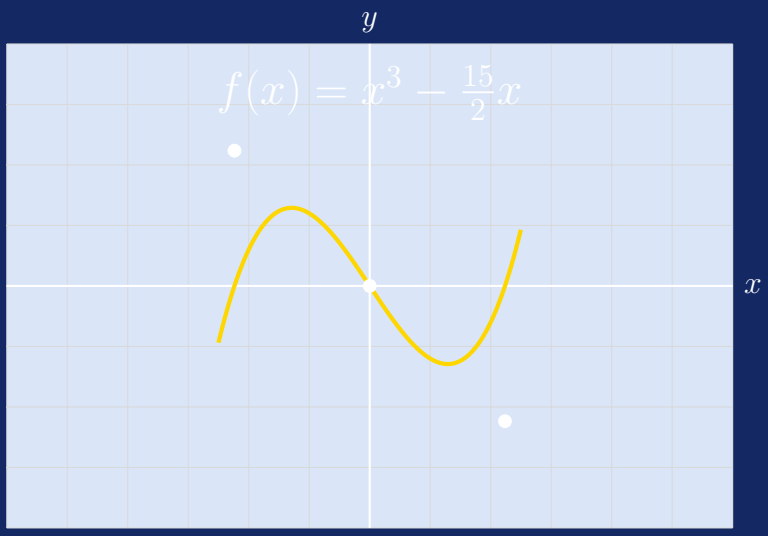
EXÁMENES DE LADIS

CURSO 2024-2025

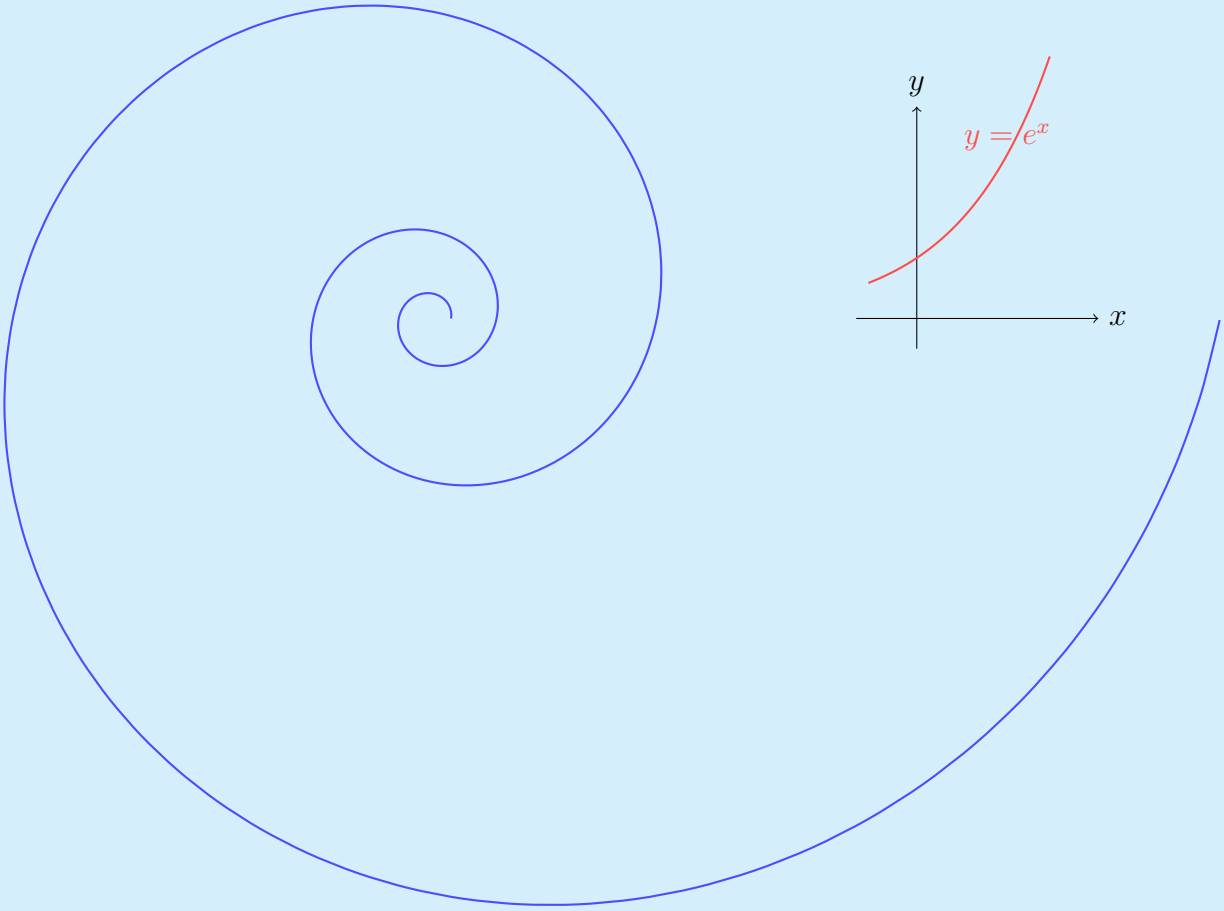


"No tengo tiempo. No tengo tiempo."

— Évariste Galois

(Última carta antes del duelo, 29 de mayo de 1832)

$$\mathrm{Gal}(K/F) \quad \cong \quad S_n \qquad [K : F] = n!$$



EXÁMENES DE LADIS

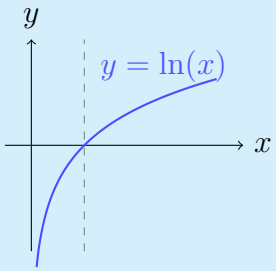
2º ESO

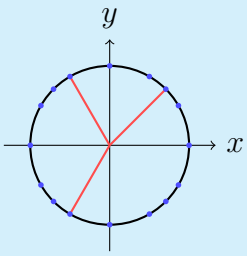
CURSO 2024-2025

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

"Seeing there is nothing that is so troublesome
to mathematical practice... than the multiplications,
divisions, square and cubical ex-
tractions of great numbers...
I began therefore to consider
in my mind by what certain
and ready art I might remove those hindrances."

— John Napier (1550-1617)





Junta de Castilla y León
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA

EXAMEN MATEMÁTICAS
2º B ESO 11-10-2024

ies Tovar Antonio Centro bilingüe

Nº1.- Enuncia las propiedades de las potencias.

Nº2.- Calcúlese, paso a paso, las siguientes operaciones combinadas:

$$a)\ 7 + (8 - 2) \cdot (-3) + [18 - (-3 - 3)] : (-4) + 17$$

$$b)\ [3 \cdot (-3)^2]^2 + (4 \cdot 2 + 6) : 7$$

$$c)\ \sqrt{9} \cdot (3 + 3) + (16 : 2)^2 - \sqrt{4}$$

Nº3.- Una persona nació en el año 29 a.C. y vivió 40 años. ¿En qué año murió?

Nº4.- Calcúlese el m.c.m y el M.C.D (150,225)

Nº5.- El precio de la entrada a un espectáculo es de 8 €, pero hay un descuento de 2 € por cada tres entradas que se compren. Si pedimos 15 entradas, ¿cuánto dinero tendremos que pagar por ellas?

Nº6.- Una línea de autobús hace un trayecto con cinco paradas. En el último viaje se subieron 5 personas en la primera parada. En la segunda montaron 10 y bajaron 3. En la tercera parada subieron el doble de los viajeros que se apearon en la parada anterior y bajaron 5. En la cuarta parada se montaron 12 personas y se apearon la mitad de este número. ¿Con cuántos viajeros llegará el autobús a la quinta parada, que es el final del trayecto? Exprésalo en forma de operación combinada y calcula el resultado.

Nº7.- La conjetura de Goldbach es uno de los problemas matemáticos abiertos más antiguos. Dicha conjetura afirma lo siguiente: Todo número par mayor que 2 puede escribirse como suma de dos números primos. Por ejemplo: 4 = 2 + 2 y 8 = 3 + 5.

