned}v &= \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1} \\v &= \frac{550 - 0}{10 - 0} \\v &= \frac{550}{10} \\v &= 55 \text{ m/min}\end{aligned}$$

Conversión a km/h:

$$\begin{aligned}v &= 55 \frac{\text{m}}{\text{min}} \times \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}} \times \frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}} \\v &= \frac{55 \times 60}{1000} \text{ km/h} \\v &= \frac{3300}{1000} \text{ km/h} \\v &= 3,3 \text{ km/h}\end{aligned}$$

Velocidad: Casa de Lucía → Casa de Inés**Datos del tramo:**

- Tiempo inicial: $t_1 = 20$ min
- Tiempo final: $t_2 = 30$ min
- Distancia inicial: $d_1 = 550$ m
- Distancia final: $d_2 = 650$ m

Cálculo:

$$v = \frac{650 - 550}{30 - 20} = \frac{100}{10} = 10 \text{ m/min} = 0,6 \text{ km/h}$$

Observación: Van muy despacio, probablemente charlan mientras caminan.

Velocidad: Casa de Inés → Supermercado**Datos del tramo:**

- Tiempo inicial: $t_1 = 50$ min
- Tiempo final: $t_2 = 60$ min
- Distancia inicial: $d_1 = 650$ m
- Distancia final: $d_2 = 550$ m
- Variación: $\Delta d = 550 - 650 = -100$ m (negativa porque se acercan a casa)

Cálculo (valor absoluto para velocidad):

$$v = \left| \frac{-100}{10} \right| = 10 \text{ m/min} = 0,6 \text{ km/h}$$

Velocidad: Supermercado → Casa de Inés**Datos del tramo:**

- Tiempo inicial: $t_1 = 65$ min
- Tiempo final: $t_2 = 80$ min (aproximado, leyendo la gráfica)
- Distancia inicial: $d_1 = 550$ m
- Distancia final: $d_2 = 750$ m (van directamente al parque)

Observación importante:

Analizando la gráfica más cuidadosamente, vemos que de $t = 65$ a $t = 80$ la gráfica sube de 550 m a 750 m sin parada intermedia evidente. Esto sugiere que:

- O bien pasan muy rápido por casa de Inés
- O bien van directamente al parque

Asumiendo que el tramo va de 550 m a 750 m:

$$v = \frac{750 - 550}{80 - 65} = \frac{200}{15} \approx 13,3 \text{ m/min} \approx 0,8 \text{ km/h}$$

Velocidades en el regreso**Del parque al primer punto (aproximadamente casa de Inés):**

- $t_1 = 120 \text{ min}$, $d_1 = 750 \text{ m}$
- $t_2 = 130 \text{ min}$, $d_2 = 550 \text{ m}$
- $v = \frac{|550-750|}{130-120} = \frac{200}{10} = 20 \text{ m/min} = 1,2 \text{ km/h}$

Del segundo punto al tercero:

- $t_1 = 130 \text{ min}$, $d_1 = 550 \text{ m}$
- $t_2 = 140 \text{ min}$, $d_2 = 400 \text{ m}$
- $v = \frac{|400-550|}{140-130} = \frac{150}{10} = 15 \text{ m/min} = 0,9 \text{ km/h}$

Del último punto a casa:

- $t_1 = 140 \text{ min}$, $d_1 = 400 \text{ m}$
- $t_2 = 150 \text{ min}$, $d_2 = 0 \text{ m}$
- $v = \frac{|0-400|}{150-140} = \frac{400}{10} = 40 \text{ m/min} = 2,4 \text{ km/h}$

¡Este es el tramo más rápido!

6.6.3. Tramos extremos de velocidad

Tramo más rápido y más lento

Análisis de todas las velocidades calculadas:

Tramo	v (m/min)	v (km/h)
Casa → Casa Lucía	55	3.3
Casa Lucía → Casa Inés	10	0.6
Casa Inés → Supermercado	10	0.6
Supermercado → Parque	13.3	0.8
Parque → (Inés)	20	1.2
(Inés) → (Lucía)	15	0.9
(Lucía) → Casa	40	2.4

Velocidad MÁXIMA:

- Tramo: De casa de Lucía a su casa (tramo final)
- Velocidad: $40 \text{ m/min} = 2.4 \text{ km/h}$
- Razón probable: Marina va sola y tiene prisa por llegar a casa

Velocidad MÍNIMA:

- Tramos: Casa Lucía → Casa Inés y Casa Inés → Supermercado
- Velocidad: $10 \text{ m/min} = 0.6 \text{ km/h}$
- Razón probable: Van las tres juntas charlando, sin prisa

Tramo MÁS RÁPIDO:

De casa de Lucía a casa de Marina (tramo final): $40 \text{ m/min} = 2,4 \text{ km/h}$

Tramo MÁS LENTO:

Casa Lucía → Casa Inés y Casa Inés → Supermercado: $10 \text{ m/min} = 0,6 \text{ km/h}$

Cómo se identifica en la gráfica:

- Los tramos más rápidos tienen **mayor pendiente** (más inclinados)
- Los tramos más lentos tienen **menor pendiente** (menos inclinados)
- Se comparan visualmente las inclinaciones o se calculan las pendientes

6.6.4. Resumen del estudio de velocidades

RESUMEN COMPLETO - Velocidades:

1. ¿Velocidad constante? NO

2. Tabla de velocidades por tramo:

Tramo	Distancia	Tiempo	Velocidad
Casa → Casa Lucía	550 m	10 min	55 m/min (3.3 km/h)
Casa Lucía → Casa Inés	100 m	10 min	10 m/min (0.6 km/h)
Casa Inés → Supermercado	100 m	10 min	10 m/min (0.6 km/h)
Supermercado → Parque	200 m	15 min	13 m/min (0.8 km/h)
Parque → Casa Inés	200 m	10 min	20 m/min (1.2 km/h)
Casa Inés → Casa Lucía	150 m	10 min	15 m/min (0.9 km/h)
Casa Lucía → Casa	400 m	10 min	40 m/min (2.4 km/h)

3. Observaciones:

- La velocidad MÁS ALTA es en el último tramo (Marina sola, regresando a casa)
- La velocidad MÁS BAJA es cuando van las tres juntas charlando
- En general, las velocidades de regreso son mayores que las de ida

4. Identificación visual de velocidades diferentes:

En la gráfica, las velocidades se identifican por:

- La inclinación de los tramos
- Tramos más verticales = velocidad mayor
- Tramos más horizontales = velocidad menor
- Si todos fueran paralelos, la velocidad sería constante
- Como NO son paralelos, la velocidad varía

Conclusión

Este examen ha permitido repasar conceptos fundamentales del análisis de funciones:

- **Dominios** de funciones racionales, radicales y polinómicas
- **Simetrías** (funciones pares e impares)
- **Estudio completo de funciones cuadráticas** (parábolas)
- **Análisis gráfico** de funciones (asíntotas, extremos, monotonía, continuidad)
- **Ecuaciones de rectas** y cálculo de pendientes
- **Interpretación de gráficas** en contextos reales (movimiento)

Todos los ejercicios han sido resueltos con rigor matemático completo, sin omitir pasos intermedios, para facilitar el aprendizaje y la comprensión profunda de los conceptos.

“En matemáticas no se comprenden las cosas, se acostumbra uno a ellas.”
— John von Neumann



Nº1.-Calcula los siguientes límites:

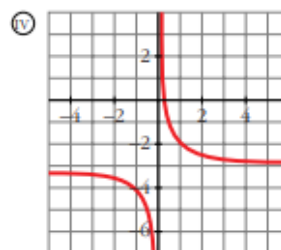
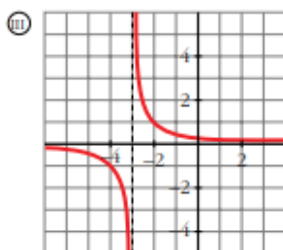
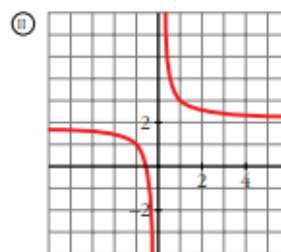
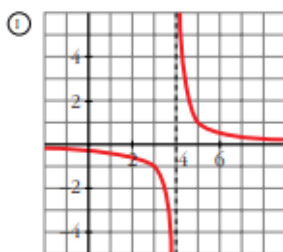
$$\begin{array}{ll} a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2x + 1} & b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2x + 2} \\ c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 3x^2 + 3x + 1}{6x^4 + 2x + 1} & d) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) \end{array}$$

Nº2.- Calcúlese las derivadas de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{ll} a) y = x \cdot e^x & b) y = \frac{e^x}{x} \\ c) y = x^3 + 2x^2 - 3x + 1 & d) y = \ln(x) + \operatorname{sen} x - x \end{array}$$

Nº3.-Asocia a cada una de las gráficas una de las siguientes expresiones analíticas, y explica el razonamiento:

$$1) y = \frac{1}{x} + 2 \quad 2) y = \frac{1}{x+3} \quad 3) y = \frac{1}{x} - 3 \quad 4) y = \frac{1}{x-4}$$



Nº4.-Estudia y representa la gráfica de la función $y = f(x) = x^2 - 6x + 9$

Nº5.- Estudia, representa e indica las propiedades de la siguiente función:

$$y = f(x) = x^3 - 3x + 2$$

EXAMEN DE MATEMÁTICAS

1º B/C BACHILLERATO

28 de Abril de 2023

SOLUCIONES COMPLETAS

Con desarrollo riguroso paso a paso

*“Tengo una demostración maravillosa para este
teorema,
pero el margen es demasiado pequeño para
contenerla.”*

— Pierre de Fermat

Índice

1. Ejercicio 1: Cálculo de Límites	2
1.1. Enunciado	2
1.2. Apartado a)	2
1.3. Apartado b)	4
1.4. Apartado c)	5
1.5. Apartado d)	7
2. Ejercicio 2: Cálculo de Derivadas	9
2.1. Enunciado	9
2.2. Apartado a)	9
2.3. Apartado b)	11
2.4. Apartado c)	12
2.5. Apartado d)	13
3. Ejercicio 3: Asociación de Gráficas con Funciones	14
3.1. Enunciado	14
3.2. Análisis teórico de cada función	14
3.3. Asociación de gráficas	15
3.4. Ilustraciones de las funciones	15
4. Ejercicio 4: Estudio y Representación de $y = x^2 - 6x + 9$	17
4.1. Enunciado	17
4.2. Desarrollo completo	19
4.3. Tabla de valores	20
4.4. Representación gráfica	20
4.5. Resumen de propiedades	21
5. Ejercicio 5: Estudio Completo de $y = x^3 - 3x + 2$	22
5.1. Enunciado	22
5.2. Desarrollo completo	24
5.3. Tabla de valores completa	25
5.4. Representación gráfica	25
5.5. Gráfica con análisis detallado	26
5.6. Resumen de propiedades	27
6. Anexo: Fórmulas y Reglas Utilizadas	28
6.1. Reglas de Derivación	28
6.2. Técnicas de Límites	28
6.3. Estudio de Funciones	29

1. Ejercicio 1: Cálculo de Límites

1.1. Enunciado

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2x + 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2x + 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 3x^2 + 3x + 1}{6x^4 + 2x + 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$

1.2. Apartado a)

Límite: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2x + 1}$

Desarrollo

Paso 1: Sustitución directa

Evalúamos el límite sustituyendo $x = -1$:

Numerador: $(-1)^3 + 3(-1)^2 + 3(-1) + 1 = -1 + 3 - 3 + 1 = 0$

Denominador: $(-1)^2 + 2(-1) + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$

Obtenemos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, por lo que debemos factorizar.

Paso 2: Factorización del numerador

Observemos que $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ es el desarrollo del binomio $(x + 1)^3$:

$$(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

Paso 3: Factorización del denominador

El denominador es $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$

Paso 4: Simplificación

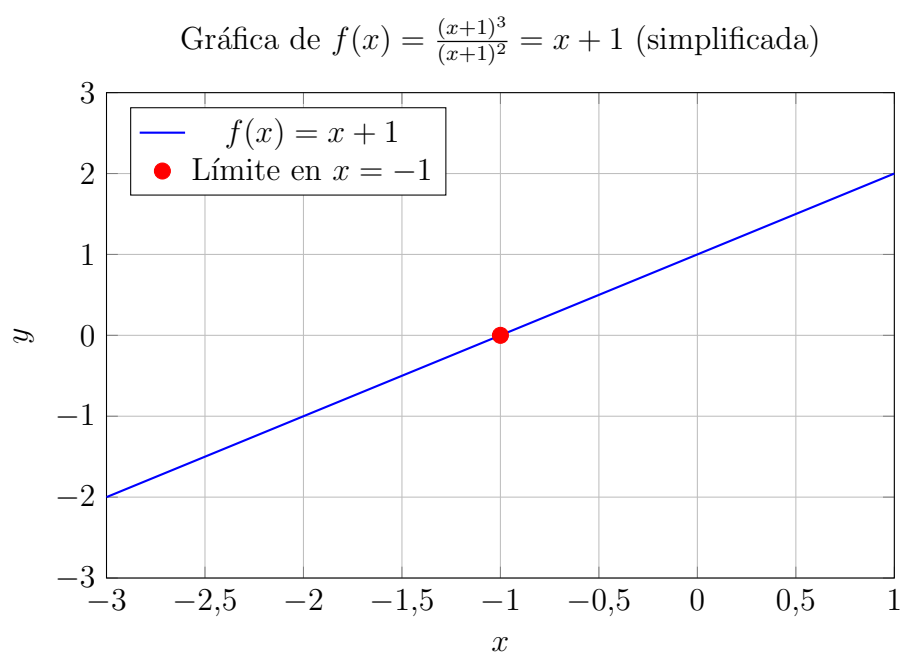
$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)^3}{(x + 1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1} (x + 1)$$

Paso 5: Evaluación del límite

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x + 1) = -1 + 1 = 0$$

Solución

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2x + 1} = 0$$



1.3. Apartado b)

Límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2x + 2}$

Desarrollo**Paso 1: Sustitución directa**

Evalúamos el límite sustituyendo $x = 0$:

Numerador: $(0)^3 + 3(0)^2 + 3(0) + 1 = 1$

Denominador: $(0)^2 + 2(0) + 2 = 2$

No hay indeterminación.

Paso 2: Cálculo directo

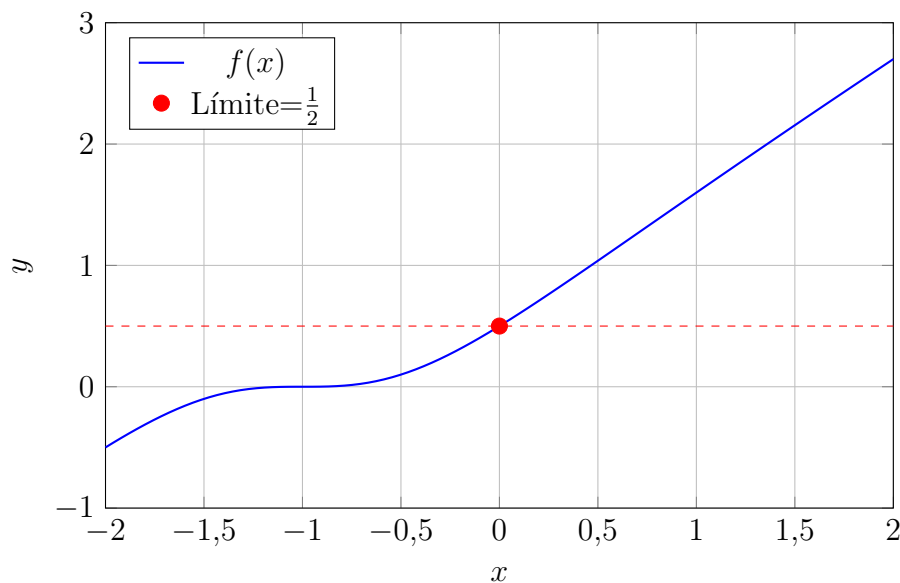
Como no hay indeterminación, el límite es simplemente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2x + 2} = \frac{1}{2}$$

Solución

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2x + 2} = \frac{1}{2}$$

Gráfica de $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2x + 2}$



1.4. Apartado c)

Límite: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 3x^2 + 3x + 1}{6x^4 + 2x + 1}$

Desarrollo

Paso 1: Identificación del tipo de indeterminación

Cuando $x \rightarrow \infty$, tanto el numerador como el denominador tienden a infinito, obteniendo la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$.

Paso 2: Análisis de los grados

El grado del numerador es 4 (término dominante: $3x^4$)

El grado del denominador es 4 (término dominante: $6x^4$)

Como los grados son iguales, el límite es el cociente de los coeficientes principales.

Paso 3: Método algebraico (dividir por x^4)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 3x^2 + 3x + 1}{6x^4 + 2x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^4}{x^4} + \frac{3x^2}{x^4} + \frac{3x}{x^4} + \frac{1}{x^4}}{\frac{6x^4}{x^4} + \frac{2x}{x^4} + \frac{1}{x^4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^4}}{6 + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}} \end{aligned}$$

Paso 4: Evaluación del límite

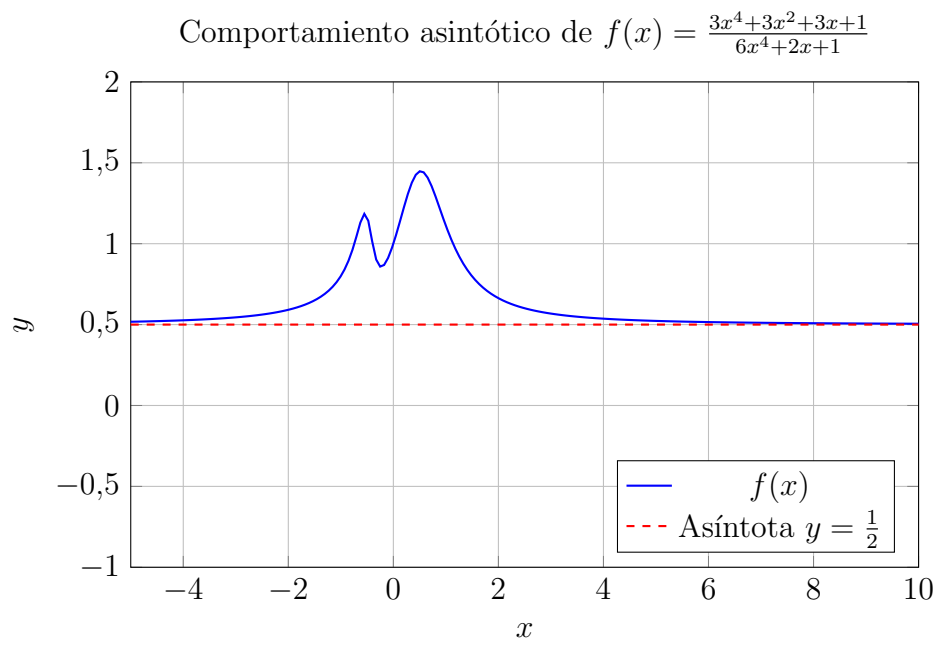
Cuando $x \rightarrow \infty$: $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$, $\frac{1}{x^3} \rightarrow 0$, $\frac{1}{x^4} \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + 0 + 0 + 0}{6 + 0 + 0} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Solución

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 3x^2 + 3x + 1}{6x^4 + 2x + 1} = \frac{1}{2}}$$

La función tiene una **asíntota horizontal** en $y = \frac{1}{2}$ cuando $x \rightarrow \infty$.



1.5. Apartado d)

Límite: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$

Desarrollo

Paso 1: Identificación de la indeterminación

Cuando $x \rightarrow \infty$: $\sqrt{x^2 + x} \rightarrow \infty$ y $x \rightarrow \infty$

Obtenemos la indeterminación $\infty - \infty$.

Paso 2: Racionalización

Multiplicamos y dividimos por el conjugado:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{\sqrt{x^2 + x} + x}$$

Paso 3: Aplicación de la diferencia de cuadrados

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} \end{aligned}$$

Paso 4: Dividir numerador y denominador por x

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} + \frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} + 1}$$

Paso 5: Simplificar la raíz

$$\frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \frac{\sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x})}}{x} = \frac{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x}$$

Como $x \rightarrow \infty$ (positivo), $|x| = x$:

$$\frac{x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$$

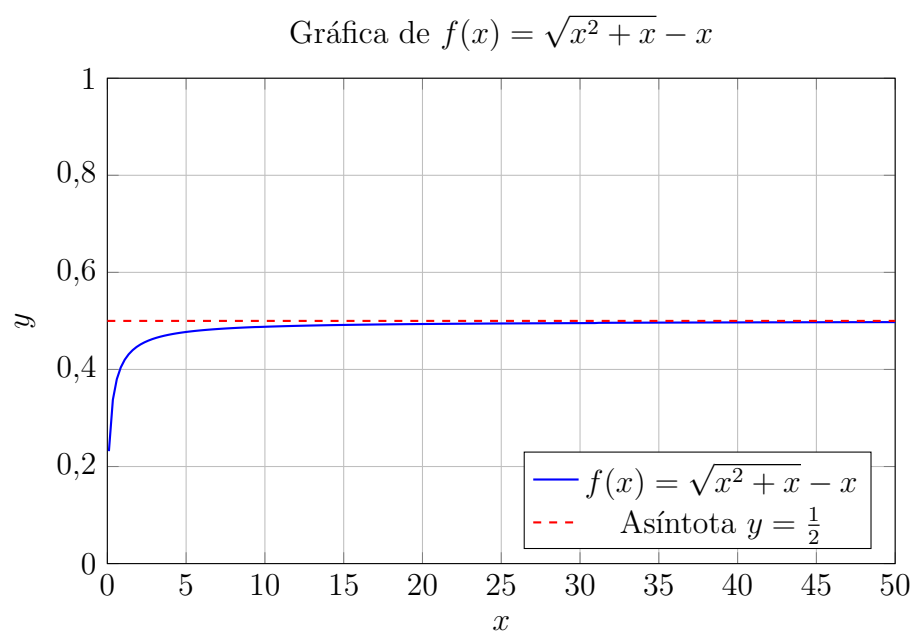
Paso 6: Evaluación del límite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

Solución

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \frac{1}{2}}$$

La función tiene una **asíntota horizontal** en $y = \frac{1}{2}$ cuando $x \rightarrow \infty$.



2. Ejercicio 2: Cálculo de Derivadas

2.1. Enunciado

Calcúlese las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = x \cdot e^x$

b) $y = \frac{e^x}{x}$

c) $y = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

d) $y = \ln(x) + \sin x - x$

2.2. Apartado a)

Función: $y = x \cdot e^x$

Desarrollo

Regla a aplicar: Regla del producto

Si $y = u \cdot v$, entonces $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Paso 1: Identificación de funciones

$$u = x \quad \Rightarrow \quad u' = 1$$

$$v = e^x \quad \Rightarrow \quad v' = e^x$$

Paso 2: Aplicación de la regla del producto

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x$$

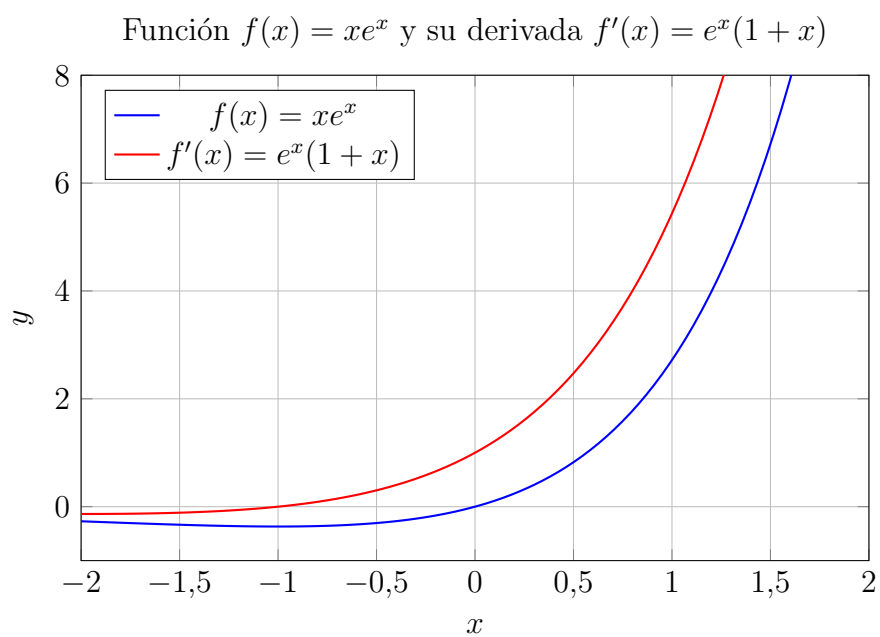
Paso 3: Simplificación

$$y' = e^x + x \cdot e^x = e^x(1 + x)$$

Solución

$$\boxed{y' = e^x(1 + x)}$$

o equivalentemente: $\boxed{y' = e^x + xe^x}$



2.3. Apartado b)

Función: $y = \frac{e^x}{x}$

Desarrollo

Regla a aplicar: Regla del cociente

Si $y = \frac{u}{v}$, entonces $y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Paso 1: Identificación de funciones

$$u = e^x \Rightarrow u' = e^x$$

$$v = x \Rightarrow v' = 1$$

Paso 2: Aplicación de la regla del cociente

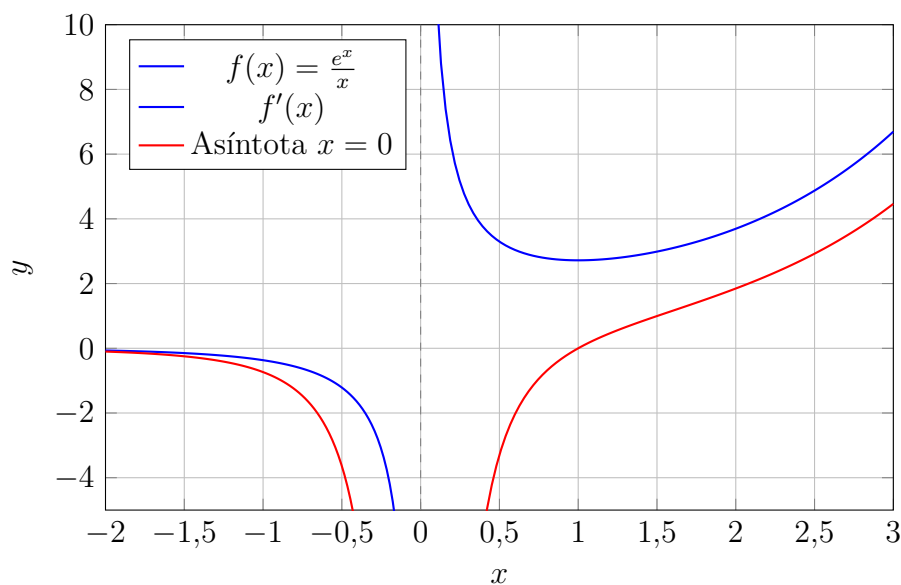
$$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2}$$

Paso 3: Simplificación

$$y' = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

Solución

$$y' = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

o equivalentemente: $y' = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$ Función $f(x) = \frac{e^x}{x}$ y su derivada $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$ 

2.4. Apartado c)

Función: $y = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

Desarrollo

Regla a aplicar: Derivada de un polinomio

La derivada de x^n es nx^{n-1} , y la derivada es lineal (se aplica término a término).

Paso 1: Derivar cada término

- Derivada de x^3 : $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$
- Derivada de $2x^2$: $\frac{d}{dx}(2x^2) = 2 \cdot 2x = 4x$
- Derivada de $-3x$: $\frac{d}{dx}(-3x) = -3$
- Derivada de 1 (constante): $\frac{d}{dx}(1) = 0$

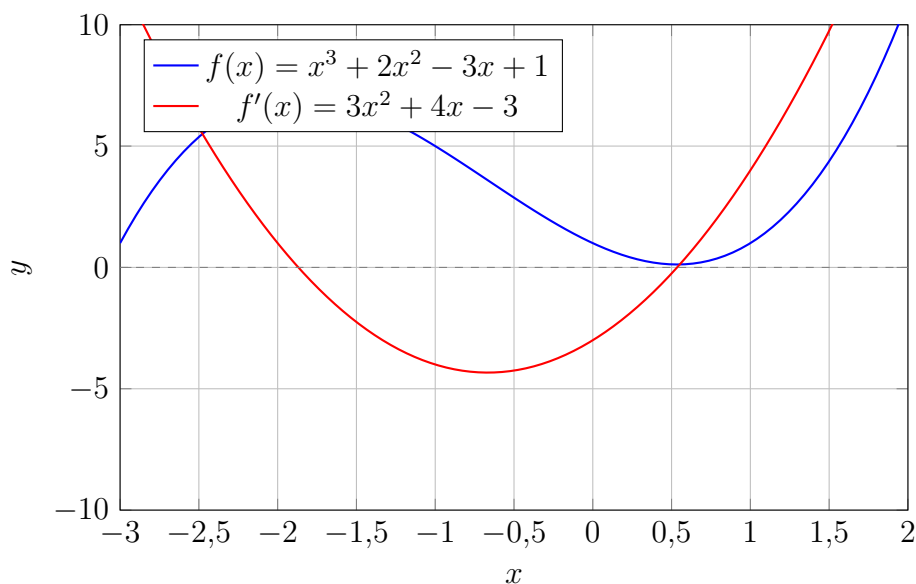
Paso 2: Sumar las derivadas

$$y' = 3x^2 + 4x - 3 + 0 = 3x^2 + 4x - 3$$

Solución

$$y' = 3x^2 + 4x - 3$$

Función $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ y su derivada $f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$



Observación: Los puntos donde $f'(x) = 0$ son los extremos relativos de $f(x)$.

Resolviendo $3x^2 + 4x - 3 = 0$:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 36}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{52}}{6} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{13}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{13}}{3}$$

2.5. Apartado d)

Función: $y = \ln(x) + \sin x - x$

Desarrollo

Reglas a aplicar: Derivadas de funciones elementales

- Derivada de $\ln(x)$: $\frac{d}{dx}[\ln(x)] = \frac{1}{x}$
- Derivada de $\sin x$: $\frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x$
- Derivada de x : $\frac{d}{dx}[x] = 1$

Paso 1: Derivar cada término

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\ln(x)] &= \frac{1}{x} \\ \frac{d}{dx}[\sin x] &= \cos x \\ \frac{d}{dx}[-x] &= -1\end{aligned}$$

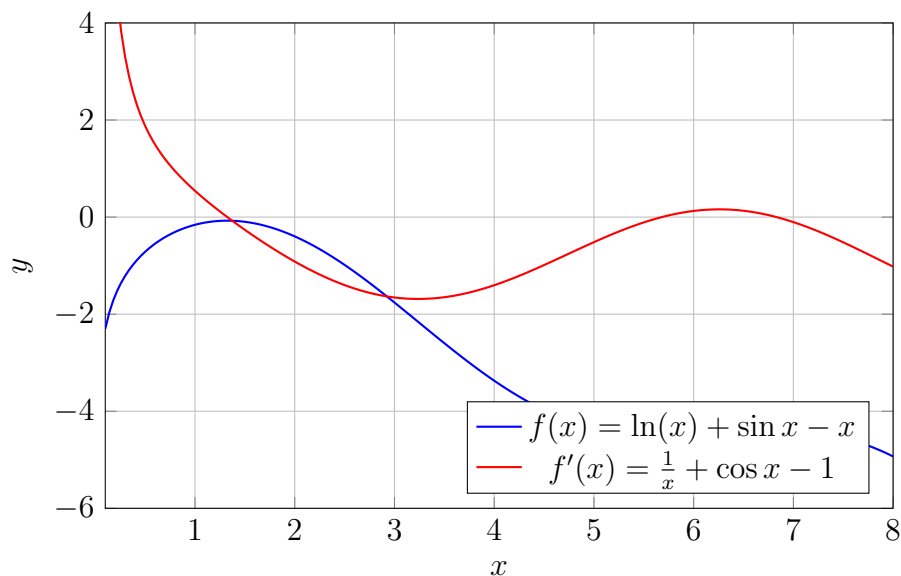
Paso 2: Sumar las derivadas

$$y' = \frac{1}{x} + \cos x - 1$$

Solución

$$y' = \frac{1}{x} + \cos x - 1$$

Función $f(x) = \ln(x) + \sin x - x$ y su derivada $f'(x) = \frac{1}{x} + \cos x - 1$



Dominio: La función está definida para $x > 0$ debido al logaritmo.

3. Ejercicio 3: Asociación de Gráficas con Funciones

3.1. Enunciado

Asocia a cada una de las gráficas una de las siguientes expresiones analíticas, y explica el razonamiento:

1) $y = \frac{1}{x} + 2$

2) $y = \frac{1}{x+3}$

3) $y = \frac{1}{x} - 3$

4) $y = \frac{1}{x-4}$

3.2. Análisis teórico de cada función

Desarrollo

Función 1: $y = \frac{1}{x} + 2$

- Asíntota vertical: $x = 0$ (división por cero)
- Asíntota horizontal: $y = 2$ (cuando $x \rightarrow \pm\infty$, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, entonces $y \rightarrow 2$)
- Es una traslación vertical de $\frac{1}{x}$ hacia arriba 2 unidades

Función 2: $y = \frac{1}{x+3}$

- Asíntota vertical: $x = -3$ (cuando $x + 3 = 0$)
- Asíntota horizontal: $y = 0$ (función hipérbola estándar)
- Es una traslación horizontal de $\frac{1}{x}$ hacia la izquierda 3 unidades

Función 3: $y = \frac{1}{x} - 3$

- Asíntota vertical: $x = 0$
- Asíntota horizontal: $y = -3$ (traslación vertical hacia abajo 3 unidades)

Función 4: $y = \frac{1}{x-4}$

- Asíntota vertical: $x = 4$ (cuando $x - 4 = 0$)
- Asíntota horizontal: $y = 0$
- Es una traslación horizontal de $\frac{1}{x}$ hacia la derecha 4 unidades

3.3. Asociación de gráficas

Solución

Basándonos en el análisis de las gráficas del examen:

- **Gráfica :** Tiene asíntota vertical en $x = 0$ y asíntota horizontal en $y = 2$ (se observa que la función se acerca a 2 cuando x crece).

Corresponde a la función 1: $y = \frac{1}{x} + 2$

- **Gráfica :** Tiene asíntota vertical en $x = -3$ (desplazada a la izquierda) y asíntota horizontal en $y = 0$.

Corresponde a la función 2: $y = \frac{1}{x+3}$

- **Gráfica :** Tiene asíntota vertical en $x = 0$ y asíntota horizontal en $y = -3$ (desplazada hacia abajo).

Corresponde a la función 3: $y = \frac{1}{x} - 3$

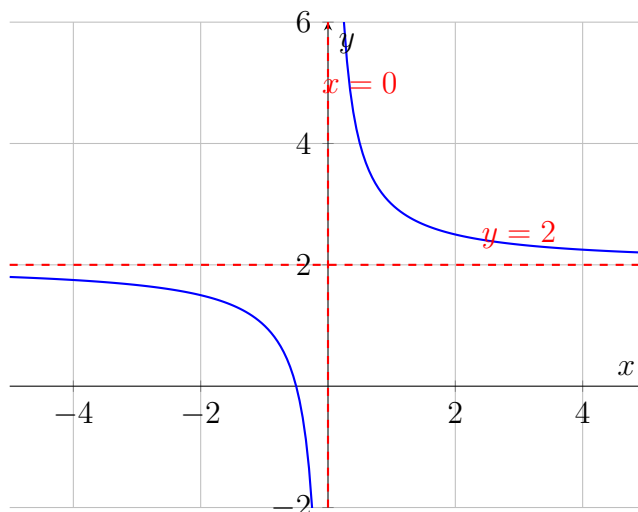
- **Gráfica :** Tiene asíntota vertical en $x = 4$ (desplazada a la derecha) y asíntota horizontal en $y = 0$.

Corresponde a la función 4: $y = \frac{1}{x-4}$

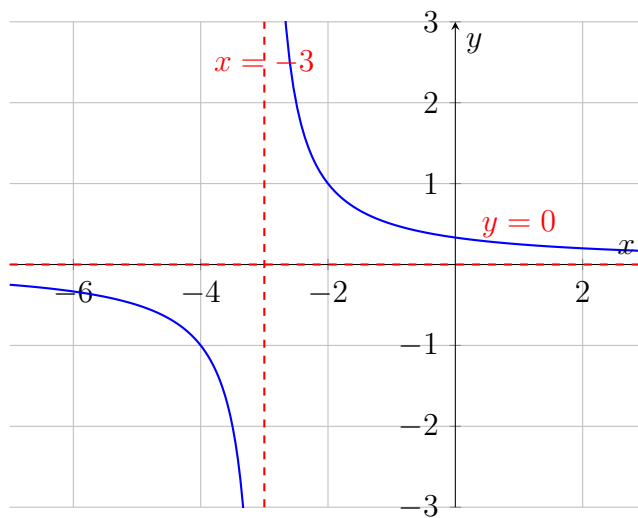
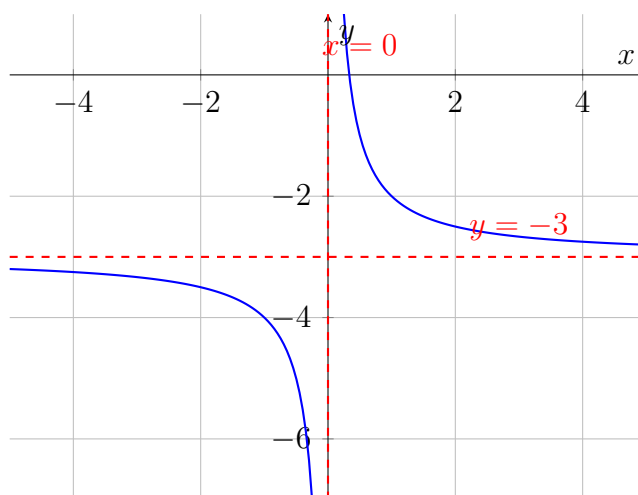
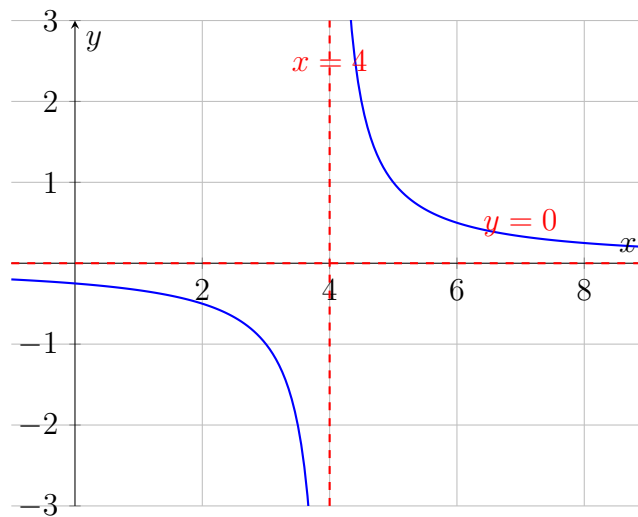
3.4. Ilustraciones de las funciones

Función 1: $y = \frac{1}{x} + 2$

Gráfica : $y = \frac{1}{x} + 2$



Función 2: $y = \frac{1}{x+3}$

Gráfica : $y = \frac{1}{x+3}$ **Función 3:** $y = \frac{1}{x} - 3$ Gráfica : $y = \frac{1}{x} - 3$ **Función 4:** $y = \frac{1}{x-4}$ Gráfica : $y = \frac{1}{x-4}$ 

4. Ejercicio 4: Estudio y Representación de $y = x^2 - 6x + 9$

4.1. Enunciado

Estudia y representa la gráfica de la función $y = f(x) = x^2 - 6x + 9$

4.2. Desarrollo completo

Desarrollo

1. TIPO DE FUNCIÓN

Es una función polinómica de segundo grado (parábola).

2. DOMINIO

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

Las funciones polinómicas están definidas para todo número real.

3. CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD

La función es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ (las funciones polinómicas son siempre continuas y derivables).

4. PUNTOS DE CORTE

Corte con el eje Y (cuando $x = 0$):

$$y = (0)^2 - 6(0) + 9 = 9$$

Punto: $(0, 9)$

Corte con el eje X (cuando $y = 0$):

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

Observamos que es un trinomio cuadrado perfecto:

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 = 0$$

$$x = 3 \text{ (raíz doble)}$$

Punto: $(3, 0)$

5. FACTORIZACIÓN

$$f(x) = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

6. DERIVADA PRIMERA (Crecimiento y extremos)

$$f'(x) = 2x - 6$$

Puntos críticos (donde $f'(x) = 0$):

$$2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

Evaluamos $f(3)$:

$$f(3) = (3)^2 - 6(3) + 9 = 9 - 18 + 9 = 0$$

Punto crítico: $(3, 0)$

Estudio del signo de $f'(x) = 2x - 6 = 2(x - 3)$:

- Si $x < 3$: $f'(x) < 0 \rightarrow$ función **decreciente**
- Si $x > 3$: $f'(x) > 0 \rightarrow$ función **creciente**

Conclusión: En $x = 3$ hay un **mínimo absoluto** con valor $f(3) = 0$.

7. DERIVADA SEGUNDA (Concavidad)

$$f''(x) = 2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

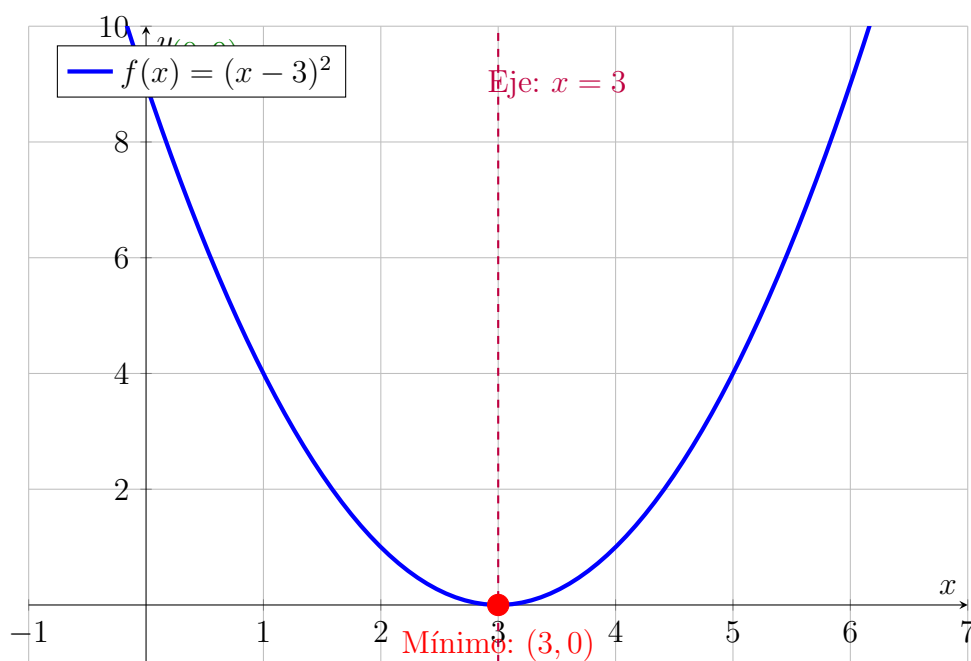
Como $f''(x) > 0$ siempre, la función es **cóncava hacia arriba** (convexa) en todo

4.3. Tabla de valores

x	$f(x) = (x - 3)^2$	$f'(x) = 2x - 6$	Observación
0	9	-6	Corte con eje Y, decreciente
1	4	-4	Decreciente
2	1	-2	Decreciente
3	0	0	Mínimo (vértice)
4	1	2	Creciente
5	4	4	Creciente
6	9	6	Creciente

4.4. Representación gráfica

Gráfica de $f(x) = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$



4.5. Resumen de propiedades

Solución

PROPIEDADES DE $f(x) = x^2 - 6x + 9$:

- **Tipo:** Parábola (función cuadrática)
- **Forma factorizada:** $f(x) = (x - 3)^2$
- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Rango:** $[0, +\infty)$
- **Vértice:** $(3, 0)$ — Mínimo absoluto
- **Eje de simetría:** $x = 3$
- **Corte eje Y:** $(0, 9)$
- **Corte eje X:** $(3, 0)$ — raíz doble
- **Crecimiento:** Decreciente en $(-\infty, 3)$, creciente en $(3, +\infty)$
- **Concavidad:** Cóncava hacia arriba en todo $\mathbb{R}$
- **Continuidad:** Continua en todo $\mathbb{R}$
- **Derivabilidad:** Derivable en todo $\mathbb{R}$

5. Ejercicio 5: Estudio Completo de $y = x^3 - 3x + 2$ **5.1. Enunciado**

Estudia, representa e indica las propiedades de la siguiente función:

$$y = f(x) = x^3 - 3x + 2$$

5.2. Desarrollo completo

Desarrollo

1. TIPO DE FUNCIÓN

Es una función polinómica de tercer grado (función cúbica).