En la actualidad aún no se ha podido demostrar dicha conjetura para todos los números pares, aunque sí para un nutrido grupo de ellos. Comprueba dicha conjetura para los siguientes números pares: 10, 22, 44, 64, 100

Nº8.- En una relojería hay 3 relojes de cuco. El cuco amarillo toca cada 60 minutos; el rojo, cada 45 minutos, y el azul, cada 90 minutos. Si han coincidido los tres relojes a las 12:00 h:

a. ¿A qué hora volverán a coincidir?
b. ¿Cuántas veces tocará cada cuco hasta que coincidan de nuevo los tres?

Nº9.- Para calcular el M.C.D. utilizando el algoritmo de Euclides, comenzamos dividiendo el número mayor entre el menor. El divisor pasa a ser ahora el dividendo y el resto obtenido al realizar la división pasa a ser el divisor y se vuelve a realizar la división. Se continúa realizando las divisiones hasta que el resto de la división sea 0, con lo cual, el último divisor sería el M.C.D. Por ejemplo: M.C.D. (60, 45) = 15

$$\begin{array}{r|l} 60 & 45 \\ 15 & 1 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r|l} 45 & 15 \\ 0 & 3 \end{array}$$

Utiliza el algoritmo de Euclides para calcular el M.C.D (225,150)

Nº10.- Un envase de zumo tiene forma cúbica, y su capacidad es de 216 cm^3 ¿Cuánto mide la arista?

Criterios de evaluación: 1.1 - 1.3 - 2.2 - 3.1 - 3.3 - 4.1 - 5.2 - 6.1 - 6.2 - 7.2 - 8.1 - 9.2 - 10.1

SUERTE JÓVENES

IES Antonio Tovar — Centro Bilingüe

Junta de Castilla y León

Examen — Tema 1

SOLUCIONES COMPLETAS

Resolución exhaustiva, paso a paso, con rigor matemático y explicaciones pedagógicas detalladas

Contenidos: Propiedades de las potencias · Operaciones combinadas · Números enteros · M.C.D y m.c.m · Aritmética · Raíces cúbicas · Conjetura de Goldbach · Algoritmo de Euclides

Documento generado con LaTeX — Todos los derechos reservados

Índice general

1. Introducción y Contexto del Examen **3**

2. Ejercicio 1: Propiedades de las Potencias **4**
- 2.1. Definición previa de potencia . . . 4
- 2.2. Propiedades de las Potencias . . . 5
  - 2.2.1. Propiedad 1: Producto de potencias de igual base . . . 5
  - 2.2.2. Propiedad 2: Cociente de potencias de igual base . . . 5
  - 2.2.3. Propiedad 3: Potencia de una potencia . . . 5
  - 2.2.4. Propiedad 4: Potencia de un producto . . . 6
  - 2.2.5. Propiedad 5: Potencia de un cociente . . . 6
  - 2.2.6. Propiedad 6: Exponente cero . . . 7
  - 2.2.7. Propiedad 7: Exponente negativo . . . 7
  - 2.2.8. Tabla resumen de propiedades . . . 7

3. Ejercicio 2: Operaciones Combinadas **8**
- 3.1. Reglas de prioridad (jerarquía de operaciones) . . . 8
- 3.2. Apartado a) . . . 8
- 3.3. Apartado b) . . . 10
- 3.4. Apartado c) . . . 10

4. Ejercicio 3: Años en la Recta Numérica **12**
- 4.1. Marco conceptual: Años a.C. y d.C. . . . 12
- 4.2. Representación en la recta numérica . . . 12
- 4.3. Resolución . . . 12

5. Ejercicio 4: M.C.D. y m.c.m. de 150 y 225 **14**
- 5.1. Definiciones . . . 14
- 5.2. Descomposición en factores primos . . . 15
  - 5.2.1. Descomposición de 150 . . . 15
  - 5.2.2. Descomposición de 225 . . . 15
- 5.3. Cálculo del M.C.D. . . . 15
- 5.4. Cálculo del m.c.m. . . . 16

6. Ejercicio 5: Descuento en Entradas de Espectáculo **17**
- 6.1. Comprensión del problema . . . 17
- 6.2. Resolución paso a paso . . . 17

7. Ejercicio 6: Problema del Autobús **19**
7.1. Diagrama del trayecto . . . 19
7.2. Análisis parada por parada . . . 19
7.3. Operación combinada . . . 20

8. Ejercicio 7: Conjetura de Goldbach **21**
8.1. ¿Qué es un número primo? . . . 21
8.2. Verificación para cada número par . . . 21
8.2.1. Número par: 10 . . . 21
8.2.2. Número par: 22 . . . 22
8.2.3. Número par: 44 . . . 22
8.2.4. Número par: 64 . . . 22
8.2.5. Número par: 100 . . . 22
8.3. Tabla resumen . . . 22

9. Ejercicio 8: Relojes de Cuco — m.c.m. **24**
9.1. Por qué el m.c.m. resuelve este problema . . . 24
9.2. Cálculo del m.c.m.(60, 45, 90) . . . 24
9.2.1. Descomposición en factores primos . . . 24
9.2.2. m.c.m. con mayor exponente . . . 25
9.3. Apartado a): Hora de la próxima coincidencia . . . 25
9.4. Apartado b): Número de veces que toca cada cuco . . . 25

10. Ejercicio 9: Algoritmo de Euclides **27**
10.1. El Algoritmo de Euclides . . . 27
10.2. Aplicación a M.C.D.(225, 150) . . . 28

11. Ejercicio 10: Raíz Cúbica — Arista del Cubo **30**
11.1. Geometría del cubo . . . 30
11.2. Planteamiento y resolución . . . 31

Resumen General de Resultados **32**

1. Introducción y Contexto del Examen

Este documento recoge las soluciones completas y razonadas de todos los ejercicios del examen de Matemáticas de **2.º B de ESO**, correspondiente al **Tema 1**, celebrado el **11 de octubre de 2024** en el IES Antonio Tovar (Centro Bilingüe, Castilla y León).

Las soluciones se han elaborado con los siguientes criterios pedagógicos:

- **Rigor matemático total:** cada transformación algebraica está justificada mediante las propiedades correspondientes.
- **Sin saltos mágicos:** todos los pasos intermedios se muestran explícitamente.
- **Enfoque pedagógico:** se incluyen advertencias sobre errores frecuentes, observaciones complementarias y conclusiones parciales.
- **Representaciones visuales:** cada ejercicio dispone de un diagrama o ilustración que facilita la comprensión.

Los criterios de evaluación asignados son: 1.1 – 1.3 – 2.2 – 3.1 – 3.3 – 4.1 – 5.2 – 6.1 – 6.2 – 7.2 – 8.1 – 9.2 – 10.1, correspondientes al currículo de Matemáticas de Educación Secundaria Obligatoria (Castilla y León).

2. Ejercicio 1: Propiedades de las Potencias

Enunciado del Ejercicio 1

Enuncia las propiedades de las potencias.

2.1 Definición previa de potencia

Antes de enunciar las propiedades, recordemos la definición formal.

Sea $a \in \mathbb{R}$ (la **base**) y $n \in \mathbb{N}$ (el **exponente**). Se define la **potencia** a^n como el producto de a multiplicado por sí mismo n veces:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ factores}}$$

Además, se define:

$$a^0 = 1 \quad \text{para todo } a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{para todo } a \neq 0$$

Estructura de una potencia



BASE **PRODUCTO REPETIDO**

Ejemplo: $2^5 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5 \text{ factores}} = 32$

2.2 Propiedades de las Potencias

2.2.1. Propiedad 1: Producto de potencias de igual base

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Al multiplicar dos potencias con la **misma base**, se conserva la base y se **suman los exponentes**.