2. DOMINIO

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

3. CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD

La función es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

4. PUNTOS DE CORTE

Corte con el eje Y (cuando $x = 0$):

$$y = (0)^3 - 3(0) + 2 = 2$$

Punto: $(0, 2)$

Corte con el eje X (cuando $y = 0$):

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

Probamos valores enteros (teorema de la raíz racional):

$$\blacksquare x = 1: (1)^3 - 3(1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$$

Por tanto, $x = 1$ es raíz. Dividimos por $(x - 1)$:

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2)$$

Factorizamos $x^2 + x - 2$:

$$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$$

Por tanto:

$$f(x) = x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$$

Raíces:

- $x = 1$ (raíz doble)
- $x = -2$ (raíz simple)

Puntos de corte con el eje X : $(1, 0)$ y $(-2, 0)$

5. DERIVADA PRIMERA (Crecimiento y extremos)

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$$

Puntos críticos ($f'(x) = 0$):

$$3(x - 1)(x + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \text{ o } x = -1$$

Evaluamos f en los puntos críticos:

- $f(1) = (1)^3 - 3(1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$
- $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = -1 + 3 + 2 = 4$

Puntos críticos: $(1, 0)$ y $(-1, 4)$

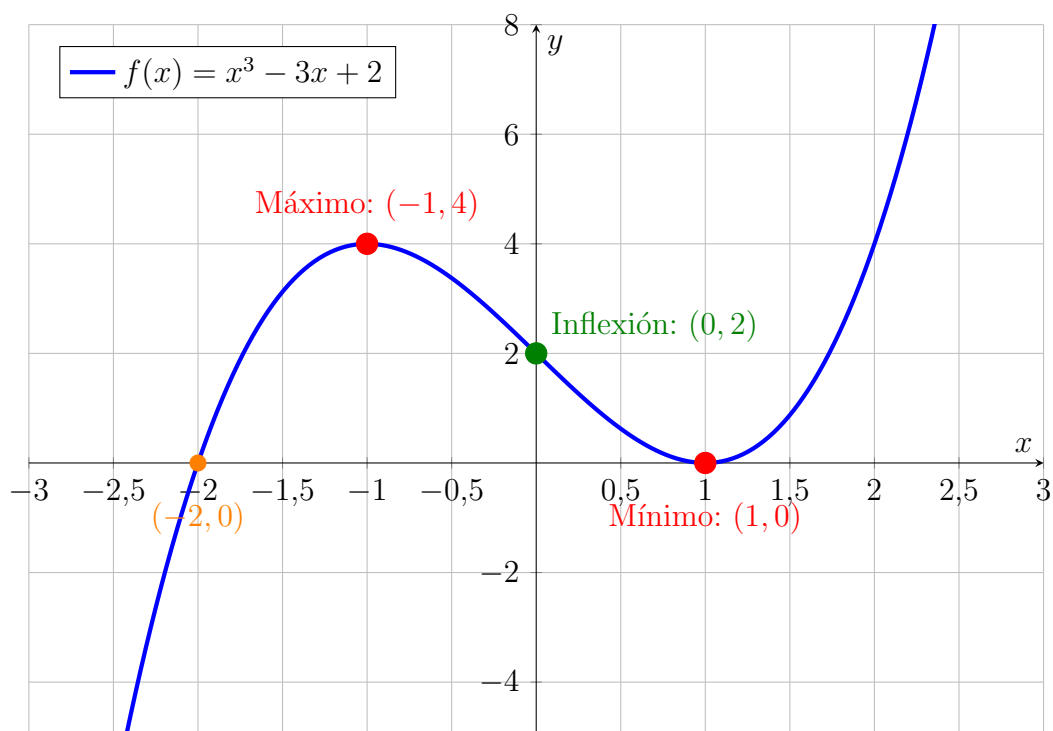
Estudio del signo de $f'(x) = 3(x - 1)(x + 1)$:

5.3. Tabla de valores completa

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Observación
-3	-16	24	-18	Creciente, cóncava
-2	0	9	-12	Raíz, creciente, cóncava
-1	4	0	-6	Máximo relativo
0	2	-3	0	Punto de inflexión
1	0	0	6	Mínimo relativo, raíz doble
2	4	9	12	Creciente, convexa
3	20	24	18	Creciente, convexa

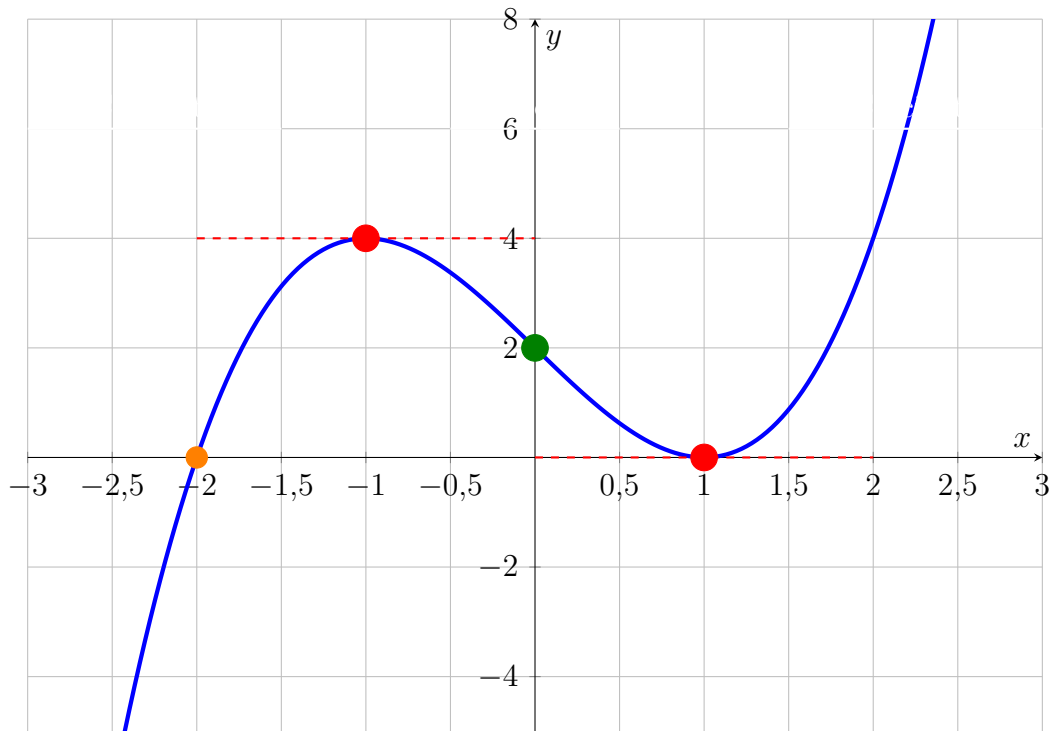
5.4. Representación gráfica

Gráfica de $f(x) = x^3 - 3x + 2$



5.5. Gráfica con análisis detallado

Análisis completo de $f(x) = x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$



5.6. Resumen de propiedades

Solución

PROPIEDADES COMPLETAS DE $f(x) = x^3 - 3x + 2$:

1. **Tipo:** Función cúbica (polinomio de grado 3)
2. **Forma factorizada:** $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$
3. **Dominio:** $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
4. **Rango:** $\text{Rec}(f) = \mathbb{R}$
5. **Continuidad:** Continua en todo $\mathbb{R}$
6. **Derivabilidad:** Derivable en todo $\mathbb{R}$
7. **Raíces (cortes con eje X):**
 - $x = -2$ (raíz simple, la función cruza el eje)
 - $x = 1$ (raíz doble, la función es tangente al eje)
8. **Corte con eje Y:** $(0, 2)$
9. **Extremos relativos:**
 - Máximo relativo: $(-1, 4)$
 - Mínimo relativo: $(1, 0)$
10. **Punto de inflexión:** $(0, 2)$ (cambia la concavidad)
11. **Monotonía:**
 - Creciente: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
 - Decreciente: $(-1, 1)$
12. **Concavidad:**
 - Cóncava (hacia abajo): $(-\infty, 0)$
 - Convexa (hacia arriba): $(0, +\infty)$
13. **Simetría:** No es par ni impar
14. **Asíntotas:** No tiene asíntotas
15. **Límites en el infinito:**
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

6. Anexo: Fórmulas y Reglas Utilizadas

6.1. Reglas de Derivación

Reglas de Derivación Aplicadas

1. Regla de la potencia:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

2. Regla del producto:

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

3. Regla del cociente:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

4. Derivadas de funciones elementales:

- $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
- $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
- $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

5. Linealidad:

$$\frac{d}{dx}(af + bg) = a \frac{df}{dx} + b \frac{dg}{dx}$$

6.2. Técnicas de Límites

Técnicas de Límites Aplicadas

- 1. Factorización:** Para indeterminaciones $\frac{0}{0}$
- 2. Racionalización:** Para indeterminaciones $\infty - \infty$ con raíces
- 3. Dividir por la mayor potencia:** Para indeterminaciones $\frac{\infty}{\infty}$
- 4. Límites importantes:**

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty$ (si $n > 0$)

6.3. Estudio de Funciones

Metodología de Estudio de Funciones

Pasos sistemáticos:

1. Determinar dominio
2. Calcular cortes con los ejes
3. Factorizar si es posible
4. Calcular $f'(x)$ y estudiar crecimiento
5. Calcular $f''(x)$ y estudiar concavidad
6. Determinar extremos y puntos de inflexión
7. Calcular límites y asíntotas
8. Determinar rango
9. Representar gráficamente

¡EXAMEN COMPLETADO!

FIN DE LAS SOLUCIONES

Todas las respuestas han sido desarrolladas
con rigor matemático completo

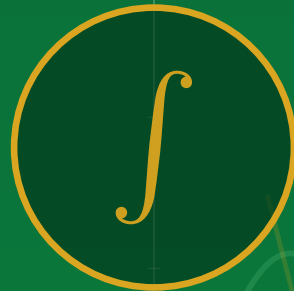
*“Las matemáticas son el alfabeto con el cual
Dios ha escrito el universo.”*

— Galileo Galilei

¡MUCHA SUERTE!

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$



EXÁMENES DE

LADIS

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

2.º BACHILLERATO

CIENCIAS SOCIALES

CURSO 2022–2023

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) P(A)}{P(B)}$$

“El azar no es arbitrario; obedece leyes que la razón puede descubrir.”

— Gerolamo Cardano (1501–1576)

Nº1.- Un examen de Matemáticas va a consistir en un test de 60 preguntas. Por cada acierto se darán 5 puntos, por cada fallo se quitarán 2 puntos y por cada pregunta no contestada se quitará 1 punto. Para aprobar hay que obtener por lo menos 150 puntos. ¿Cuántas preguntas habrá que contestar correctamente para obtener los 150 puntos y que el número de fallos más el quintuple del número de preguntas no contestadas sea igual al número de aciertos?

(3 PUNTOS)

Nº2.- Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y - z = (2 + a) \\ 2x + 3y + az = 5 \end{cases}$$

- a) Clasificar el sistema según los distintos valores del parámetro a.
- b) Resolver el sistema para $a = 0$.
- c) Resolver el sistema para $a = 1$

(3 PUNTOS)

Nº3.- Dada las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- a) Demuéstrese que la matriz A posee inversa.
- b) Calcúlese A^{-1}
- c) Calcula $A \cdot A^{-1}$
- d) Resuelve la siguiente ecuación matricial: $A \cdot X = B$

(3 PUNTOS)

Nº4.- Calcúlense los siguientes determinantes:

$$a) \begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} x+2 & x & 2 \\ y+2 & y & 2 \\ z+2 & z & 2 \end{vmatrix}$$

(1 PUNTO)

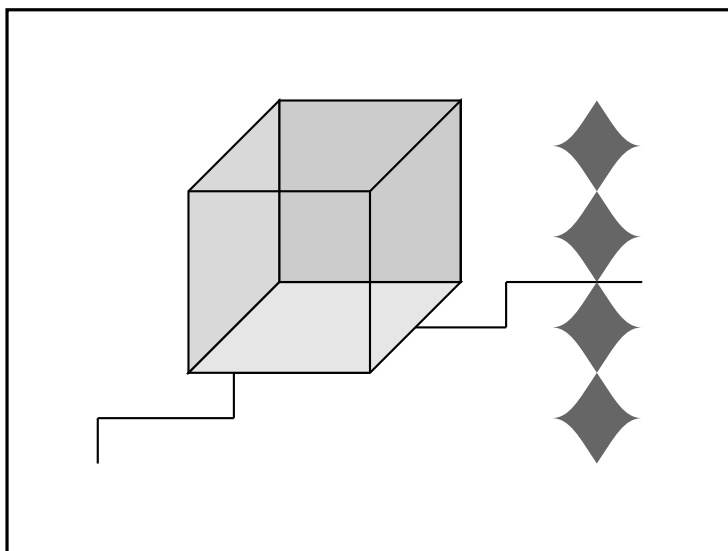
SUERTE JÓVENES

SOLUCIONARIO

EXAMEN DE MATEMÁTICAS

2º Bachillerato B/C

3 de Noviembre de 2022



*“La matemática es la reina de las ciencias
y la aritmética es la reina de las matemáticas.”*

— Carl Friedrich Gauss

Resolución completa con rigor matemático

Índice

1. Ejercicio 1: Sistema de ecuaciones (Test de 60 preguntas)	2
1.1. Enunciado	2
1.2. Ilustración del problema	2
1.3. Planteamiento matemático	2
1.4. Resolución paso a paso	3
1.5. Verificación de la solución	3
2. Ejercicio 2: Sistema de ecuaciones lineales con parámetro	5
2.1. Enunciado	5
2.2. Ilustración del sistema	5
2.3. Apartado a) Clasificación según el parámetro a	5
2.4. Apartado b) Resolución para $a = 0$	7
2.5. Apartado c) Resolución para $a = 1$	8
2.6. Representación geométrica	9
3. Ejercicio 3: Matrices e inversa	10
3.1. Enunciado	10
3.2. Ilustración matricial	10
3.3. Apartado a) Demostración de que A posee inversa	10
3.4. Apartado b) Cálculo de A^{-1}	11
3.5. Apartado c) Cálculo de $A \cdot A^{-1}$	12
3.6. Apartado d) Resolución de la ecuación matricial $A \cdot X = B$	12
4. Ejercicio 4: Determinantes	15
4.1. Enunciado	15
4.2. Ilustración de determinantes	15
4.3. Apartado a) Determinante numérico 3×3	15
4.4. Apartado b) Determinante paramétrico	17
Resumen de soluciones	19

1. Ejercicio 1: Sistema de ecuaciones (Test de 60 preguntas)

1.1. Enunciado

Un examen de Matemáticas va a consistir en un test de 60 preguntas. Por cada acierto se darán 5 puntos, por cada fallo se quitarán 2 puntos y por cada pregunta no contestada se quitará 1 punto. Para aprobar hay que obtener por lo menos 150 puntos. ¿Cuántas preguntas habrá que contestar correctamente para obtener los 150 puntos y que el número de fallos más el quintuple del número de preguntas no contestadas sea igual al número de aciertos?

1.2. Ilustración del problema

EXAMEN DE MATEMÁTICAS: 60 PREGUNTAS

Aciertos: +5 pts Fallos: -2 pts No contestadas: -1 pt

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

● Aciertos (a) = 38 ● Fallos (f) = 18 ● No contestadas (n) = 4

Puntuación = $5 \times 38 - 2 \times 18 - 1 \times 4 = 150$ puntos

1.3. Planteamiento matemático

Definimos las variables:

- a = número de aciertos
- f = número de fallos
- n = número de preguntas no contestadas

Sistema de ecuaciones:

$$a + f + n = 60 \quad (\text{total de preguntas}) \quad (1)$$

$$5a - 2f - n = 150 \quad (\text{puntuación mínima}) \quad (2)$$

$$f + 5n = a \quad (\text{condición adicional}) \quad (3)$$

1.4. Resolución paso a paso

Paso 1: Sustitución de la ecuación (3) en (1)

Sustituimos $a = f + 5n$ en la ecuación (1):

$$(f + 5n) + f + n = 60$$

$$2f + 6n = 60$$

$$f + 3n = 30$$

$$f = 30 - 3n \quad \dots(\text{ecuación auxiliar 1})$$

Paso 2: Sustitución de la ecuación (3) en (2)

Sustituimos $a = f + 5n$ en la ecuación (2):

$$5(f + 5n) - 2f - n = 150$$

$$5f + 25n - 2f - n = 150$$

$$3f + 24n = 150$$

$$f + 8n = 50 \quad \dots(\text{ecuación auxiliar 2})$$

Paso 3: Resolución del sistema de dos ecuaciones

Igualamos las ecuaciones auxiliares:

$$30 - 3n = 50 - 8n$$

$$8n - 3n = 50 - 30$$

$$5n = 20$$

$$\boxed{n = 4}$$

Paso 4: Cálculo de f y a

Sustituimos $n = 4$ en la ecuación auxiliar 1:

$$f = 30 - 3(4) = 30 - 12$$

$$\boxed{f = 18}$$

Sustituimos en la ecuación (3):

$$a = f + 5n = 18 + 5(4) = 18 + 20$$

$$\boxed{a = 38}$$

1.5. Verificación de la solución

Comprobamos que la solución $(a, f, n) = (38, 18, 4)$ satisface las tres ecuaciones:

1. **Total de preguntas:** $38 + 18 + 4 = 60$ ✓
2. **Puntuación:** $5(38) - 2(18) - 4 = 190 - 36 - 4 = 150$ ✓
3. **Condición adicional:** $18 + 5(4) = 18 + 20 = 38$ ✓

RESPUESTA FINAL

Para obtener 150 puntos cumpliendo todas las condiciones, se deben contestar correctamente **38 preguntas**.

2. Ejercicio 2: Sistema de ecuaciones lineales con parámetro

2.1. Enunciado

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro a :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 + a \\ 2x + 3y + az = 5 \end{cases} \quad (4)$$

- Clasificar el sistema según los distintos valores del parámetro a .
- Resolver el sistema para $a = 0$.
- Resolver el sistema para $a = 1$.

2.2. Ilustración del sistema

Sistema de 3 ecuaciones con parámetro a

Forma matricial: $AX = B$

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2+a \\ 2 & 3 & a & 5 \end{array} \right|$$

Determinante de A :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & a \end{vmatrix} = a$$

Clasificación:

- Si $a \neq 0$: Sistema Compatible Determinado (solución única)
- Si $a = 0$: Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones)

2.3. Apartado a) Clasificación según el parámetro a

Cálculo del determinante de la matriz de coeficientes

La matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & a \end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante desarrollando por la primera fila:

$$\begin{aligned}|A| &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & a \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & a \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 1(2a - (-3)) - 1(a - (-2)) + 1(3 - 4) \\ &= 2a + 3 - a - 2 - 1 \\ &= a\end{aligned}$$

Por lo tanto: $|A| = a$

Análisis según los valores de a

Caso 1: $a \neq 0$

Si $a \neq 0$, entonces $|A| \neq 0$, lo que implica que la matriz A es invertible.

$\Rightarrow$ El sistema es **Compatible Determinado** (tiene solución única).

Caso 2: $a = 0$

Si $a = 0$, entonces $|A| = 0$, y debemos estudiar los rangos de A y de la matriz ampliada A^* .

Matriz ampliada para $a = 0$:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

Calculamos el rango de A :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rg}(A) = 2$$

Verificamos si $\text{rg}(A^*) = 2$ comprobando la compatibilidad:

Aplicamos operaciones elementales:

$$\begin{aligned}F_2 - F_1 &: (1, 2, -1, 2) - (1, 1, 1, 3) = (0, 1, -2, -1) \\ F_3 - 2F_1 &: (2, 3, 0, 5) - 2(1, 1, 1, 3) = (0, 1, -2, -1)\end{aligned}$$

Las filas resultantes son idénticas, por lo que $\text{rg}(A^*) = 2$.

Como $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$ (número de incógnitas):

$\Rightarrow$ El sistema es **Compatible Indeterminado** (infinitas soluciones dependientes de un parámetro).

CLASIFICACIÓN COMPLETA

- Si $a \neq 0$: Sistema **Compatible Determinado** (solución única)
- Si $a = 0$: Sistema **Compatible Indeterminado** (infinitas soluciones)

2.4. Apartado b) Resolución para $a = 0$

Para $a = 0$, el sistema se convierte en:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \quad (5)$$

Resolución del sistema compatible indeterminado

De la tercera ecuación:

$$2x + 3y = 5 \Rightarrow x = \frac{5 - 3y}{2} \quad (6)$$

Restando la primera ecuación de la segunda:

$$\begin{aligned} (x + 2y - z) - (x + y + z) &= 2 - 3 \\ y - 2z &= -1 \\ y &= 2z - 1 \end{aligned}$$

Sustituimos $y = 2z - 1$ en (6):

$$\begin{aligned} x &= \frac{5 - 3(2z - 1)}{2} \\ &= \frac{5 - 6z + 3}{2} \\ &= \frac{8 - 6z}{2} \\ &= 4 - 3z \end{aligned}$$

Verificación con la primera ecuación:

$$\begin{aligned} x + y + z &= (4 - 3z) + (2z - 1) + z \\ &= 4 - 3z + 2z - 1 + z \\ &= 3 \quad \checkmark \end{aligned}$$

SOLUCIÓN PARA $a = 0$

$$\begin{cases} x = 4 - 3\lambda \\ y = 2\lambda - 1 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{donde } \lambda \in \mathbb{R}$$

2.5. Apartado c) Resolución para $a = 1$

Para $a = 1$, el sistema se convierte en:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y - z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \end{cases} \quad (7)$$

Como $|A| = 1 \neq 0$, el sistema tiene solución única. Utilizamos el **método de Gauss**.

Método de eliminación de Gauss

Matriz ampliada inicial:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

Paso 1: $F_2 - F_1$ y $F_3 - 2F_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

Paso 2: $F_3 - F_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Sustitución regresiva:

De F_3 : $\boxed{z = -1}$

De F_2 : $y - 2(-1) = 0 \Rightarrow y + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{y = -2}$

De F_1 : $x + (-2) + (-1) = 3 \Rightarrow x - 3 = 3 \Rightarrow \boxed{x = 6}$

Verificación de la solución

Sustituimos $(x, y, z) = (6, -2, -1)$ en el sistema original:

1. $6 + (-2) + (-1) = 3 \quad \checkmark$

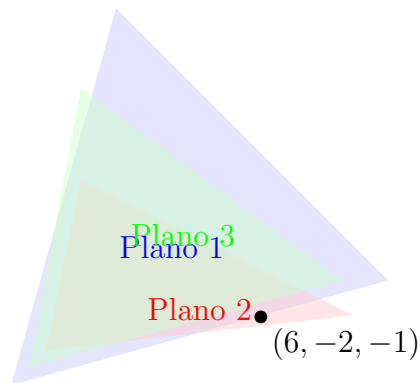
2. $6 + 2(-2) - (-1) = 6 - 4 + 1 = 3 \quad \checkmark$

$$3. \ 2(6) + 3(-2) + (-1) = 12 - 6 - 1 = 5 \quad \checkmark$$

SOLUCIÓN PARA $a = 1$

$$(x, y, z) = (6, -2, -1)$$

2.6. Representación geométrica



Para $a = 1$: los tres planos se intersectan en un punto

3. Ejercicio 3: Matrices e inversa

3.1. Enunciado

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- Demuéstrese que la matriz A posee inversa.
- Calcúlese A^{-1} .
- Calcula $A \cdot A^{-1}$.
- Resuelve la siguiente ecuación matricial: $A \cdot X = B$.

3.2. Ilustración matricial

Matriz A

Matriz B

Matriz A^{-1}

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & -1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \xrightarrow{\times} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 2 \\ \hline 0 & -2 \\ \hline \end{array} \quad \xrightarrow{=} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \frac{1}{3} & \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline \end{array}$$

$$|A| = 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 3 \neq 0 \\ \Rightarrow A \text{ es invertible}$$

$$A \cdot X = B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B$$

3.3. Apartado a) Demostración de que A posee inversa

Criterio de invertibilidad

Una matriz cuadrada A es invertible (posee inversa) si y solo si su determinante es distinto de cero:

$$A \text{ es invertible} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \\ &= 2 + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Como $|A| = 3 \neq 0$, se cumple la condición de invertibilidad.

CONCLUSIÓN

La matriz A **posee inversa** porque su determinante es $|A| = 3 \neq 0$.

3.4. Apartado b) Cálculo de A^{-1}

Fórmula para la inversa de una matriz 2×2

Para una matriz 2×2 de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

La inversa se calcula mediante:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Para nuestra matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ con $|A| = 3$:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -(-1) \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

RESULTADO

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

3.5. Apartado c) Cálculo de $A \cdot A^{-1}$ **Propiedad fundamental de la matriz inversa**

Por definición, el producto de una matriz por su inversa es la matriz identidad:

$$A \cdot A^{-1} = I$$

donde I es la matriz identidad de orden 2:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verificación mediante cálculo directo:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Elemento (1,1):

$$2 \cdot \frac{1}{3} + (-1) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

Elemento (1,2):

$$2 \cdot \frac{1}{3} + (-1) \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$$

Elemento (2,1):

$$1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

Elemento (2,2):

$$1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

RESULTADO

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

3.6. Apartado d) Resolución de la ecuación matricial $A \cdot X = B$ **Despeje de la matriz X**

Dada la ecuación:

$$A \cdot X = B$$

Multiplicamos ambos miembros por A^{-1} a la izquierda:

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot (A \cdot X) &= A^{-1} \cdot B \\ (A^{-1} \cdot A) \cdot X &= A^{-1} \cdot B \\ I \cdot X &= A^{-1} \cdot B \\ X &= A^{-1} \cdot B \end{aligned}$$

Cálculo del producto $A^{-1} \cdot B$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Elemento (1,1):

$$\frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{4}{3} + 0 = \frac{4}{3}$$

Elemento (1,2):

$$\frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot (-2) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$$

Elemento (2,1):

$$-\frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{2}{3} \cdot 0 = -\frac{4}{3} + 0 = -\frac{4}{3}$$

Elemento (2,2):

$$-\frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot (-2) = -\frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{6}{3} = -2$$

Por lo tanto:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & -2 \end{pmatrix}$$

Verificación de la solución

Comprobamos que $A \cdot X = B$:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & -2 \end{pmatrix}$$

Elemento (1,1): $2 \cdot \frac{4}{3} + (-1) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = \frac{12}{3} = 4 \quad \checkmark$

Elemento (1,2): $2 \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) = 0 + 2 = 2 \quad \checkmark$

Elemento (2,1): $1 \cdot \frac{4}{3} + 1 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 0 \quad \checkmark$

Elemento (2,2): $1 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) = 0 - 2 = -2 \quad \checkmark$

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = B \quad \checkmark$$

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN MATRICIAL

$$X = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & -2 \end{pmatrix}$$

4. Ejercicio 4: Determinantes

4.1. Enunciado

Calcúlense los siguientes determinantes:

$$a) \begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} x+2 & x & 2 \\ y+2 & y & 2 \\ z+2 & z & 2 \end{vmatrix}$$

4.2. Ilustración de determinantes

Determinante a) - Regla de Sarrus Determinante b) - Propiedades

$$\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 9 & 8 \\ 6 & 5 \\ 3 & 2 \end{matrix}$$

(+) : $45 + 96 + 84 = 225$
 (-) : $105 + 72 + 48 = 225$
Resultado: $225 - 225 = 0$

$$\begin{vmatrix} x+2 & x & 2 \\ y+2 & y & 2 \\ z+2 & z & 2 \end{vmatrix}$$

Columna 1 = Columna 2 + 2

$$C_1 = C_2 + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Dependencia lineal
 $\Rightarrow$ Determinante = 0

4.3. Apartado a) Determinante numérico 3×3

$$\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Método 1: Desarrollo por menores (tercera fila)

Desarrollamos por la tercera fila, que tiene los elementos más pequeños:

$$\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$$

Calculamos cada menor 2×2 :

Primer menor:

$$\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 \cdot 4 - 7 \cdot 5 = 32 - 35 = -3$$

Segundo menor:

$$\begin{vmatrix} 9 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 9 \cdot 4 - 7 \cdot 6 = 36 - 42 = -6$$

Tercer menor:

$$\begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 9 \cdot 5 - 8 \cdot 6 = 45 - 48 = -3$$

Cálculo final:

$$\begin{aligned} \det &= 3 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6) + 1 \cdot (-3) \\ &= -9 + 12 - 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Método 2: Regla de Sarrus (verificación)

La regla de Sarrus para un determinante 3×3 establece:

Productos de las diagonales principales (signo positivo):

$$d_1 = 9 \cdot 5 \cdot 1 = 45$$

$$d_2 = 8 \cdot 4 \cdot 3 = 96$$

$$d_3 = 7 \cdot 6 \cdot 2 = 84$$

$$\text{Suma} = 45 + 96 + 84 = 225$$

Productos de las diagonales secundarias (signo negativo):

$$d_4 = 7 \cdot 5 \cdot 3 = 105$$

$$d_5 = 9 \cdot 4 \cdot 2 = 72$$

$$d_6 = 8 \cdot 6 \cdot 1 = 48$$

$$\text{Suma} = 105 + 72 + 48 = 225$$

Determinante:

$$\det = 225 - 225 = 0$$

Interpretación del resultado

El determinante es cero porque las filas de la matriz son **linealmente dependientes**.

Observemos la estructura:

$$\text{Fila 1: } (9, 8, 7)$$

$$\text{Fila 2: } (6, 5, 4)$$

$$\text{Fila 3: } (3, 2, 1)$$

Las diferencias entre filas consecutivas son:

$$F_1 - F_2 = (9 - 6, 8 - 5, 7 - 4) = (3, 3, 3) = 3 \cdot (1, 1, 1)$$

$$F_2 - F_3 = (6 - 3, 5 - 2, 4 - 1) = (3, 3, 3) = 3 \cdot (1, 1, 1)$$

Esto indica una progresión aritmética en cada columna, lo que genera dependencia lineal.

RESULTADO DEL APARTADO a)

$$\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

4.4. Apartado b) Determinante paramétrico

$$\begin{vmatrix} x+2 & x & 2 \\ y+2 & y & 2 \\ z+2 & z & 2 \end{vmatrix}$$

Método 1: Propiedad de suma por columnas

Aplicamos la propiedad de que un determinante es multilineal en cada columna:

$$\begin{vmatrix} x+2 & x & 2 \\ y+2 & y & 2 \\ z+2 & z & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x & 2 \\ y & y & 2 \\ z & z & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & x & 2 \\ 2 & y & 2 \\ 2 & z & 2 \end{vmatrix}$$

Primer determinante:

Este determinante tiene las columnas 1 y 2 idénticas:

$$\begin{vmatrix} x & x & 2 \\ y & y & 2 \\ z & z & 2 \end{vmatrix} = 0$$

(Propiedad: Si dos columnas son iguales, el determinante es cero)

Segundo determinante:

Factorizamos 2 de la primera columna:

$$\begin{vmatrix} 2 & x & 2 \\ 2 & y & 2 \\ 2 & z & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ 1 & y & 2 \\ 1 & z & 2 \end{vmatrix}$$

Aplicamos la operación $C_3 - 2C_1$:

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ 1 & y & 2 \\ 1 & z & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 1 & y & 0 \\ 1 & z & 0 \end{vmatrix}$$

Este determinante tiene la tercera columna completamente nula:

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 1 & y & 0 \\ 1 & z & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = 0$$

Suma total:

$$0 + 0 = 0$$

Método 2: Operaciones elementales por columnas

Aplicamos $C_1 - C_2$:

$$\begin{vmatrix} x+2 & x & 2 \\ y+2 & y & 2 \\ z+2 & z & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & x & 2 \\ 2 & y & 2 \\ 2 & z & 2 \end{vmatrix}$$

Factorizamos 2 de C_1 :

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ 1 & y & 2 \\ 1 & z & 2 \end{vmatrix}$$

Aplicamos $C_3 - 2C_1$:

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 1 & y & 0 \\ 1 & z & 0 \end{vmatrix}$$

Desarrollamos por la tercera columna (que es nula):

$$= 2 \cdot 0 = 0$$

Interpretación geométrica

El determinante es cero porque existe **dependencia lineal** entre las columnas. Observemos que la primera columna se puede expresar como:

$$\begin{pmatrix} x+2 \\ y+2 \\ z+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y la tercera columna es:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la tercera columna es proporcional a la diferencia entre la primera y la segunda columna, lo que genera dependencia lineal.

RESULTADO DEL APARTADO b)

$$\begin{vmatrix} x+2 & x & 2 \\ y+2 & y & 2 \\ z+2 & z & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

Resumen de soluciones

SOLUCIONES FINALES DEL EXAMEN

Ejercicio 1 (Sistema de ecuaciones - Test):

- Número de aciertos necesarios: **38 preguntas**
- Fallos: 18 preguntas
- No contestadas: 4 preguntas
- Puntuación obtenida: 150 puntos

Ejercicio 2 (Sistema con parámetro):

- a) Clasificación:
 - Si $a \neq 0$: Compatible Determinado
 - Si $a = 0$: Compatible Indeterminado
- b) Para $a = 0$: $(x, y, z) = (4 - 3\lambda, 2\lambda - 1, \lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$
- c) Para $a = 1$: $(x, y, z) = (6, -2, -1)$

Ejercicio 3 (Matrices):

- a) $|A| = 3 \neq 0 \Rightarrow A$ es invertible
- b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$
- c) $A \cdot A^{-1} = I_2$
- d) $X = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & -2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4 (Determinantes):

- a) $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$
- b) $\begin{vmatrix} x+2 & x & 2 \\ y+2 & y & 2 \\ z+2 & z & 2 \end{vmatrix} = 0$

Todas las soluciones han sido verificadas

Este documento contiene el desarrollo completo y riguroso
de todos los ejercicios del examen de Matemáticas

*“En matemáticas no se comprenden
las cosas, se acostumbra uno a ellas.”*

— John von Neumann

Nº1.- Una Peña de aficionados de un equipo de fútbol encarga a una empresa de transportes el viaje para llevar a los 1200 socios a ver la final de su equipo. La empresa dispone de autobuses de 50 plazas y de microbuses de 30 plazas. El precio de cada autobús es de 252 euros y el de cada microbús de 180 euros. Sabiendo que la empresa sólo dispone de 28 conductores, se pide: a) ¿Qué número de autobuses y microbuses deben contratarse para conseguir el mínimo coste posible? b) ¿Cuál será el valor de dicho coste mínimo?

Nº2.- En una empresa de alimentación se dispone de 24 kg de harina de trigo y 15 kg de harina de maíz, que se utilizan para obtener dos tipos de preparados: A y B. La ración del preparado A contiene 200 g de harina de trigo y 300 de harina de maíz, con 600 cal de valor energético. La ración de B contiene 200 g de harina de trigo y 100 g de harina de maíz, con 400 cal de valor energético. ¿Cuántas raciones de cada tipo hay que preparar para obtener el máximo rendimiento energético total? Obtener el rendimiento máximo.

Nº3.- Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + (1 + a)y - az = 2a \\ x + ay + (1 + a)z = 1 \end{cases}$$

- a) Clasificar el sistema según los distintos valores del parámetro a.
- b) Resolver el sistema para $a = -1$
- c) Resolver el sistema para $a = 1$.

Nº4.- Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

- a) Calcúlese la matriz $D = AB - C$.
- b) ¿La matriz D posee inversa? En caso afirmativo calcúlese D^{-1}
- c) Resuélvase la siguiente ecuación matricial: $(AB - C) \cdot X = 2C$

Nº5.- He comprado 5 kg de almendras, 3 kg de avellanas y 2 kg de cacahuets, y he pagado por todo ello 98 euros. La diferencia entre el precio por kg de las avellanas y de los cacahuets, es igual al precio por kg de las almendras. Si hubiera comprado 1 kg de cada fruto seco, hubiera pagado 32 euros. a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el precio por kg de cada fruto seco. b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior.

SUERTE JÓVENES

EXAMEN DE MATEMÁTICAS

2º Bachillerato B/C

22 de Noviembre de 2022

SOLUCIONES COMPLETAS

*«El rigor es para las matemáticas
lo que la moralidad es para los hombres.»*

— Augustin-Louis Cauchy

Índice

1. Ejercicio 1: Programación Lineal - Transporte de Aficionados

1.1. Enunciado

Una peña de aficionados de un equipo de fútbol encarga a una empresa de transportes el viaje para llevar a los 1200 socios a ver la final de su equipo. La empresa dispone de autobuses de 50 plazas y de microbuses de 30 plazas. El precio de cada autobús es de 252 euros y el de cada microbús de 180 euros. Sabiendo que la empresa sólo dispone de 28 conductores, se pide:

- ¿Qué número de autobuses y microbuses deben contratarse para conseguir el mínimo coste posible?
- ¿Cuál será el valor de dicho coste mínimo?

1.2. Resolución Completa

1.2.1. Definición de Variables

Sea:

- x = número de autobuses de 50 plazas
- y = número de microbuses de 30 plazas

1.2.2. Función Objetivo

Queremos minimizar el coste total:

$$Z = 252x + 180y \quad (\text{función a minimizar}) \quad (1)$$

1.2.3. Restricciones del Problema

Debemos considerar todas las limitaciones del problema:

Restricción de capacidad de pasajeros:

El total de plazas debe ser suficiente para transportar a los 1200 socios:

$$50x + 30y \geq 1200 \quad (2)$$

Restricción de conductores disponibles:

La empresa solo dispone de 28 conductores, y cada vehículo requiere un conductor:

$$x + y \leq 28 \quad (3)$$

Restricciones de no negatividad:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad (4)$$

1.2.4. Sistema Completo de Inecuaciones

El problema de programación lineal queda formulado como:

$$\text{Minimizar: } Z = 252x + 180y$$

Sujeto a:

$$50x + 30y \geq 1200$$

$$x + y \leq 28$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

1.2.5. Simplificación de Restricciones

Simplificamos la primera restricción dividiendo por 10:

$$5x + 3y \geq 120 \quad (5)$$

1.2.6. Determinación de la Región Factible

Para determinar la región factible, encontramos los puntos de corte de las rectas frontera:

Recta 1: $5x + 3y = 120$

- Si $x = 0$: $3y = 120 \Rightarrow y = 40 \rightarrow \text{Punto } (0, 40)$
- Si $y = 0$: $5x = 120 \Rightarrow x = 24 \rightarrow \text{Punto } (24, 0)$

Recta 2: $x + y = 28$

- Si $x = 0$: $y = 28 \rightarrow \text{Punto } (0, 28)$
- Si $y = 0$: $x = 28 \rightarrow \text{Punto } (28, 0)$

Intersección de las rectas $5x + 3y = 120$ y $x + y = 28$:

De la segunda ecuación: $y = 28 - x$

Sustituyendo en la primera:

$$5x + 3(28 - x) = 120$$

$$5x + 84 - 3x = 120$$

$$2x = 36$$

$$x = 18$$

Por tanto: $y = 28 - 18 = 10$

Punto de intersección: $(18, 10)$

1.2.7. Vértices de la Región Factible

Sin embargo, el punto $(0, 28)$ NO es factible porque no cumple la restricción de capacidad:

$$5(0) + 3(28) = 84 \not\geq 120$$

Los vértices de la región factible son:

1. $A = (0, 40)$
2. $B = (18, 10)$
3. $C = (24, 0)$

1.2.8. Evaluación de la Función Objetivo

Evaluamos $Z = 252x + 180y$ en cada vértice:

- En $A = (0, 40)$:

$$Z_A = 252(0) + 180(40) = 0 + 7200 = 7200 \text{ euros} \quad (6)$$

- En $B = (18, 10)$:

$$Z_B = 252(18) + 180(10) = 4536 + 1800 = 6336 \text{ euros} \quad (\text{MÍNIMO}) \quad (7)$$

- En $C = (24, 0)$:

$$Z_C = 252(24) + 180(0) = 6048 + 0 = 6048 \text{ euros} \quad (8)$$

1.2.9. Solución Final

[colback=green!5!white,colframe=green!75!black,title=Respuesta] **a)** Para conseguir el mínimo coste posible se deben contratar:

- **18 autobuses** de 50 plazas
- **10 microbuses** de 30 plazas

b) El coste mínimo será de **6336 euros**.

Verificación:

- Plazas totales: $50(18) + 30(10) = 900 + 300 = 1200$
- Conductores necesarios: $18 + 10 = 28$

1.3. Ilustración del Problema

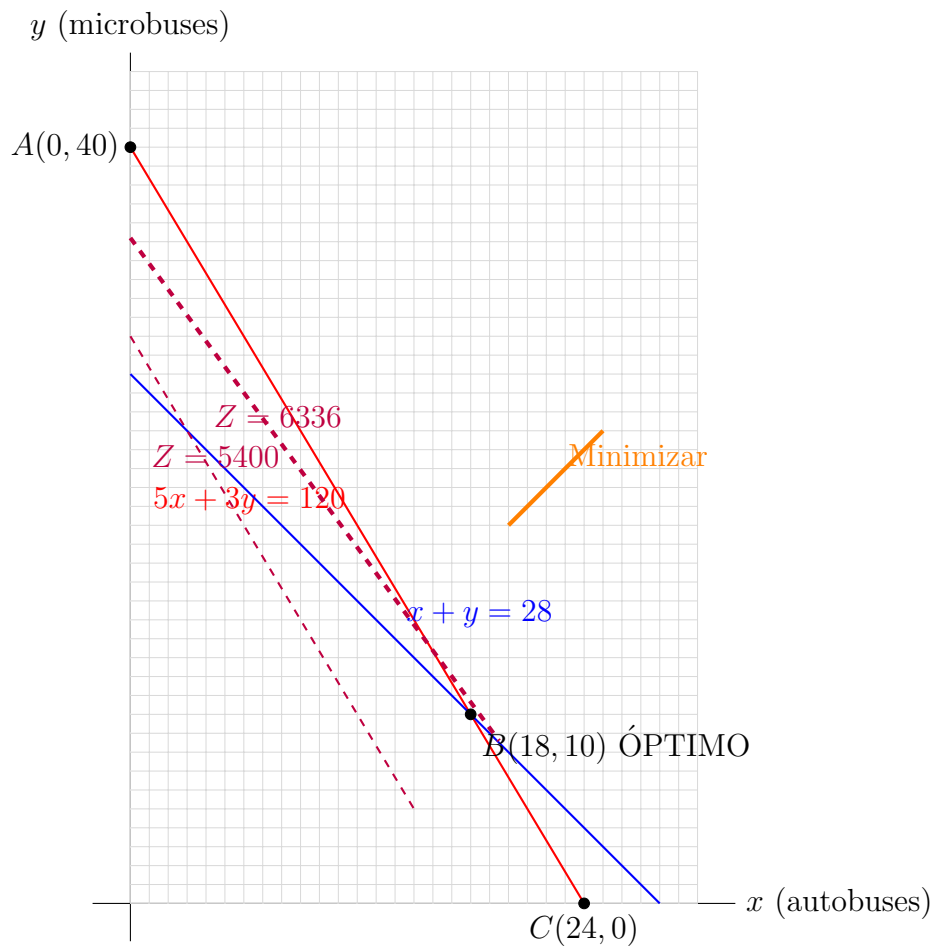


Figura 1: Región factible y solución óptima del problema de transporte

2. Ejercicio 2: Programación Lineal - Preparados Alimenticios

2.1. Enunciado

En una empresa de alimentación se dispone de 24 kg de harina de trigo y 15 kg de harina de maíz, que se utilizan para obtener dos tipos de preparados: A y B. La ración del preparado A contiene 200 g de harina de trigo y 300 g de harina de maíz, con 600 cal de valor energético. La ración de B contiene 200 g de harina de trigo y 100 g de harina de maíz, con 400 cal de valor energético. ¿Cuántas raciones de cada tipo hay que preparar para obtener el máximo rendimiento energético total? Obtener el rendimiento máximo.

2.2. Resolución Completa

2.2.1. Definición de Variables

Sea:

- x = número de raciones del preparado A
- y = número de raciones del preparado B

2.2.2. Conversión de Unidades

Convertimos las cantidades disponibles a gramos:

- Harina de trigo disponible: 24 kg = 24000 g
- Harina de maíz disponible: 15 kg = 15000 g

2.2.3. Función Objetivo

Queremos maximizar el valor energético total:

$$Z = 600x + 400y \quad (\text{calorías totales a maximizar}) \quad (9)$$

2.2.4. Restricciones del Problema

Restricción de harina de trigo:

Cada ración de A necesita 200 g y cada ración de B necesita 200 g:

$$200x + 200y \leq 24000 \quad (10)$$

Simplificando (dividiendo por 200):

$$x + y \leq 120 \quad (11)$$

Restricción de harina de maíz:

Cada ración de A necesita 300 g y cada ración de B necesita 100 g:

$$300x + 100y \leq 15000 \quad (12)$$

Simplificando (dividiendo por 100):

$$3x + y \leq 150 \quad (13)$$

Restricciones de no negatividad:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad (14)$$

2.2.5. Sistema Completo de InecuacionesMaximizar: $Z = 600x + 400y$

Sujeto a:

$$x + y \leq 120$$

$$3x + y \leq 150$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

2.2.6. Determinación de la Región Factible**Recta 1:** $x + y = 120$

- Si $x = 0$: $y = 120 \rightarrow$ Punto $(0, 120)$
- Si $y = 0$: $x = 120 \rightarrow$ Punto $(120, 0)$

Recta 2: $3x + y = 150$

- Si $x = 0$: $y = 150 \rightarrow$ Punto $(0, 150)$
- Si $y = 0$: $3x = 150 \Rightarrow x = 50 \rightarrow$ Punto $(50, 0)$

Intersección de $x + y = 120$ y $3x + y = 150$:

Restando la primera ecuación de la segunda:

$$\begin{aligned}(3x + y) - (x + y) &= 150 - 120 \\ 2x &= 30 \\ x &= 15\end{aligned}$$

Sustituyendo en $x + y = 120$:

$$15 + y = 120 \Rightarrow y = 105 \quad (15)$$

Punto de intersección: $(15, 105)$ **2.2.7. Vértices de la Región Factible**

Analizamos qué puntos forman la región factible:

- $(0, 0)$ - Origen
- $(0, 120)$ - Intersección con eje Y de la primera restricción
- $(15, 105)$ - Intersección de las dos restricciones
- $(50, 0)$ - Intersección con eje X de la segunda restricción

Verificamos que $(0, 120)$ cumple ambas restricciones:

- $0 + 120 = 120 \leq 120$

$$\blacksquare 3(0) + 120 = 120 \leq 150$$

Los vértices son:

1. $O = (0, 0)$
2. $A = (50, 0)$
3. $B = (15, 105)$
4. $C = (0, 120)$

2.2.8. Evaluación de la Función Objetivo

Evaluamos $Z = 600x + 400y$ en cada vértice:

- $$\blacksquare \text{ En } O = (0, 0):$$

$$Z_O = 600(0) + 400(0) = 0 \text{ calorías} \quad (16)$$

- $$\blacksquare \text{ En } A = (50, 0):$$

$$Z_A = 600(50) + 400(0) = 30000 \text{ calorías} \quad (17)$$

- $$\blacksquare \text{ En } B = (15, 105):$$

$$Z_B = 600(15) + 400(105) = 9000 + 42000 = 51000 \text{ calorías} \quad \textbf{(MÁXIMO)} \quad (18)$$

- $$\blacksquare \text{ En } C = (0, 120):$$

$$Z_C = 600(0) + 400(120) = 0 + 48000 = 48000 \text{ calorías} \quad (19)$$

2.2.9. Solución Final

[colback=green!5!white,colframe=green!75!black,title=Respuesta] Para obtener el máximo rendimiento energético se deben preparar:

- 15 raciones del preparado A
- 105 raciones del preparado B

El rendimiento energético máximo es de **51000 calorías**.