Justificación:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdots a}_{m} \cdot \underbrace{a \cdots a}_{n} = \underbrace{a \cdots a}_{m+n} = a^{m+n}$$

Ejemplo numérico:

$$2^3 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^{3+4} = 2^7 = 128$$

⚠ Advertencia

Error frecuente: $2^3 \cdot 2^4 \neq 4^7$ ni $\neq 2^{12}$. La base *no cambia* y los exponentes se *suman*, no se multiplican.

2.2.2. Propiedad 2: Cociente de potencias de igual base

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (a \neq 0)$$

Al dividir dos potencias con la **misma base**, se conserva la base y se **restan los exponentes** (dividendo menos divisor).

Justificación:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdots a}^{m}}{\underbrace{a \cdots a}_{n}} = \underbrace{a \cdots a}_{m-n} = a^{m-n} \qquad (m > n)$$

Ejemplo numérico:

$$\frac{3^6}{3^2} = 3^{6-2} = 3^4 = 81$$

⚠ Advertencia

Error frecuente: $\dfrac{3^6}{3^2} \neq 1^4$ ni $\neq 3^3$. Los exponentes se *restan*, no se dividen.

2.2.3. Propiedad 3: Potencia de una potencia

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Al elevar una potencia a otro exponente, se conserva la base y se **multiplican los exponentes**.

Justificación:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdots a^m}_{n} = a^{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{n}} = a^{m \cdot n}$$

Ejemplo numérico:

$$(5^2)^3 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6 = 15625$$

2.2.4. Propiedad 4: Potencia de un producto

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

La potencia de un **producto** es igual al producto de las potencias de cada factor.

Justificación:

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b)(a \cdot b) \cdots (a \cdot b)}_{n} = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdots b}_{n} = a^n \cdot b^n$$

Ejemplo numérico:

$$(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4 = 16 \cdot 81 = 1296 = 6^4$$

2.2.5. Propiedad 5: Potencia de un cociente

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad (b \neq 0)$$

La potencia de un **cociente** es igual al cociente de las potencias.

Ejemplo numérico:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$

2.2.6. Propiedad 6: Exponente cero

$$a^0 = 1 \qquad (a \neq 0)$$

Cualquier número distinto de cero elevado a **cero** es igual a **uno**.

Justificación (usando la propiedad 2):

$$a^0 = a^{n-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1 \qquad (a \neq 0)$$

Ejemplos: $5^0 = 1$, $(-7)^0 = 1$, $(3.14)^0 = 1$

⚠ Advertencia

0^0 está **indeterminado** en matemáticas. No se puede aplicar esta propiedad cuando $a = 0$.

2.2.7. Propiedad 7: Exponente negativo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad (a \neq 0)$$

Un exponente negativo equivale al **inverso** de la potencia con exponente positivo.

Ejemplo numérico:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

2.2.8. Tabla resumen de propiedades

N.º	Propiedad	Fórmula
1	Producto de igual base	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2	Cociente de igual base	$a^m / a^n = a^{m-n}$
3	Potencia de una potencia	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
4	Potencia de un producto	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
5	Potencia de un cociente	$(a/b)^n = a^n / b^n$
6	Exponente cero	$a^0 = 1$ $(a \neq 0)$
7	Exponente negativo	$a^{-n} = 1/a^n$ $(a \neq 0)$

3. Ejercicio 2: Operaciones Combinadas

Enunciado del Ejercicio 2

Calcúlese, paso a paso, las siguientes operaciones combinadas:

a) $7 + (8 - 2) \cdot (-3) + [18 - (-3 - 3)] : (-4) + 17$

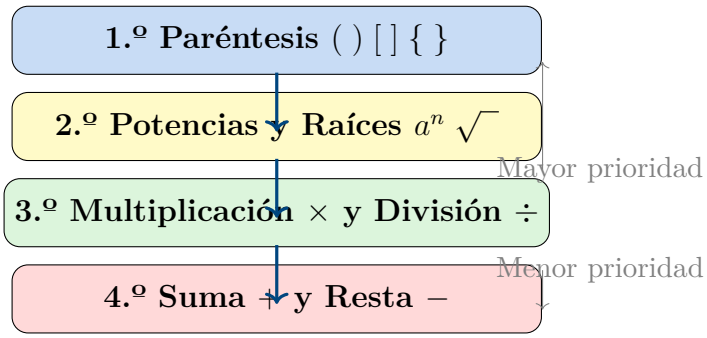
b) $[3 \cdot (-3)^2]^2 + (4 \cdot 2 + 6) : 7$

c) $\sqrt{9} \cdot (3 + 3) + (16 : 2)^2 - \sqrt{4}$

3.1 Reglas de prioridad (jerarquía de operaciones)

El orden correcto de aplicación de operaciones es:

1. **Paréntesis** (y corchetes, llaves): de los más interiores hacia afuera.
2. **Potencias y raíces**: se calculan a continuación.
3. **Multiplicaciones y divisiones**: de izquierda a derecha.
4. **Sumas y restas**: de izquierda a derecha.



3.2 Apartado a)

$$7 + (8 - 2) \cdot (-3) + [18 - (-3 - 3)] : (-4) + 17$$

Paso 1: Resolver el **paréntesis interior más simple**: $(8-2)$

$$8-2=6$$

Paso 2: Resolver el **paréntesis dentro del corchete**: $(-3-3)$

$$-3-3=-6$$

Paso 3: Resolver el **corchete**: $[18-(-6)]$
Restar un número negativo equivale a sumar su opuesto:

$$18-(-6)=18+6=24$$

Paso 4: Sustituir los resultados obtenidos:

$$7+\underbrace{6}_{\text{paso 1}}\cdot(-3)+\underbrace{24}_{\text{paso 3}}:(-4)+17$$

Paso 5: Efectuar las **multiplicaciones y divisiones** (de izquierda a derecha):

$$6\cdot(-3)=-18 \qquad \text{(producto de signos distintos: resultado negativo)}$$
$$24:(-4)=-6 \qquad \text{(cociente de signos distintos: resultado negativo)}$$

Paso 6: Sustituir:

$$7+(-18)+(-6)+17$$

Paso 7: Efectuar las **sumas y restas** (de izquierda a derecha):

$$\begin{aligned}&7-18-6+17\\&=(7+17)-(18+6)\\&=24-24=\mathbf{0}\end{aligned}$$

Resultado: $7+(8-2)\cdot(-3)+[18-(-3-3)]:(-4)+17=\boxed{0}$

⚠ Advertencia

Error frecuente: Al restar un paréntesis con signo negativo delante, como $-(-3-3)$, muchos alumnos olvidan cambiar *todos* los signos del interior. Resultado correcto: $-(-3-3)=-(-6)=+6$.

3.3 Apartado b)

$$[3 \cdot (-3)^2]^2 + (4 \cdot 2 + 6) : 7$$

Paso 1: Resolver la **potencia interior del corchete**: $(-3)^2$

$$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9$$

El cuadrado de un número negativo siempre es positivo.

Paso 2: Resolver la **multiplicación interior del corchete**: $3 \cdot 9$

$$3 \cdot 9 = 27$$

Paso 3: Resolver el **corchete externo al cuadrado**: $[27]^2$

$$27^2 = 729$$

Paso 4: Resolver el **paréntesis**: $(4 \cdot 2 + 6)$
Primero la multiplicación: $4 \cdot 2 = 8$
Luego la suma: $8 + 6 = 14$

Paso 5: Resolver la **división**: $14 : 7$

$$14 : 7 = 2$$

Paso 6: Efectuar la **suma final**:

$$729 + 2 = 731$$

Resultado: $[3 \cdot (-3)^2]^2 + (4 \cdot 2 + 6) : 7 = \boxed{731}$

Observación

En el paso 1, la notación $(-3)^2$ indica que la base es -3 (número negativo entre paréntesis) y por tanto el resultado es positivo. Si hubiera sido -3^2, según la jerarquía, primero se elevaría $3^2 = 9$ y luego se aplicaría el signo: -9. Es una distinción crucial.