Verificación del consumo de harinas:

- Harina de trigo: $200(15) + 200(105) = 3000 + 21000 = 24000 \text{ g} = 24 \text{ kg}$
- Harina de maíz: $300(15) + 100(105) = 4500 + 10500 = 15000 \text{ g} = 15 \text{ kg}$

2.3. Ilustración del Problema

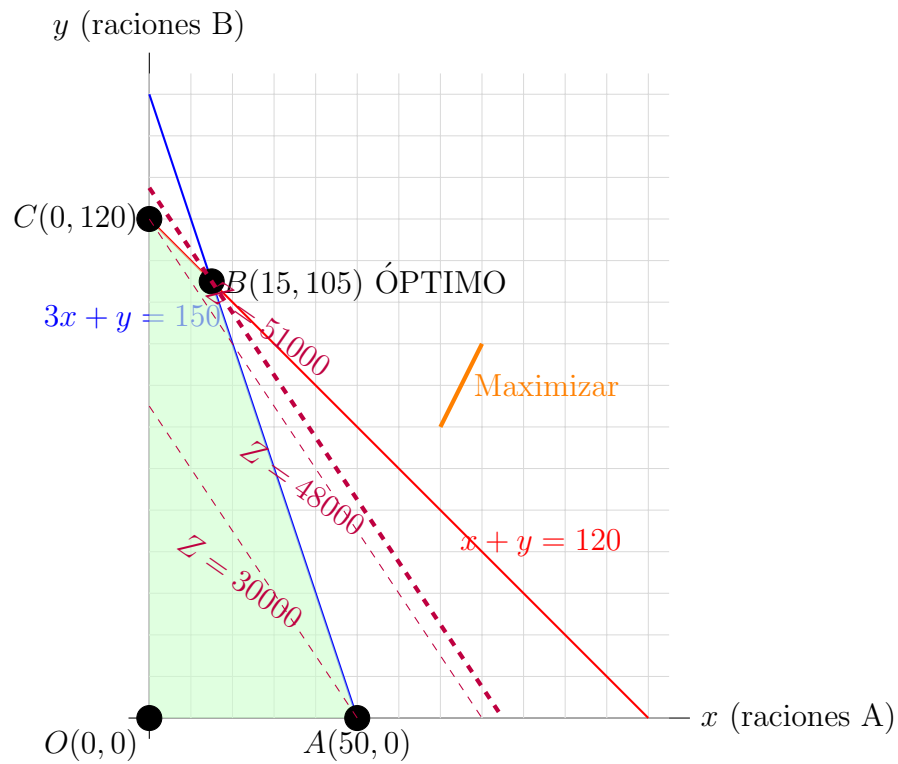


Figura 2: Región factible y solución óptima del problema de preparados alimenticios

3. Ejercicio 3: Sistema de Ecuaciones Lineales con Parámetro

3.1. Enunciado

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro a :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + (1 + a)y - az = 2a \\ x + ay + (1 + a)z = 1 \end{cases} \quad (20)$$

- a) Clasificar el sistema según los distintos valores del parámetro a .
- b) Resolver el sistema para $a = -1$.
- c) Resolver el sistema para $a = 1$.

3.2. Resolución Completa

3.2.1. Apartado a) Clasificación según el parámetro a

Para clasificar el sistema utilizaremos el Teorema de Rouché-Frobenius, comparando los rangos de la matriz de coeficientes A y la matriz ampliada A^* .

Matriz de coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+a & -a \\ 1 & a & 1+a \end{pmatrix} \quad (21)$$

Matriz ampliada:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1+a & -a & 2a \\ 1 & a & 1+a & 1 \end{array} \right) \quad (22)$$

Cálculo del determinante de A :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+a & -a \\ 1 & a & 1+a \end{vmatrix} \quad (23)$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1+a & -a \\ a & 1+a \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -a \\ 1 & 1+a \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1+a \\ 1 & a \end{vmatrix} \quad (24)$$

Calculamos cada menor:

$$\begin{vmatrix} 1+a & -a \\ a & 1+a \end{vmatrix} = (1+a)^2 - (-a)(a) = (1+a)^2 + a^2 \quad (25)$$

$$= 1 + 2a + a^2 + a^2 = 1 + 2a + 2a^2 \quad (26)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -a \\ 1 & 1+a \end{vmatrix} = 1(1+a) - (-a)(1) = 1+a+a = 1+2a \quad (27)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1+a \\ 1 & a \end{vmatrix} = 1 \cdot a - (1+a) \cdot 1 = a - 1 - a = -1 \quad (28)$$

Por tanto:

$$|A| = 1(1+2a+2a^2) - 2(1+2a) - 1(-1) \quad (29)$$

$$= 1+2a+2a^2 - 2 - 4a + 1 \quad (30)$$

$$= 2a^2 - 2a \quad (31)$$

$$= 2a(a-1) \quad (32)$$

Análisis del determinante:

$$|A| = 2a(a-1) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ó } a = 1 \quad (33)$$

CASO 1: $a \neq 0$ y $a \neq 1$

Si $|A| \neq 0$, entonces $\text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(A^*)$, y el sistema es **Compatible Determinado** (tiene solución única).

CASO 2: $a = 0$

El sistema se convierte en:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + y = 0 \\ x + z = 1 \end{cases} \quad (34)$$

Matrices para $a = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad (35)$$

Verificamos que existe un menor de orden 2 no nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0 \quad (36)$$

Comprobamos si $\text{rg}(A^*) = 2$ o $\text{rg}(A^*) = 3$ mediante un menor de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (37)$$

$$= 1(1) - 2(1) + 2(-1) = 1 - 2 - 2 = -3 \neq 0 \quad (38)$$

Como $\text{rg}(A) = 2 < 3 = \text{rg}(A^*)$, el sistema es **Incompatible** (no tiene solución).

CASO 3: $a = 1$ (se resolverá en el apartado c)

Para $a = 1$, calculamos:

El sistema se convierte en:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + 2y - z = 2 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases} \quad (39)$$

Las dos primeras ecuaciones son idénticas. Analizamos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (40)$$

Un menor de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad (41)$$

Por tanto $\text{rg}(A) \geq 2$.

Verificamos menores de orden 3. Ya sabemos que $|A| = 0$ para $a = 1$.

Para la matriz ampliada:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \quad (42)$$

Las filas 1 y 2 son idénticas, por lo que cualquier menor 3×3 será cero.

Comprobemos con un menor que incluya la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{filas 1 y 2 iguales}) \quad (43)$$

Otro menor:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{filas 1 y 2 iguales}) \quad (44)$$

Por tanto, $\text{rg}(A) = 2 = \text{rg}(A^*)$, con 3 incógnitas.

El sistema es **Compatible Indeterminado** (infinitas soluciones dependiendo de 1 parámetro).

[colback=blue!5!white,colframe=blue!75!black,title=Clasificación del Sistema]

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$: **Sistema Compatible Determinado** (solución única)
- Si $a = 0$: **Sistema Incompatible** (sin solución)
- Si $a = 1$: **Sistema Compatible Indeterminado** (infinitas soluciones)

3.2.2. Apartado b) Resolución para $a = -1$

Sustituimos $a = -1$ en el sistema original:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + (1 - 1)y - (-1)z = 2(-1) \\ x + (-1)y + (1 - 1)z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + z = -2 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad (45)$$

Como $a = -1 \neq 0$ y $a = -1 \neq 1$, sabemos que el sistema tiene solución única.

Método de sustitución:

De la tercera ecuación:

$$y = x - 1 \quad (46)$$

De la segunda ecuación:

$$z = -2 - x \quad (47)$$

Sustituimos en la primera ecuación:

$$x + 2(x - 1) - (-2 - x) = 2 \quad (48)$$

$$x + 2x - 2 + 2 + x = 2 \quad (49)$$

$$4x = 2 \quad (50)$$

$$x = \frac{1}{2} \quad (51)$$

Calculamos y y z :

$$y = x - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \quad (52)$$

$$z = -2 - x = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2} \quad (53)$$

Verificación:

- Ecuación 1: $\frac{1}{2} + 2(-\frac{1}{2}) - (-\frac{5}{2}) = \frac{1}{2} - 1 + \frac{5}{2} = \frac{6}{2} - 1 = 3 - 1 = 2$
- Ecuación 2: $\frac{1}{2} + (-\frac{5}{2}) = -\frac{4}{2} = -2$
- Ecuación 3: $\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

[colback=green!5!white,colframe=green!75!black,title=Solución para $a = -1$]

$$\boxed{x = \frac{1}{2}, \quad y = -\frac{1}{2}, \quad z = -\frac{5}{2}} \quad (54)$$

O en forma de vector solución:

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right) \quad (55)$$

3.2.3. Apartado c) Resolución para $a = 1$

Sustituimos $a = 1$ en el sistema original:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + 2y - z = 2 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases} \quad (56)$$

Como vimos en el apartado a), el sistema es Compatible Indeterminado.

Las ecuaciones 1 y 2 son idénticas, así que trabajamos con:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 & \text{(I)} \\ x + y + 2z = 1 & \text{(II)} \end{cases} \quad (57)$$

Tenemos 2 ecuaciones con 3 incógnitas. Expresamos la solución en función de un parámetro.

Tomamos $z = \lambda$ como parámetro libre.

Restamos la ecuación (II) de la ecuación (I):

$$(x + 2y - z) - (x + y + 2z) = 2 - 1 \quad (58)$$

$$y - 3z = 1 \quad (59)$$

$$y = 1 + 3z = 1 + 3\lambda \quad (60)$$

De la ecuación (II):

$$x + y + 2z = 1 \quad (61)$$

$$x = 1 - y - 2z \quad (62)$$

$$x = 1 - (1 + 3\lambda) - 2\lambda \quad (63)$$

$$x = 1 - 1 - 3\lambda - 2\lambda \quad (64)$$

$$x = -5\lambda \quad (65)$$

Verificación con la ecuación (I):

$$x + 2y - z = -5\lambda + 2(1 + 3\lambda) - \lambda \quad (66)$$

$$= -5\lambda + 2 + 6\lambda - \lambda \quad (67)$$

$$= 2 \quad (68)$$

[colback=green!5!white,colframe=green!75!black,title=Solución para $a = 1$] El sistema tiene infinitas soluciones que dependen del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\begin{cases} x = -5\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}} \quad (69)$$

O en forma vectorial:

$$(x, y, z) = (0, 1, 0) + \lambda(-5, 3, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (70)$$

Ejemplos de soluciones particulares:

- Para $\lambda = 0$: $(x, y, z) = (0, 1, 0)$
- Para $\lambda = 1$: $(x, y, z) = (-5, 4, 1)$
- Para $\lambda = -1$: $(x, y, z) = (5, -2, -1)$

3.3. Ilustración del Problema

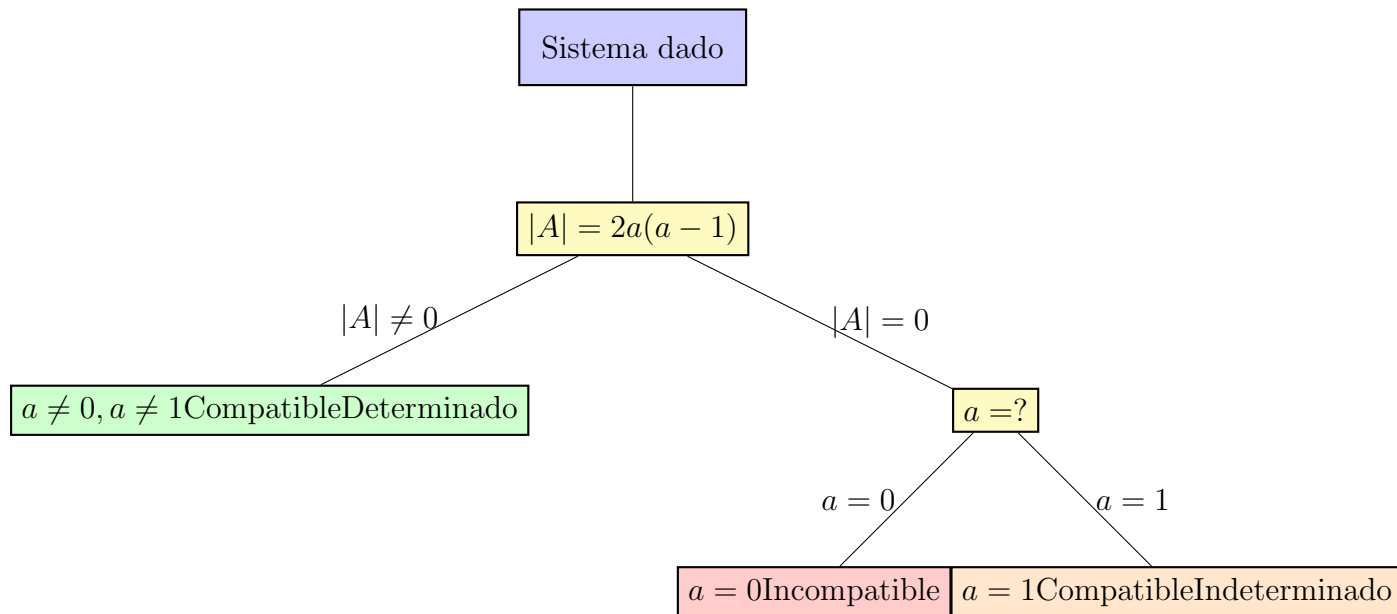


Figura 3: Diagrama de clasificación del sistema según el parámetro a

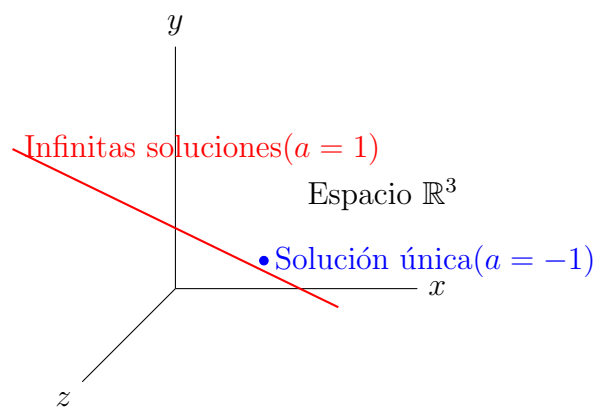


Figura 4: Representación geométrica de las soluciones

4. Ejercicio 4: Operaciones con Matrices

4.1. Enunciado

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (71)$$

- Calcúlese la matriz $D = AB - C$.
- ¿La matriz D posee inversa? En caso afirmativo calcúlese D^{-1} .
- Resuélvase la siguiente ecuación matricial: $(AB - C) \cdot X = 2C$.

4.2. Resolución Completa

4.2.1. Apartado a) Cálculo de $D = AB - C$

Paso 1: Verificar compatibilidad de dimensiones

- A es de orden 3×2
- B es de orden 2×3
- AB será de orden 3×3
- C es de orden 3×3
- Por tanto, $AB - C$ es posible

Paso 2: Calcular el producto AB

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (72)$$

Calculamos cada elemento del producto:

Fila 1 de AB:

$$(AB)_{11} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 3 + 4 = 7 \quad (73)$$

$$(AB)_{12} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 1 - 2 = -1 \quad (74)$$

$$(AB)_{13} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 1 + 2 = 3 \quad (75)$$

Fila 2 de AB:

$$(AB)_{21} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 6 + 2 = 8 \quad (76)$$

$$(AB)_{22} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 2 - 1 = 1 \quad (77)$$

$$(AB)_{23} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2 + 1 = 3 \quad (78)$$

Fila 3 de AB:

$$(AB)_{31} = 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 0 + 2 = 2 \quad (79)$$

$$(AB)_{32} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0 - 1 = -1 \quad (80)$$

$$(AB)_{33} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0 + 1 = 1 \quad (81)$$

Por tanto:

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 8 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (82)$$

Paso 3: Calcular $D = AB - C$

$$D = AB - C \quad (83)$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 8 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (84)$$

$$= \begin{pmatrix} 7-1 & -1-1 & 3-0 \\ 8-(-1) & 1-2 & 3-1 \\ 2-1 & -1-(-1) & 1-1 \end{pmatrix} \quad (85)$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 9 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (86)$$

[colback=green!5!white,colframe=green!75!black,title=Respuesta apartado a)]

$$D = AB - C = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 9 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (87)$$

4.2.2. Apartado b) Existencia y cálculo de D^{-1}

Una matriz cuadrada tiene inversa si y solo si su determinante es distinto de cero.

Paso 1: Calcular $|D|$

Desarrollamos por la tercera fila (tiene dos ceros):

$$|D| = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 9 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (88)$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 0 + 0 \quad (89)$$

$$= 1 \cdot [(-2)(2) - (3)(-1)] \quad (90)$$

$$= 1 \cdot [-4 + 3] \quad (91)$$

$$= 1 \cdot (-1) \quad (92)$$

$$= -1 \neq 0 \quad (93)$$

Como $|D| = -1 \neq 0$, la matriz D **SÍ tiene inversa**.

Paso 2: Calcular D^{-1} mediante la fórmula

$$D^{-1} = \frac{1}{|D|} \cdot (\text{Adj}(D))^t = \frac{1}{-1} \cdot (\text{Adj}(D))^t = -(\text{Adj}(D))^t \quad (94)$$

Necesitamos calcular la matriz adjunta, que es la matriz de cofactores.

Cálculo de cofactores:

El cofactor $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, donde M_{ij} es el menor complementario.

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot [(-1)(0) - (2)(0)] = 0 \quad (95)$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot [(9)(0) - (2)(1)] = -1 \cdot (-2) = 2 \quad (96)$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 9 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot [(9)(0) - (-1)(1)] = 1 \cdot 1 = 1 \quad (97)$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot [(-2)(0) - (3)(0)] = 0 \quad (98)$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot [(6)(0) - (3)(1)] = -3 \quad (99)$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot [(6)(0) - (-2)(1)] = -1 \cdot 2 = -2 \quad (100)$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot [(-2)(2) - (3)(-1)] = -4 + 3 = -1 \quad (101)$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot [(6)(2) - (3)(9)] = -1 \cdot [12 - 27] = -1 \cdot (-15) = 15 \quad (102)$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot [(6)(-1) - (-2)(9)] = -6 + 18 = 12 \quad (103)$$

Matriz de cofactores (Adjunta):

$$\text{Adj}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ -1 & 15 & 12 \end{pmatrix} \quad (104)$$

Traspuesta de la adjunta:

$$(\text{Adj}(D))^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 15 \\ 1 & -2 & 12 \end{pmatrix} \quad (105)$$

Matriz inversa:

$$D^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 15 \\ 1 & -2 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -15 \\ -1 & 2 & -12 \end{pmatrix} \quad (106)$$

Verificación: $D \cdot D^{-1} = I$

$$D \cdot D^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 9 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -15 \\ -1 & 2 & -12 \end{pmatrix} \quad (107)$$

Fila 1:

$$(6)(0) + (-2)(-2) + (3)(-1) = 0 + 4 - 3 = 1 \quad (108)$$

$$(6)(0) + (-2)(3) + (3)(2) = 0 - 6 + 6 = 0 \quad (109)$$

$$(6)(1) + (-2)(-15) + (3)(-12) = 6 + 30 - 36 = 0 \quad (110)$$

Fila 2:

$$(9)(0) + (-1)(-2) + (2)(-1) = 0 + 2 - 2 = 0 \quad (111)$$

$$(9)(0) + (-1)(3) + (2)(2) = 0 - 3 + 4 = 1 \quad (112)$$

$$(9)(1) + (-1)(-15) + (2)(-12) = 9 + 15 - 24 = 0 \quad (113)$$

Fila 3:

$$(1)(0) + (0)(-2) + (0)(-1) = 0 \quad (114)$$

$$(1)(0) + (0)(3) + (0)(2) = 0 \quad (115)$$

$$(1)(1) + (0)(-15) + (0)(-12) = 1 \quad (116)$$

$$D \cdot D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad (117)$$

[colback=green!5!white,colframe=green!75!black,title=Respuesta apartado b)] La matriz D SÍ posee inversa porque $|D| = -1 \neq 0$.

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -15 \\ -1 & 2 & -12 \end{pmatrix} \quad (118)$$

4.2.3. Apartado c) Resolución de $(AB - C) \cdot X = 2C$

Sabemos que $AB - C = D$, por tanto la ecuación es:

$$D \cdot X = 2C \quad (119)$$

Como D tiene inversa, podemos multiplicar ambos lados por D^{-1} a la izquierda:

$$D^{-1} \cdot (D \cdot X) = D^{-1} \cdot (2C) \quad (120)$$

$$(D^{-1} \cdot D) \cdot X = 2(D^{-1} \cdot C) \quad (121)$$

$$I \cdot X = 2(D^{-1} \cdot C) \quad (122)$$

$$X = 2D^{-1}C \quad (123)$$

Paso 1: Calcular $D^{-1} \cdot C$

$$D^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -15 \\ -1 & 2 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (124)$$

Fila 1:

$$(0)(1) + (0)(-1) + (1)(1) = 0 + 0 + 1 = 1 \quad (125)$$

$$(0)(1) + (0)(2) + (1)(-1) = 0 + 0 - 1 = -1 \quad (126)$$

$$(0)(0) + (0)(1) + (1)(1) = 0 + 0 + 1 = 1 \quad (127)$$

Fila 2:

$$(-2)(1) + (3)(-1) + (-15)(1) = -2 - 3 - 15 = -20 \quad (128)$$

$$(-2)(1) + (3)(2) + (-15)(-1) = -2 + 6 + 15 = 19 \quad (129)$$

$$(-2)(0) + (3)(1) + (-15)(1) = 0 + 3 - 15 = -12 \quad (130)$$

Fila 3:

$$(-1)(1) + (2)(-1) + (-12)(1) = -1 - 2 - 12 = -15 \quad (131)$$

$$(-1)(1) + (2)(2) + (-12)(-1) = -1 + 4 + 12 = 15 \quad (132)$$

$$(-1)(0) + (2)(1) + (-12)(1) = 0 + 2 - 12 = -10 \quad (133)$$

$$D^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -20 & 19 & -12 \\ -15 & 15 & -10 \end{pmatrix} \quad (134)$$

Paso 2: Calcular $X = 2(D^{-1} \cdot C)$

$$X = 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -20 & 19 & -12 \\ -15 & 15 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -40 & 38 & -24 \\ -30 & 30 & -20 \end{pmatrix} \quad (135)$$

Verificación: $D \cdot X = 2C$

$$D \cdot X = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 9 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -40 & 38 & -24 \\ -30 & 30 & -20 \end{pmatrix} \quad (136)$$

Fila 1, columna 1: $(6)(2) + (-2)(-40) + (3)(-30) = 12 + 80 - 90 = 2$

Verificamos que coincide con $2C_{11} = 2(1) = 2$

[colback=green!5!white,colframe=green!75!black,title=Respuesta apartado c)]

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -40 & 38 & -24 \\ -30 & 30 & -20 \end{pmatrix} \quad (137)$$

4.3. Ilustración del Problema

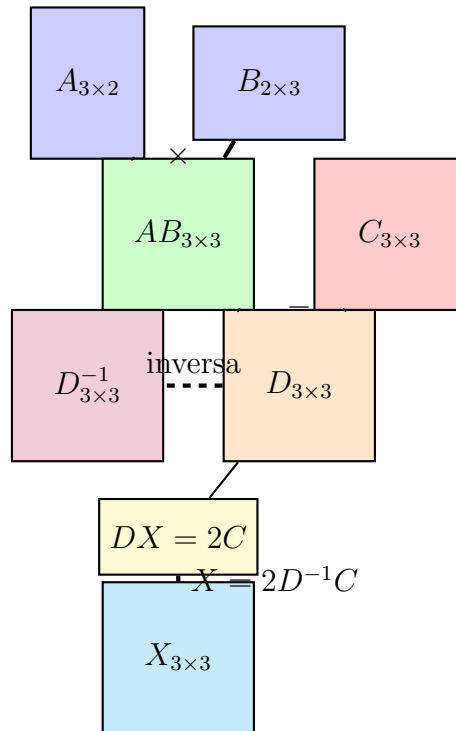


Figura 5: Esquema de las operaciones matriciales del ejercicio

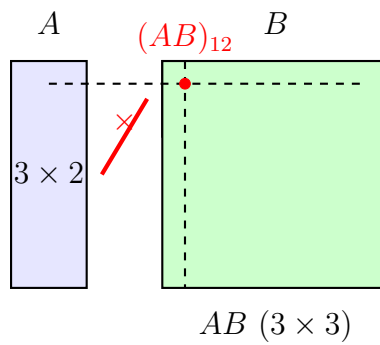


Figura 6: Visualización del producto de matrices A y B

5. Ejercicio 5: Sistema de Ecuaciones - Precios de Frutos Secos

5.1. Enunciado

He comprado 5 kg de almendras, 3 kg de avellanas y 2 kg de cacahuetes, y he pagado por todo ello 98 euros. La diferencia entre el precio por kg de las avellanas y de los cacahuetes, es igual al precio por kg de las almendras. Si hubiera comprado 1 kg de cada fruto seco, hubiera pagado 32 euros.

- Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el precio por kg de cada fruto seco.
- Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior.

5.2. Resolución Completa

5.2.1. Apartado a) Planteamiento del Sistema

Definición de variables:

Sea:

- x = precio por kg de almendras (en euros)
- y = precio por kg de avellanas (en euros)
- z = precio por kg de cacahuetes (en euros)

Traducción de las condiciones del problema:

Condición 1: "He comprado 5 kg de almendras, 3 kg de avellanas y 2 kg de cacahuetes, y he pagado 98 euros"

$$5x + 3y + 2z = 98 \quad (138)$$

Condición 2: "La diferencia entre el precio por kg de las avellanas y de los cacahuetes, es igual al precio por kg de las almendras"

$$y - z = x \quad \Rightarrow \quad x - y + z = 0 \quad (139)$$

Condición 3: "Si hubiera comprado 1 kg de cada fruto seco, hubiera pagado 32 euros"

$$x + y + z = 32 \quad (140)$$

[colback=blue!5!white,colframe=blue!75!black,title=Sistema de Ecuaciones Planteado]

$$\begin{cases} 5x + 3y + 2z = 98 \\ x - y + z = 0 \\ x + y + z = 32 \end{cases} \quad (141)$$

5.2.2. Apartado b) Resolución del Sistema**Método de reducción (suma y resta de ecuaciones)**

Trabajaremos con las ecuaciones:

$$5x + 3y + 2z = 98 \quad (\text{I}) \quad (142)$$

$$x - y + z = 0 \quad (\text{II}) \quad (143)$$

$$x + y + z = 32 \quad (\text{III}) \quad (144)$$

Paso 1: Sumar ecuaciones (II) y (III) para eliminar y

$$(\text{II}) + (\text{III}) : (x - y + z) + (x + y + z) = 0 + 32 \quad (145)$$

$$2x + 2z = 32 \quad (146)$$

$$x + z = 16 \quad (\text{IV}) \quad (147)$$

Paso 2: Restar ecuación (II) de (III) para eliminar x y z

$$(\text{III}) - (\text{II}) : (x + y + z) - (x - y + z) = 32 - 0 \quad (148)$$

$$2y = 32 \quad (149)$$

$$y = 16 \text{ euros/kg} \quad (150)$$

Paso 3: Sustituir $y = 16$ en ecuación (III)

$$x + 16 + z = 32 \quad (151)$$

$$x + z = 16 \quad (\text{confirma ecuación IV}) \quad (152)$$

Paso 4: Sustituir $y = 16$ en ecuación (I)

$$5x + 3(16) + 2z = 98 \quad (153)$$

$$5x + 48 + 2z = 98 \quad (154)$$

$$5x + 2z = 50 \quad (\text{V}) \quad (155)$$

Paso 5: Resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

De (IV): $z = 16 - x$

Sustituimos en (V):

$$5x + 2(16 - x) = 50 \quad (156)$$

$$5x + 32 - 2x = 50 \quad (157)$$

$$3x = 18 \quad (158)$$

$$x = 6 \text{ euros/kg} \quad (159)$$

Paso 6: Calcular z

De (IV):

$$z = 16 - x = 16 - 6 = 10 \text{ euros/kg} \quad (160)$$

Verificación de la solución:

Comprobamos las tres ecuaciones originales:

- Ecuación (I): $5(6) + 3(16) + 2(10) = 30 + 48 + 20 = 98$
- Ecuación (II): $6 - 16 + 10 = 0$
- Ecuación (III): $6 + 16 + 10 = 32$

Verificación de las condiciones del problema:

- Compra de 5 kg almendras + 3 kg avellanas + 2 kg cacahuetes:

$$5(6) + 3(16) + 2(10) = 30 + 48 + 20 = 98 \text{ euros}$$

- Diferencia precio avellanas - cacahuetes = precio almendras:

$$16 - 10 = 6 \text{ euros}$$

- Compra de 1 kg de cada uno:

$$6 + 16 + 10 = 32 \text{ euros}$$

[colback=green!5!white,colframe=green!75!black,title=Solución Final] Los precios por kilogramo de cada fruto seco son:

Almendras: $x = 6$ euros/kg Avellanas: $y = 16$ euros/kg Cacahuetes: $z = 10$ euros/kg	(161)

5.3. Ilustración del Problema

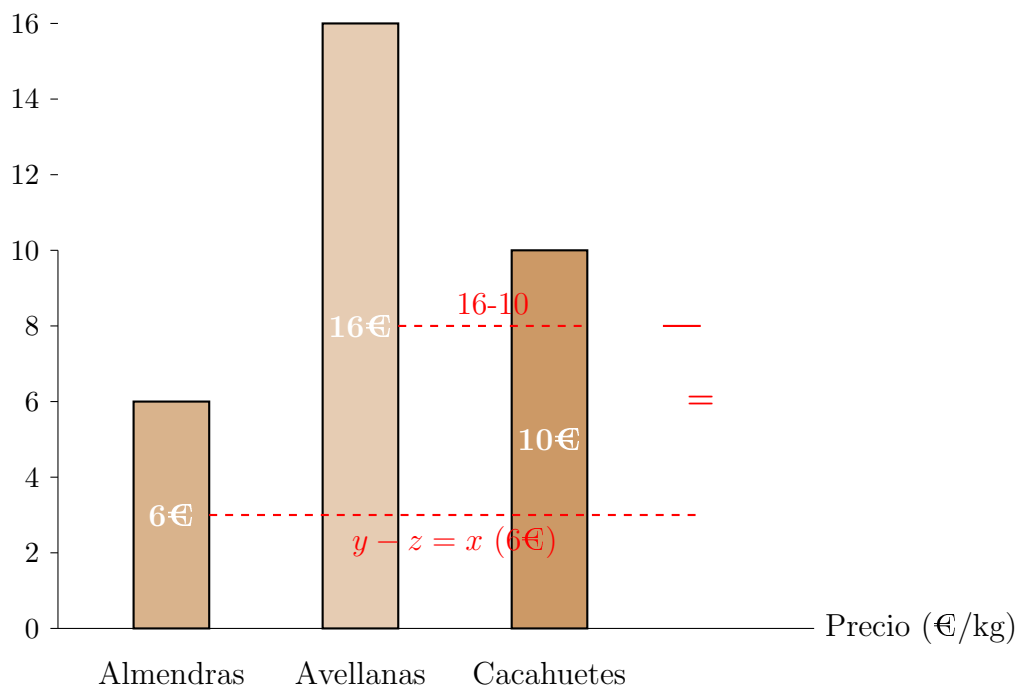


Figura 7: Diagrama de precios de los frutos secos

Compra Total: 98 euros


$$5 \text{ kg almendras} \times 6\text{€} = 30\text{€}$$


$$3 \text{ kg avellanas} \times 16\text{€} = 48\text{€}$$

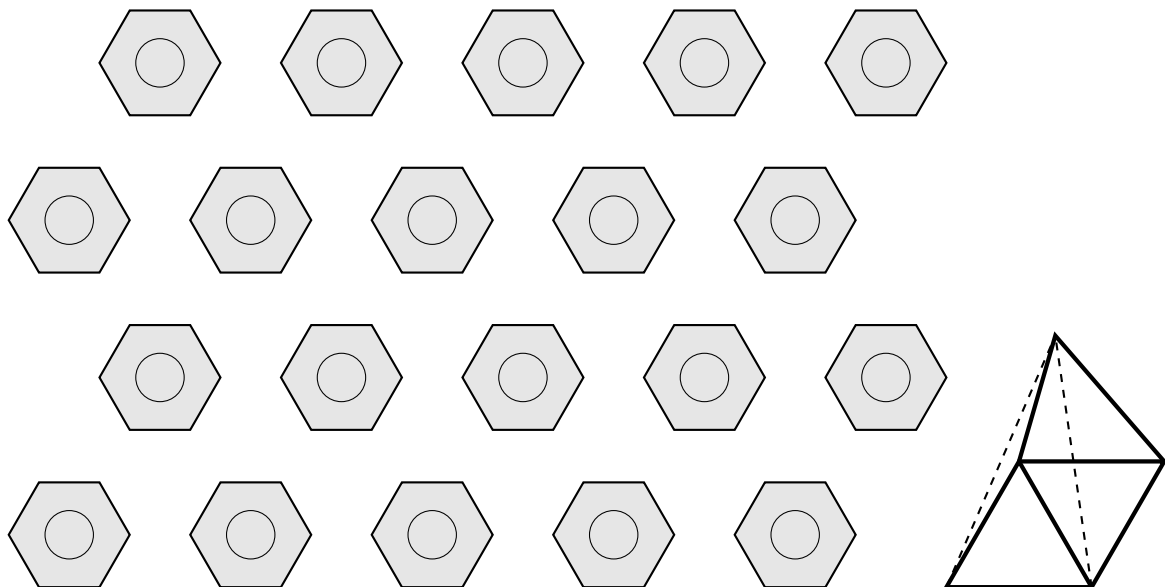

$$2 \text{ kg cacahuetes} \times 10\text{€} = 20\text{€}$$

$$\text{TOTAL: } 30 + 48 + 20 = 98\text{€}$$

Figura 8: Desglose de la compra realizada

Homenaje a M.C. Escher

Maestro de las ilusiones geométricas
y la representación matemática del arte



*«Solo aquellos que intentan lo absurdo
lograrán lo imposible.»*

— M.C. Escher

Las matemáticas y el arte se encuentran en la perfección de la geometría,
en la simetría del universo y en la belleza de los patrones infinitos.

Nº1.- Calcula los siguientes límites. Caso de que te encuentres con una indeterminación debes indicarla. Si el resultado se obtiene directamente debes explicar la razón por la que se obtiene dicho resultado.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x^3 + x - 1}{2x - x^2 + x^3 + 1} \quad & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 2x^2 - 3x} \quad & \text{c) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-x^3 + 1}{x^3 - 3x + 2} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^3 + 2x^2 + 15x - 1}{x^2 + 34x - 1} \quad & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{x-2} - \frac{x+6}{x^2-4} \right) \end{aligned}$$

(2,5 PUNTOS)

Nº2.- Dada la siguiente función a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} ax - 3 & \text{si } x < -1 \\ 2x - 1 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ -x^2 + bx & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- Calcúlense los valores de los parámetros a y b para que la función f sea continua en todo $\mathbb{R}$
- Representa la gráfica de dicha función.

(2 PUNTOS)

Nº3.- Dada la función: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Calcúlese el valor de los parámetros a, b, c para que la función pase por el punto de coordenadas (2,8) y tenga un mínimo en el punto de coordenadas (1,5).
- Representa la gráfica de la función f(x)

(2 PUNTOS)

Nº4.- En los estudios de mercado previos a su implantación en una zona, una franquicia de tiendas de moda ha estimado que sus beneficios semanales (en miles de euros) dependen del número de tiendas que tiene en funcionamiento de acuerdo con la expresión

$$B(n) = -8n^3 + 60n^2 - 96n$$

siendo n el número de tiendas en funcionamiento. Determina:

- El número de tiendas que debe tener en funcionamiento dicha franquicia para maximizar sus beneficios semanales
- El valor de dichos beneficios máximos semanales.
- La expresión que nos indica los beneficios medios semanales por cada tienda que dicha franquicia tiene en funcionamiento.

(2,5 PUNTOS)

Nº5.- Calcula las asíntotas de la siguiente función: $f(x) = \frac{3x^2}{x^2-9}$

(1 PUNTO)

SUERTE JÓVENES

EXAMEN DE MATEMÁTICAS

2º Bachillerato B/C

02 de Febrero de 2023

SOLUCIONES COMPLETAS



*“El rigor es para las matemáticas lo que
la moralidad es para los hombres.”*

— Augustin-Louis Cauchy

Junta de Castilla y León

Centro Bilingüe

Índice

1. Ejercicio 1: Cálculo de Límites	2
1.1. Apartado a)	2
1.2. Apartado b)	2
1.3. Apartado c)	3
1.4. Apartado d)	4
1.5. Apartado e)	5
2. Ejercicio 2: Función a Trozos y Continuidad	7
2.1. Apartado a): Cálculo de parámetros	7
2.2. Apartado b): Representación gráfica	8
3. Ejercicio 3: Función Cuadrática con Condiciones	10
3.1. Apartado a): Cálculo de parámetros	10
3.2. Apartado b): Representación gráfica	11
4. Ejercicio 4: Optimización de Beneficios	13
4.1. Apartado a): Número óptimo de tiendas	13
4.2. Apartado b): Beneficios máximos	14
4.3. Apartado c): Beneficios medios por tienda	14
5. Ejercicio 5: Asíntotas de una Función Racional	16

1. Ejercicio 1: Cálculo de Límites

Enunciado

Calcula los siguientes límites. Caso de que te encuentres con una indeterminación debes indicarla. Si el resultado se obtiene directamente debes explicar la razón por la que se obtiene dicho resultado.

1.1. Apartado a)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x^3 + x - 1}{2x - x^2 + x^3 + 1}$$

Solución:

Al sustituir $x \rightarrow -\infty$ obtenemos una forma indeterminada del tipo $\frac{-\infty}{\infty}$.

Indeterminación: $\frac{\infty}{\infty}$

Identificamos los términos de mayor grado:

- Numerador: término dominante es $-3x^3$
- Denominador: término dominante es x^3

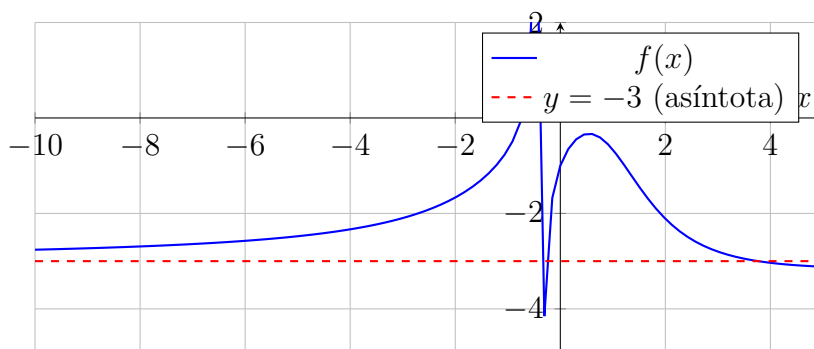
Dividimos numerador y denominador por x^3 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x^3 + x - 1}{2x - x^2 + x^3 + 1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2}{x^3} - \frac{3x^3}{x^3} + \frac{x}{x^3} - \frac{1}{x^3}}{\frac{2x}{x^3} - \frac{x^2}{x^3} + \frac{x^3}{x^3} + \frac{1}{x^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} - 3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{x^3}} \end{aligned}$$

Cuando $x \rightarrow -\infty$: $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$, $\frac{1}{x^3} \rightarrow 0$

$$= \frac{0 - 3 + 0 - 0}{0 - 0 + 1 + 0} = \frac{-3}{1} = \boxed{-3}$$

Respuesta: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x^3 + x - 1}{2x - x^2 + x^3 + 1} = -3$



1.2. Apartado b)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 2x^2 - 3x}$$

Solución:

Sustitución directa: $\frac{1^3-1}{1^3+2(1)^2-3(1)} = \frac{0}{0}$

Indeterminación: $\frac{0}{0}$

Factorizamos numerador y denominador:

- Numerador: $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ (diferencia de cubos)
- Denominador: $x^3 + 2x^2 - 3x = x(x^2 + 2x - 3)$

Para factorizar $x^2 + 2x - 3$, buscamos dos números que multiplicados den -3 y sumados den 2 : son 3 y -1 .

$$x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$$

Por tanto:

$$x^3 + 2x^2 - 3x = x(x + 3)(x - 1)$$

Sustituyendo:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x(x + 3)(x - 1)}$$

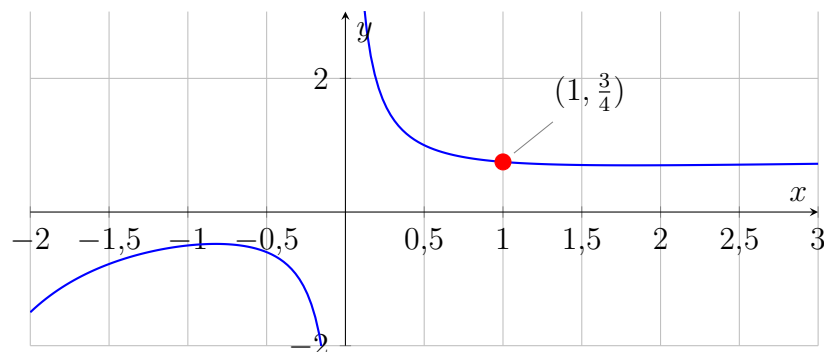
Simplificamos el factor común $(x - 1)$:

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x(x + 3)}$$

Sustituimos $x = 1$:

$$= \frac{1^2 + 1 + 1}{1(1 + 3)} = \frac{3}{4}$$

Respuesta: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \frac{3}{4}$

**1.3. Apartado c)**

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-x^3 + 1}{x^3 - 3x + 2}$$

Solución:

Sustitución directa:

$$\frac{-(-2)^3 + 1}{(-2)^3 - 3(-2) + 2} = \frac{-(-8) + 1}{-8 + 6 + 2} = \frac{8 + 1}{0} = \frac{9}{0}$$

El numerador es $9 \neq 0$ y el denominador tiende a 0.

Forma: $\frac{9}{0}$ (límite infinito)

Estudiamos el signo del denominador $D(x) = x^3 - 3x + 2$ alrededor de $x = -2$:

■ Para $x = -2,1$: $D(-2,1) = (-2,1)^3 - 3(-2,1) + 2 = -9,261 + 6,3 + 2 = -0,961 < 0$

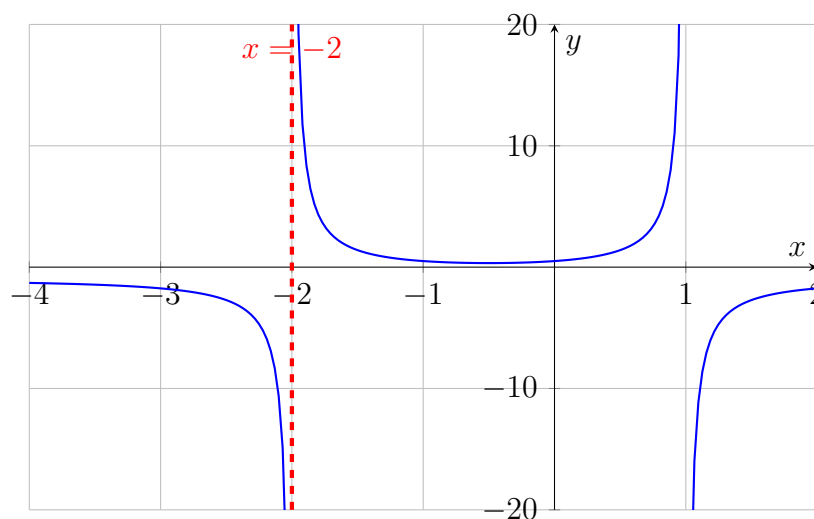
■ Para $x = -1,9$: $D(-1,9) = (-1,9)^3 - 3(-1,9) + 2 = -6,859 + 5,7 + 2 = 0,841 > 0$

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{9}{D(x)} = \frac{9}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{9}{D(x)} = \frac{9}{0^+} = +\infty$$

Respuesta: El límite no existe. Hay una asíntota vertical en $x = -2$

**1.4. Apartado d)**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^3 + 2x^2 + 15x - 1}{x^2 + 34x - 1}$$

Solución:

Términos dominantes: numerador $-3x^3$, denominador x^2

Indeterminación: $\frac{\infty}{\infty}$

Dividimos numerador y denominador por x^2 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^3 + 2x^2 + 15x - 1}{x^2 + 34x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-3x^3}{x^2} + \frac{2x^2}{x^2} + \frac{15x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{34x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}$$

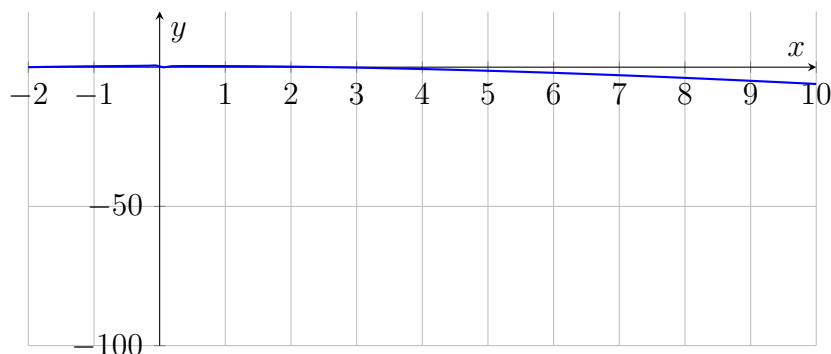
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x + 2 + \frac{15}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{34}{x} - \frac{1}{x^2}}$$

Cuando $x \rightarrow \infty$:

- Numerador: $-3x \rightarrow -\infty$, $\frac{15}{x} \rightarrow 0$, $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$
- Denominador: $\frac{34}{x} \rightarrow 0$, $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$, por tanto $\rightarrow 1$

$$= \frac{-\infty}{1} = -\infty$$

Respuesta: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^3 + 2x^2 + 15x - 1}{x^2 + 34x - 1} = -\infty$



1.5. Apartado e)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{x-2} - \frac{x+6}{x^2-4} \right)$$

Solución:

Sustitución directa produce $\frac{2}{0} - \frac{8}{0}$

Indeterminación: $\infty - \infty$

Factorizamos: $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

Común denominador $(x-2)(x+2)$:

$$\frac{2}{x-2} - \frac{x+6}{(x-2)(x+2)} = \frac{2(x+2) - (x+6)}{(x-2)(x+2)}$$

Desarrollamos el numerador:

$$= \frac{2x + 4 - x - 6}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-2}{(x-2)(x+2)}$$

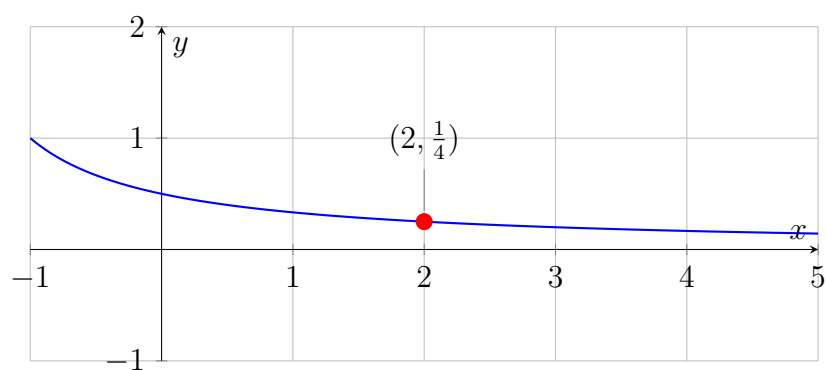
Simplificamos el factor común $(x-2)$ (válido para $x \neq 2$):

$$= \frac{1}{x+2}$$

Ahora sustituimos $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

Respuesta: $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{x-2} - \frac{x+6}{x^2-4} \right) = \frac{1}{4}$



2. Ejercicio 2: Función a Trozos y Continuidad

Enunciado

Dada la siguiente función a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} ax - 3 & \text{si } x < -1 \\ 2x - 1 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ -x^2 + bx & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Calcúlense los valores de los parámetros a y b para que la función f sea continua en todo $\mathbb{R}$

b) Representa la gráfica de dicha función.

2.1. Apartado a): Cálculo de parámetros

Solución:

Una función es continua en un punto x_0 si se cumplen tres condiciones:

1. Existe $f(x_0)$
2. Existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Los puntos críticos donde la función cambia de expresión son $x = -1$ y $x = 1$.

Continuidad en $x = -1$:

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (ax - 3) = a(-1) - 3 = -a - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (2x - 1) = 2(-1) - 1 = -3$$

El valor de la función en $x = -1$ (según la definición, pertenece al segundo trozo):

$$f(-1) = 2(-1) - 1 = -3$$

Para que haya continuidad:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$$

$$-a - 3 = -3$$

$$-a = 0$$

$$\boxed{a = 0}$$

Continuidad en $x = 1$:

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x - 1) = 2(1) - 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x^2 + bx) = -(1)^2 + b(1) = -1 + b$$

El valor de la función en $x = 1$ (pertenece al tercer trozo):

$$f(1) = -(1)^2 + b(1) = -1 + b$$

Para que haya continuidad:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

$$1 = -1 + b$$

$$b = 2$$

$$\boxed{b = 2}$$

Verificación:

Con $a = 0$ y $b = 2$, la función continua es:

$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x < -1 \\ 2x - 1 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ -x^2 + 2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Respuesta: $a = 0$ y $b = 2$

2.2. Apartado b): Representación gráfica

Análisis de cada trozo:

- **Primer trozo** ($x < -1$): $f(x) = -3$

Función constante horizontal en $y = -3$

- **Segundo trozo** ($-1 \leq x < 1$): $f(x) = 2x - 1$

Recta con pendiente $m = 2$ y ordenada en el origen $n = -1$

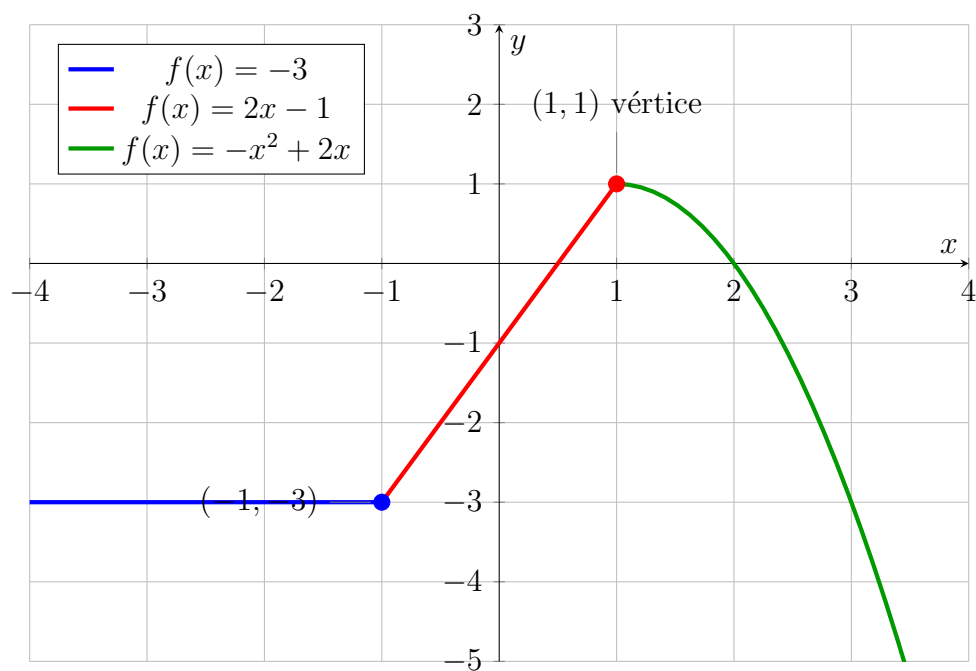
Puntos: $(-1, -3)$ y $(1, 1)$

- **Tercer trozo** ($x \geq 1$): $f(x) = -x^2 + 2x$

Parábola que abre hacia abajo.

Forma canónica: $f(x) = -(x^2 - 2x) = -(x^2 - 2x + 1 - 1) = -(x - 1)^2 + 1$

Vértice: $(1, 1)$



La función es continua en todo $\mathbb{R}$, como se puede observar en la gráfica: no hay saltos ni discontinuidades.

3. Ejercicio 3: Función Cuadrática con Condiciones

Enunciado

Dada la función: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

a) Calcúlese el valor de los parámetros a , b , c para que la función pase por el punto de coordenadas $(2, 8)$ y tenga un mínimo en el punto de coordenadas $(1, 5)$.

b) Representa la gráfica de la función $f(x)$

3.1. Apartado a): Cálculo de parámetros

Condiciones del problema:

1. La función pasa por el punto $(2, 8)$: $f(2) = 8$
2. Tiene un mínimo en el punto $(1, 5)$:
 - $f(1) = 5$
 - $f'(1) = 0$ (la derivada se anula en los extremos)

Solución:

De la condición 1: $f(2) = 8$

$$a(2)^2 + b(2) + c = 8$$

$$4a + 2b + c = 8 \quad (\text{Ecuación 1})$$

De la condición 2: $f(1) = 5$

$$a(1)^2 + b(1) + c = 5$$

$$a + b + c = 5 \quad (\text{Ecuación 2})$$

Derivada: $f'(x) = 2ax + b$

Como hay un extremo en $x = 1$: $f'(1) = 0$

$$2a(1) + b = 0$$

$$2a + b = 0$$

$$b = -2a \quad (\text{Ecuación 3})$$

Resolvemos el sistema:

Sustituyendo (3) en (2):

$$a + (-2a) + c = 5$$

$$-a + c = 5$$

$$c = 5 + a \quad (\text{Ecuación 4})$$

Sustituyendo (3) y (4) en (1):

$$4a + 2(-2a) + (5 + a) = 8$$

$$4a - 4a + 5 + a = 8$$

$$a + 5 = 8$$

$$a = 3$$

$$\text{De (3): } b = -2(3) = -6$$

$$\text{De (4): } c = 5 + 3 = 8$$

$$\boxed{a = 3, \quad b = -6, \quad c = 8}$$

Verificación:

- $f(x) = 3x^2 - 6x + 8$
- $f(2) = 3(4) - 6(2) + 8 = 12 - 12 + 8 = 8 \checkmark$
- $f(1) = 3(1) - 6(1) + 8 = 3 - 6 + 8 = 5 \checkmark$
- $f'(x) = 6x - 6$, luego $f'(1) = 6 - 6 = 0 \checkmark$
- $f''(x) = 6 > 0 \Rightarrow$ hay un mínimo $\checkmark$

Respuesta: La función es $f(x) = 3x^2 - 6x + 8$

3.2. Apartado b): Representación gráfica

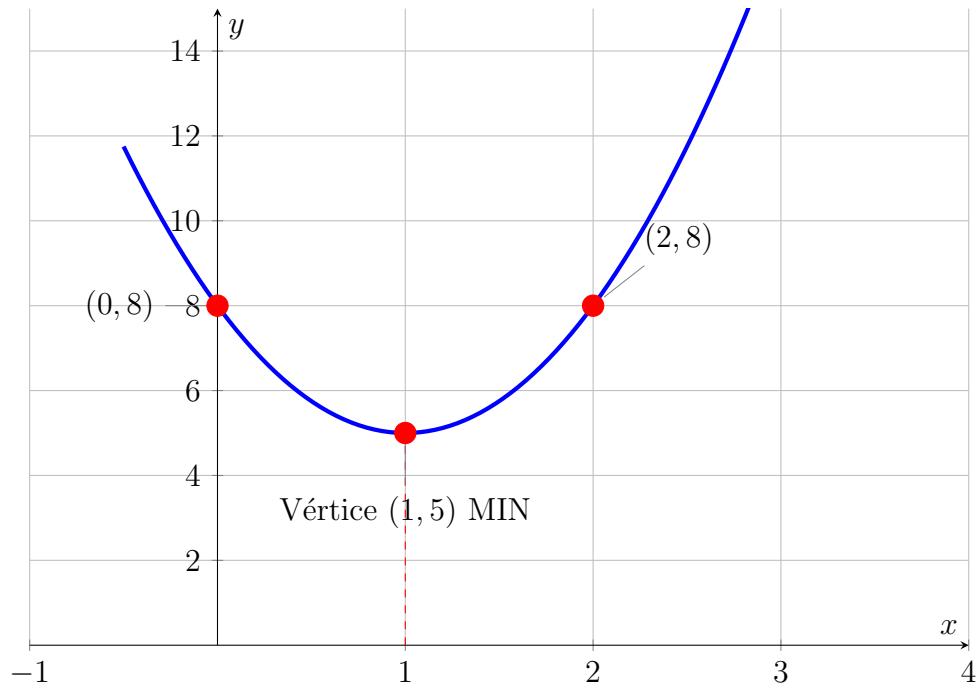
Análisis de la función $f(x) = 3x^2 - 6x + 8$:

Forma canónica (completando el cuadrado):

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x^2 - 2x) + 8 = 3(x^2 - 2x + 1 - 1) + 8 \\ &= 3[(x - 1)^2 - 1] + 8 = 3(x - 1)^2 - 3 + 8 \\ &= 3(x - 1)^2 + 5 \end{aligned}$$

Características:

- Vértice: $(1, 5)$ (punto mínimo)
- Eje de simetría: $x = 1$
- Abre hacia arriba ($a = 3 > 0$)
- Ordenada en el origen: $f(0) = 8$
- Pasa por $(2, 8)$
- No tiene raíces reales: discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 96 = -60 < 0$



La parábola tiene su mínimo en $(1, 5)$ y es simétrica respecto a la recta $x = 1$.

4. Ejercicio 4: Optimización de Beneficios

Enunciado

En los estudios de mercado previos a su implantación en una zona, una franquicia de tiendas de moda ha estimado que sus beneficios semanales (en miles de euros) dependen del número de tiendas que tiene en funcionamiento de acuerdo con la expresión

$$B(n) = -8n^3 + 60n^2 - 96n$$

siendo n el número de tiendas en funcionamiento. Determina:

- El número de tiendas que debe tener en funcionamiento dicha franquicia para maximizar sus beneficios semanales
- El valor de dichos beneficios máximos semanales.
- La expresión que nos indica los beneficios medios semanales por cada tienda que dicha franquicia tiene en funcionamiento.

4.1. Apartado a): Número óptimo de tiendas

Solución:

Para encontrar los máximos y mínimos de una función, calculamos su derivada e igualamos a cero.

$$B(n) = -8n^3 + 60n^2 - 96n$$

Derivada:

$$B'(n) = \frac{d}{dn}(-8n^3 + 60n^2 - 96n)$$

$$B'(n) = -24n^2 + 120n - 96$$

Igualemos a cero para encontrar los puntos críticos:

$$-24n^2 + 120n - 96 = 0$$

Dividimos toda la ecuación entre -24 :

$$n^2 - 5n + 4 = 0$$

Factorizamos (buscamos dos números que multiplicados den 4 y sumados den -5 : son -4 y -1):

$$(n - 4)(n - 1) = 0$$

Soluciones:

$$n = 1 \quad \text{o} \quad n = 4$$

Determinamos cuál es máximo:

Calculamos la segunda derivada:

$$B''(n) = \frac{d}{dn}(-24n^2 + 120n - 96)$$

$$B''(n) = -48n + 120$$

Evaluamos en los puntos críticos:

- En $n = 1$: $B''(1) = -48(1) + 120 = 72 > 0 \Rightarrow$ **Mínimo**
- En $n = 4$: $B''(4) = -48(4) + 120 = -192 + 120 = -72 < 0 \Rightarrow$ **Máximo**

Respuesta: El número óptimo de tiendas es $n = 4$ tiendas

4.2. Apartado b): Beneficios máximos

Solución:

Evaluamos la función de beneficios en $n = 4$:

$$\begin{aligned} B(4) &= -8(4)^3 + 60(4)^2 - 96(4) \\ &= -8(64) + 60(16) - 384 \\ &= -512 + 960 - 384 \\ &= 64 \text{ miles de euros} \end{aligned}$$

Respuesta: Los beneficios máximos semanales son 64,000 euros

4.3. Apartado c): Beneficios medios por tienda

Solución:

El beneficio medio por tienda es el beneficio total dividido entre el número de tiendas:

$$\overline{B}(n) = \frac{B(n)}{n} = \frac{-8n^3 + 60n^2 - 96n}{n}$$

Simplificamos (para $n \neq 0$):

$$\begin{aligned} \overline{B}(n) &= \frac{-8n^3}{n} + \frac{60n^2}{n} - \frac{96n}{n} \\ \overline{B}(n) &= -8n^2 + 60n - 96 \end{aligned}$$

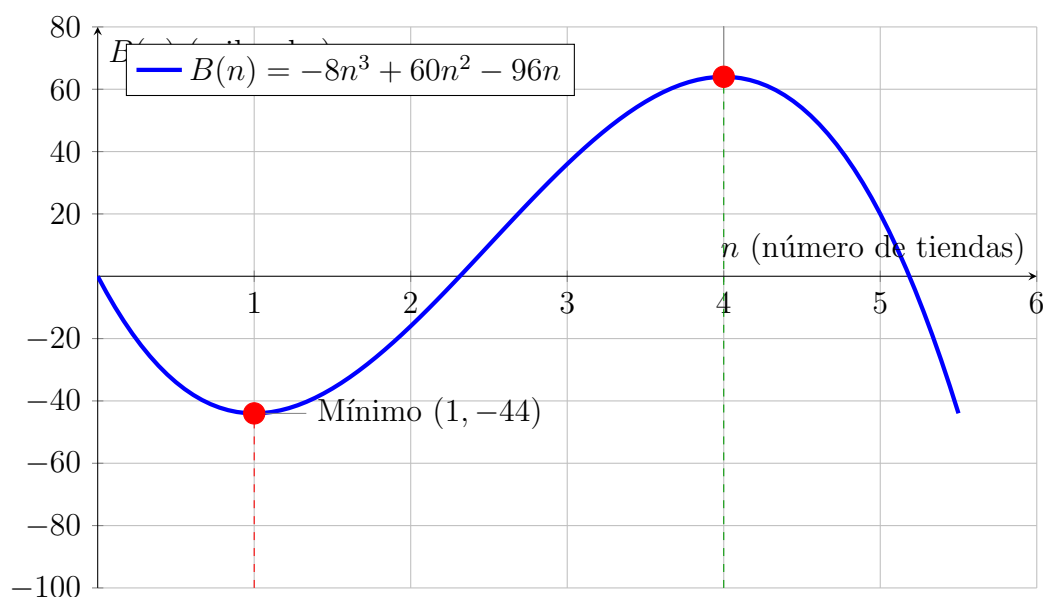
Verificación con $n = 4$:

$$\begin{aligned} \overline{B}(4) &= -8(4)^2 + 60(4) - 96 = -8(16) + 240 - 96 \\ &= -128 + 240 - 96 = 16 \text{ miles de euros por tienda} \end{aligned}$$

Comprobación: 4 tiendas $\times$ 16 mil euros/tienda = 64 mil euros

Respuesta: $\overline{B}(n) = -8n^2 + 60n - 96$ (en miles de euros por tienda)

Gráfica de la función de beneficios:



La gráfica muestra claramente que el beneficio máximo se alcanza con 4 tiendas.

5. Ejercicio 5: Asíntotas de una Función Racional

Enunciado

Calcula las asíntotas de la siguiente función: $f(x) = \frac{3x^2}{x^2-9}$

Solución completa

1. Asíntotas verticales

Las asíntotas verticales ocurren donde el denominador se anula y el numerador no. Igualamos el denominador a cero:

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

Verificamos que el numerador no se anula en estos puntos:

- En $x = 3$: numerador $= 3(3)^2 = 27 \neq 0$
- En $x = -3$: numerador $= 3(-3)^2 = 27 \neq 0$

Comportamiento en $x = 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2}{x^2 - 9} = \frac{27}{0}$$

Estudiamos los límites laterales:

- $x \rightarrow 3^-$: $x^2 - 9 \rightarrow 0^-$ (negativo), luego $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$
- $x \rightarrow 3^+$: $x^2 - 9 \rightarrow 0^+$ (positivo), luego $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$

Comportamiento en $x = -3$:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x^2}{x^2 - 9} = \frac{27}{0}$$

Estudiamos los límites laterales:

- $x \rightarrow -3^-$: $x^2 - 9 \rightarrow 0^+$ (positivo), luego $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty$
- $x \rightarrow -3^+$: $x^2 - 9 \rightarrow 0^-$ (negativo), luego $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty$

Asíntotas verticales: $x = -3$ y $x = 3$

2. Asíntotas horizontales

Calculamos los límites en el infinito:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2/x^2}{(x^2 - 9)/x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{1 - 9/x^2}$$

Cuando $x \rightarrow +\infty$: $\frac{9}{x^2} \rightarrow 0$

$$= \frac{3}{1 - 0} = 3$$

Por simetría (la función es par):

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x^2 - 9} = 3$$

Asíntota horizontal: $y = 3$

3. Asíntotas oblicuas

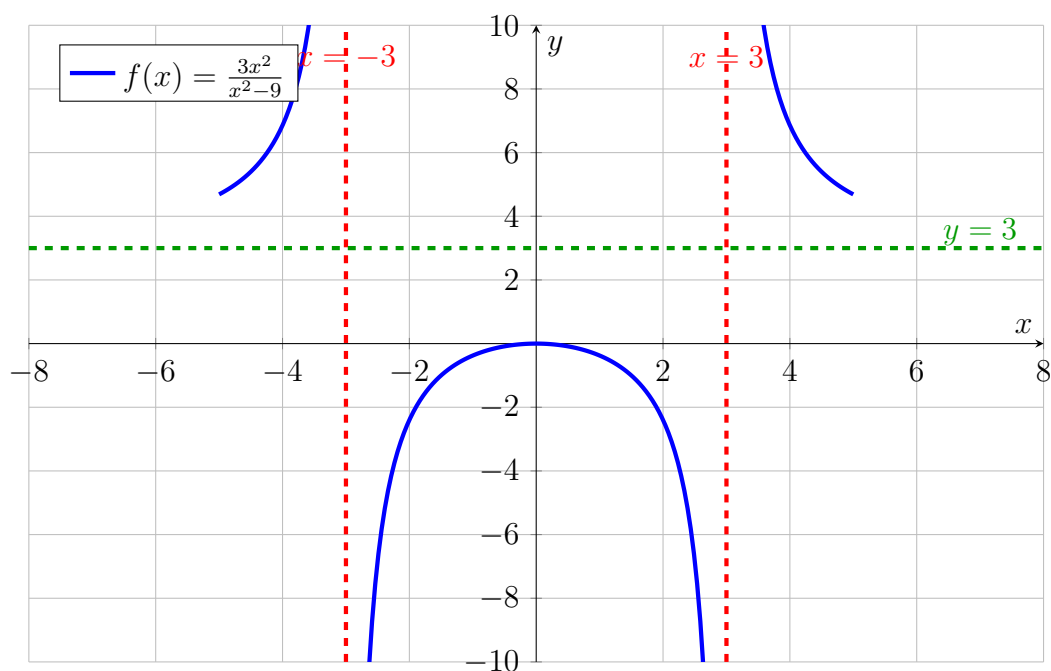
Como existe asíntota horizontal, **no puede haber asíntotas oblicuas**.
(Las asíntotas horizontales y oblicuas son mutuamente excluyentes)

No hay asíntotas oblicuas

Resumen de asíntotas:

Tipo	Ecuación
Asíntotas verticales	$x = -3$ y $x = 3$
Asíntota horizontal	$y = 3$
Asíntotas oblicuas	Ninguna

Gráfica de la función con sus asíntotas:



La función tiene tres ramas separadas por las asíntotas verticales en $x = -3$ y $x = 3$, y todas las ramas se aproximan a la asíntota horizontal $y = 3$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

Arte y Matemáticas

M.C. Escher

“La belleza geométrica de lo imposible”

La imagen de Escher proporcionada
aparecerá aquí en el documento
compilado

La geometría y las matemáticas presentes en la obra de M.C. Escher
demuestran la profunda conexión entre arte y ciencia.

Nº1.- Calcula los siguientes límites. Caso de que te encuentres con una indeterminación debes indicarla. Si el resultado se obtiene directamente debes explicar la razón por la que se obtiene dicho resultado.

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + x^2 + 3x - 1}{2x - x^2 + 2x^3 + 1} \quad b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 3x^2 + 2x} \quad c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^3 + 1}{x^3 - 3x + 2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 + 2x^2 + 15x - 1}{x^2 + 34x - 1} \quad e) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 1})$$

(2,5 PUNTOS)

Nº2.- Dada la siguiente función a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 3 & \text{si } x < -2 \\ 2x + 5 & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ bx + 11 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

- Calcúlese los valores de los parámetros a y b para que la función f sea continua en todo $\mathbb{R}$
- Representa la gráfica de dicha función.

(2 PUNTOS)

Nº3.- Dada la función: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Calcúlese el valor de los parámetros a, b, c para que la función pase por el origen de coordenadas y tenga un extremo relativo en el punto de coordenadas (1,2).
- Representa la gráfica de la función f(x)

(2 PUNTOS)

Nº4.- El saldo de una cuenta bancaria en un periodo de 5 años viene dado por la función:

$$f(t) = -12t^3 + 90t^2 - 144t + 84 \quad 0 \leq t \leq 5$$

siendo t el tiempo en años.

- Calcula los saldos inicial y final.
- ¿En qué momento el saldo de la cuenta es máximo? ¿Y cuándo es mínimo?
- Analiza si en algún momento el saldo es negativo y determina todos los periodos donde se observa un crecimiento del saldo.

(2,5 PUNTOS)

Nº5.- Calcula las asíntotas de la siguiente función: $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 16}$

(1 PUNTO)

SUERTE JÓVENES

EXAMEN DE MATEMÁTICAS

2º BACHILLERATO B/C

02/02/2023

SOLUCIONES COMPLETAS

*“An equation means nothing to me unless it expresses
a thought of God.”*

— Srinivasa Ramanujan

Índice

1. Ejercicio 1: Cálculo de Límites	2
1.1. Enunciado	2
1.2. Apartado a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + x^2 + 3x - 1}{2x - x^2 + 2x^3 + 1}$	2
1.3. Apartado b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 3x^2 + 2x}$	3
1.4. Apartado c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^3 + 1}{x^3 - 3x + 2}$	4
1.5. Apartado d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 + 2x^2 + 15x - 1}{x^2 + 34x - 1}$	6
1.6. Apartado e) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 1})$	7
2. Ejercicio 2: Continuidad de Función a Trozos	9
2.1. Enunciado	9
2.2. Apartado a) Cálculo de los parámetros a y b	9
2.3. Apartado b) Representación gráfica	11
3. Ejercicio 3: Función Cuadrática con Condiciones	12
3.1. Enunciado	12
3.2. Apartado a) Cálculo de los parámetros a , b , c	12
3.3. Apartado b) Representación gráfica	13
4. Ejercicio 4: Aplicación del Cálculo - Saldo Bancario	15
4.1. Enunciado	15
4.2. Apartado a) Saldos inicial y final	15
4.3. Apartado b) Máximos y mínimos del saldo	15
4.4. Apartado c) Análisis del signo y crecimiento	17
4.5. Resumen gráfico del ejercicio	18
5. Ejercicio 5: Asíntotas de una Función	19
5.1. Enunciado	19
5.2. Teoría sobre asíntotas	19
5.3. Cálculo de asíntotas verticales	19
5.4. Cálculo de asíntotas horizontales	19
5.5. Cálculo de asíntotas oblicuas	20
5.6. Resumen de asíntotas	20
5.7. Análisis adicional de la función	20
5.8. Representación gráfica	21

1. Ejercicio 1: Cálculo de Límites

1.1. Enunciado

Calcula los siguientes límites. Caso de que te encuentres con una indeterminación debes indicarla. Si el resultado se obtiene directamente debes explicar la razón por la que se obtiene dicho resultado.

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + x^2 + 3x - 1}{2x - x^2 + 2x^3 + 1}$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 3x^2 + 2x}$$

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^3 + 1}{x^3 - 3x + 2}$$

$$d) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 + 2x^2 + 15x - 1}{x^2 + 34x - 1}$$

$$e) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

1.2. Apartado a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + x^2 + 3x - 1}{2x - x^2 + 2x^3 + 1}$$

Paso 1: Identificación de la indeterminación

Al sustituir directamente $x = \infty$ obtenemos:

$$\frac{3(\infty)^3 + (\infty)^2 + 3(\infty) - 1}{2(\infty) - (\infty)^2 + 2(\infty)^3 + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

Se trata de una **indeterminación del tipo** $\frac{\infty}{\infty}$.

Paso 2: Reordenamiento de polinomios

Ordenamos los polinomios por grado descendente:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + x^2 + 3x - 1}{2x^3 - x^2 + 2x + 1}$$

Paso 3: Identificación del grado dominante

El grado del numerador es 3 (término dominante: $3x^3$).

El grado del denominador es 3 (término dominante: $2x^3$).

Paso 4: Factorización del término de mayor grado

Dividimos numerador y denominador por x^3 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + x^2 + 3x - 1}{2x^3 - x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(3 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)}{x^3 \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)}$$

Paso 5: Simplificación

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{2 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}$$

Paso 6: Cálculo del límite

Cuando $x \rightarrow \infty$, todos los términos con x en el denominador tienden a 0:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

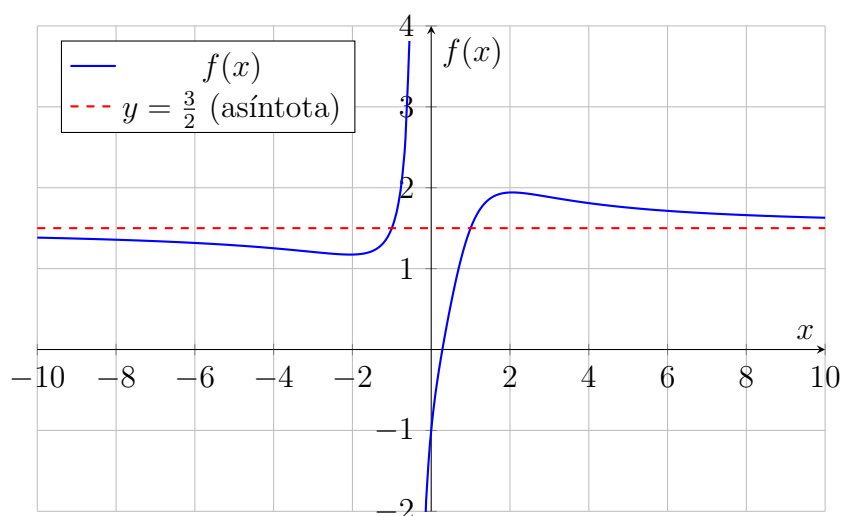
Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + 0 + 0 - 0}{2 - 0 + 0 + 0} = \frac{3}{2}$$

Resultado:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + x^2 + 3x - 1}{2x - x^2 + 2x^3 + 1} = \frac{3}{2}$$

Gráfica de $f(x) = \frac{3x^3 + x^2 + 3x - 1}{2x^3 - x^2 + 2x + 1}$



1.3. Apartado b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 3x^2 + 2x}$

Paso 1: Sustitución directa

Intentamos sustituir $x = -2$:

$$\text{Numerador: } (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$$

$$\text{Denominador: } (-2)^3 + 3(-2)^2 + 2(-2) = -8 + 12 - 4 = 0$$

Obtenemos una **indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$** .

Paso 2: Factorización del numerador

El numerador es una diferencia de cuadrados:

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

Paso 3: Factorización del denominador

Factorizamos x del denominador:

$$x^3 + 3x^2 + 2x = x(x^2 + 3x + 2)$$

Factorizamos el trinomio $x^2 + 3x + 2$:

Buscamos dos números que sumen 3 y multipliquen 2: estos son 1 y 2.

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$$

Por tanto:

$$x^3 + 3x^2 + 2x = x(x + 1)(x + 2)$$

Paso 4: Simplificación de la fracción

$$\frac{x^2 - 4}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x(x + 1)(x + 2)}$$

Simplificamos el factor común $(x + 2)$:

$$= \frac{x - 2}{x(x + 1)} \quad \text{para } x \neq -2$$

Paso 5: Cálculo del límite

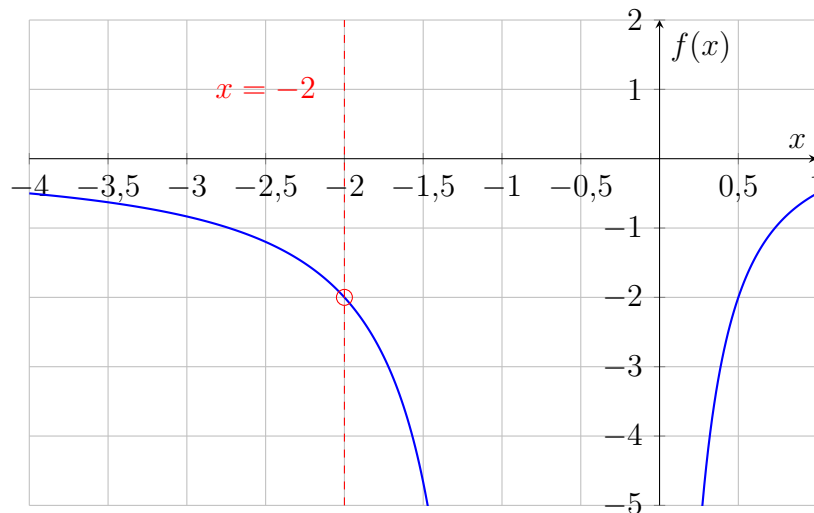
Ahora sustituimos $x = -2$:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x - 2}{x(x + 1)} = \frac{-2 - 2}{(-2)(-2 + 1)} = \frac{-4}{(-2)(-1)} = \frac{-4}{2} = -2$$

Resultado:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 3x^2 + 2x} = -2}$$

Gráfica de $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^3 + 3x^2 + 2x}$ cerca de $x = -2$



1.4. Apartado c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^3 + 1}{x^3 - 3x + 2}$

Paso 1: Sustitución directa

Sustituimos $x = 1$:

$$\text{Numerador: } -(1)^3 + 1 = -1 + 1 = 0$$

$$\text{Denominador: } (1)^3 - 3(1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$$

Obtenemos una **indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$** .

Paso 2: Factorización del numerador

Reescribimos:

$$-x^3 + 1 = -(x^3 - 1)$$

Aplicamos la diferencia de cubos: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

Por tanto:

$$-x^3 + 1 = -(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

Paso 3: Factorización del denominador

Para factorizar $x^3 - 3x + 2$, usamos el teorema del resto. Como el numerador se anula en $x = 1$, probamos si $(x - 1)$ es factor del denominador:

Evaluamos en $x = 1$: $(1)^3 - 3(1) + 2 = 0$. Efectivamente, $(x - 1)$ es factor.

Realizamos la división polinómica:

$$\frac{x^3 - 3x + 2}{x - 1}$$

Mediante división sintética o Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

Resultado: $x^2 + x - 2$

Factorizamos $x^2 + x - 2$:

Buscamos dos números que sumen 1 y multipliquen -2: estos son 2 y -1.

$$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$$

Por tanto:

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x + 2)(x - 1) = (x - 1)^2(x + 2)$$

Paso 4: Simplificación de la fracción

$$\frac{-x^3 + 1}{x^3 - 3x + 2} = \frac{-(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)^2(x + 2)}$$

Simplificamos un factor $(x - 1)$:

$$= \frac{-(x^2 + x + 1)}{(x - 1)(x + 2)} \quad \text{para } x \neq 1$$

Paso 5: Cálculo del límite

Sustituimos $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x^2 + x + 1)}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{-(1^2 + 1 + 1)}{(1 - 1)(1 + 2)} = \frac{-3}{0 \cdot 3} = \frac{-3}{0}$$

Aquí tenemos un límite infinito. Debemos analizar los límites laterales.

Paso 6: Límites laterales

El numerador: $-(x^2 + x + 1)$ evaluado en $x = 1$ da $-3 < 0$.

El denominador: $(x - 1)(x + 2)$

Cuando $x \rightarrow 1^+$: $(x - 1) \rightarrow 0^+$ y $(x + 2) \rightarrow 3 > 0$, entonces $(x - 1)(x + 2) \rightarrow 0^+$

Por tanto: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-3}{0^+} = -\infty$

Cuando $x \rightarrow 1^-$: $(x - 1) \rightarrow 0^-$ y $(x + 2) \rightarrow 3 > 0$, entonces $(x - 1)(x + 2) \rightarrow 0^-$

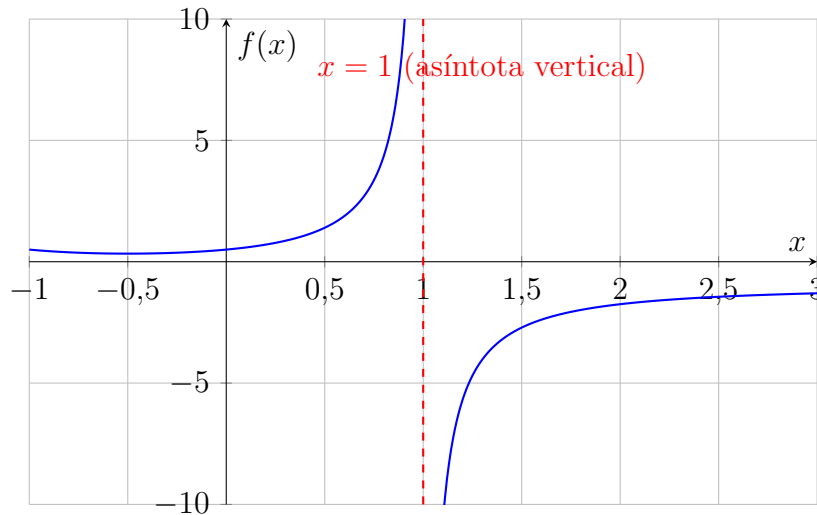
Por tanto: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-3}{0^-} = +\infty$

Resultado:

Como los límites laterales son diferentes, el límite no existe:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^3 + 1}{x^3 - 3x + 2} \text{ no existe } \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} = -\infty \right)$$

Gráfica de $f(x) = \frac{-x^3 + 1}{x^3 - 3x + 2}$ cerca de $x = 1$



1.5. Apartado d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 + 2x^2 + 15x - 1}{x^2 + 34x - 1}$

Paso 1: Identificación de la indeterminación

Al sustituir $x = -\infty$:

$$\frac{3(-\infty)^4 + 2(-\infty)^2 + 15(-\infty) - 1}{(-\infty)^2 + 34(-\infty) - 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

Se trata de una **indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$** .

Paso 2: Identificación del grado dominante

El grado del numerador es 4 (término dominante: $3x^4$).

El grado del denominador es 2 (término dominante: x^2).

Paso 3: Análisis del comportamiento

Cuando el grado del numerador es mayor que el del denominador, el límite tiende a infinito. Debemos determinar el signo.

Dividimos numerador y denominador por x^2 (el grado del denominador):

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 + 2x^2 + 15x - 1}{x^2 + 34x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 2 + \frac{15}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{34}{x} - \frac{1}{x^2}}$$

Paso 4: Cálculo del límite

Cuando $x \rightarrow -\infty$: - El numerador: $3x^2 \rightarrow +\infty$ (porque $x^2 > 0$ siempre), los demás términos tienden a 0 - El denominador: $1 + \frac{34}{x} - \frac{1}{x^2} \rightarrow 1 + 0 - 0 = 1 > 0$

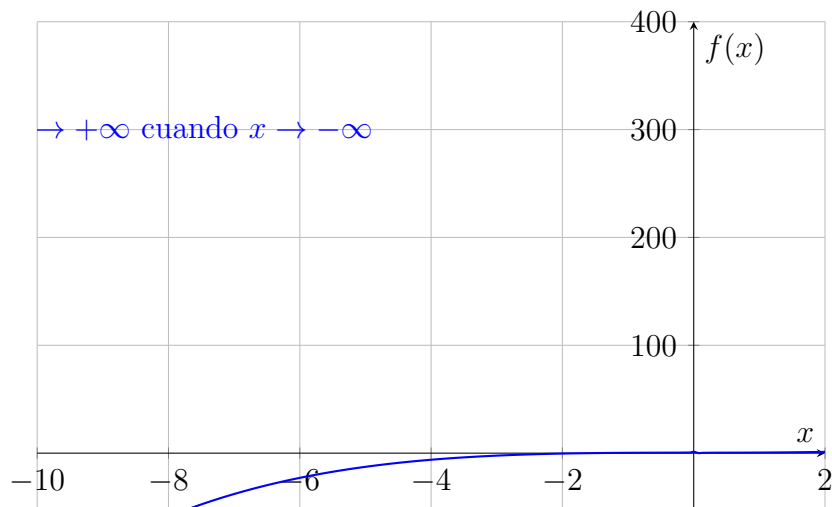
Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 2 + \frac{15}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{34}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$$

Resultado:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 + 2x^2 + 15x - 1}{x^2 + 34x - 1} = +\infty}$$

Gráfica de $f(x) = \frac{3x^4 + 2x^2 + 15x - 1}{x^2 + 34x - 1}$



1.6. Apartado e) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 1})$

Paso 1: Identificación de la indeterminación

Al sustituir $x = \infty$:

$$\infty - \sqrt{(\infty)^2 + 1} = \infty - \infty$$

Se trata de una **indeterminación del tipo $\infty - \infty$** .

Paso 2: Multiplicación por el conjugado

Para resolver esta indeterminación, multiplicamos y dividimos por el conjugado:

$$x - \sqrt{x^2 + 1} = (x - \sqrt{x^2 + 1}) \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

Paso 3: Aplicación de la diferencia de cuadrados

Utilizamos la identidad $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$:

$$\begin{aligned} &= \frac{(x - \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{x^2 - (\sqrt{x^2 + 1})^2}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{x^2 - (x^2 + 1)}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

$$= \frac{x^2 - x^2 - 1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

Paso 4: Cálculo del límite

Ahora calculamos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

Cuando $x \rightarrow \infty$: $x \rightarrow \infty$ - $\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$

Para $x > 0$: $|x| = x$, entonces:

$$\sqrt{x^2 + 1} = x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \rightarrow x \cdot 1 = x \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty$$

Por tanto:

$$x + \sqrt{x^2 + 1} \rightarrow \infty + \infty = \infty$$

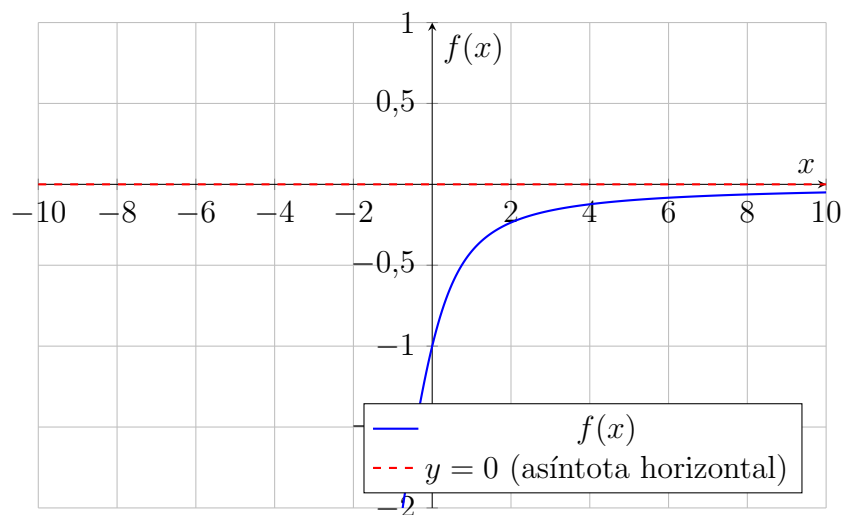
Finalmente:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-1}{\infty} = 0$$

Resultado:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 1} \right) = 0}$$

Gráfica de $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$



2. Ejercicio 2: Continuidad de Función a Trozos

2.1. Enunciado

Dada la siguiente función a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 3 & \text{si } x < -2 \\ 2x + 5 & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ bx + 11 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

a) Calcúlense los valores de los parámetros a y b para que la función f sea continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Representa la gráfica de dicha función.

2.2. Apartado a) Cálculo de los parámetros a y b

Concepto de continuidad:

Una función es continua en todo $\mathbb{R}$ si es continua en todos sus puntos. Para una función definida a trozos, debemos verificar la continuidad en los puntos de cambio de definición, que son $x = -2$ y $x = 3$.

Una función f es continua en $x = c$ si:

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$$

Continuidad en $x = -2$:

Paso 1: Calculamos el límite por la izquierda:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (ax^2 - 3)$$

Sustituimos $x = -2$:

$$= a(-2)^2 - 3 = 4a - 3$$

Paso 2: Calculamos el límite por la derecha:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (2x + 5)$$

Sustituimos $x = -2$:

$$= 2(-2) + 5 = -4 + 5 = 1$$

Paso 3: Calculamos el valor de la función en $x = -2$:

Según la definición, para $x = -2$: $-2 \leq x < 3$, entonces:

$$f(-2) = 2(-2) + 5 = 1$$

Paso 4: Para que haya continuidad en $x = -2$:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2)$$

$$4a - 3 = 1 = 1$$

De la primera igualdad:

$$4a - 3 = 1$$

$$4a = 4$$

$$\boxed{a = 1}$$

Continuidad en $x = 3$:

Paso 1: Calculamos el límite por la izquierda:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (2x + 5)$$

Sustituimos $x = 3$:

$$= 2(3) + 5 = 6 + 5 = 11$$

Paso 2: Calculamos el límite por la derecha:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (bx + 11)$$

Sustituimos $x = 3$:

$$= b(3) + 11 = 3b + 11$$

Paso 3: Calculamos el valor de la función en $x = 3$:

Según la definición, para $x = 3$: $x \geq 3$, entonces:

$$f(3) = b(3) + 11 = 3b + 11$$

Paso 4: Para que haya continuidad en $x = 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$$

$$11 = 3b + 11 = 3b + 11$$

De la primera igualdad:

$$11 = 3b + 11$$

$$0 = 3b$$

$$\boxed{b = 0}$$

Resultado:

Los valores de los parámetros para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$ son:

$$\boxed{a = 1 \quad \text{y} \quad b = 0}$$

La función continua resulta:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x < -2 \\ 2x + 5 & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ 11 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

2.3. Apartado b) Representación gráfica

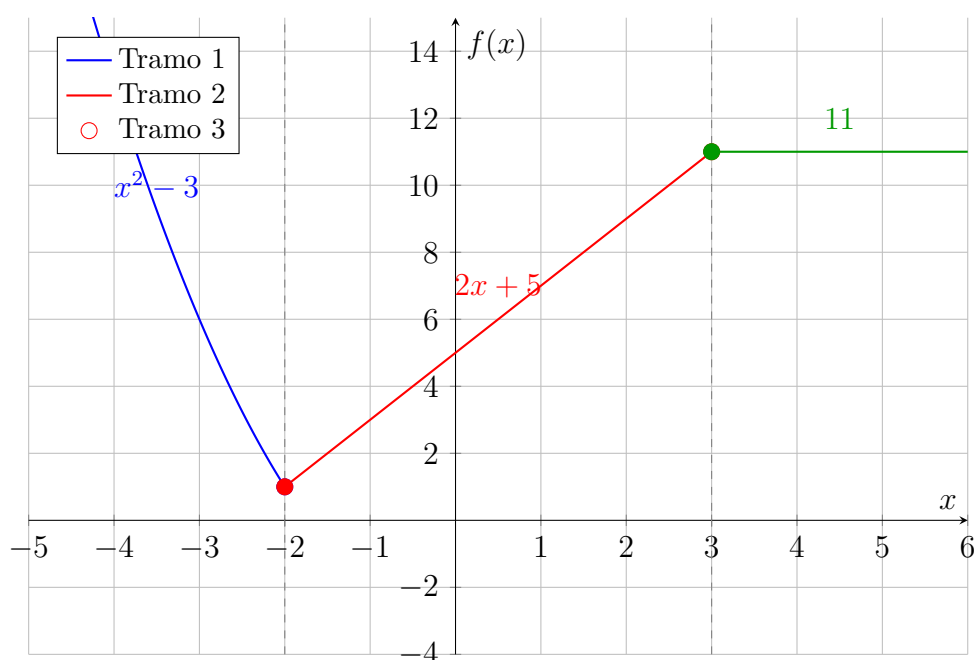
Análisis de cada tramo:

Tramo 1: $f(x) = x^2 - 3$ para $x < -2$ - Es una parábola con vértice en $(0, -3)$ - Solo consideramos la parte donde $x < -2$ - En $x = -2$: $f(-2) = (-2)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$ (punto no incluido)

Tramo 2: $f(x) = 2x + 5$ para $-2 \leq x < 3$ - Es una recta con pendiente 2 y ordenada en el origen 5 - En $x = -2$: $f(-2) = 2(-2) + 5 = 1$ (punto incluido) - En $x = 3$: $f(3) = 2(3) + 5 = 11$ (punto no incluido, pero coincide con el siguiente tramo)

Tramo 3: $f(x) = 11$ para $x \geq 3$ - Es una recta horizontal constante - En $x = 3$: $f(3) = 11$ (punto incluido)

Gráfica de la función continua $f(x)$



Observaciones sobre la gráfica:

- La función es continua en $x = -2$ y $x = 3$ gracias a los valores calculados de a y b .
- Los puntos rellenos ($\bullet$) indican que el punto pertenece a la función.
- Los puntos vacíos ($\circ$) indican que el punto no pertenece a ese tramo.
- La función no presenta saltos ni discontinuidades.