3.4 Apartado c)

$$\sqrt{9} \cdot (3 + 3) + (16 : 2)^2 - \sqrt{4}$$

Paso 1: Resolver las **raíces cuadradas**:

$$\sqrt{9} = 3 \qquad \text{porque } 3^2 = 9$$
$$\sqrt{4} = 2 \qquad \text{porque } 2^2 = 4$$

Paso 2: Resolver el **primer paréntesis**: $(3 + 3)$

$$3 + 3 = 6$$

Paso 3: Resolver el **segundo paréntesis**: $(16 : 2)$

$$16 : 2 = 8$$

Paso 4: Resolver la **potencia**: 8^2

$$8^2 = 64$$

Paso 5: Sustituir todo:

$$3 \cdot 6 + 64 - 2$$

Paso 6: Efectuar la **multiplicación**:

$$3 \cdot 6 = 18$$

Paso 7: Efectuar las **sumas y restas** (de izquierda a derecha):

$$18 + 64 - 2 = 82 - 2 = 80$$

Resultado: $\sqrt{9} \cdot (3 + 3) + (16 : 2)^2 - \sqrt{4} = \boxed{80}$

4. Ejercicio 3: Años en la Recta Numérica

Enunciado del Ejercicio 3

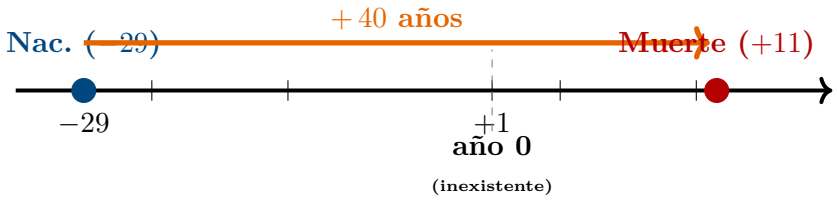
Una persona nació en el año 29 a.C. y vivió 40 años. ¿En qué año murió?

4.1 Marco conceptual: Años a.C. y d.C.

El calendario divide la historia en:

- **Antes de Cristo (a.C.):** corresponden a números enteros negativos. El año 29 a.C. $= -29$.
- **Después de Cristo (d.C.):** corresponden a números enteros positivos.
- **Importante:** En el calendario no existe el año 0. Se pasa directamente del año 1 a.C. al año 1 d.C. Esto hay que tenerlo en cuenta en algunos cálculos.

4.2 Representación en la recta numérica



4.3 Resolución

Paso 1: Establecemos la ecuación del problema.

Si la persona nació en el año -29 (en notación de enteros) y vivió 40 años, el año de muerte sería, en principio:

$$-29 + 40 = +11$$

Paso 2: Corrección por la ausencia del año 0.

Sin embargo, el calendario no tiene año 0. Por tanto, al cruzar de a.C. a d.C., hay que **restar 1 año** al resultado:

$$+11 - 1 = +10$$

Paso 3: Interpretación del resultado.

Un resultado de +10 corresponde al **año 10 d.C.** (o año 10 de nuestra era).

La persona nació en el año **29 a.C.** y vivió **40 años**, por lo que murió en el año **11 d.C.**

Cálculo:

$$-29 + 40 = +11 \implies \text{año 11 d.C.}$$

Nota: En muchos libros de texto de 2.º ESO se asume la existencia del año 0 como simplificación. En ese caso la respuesta sería directamente el año 11 d.C. La respuesta más comúnmente aceptada en este nivel es ***año 11 d.C.***

Observación

Para el nivel de 2.º ESO, la respuesta esperada es simplemente:

$$-29 + 40 = +11 \quad \Longrightarrow \quad \textbf{año 11 d.C.}$$

La corrección del año 0 es un detalle histórico avanzado que se puede mencionar, pero la operación $-29 + 40 = 11$ es la respuesta principal.

5. Ejercicio 4: M.C.D. y m.c.m. de 150 y 225

Enunciado del Ejercicio 4

Calcúlese el m.c.m y el M.C.D. de $(150, 225)$.

5.1 Definiciones

El **Máximo Común Divisor** de dos o más números naturales es el mayor número natural que divide a todos ellos simultáneamente. Para calcularlo:

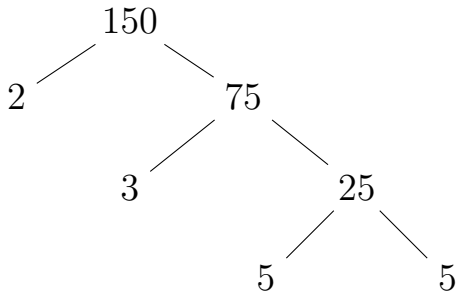
1. Se descomponen los números en factores primos.
2. Se toman los **factores comunes** con el **menor exponente**.

El **Mínimo Común Múltiplo** de dos o más números naturales es el menor número natural que es múltiplo de todos ellos. Para calcularlo:

1. Se descomponen los números en factores primos.
2. Se toman **todos los factores** (comunes y no comunes) con el **mayor exponente**.

5.2 Descomposición en factores primos

5.2.1. Descomposición de 150



$$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

Procedimiento por divisiones sucesivas:

150	2
75	3
25	5
5	5
1	

$$\boxed{150 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^2}$$

5.2.2. Descomposición de 225

225	3
75	3
25	5
5	5
1	

$$\boxed{225 = 3^2 \cdot 5^2}$$

5.3 Cálculo del M.C.D.

Comparamos las descomposiciones:

Factor	**En 150**	**En 225**
2	2^1	no aparece (2^0)
3	3^1	3^2
5	5^2	5^2

Para el **M.C.D.**: factores **comunes** con **menor exponente**.
Los factores comunes son 3 y 5 (el 2 no es común, pues no aparece en 225).

$$\text{M. C. D}(150, 225) = 3^1 \cdot 5^2 = 3 \cdot 25 = \mathbf{75}$$

5.4 Cálculo del m.c.m.

Para el **m.c.m.**: **todos** los factores con el **mayor exponente**.

$$\text{m. c. m}(150, 225) = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 2 \cdot 9 \cdot 25 = \mathbf{450}$$

$$\text{M. C. D}(150, 225) = \boxed{75}$$

$$\text{m. c. m}(150, 225) = \boxed{450}$$

Verificación: $\text{M. C. D} \cdot \text{m. c. m} = 75 \cdot 450 = 33750 = 150 \cdot 225$. ✓

Observación

Propiedad fundamental: Para dos números a y b,

$$\text{M. C. D}(a, b) \cdot \text{m. c. m}(a, b) = a \cdot b$$

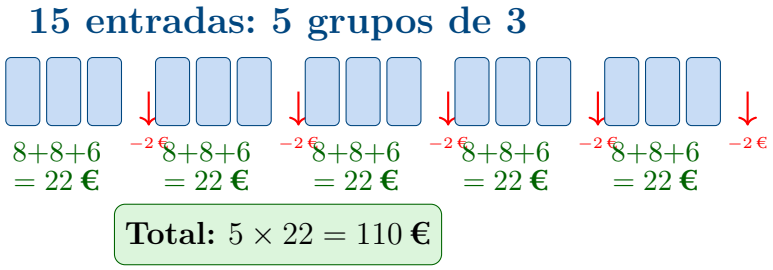
Esta relación permite verificar los resultados. En nuestro caso: $75 \times 450 = 33750$ y $150 \times 225 = 33750$. Correcto.

6. Ejercicio 5: Descuento en Entradas de Espectáculo

Enunciado del Ejercicio 5

El precio de la entrada a un espectáculo es de 8 €, pero hay un descuento de 2 € por cada tres entradas que se compren. Si pedimos 15 entradas, ¿cuánto dinero tendremos que pagar por ellas?