3. Ejercicio 3: Función Cuadrática con Condiciones

3.1. Enunciado

Dada la función: $f(x) = ax^2 + bx + c$

a) Calcúlese el valor de los parámetros a , b , c para que la función pase por el origen de coordenadas y tenga un extremo relativo en el punto de coordenadas $(1, 2)$.

b) Representa la gráfica de la función $f(x)$.

3.2. Apartado a) Cálculo de los parámetros a , b , c

Condiciones dadas:

1. La función pasa por el origen de coordenadas $(0, 0)$ 2. La función tiene un extremo relativo en el punto $(1, 2)$

Paso 1: Aplicación de la primera condición

Si la función pasa por $(0, 0)$:

$$f(0) = 0$$

$$a(0)^2 + b(0) + c = 0$$

$$\boxed{c = 0}$$

La función se simplifica a:

$$f(x) = ax^2 + bx$$

Paso 2: Aplicación de la segunda condición (parte 1)

Si la función pasa por el punto $(1, 2)$:

$$f(1) = 2$$

$$a(1)^2 + b(1) = 2$$

$$a + b = 2 \quad \dots(\text{ecuación 1})$$

Paso 3: Aplicación de la segunda condición (parte 2)

Si la función tiene un extremo relativo en $x = 1$, entonces la derivada debe anularse en ese punto:

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f'(1) = 0$$

$$2a(1) + b = 0$$

$$2a + b = 0 \quad \dots(\text{ecuación 2})$$

Paso 4: Resolución del sistema de ecuaciones

Tenemos el sistema:

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$$

Restamos la primera ecuación de la segunda:

$$(2a + b) - (a + b) = 0 - 2$$

$$2a + b - a - b = -2$$

$$a = -2$$

Sustituimos $a = -2$ en la ecuación 1:

$$-2 + b = 2$$

$$b = 4$$

Paso 5: Verificación del tipo de extremo

Para determinar si es máximo o mínimo, calculamos la segunda derivada:

$$f''(x) = 2a = 2(-2) = -4 < 0$$

Como $f''(1) < 0$, el extremo en $x = 1$ es un **máximo relativo**.

Resultado:

Los valores de los parámetros son:

$$a = -2, \quad b = 4, \quad c = 0$$

La función resultante es:

$$f(x) = -2x^2 + 4x$$

3.3. Apartado b) Representación gráfica

Análisis de la función $f(x) = -2x^2 + 4x$:

Paso 1: Características generales - Es una parábola que abre hacia abajo ($a = -2 < 0$) - Pasa por el origen $(0, 0)$

Paso 2: Vértice

El vértice está en $x = 1$ (dado), y $f(1) = 2$ (dado).

Podemos verificar con la fórmula: $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(-2)} = -\frac{4}{-4} = 1$

Vértice: $(1, 2)$ - Es un máximo.

Paso 3: Raíces (intersecciones con el eje X)

Resolvemos $f(x) = 0$:

$$-2x^2 + 4x = 0$$

$$x(-2x + 4) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad -2x + 4 = 0$$

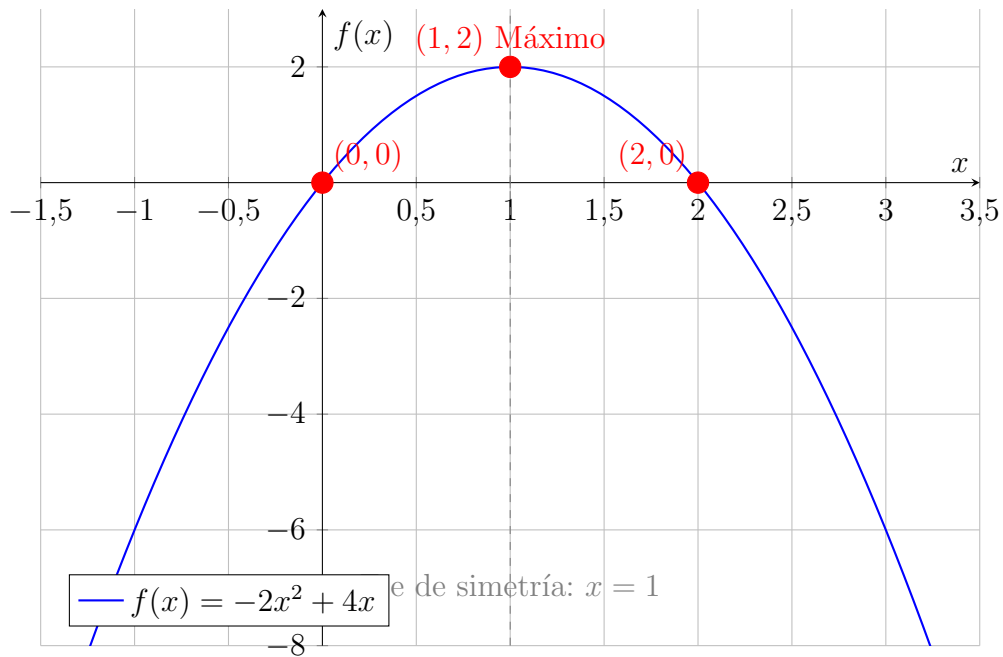
$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = 2$$

Raíces: $(0, 0)$ y $(2, 0)$

Paso 4: Tabla de valores

x	$f(x) = -2x^2 + 4x$
-1	$-2(-1)^2 + 4(-1) = -2 - 4 = -6$
0	0
1	2
2	0
3	$-2(3)^2 + 4(3) = -18 + 12 = -6$

Gráfica de $f(x) = -2x^2 + 4x$



Observaciones sobre la gráfica:

- La parábola abre hacia abajo (concavidad negativa).
- El vértice $(1, 2)$ es el punto máximo de la función.
- La función corta al eje X en $x = 0$ y $x = 2$.
- El eje de simetría es la recta vertical $x = 1$.
- La función es creciente en $(-\infty, 1)$ y decreciente en $(1, +\infty)$.

4. Ejercicio 4: Aplicación del Cálculo - Saldo Bancario

4.1. Enunciado

El saldo de una cuenta bancaria en un periodo de 5 años viene dado por la función:

$$f(t) = -12t^3 + 90t^2 - 144t + 84 \quad 0 \leq t \leq 5$$

siendo t el tiempo en años.

- Calcula los saldos inicial y final.
- ¿En qué momento el saldo de la cuenta es máximo? ¿Y cuándo es mínimo?
- Analiza si en algún momento el saldo es negativo y determina todos los periodos donde se observa un crecimiento del saldo.

4.2. Apartado a) Saldos inicial y final

Saldo inicial ($t = 0$):

$$f(0) = -12(0)^3 + 90(0)^2 - 144(0) + 84 = 84$$

Saldo final ($t = 5$):

$$\begin{aligned} f(5) &= -12(5)^3 + 90(5)^2 - 144(5) + 84 \\ &= -12(125) + 90(25) - 720 + 84 \\ &= -1500 + 2250 - 720 + 84 \\ &= 114 \end{aligned}$$

Resultado:

Saldo inicial: 84 unidades monetarias

Saldo final: 114 unidades monetarias

4.3. Apartado b) Máximos y mínimos del saldo

Para encontrar los extremos, calculamos la derivada e igualamos a cero.

Paso 1: Cálculo de la derivada

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d}{dt} (-12t^3 + 90t^2 - 144t + 84) \\ f'(t) &= -36t^2 + 180t - 144 \end{aligned}$$

Paso 2: Puntos críticos

Igualamos la derivada a cero:

$$-36t^2 + 180t - 144 = 0$$

Simplificamos dividiendo por -36 :

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

Paso 3: Resolución de la ecuación cuadrática

Factorizamos:

Buscamos dos números que sumen -5 y multipliquen 4 : estos son -1 y -4 .

$$(t - 1)(t - 4) = 0$$

Por tanto:

$$t = 1 \quad \text{o} \quad t = 4$$

Paso 4: Clasificación de los extremos

Calculamos la segunda derivada:

$$f''(t) = \frac{d}{dt} (-36t^2 + 180t - 144)$$

$$f''(t) = -72t + 180$$

Evalúamos en los puntos críticos:

Para $t = 1$:

$$f''(1) = -72(1) + 180 = 108 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{MÍNIMO local}$$

Para $t = 4$:

$$f''(4) = -72(4) + 180 = -288 + 180 = -108 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{MÁXIMO local}$$

Paso 5: Cálculo de los valores del saldo

Saldo en $t = 1$:

$$\begin{aligned} f(1) &= -12(1)^3 + 90(1)^2 - 144(1) + 84 \\ &= -12 + 90 - 144 + 84 = 18 \end{aligned}$$

Saldo en $t = 4$:

$$\begin{aligned} f(4) &= -12(4)^3 + 90(4)^2 - 144(4) + 84 \\ &= -12(64) + 90(16) - 576 + 84 \\ &= -768 + 1440 - 576 + 84 = 180 \end{aligned}$$

Paso 6: Análisis de extremos absolutos en el intervalo $[0, 5]$

Comparamos los valores en los extremos del intervalo y en los puntos críticos:

- $f(0) = 84$
- $f(1) = 18$ (mínimo local)
- $f(4) = 180$ (máximo local)
- $f(5) = 114$

Resultado:

Saldo máximo: 180 unidades monetarias en $t = 4$ años

Saldo mínimo: 18 unidades monetarias en $t = 1$ año

4.4. Apartado c) Análisis del signo y crecimiento

Parte 1: ¿El saldo es negativo en algún momento?

Analizamos si $f(t) < 0$ para algún $t \in [0, 5]$.

Del análisis anterior:

- El mínimo absoluto en $[0, 5]$ es $f(1) = 18 > 0$

Como el valor mínimo es positivo, la función nunca es negativa en el intervalo $[0, 5]$.

Resultado:

El saldo NUNCA es negativo en el periodo de 5 años

Parte 2: Periodos de crecimiento del saldo

El saldo crece cuando $f'(t) > 0$.

Ya calculamos que $f'(t) = -36t^2 + 180t - 144$ y que se anula en $t = 1$ y $t = 4$.

Análisis de signos de $f'(t)$:

Factorizamos:

$$f'(t) = -36(t^2 - 5t + 4) = -36(t - 1)(t - 4)$$

Estudiamos el signo en cada intervalo:

Intervalo	$(t - 1)$	$(t - 4)$	$-36(t - 1)(t - 4)$	$f'(t)$
$0 < t < 1$	—	—	$-36(-)(-) = -$	— (decreciente)
$1 < t < 4$	+	—	$-36(+)(-) = +$	+ (creciente)
$4 < t < 5$	+	+	$-36(+)(+) = -$	— (decreciente)

Verificación con valores concretos:

Para $t = 0,5$ (en $(0, 1)$):

$$f'(0,5) = -36(0,5)^2 + 180(0,5) - 144 = -9 + 90 - 144 = -63 < 0 \quad \checkmark$$

Para $t = 2$ (en $(1, 4)$):

$$f'(2) = -36(2)^2 + 180(2) - 144 = -144 + 360 - 144 = 72 > 0 \quad \checkmark$$

Para $t = 4,5$ (en $(4, 5)$):

$$f'(4,5) = -36(4,5)^2 + 180(4,5) - 144 = -729 + 810 - 144 = -63 < 0 \quad \checkmark$$

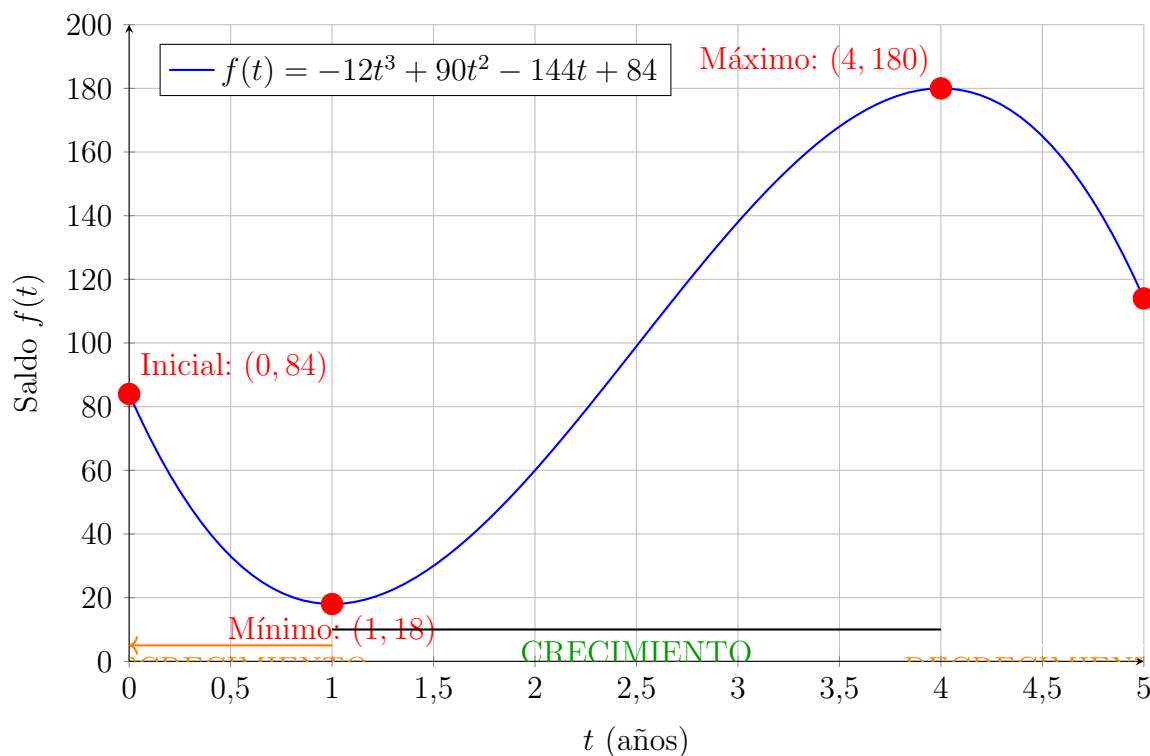
Resultado:

El saldo crece en el periodo $(1, 4)$ años

Es decir, desde el año 1 hasta el año 4, el saldo de la cuenta está en crecimiento.

4.5. Resumen gráfico del ejercicio

Evolución del saldo bancario: $f(t) = -12t^3 + 90t^2 - 144t + 84$



Interpretación económica:

- El saldo inicial es de 84 unidades y decrece durante el primer año.
- En $t = 1$ año, el saldo alcanza su mínimo de 18 unidades.
- Entre los años 1 y 4, el saldo experimenta un crecimiento sostenido.
- En $t = 4$ años, el saldo alcanza su máximo de 180 unidades.
- Durante el último año (del año 4 al 5), el saldo decrece hasta 114 unidades.
- El saldo nunca es negativo durante todo el periodo.

5. Ejercicio 5: Asíntotas de una Función

5.1. Enunciado

Calcula las asíntotas de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 16}$$

5.2. Teoría sobre asíntotas

Una función puede tener tres tipos de asíntotas:

1. Asíntotas verticales: Rectas verticales $x = a$ donde la función tiende a infinito. Se buscan valores de x que anulen el denominador (puntos de discontinuidad).

2. Asíntotas horizontales: Rectas horizontales $y = b$ que la función alcanza cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

Se calculan los límites: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

3. Asíntotas oblicuas: Rectas de la forma $y = mx + n$ que la función aproxima cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

Solo existen si no hay asíntotas horizontales. Se calculan:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$$

5.3. Cálculo de asíntotas verticales

Paso 1: Búsqueda de puntos que anulen el denominador

El denominador es $x^2 + 16$. Lo igualamos a cero:

$$x^2 + 16 = 0$$

$$x^2 = -16$$

Esta ecuación no tiene solución en los números reales, ya que $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y no puede ser igual a -16 .

En los números complejos: $x = \pm 4i$, pero no son relevantes para el análisis de asíntotas en funciones reales.

Conclusión:

NO hay asíntotas verticales

5.4. Cálculo de asíntotas horizontales

Paso 1: Límite cuando $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 16}$$

Dividimos numerador y denominador por x^2 :

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{16}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{16}{x^2}}$$

Cuando $x \rightarrow \infty$: $\frac{16}{x^2} \rightarrow 0$

Por tanto:

$$= \frac{1}{1 + 0} = 1$$

Paso 2: Límite cuando $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 + 16}$$

Aplicamos el mismo razonamiento (ya que $x^2 = (-x)^2$):

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + \frac{16}{x^2}} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$

Conclusión:

Existe una asíntota horizontal:

$y = 1$ (asíntota horizontal)

5.5. Cálculo de asíntotas oblicuas

Como existe asíntota horizontal, **NO puede haber asíntotas oblicuas**.
(Las asíntotas oblicuas y horizontales son mutuamente excluyentes).

Conclusión:

NO hay asíntotas oblicuas

5.6. Resumen de asíntotas

Para la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 16}$:

- **Asíntotas verticales:** Ninguna
- **Asíntotas horizontales:** $y = 1$
- **Asíntotas oblicuas:** Ninguna

5.7. Análisis adicional de la función

Dominio:

Como el denominador $x^2 + 16 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

Rango:

Analizamos los valores que puede tomar $f(x)$:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 16}$$

Para $x = 0$: $f(0) = \frac{0}{16} = 0$

Cuando $x \rightarrow \pm\infty$: $f(x) \rightarrow 1$

Para cualquier $x \neq 0$: $f(x) = \frac{x^2}{x^2+16} < \frac{x^2}{x^2} = 1$

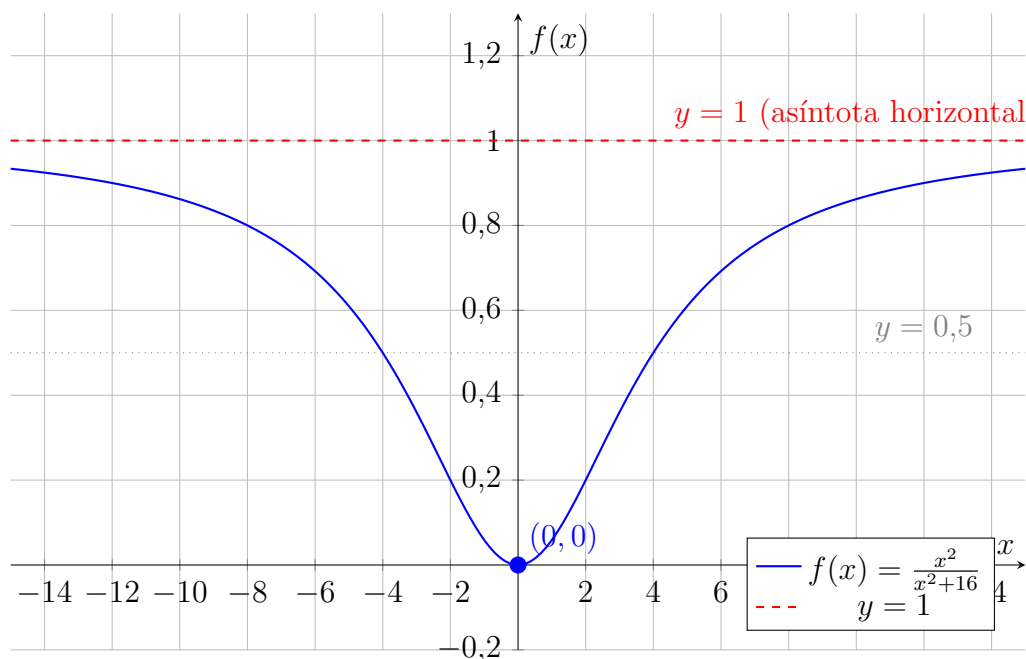
Y además: $f(x) = \frac{x^2}{x^2+16} > 0$ (siempre positiva)

Por tanto: $0 \leq f(x) < 1$

$$\text{Rango}(f) = [0, 1)$$

5.8. Representación gráfica

Gráfica de $f(x) = \frac{x^2}{x^2+16}$ con asíntota horizontal



Observaciones sobre la gráfica:

- La función está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ (no hay asíntotas verticales).
- La función es siempre positiva o cero: $f(x) \geq 0$.
- La función tiene un mínimo en $x = 0$ con $f(0) = 0$.
- Cuando $x \rightarrow \pm\infty$, la función se aproxima asintóticamente a $y = 1$ por debajo.
- La función es simétrica respecto al eje Y (función par): $f(-x) = f(x)$.
- La función es creciente en $(0, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0)$.

FIN DEL EXAMEN RESUELTO

“The true beauty of mathematics is not in the solution, but in the journey to find it.”

Nº1.- Calcula los siguientes límites.

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x} \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x} - x$$

(1 PUNTO)

Nº2.- Dada la siguiente función a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 3x + b & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ ax^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- Calcúlese los valores de los parámetros a y b para que la función f sea continua en todo $\mathbb{R}$
- Representa la gráfica de dicha función.
- Hállese el área del recinto limitado por la gráfica de función en el intervalo $[0,2]$

(1,5 PUNTOS)

Nº3.- Dada la función: $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

- Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.
- Calcúlese los máximos y mínimos relativos y el valor que toman.
- Representa la gráfica de la función f
- Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función en el intervalo $[-1,0]$

(1,5 PUNTOS)

Nº4.- Dada la función: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

Calcúlese el valor de los parámetros a, b, c para que la función pase por el punto de coordenadas (0,1) y tenga un máximo en el punto de $x = -1$ y valga 3.

(1 PUNTO)

Nº5.- Los beneficios de una empresa en sus primeros 8 años vienen dados, en millones de euros, por la función

$$B(t) = \frac{t^3}{4} - 3t^2 + 9t$$

donde la variable t indica el tiempo transcurrido, en años, desde su fundación.

- Estudia en qué momento los beneficios son máximos y mínimos y a cuánto ascienden.
- Dibuja la gráfica de B(t) en el intervalo $[0;8]$ y explique, a partir de ella, la evolución de los beneficios de ésta.

(2 PUNTOS)

Nº6.- Calcula las siguientes integrales:

$$a) \int (-x + 2e^x) dx \quad b) \int \left(\frac{1}{x} - \operatorname{sen} x + \sqrt{x} \right) dx$$

(1 PUNTO)

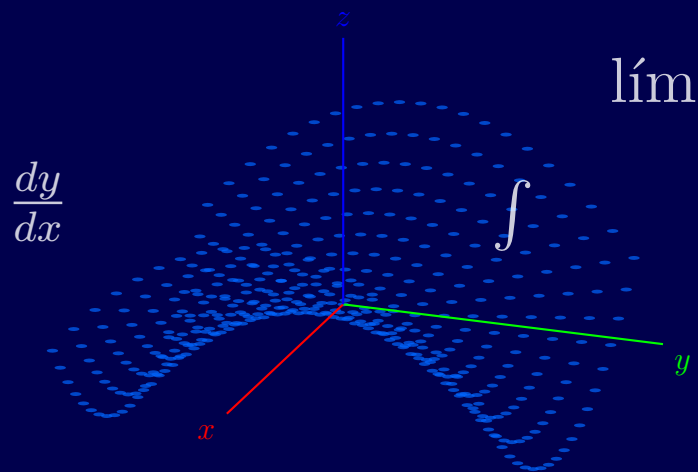
Nº7.- Hállese el valor del parámetro b para que se verifique:

$$\int_{-1}^b (2bx - 3x^2) dx = -12$$

(1 PUNTO)

Nº8.- Calcúlese el área del recinto comprendido entre la parábola $y = -x^2 + 4x + 1$ el eje OX y las rectas de ecuaciones $x = 0$, $x = 3$. Representa gráficamente dicho recinto.

(1 PUNTO)



EXAMEN DE MATEMÁTICAS

2º Bachillerato B/C

Global 2023

SOLUCIONES COMPLETAS

*“Perhaps I can best describe my experience of doing
mathematics
in terms of a journey through a dark unexplored mansion.
You enter the first room of the mansion and it’s
completely dark.
You stumble around bumping into the furniture, but
gradually
you learn where each piece of furniture is. Finally, after
six months
or so, you find the light switch, you turn it on, and
suddenly
it’s all illuminated.”*

— **Sir Andrew Wiles**
Matemático británico
Demostró el Último Teorema de Fermat (1995)

Índice

1. Ejercicio 1: Cálculo de Límites	2
2. Ejercicio 2: Función a Trozos - Continuidad y Área	4
3. Ejercicio 3: Estudio Completo de Función Cúbica	6
4. Ejercicio 4: Determinación de Parámetros	8
5. Ejercicio 5: Beneficios de una Empresa	10
6. Ejercicio 6: Integrales Indefinidas	12
7. Ejercicio 7: Integral Definida con Parámetro	14
8. Ejercicio 8: Área bajo Parábola	16

1. Ejercicio 1: Cálculo de Límites

Ejercicio 1

Calcula los siguientes límites:

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x}$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x \right)$$

Solución

Apartado a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x}$

Paso 1: Evaluación directa

Sustituimos $x = -1$ en la expresión:

$$\text{Numerador: } x^2 - 1 = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\text{Denominador: } x^2 + x = (-1)^2 + (-1) = 1 - 1 = 0$$

Obtenemos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, por lo que debemos aplicar técnicas de resolución.

Paso 2: Factorización

Factorizamos el numerador y el denominador:

$$\text{Numerador: } x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

$$\text{Denominador: } x^2 + x = x(x + 1)$$

Paso 3: Simplificación

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x(x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 1}{x} \quad (\text{simplificamos el factor común } (x + 1)) \end{aligned}$$

Paso 4: Evaluación del límite

Ahora podemos sustituir directamente $x = -1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 1}{x} &= \frac{(-1) - 1}{-1} \\ &= \frac{-2}{-1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Respuesta:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x} = 2$$

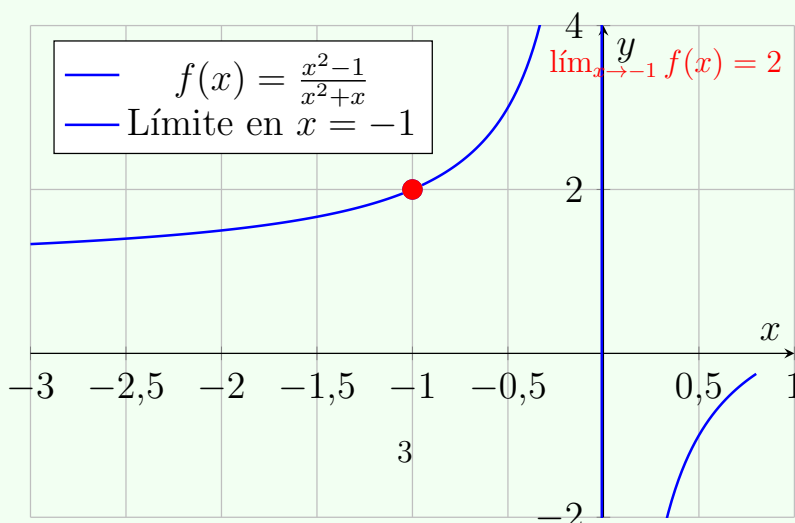


Figura 1.1: Gráficas de la función mostrando la discontinuidad evitable en $x = -1$

2. Ejercicio 2: Función a Trozos - Continuidad y Área

Ejercicio 2

Dada la siguiente función a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 3x + b & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ ax^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- a) Calcúlense los valores de los parámetros a y b para que la función f sea continua en todo $\mathbb{R}$
- b) Representa la gráfica de dicha función.
- c) Hállese el área del recinto limitado por la gráfica de función en el intervalo $[0, 2]$

Solución**Apartado a) Cálculo de los parámetros a y b para continuidad**

Para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$, debe ser continua en los puntos donde cambia la definición: $x = 0$ y $x = 2$.

Continuidad en $x = 0$

Una función es continua en un punto si:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

Límite por la izquierda en $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$$

Límite por la derecha en $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x + b) = 3(0) + b = b$$

Valor de la función en $x = 0$:

$$f(0) = 3(0) + b = b$$

Condición de continuidad en $x = 0$:

$$0 = b$$

Por lo tanto: $b = 0$

Continuidad en $x = 2$

Límite por la izquierda en $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x + b) = 3(2) + 0 = 6$$

Límite por la derecha en $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (ax^2) = a(2)^2 = 4a$$

Valor de la función en $x = 2$:

$$f(2) = a(2)^2 = 4a$$

Condición de continuidad en $x = 2$:

$$6 = 4a$$

$$a = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Por lo tanto: $a = \frac{3}{2}$

Respuesta final: La función es continua en todo $\mathbb{R}$ cuando $a = \frac{3}{2}$ y $b = 0$

La función continua queda:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 3x + \frac{3}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

3. Ejercicio 3: Estudio Completo de Función Cúbica

Ejercicio 3

Dada la función: $f(x) = x^3 - 3x + 1$

- a) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .
- b) Calcúlense los máximos y mínimos relativos y el valor que toman.
- c) Representa la gráfica de la función f
- d) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función en el intervalo $[-1, 0]$

Solución**Apartado a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento**

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento, calculamos la derivada primera y analizamos su signo.

Paso 1: Calcular $f'(x)$

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$$

Paso 2: Encontrar los puntos críticos

Los puntos críticos son aquellos donde $f'(x) = 0$:

$$3(x^2 - 1) = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

Los puntos críticos son: $x = -1$ y $x = 1$

Paso 3: Estudiar el signo de $f'(x)$

Factorizamos: $f'(x) = 3(x - 1)(x + 1)$

Construimos la tabla de signos:

Intervalo $x > 1$	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$
$x - 1$ +	-	-	-	0
$x + 1$ +	-	0	+	+
$f'(x) = 3(x - 1)(x + 1)$ +	+	0	-	0
$f(x)$ ↗	↗	Máx	↘	Mín

Conclusiones:

- Creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- Decreciente en $(-1, 1)$

Apartado b) Máximos y mínimos relativos

De la tabla anterior, identificamos:

Máximo relativo en $x = -1$

Calculamos $f(-1)$:

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = -1 + 3 + 1 = 3$$

Máximo relativo: $(-1, 3)$

Mínimo relativo en $x = 1$

Calculamos $f(1)$:

4. Ejercicio 4: Determinación de Parámetros

Ejercicio 4

Dada la función: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

Calcúlese el valor de los parámetros a , b , c para que la función pase por el punto de coordenadas $(0, 1)$ y tenga un máximo en el punto de $x = -1$ y valga 3.

Solución

Tenemos tres condiciones que nos permitirán determinar los tres parámetros a , b y c .

Condición 1: La función pasa por el punto $(0, 1)$

Esto significa que $f(0) = 1$:

$$\begin{aligned}f(0) &= (0)^3 + a(0)^2 + b(0) + c = 1 \\c &= 1\end{aligned}$$

$$\boxed{c = 1}$$

Condición 2: La función tiene un máximo en $x = -1$

Para que haya un extremo en $x = -1$, debe cumplirse $f'(-1) = 0$.

Calculamos la derivada:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

Evalúamos en $x = -1$:

$$\begin{aligned}f'(-1) &= 3(-1)^2 + 2a(-1) + b = 0 \\3 - 2a + b &= 0 \\b &= 2a - 3 \quad \dots(\text{ecuación 1})\end{aligned}$$

Condición 3: La función vale 3 en $x = -1$

Esto significa que $f(-1) = 3$:

$$\begin{aligned}f(-1) &= (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + c = 3 \\-1 + a - b + 1 &= 3 \\a - b &= 3 \\b &= a - 3 \quad \dots(\text{ecuación 2})\end{aligned}$$

Resolución del sistema de ecuaciones

Igualemos las ecuaciones 1 y 2:

$$\begin{aligned}2a - 3 &= a - 3 \\2a - a &= -3 + 3 \\a &= 0\end{aligned}$$

$$\boxed{a = 0}$$

Sustituimos en la ecuación 2:

$$\begin{aligned}b &= 0 - 3 = -3 \\9\end{aligned}$$

$$\boxed{b = -3}$$

Verificación de que es un máximo

5. Ejercicio 5: Beneficios de una Empresa

Ejercicio 5

Los beneficios de una empresa en sus primeros 8 años vienen dados, en millones de euros, por la función

$$B(t) = \frac{t^3}{4} - 3t^2 + 9t$$

donde la variable t indica el tiempo transcurrido, en años, desde su fundación.

- Estudia en qué momento los beneficios son máximos y mínimos y a cuánto ascienden.
- Dibuja la gráfica de $B(t)$ en el intervalo $[0; 8]$ y explique, a partir de ella, la evolución de los beneficios de ésta.

Solución**Apartado a) Momentos de beneficios máximos y mínimos**

Para encontrar los extremos, calculamos la derivada de $B(t)$ y la igualamos a cero.

Paso 1: Calcular $B'(t)$

$$B(t) = \frac{t^3}{4} - 3t^2 + 9t$$

$$B'(t) = \frac{3t^2}{4} - 6t + 9$$

Para simplificar, multiplicamos por 4:

$$B'(t) = \frac{3t^2 - 24t + 36}{4} = \frac{3(t^2 - 8t + 12)}{4}$$

Paso 2: Encontrar los puntos críticos

Igualemos a cero:

$$\begin{aligned}\frac{3(t^2 - 8t + 12)}{4} &= 0 \\ t^2 - 8t + 12 &= 0\end{aligned}$$

Aplicamos la fórmula general:

$$t = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2}$$

$$t_1 = \frac{8 + 4}{2} = 6 \quad ; \quad t_2 = \frac{8 - 4}{2} = 2$$

Los puntos críticos son: $t = 2$ años y $t = 6$ años.

Paso 3: Determinar la naturaleza de los extremos

Calculamos la segunda derivada:

$$B''(t) = \frac{6t}{4} - 6 = \frac{3t}{2} - 6 = \frac{3t - 12}{2}$$

En $t = 2$:

$$B''(2) = \frac{3(2) - 12}{2} = \frac{6 - 12}{2} = \frac{-6}{2} = -3 < 0$$

$\Rightarrow$ Máximo relativo

En $t = 6$:

$$B''(6) = \frac{3(6) - 12}{2} = \frac{18 - 12}{2} = \frac{6}{2} = 3 > 0$$

$\Rightarrow$ Mínimo relativo

Paso 4: Calcular los valores de los beneficios en los extremos

Máximo en $t = 2$ años:

$$B(2) = \frac{(2)^3}{4} - 3(2)^2 + 9(2) = \frac{8}{4} - 12 + 18 = 2 - 12 + 18 = 8$$

Máximo: $t = 2$ años, beneficios = 8 millones de euros

Mínimo en $t = 6$ años:

$$B(6) = \frac{(6)^3}{4} - 3(6)^2 + 9(6) = \frac{216}{4} - 108 + 54 = 54 - 108 + 54 = 0$$

Mínimo: $t = 6$ años, beneficios = 0 millones de euros

6. Ejercicio 6: Integrales Indefinidas

Ejercicio 6

Calcula las siguientes integrales:

$$a) \quad \int (-x + 2e^x) dx \qquad b) \quad \int \left(\frac{1}{x} - \sin x + \sqrt{x} \right) dx$$

Solución

Apartado a) $\int (-x + 2e^x) dx$

Aplicamos la propiedad de linealidad de la integral:

$$\int (-x + 2e^x) dx = \int (-x) dx + \int 2e^x dx$$

Paso 1: Integrar cada término

Primer término:

$$\int (-x) dx = - \int x dx = -\frac{x^2}{2}$$

Segundo término:

$$\int 2e^x dx = 2 \int e^x dx = 2e^x$$

Paso 2: Combinar los resultados

$$\int (-x + 2e^x) dx = -\frac{x^2}{2} + 2e^x + C$$

Respuesta: $\boxed{\int (-x + 2e^x) dx = -\frac{x^2}{2} + 2e^x + C}$

Verificación por derivación:

Si $F(x) = -\frac{x^2}{2} + 2e^x + C$, entonces:

$$F'(x) = -\frac{2x}{2} + 2e^x = -x + 2e^x \quad \checkmark$$

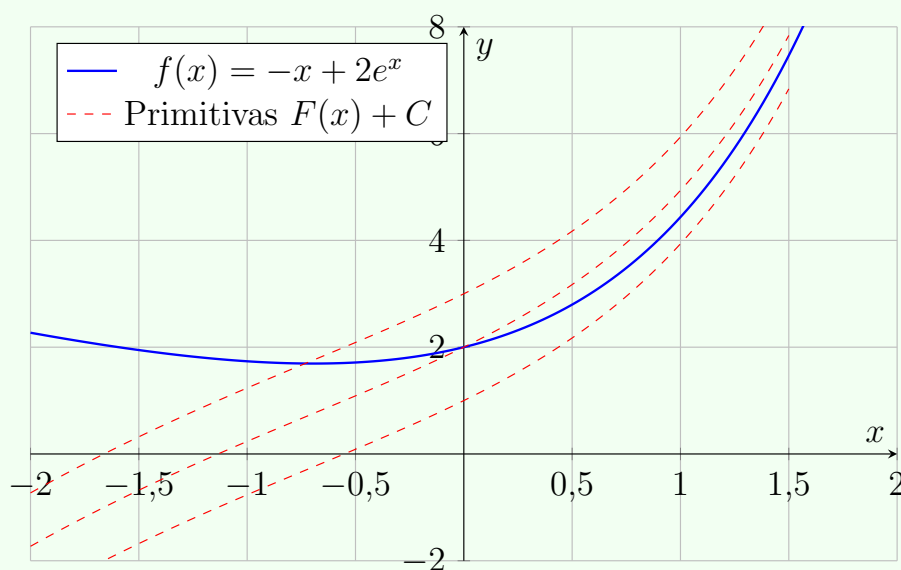


Figura 6.1: Integrando y familia de primitivas

Apartado b) $\int \left(\frac{1}{x} - \sin x + \sqrt[13]{x} \right) dx$

Aplicamos la propiedad de linealidad:

7. Ejercicio 7: Integral Definida con Parámetro

Ejercicio 7

Hállese el valor del parámetro b para que se verifique:

$$\int_{-1}^b (2bx - 3x^2) dx = -12$$

Solución**Paso 1: Calcular la integral indefinida**

$$\begin{aligned}\int (2bx - 3x^2) dx &= 2b \int x dx - 3 \int x^2 dx \\ &= 2b \cdot \frac{x^2}{2} - 3 \cdot \frac{x^3}{3} = bx^2 - x^3 + C\end{aligned}$$

Paso 2: Aplicar la regla de Barrow

$$\int_{-1}^b (2bx - 3x^2) dx = [bx^2 - x^3]_{-1}^b$$

Paso 3: Evaluar en los límites de integraciónEn $x = b$:

$$b(b)^2 - (b)^3 = b^3 - b^3 = 0$$

En $x = -1$:

$$b(-1)^2 - (-1)^3 = b(1) - (-1) = b + 1$$

Paso 4: Calcular la diferencia

$$\int_{-1}^b (2bx - 3x^2) dx = 0 - (b + 1) = -b - 1$$

Paso 5: Igualar a -12 y resolver

$$-b - 1 = -12$$

$$-b = -12 + 1$$

$$-b = -11$$

$$b = 11$$

Respuesta: $b = 11$ **Verificación de la solución**Sustituimos $b = 11$ en la integral original:

$$\int_{-1}^{11} (2(11)x - 3x^2) dx = \int_{-1}^{11} (22x - 3x^2) dx$$

Calculamos:

$$= [11x^2 - x^3]_{-1}^{11}$$

En $x = 11$:

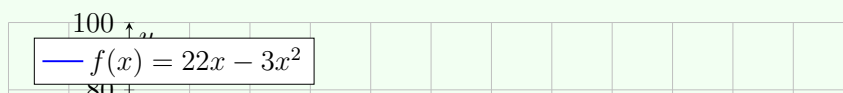
$$11(11)^2 - (11)^3 = 11(121) - 1331 = 1331 - 1331 = 0$$

En $x = -1$:

$$11(-1)^2 - (-1)^3 = 11(1) - (-1) = 11 + 1 = 12$$

Diferencia:

$$0 - 12 = -12 \quad \checkmark$$



8. Ejercicio 8: Área bajo Parábola

Ejercicio 8

Calcúlese el área del recinto comprendido entre la parábola $y = -x^2 + 4x + 1$, el eje OX y las rectas de ecuaciones $x = 0$, $x = 3$. Representa gráficamente dicho recinto.

Solución**Análisis previo**

Primero debemos verificar si la función es positiva o negativa en el intervalo $[0, 3]$.

Evaluamos en algunos puntos:

- $f(0) = -(0)^2 + 4(0) + 1 = 1 > 0$
- $f(1) = -(1)^2 + 4(1) + 1 = -1 + 4 + 1 = 4 > 0$
- $f(2) = -(2)^2 + 4(2) + 1 = -4 + 8 + 1 = 5 > 0$
- $f(3) = -(3)^2 + 4(3) + 1 = -9 + 12 + 1 = 4 > 0$

Raíces de la parábola:

Para encontrar dónde la parábola corta al eje x :

$$-x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$x^2 - 4x - 1 = 0$$

Aplicamos la fórmula general:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$$

$$x_1 = 2 - \sqrt{5} \approx -0,236 \quad ; \quad x_2 = 2 + \sqrt{5} \approx 4,236$$

Como ambas raíces están fuera del intervalo $[0, 3]$, la función es positiva en todo el intervalo. Por tanto, el área es simplemente:

$$A = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 1) dx$$

Cálculo del área

Paso 1: Calcular la primitiva

$$\int (-x^2 + 4x + 1) dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + x = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + x$$

Paso 2: Aplicar la regla de Barrow

$$A = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 + x \right]_0^3$$

Paso 3: Evaluar en los extremos

En $x = 3$:

$$-\frac{(3)^3}{3} + 2(3)^2 + 3 = -\frac{27}{3} + 2(9) + 3 = -9 + 18 + 3 = 12$$

En $x = 0$:

$$-\frac{(0)^3}{3} + 2(0)^2 + 0 = 0$$

Paso 4: Calcular la diferencia

17

$$A = 12 - 0 = 12$$

Respuesta: $\boxed{A = 12 \text{ unidades cuadradas}}$

Resumen de Resultados

Ejercicio	Resultado Principal
1a	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x} = 2$
1b	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x \right) = \frac{1}{2}$
2a	$a = \frac{3}{2}, \quad b = 0$
2c	Área en $[0, 2]$: $A = 6$ unidades cuadradas
3a	Creciente: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; Decreciente: $(-1, 1)$
3b	Máximo: $(-1, 3)$; Mínimo: $(1, -1)$
3d	Área en $[-1, 0]$: $A = \frac{9}{4} = 2,25$ unidades cuadradas
4	$a = 0, \quad b = -3, \quad c = 1$
5a	Máx: $t = 2$ años, $B = 8$ M€; Mín: $t = 6$ años, $B = 0$ M€
6a	$\int (-x + 2e^x) dx = -\frac{x^2}{2} + 2e^x + C$
6b	$\int \left(\frac{1}{x} - \sin x + \sqrt{x} \right) dx = \ln x + \cos x + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$
7	$b = 11$
8	Área: $A = 12$ unidades cuadradas

Nota Final

Todas las soluciones han sido desarrolladas con rigor matemático completo,
incluyendo todos los pasos intermedios, verificaciones y representaciones gráficas.

“La matemática es la reina de las ciencias.”

— **Carl Friedrich Gauss**

Nº1.- En una empresa el 65% de sus empleados saben manejar el ordenador y de éstos el 40% habla inglés. La cuarta parte de los que no saben manejar el ordenador habla inglés. Si se elige un empleado al azar:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que hable inglés?
- b) ¿Cuál es el porcentaje de empleados que hablan inglés y manejan el ordenador?
- c) Si habla inglés, ¿cuál es la probabilidad de que maneje el ordenador?
- d) Si no habla inglés, ¿cuál es la probabilidad de que no maneje el ordenador?

(3 PUNTOS)

Nº2.- La probabilidad de que a una persona le guste el rock es 0,55; la probabilidad de que no le guste la música clásica es igual a 0,60 y la probabilidad de que no le guste ninguna de las dos es igual a 0,35. Se elige al azar una persona. Calcúlese la probabilidad de que:

- a) Le gusten los dos tipos de música.
- b) Si no le gusta la música clásica, le guste el rock.
- c) Sólo le guste la música clásica.

(3 PUNTOS)

Nº3.- Un fabricante de pilas asegura que la duración de su producto sigue una distribución normal de media 80 horas de uso y desviación típica de 4. Calcula la probabilidad de que una pila elegida al azar dure:

- a) Más de 90 horas.
- b) Entre 70 y 85 horas

Si un comerciante compra un lote de 1000 pilas al fabricante, calcula cuántas pilas tendrán una vida superior a

- c) 100 horas
- d) 90 horas

(3 PUNTOS)

Nº4. Lanzamos tres monedas. Calcula las probabilidades de:

- a) No salga ninguna cara.
- b) Salga al menos una cara.
- c) Salgan dos caras y una cruz.

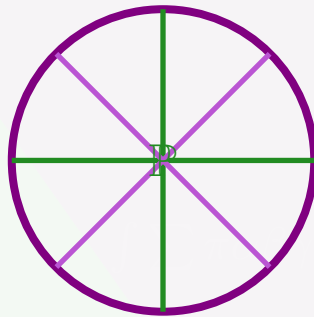
(1 PUNTO)

SUERTE JÓVENES

SOLUCIONARIO

EXAMEN DE MATEMÁTICAS

Estadística y Probabilidad



2º Bachillerato B/C

4 de Mayo de 2023

*“Hay cinco operaciones fundamentales de la matemática:
suma, resta, multiplicación, división... y modularización.”*

— Charles Hermite

*(Adaptación: La frase original de Hermite enfatizaba la abstracción
matemática)*

Soluciones Completas y Detalladas

Índice

1. Ejercicio 1: Probabilidad Condicionada - Empresa	2
1.1. Diagrama de árbol y análisis del problema	2
1.2. Definición de eventos y datos	2
1.3. Apartado a) Probabilidad de que hable inglés	3
1.4. Apartado b) Porcentaje que habla inglés Y maneja ordenador	4
1.5. Apartado c) Si habla inglés, probabilidad de que maneje ordenador	4
1.6. Apartado d) Si no habla inglés, probabilidad de que no maneje ordenador	6
1.7. Tabla resumen del Ejercicio 1	8
2. Ejercicio 2: Gustos Musicales - Rock y Clásica	9
2.1. Diagrama de Venn y análisis del problema	9
2.2. Definición de eventos y datos	9
2.3. Cálculo de la probabilidad de la unión	10
2.4. Apartado a) Probabilidad de que le gusten ambos tipos	10
2.5. Apartado b) Si no le gusta la clásica, probabilidad de que le guste el rock	11
2.6. Apartado c) Probabilidad de que sólo le guste la música clásica	12
2.7. Diagrama final con todas las probabilidades	13
3. Ejercicio 3: Distribución Normal - Duración de Pilas	14
3.1. Gráfica de la distribución normal	14
3.2. Datos del problema y estandarización	14
3.3. Apartado a) Probabilidad de que dure más de 90 horas	15
3.4. Apartado b) Probabilidad de que dure entre 70 y 85 horas	16
3.5. Gráfica del apartado b	18
3.6. Apartado c) Pilas con vida superior a 100 horas (de 1000 pilas)	18
3.7. Apartado d) Pilas con vida superior a 90 horas (de 1000 pilas)	19
3.8. Tabla resumen de valores Z y probabilidades	20
4. Ejercicio 4: Lanzamiento de Tres Monedas	21
4.1. Espacio muestral completo	21
4.2. Análisis del espacio muestral	21
4.3. Diagrama de clasificación por número de caras	22
4.4. Apartado a) Probabilidad de que no salga ninguna cara	22
4.5. Apartado b) Probabilidad de que salga al menos una cara	23
4.6. Apartado c) Probabilidad de que salgan dos caras y una cruz	24
4.7. Gráfico de barras - Distribución de probabilidad	25
4.8. Tabla resumen - Ejercicio 4	26
Resumen Final de Resultados	27

1. Ejercicio 1: Probabilidad Condicionada - Empresa

Enunciado

En una empresa el 65 % de sus empleados saben manejar el ordenador y de éstos el 40 % habla inglés. La cuarta parte de los que no saben manejar el ordenador habla inglés. Si se elige un empleado al azar:

- ¿Cuál es la probabilidad de que hable inglés?
- ¿Cuál es el porcentaje de empleados que hablan inglés y manejan el ordenador?
- Si habla inglés, ¿cuál es la probabilidad de que maneje el ordenador?
- Si no habla inglés, ¿cuál es la probabilidad de que no maneje el ordenador?