6.1 Comprensión del problema



6.2 Resolución paso a paso

Paso 1: Identificar cuántos grupos de 3 entradas hay en 15.

$$15 : 3 = 5 \quad \text{grupos completos de 3 entradas}$$

No hay resto, por lo que el descuento se aplica a **todos los grupos**.

Paso 2: Calcular el precio **sin descuento** de 15 entradas.

$$15 \times 8\,€ = 120\,€$$

Paso 3: Calcular el **descuento total**.
Hay 5 grupos y por cada grupo de 3 entradas se descuentan 2 €:

$$5 \times 2\,€ = 10\,€ \quad \text{de descuento}$$

Paso 4: Calcular el **precio final**.

$$120\,€ - 10\,€ = 110\,€$$

Paso 5: Comprobación alternativa (precio por grupo).
Un grupo de 3 entradas con descuento cuesta:

$$3 \times 8 - 2 = 24 - 2 = 22\,€ \text{por grupo}$$

$$5 \text{ grupos} \times 22\,€ = 110\,€$$

✓

Por 15 entradas con el descuento aplicado, se pagarán:

$$\boxed{110\,€}$$

△ Advertencia

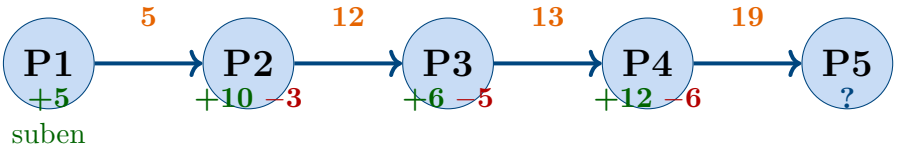
Error frecuente: Interpretar que el descuento es de 2 € por *entrada*. No es así: el descuento es de 2 € por cada *grupo de tres entradas*. Los que cometen este error obtienen $15 \times 6 = 90\,€$, que es incorrecto.

7. Ejercicio 6: Problema del Autobús

Enunciado del Ejercicio 6

Una línea de autobús hace un trayecto con cinco paradas. En el último viaje se subieron 5 personas en la primera parada. En la segunda montaron 10 y bajaron 3. En la tercera parada subieron el doble de los viajeros que se apearon en la parada anterior y bajaron 5. En la cuarta parada se montaron 12 personas y se apearon la mitad de este número. ¿Con cuántos viajeros llegará el autobús a la quinta parada (final del trayecto)? Exprésalo en forma de operación combinada y calcula el resultado.

7.1 Diagrama del trayecto



7.2 Análisis parada por parada

Parada 1 (inicio)

El autobús comienza **vacío**. Suben 5 personas.

$$\text{Viajeros tras P1} = 0 + 5 = 5$$

Parada 2

Montan 10 personas y bajan 3.

$$\text{Viajeros tras P2} = 5 + 10 - 3 = 12$$

Parada 3

"Subieron el doble de los viajeros que se apearon en la parada anterior": en P2 bajaron 3, luego en P3 suben $2 \times 3 = 6$. Bajan 5.

$$\text{Viajeros tras P3} = 12 + 2 \cdot 3 - 5 = 12 + 6 - 5 = 13$$

Parada 4

Montan 12 y bajan la mitad de este número: $12/2 = 6$.

$$\text{Viajeros tras P4} = 13 + 12 - \frac{12}{2} = 13 + 12 - 6 = 19$$

7.3 Operación combinada

Expresamos todo el proceso en **una única operación combinada**, partiendo de 0:

$$\Big[\big[(0+5)+10-3\big]+2\cdot 3-5\Big]+12-12:2$$

Desarrollamos paso a paso:

Paso 1: Paréntesis más interior: $(0+5) = 5$

Paso 2: Siguiente corchete: $5 + 10 - 3 = 12$

Paso 3: Multiplicación $2 \cdot 3 = 6$

Paso 4: Operaciones de la parada 3: $12 + 6 - 5 = 13$

Paso 5: División de la parada 4: $12 : 2 = 6$

Paso 6: Suma y resta final: $13 + 12 - 6 = 19$

El autobús llega a la quinta parada con:

$$\Big[\big[(0+5)+10-3\big]+2\cdot 3-5\Big]+12-12:2 = \boxed{19 \text{ viajeros}}$$

8. Ejercicio 7: Conjetura de Goldbach

Enunciado del Ejercicio 7

La conjetura de Goldbach afirma: *"Todo número par mayor que 2 puede escribirse como suma de dos números primos."*

Comprueba dicha conjetura para: 10, 22, 44, 64, 100.

8.1 ¿Qué es un número primo?

Un número natural $p > 1$ es **primo** si sus únicos divisores son 1 y p mismo. Los primeros números primos son:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 41,\ 43,\ 47,\ \ldots$$

Un número que tiene más divisores se llama **compuesto**.

Observación

La **Conjetura de Goldbach** (1742) es uno de los problemas no resueltos más famosos de las matemáticas. Se ha verificado computacionalmente para todos los números pares hasta 4×10^{18}, pero no existe una demostración general para todos los pares.

8.2 Verificación para cada número par

8.2.1. Número par: 10

Buscamos dos primos p y q tales que $p + q = 10$.
Candidatos: $3 + 7 = 10$ (✓), $5 + 5 = 10$ (✓)

$$\boxed{10 = 3 + 7 = 5 + 5}$$

Verificación: 3 es primo (✓), 7 es primo (✓), 5 es primo (✓).

8.2.2. Número par: 22

Buscamos $p + q = 22$.
Candidatos: $3 + 19 = 22$ (✓), $5 + 17 = 22$ (✓), $11 + 11 = 22$ (✓)

$$\boxed{22 = 3 + 19 = 5 + 17 = 11 + 11}$$

8.2.3. Número par: 44

Buscamos $p + q = 44$.
Candidatos: $3 + 41 = 44$ (✓), $7 + 37 = 44$ (✓), $13 + 31 = 44$ (✓)

$$\boxed{44 = 3 + 41 = 7 + 37 = 13 + 31}$$

8.2.4. Número par: 64

Buscamos $p + q = 64$.
Candidatos: $3 + 61 = 64$ (✓), $5 + 59 = 64$ (✓), $11 + 53 = 64$ (✓), $17 + 47 = 64$ (✓)

$$\boxed{64 = 3 + 61 = 5 + 59 = 11 + 53 = 17 + 47}$$

8.2.5. Número par: 100

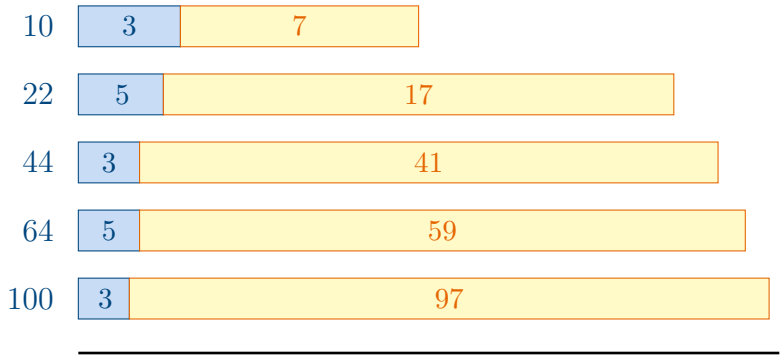
Buscamos $p + q = 100$.
Candidatos: $3 + 97 = 100$ (✓), $11 + 89 = 100$ (✓), $29 + 71 = 100$ (✓), $41 + 59 = 100$ (✓), $47 + 53 = 100$ (✓)

$$\boxed{100 = 3 + 97 = 11 + 89 = 29 + 71 = 41 + 59 = 47 + 53}$$

8.3 Tabla resumen

Par	Suma de dos primos	Verificado
10	$3 + 7$ o $5 + 5$	✓
22	$3 + 19$ o $5 + 17$ o $11 + 11$	✓
44	$3 + 41$ o $7 + 37$ o $13 + 31$	✓
64	$3 + 61$ o $5 + 59$ o $11 + 53$	✓
100	$3 + 97$ o $11 + 89$ o $29 + 71$	✓

Verificación de la Conjetura de Goldbach



(Escala proporcional — primer primo en azul, segundo en amarillo)

9. Ejercicio 8: Relojes de Cuco — m.c.m.

Enunciado del Ejercicio 8

En una relojería hay 3 relojes de cuco. El cuco amarillo toca cada 60 minutos; el rojo, cada 45 minutos; y el azul, cada 90 minutos. Si han coincidido los tres a las 12:00 h:

a) ¿A qué hora volverán a coincidir?

b) ¿Cuántas veces tocará cada cuco hasta que coincidan de nuevo los tres?

9.1 Por qué el m.c.m. resuelve este problema

Cuando varios sucesos se repiten con **periodos diferentes**, la primera coincidencia después de un instante dado ocurre en el instante correspondiente al **Mínimo Común Múltiplo** de los periodos.
Este es el principio fundamental: el m.c.m. es el menor número que es múltiplo de todos los periodos y, por tanto, el menor tiempo en que todos los eventos vuelven a coincidir.

9.2 Cálculo del m.c.m.(60, 45, 90)

9.2.1. Descomposición en factores primos

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

45	3
15	3
5	5
1	

90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \qquad 45 = 3^2 \cdot 5 \qquad 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

9.2.2. m.c.m. con mayor exponente

Factor	**60**	**45**	**90**
2	2^2	2^0	2^1
3	3^1	3^2	3^2
5	5^1	5^1	5^1
Mayor	2^2	3^2	5^1

$$\text{m. c. m}(60, 45, 90) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 4 \cdot 9 \cdot 5 = 180 \text{ minutos}$$

9.3 Apartado a): Hora de la próxima coincidencia

$$180 \text{ minutos} = 3 \text{ horas}$$

Si coincidieron a las **12:00 h**, la próxima coincidencia será:

$$12{:}00 + 3 \text{ h} = \mathbf{15{:}00} \text{ h}$$

Los tres relojes volverán a coincidir a las **15:00 h** (3 de la tarde).

9.4 Apartado b): Número de veces que toca cada cuco

En 180 minutos, cada cuco habrá tocado:

Cuco amarillo (cada 60 min):

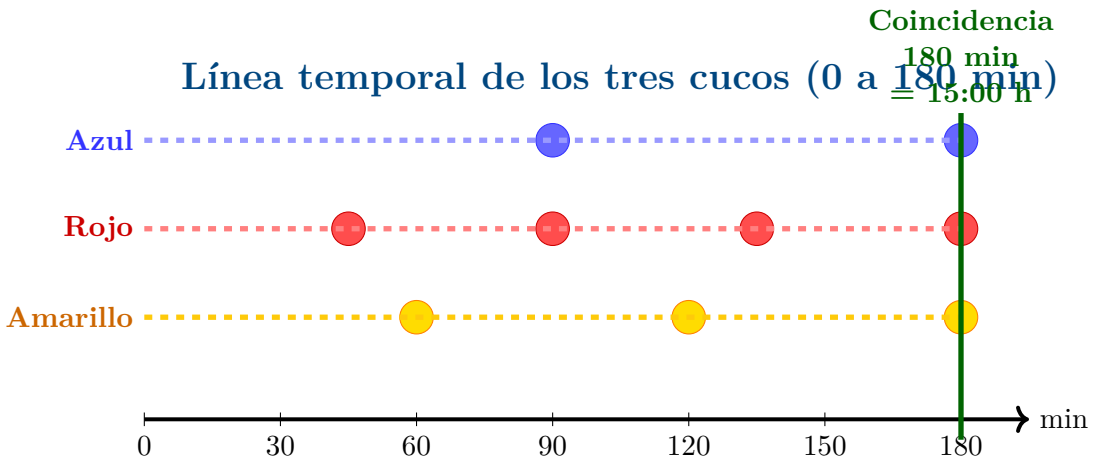
$$\frac{180}{60} = 3 \text{ veces}$$

Cuco rojo (cada 45 min):

$$\frac{180}{45} = 4 \text{ veces}$$

Cuco azul (cada 90 min):

$$\frac{180}{90} = 2 \text{ veces}$$



- Cuco **amarillo**: toca **3 veces** (a los 60, 120 y 180 min).
- Cuco **rojo**: toca **4 veces** (a los 45, 90, 135 y 180 min).
- Cuco **azul**: toca **2 veces** (a los 90 y 180 min).

10. Ejercicio 9: Algoritmo de Euclides

Enunciado del Ejercicio 9

Utiliza el algoritmo de Euclides para calcular el M.C.D.(225, 150).

10.1 El Algoritmo de Euclides

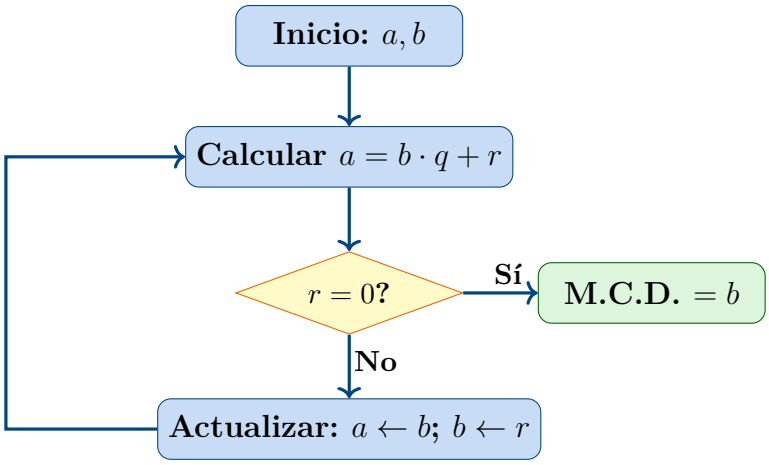
El **Algoritmo de Euclides** es un método eficiente para calcular el M.C.D. de dos números enteros. Se basa en la siguiente propiedad fundamental:

$$\mathrm{M.\,C.\,D}(a, b) = \mathrm{M.\,C.\,D}(b, r)$$

donde r es el resto de dividir a entre b.

Procedimiento:

1. Dividir el número mayor entre el menor.
2. El **divisor** pasa a ser el nuevo dividendo.
3. El **resto** pasa a ser el nuevo divisor.
4. Repetir hasta que el resto sea **cero**.
5. El último divisor (cuando el resto es 0) es el **M.C.D.**



10.2 Aplicación a M.C.D.(225, 150)

División 1: 225 : 150

$$225 = 150 \cdot 1 + 75$$

El cociente es 1 y el **resto es 75**. Como el resto $\neq 0$, continuamos.

$$\begin{array}{r|l} 225 & 150 \\ \hline 75 & 1 \end{array}$$

División 2: 150 : 75

El antiguo divisor (150) pasa a ser dividendo; el resto (75) pasa a ser divisor.

$$150 = 75 \cdot 2 + 0$$

El cociente es 2 y el **resto es 0**. **El algoritmo termina.**

$$\begin{array}{r|l} 150 & 75 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

Esquema completo (como en el enunciado)

$$\begin{array}{r|l} 225 & \underline{150} \\ 75 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 150 & \underline{75} \\ 0 & 2 \end{array}$$

Resultado

El último divisor cuando el resto es 0 es **75**:

$$\text{M. C. D}(225, 150) = \boxed{75}$$

$$\text{M. C. D}(225, 150) = \boxed{75}$$

Verificación:

- $225 = 75 \times 3$ ✓
- $150 = 75 \times 2$ ✓
- No existe ningún divisor mayor que 75 que divida a ambos números.