1.1. Diagrama de árbol y análisis del problema

1.2. Definición de eventos y datos

Solución

Definimos los eventos:

- O : El empleado sabe manejar el ordenador
- $\bar{O}$: El empleado NO sabe manejar el ordenador
- I : El empleado habla inglés
- $\bar{I}$: El empleado NO habla inglés

Datos proporcionados por el problema:

$$P(O) = 0,65 = \frac{65}{100} \quad (1)$$

$$P(\overline{O}) = 1 - P(O) = 1 - 0,65 = 0,35 = \frac{35}{100} \quad (2)$$

$$P(I|O) = 0,40 = \frac{40}{100} \quad (\text{De los que saben ordenador, 40 \% habla inglés}) \quad (3)$$

$$P(\overline{I}|O) = 1 - P(I|O) = 1 - 0,40 = 0,60 \quad (4)$$

$$P(I|\overline{O}) = 0,25 = \frac{1}{4} \quad (\text{La cuarta parte de los que NO saben ordenador habla inglés}) \quad (5)$$

$$P(\overline{I}|\overline{O}) = 1 - P(I|\overline{O}) = 1 - 0,25 = 0,75 \quad (6)$$

1.3. Apartado a) Probabilidad de que hable inglés

Solución

Para calcular $P(I)$, debemos considerar las dos formas mutuamente excluyentes de que un empleado hable inglés:

1. Que sepa manejar el ordenador Y hable inglés: $P(O \cap I)$
2. Que NO sepa manejar el ordenador Y hable inglés: $P(\overline{O} \cap I)$

Aplicamos el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(I) = P(O \cap I) + P(\overline{O} \cap I) \quad (7)$$

Utilizamos la regla del producto (probabilidad condicionada):

Recordemos que: $P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$

Por lo tanto:

$$P(O \cap I) = P(I|O) \cdot P(O) = 0,40 \times 0,65 = 0,26 \quad (8)$$

$$P(\overline{O} \cap I) = P(I|\overline{O}) \cdot P(\overline{O}) = 0,25 \times 0,35 = 0,0875 \quad (9)$$

Sumamos ambas probabilidades:

$$P(I) = 0,26 + 0,0875 = 0,3475 \quad (10)$$

Expresamos como fracción:

$$P(I) = \frac{3475}{10000} = \frac{139}{400} \quad (11)$$

Respuesta Final

a) La probabilidad de que un empleado elegido al azar hable inglés es:

$$P(I) = 0,3475 = 34,75 \% = \frac{139}{400} \quad (12)$$

1.4. Apartado b) Porcentaje que habla inglés Y maneja ordenador**Solución**

Buscamos $P(I \cap O)$, es decir, la probabilidad de que un empleado hable inglés Y sepa manejar el ordenador.

Aplicamos la regla del producto:

$$P(I \cap O) = P(I|O) \cdot P(O) \quad (13)$$

Sustituimos los valores:

$$P(I \cap O) = 0,40 \times 0,65 = 0,26 \quad (14)$$

Convertimos a porcentaje:

$$0,26 \times 100 \% = 26 \% \quad (15)$$

Expresamos como fracción:

$$P(I \cap O) = \frac{26}{100} = \frac{13}{50} \quad (16)$$

Respuesta Final

b) El porcentaje de empleados que hablan inglés y manejan el ordenador es:

$$P(I \cap O) = 0,26 = 26 \% = \frac{13}{50} \quad (17)$$

1.5. Apartado c) Si habla inglés, probabilidad de que maneje ordenador**Solución**

Buscamos $P(O|I)$, es decir, la probabilidad condicionada de que maneje el ordenador DADO que habla inglés.

Aplicamos el Teorema de Bayes:

$$P(O|I) = \frac{P(I|O) \cdot P(O)}{P(I)} \quad (18)$$

También podemos usar la definición de probabilidad condicionada:

$$P(O|I) = \frac{P(O \cap I)}{P(I)} \quad (19)$$

Sustituimos los valores ya calculados:

$$P(O|I) = \frac{P(O \cap I)}{P(I)} = \frac{0,26}{0,3475} \quad (20)$$

Realizamos la división:

$$P(O|I) = \frac{0,26}{0,3475} = \frac{26}{34,75} = \frac{2600}{3475} \quad (21)$$

Simplificamos la fracción (dividiendo por 25):

$$P(O|I) = \frac{104}{139} \quad (22)$$

Calculamos el valor decimal:

$$P(O|I) = \frac{104}{139} \approx 0,7482 \approx 74,82 \% \quad (23)$$

Verificación paso a paso:

$$P(O|I) = \frac{0,26}{0,3475} \quad (24)$$

$$= \frac{26/100}{3475/10000} \quad (25)$$

$$= \frac{26}{100} \times \frac{10000}{3475} \quad (26)$$

$$= \frac{26 \times 100}{3475} \quad (27)$$

$$= \frac{2600}{3475} \quad (28)$$

$$= \frac{104}{139} \approx 0,7482 \quad (29)$$

Respuesta Final

c) Si un empleado habla inglés, la probabilidad de que maneje el ordenador es:

$$P(O|I) = \frac{104}{139} \approx 0,7482 \approx 74,82 \% \quad (30)$$

- 1.6. Apartado d) Si no habla inglés, probabilidad de que no maneje ordenador

Solución

Buscamos $P(\bar{O}|\bar{I})$, es decir, la probabilidad condicionada de que NO maneje el ordenador DADO que NO habla inglés.

Primero calculamos $P(\bar{I})$:

$$P(\bar{I}) = 1 - P(I) = 1 - 0,3475 = 0,6525 \quad (31)$$

Calculamos $P(\bar{O} \cap \bar{I})$ usando la regla del producto:

$$P(\bar{O} \cap \bar{I}) = P(\bar{I}|\bar{O}) \cdot P(\bar{O}) \quad (32)$$

Sustituimos valores:

$$P(\bar{O} \cap \bar{I}) = 0,75 \times 0,35 = 0,2625 \quad (33)$$

Aplicamos la definición de probabilidad condicionada:

$$P(\bar{O}|\bar{I}) = \frac{P(\bar{O} \cap \bar{I})}{P(\bar{I})} \quad (34)$$

Sustituimos:

$$P(\bar{O}|\bar{I}) = \frac{0,2625}{0,6525} \quad (35)$$

Realizamos la división:

$$P(\bar{O}|\bar{I}) = \frac{0,2625}{0,6525} = \frac{2625}{6525} \quad (36)$$

Simplificamos dividiendo por 75:

$$P(\bar{O}|\bar{I}) = \frac{35}{87} \quad (37)$$

Calculamos el valor decimal:

$$P(\bar{O}|\bar{I}) = \frac{35}{87} \approx 0,4023 \approx 40,23 \% \quad (38)$$

Verificación detallada:

$$P(\bar{O}|\bar{I}) = \frac{P(\bar{I}|\bar{O}) \cdot P(\bar{O})}{P(\bar{I})} \quad (39)$$

$$= \frac{0,75 \times 0,35}{0,6525} \quad (40)$$

$$= \frac{0,2625}{0,6525} \quad (41)$$

$$= \frac{2625}{6525} \quad (42)$$

$$= \frac{35}{87} \approx 0,4023 \quad (43)$$

Respuesta Final

d) Si un empleado no habla inglés, la probabilidad de que no maneje el ordenador es:

$$P(\bar{O}|\bar{I}) = \frac{35}{87} \approx 0,4023 \approx 40,23 \% \quad (44)$$

1.7. Tabla resumen del Ejercicio 1

TABLA DE PROBABILIDADES CONJUNTAS

	Habla Inglés (I)	No habla Inglés ($\bar{I}$)	
Sabe ordenador (O)	0,26	0,39	0,65
No sabe ord. ($\bar{O}$)	0,0875	0,2625	0,35
TOTAL	0,3475	0,6525	1,00

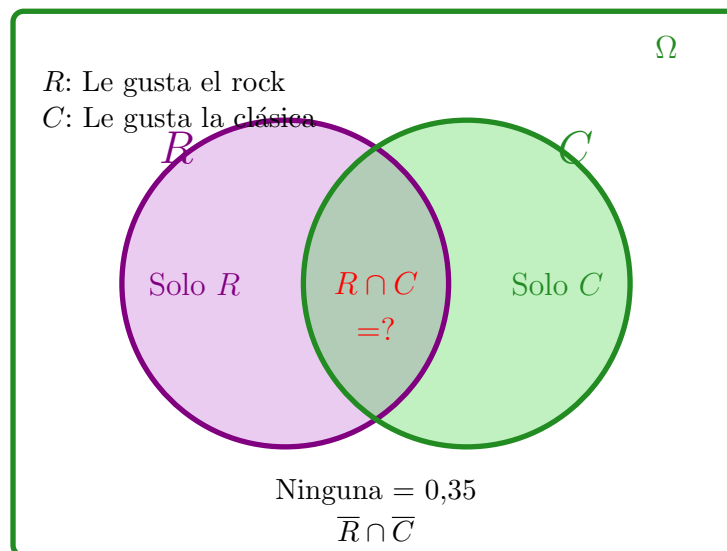
2. Ejercicio 2: Gustos Musicales - Rock y Clásica

Enunciado

La probabilidad de que a una persona le guste el rock es 0,55; la probabilidad de que no le guste la música clásica es igual a 0,60 y la probabilidad de que no le guste ninguna de las dos es igual a 0,35. Se elige al azar una persona. Calcúlese la probabilidad de que:

- Le gusten los dos tipos de música.
- Si no le gusta la música clásica, le guste el rock.
- Sólo le guste la música clásica.

2.1. Diagrama de Venn y análisis del problema



2.2. Definición de eventos y datos

Solución

Definimos los eventos:

- R : A la persona le gusta el rock
- C : A la persona le gusta la música clásica
- $\bar{R}$: A la persona NO le gusta el rock
- $\bar{C}$: A la persona NO le gusta la música clásica

Datos proporcionados por el problema:

$$P(R) = 0,55 \quad (45)$$

$$P(\bar{C}) = 0,60 \quad (46)$$

$$P(\bar{R} \cap \bar{C}) = 0,35 \quad (\text{No le gusta ninguna de las dos}) \quad (47)$$

Derivamos datos adicionales:

De $P(\overline{C}) = 0,60$, obtenemos:

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0,60 = 0,40 \quad (48)$$

De $P(R) = 0,55$, obtenemos:

$$P(\overline{R}) = 1 - P(R) = 1 - 0,55 = 0,45 \quad (49)$$

2.3. Cálculo de la probabilidad de la unión

Solución

Aplicamos las Leyes de De Morgan:

El evento “no le gusta ninguna de las dos” es el complemento de “le gusta al menos una”:

$$\overline{R \cap C} = \overline{R \cup C} \quad (50)$$

Por lo tanto:

$$P(\overline{R \cup C}) = P(\overline{R \cap C}) = 0,35 \quad (51)$$

Calculamos $P(R \cup C)$:

$$P(R \cup C) = 1 - P(\overline{R \cup C}) = 1 - 0,35 = 0,65 \quad (52)$$

Esto significa que el 65 % de las personas les gusta al menos uno de los dos tipos de música.

2.4. Apartado a) Probabilidad de que le gusten ambos tipos

Solución

Buscamos $P(R \cap C)$, la probabilidad de que le guste el rock Y la música clásica.

Aplicamos la fórmula de la probabilidad de la unión:

$$P(R \cup C) = P(R) + P(C) - P(R \cap C) \quad (53)$$

Despejamos $P(R \cap C)$:

$$P(R \cap C) = P(R) + P(C) - P(R \cup C) \quad (54)$$

Sustituimos los valores conocidos:

$$P(R \cap C) = 0,55 + 0,40 - 0,65 \quad (55)$$

$$= 0,95 - 0,65 \quad (56)$$

$$= 0,30 \quad (57)$$

Expresamos como fracción:

$$P(R \cap C) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10} \quad (58)$$

Verificación:

Comprobemos que nuestros cálculos son consistentes con todos los datos:

- Le gustan ambas: $P(R \cap C) = 0,30$
- Solo rock: $P(R) - P(R \cap C) = 0,55 - 0,30 = 0,25$
- Solo clásica: $P(C) - P(R \cap C) = 0,40 - 0,30 = 0,10$
- Ninguna: $P(\overline{R} \cap \overline{C}) = 0,35$
- TOTAL: $0,30 + 0,25 + 0,10 + 0,35 = 1,00 \checkmark$

Respuesta Final

a) La probabilidad de que le gusten los dos tipos de música es:

$$P(R \cap C) = 0,30 = 30\% = \frac{3}{10} \quad (59)$$

2.5. Apartado b) Si no le gusta la clásica, probabilidad de que le guste el rock

Solución

Buscamos $P(R|\overline{C})$, es decir, la probabilidad condicionada de que le guste el rock DADO que no le gusta la música clásica.

Aplicamos la definición de probabilidad condicionada:

$$P(R|\overline{C}) = \frac{P(R \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} \quad (60)$$

Calculamos $P(R \cap \overline{C})$ (le gusta el rock pero NO la clásica):

Esta es la región “Solo rock”:

$$P(R \cap \overline{C}) = P(R) - P(R \cap C) = 0,55 - 0,30 = 0,25 \quad (61)$$

Aplicamos la fórmula:

$$P(R|\overline{C}) = \frac{P(R \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{0,25}{0,60} \quad (62)$$

Simplificamos:

$$P(R|\overline{C}) = \frac{0,25}{0,60} = \frac{25}{60} = \frac{5}{12} \quad (63)$$

Calculamos el valor decimal:

$$P(R|\overline{C}) = \frac{5}{12} \approx 0,4167 \approx 41,67\% \quad (64)$$

Interpretación:

De las personas a las que no les gusta la música clásica (60 % del total), el 41.67 % sí les gusta el rock.

Respuesta Final

b) Si no le gusta la música clásica, la probabilidad de que le guste el rock es:

$$P(R|\overline{C}) = \frac{5}{12} \approx 0,4167 \approx 41,67\% \quad (65)$$

2.6. Apartado c) Probabilidad de que sólo le guste la música clásica

Solución

Buscamos la probabilidad de que le guste la música clásica pero NO el rock, es decir, $P(C \cap \overline{R})$.

Calculamos la región “Solo clásica”:

$$P(C \cap \overline{R}) = P(C) - P(R \cap C) \quad (66)$$

Sustituimos los valores:

$$P(C \cap \overline{R}) = 0,40 - 0,30 = 0,10 \quad (67)$$

Expresamos como fracción:

$$P(C \cap \bar{R}) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} \quad (68)$$

Interpretación:

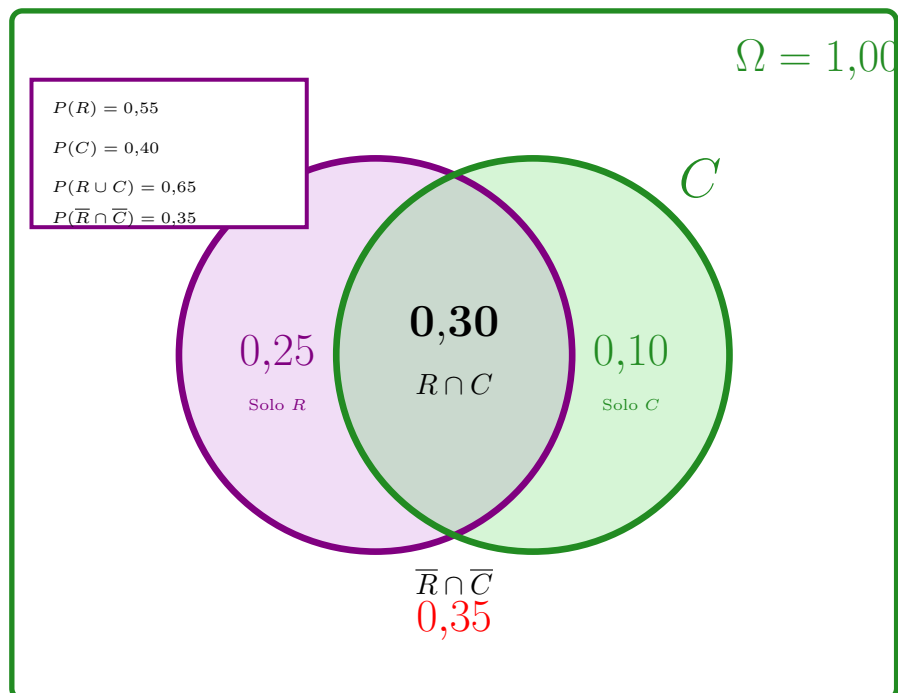
Solo el 10 % de las personas les gusta únicamente la música clásica (sin que les guste el rock).

Respuesta Final

c) La probabilidad de que sólo le guste la música clásica es:

$$P(C \cap \bar{R}) = 0,10 = 10\% = \frac{1}{10} \quad (69)$$

2.7. Diagrama final con todas las probabilidades



3. Ejercicio 3: Distribución Normal - Duración de Pilas

Enunciado

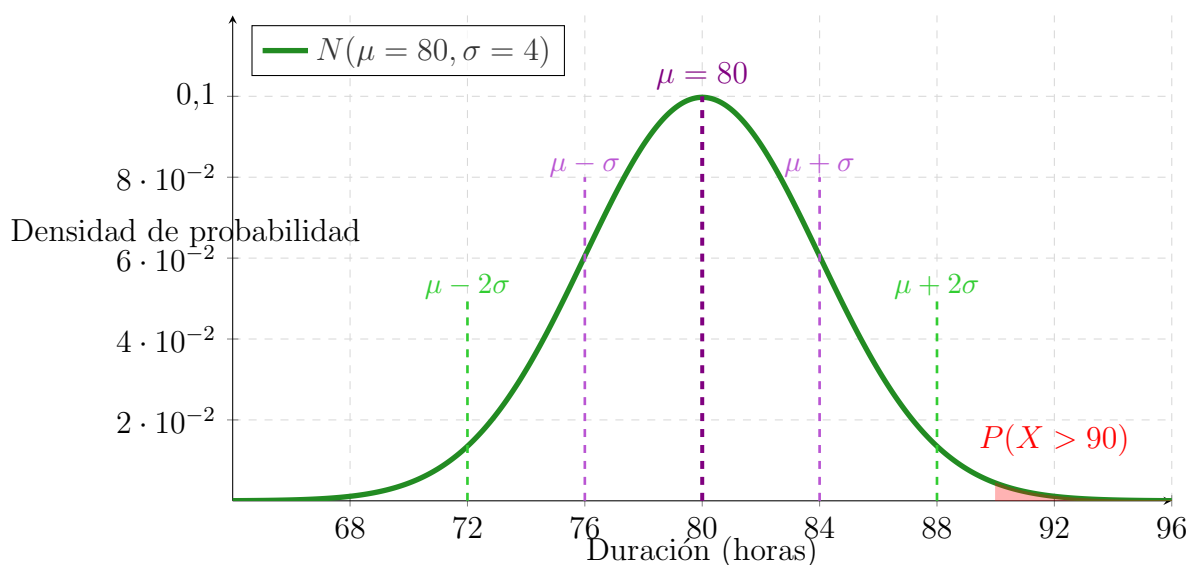
Un fabricante de pilas asegura que la duración de su producto sigue una distribución normal de media 80 horas de uso y desviación típica de 4. Calcula la probabilidad de que una pila elegida al azar dure:

- a) Más de 90 horas.
- b) Entre 70 y 85 horas.

Si un comerciante compra un lote de 1000 pilas al fabricante, calcula cuántas pilas tendrán una vida superior a:

- c) 100 horas.
- d) 90 horas.

3.1. Gráfica de la distribución normal



3.2. Datos del problema y estandarización

Solución

Variable aleatoria y parámetros:

Sea X = duración de una pila (en horas)

La variable X sigue una distribución normal:

$$X \sim N(\mu = 80, \sigma = 4) \quad (70)$$

Donde:

- $\mu = 80$ horas (media)

- $\sigma = 4$ horas (desviación típica)
- $\sigma^2 = 16$ horas² (varianza)

Tipificación o estandarización:

Para calcular probabilidades, transformamos X a la variable normal estándar Z :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 80}{4} \quad (71)$$

Donde $Z \sim N(0, 1)$ (distribución normal estándar con media 0 y desviación típica 1).

Nota importante: Utilizaremos la tabla de distribución normal estándar o la función de distribución acumulada $\Phi(z)$.

3.3. Apartado a) Probabilidad de que dure más de 90 horas

Solución

Buscamos $P(X > 90)$.

Paso 1: Tipificamos el valor $X = 90$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{90 - 80}{4} = \frac{10}{4} = 2,5 \quad (72)$$

Paso 2: Expresamos la probabilidad en términos de Z

$$P(X > 90) = P(Z > 2,5) \quad (73)$$

Paso 3: Usamos el complemento

Sabemos que:

$$P(Z > 2,5) = 1 - P(Z \leq 2,5) = 1 - \Phi(2,5) \quad (74)$$

Paso 4: Buscamos en la tabla de distribución normal estándar

De las tablas estadísticas:

$$\Phi(2,5) = P(Z \leq 2,5) = 0,9938 \quad (75)$$

Paso 5: Calculamos la probabilidad

$$P(X > 90) = 1 - \Phi(2,5) \quad (76)$$

$$= 1 - 0,9938 \quad (77)$$

$$= 0,0062 \quad (78)$$

Expresamos como porcentaje:

$$P(X > 90) = 0,0062 = 0,62 \% \quad (79)$$

Interpretación:

Solo el 0.62 % de las pilas durarán más de 90 horas. Es un evento muy poco probable, ya que 90 horas está 2.5 desviaciones típicas por encima de la media.

Respuesta Final

a) La probabilidad de que una pila dure más de 90 horas es:

$$P(X > 90) = 0,0062 = 0,62 \% \quad (80)$$

3.4. Apartado b) Probabilidad de que dure entre 70 y 85 horas**Solución**

Buscamos $P(70 < X < 85)$ o equivalentemente $P(70 \leq X \leq 85)$.

Paso 1: Tipificamos ambos valores

Para $X = 70$:

$$Z_1 = \frac{70 - 80}{4} = \frac{-10}{4} = -2,5 \quad (81)$$

Para $X = 85$:

$$Z_2 = \frac{85 - 80}{4} = \frac{5}{4} = 1,25 \quad (82)$$

Paso 2: Expresamos la probabilidad

$$P(70 < X < 85) = P(-2,5 < Z < 1,25) \quad (83)$$

Paso 3: Usamos la función de distribución acumulada

$$P(-2,5 < Z < 1,25) = \Phi(1,25) - \Phi(-2,5) \quad (84)$$

Paso 4: Buscamos en las tablas

De las tablas de distribución normal estándar:

$$\Phi(1,25) = P(Z \leq 1,25) = 0,8944 \quad (85)$$

$$\Phi(-2,5) = P(Z \leq -2,5) = 0,0062 \quad (86)$$

Nota: Por simetría de la normal, $\Phi(-2,5) = 1 - \Phi(2,5) = 1 - 0,9938 = 0,0062$

Paso 5: Calculamos la probabilidad

$$P(70 < X < 85) = \Phi(1,25) - \Phi(-2,5) \quad (87)$$

$$= 0,8944 - 0,0062 \quad (88)$$

$$= 0,8882 \quad (89)$$

Expresamos como porcentaje:

$$P(70 < X < 85) = 0,8882 = 88,82\% \quad (90)$$

Interpretación:

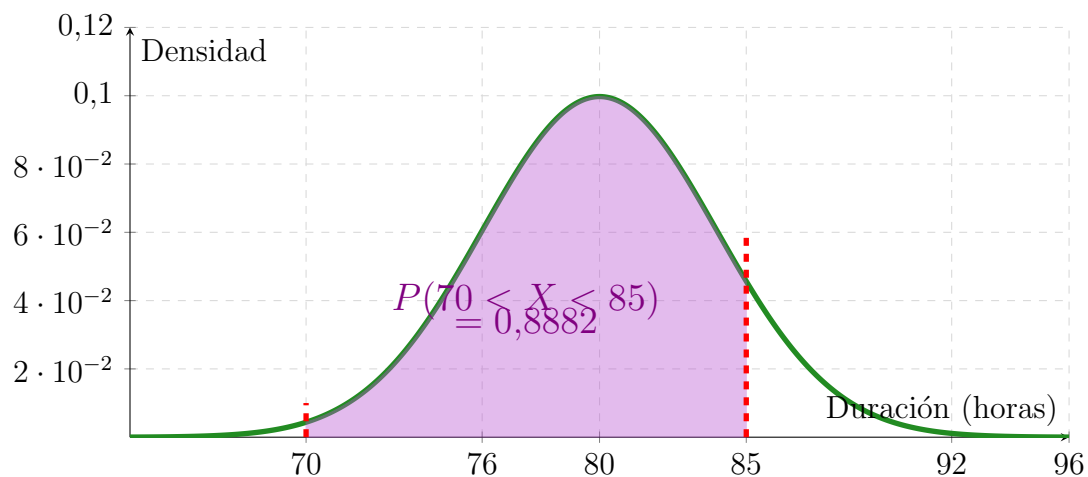
El 88.82 % de las pilas tendrán una duración entre 70 y 85 horas. Es un evento muy probable.

Respuesta Final

b) La probabilidad de que una pila dure entre 70 y 85 horas es:

$$P(70 < X < 85) = 0,8882 = 88,82\% \quad (91)$$

3.5. Gráfica del apartado b



3.6. Apartado c) Pilas con vida superior a 100 horas (de 1000 pilas)

Solución

Primero calculamos $P(X > 100)$ y luego multiplicamos por 1000.

Paso 1: Tipificamos $X = 100$

$$Z = \frac{100 - 80}{4} = \frac{20}{4} = 5 \quad (92)$$

Paso 2: Calculamos la probabilidad

$$P(X > 100) = P(Z > 5) = 1 - \Phi(5) \quad (93)$$

Paso 3: Buscamos en la tabla

Para valores tan extremos como $Z = 5$:

$$\Phi(5) \approx 0,9999997 \quad (94)$$

(Esto significa que prácticamente el 100 % de los casos está por debajo de 5 desviaciones típicas)

Paso 4: Calculamos

$$P(X > 100) = 1 - 0,9999997 \quad (95)$$

$$\approx 0,0000003 \quad (96)$$

$$= 3 \times 10^{-7} \quad (97)$$

Paso 5: Calculamos el número esperado de pilas

De un lote de 1000 pilas:

$$n = 1000 \times P(X > 100) \quad (98)$$

$$= 1000 \times 0,0000003 \quad (99)$$

$$= 0,0003 \quad (100)$$

$$\approx 0 \quad (101)$$

Redondeando al entero más próximo:

$$n = 0 \text{ pilas} \quad (102)$$

Interpretación:

Es prácticamente imposible que una pila dure más de 100 horas, ya que 100 horas está 5 desviaciones típicas por encima de la media. En un lote de 1000 pilas, no esperaríamos encontrar ninguna con esta duración.

Respuesta Final

c) De 1000 pilas, el número esperado con vida superior a 100 horas es:

$$n \approx 0 \text{ pilas} \quad (103)$$

La probabilidad es $P(X > 100) \approx 3 \times 10^{-7} = 0,00003 \%$

3.7. Apartado d) Pilas con vida superior a 90 horas (de 1000 pilas)

Solución

Ya calculamos en el apartado a) que $P(X > 90) = 0,0062$.

Calculamos el número esperado de pilas:

$$n = 1000 \times P(X > 90) \quad (104)$$

$$= 1000 \times 0,0062 \quad (105)$$

$$= 6,2 \quad (106)$$

Redondeando al entero más próximo:

$$n \approx 6 \text{ pilas} \quad (107)$$

Interpretación:

De un lote de 1000 pilas, esperaríamos que aproximadamente 6 pilas duren más de 90 horas.

Nota matemática:

Si queremos ser más precisos, podríamos decir que esperamos entre 6 y 7 pilas, pero como estamos tratando con una aproximación continua a un problema discreto, es razonable redondear a 6 pilas.

Respuesta Final

d) De 1000 pilas, el número esperado con vida superior a 90 horas es:

$$n \approx 6 \text{ pilas} \quad (108)$$

(Cálculo exacto: $n = 1000 \times 0,0062 = 6,2$ pilas)

3.8. Tabla resumen de valores Z y probabilidades

TABLA RESUMEN - EJERCICIO 3

Valor X	Valor Z	$\Phi(Z)$	Probabilidad
70	-2,5	0,0062	$P(X \leq 70) = 0,62\%$
85	1,25	0,8944	$P(X \leq 85) = 89,44\%$
90	2,5	0,9938	$P(X > 90) = 0,62\%$
100	5,0	≈ 1	$P(X > 100) \approx 0\%$

LOTE DE 1000 PILAS

Pilas con $X > 100$ horas: ≈ 0 pilas
 Pilas con $X > 90$ horas: ≈ 6 pilas

4. Ejercicio 4: Lanzamiento de Tres Monedas

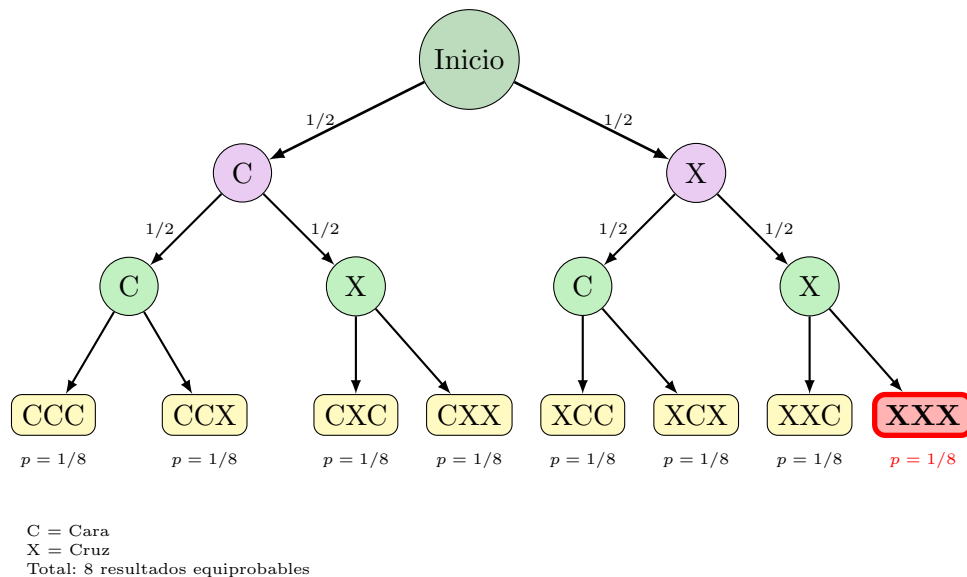
Enunciado

Lanzamos tres monedas. Calcula las probabilidades de:

- No salga ninguna cara.
- Salga al menos una cara.
- Salgan dos caras y una cruz.

4.1. Espacio muestral completo

DIAGRAMA DE ÁRBOL - TRES MONEDAS



4.2. Análisis del espacio muestral

Solución

Experimento aleatorio: Lanzar tres monedas (o lanzar una moneda tres veces).

Espacio muestral Ω :

Cada moneda puede dar Cara (C) o Cruz (X). Como lanzamos 3 monedas independientes:

$$\Omega = \{CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX\} \quad (109)$$

Número de resultados posibles:

$$|\Omega| = 2^3 = 8 \text{ resultados} \quad (110)$$

Equiprobabilidad:

Como las monedas son equilibradas y los lanzamientos son independientes, todos

los resultados son equiprobables:

$$P(\text{cada resultado}) = \frac{1}{8} \quad (111)$$

Clasificación por número de caras:

- **0 caras (3 cruces):** XXX $\rightarrow$ 1 resultado
- **1 cara (2 cruces):** CXX, XCX, XXC $\rightarrow$ 3 resultados
- **2 caras (1 cruz):** CCX, CXC, XCC $\rightarrow$ 3 resultados
- **3 caras (0 cruces):** CCC $\rightarrow$ 1 resultado

Verificación: $1 + 3 + 3 + 1 = 8 \checkmark$

4.3. Diagrama de clasificación por número de caras

CLASIFICACIÓN POR NÚMERO DE CARAS

0 CARAS XXX 1 resultado $P = 1/8$	1 CARA CXX, XCX, XXC 3 resultados $P = 3/8$	2 CARAS CCX, CXC, XCC 3 resultados $P = 3/8$	3 CARAS CCC 1 resultado $P = 1/8$

Distribución binomial: $X \sim B(n = 3, p = 0,5)$

Número de caras sigue: $P(X = k) = \binom{3}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \binom{3}{k}$

$$\binom{3}{0} = 1, \quad \binom{3}{1} = 3, \quad \binom{3}{2} = 3, \quad \binom{3}{3} = 1$$

4.4. Apartado a) Probabilidad de que no salga ninguna cara

Solución

Buscamos la probabilidad de obtener 0 caras, es decir, obtener 3 cruces.

Evento: $A = \{\text{No sale ninguna cara}\} = \{XXX\}$

Método 1: Conteo directo

Solo hay 1 resultado favorable (XXX) de 8 posibles:

$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{1}{8} \quad (112)$$

Método 2: Regla del producto (independencia)

Las tres monedas son independientes. La probabilidad de obtener cruz en cada moneda es $1/2$:

$$P(XXX) = P(X_1) \times P(X_2) \times P(X_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \quad (113)$$

Método 3: Distribución binomial

Sea X = número de caras. Entonces $X \sim B(n = 3, p = 1/2)$.

Queremos $P(X = 0)$:

$$P(X = 0) = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 \times 1 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \quad (114)$$

Expresamos como porcentaje:

$$P(A) = \frac{1}{8} = 0,125 = 12,5 \% \quad (115)$$

Respuesta Final

a) La probabilidad de que no salga ninguna cara es:

$$P(0 \text{ caras}) = \frac{1}{8} = 0,125 = 12,5 \% \quad (116)$$

4.5. Apartado b) Probabilidad de que salga al menos una cara**Solución**

“Al menos una cara” significa 1, 2 o 3 caras.

Evento: $B = \{\text{Al menos una cara}\}$

El complemento de este evento es “ninguna cara”:

$$\overline{B} = \{\text{Ninguna cara}\} = \{XXX\} \quad (117)$$

Método 1: Usando el complemento

Ya calculamos en el apartado a) que $P(\overline{B}) = 1/8$.

Por lo tanto:

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \quad (118)$$

Método 2: Conteo directo

Resultados con al menos una cara:

$$B = \{CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC\} \quad (119)$$

Hay 7 resultados favorables:

$$P(B) = \frac{7}{8} \quad (120)$$

Método 3: Sumando probabilidades

$$P(\text{al menos 1 cara}) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \quad (121)$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \quad (122)$$

$$= \frac{7}{8} \quad (123)$$

Expresamos como porcentaje:

$$P(B) = \frac{7}{8} = 0,875 = 87,5\% \quad (124)$$

Verificación:

$$P(\text{ninguna cara}) + P(\text{al menos 1 cara}) = \frac{1}{8} + \frac{7}{8} = 1 \quad \checkmark \quad (125)$$

Respuesta Final

b) La probabilidad de que salga al menos una cara es:

$$P(\text{al menos 1 cara}) = \frac{7}{8} = 0,875 = 87,5\% \quad (126)$$

4.6. Apartado c) Probabilidad de que salgan dos caras y una cruz

Solución

Buscamos la probabilidad de obtener exactamente 2 caras (y por tanto, 1 cruz).

Evento: $C = \{\text{Exactamente 2 caras}\}$

Resultados favorables:

$$C = \{CCX, CXC, XCC\} \quad (127)$$

Método 1: Conteo directo

Hay 3 resultados favorables de 8 posibles:

$$P(C) = \frac{3}{8} \quad (128)$$

Método 2: Distribución binomial

Sea X = número de caras. Queremos $P(X = 2)$:

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \quad (129)$$

Calculamos el coeficiente binomial:

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{6}{2 \cdot 1} = 3 \quad (130)$$

Sustituimos:

$$P(X = 2) = 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \quad (131)$$

Método 3: Análisis combinatorio

El número de formas de elegir 2 posiciones de 3 para las caras es:

$$\binom{3}{2} = 3 \quad (132)$$

Cada una de estas configuraciones tiene probabilidad:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \quad (133)$$

Por lo tanto:

$$P(C) = 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \quad (134)$$

Expresamos como porcentaje:

$$P(C) = \frac{3}{8} = 0,375 = 37,5\% \quad (135)$$

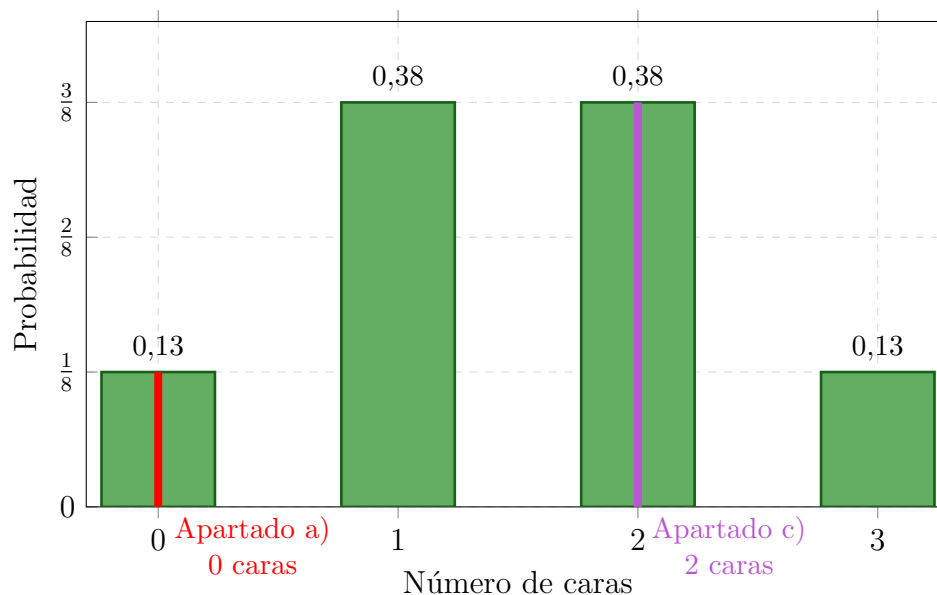
Respuesta Final

c) La probabilidad de que salgan dos caras y una cruz es:

$$P(2 \text{ caras, } 1 \text{ cruz}) = \frac{3}{8} = 0,375 = 37,5\% \quad (136)$$

4.7. Gráfico de barras - Distribución de probabilidad

Distribución Binomial: $X \sim B(3, 0,5)$



4.8. Tabla resumen - Ejercicio 4

TABLA RESUMEN COMPLETA				
Nº Caras	Resultados	Cantidad	$\binom{3}{k}$	Probabilidad
0	XXX	1	1	$\frac{1}{8} = 12,5\%$
1	CXX, XCX, XXC	3	3	$\frac{3}{8} = 37,5\%$
2	CCX, CXC, XCC	3	3	$\frac{3}{8} = 37,5\%$
3	CCC	1	1	$\frac{1}{8} = 12,5\%$
TOTAL		8	2^3	$1,00 = 100\%$

Resumen Final de Resultados

EJERCICIO 1: Probabilidad Condicionada - Empresa

- a) Probabilidad de que hable inglés: $P(I) = 0,3475 = 34,75 \%$
- b) Porcentaje que habla inglés y maneja ordenador: $P(I \cap O) = 0,26 = 26 \%$
- c) Si habla inglés, probabilidad de que maneje ordenador:

$$P(O|I) = \frac{104}{139} \approx 74,82 \%$$
- d) Si no habla inglés, probabilidad de que no maneje ordenador:

$$P(\bar{O}|\bar{I}) = \frac{35}{87} \approx 40,23 \%$$

EJERCICIO 2: Gustos Musicales - Rock y Clásica

- a) Probabilidad de que gusten ambos tipos: $P(R \cap C) = 0,30 = 30 \%$
- b) Si no le gusta la clásica, probabilidad de que le guste el rock:

$$P(R|\bar{C}) = \frac{5}{12} \approx 41,67 \%$$
- c) Probabilidad de que sólo le guste la clásica: $P(C \cap \bar{R}) = 0,10 = 10 \%$

EJERCICIO 3: Distribución Normal - Duración de Pilas

Distribución: $X \sim N(\mu = 80, \sigma = 4)$

- a) Probabilidad de que dure más de 90 horas: $P(X > 90) = 0,0062 = 0,62 \%$
- b) Probabilidad entre 70 y 85 horas: $P(70 < X < 85) = 0,8882 = 88,82 \%$
- c) Pilas con vida superior a 100 horas (de 1000): $n \approx 0$ pilas
- d) Pilas con vida superior a 90 horas (de 1000): $n \approx 6$ pilas

EJERCICIO 4: Lanzamiento de Tres Monedas

- a) Probabilidad de que no salga ninguna cara: $P(0 \text{ caras}) = \frac{1}{8} = 12,5 \%$
- b) Probabilidad de al menos una cara: $P(\text{al menos 1 cara}) = \frac{7}{8} = 87,5 \%$

c) Probabilidad de dos caras y una cruz: $P(2 \text{ caras}) = \frac{3}{8} = 37,5 \%$

Documento elaborado con rigor matemático completo

Todos los pasos han sido desarrollados sin omisiones

SuperAgent CREAO — Solucionario Completo
Examen de Matemáticas 2º Bachillerato — Mayo 2023

Nº1.- Una enfermedad afecta al 5% de la población. Se aplica una prueba diagnóstica para detectar dicha enfermedad, obteniéndose el siguiente resultado: Aplicada a personas que padecen la enfermedad se obtiene un 96% de resultado positivos, y aplicada a personas que no la padecen los resultados positivos se reducen al 2%. Si se elige una persona al azar y se le realiza la prueba:

- a) ¿Cual es la probabilidad de que el resultado sea positivo?
- a) Si el resultado ha sido negativo, ¿cuál es la probabilidad de que padezca la enfermedad?

(3 PUNTOS)

Nº2.- Sabiendo que $P(A) = 0,3$; $P(B) = 0,4$ y $P(A/B) = 0,2$, calcula las siguientes probabilidades:

$$p(A \cap B), p(A \cup B), p(B/A), p(\bar{A} \cap \bar{B})$$

¿Son independientes los sucesos A y B? ¿Por qué?

(3 PUNTOS)

Nº3.- Una compañía de autobuses sabe que el retraso en la llegada sigue una distribución normal de media 5 min, y que el 68,26% de los autobuses llega entre 2 y 8 minutos tarde.

- a) ¿Cuál es la desviación típica?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que un autobús llegue puntual o antes de la hora?
- c) ¿Qué porcentaje de autobuses llegan con un retraso superior a 8 minutos

(3 PUNTOS)

Nº4.- Se tienen tres cajas iguales. La primera contiene 3 bolas blancas y 4 negras; la segunda contiene 5 bolas negras, y la tercera 4 blancas y 3 negras. Se elige una caja al azar y se saca una bola, también al azar, de la caja.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea negra?
- b) Si la bola es blanca, ¿Cuál es la probabilidad de que sea de la segunda caja?

(1 PUNTO)

SUERTE JÓVENES

EXAMEN RESUELTO

MATEMÁTICAS

2º Bachillerato B/C

Mayo 2023
ESTADÍSTICA Y
PROBABILIDAD

*“El álgebra no es más que geometría escrita;
la geometría no es más que álgebra figurada.”*

— Sophie Germain

Junta de Castilla y León

Índice

1. Ejercicio 1: Prueba Diagnóstica y Teorema de Bayes

1.1. Enunciado

Una enfermedad afecta al 5 % de la población. Se aplica una prueba diagnóstica para detectar dicha enfermedad, obteniéndose el siguiente resultado: Aplicada a personas que padecen la enfermedad se obtiene un 96 % de resultados positivos, y aplicada a personas que no la padecen los resultados positivos se reducen al 2 %. Si se elige una persona al azar y se le realiza la prueba:

- ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado sea positivo?
- Si el resultado ha sido negativo, ¿cuál es la probabilidad de que padezca la enfermedad?