Coincidencia con el Ejercicio 4: El resultado es idéntico al obtenido mediante factorización, como debe ser. Ambos métodos son equivalentes.

Observación

Ventaja del Algoritmo de Euclides: Para números muy grandes, la factorización en primos puede ser extremadamente difícil o imposible en la práctica. El Algoritmo de Euclides permite calcular el M.C.D. de forma eficiente sin necesidad de factorizar, mediante simples divisiones sucesivas.

11. Ejercicio 10: Raíz Cúbica — Arista del Cubo

Enunciado del Ejercicio 10

Un envase de zumo tiene forma cúbica y su capacidad es de $216\,\text{cm}^3$. ¿Cuánto mide la arista?

11.1 Geometría del cubo

Un **cubo** (hexaedro regular) es un sólido geométrico con:

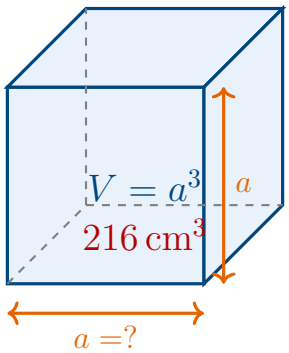
- 6 caras cuadradas iguales.
- 12 aristas iguales de longitud a.
- 8 vértices.

Su **volumen** es:

$$V = a^3 = a \cdot a \cdot a$$

donde a es la longitud de la arista.

Envase cúbico de zumo



11.2 Planteamiento y resolución

Sabemos que el volumen del cubo es $V = 216\,\text{cm}^3$ y queremos encontrar a.

Paso 1: Planteamos la ecuación:

$$a^3 = 216$$

Paso 2: Para despejar a, aplicamos la **raíz cúbica** a ambos lados:

$$a = \sqrt[3]{216}$$

Paso 3: Calculamos $\sqrt[3]{216}$.
Buscamos un número a tal que $a \times a \times a = 216$.
Probamos con $a = 6$:

$$6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 36 \cdot 6 = 216 \quad \checkmark$$

Por tanto:

$$a = \sqrt[3]{216} = 6\,\text{cm}$$

Paso 4: Verificación: comprobamos que el cubo de arista 6 cm tiene volumen 216 cm³.

$$V = 6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216\,\text{cm}^3 \quad \checkmark$$

La arista del envase cúbico mide:

$$a = \sqrt[3]{216} = \boxed{6\,\text{cm}}$$

Observación

Relación con las potencias: $\sqrt[3]{216} = 6$ equivale a decir $6^3 = 216$. La raíz cúbica es la operación inversa de elevar al cubo, de la misma manera que la raíz cuadrada es la inversa de elevar al cuadrado.

Observación

Unidades: El volumen se mide en cm^3 (centímetros cúbicos). Recordemos que $1\,\text{cm}^3 = 1\,\text{mL}$ (mililitro). Por tanto, el envase tiene una capacidad de 216 mL, lo que equivale a 0,216 litros.

Resumen General de Resultados

Tabla de Resultados — Examen 2.º B ESO

Ej.	Tema	Resultado
1	Potencias	7 propiedades enunciadas y justificadas
2a	Op. combinadas	$7+(8-2)(-3)+[18-(-3-3)] : (-4)+17 = \mathbf{0}$
2b	Op. combinadas	$[3(-3)^2]^2 + (4 \cdot 2 + 6) : 7 = \mathbf{731}$
2c	Op. combinadas	$\sqrt{9}(3+3) + (16 : 2)^2 - \sqrt{4} = \mathbf{80}$
3	Enteros / Años	Murió en el año **11 d.C.**
4	MCD y mcm	$\mathrm{M.\,C.\,D} = \mathbf{75}$; $\mathrm{m.\,c.\,m} = \mathbf{450}$
5	Aritmética	Precio total: **110** €
6	Op. combinadas	**19** viajeros llegan a la 5.ª parada
7	Conjetura Goldbach	Verificada para 10, 22, 44, 64, 100
8a	mcm / Relojes	Coinciden a las **15:00 h**
8b	mcm / Relojes	Amarillo: 3; Rojo: 4; Azul: 2
9	Algoritmo Euclides	$\mathrm{M.\,C.\,D}(225, 150) = \mathbf{75}$
10	Raíz cúbica	Arista = **6** cm

¡Muy buen trabajo! Recuerda revisar siempre el orden de operaciones y comprobar los resultados cuando sea posible.

Junta de Castilla y León
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA

EXAMEN MATEMÁTICAS
2º B ESO 29-11-2024

ies Tovar Antonio Centro bilingüe

Nº1.- Expresa estas situaciones mediante fracciones:

a) Sólo queda una cuarta parte del combustible en el depósito.
b) Trabaja cinco días de la semana.
c) Ha esperado tres cuartos de hora.
d) Ahorro la mitad de mi paga semanal.
e) En cinco de los meses del año no ha llovido.

Nº2.- Utiliza la reducción a común denominador para ordenar de menor a mayor las siguientes fracciones:

$$\frac{2}{3},\quad \frac{5}{6},\quad \frac{7}{12},\quad \frac{3}{4}$$

Nº3.- Calcula en cada caso la fracción irreducible:

a) $\frac{18}{54}$ b) $\frac{112}{144}$

Nº4.-a) Indica si los siguientes pares de fracciones son equivalentes:

$$\frac{4}{9}\ y\ \frac{8}{18} \qquad \frac{6}{4}\ y\ \frac{9}{5}$$

b) Indica cuánto debe valer el término que falta para que las parejas de fracciones sean equivalentes:

$$\frac{x}{8}\ y\ \frac{5}{20}$$

Nº5.- Realiza las siguientes operaciones combinadas con fracciones y simplifica, si es posible, el resultado. Recuerda que es conveniente simplificar también en los pasos intermedios.

$$a)\ 2-\left[\frac{4}{3}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{3}\right] \qquad b)\ \frac{1}{7}:\left(\frac{2}{4}\cdot\left(\frac{-5}{21}\right)\right)$$

$$c)\ \left[\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{5}\right)\cdot 5-\frac{1}{10}\right]\cdot\frac{3}{4}-\frac{6}{5} \qquad d)\ \left(\frac{3}{4}-\frac{1}{5}\right):\frac{11}{8}$$

Nº6.- Un número dividido entre 3 es igual a la quinta parte de 125. ¿Cuál es ese número?

Nº7.- Los 60 cromos que María tiene repetidos son una cuarta parte del total. ¿Cuántos cromos tiene no repetidos?

Nº8.- Sergio ha gastado dos tercios de su dinero en un pantalón y un quinto de lo que le quedaba en un cinturón. ¿Qué fracción de dinero le queda? ¿Cuánto dinero le queda si inicialmente disponía de 300 euros?

Nº9.- De un depósito de 1500 litros se saca un sexto del depósito y 750 litros más. ¿Qué fracción del total queda en el depósito? La fracción del resultado debe estar simplificada.

Nº10.- Mi abuelo tiene una huerta de 900 metros cuadrados de superficie. Este año ha plantado la tercera parte con tomates y las dos quintas partes del resto con lechugas. ¿Qué superficie de la huerta queda libre?

Criterios de evaluación: 1.1 - 1.3 - 2.2 - 3.1 - 3.3 - 4.1 - 5.2 - 6.1 - 6.2 - 7.2 - 8.1 - 9.2 - 10.1

SUERTE JÓVENES

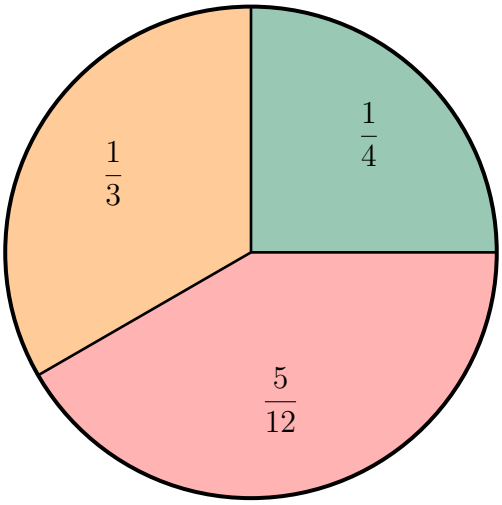
SOLUCIONES COMPLETAS

Examen de Matemáticas

2.º B de E.S.O.