1.2. Datos del Problema

Definimos los sucesos:

- E = “La persona padece la enfermedad”
- $\overline{E}$ = “La persona NO padece la enfermedad”
- $+$ = “El resultado de la prueba es positivo”
- $-$ = “El resultado de la prueba es negativo”

Datos conocidos:

$$P(E) = 0,05 \quad (1)$$

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 0,95 \quad (2)$$

$$P(+|E) = 0,96 \quad (\text{Sensibilidad de la prueba}) \quad (3)$$

$$P(-|E) = 1 - P(+|E) = 0,04 \quad (4)$$

$$P(+|\overline{E}) = 0,02 \quad (\text{Falsos positivos}) \quad (5)$$

$$P(-|\overline{E}) = 1 - P(+|\overline{E}) = 0,98 \quad (\text{Especificidad de la prueba}) \quad (6)$$

1.3. Resolución

1.3.1. Apartado a) Probabilidad de resultado positivo

Aplicamos el **Teorema de la Probabilidad Total**:

Teorema de la Probabilidad Total

Si $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ es un sistema completo de sucesos, entonces:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

En nuestro caso, $\{E, \bar{E}\}$ forma un sistema completo de sucesos, por lo tanto:

$$P(+) = P(+|E) \cdot P(E) + P(+|\bar{E}) \cdot P(\bar{E}) \quad (7)$$

$$= 0,96 \cdot 0,05 + 0,02 \cdot 0,95 \quad (8)$$

$$= 0,048 + 0,019 \quad (9)$$

$$= 0,067 \quad (10)$$

Respuesta apartado a)

La probabilidad de que el resultado sea positivo es:

$$P(+) = 0,067 = 6,7 \%$$

1.3.2. Apartado b) Probabilidad de enfermedad dado resultado negativo

Buscamos $P(E|-)$. Aplicamos el **Teorema de Bayes**:

Teorema de Bayes

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)}$$

Primero calculamos $P(-)$ usando el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(-) = P(-|E) \cdot P(E) + P(-|\bar{E}) \cdot P(\bar{E}) \quad (11)$$

$$= 0,04 \cdot 0,05 + 0,98 \cdot 0,95 \quad (12)$$

$$= 0,002 + 0,931 \quad (13)$$

$$= 0,933 \quad (14)$$

Ahora aplicamos Bayes:

$$P(E|-) = \frac{P(-|E) \cdot P(E)}{P(-)} \quad (15)$$

$$= \frac{0,04 \cdot 0,05}{0,933} \quad (16)$$

$$= \frac{0,002}{0,933} \quad (17)$$

$$= 0,002144 \approx 0,00214 \quad (18)$$

Respuesta apartado b)

La probabilidad de que padezca la enfermedad dado que el resultado ha sido negativo es:

$$P(E|-) = 0,00214 = 0,214 \%$$

Esto significa que un resultado negativo es muy fiable: solo el 0,214 % de las personas con resultado negativo realmente padecen la enfermedad.

1.4. Diagrama de Árbol

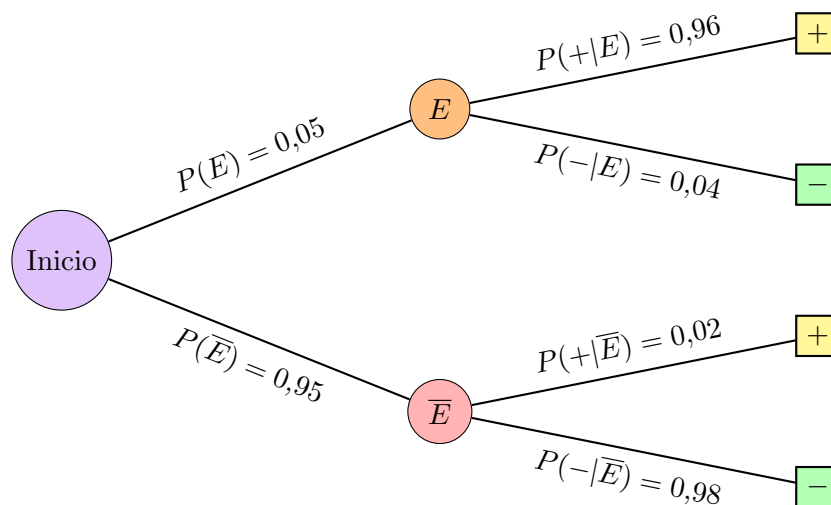


Figura 1: Árbol de probabilidades para la prueba diagnóstica

1.5. Interpretación Gráfica de Resultados

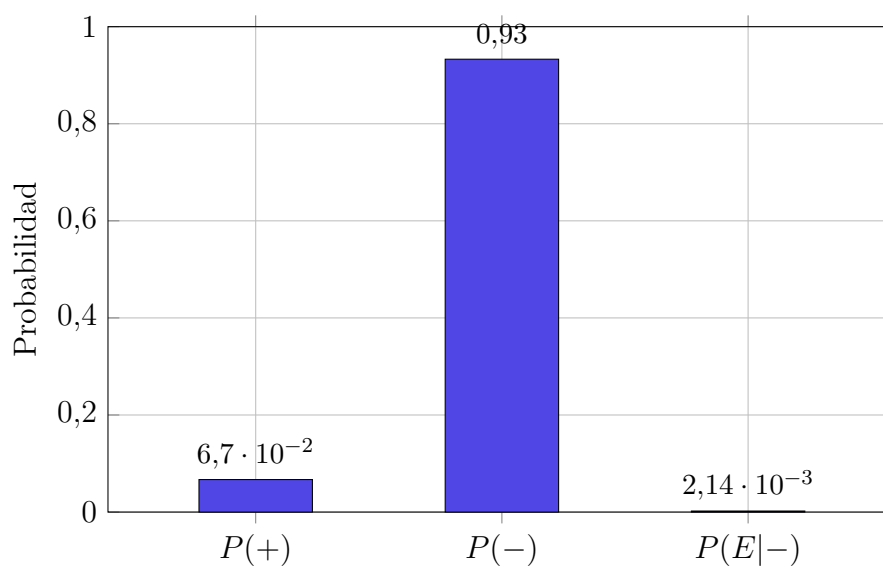


Figura 2: Comparación de probabilidades calculadas

2. Ejercicio 2: Probabilidades Condicionadas e Independencia

2.1. Enunciado

Sabiendo que $P(A) = 0,3$; $P(B) = 0,4$ y $P(A|B) = 0,2$, calcula las siguientes probabilidades:

$$p(A \cap B), \quad p(A \cup B), \quad p(B|A), \quad p(\bar{A} \cap \bar{B})$$

¿Son independientes los sucesos A y B ? ¿Por qué?

2.2. Datos del Problema

$$P(A) = 0,3 \quad (19)$$

$$P(B) = 0,4 \quad (20)$$

$$P(A|B) = 0,2 \quad (21)$$

2.3. Resolución

2.3.1. Cálculo de $P(A \cap B)$

Utilizamos la **definición de probabilidad condicionada**:

Probabilidad Condicionada

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Aplicando la fórmula:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) \quad (22)$$

$$= 0,2 \cdot 0,4 \quad (23)$$

$$= 0,08 \quad (24)$$

$$P(A \cap B) = 0,08$$

2.3.2. Cálculo de $P(A \cup B)$

Utilizamos la **regla de la suma**:

Regla de la Suma

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Aplicando la fórmula:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (25)$$

$$= 0,3 + 0,4 - 0,08 \quad (26)$$

$$= 0,62 \quad (27)$$

$$P(A \cup B) = 0,62$$

2.3.3. Cálculo de $P(B|A)$

Utilizamos la **definición de probabilidad condicionada**:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (28)$$

$$= \frac{0,08}{0,3} \quad (29)$$

$$= \frac{8}{30} \quad (30)$$

$$= \frac{4}{15} \quad (31)$$

$$\approx 0,26 \quad (32)$$

$$P(B|A) = \frac{4}{15} \approx 0,267$$

2.3.4. Cálculo de $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

Utilizamos las **Leyes de De Morgan**:

Leyes de De Morgan

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Por la primera ley de De Morgan:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) \quad (33)$$

$$= 1 - P(A \cup B) \quad (34)$$

$$= 1 - 0,62 \quad (35)$$

$$= 0,38 \quad (36)$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,38$$

2.3.5. Independencia de los sucesos A y B

Dos sucesos A y B son **independientes** si y solo si se cumple:

Condición de Independencia

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Equivalentemente:

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{y} \quad P(B|A) = P(B)$$

Comprobamos la primera condición:

$$P(A) \cdot P(B) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12 \quad (37)$$

$$P(A \cap B) = 0,08 \quad (38)$$

Como $P(A \cap B) = 0,08 \neq 0,12 = P(A) \cdot P(B)$

Comprobamos también las probabilidades condicionadas:

$$P(A|B) = 0,2 \neq 0,3 = P(A) \quad (39)$$

$$P(B|A) = \frac{4}{15} \approx 0,267 \neq 0,4 = P(B) \quad (40)$$

Conclusión sobre Independencia

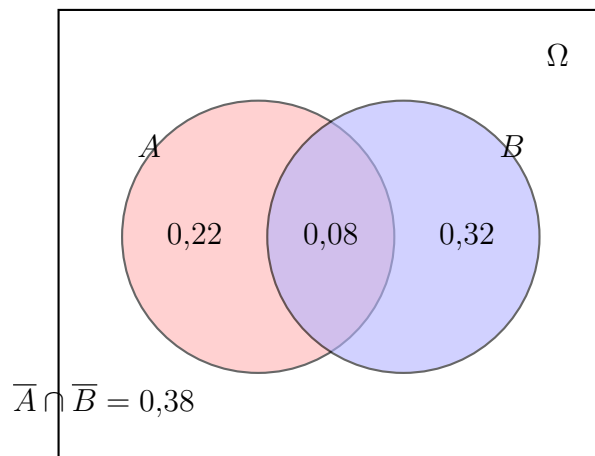
Los sucesos A y B **NO** son independientes.

Justificación:

- $P(A \cap B) = 0,08 \neq 0,12 = P(A) \cdot P(B)$
- $P(A|B) = 0,2 \neq P(A) = 0,3$
- $P(B|A) = 0,267 \neq P(B) = 0,4$

La ocurrencia de un suceso afecta a la probabilidad del otro, lo que indica **dependencia estadística**.

2.4. Diagrama de Venn



$$P(A) = 0,3 \quad P(B) = 0,4 \quad P(A \cap B) = 0,08 \quad P(A \cup B) = 0,62$$

Figura 3: Diagrama de Venn mostrando las probabilidades de A y B

2.5. Tabla de Contingencia

	B	$\bar{B}$	Total
A	0,08	0,22	0,3
$\bar{A}$	0,32	0,38	0,7
Total	0,4	0,6	1

Cuadro 1: Tabla de contingencia para los sucesos A y B

2.6. Resumen de Resultados

Probabilidad	Valor
$P(A \cap B)$	0,08
$P(A \cup B)$	0,62
$P(B A)$	$\frac{4}{15} \approx 0,267$
$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	0,38
¿Independientes?	NO

Cuadro 2: Resumen de probabilidades calculadas

3. Ejercicio 3: Distribución Normal

3.1. Enunciado

Una compañía de autobuses sabe que el retraso en la llegada sigue una distribución normal de media 5 min, y que el 68,26 % de los autobuses llega entre 2 y 8 minutos tarde.

- ¿Cuál es la desviación típica?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un autobús llegue puntual o antes de la hora?
- ¿Qué porcentaje de autobuses llegan con un retraso superior a 8 minutos?

3.2. Datos del Problema

Sea X = “Retraso en minutos de los autobuses”

Sabemos que:

$$X \sim N(\mu, \sigma) \quad (41)$$

$$\mu = 5 \text{ minutos} \quad (42)$$

$$P(2 < X < 8) = 0,6826 \quad (43)$$

3.3. Resolución

3.3.1. Apartado a) Cálculo de la desviación típica

El dato clave es que el 68,26 % de los valores está entre 2 y 8 minutos. Este porcentaje es muy específico y corresponde a una propiedad fundamental de la distribución normal.

Regla Empírica (68-95-99.7)

En una distribución normal $N(\mu, \sigma)$:

- Aproximadamente el 68,26 % de los datos está en el intervalo $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
- Aproximadamente el 95,44 % de los datos está en el intervalo $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- Aproximadamente el 99,74 % de los datos está en el intervalo $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

Como tenemos que $P(2 < X < 8) = 0,6826 = 68,26 \%$, podemos identificar:

$$\mu - \sigma = 2 \quad (44)$$

$$\mu + \sigma = 8 \quad (45)$$

Sabemos que $\mu = 5$, por lo tanto:

$$5 - \sigma = 2 \quad \Rightarrow \quad \sigma = 5 - 2 = 3 \quad (46)$$

$$5 + \sigma = 8 \quad \Rightarrow \quad \sigma = 8 - 5 = 3 \quad (47)$$

Verificación: Ambas ecuaciones dan el mismo valor, lo que confirma nuestra respuesta.

Respuesta apartado a)

La desviación típica es:

$$\sigma = 3 \text{ minutos}$$

Por lo tanto, la variable aleatoria sigue la distribución:

$$X \sim N(5, 3)$$

3.3.2. Apartado b) Probabilidad de llegar puntual o antes

Queremos calcular $P(X \leq 0)$, es decir, la probabilidad de que el retraso sea menor o igual a cero (llegar puntual o adelantado).

Para calcular esta probabilidad, **tipificamos** la variable:

Tipificación de la Normal

Si $X \sim N(\mu, \sigma)$, entonces:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

donde Z es la variable normal estándar.

Tipificamos:

$$P(X \leq 0) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{0 - \mu}{\sigma}\right) \quad (48)$$

$$= P\left(Z \leq \frac{0 - 5}{3}\right) \quad (49)$$

$$= P\left(Z \leq \frac{-5}{3}\right) \quad (50)$$

$$= P(Z \leq -1,667) \quad (51)$$

Usando la tabla de la distribución normal estándar o calculadora:

$$P(Z \leq -1,667) = \Phi(-1,667) \quad (52)$$

$$\approx 0,0478 \quad (53)$$

Respuesta apartado b)

La probabilidad de que un autobús llegue puntual o antes de la hora es:

$$P(X \leq 0) = 0,0478 = 4,78 \%$$

Esto significa que aproximadamente 1 de cada 21 autobuses llega puntual o adelantado.

3.3.3. Apartado c) Porcentaje con retraso superior a 8 minutos

Queremos calcular $P(X > 8)$.

Por la regla empírica, sabemos que:

- $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0,6826$
- Es decir, $P(2 < X < 8) = 0,6826$

Por la simetría de la distribución normal respecto a la media:

$$P(X < 2) = P(X > 8) \quad (\text{por simetría}) \quad (54)$$

Además:

$$P(X < 2) + P(2 < X < 8) + P(X > 8) = 1 \quad (55)$$

$$P(X > 8) + 0,6826 + P(X > 8) = 1 \quad (\text{por simetría}) \quad (56)$$

$$2 \cdot P(X > 8) = 1 - 0,6826 \quad (57)$$

$$2 \cdot P(X > 8) = 0,3174 \quad (58)$$

$$P(X > 8) = \frac{0,3174}{2} \quad (59)$$

$$P(X > 8) = 0,1587 \quad (60)$$

Alternativamente, tipificando:

$$P(X > 8) = P\left(Z > \frac{8-5}{3}\right) \quad (61)$$

$$= P(Z > 1) \quad (62)$$

$$= 1 - P(Z \leq 1) \quad (63)$$

$$= 1 - \Phi(1) \quad (64)$$

$$= 1 - 0,8413 \quad (65)$$

$$= 0,1587 \quad (66)$$

Respuesta apartado c)

El porcentaje de autobuses que llegan con un retraso superior a 8 minutos es:

$$P(X > 8) = 0,1587 = 15,87\%$$

Aproximadamente 1 de cada 6 autobuses llega con más de 8 minutos de retraso.

3.4. Representación Gráfica de la Distribución Normal

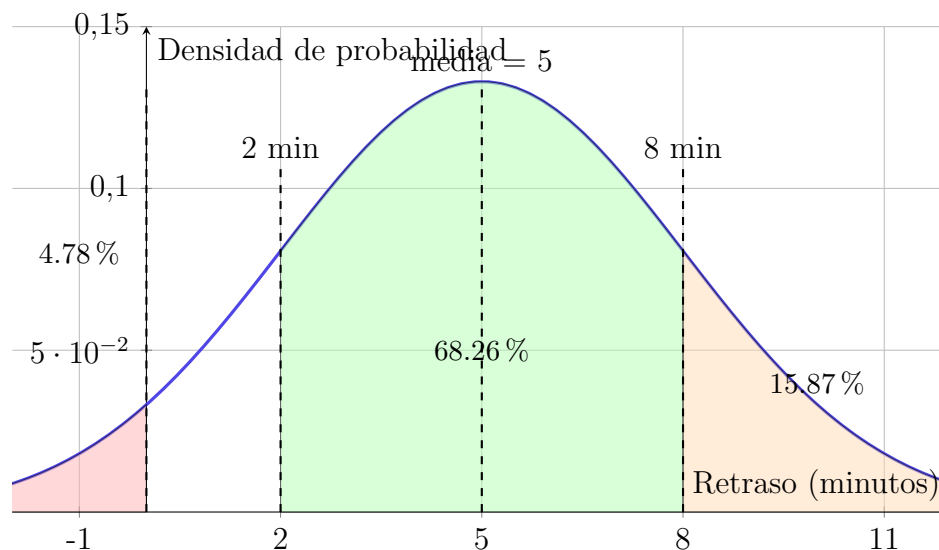


Figura 4: Distribución Normal del retraso de autobuses con áreas de probabilidad

3.5. Tabla de Valores Importantes

Valor de X	Valor tipificado Z	Interpretación
$X = 0$	$Z = -1,667$	Puntual
$X = 2$	$Z = -1$	Una desviación típica por debajo de la media
$X = 5$	$Z = 0$	Media (retraso promedio)
$X = 8$	$Z = 1$	Una desviación típica por encima de la media
$X = 11$	$Z = 2$	Dos desviaciones típicas por encima de la media

Cuadro 3: Valores relevantes y su tipificación

3.6. Diagrama Ilustrativo de la Regla 68-95-99.7

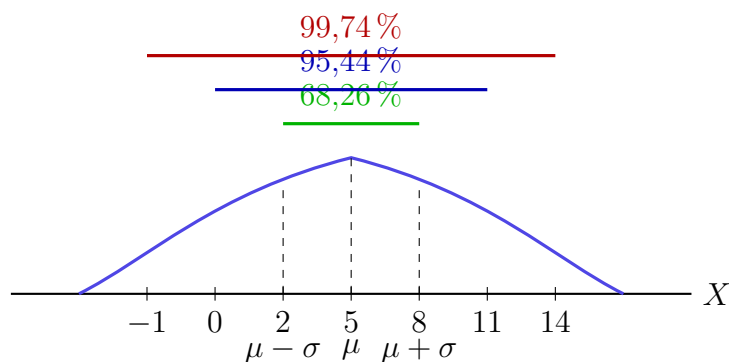


Figura 5: Regla empírica 68-95-99.7 aplicada al retraso de autobuses

4. Ejercicio 4: Probabilidad Total y Teorema de Bayes con Urnas

4.1. Enunciado

Se tienen tres cajas iguales. La primera contiene 3 bolas blancas y 4 negras; la segunda contiene 5 bolas negras, y la tercera 4 blancas y 3 negras. Se elige una caja al azar y se saca una bola, también al azar, de la caja.

- ¿Cuál es la probabilidad de que sea negra?
- Si la bola es blanca, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la segunda caja?

4.2. Datos del Problema

Definimos los sucesos:

- C_1 = “Se elige la caja 1”
- C_2 = “Se elige la caja 2”
- C_3 = “Se elige la caja 3”
- B = “La bola extraída es blanca”
- N = “La bola extraída es negra”

Composición de las cajas:

Caja	Blancas	Negras	Total
Caja 1 (C_1)	3	4	7
Caja 2 (C_2)	0	5	5
Caja 3 (C_3)	4	3	7

Cuadro 4: Composición de las tres cajas

Como las cajas se eligen al azar:

$$P(C_1) = P(C_2) = P(C_3) = \frac{1}{3} \quad (67)$$

Probabilidades condicionadas:

$$P(B|C_1) = \frac{3}{7} \quad P(N|C_1) = \frac{4}{7} \quad (68)$$

$$P(B|C_2) = \frac{0}{5} = 0 \quad P(N|C_2) = \frac{5}{5} = 1 \quad (69)$$

$$P(B|C_3) = \frac{4}{7} \quad P(N|C_3) = \frac{3}{7} \quad (70)$$

4.3. Resolución

4.3.1. Apartado a) Probabilidad de extraer una bola negra

Aplicamos el **Teorema de la Probabilidad Total**:

Teorema de la Probabilidad Total

Si $\{C_1, C_2, C_3\}$ es un sistema completo de sucesos, entonces:

$$P(N) = P(N|C_1) \cdot P(C_1) + P(N|C_2) \cdot P(C_2) + P(N|C_3) \cdot P(C_3)$$

Calculamos:

$$P(N) = P(N|C_1) \cdot P(C_1) + P(N|C_2) \cdot P(C_2) + P(N|C_3) \cdot P(C_3) \quad (71)$$

$$= \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} \quad (72)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{4}{7} + 1 + \frac{3}{7} \right) \quad (73)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{4}{7} + \frac{7}{7} + \frac{3}{7} \right) \quad (74)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{14}{7} \quad (75)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 2 \quad (76)$$

$$= \frac{2}{3} \quad (77)$$

Respuesta apartado a)

La probabilidad de que la bola extraída sea negra es:

$$P(N) = \frac{2}{3} \approx 0,667 = 66,7 \%$$

4.3.2. Apartado b) Probabilidad de caja 2 dado que la bola es blanca

Queremos calcular $P(C_2|B)$. Aplicamos el **Teorema de Bayes**:

Teorema de Bayes

$$P(C_i|B) = \frac{P(B|C_i) \cdot P(C_i)}{P(B)}$$

Primero necesitamos calcular $P(B)$ usando el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(B) = P(B|C_1) \cdot P(C_1) + P(B|C_2) \cdot P(C_2) + P(B|C_3) \cdot P(C_3) \quad (78)$$

$$= \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{3} \quad (79)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{3}{7} + 0 + \frac{4}{7} \right) \quad (80)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{7} \quad (81)$$

$$= \frac{1}{3} \quad (82)$$

Ahora aplicamos Bayes para calcular $P(C_2|B)$:

$$P(C_2|B) = \frac{P(B|C_2) \cdot P(C_2)}{P(B)} \quad (83)$$

$$= \frac{0 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} \quad (84)$$

$$= \frac{0}{\frac{1}{3}} \quad (85)$$

$$= 0 \quad (86)$$

Respuesta apartado b)

La probabilidad de que la bola blanca provenga de la caja 2 es:

$$P(C_2|B) = 0$$

Interpretación: Este resultado tiene sentido porque la caja 2 **no contiene bolas blancas** (solo tiene 5 bolas negras). Por lo tanto, es imposible que una bola blanca provenga de la caja 2.

4.3.3. Información adicional: Probabilidades a posteriori

Aunque no se pide en el enunciado, es interesante calcular las probabilidades de las cajas 1 y 3 dado que la bola es blanca:

Para la Caja 1:

$$P(C_1|B) = \frac{P(B|C_1) \cdot P(C_1)}{P(B)} \quad (87)$$

$$= \frac{\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} \quad (88)$$

$$= \frac{\frac{3}{21}}{\frac{1}{3}} \quad (89)$$

$$= \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{3}} \quad (90)$$

$$= \frac{3}{7} \approx 0,4286 \quad (91)$$

Para la Caja 3:

$$P(C_3|B) = \frac{P(B|C_3) \cdot P(C_3)}{P(B)} \quad (92)$$

$$= \frac{\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} \quad (93)$$

$$= \frac{4}{7} \approx 0,5714 \quad (94)$$

Verificación:

$$P(C_1|B) + P(C_2|B) + P(C_3|B) = \frac{3}{7} + 0 + \frac{4}{7} = \frac{7}{7} = 1 \quad \checkmark \quad (95)$$

4.4. Diagrama de Árbol

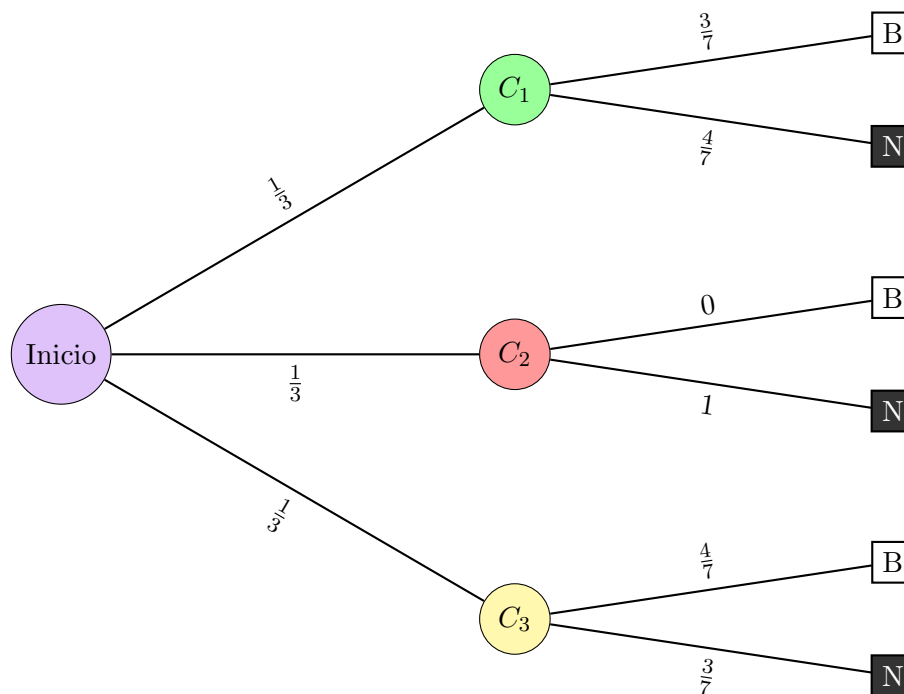


Figura 6: Árbol de probabilidades para el experimento de las tres cajas

4.5. Representación Visual de las Cajas

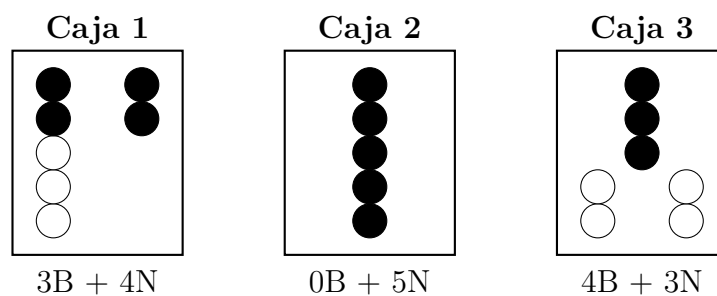


Figura 7: Representación visual del contenido de las tres cajas

4.6. Tabla Resumen de Probabilidades

Probabilidad	Caja 1	Caja 2	Caja 3
$P(C_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$P(B C_i)$	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{4}{7}$
$P(N C_i)$	$\frac{4}{7}$	1	$\frac{3}{7}$
$P(C_i B)$	$\frac{3}{7} \approx 0,429$	0	$\frac{4}{7} \approx 0,571$

Cuadro 5: Resumen de probabilidades a priori y a posteriori

4.7. Gráfico Comparativo de Resultados

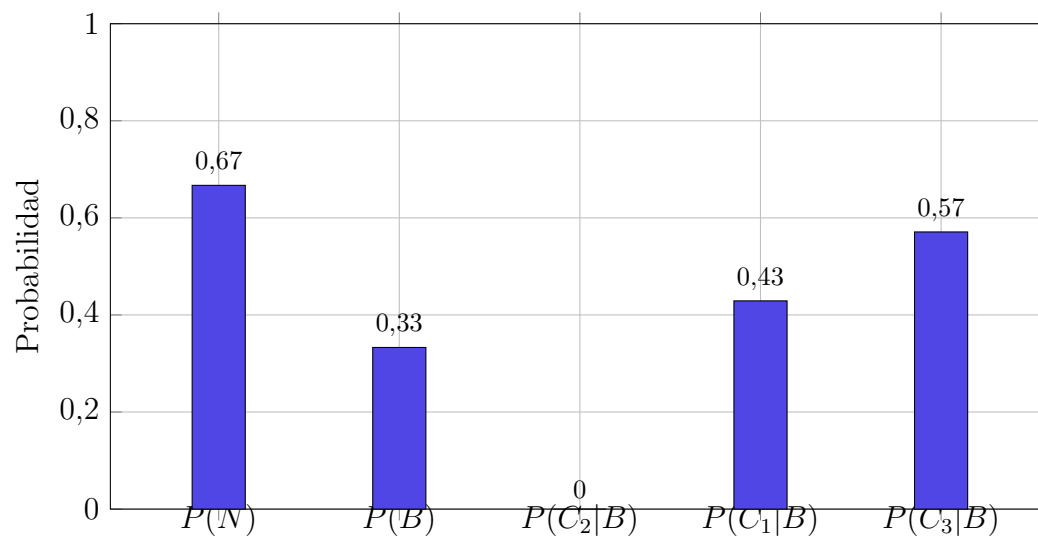


Figura 8: Comparación visual de las probabilidades calculadas

Conclusión

Este documento presenta la resolución completa y rigurosa del examen de Matemáticas de 2º Bachillerato sobre Estadística y Probabilidad (Mayo 2023).

Se han resuelto los cuatro ejercicios aplicando:

- **Ejercicio 1:** Teorema de Bayes y Probabilidad Total (prueba diagnóstica)
- **Ejercicio 2:** Probabilidades condicionadas, reglas de suma e independencia
- **Ejercicio 3:** Distribución Normal, tipificación y regla empírica 68-95-99.7
- **Ejercicio 4:** Probabilidad Total y Teorema de Bayes con urnas

Cada ejercicio incluye:

1. Enunciado completo
2. Identificación clara de datos
3. Desarrollo matemático riguroso paso a paso
4. Resultados destacados en cajas de color
5. Ilustraciones gráficas explicativas
6. Interpretación de resultados

¡Éxito en tus estudios!

*“En matemáticas no se entienden las cosas,
simplemente te acostumbras a ellas.”*

— John von Neumann

PROBLEMAS (A ELEGIR TRES)

P1. (Números y álgebra)

Una empresa de diseño ha comprado dos impresoras 3D para imprimir figuras y fichas para juegos de mesa. La primera impresora puede trabajar hasta 300 horas y necesita 6 horas para imprimir cada figura y 5 horas para cada ficha. La segunda impresora puede trabajar hasta 200 horas y necesita 2 horas para hacer cada figura y 5 horas para cada ficha. El beneficio neto que obtiene la empresa por imprimir cada figura es de 1 € mientras que el beneficio neto que obtiene por imprimir cada ficha es de 1.5 €. Si el número máximo de figuras ha de ser 25, calcula, utilizando técnicas de programación lineal, cuántas figuras y fichas ha de imprimir para obtener el máximo beneficio neto. ¿Cuál es ese beneficio neto máximo?

P2. (Números y álgebra)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

- a) Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de a
- b) Resolver el sistema para $a = 0$.

P3. (Análisis)

El consumo (medido en litros/hora) de combustible, en una explotación industrial durante un turno de 8 horas, se puede expresar por la función:

$$f(t) = \begin{cases} -t^2 + 6t + 3 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ -t + a & \text{si } 2 < t \leq 8 \end{cases}$$

donde t representa el tiempo desde el inicio del turno, medido en horas.

- a) Establecer el valor de a para que el consumo sea continuo a lo largo de todo el turno. ¿A partir de la segunda hora cuánto cambia el consumo por cada hora que pasa?
- b) ¿En qué momento se alcanza el máximo consumo? ¿Cuánto se está consumiendo en ese momento? ¿En qué periodo de tiempo el consumo supera los 8 litros/hora?

P4. (Análisis)

El número de usuarios de una estación de metro a lo largo de un domingo evoluciona según la función $N(x) = -2x^3 + 75x^2 - 600x + 2000$ con $0 \leq x < 24$, donde x indica la hora del día.

- Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento del número de usuarios de la estación a lo largo del domingo.
- ¿A qué hora el número de usuarios es máximo y a qué hora es mínimo? Calcular el número de usuarios correspondiente a dichas horas.

P5. (Estadística y probabilidad)

Una enfermedad afecta al 5% de la población. Se aplica una prueba diagnóstica para detectar dicha enfermedad, obteniéndose el siguiente resultado: Aplicada a personas que padecen la enfermedad se obtiene un 96% de resultado positivos, y aplicada a personas que no la padecen los resultados positivos se reducen al 2%. Si se elige una persona al azar y se le realiza la prueba:

- ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado sea positivo?
- Si el resultado ha sido negativo, ¿cuál es la probabilidad de que padezca la enfermedad?

P6. (Estadística y probabilidad)

Una compañía de autobuses sabe que el retraso en la llegada sigue una distribución normal de media 5 min, y que el 68,26% de los autobuses llega entre 2 y 8 minutos tarde.

- ¿Cuál es la desviación típica?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un autobús llegue puntual o antes de la hora?
- ¿Qué porcentaje de autobuses llegan con un retraso superior a 8 minutos

CUESTIONES (A ELEGIR UNA)**C1. (Números y álgebra)**

Dadas tres matrices A , B y C se sabe que $A \cdot B \cdot C$ es una matriz de dimensiones 2×3 y que $B \cdot C$ es de dimensiones 4×3 , determinar las dimensiones que debe tener A .

C2. (Análisis)

Dada $f(x) = \frac{ax^2 + 1}{5x}$. Dar un valor de a para que en $x = 1$ haya un extremo relativo de $f(x)$.

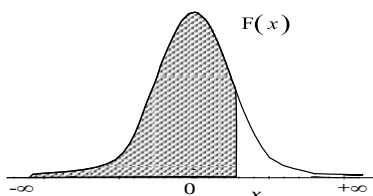
C3. (Estadística y probabilidad)

La ficha técnica de una encuesta electoral realizada para las pasadas elecciones autonómicas indica que se ha encuestado a 1000 individuos con derecho a voto residentes en Castilla y León. La muestra se ha tomado mediante muestreo aleatorio simple. El error de estimación de la proporción de individuos de la población que vota al *partido K* es de $\pm 3.2\%$ fijada una confianza del 95.5 %.

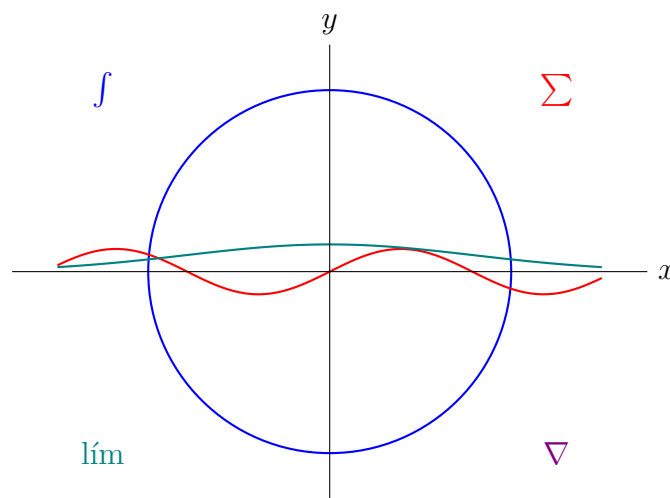
Para esta ficha técnica, identificar los siguientes elementos: Población, diseño muestral, tamaño muestral, parámetro estimado.

Distribución Normal $F(x)$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

[illegible]

SOLUCIONARIO
EXAMEN DE MATEMÁTICAS
2º Bachillerato B/C
Final 2023



“Las matemáticas son el alfabeto con el cual Dios ha escrito el universo.”

— **Galileo Galilei**

Junta de Castilla y León
Centro Bilingüe

2023

Índice

1. Problema 1: Programación Lineal

Enunciado: Una empresa de diseño ha comprado dos impresoras 3D para imprimir figuras y fichas para juegos de mesa. La primera impresora puede trabajar hasta 300 horas y necesita 6 horas para imprimir cada figura y 5 horas para cada ficha. La segunda impresora puede trabajar hasta 200 horas y necesita 2 horas para hacer cada figura y 5 horas para cada ficha. El beneficio neto que obtiene la empresa por imprimir cada figura es de 1€ mientras que el beneficio neto que obtiene por imprimir cada ficha es de 1.5€. Si el número máximo de figuras ha de ser 25, calcula, utilizando técnicas de programación lineal, cuántas figuras y fichas ha de imprimir para obtener el máximo beneficio neto.

Solución

Paso 1: Definición de variables

Sea x = número de figuras e y = número de fichas.

Paso 2: Función objetivo

Maximizar: $Z = x + 1,5y$

Paso 3: Restricciones

$$6x + 5y \leq 300 \quad (\text{Impresora 1})$$

$$2x + 5y \leq 200 \quad (\text{Impresora 2})$$

$$x \leq 25 \quad (\text{Máximo figuras})$$

$$x, y \geq 0$$

Paso 4: Vértices de la región factible

Intersecciones:

■ $A = (0, 0)$

■ $B = (25, 0)$

■ $C: x = 25$ con $6x + 5y = 300$

$$6(25) + 5y = 300 \Rightarrow 150 + 5y = 300 \Rightarrow y = 30$$

Punto: $(25, 30)$

■ $D = (0, 40)$: de $2x + 5y = 200$ con $x = 0$

Paso 5: Evaluación de la función objetivo

$$Z(0, 0) = 0$$

$$Z(25, 0) = 25$$

$$Z(25, 30) = 25 + 45 = 70$$

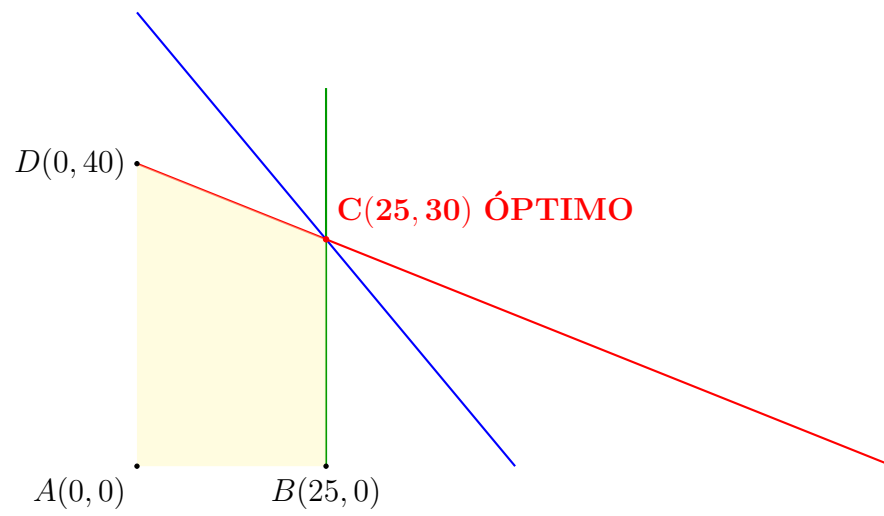
$$Z(0, 40) = 60$$

Respuesta Final:

La empresa debe imprimir 25 figuras y 30 fichas.

Beneficio neto máximo: 70 euros

Ilustración gráfica:



2. Problema 2: Sistema de Ecuaciones Lineales

Enunciado: Se considera el sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

- a) Clasificar según valores de a
- b) Resolver para $a = 0$

Solución

Apartado a) Clasificación

Matriz de coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & a \\ 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante desarrollando por la tercera fila:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & a \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & a \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (6 - 3a) - (9 - 5a) + (9 - 10) \\ &= 6 - 3a - 9 + 5a - 1 = 2a - 4 = 2(a - 2) \end{aligned}$$

Caso 1: $a \neq 2$

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado (solución única)

Caso 2: $a = 2$

Para $a = 2$: $\det(A) = 0$, $\text{rango}(A) = 2$

Verificamos $\text{rango}(A^*) = 3$ calculando:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(1) - 2(3) + 1(2) = -1 \neq 0$$

Como $\text{rango}(A) \neq \text{rango}(A^*)$, el sistema es Incompatible

Clasificación:

- Si $a \neq 2$: Sistema Compatible Determinado
- Si $a = 2$: Sistema Incompatible

Apartado b) Resolución para $a = 0$

Sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

De (1): $y = \frac{1-3x}{2}$

Sustituyendo en (3):

$$x + \frac{1-3x}{2} + z = 1 \Rightarrow 2x + 1 - 3x + 2z = 2 \Rightarrow z = \frac{1+x}{2}$$

Sustituyendo en (2):

$$5x + 3 \left(\frac{1 - 3x}{2} \right) + 3 \left(\frac{1 + x}{2} \right) = 2$$

$$10x + 3(1 - 3x) + 3(1 + x) = 4$$

$$10x + 3 - 9x + 3 + 3x = 4$$

$$4x = -2 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Entonces:

$$y = \frac{1 - 3(-\frac{1}{2})}{2} = \frac{5/2}{2} = \frac{5}{4}$$

$$z = \frac{1 + (-\frac{1}{2})}{2} = \frac{1/2}{2} = \frac{1}{4}$$

Solución para $a = 0$:

$$x = -\frac{1}{2}, \quad y = \frac{5}{4}, \quad z = \frac{1}{4}$$

3. Problema 3: Función de Consumo Continua

Enunciado: El consumo de combustible:

$$f(t) = \begin{cases} -t^2 + 6t + 3 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ -t + a & \text{si } 2 < t \leq 8 \end{cases}$$

a) Valor de a para continuidad. Tasa de cambio después de $t = 2$

b) Máximo consumo. Periodo con consumo > 8 L/h

Solución

Apartado a) Continuidad

Para continuidad en $t = 2$:

$$\lim_{t \rightarrow 2^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2^+} f(t)$$

Por la izquierda: $-4 + 12 + 3 = 11$

Por la derecha: $-2 + a$

Igualando: $11 = -2 + a \Rightarrow a = 13$

$$a = 13$$

Tasa de cambio para $t > 2$: $f(t) = -t + 13$

$$f'(t) = -1$$

A partir de la segunda hora, el consumo disminuye 1 litro/hora por cada hora

Apartado b) Máximo y periodo

$$\text{Función completa: } f(t) = \begin{cases} -t^2 + 6t + 3 & 0 \leq t \leq 2 \\ -t + 13 & 2 < t \leq 8 \end{cases}$$

En $[0, 2]$: $f'(t) = -2t + 6 > 0$ (creciente)

Máximo en $t = 2$: $f(2) = 11$ L/h

En $(2, 8]$: $f'(t) = -1 < 0$ (decreciente)

Máximo: $t = 2$ horas, consumo = 11 L/h

Consumo > 8 :

Tramo $[0, 2]$: $-t^2 + 6t + 3 > 8$

$$t^2 - 6t + 5 < 0 \Rightarrow (t - 1)(t - 5) < 0 \Rightarrow 1 < t \leq 2$$

Tramo $(2, 8]$: $-t + 13 > 8 \Rightarrow t < 5 \Rightarrow 2 < t < 5$

Consumo > 8 L/h en el intervalo: $(1, 5)$ horas (4 horas)

4. Problema 4: Estudio de Crecimiento

Enunciado: $N(x) = -2x^3 + 75x^2 - 600x + 2000$ con $0 \leq x < 24$

- a) Intervalos de crecimiento/decrecimiento
- b) Horas de máximo y mínimo

Solución

Apartado a) Derivada

$$N'(x) = -6x^2 + 150x - 600 = -6(x^2 - 25x + 100)$$

Puntos críticos:

$$\begin{aligned}x^2 - 25x + 100 &= 0 \\x &= \frac{25 \pm 15}{2} \Rightarrow x_1 = 5, \quad x_2 = 20\end{aligned}$$

Signo de $N'(x) = -6(x - 5)(x - 20)$:

- $[0, 5)$: $N'(0) = -600 < 0$ (decreciente)
- $(5, 20)$: $N'(10) = 300 > 0$ (creciente)
- $(20, 24)$: $N'(22) = -204 < 0$ (decreciente)

Decreciente: $[0, 5) \cup (20, 24)$

Creciente: $(5, 20)$

Apartado b) Extremos

Mínimo en $x = 5$:

$$N(5) = -250 + 1875 - 3000 + 2000 = 625$$

Máximo en $x = 20$:

$$N(20) = -16000 + 30000 - 12000 + 2000 = 4000$$

Mínimo: $x = 5$ (5:00), 625 usuarios

Máximo: $x = 20$ (20:00), 4000 usuarios

5. Problema 5: Teorema de Bayes

Enunciado: Enfermedad 5 % población, test: 96 % sensibilidad, 2 % falsos positivos.

a) Probabilidad de test positivo

b) Si test negativo, probabilidad de enfermedad

Solución

Datos:

$$\begin{aligned}P(E) &= 0,05, & P(\overline{E}) &= 0,95 \\P(+|E) &= 0,96, & P(+|\overline{E}) &= 0,02 \\P(-|E) &= 0,04, & P(-|\overline{E}) &= 0,98\end{aligned}$$

Apartado a) Probabilidad total:

$$\begin{aligned}P(+) &= P(+|E) \cdot P(E) + P(+|\overline{E}) \cdot P(\overline{E}) \\&= 0,96 \times 0,05 + 0,02 \times 0,95 \\&= 0,048 + 0,019 = 0,067\end{aligned}$$

$$P(+) = 0,067 = 6,7\%$$

Apartado b) Bayes:

$$P(-) = 0,04 \times 0,05 + 0,98 \times 0,95 = 0,002 + 0,931 = 0,933$$

$$P(E|-) = \frac{P(-|E) \cdot P(E)}{P(-)} = \frac{0,002}{0,933} = 0,00214$$

$$P(E|-) = 0,00214 = 0,21\%$$

6. Problema 6: Distribución Normal

Enunciado: Retraso $\sim N(5, \sigma)$, 68.26 % llega entre 2 y 8 min tarde.

- a) Desviación típica
- b) Probabilidad llegar puntual
- c) Porcentaje retraso > 8 min

Solución

Apartado a)

$$P(2 < X < 8) = 0,6826 \approx P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$$

Como $\mu = 5$:

$$\mu - \sigma = 2 \Rightarrow 5 - \sigma = 2 \Rightarrow \sigma = 3$$

$$\sigma = 3 \text{ minutos}$$

Apartado b) $P(X \leq 0)$

Tipificando: $Z = \frac{0-5}{3} = -1,67$

$$P(Z \leq -1,67) = 1 - P(Z \leq 1,67) = 1 - 0,9525 = 0,0475$$

$$P(X \leq 0) = 4,75 \%$$

Apartado c) $P(X > 8)$

$$Z = \frac{8-5}{3} = 1$$

$$P(Z > 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$$

$$P(X > 8) = 15,87 \%$$

7. Cuestión 1: Dimensiones de Matrices

Enunciado: $A \cdot B \cdot C$ es 2×3 y $B \cdot C$ es 4×3 . Dimensión de A ?

Solución

$B \cdot C$ tiene dimensión 4×3

Para que $A \cdot (B \cdot C)$ resulte en 2×3 :

- Número de columnas de A = número de filas de $(B \cdot C) = 4$
- Número de filas de $A = 2$ (filas del resultado)

A tiene dimensión 2×4

Esquema:

$$A_{2 \times 4} \cdot (B \cdot C)_{4 \times 3} = (A \cdot B \cdot C)_{2 \times 3}$$

8. Cuestión 2: Extremo Relativo

Enunciado: $f(x) = \frac{ax^2+1}{5x}$. Valor de a para extremo en $x = 1$?

Solución

Derivada (regla del cociente):

$$f'(x) = \frac{2ax \cdot 5x - (ax^2 + 1) \cdot 5}{25x^2} = \frac{10ax^2 - 5ax^2 - 5}{25x^2} = \frac{5ax^2 - 5}{25x^2} = \frac{ax^2 - 1}{5x^2}$$

Para extremo en $x = 1$:

$$f'(1) = 0 \Rightarrow \frac{a - 1}{5} = 0 \Rightarrow a = 1$$

Verificación con segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{2}{5x^3}$$

$$f''(1) = \frac{2}{5} > 0 \Rightarrow \text{mínimo}$$

$a = 1$ (mínimo relativo en $x = 1$)

9. Cuestión 3: Ficha Técnica de Encuesta

Enunciado: Encuesta 1000 individuos, MAS, error $\pm 3,2\%$, confianza 95.5 %.
Identificar: Población, diseño, tamaño, parámetro.

Solución

Población: Individuos con derecho a voto en Castilla y León

Diseño muestral: Muestreo Aleatorio Simple (MAS)

Tamaño muestral: $n = 1000$ individuos

Parámetro estimado: Proporción poblacional (p) de votantes al partido K

Información adicional:

- Error muestral: $E = \pm 3,2\%$
- Nivel de confianza: 95,5 % ($z \approx 2$)

Verificación: $E = 2\sqrt{\frac{0,25}{1000}} = 0,0316 \approx 3,2\%$

PROBLEMAS (A ELEGIR TRES)

P1. (Números y álgebra)

En un taller se fabrican dos tipos de bolsas. Para hacer una bolsa del primer modelo se necesitan 0.9 m^2 de cuero y 8 horas de trabajo. Para el segundo modelo necesitan 1.2 m^2 de cuero y 4 horas de trabajo. Para hacer estos dos tipos de bolsas el taller dispone de 60 m^2 de cuero y puede dedicar un máximo de 400 horas de trabajo. El taller cobra 30 euros por una bolsa del primer modelo y 25 por una del segundo.

- Plantee la maximización del beneficio de la compañía como un problema de programación lineal.
- Dibuje la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan.
- Calcule el número de bolsas de cada tipo que se tienen que fabricar para obtener un beneficio máximo. Determine también este beneficio máximo.

P2. (Números y álgebra)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

- Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de a
- Resolver el sistema para $a = 0$.

P3. (Análisis)

- Determinar el valor de los parámetros a , b y c para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga un máximo relativo en $x = -4$, un mínimo relativo en $x = 0$ y tome el valor 1 para $x = 1$
- Esboza la gráfica de la función.
- Calcúlese el área del recinto limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$, $x = 2$

P4. (Análisis)

Determina dos números cuya suma sea 24 y tales que el producto de uno de ellos por el cubo del otro sea máximo.

P5. (Estadística y probabilidad)

En una pequeña ciudad hay dos bibliotecas. En la primera, el 50 % de los libros son novelas mientras que en la segunda lo son el 70 %. Un lector elige al azar una biblioteca siguiendo un método que implica que la probabilidad de elegir la primera biblioteca es el triple que la de elegir la segunda. Una vez llega a la biblioteca seleccionada, elige al azar un libro, novela o no.

- a) Calcular razonadamente la probabilidad de que elija una novela.
- b) Sabiendo que el libro seleccionado es una novela, obtener razonadamente la probabilidad de que haya acudido a la primera biblioteca.

P6. (Estadística y probabilidad)

Se ha realizado un test a 300 alumnos del instituto y se ha observado que sigue una distribución normal de media 30 puntos y desviación típica de 12 puntos.

- a) ¿Qué proporción de alumnos tendrán una puntuación entre 20 y 35?
- b) ¿Cuántos alumnos tendrán una puntuación superior a 48 puntos?

CUESTIONES (A ELEGIR UNA)

C1. (Números y álgebra)

Dadas tres matrices A , B y C se sabe que $A \cdot B \cdot C$ es una matriz de dimensiones 2×3 y que $B \cdot C$ es de dimensiones 4×3 , determinar las dimensiones que debe tener A .

C2. (Análisis)

Dada $f(x) = \frac{ax^2 + 1}{5x}$. Dar un valor de a para que en $x = 1$ haya un extremo relativo de $f(x)$.

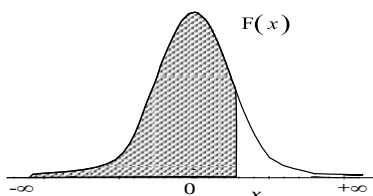
C3. (Estadística y probabilidad)

La ficha técnica de una encuesta electoral realizada para las pasadas elecciones autonómicas indica que se ha encuestado a 1000 individuos con derecho a voto residentes en Castilla y León. La muestra se ha tomado mediante muestreo aleatorio simple. El error de estimación de la proporción de individuos de la población que vota al *partido K* es de $\pm 3.2\%$ fijada una confianza del 95.5 %.

Para esta ficha técnica, identificar los siguientes elementos: Población, diseño muestral, tamaño muestral, parámetro estimado.

Distribución Normal $F(x)$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

[illegible]

EXAMEN DE MATEMÁTICAS

2º BACHILLERATO B/C

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

2023

SOLUCIONES COMPLETAS Y DETALLADAS

π $\int$ Σ ∞ α

*“Las matemáticas son el alfabeto con el cual
Dios ha escrito el universo.”*

— Galileo Galilei

Centro Bilingüe IES Fray Luis de León
Junta de Castilla y León

Índice

1. Problema P1: Programación Lineal - Fabricación de Bolsas

1.1. Enunciado

En un taller se fabrican dos tipos de bolsas. Para hacer una bolsa del primer modelo se necesitan 0.9 m^2 de cuero y 8 horas de trabajo. Para el segundo modelo necesitan 1.2 m^2 de cuero y 4 horas de trabajo. Para hacer estos dos tipos de bolsas el taller dispone de 60 m^2 de cuero y puede dedicar un máximo de 400 horas de trabajo. El taller cobra 30 euros por una bolsa del primer modelo y 25 por una del segundo.

- Plantee la maximización del beneficio de la compañía como un problema de programación lineal.
- Dibuje la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan.
- Calcule el número de bolsas de cada tipo que se tienen que fabricar para obtener un beneficio máximo. Determine también este beneficio máximo.

1.2. Solución

1.2.1. Apartado a) Planteamiento del problema

Variables de decisión:

- Sea x el número de bolsas del primer modelo a fabricar
- Sea y el número de bolsas del segundo modelo a fabricar

Función objetivo:

El beneficio total viene dado por:

$$Z = 30x + 25y$$

Esta función debe ser maximizada.

Restricciones:

Las restricciones del problema son:

- Restricción de cuero:** Cada bolsa del primer modelo necesita 0.9 m^2 y cada bolsa del segundo modelo necesita 1.2 m^2 . Disponemos de 60 m^2 de cuero:

$$0,9x + 1,2y \leq 60$$

Simplificando (multiplicando por 10):

$$9x + 12y \leq 600$$

O dividiendo por 3:

$$3x + 4y \leq 200$$

2. **Restricción de horas de trabajo:** Cada bolsa del primer modelo necesita 8 horas y cada bolsa del segundo modelo necesita 4 horas. Disponemos de 400 horas:

$$8x + 4y \leq 400$$

Simplificando (dividiendo por 4):

$$2x + y \leq 100$$

3. **Restricciones de no negatividad:**

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

Problema de programación lineal completo:

Problema de Programación Lineal

$$\text{Maximizar: } Z = 30x + 25y$$

$$\text{Sujeto a: } 3x + 4y \leq 200$$

$$2x + y \leq 100$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

1.2.2. Apartado b) Región factible

Para dibujar la región factible, necesitamos encontrar las rectas frontera:

Recta 1: $3x + 4y = 200$

Puntos de corte:

- Si $x = 0$: $4y = 200 \Rightarrow y = 50 \rightarrow \text{Punto } (0, 50)$
- Si $y = 0$: $3x = 200 \Rightarrow x = \frac{200}{3} \approx 66,67 \rightarrow \text{Punto } (66,67, 0)$

Recta 2: $2x + y = 100$

Puntos de corte:

- Si $x = 0$: $y = 100 \rightarrow \text{Punto } (0, 100)$
- Si $y = 0$: $2x = 100 \Rightarrow x = 50 \rightarrow \text{Punto } (50, 0)$

Punto de intersección de las dos rectas:

Resolvemos el sistema:

$$3x + 4y = 200$$

$$2x + y = 100$$

De la segunda ecuación: $y = 100 - 2x$

Sustituyendo en la primera:

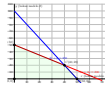
$$\begin{aligned}3x + 4(100 - 2x) &= 200 \\3x + 400 - 8x &= 200 \\-5x &= -200 \\x &= 40\end{aligned}$$

Por tanto: $y = 100 - 2(40) = 100 - 80 = 20$

Punto de intersección: $(40, 20)$

Vértices de la región factible:

1. $A = (0, 0)$ (origen)
2. $B = (50, 0)$ (intersección de $2x + y = 100$ con el eje x)
3. $C = (40, 20)$ (intersección de las dos restricciones)
4. $D = (0, 50)$ (intersección de $3x + 4y = 200$ con el eje y)



La región factible es el polígono $ABCD$ sombreado en verde.

1.2.3. Apartado c) Solución óptima

Para encontrar el máximo de la función objetivo $Z = 30x + 25y$, evaluamos en todos los vértices de la región factible:

$$\begin{aligned}Z(A) &= Z(0, 0) = 30(0) + 25(0) = 0 \text{ euros} \\Z(B) &= Z(50, 0) = 30(50) + 25(0) = 1500 \text{ euros} \\Z(C) &= Z(40, 20) = 30(40) + 25(20) = 1200 + 500 = 1700 \text{ euros} \\Z(D) &= Z(0, 50) = 30(0) + 25(50) = 1250 \text{ euros}\end{aligned}$$

Solución Óptima

El beneficio máximo se obtiene en el vértice $C = (40, 20)$

- **Bolsas del modelo 1:** $x = 40$ bolsas
- **Bolsas del modelo 2:** $y = 20$ bolsas
- **Beneficio máximo:** $Z_{\text{máx}} = 1700$ euros

Verificación de las restricciones:

- Cuero: $3(40) + 4(20) = 120 + 80 = 200 \leq 200$ (se usa todo el cuero)
- Horas: $2(40) + 20 = 80 + 20 = 100 \leq 100$ (se usan todas las horas)

2. Problema P2: Sistema de Ecuaciones con Parámetro

2.1. Enunciado

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

- a) Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de a
- b) Resolver el sistema para $a = 0$.

2.2. Solución

2.2.1. Apartado a) Clasificación del sistema

Escribimos el sistema en forma matricial $AX = B$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & a \\ 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matriz ampliada es:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & a & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Cálculo del determinante de A :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 3 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3[3(-1) - 3(1)] - 2[5(-1) - 3(1)] + a[5(1) - 3(1)] \\ &= 3[-3 - 3] - 2[-5 - 3] + a[5 - 3] \\ &= 3(-6) - 2(-8) + a(2) \\ &= -18 + 16 + 2a \\ &= -2 + 2a \\ &= 2(a - 1) \end{aligned}$$

Análisis por casos:

Caso 1: $a \neq 1$

Si $a \neq 1$, entonces $\det(A) = 2(a - 1) \neq 0$. Por tanto:

- $\text{rango}(A) = 3$
- $\text{rango}(A|B) = 3$

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|B) = 3 = \text{número de incógnitas}$, el sistema es **compatible determinado** (tiene una única solución).

Caso 2: $a = 1$

Si $a = 1$, entonces $\det(A) = 0$, por lo que $\text{rango}(A) < 3$.

Estudiamos la matriz ampliada para $a = 1$:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Calculamos algunos menores de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 10 = -1 \neq 0$$

Por tanto, $\text{rango}(A) \geq 2$.

Ahora calculamos un menor de orden 3 de la matriz ampliada que incluya la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(3 - 2) - 2(5 - 2) + 1(5 - 3) = 3(1) - 2(3) + 1(2) = 3 - 6 + 2 = -1 \neq 0$$

Como este determinante es distinto de cero:

- $\text{rango}(A|B) = 3$
- $\text{rango}(A) = 2$

Como $\text{rango}(A) \neq \text{rango}(A|B)$, el sistema es **incompatible** (no tiene solución).

Clasificación del Sistema

- Si $a \neq 1$: Sistema **compatible determinado** (única solución)
- Si $a = 1$: Sistema **incompatible** (sin solución)

2.2.2. Apartado b) Resolución para $a = 0$

Para $a = 0$, el sistema es compatible determinado. El sistema queda:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

Método de Cramer:

$$\det(A) = 2(0 - 1) = -2$$

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0$$

$$= 1(-3 - 3) - 2(-2 - 3) = -6 - 2(-5) = -6 + 10 = 4$$

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$\det(A_y) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0$$

$$= 3(-2 - 3) - 1(-5 - 3) = 3(-5) - 1(-8) = -15 + 8 = -7$$

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2}$$

$$\det(A_z) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \text{ (calculado anteriormente)}$$

$$z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Verificación:

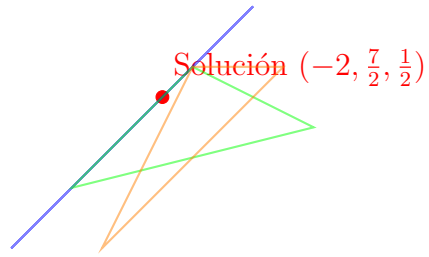
$$3(-2) + 2\left(\frac{7}{2}\right) + 0\left(\frac{1}{2}\right) = -6 + 7 = 1$$

$$5(-2) + 3\left(\frac{7}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right) = -10 + \frac{21}{2} + \frac{3}{2} = -10 + 12 = 2$$

$$(-2) + \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = -2 + 3 = 1$$

Solución para a

$$x = -2, \quad y = \frac{7}{2}, \quad z = \frac{1}{2}$$



Sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas

3. Problema P3: Análisis - Función Cúbica

3.1. Enunciado

- a) Determinar el valor de los parámetros a , b y c para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga un máximo relativo en $x = -4$, un mínimo relativo en $x = 0$ y tome el valor 1 para $x = 1$
- b) Esboza la gráfica de la función.
- c) Calcúlese el área del recinto limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$, $x = 2$

3.2. Solución

3.2.1. Apartado a) Determinación de los parámetros

Tenemos la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ y su derivada:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

Condición 1: Máximo relativo en $x = -4$

En un extremo relativo, la derivada se anula:

$$f'(-4) = 0$$

$$3(-4)^2 + 2a(-4) + b = 0$$

$$48 - 8a + b = 0$$

$$b = 8a - 48 \quad (\text{ecuación 1})$$

Condición 2: Mínimo relativo en $x = 0$

En un extremo relativo, la derivada se anula:

$$f'(0) = 0$$

$$3(0)^2 + 2a(0) + b = 0$$

$$b = 0 \quad (\text{ecuación 2})$$

De las ecuaciones 1 y 2:

$$0 = 8a - 48$$

$$a = 6$$

Condición 3: $f(1) = 1$

$$f(1) = 1^3 + a(1)^2 + b(1) + c = 1$$

$$1 + a + b + c = 1$$

$$a + b + c = 0$$

Sustituyendo $a = 6$ y $b = 0$:

$$6 + 0 + c = 0$$

$$c = -6$$

Verificación de que son máximo y mínimo:

La segunda derivada es:

$$f''(x) = 6x + 2a = 6x + 12$$

En $x = -4$:

$$f''(-4) = 6(-4) + 12 = -24 + 12 = -12 < 0$$

Por tanto, es un **máximo relativo**.

En $x = 0$:

$$f''(0) = 6(0) + 12 = 12 > 0$$

Por tanto, es un **mínimo relativo**.

Parámetros

$$a = 6, \quad b = 0, \quad c = -6$$

La función es:

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 6$$

3.2.2. Apartado b) Gráfica de la función

Para esbozar la gráfica de $f(x) = x^3 + 6x^2 - 6$:

Puntos críticos:

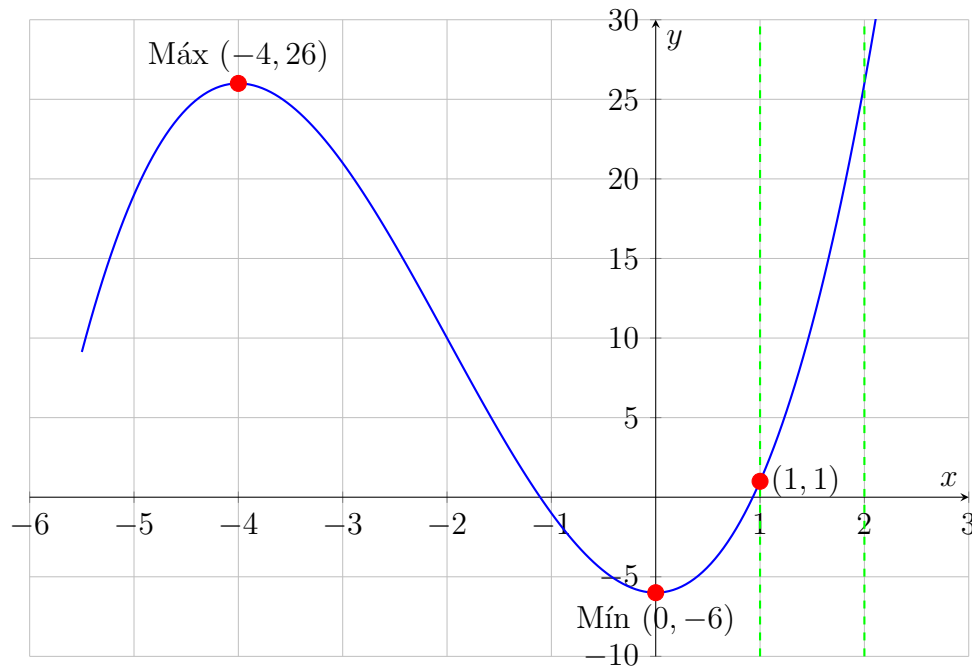
- Máximo en $x = -4$: $f(-4) = (-4)^3 + 6(-4)^2 - 6 = -64 + 96 - 6 = 26$
- Mínimo en $x = 0$: $f(0) = 0 + 0 - 6 = -6$
- Punto dado: $f(1) = 1 + 6 - 6 = 1$

Raíces (cortes con el eje x):

Resolvemos $x^3 + 6x^2 - 6 = 0$ numéricamente. Una raíz aproximada es $x \approx 0,916$ (entre 0 y 1).

Comportamiento asintótico:

- Cuando $x \rightarrow +\infty$: $f(x) \rightarrow +\infty$
- Cuando $x \rightarrow -\infty$: $f(x) \rightarrow -\infty$



3.2.3. Apartado c) Cálculo del área

El área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas ($y = 0$) y las rectas $x = 1$ y $x = 2$ se calcula mediante:

$$A = \int_1^2 |f(x)| dx$$

Primero, evaluamos $f(x)$ en el intervalo $[1, 2]$:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 + 6 - 6 = 1 > 0 \\ f(2) &= 8 + 24 - 6 = 26 > 0 \end{aligned}$$

Como $f(x) > 0$ en todo el intervalo $[1, 2]$, el área es:

$$A = \int_1^2 (x^3 + 6x^2 - 6) dx$$

Cálculo de la integral:

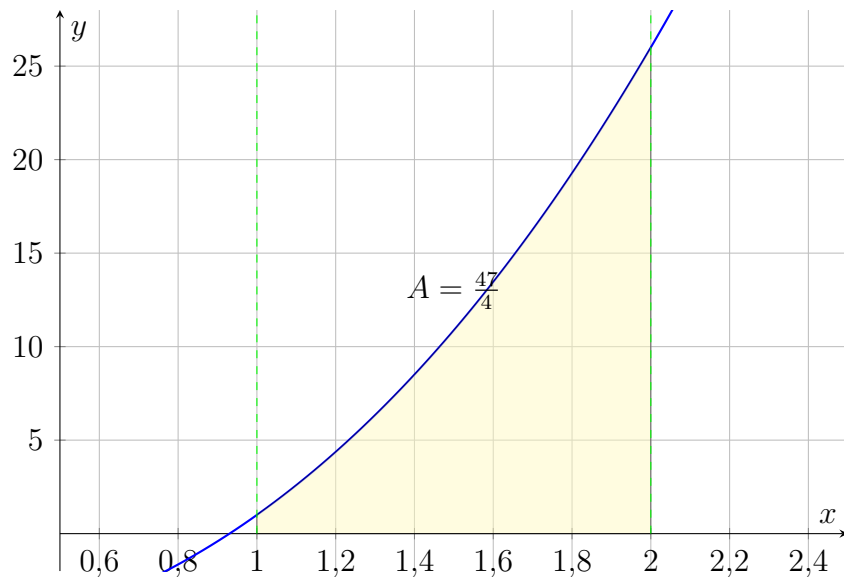
$$\int (x^3 + 6x^2 - 6) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{6x^3}{3} - 6x + K = \frac{x^4}{4} + 2x^3 - 6x + K$$

Evaluación en los límites:

$$\begin{aligned}
 A &= \left[\frac{x^4}{4} + 2x^3 - 6x \right]_1^2 \\
 &= \left(\frac{2^4}{4} + 2(2)^3 - 6(2) \right) - \left(\frac{1^4}{4} + 2(1)^3 - 6(1) \right) \\
 &= \left(\frac{16}{4} + 16 - 12 \right) - \left(\frac{1}{4} + 2 - 6 \right) \\
 &= (4 + 16 - 12) - \left(\frac{1}{4} - 4 \right) \\
 &= 8 - \left(\frac{1 - 16}{4} \right) \\
 &= 8 - \left(\frac{-15}{4} \right) \\
 &= 8 + \frac{15}{4} \\
 &= \frac{32}{4} + \frac{15}{4} \\
 &= \frac{47}{4} \text{ unidades cuadradas}
 \end{aligned}$$

Área del Recinto

$$A = \frac{47}{4} = 11,75 \text{ unidades cuadradas}$$



4. Problema P4: Optimización - Producto Máximo

4.1. Enunciado

Determina dos números cuya suma sea 24 y tales que el producto de uno de ellos por el cubo del otro sea máximo.

4.2. Solución

Planteamiento del problema:

Sean x e y los dos números buscados.

Restricción: $x + y = 24$

De aquí: $y = 24 - x$

Función objetivo: Queremos maximizar el producto de uno de ellos por el cubo del otro. Consideremos:

$$P(x) = x \cdot y^3$$

Sustituyendo $y = 24 - x$:

$$P(x) = x(24 - x)^3$$

Derivación:

Aplicando la regla del producto:

$$P'(x) = 1 \cdot (24 - x)^3 + x \cdot 3(24 - x)^2 \cdot (-1)$$

$$P'(x) = (24 - x)^3 - 3x(24 - x)^2$$

Factorizando $(24 - x)^2$:

$$P'(x) = (24 - x)^2[(24 - x) - 3x]$$

$$P'(x) = (24 - x)^2(24 - x - 3x)$$

$$P'(x) = (24 - x)^2(24 - 4x)$$

Puntos críticos:

$$P'(x) = 0 \Rightarrow (24 - x)^2(24 - 4x) = 0$$

Soluciones:

$$1. (24 - x)^2 = 0 \Rightarrow x = 24 \text{ (entonces } y = 0)$$

$$2. 24 - 4x = 0 \Rightarrow x = 6 \text{ (entonces } y = 18)$$

Estudio de la naturaleza de los extremos:

Calculamos la segunda derivada:

$$P''(x) = \frac{d}{dx}[(24 - x)^2(24 - 4x)]$$

Usando la regla del producto:

$$P''(x) = 2(24 - x)(-1)(24 - 4x) + (24 - x)^2(-4)$$

$$P''(x) = -2(24 - x)(24 - 4x) - 4(24 - x)^2$$

$$P''(x) = -(24 - x)[2(24 - 4x) + 4(24 - x)]$$

$$P''(x) = -(24 - x)[48 - 8x + 96 - 4x]$$

$$P''(x) = -(24 - x)(144 - 12x)$$

$$P''(x) = -12(24 - x)(12 - x)$$

Para $x = 6$:

$$P''(6) = -12(24 - 6)(12 - 6) = -12(18)(6) = -1296 < 0$$

Como $P''(6) < 0$, en $x = 6$ hay un **máximo**.

Para $x = 24$:

$$P''(24) = -12(0)(12 - 24) = 0$$

Es un punto de inflexión, no un máximo.

Valores en los extremos:

$$P(6) = 6(18)^3 = 6(5832) = 34992$$

$$P(24) = 24(0)^3 = 0$$

También debemos considerar $P(y) = y \cdot x^3 = (24 - x) \cdot x^3$:

Para simetría, si maximizamos $Q(y) = y \cdot (24 - y)^3$, obtenemos $y = 6$ y $x = 18$.

$$Q(6) = 6(18)^3 = 34992$$

Comparación: También consideremos $R(x) = x^3 \cdot y = x^3(24 - x)$:

$$R'(x) = 3x^2(24 - x) + x^3(-1) = 3x^2(24 - x) - x^3 = x^2(72 - 3x - x) = x^2(72 - 4x)$$

$$R'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } x = 18$$

Para $x = 18$, $y = 6$:

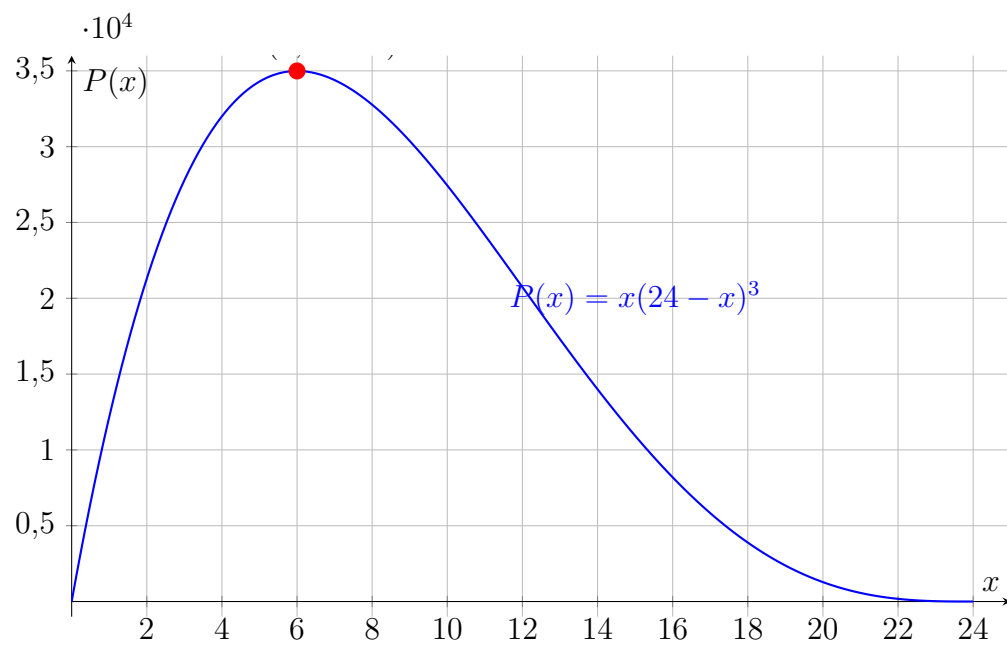
$$R(18) = 18^3 \cdot 6 = 5832 \cdot 6 = 34992$$

Solución Óptima

Los dos números son:

- $x = 6$ e $y = 18$, con producto $P = 6 \cdot 18^3 = 34992$
- o equivalentemente: $x = 18$ e $y = 6$, con producto $P = 18^3 \cdot 6 = 34992$

El producto máximo es: **34992**



5. Problema P5: Probabilidad - Bibliotecas

5.1. Enunciado

En una pequeña ciudad hay dos bibliotecas. En la primera, el 50 % de los libros son novelas mientras que en la segunda lo son el 70 %. Un lector elige al azar una biblioteca siguiendo un método que implica que la probabilidad de elegir la primera biblioteca es el triple que la de elegir la segunda. Una vez llega a la biblioteca seleccionada, elige al azar un libro, novela o no.

- a) Calcular razonadamente la probabilidad de que elija una novela.
- b) Sabiendo que el libro seleccionado es una novela, obtener razonadamente la probabilidad de que haya acudido a la primera biblioteca.

5.2. Solución

Notación:

- B_1 : Evento “elige la primera biblioteca”
- B_2 : Evento “elige la segunda biblioteca”
- N : Evento “elige una novela”

Datos del problema:

La probabilidad de elegir la primera biblioteca es el triple que la de elegir la segunda:

$$P(B_1) = 3 \cdot P(B_2)$$

Como $P(B_1) + P(B_2) = 1$:

$$3P(B_2) + P(B_2) = 1$$

$$4P(B_2) = 1$$

$$P(B_2) = \frac{1}{4}$$

Por tanto:

$$P(B_1) = \frac{3}{4}$$

Probabilidades condicionales:

$$P(N|B_1) = 0,50 = \frac{1}{2} \quad (50 \% \text{ de libros son novelas en } B_1)$$

$$P(N|B_2) = 0,70 = \frac{7}{10} \quad (70 \% \text{ de libros son novelas en } B_2)$$

5.2.1. Apartado a) Probabilidad de elegir una novela

Aplicamos el **Teorema de la Probabilidad Total**:

$$P(N) = P(N|B_1) \cdot P(B_1) + P(N|B_2) \cdot P(B_2)$$

Sustituyendo:

$$P(N) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{4}$$

$$P(N) = \frac{3}{8} + \frac{7}{40}$$

Para sumar, buscamos común denominador (40):

$$P(N) = \frac{15}{40} + \frac{7}{40} = \frac{22}{40} = \frac{11}{20}$$

Probabilidad de elegir una novela

$$P(N) = \frac{11}{20} = 0,55 = 55 \%$$

5.2.2. Apartado b) Probabilidad de haber acudido a la primera biblioteca

Dado que el libro seleccionado es una novela, queremos calcular $P(B_1|N)$.

Aplicamos el **Teorema de Bayes**:

$$P(B_1|N) = \frac{P(N|B_1) \cdot P(B_1)}{P(N)}$$

Sustituyendo:

$$P(B_1|N) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{11}{20}}$$

$$P(B_1|N) = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{11}{20}}$$

$$P(B_1|N) = \frac{3}{8} \cdot \frac{20}{11} = \frac{60}{88} = \frac{15}{22}$$

Probabilidad de haber acudido a B_1

$$P(B_1|N) = \frac{15}{22} \approx 0,6818 = 68,18 \%$$

Verificación:

También podemos calcular $P(B_2|N)$:

$$P(B_2|N) = \frac{P(N|B_2) \cdot P(B_2)}{P(N)} = \frac{\frac{7}{10} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{11}{20}} = \frac{\frac{7}{40}}{\frac{11}{20}} = \frac{7}{40} \cdot \frac{20}{11} = \frac{7}{22}$$

Comprobación:

$$P(B_1|N) + P(B_2|N) = \frac{15}{22} + \frac{7}{22} = \frac{22}{22} = 1$$

Diagrama de árbol de probabilidad:

El problema puede visualizarse mediante un árbol de probabilidad donde:

- Primera ramificación: Elección de biblioteca (B_1 con prob. $\frac{3}{4}$ o B_2 con prob. $\frac{1}{4}$)
- Segunda ramificación desde B_1 : Novela (prob. $\frac{1}{2}$) o No novela (prob. $\frac{1}{2}$)
- Segunda ramificación desde B_2 : Novela (prob. $\frac{7}{10}$) o No novela (prob. $\frac{3}{10}$)

Las probabilidades finales de cada rama son:

- $P(B_1 \cap N) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$
- $P(B_1 \cap N^c) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$
- $P(B_2 \cap N) = \frac{1}{4} \times \frac{7}{10} = \frac{7}{40}$
- $P(B_2 \cap N^c) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{40}$

6. Problema P6: Distribución Normal

6.1. Enunciado

Se ha realizado un test a 300 alumnos del instituto y se ha observado que sigue una distribución normal de media 30 puntos y desviación típica de 12 puntos.

- a) ¿Qué proporción de alumnos tendrán una puntuación entre 20 y 35?
- b) ¿Cuántos alumnos tendrán una puntuación superior a 48 puntos?

6.2. Solución

Datos:

- $n = 300$ alumnos
- $X \sim N(\mu, \sigma)$ donde $\mu = 30$ y $\sigma = 12$

Para trabajar con la tabla de distribución normal estándar, tipificamos usando:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 30}{12}$$

donde $Z \sim N(0, 1)$.

6.2.1. Apartado a) Proporción de alumnos con puntuación entre 20 y 35

Queremos calcular $P(20 \leq X \leq 35)$.

Tipificamos:

$$\begin{aligned} P(20 \leq X \leq 35) &= P\left(\frac{20 - 30}{12} \leq Z \leq \frac{35 - 30}{12}\right) \\ &= P\left(\frac{-10}{12} \leq Z \leq \frac{5}{12}\right) \\ &= P(-0,833... \leq Z \leq 0,417...) \\ &\approx P(-0,83 \leq Z \leq 0,42) \end{aligned}$$

Usando la función de distribución acumulada:

$$P(-0,83 \leq Z \leq 0,42) = P(Z \leq 0,42) - P(Z \leq -0,83)$$

Por simetría de la distribución normal:

$$P(Z \leq -0,83) = 1 - P(Z \leq 0,83)$$

De la tabla:

- $P(Z \leq 0,42) = \Phi(0,42)$. Buscamos $z = 0,42$: mirando la fila 0.4 y columna 0.02, obtenemos $\approx 0,6628$

- $P(Z \leq 0,83) = \Phi(0,83)$. Buscamos $z = 0,83$: mirando la fila 0.8 y columna 0.03, obtenemos $\approx 0,7967$

Por tanto:

$$P(Z \leq -0,83) = 1 - 0,7967 = 0,2033$$

$$P(-0,83 \leq Z \leq 0,42) = 0,6628 - 0,2033 = 0,4595$$

Proporción de alumnos entre 20 y 35 puntos

$$P(20 \leq X \leq 35) \approx 0,4595 = 45,95 \%$$

Aproximadamente el **46 %** de los alumnos tendrán una puntuación entre 20 y 35 puntos.

6.2.2. Apartado b) Alumnos con puntuación superior a 48 puntos

Queremos calcular $P(X > 48)$.

Tipificamos:

$$P(X > 48) = P\left(Z > \frac{48 - 30}{12}\right) = P\left(Z > \frac{18}{12}\right) = P(Z > 1,5)$$

Usando la tabla:

$$P(Z > 1,5) = 1 - P(Z \leq 1,5) = 1 - \Phi(1,5)$$

De la tabla, buscamos $z = 1,5$ (fila 1.5, columna 0.00):

$$\Phi(1,5) = 0,9332$$

Por tanto:

$$P(Z > 1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668$$

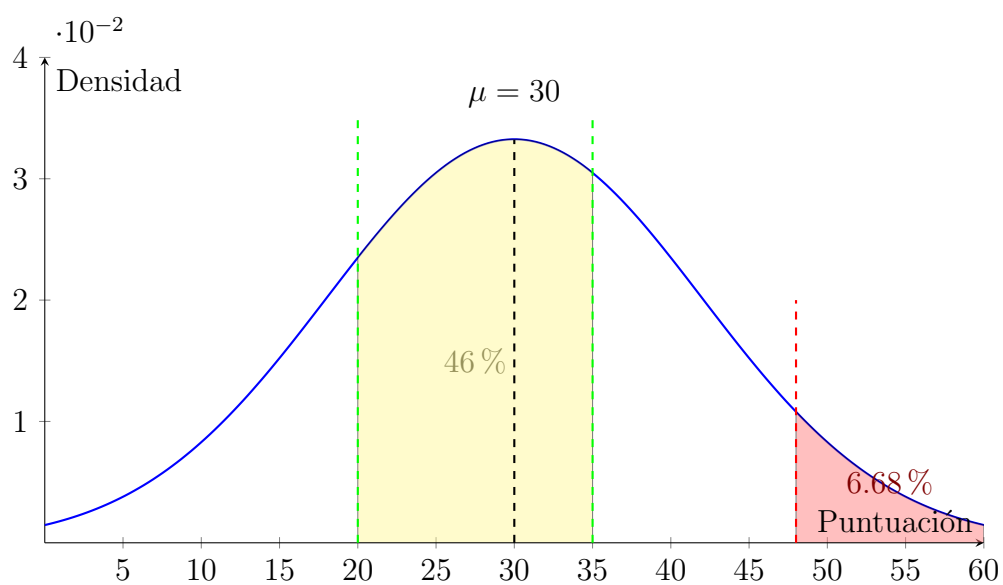
Número de alumnos:

$$\text{Número de alumnos} = 300 \times 0,0668 = 20,04 \approx 20 \text{ alumnos}$$

Alumnos con más de 48 puntos

$$P(X > 48) \approx 0,0668 = 6,68 \%$$

Aproximadamente **20 alumnos** tendrán una puntuación superior a 48 puntos.



7. Cuestión C1: Dimensiones de Matrices

7.1. Enunciado

Dadas tres matrices A , B y C se sabe que $A \cdot B \cdot C$ es una matriz de dimensiones 2×3 y que $B \cdot C$ es de dimensiones 4×3 , determinar las dimensiones que debe tener A .

7.2. Solución

Notación: Si M es una matriz de m filas y n columnas, escribimos $M_{m \times n}$.

Datos:

- $(A \cdot B \cdot C)_{2 \times 3}$
- $(B \cdot C)_{4 \times 3}$

Regla del producto de matrices:

Si $M_{p \times q}$ y $N_{r \times s}$ son dos matrices, el producto $M \cdot N$ solo está definido si $q = r$ (el número de columnas de M es igual al número de filas de N), y el resultado es una matriz de dimensiones $p \times s$.

Análisis:

Sabemos que:

$$A \cdot B \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Sea $A_{m \times n}$ (con m filas y n columnas, a determinar).

El producto $A \cdot (B \cdot C)$ es:

$$A_{m \times n} \cdot (B \cdot C)_{4 \times 3}$$

Para que este producto esté definido, necesitamos:

$$n = 4 \quad (\text{número de columnas de } A = \text{número de filas de } B \cdot C)$$

El resultado del producto $A_{m \times 4} \cdot (B \cdot C)_{4 \times 3}$ es una matriz de dimensiones $m \times 3$.

Como sabemos que $A \cdot B \cdot C$ es de dimensiones 2×3 :

$$m \times 3 = 2 \times 3$$

Por tanto:

$$m = 2$$

Dimensiones de la matriz A

$$A_{2 \times 4}$$

La matriz A tiene **2 filas y 4 columnas**.

Verificación:

Sean las dimensiones:

$$A : 2 \times 4$$

$$B \cdot C : 4 \times 3$$

Entonces:

$$A \cdot (B \cdot C) : 2 \times 4 \cdot 4 \times 3 = 2 \times 3$$

$$\begin{array}{c} 2 \text{ filas} \\ \left| \begin{array}{|c|} \hline A_{2 \times 4} \\ \hline \end{array} \right. \times \begin{array}{|c|} \hline B \cdot C \\ 4 \times 3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 2 \times 3 \\ \hline \end{array} \\ \hline 4 \text{ columnas} \end{array}$$

8. Cuestión C2: Extremo Relativo de una Función

8.1. Enunciado

Dada $f(x) = \frac{ax^2+1}{5x}$. Dar un valor de a para que en $x = 1$ haya un extremo relativo de $f(x)$.

8.2. Solución

Para que exista un extremo relativo en $x = 1$, debe cumplirse que $f'(1) = 0$.

Cálculo de la derivada:

$$f(x) = \frac{ax^2 + 1}{5x}$$

Podemos reescribir:

$$f(x) = \frac{1}{5} \cdot \frac{ax^2 + 1}{x} = \frac{1}{5} \left(ax + \frac{1}{x} \right) = \frac{a}{5}x + \frac{1}{5x}$$

Derivando:

$$f'(x) = \frac{a}{5} + \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \frac{a}{5} - \frac{1}{5x^2}$$

Condición de extremo en $x = 1$:

$$\begin{aligned} f'(1) &= 0 \\ \frac{a}{5} - \frac{1}{5(1)^2} &= 0 \\ \frac{a}{5} - \frac{1}{5} &= 0 \\ \frac{a-1}{5} &= 0 \\ a-1 &= 0 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

Verificación de que es un extremo:

Para $a = 1$:

$$f'(x) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5x^2} = \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

Calculamos la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5x^2} \right) = 0 - \frac{1}{5} \cdot (-2)x^{-3} = \frac{2}{5x^3}$$

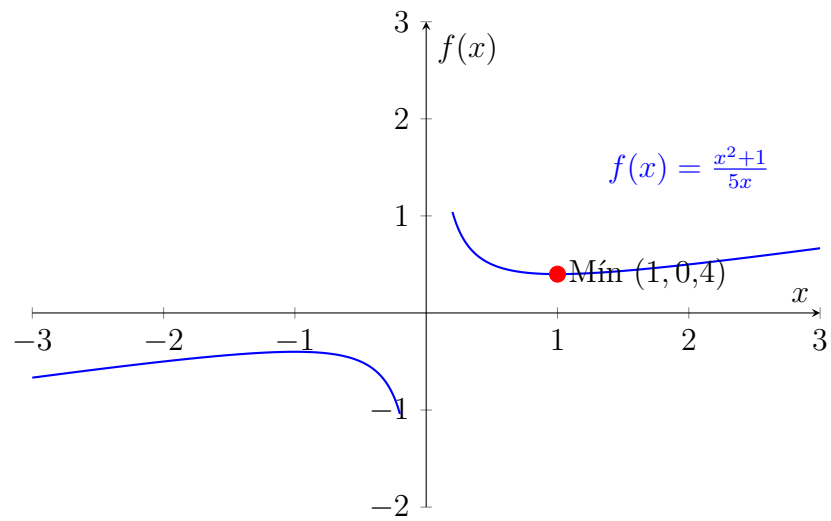
$$f''(1) = \frac{2}{5(1)^3} = \frac{2}{5} > 0$$

Como $f''(1) > 0$, en $x = 1$ hay un **mínimo relativo**.

Valor de a

$$a = 1$$

Con este valor, $f(x) = \frac{x^2+1}{5x}$ tiene un mínimo relativo en $x = 1$.



9. Cuestión C3: Ficha Técnica de Encuesta

9.1. Enunciado

La ficha técnica de una encuesta electoral realizada para las pasadas elecciones autonómicas indica que se ha encuestado a 1000 individuos con derecho a voto residentes en Castilla y León. La muestra se ha tomado mediante muestreo aleatorio simple. El error de estimación de la proporción de individuos de la población que vota al partido K es de $\pm 3,2\%$ fijada una confianza del 95.5 %.

Para esta ficha técnica, identificar los siguientes elementos: Población, diseño muestral, tamaño muestral, parámetro estimado.

9.2. Solución

Analizamos cada elemento solicitado:

Elementos de la Ficha Técnica

1. Población:

La población objeto de estudio son todos los **individuos con derecho a voto residentes en Castilla y León**.

2. Diseño muestral:

El diseño muestral utilizado es el **muestreo aleatorio simple** (MAS).

En este tipo de muestreo, cada individuo de la población tiene la misma probabilidad de ser seleccionado para formar parte de la muestra.

3. Tamaño muestral:

El tamaño de la muestra es $n = 1000$ individuos.

4. Parámetro estimado:

El parámetro estimado es la **proporción poblacional** p de individuos que votan al partido K.

Es decir, se estima $p = P(\text{un votante vota al partido K})$.

Información adicional proporcionada:

- **Error máximo de estimación:** $E = \pm 3,2\% = \pm 0,032$

Esto significa que el intervalo de confianza para la proporción p tiene una amplitud de $\pm 3,2\%$ alrededor del estimador puntual $\hat{p}$.

- **Nivel de confianza:** $1 - \alpha = 95,5\%$

Esto corresponde a un valor crítico $z_{\alpha/2}$ tal que:

$$P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 0,955$$

Por simetría:

$$P(Z < z_{\alpha/2}) = \frac{1 + 0,955}{2} = 0,9775$$

De la tabla, $z_{\alpha/2} \approx 2$ (ya que para un nivel de confianza del 95.5 %, se usa aproximadamente $z = 2$).

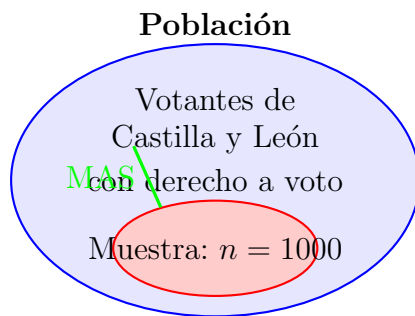
Fórmula del error de estimación:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

En el peor caso ($p = 0,5$):

$$E = 2 \cdot \sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{1000}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{0,25}{1000}} = 2 \cdot \frac{0,5}{31,62} \approx 0,0316 \approx 3,2\%$$

Esto confirma la coherencia de los datos proporcionados.



Parámetro: p (proporción)

Error: $\pm 3,2\%$
Confianza: 95.5%

Conclusión

Este documento contiene las soluciones completas y rigurosas de todos los problemas y cuestiones del examen de Matemáticas de 2º de Bachillerato (Convocatoria Extraordinaria 2023).

Resumen de resultados:

1. **P1 - Programación Lineal:** Producir 40 bolsas del modelo 1 y 20 del modelo 2 para un beneficio máximo de 1700 euros.
2. **P2 - Sistema de ecuaciones:** Para $a \neq 1$ hay solución única; para $a = 1$ no hay solución. Con $a = 0$: $x = -2$, $y = \frac{7}{2}$, $z = \frac{1}{2}$.
3. **P3 - Función cúbica:** $a = 6$, $b = 0$, $c = -6$. Función: $f(x) = x^3 + 6x^2 - 6$. Área: $\frac{47}{4} u^2$.
4. **P4 - Optimización:** Los números son 6 y 18, con producto máximo 34992.
5. **P5 - Probabilidad:** a) Probabilidad de novela: $\frac{11}{20}$. b) Probabilidad de biblioteca 1: $\frac{15}{22}$.
6. **P6 - Distribución Normal:** a) 46 % entre 20 y 35 puntos. b) 20 alumnos con más de 48 puntos.
7. **C1 - Matrices:** A tiene dimensiones 2×4 .
8. **C2 - Extremo:** $a = 1$ para tener un mínimo en $x = 1$.
9. **C3 - Ficha técnica:** Población: votantes de Castilla y León. Diseño: MAS. Tamaño: 1000. Parámetro: proporción p .

*“En matemáticas, no se trata de si algo es verdadero o falso,
sino de si se puede demostrar.”*

— Anónimo