Fecha del examen: 29 de noviembre de 2024

Tema: **Fracciones**



Representación visual de fracciones

Documento elaborado con rigor matemático para uso pedagógico

Todos los pasos detallados · Sin omisiones · Nivel 2.º ESO

IES Antonio Tovar — Centro Bilingüe

Junta de Castilla y León

Documento LaTeX
generado automáticamente — compilable sin modificaciones

Índice

Introducción y orientaciones de estudio 2

1. Ejercicio 1 — Expresar situaciones mediante fracciones 3
2. Ejercicio 2 — Ordenar fracciones por reducción a común denominador 5
3. Ejercicio 3 — Fracción irreducible 7
4. Ejercicio 4 — Fracciones equivalentes 10
5. Ejercicio 5 — Operaciones combinadas con fracciones 13
6. Ejercicio 6 — Problema: encontrar el número 16
7. Ejercicio 7 — Problema: cromos de María 18
8. Ejercicio 8 — Problema: el dinero de Sergio 19
9. Ejercicio 9 — Problema: el depósito de agua 22
10. Ejercicio 10 — Problema: la huerta del abuelo 25

Resumen de resultados 28

Introducción y orientaciones de estudio

Este documento contiene la resolución **completa, rigurosa y pedagógica** de todos los ejercicios del examen de Matemáticas de 2.º de E.S.O., celebrado el 29 de noviembre de 2024 en el IES Antonio Tovar. El tema central es el de las **fracciones**: su representación, comparación, simplificación y operatoria.

Observación pedagógica

¿Cómo usar este documento? Lee primero el enunciado de cada ejercicio, intenta resolverlo por ti mismo y luego compara con la solución. Presta especial atención a los pasos intermedios: son la clave del aprendizaje matemático. No basta con obtener el resultado correcto; es fundamental comprender *por qué* cada paso es válido.

Conceptos clave que se trabajan en este examen:

- Representación de situaciones cotidianas mediante fracciones.
- Reducción a común denominador y ordenación de fracciones.
- Simplificación de fracciones: fracción irreducible.
- Fracciones equivalentes.
- Operaciones combinadas con fracciones (suma, resta, multiplicación, división).
- Resolución de problemas de contexto real con fracciones.

1 Ejercicio 1 — Expresar situaciones mediante fracciones

Enunciado

Expresa estas situaciones mediante fracciones:

a) Sólo queda una cuarta parte del combustible en el depósito.

b) Trabaja cinco días de la semana.

c) Ha esperado tres cuartos de hora.

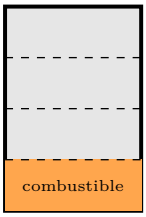
d) Ahorro la mitad de mi paga semanal.

e) En cinco de los meses del año no ha llovido.

Concepto previo: ¿Qué es una fracción?

Una **fracción** $\frac{a}{b}$ (con $b \neq 0$) representa cuántas partes de tipo a tomamos de un total dividido en b partes iguales. El número de arriba se llama **numerador** y el de abajo **denominador**.

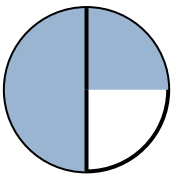
$$\frac{\text{parte que tomamos}}{\text{total de partes iguales}}$$



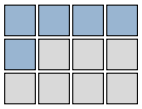
(a) $\frac{1}{4}$



(b) $\frac{5}{7}$



(c) $\frac{3}{4}$ h



(e) $\frac{5}{12}$

Resolución detallada

Solución

Apartado a) Una cuarta parte del combustible. El depósito está dividido en **4 partes iguales** y solo queda **1** de ellas. Por tanto:

$$\boxed{\frac{1}{4}}$$

El numerador (1) indica la parte que queda; el denominador (4) indica en cuántas partes se ha dividido el total.

Apartado b) Trabaja cinco días de la semana. Una semana tiene **7 días** (denominador). Trabaja **5 de esos días** (numerador). Por tanto:

$$\boxed{\frac{5}{7}}$$

Nótese que $\frac{5}{7}$ es ya irreducible, pues $\text{mcd}(5,7) = 1$ (5 y 7 son primos entre sí).

Apartado c) Tres cuartos de hora. Una hora tiene **4 cuartos** (denominador). Ha esperado **3 de esos cuartos** (numerador):

$$\boxed{\frac{3}{4} \text{ de hora}}$$

En minutos: $\frac{3}{4} \times 60 = 45$ minutos, lo que coincide con la expresión cotidiana «tres cuartos de hora».

Apartado d) Ahorra la mitad de su paga semanal. La paga semanal se divide en **2 partes iguales** (denominador) y ahorra **1** de ellas (numerador):

$$\boxed{\frac{1}{2}}$$

Apartado e) En cinco meses del año no ha llovido. Un año tiene **12 meses** (denominador). En **5** de ellos no ha llovido (numerador):

$$\boxed{\frac{5}{12}}$$

Nótese que $\text{mcd}(5,12) = 1$, así que la fracción ya es irreducible.

Observación pedagógica

La clave en este tipo de ejercicios es identificar siempre:

- **El todo**: la cantidad total de partes en que se divide (denominador).
- **La parte**: cuántas de esas partes se toman (numerador).

2 Ejercicio 2 — Ordenar fracciones por reducción a común denominador

Enunciado

Utiliza la reducción a común denominador para ordenar de menor a mayor las siguientes fracciones:

$$\frac{2}{3},\quad \frac{5}{6},\quad \frac{7}{12},\quad \frac{3}{4}$$

Método: reducción al mínimo común denominador

Para comparar fracciones con distintos denominadores, las convertimos en fracciones equivalentes con el **mismo denominador**. Ese denominador común es el **mínimo común múltiplo** (m.c.m.) de todos los denominadores.

Paso 1: Identificar los denominadores.

$$3,\quad 6,\quad 12,\quad 4$$

Paso 2: Calcular el m.c.m.
Descomponemos cada denominador en factores primos:

$$\begin{aligned} 3 &= 3 \\ 6 &= 2 \cdot 3 \\ 12 &= 2^2 \cdot 3 \\ 4 &= 2^2 \end{aligned}$$

El m.c.m. se forma tomando cada factor primo con el **mayor exponente** que aparece:

$$\text{mcm}(3,6,12,4) = 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = \boxed{12}$$

Paso 3: Convertir cada fracción al denominador 12.
Para convertir $\frac{a}{b}$ a denominador 12, multiplicamos numerador y denominador por $\frac{12}{b}$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &= \frac{2\times 4}{3\times 4} = \frac{8}{12} \\ \frac{5}{6} &= \frac{5\times 2}{6\times 2} = \frac{10}{12} \\ \frac{7}{12} &= \frac{7\times 1}{12\times 1} = \frac{7}{12} \\ \frac{3}{4} &= \frac{3\times 3}{4\times 3} = \frac{9}{12} \end{aligned}$$

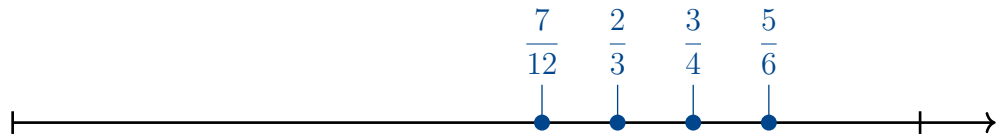
Paso 4: Ordenar los numeradores (el denominador es ya el mismo).

$$7 < 8 < 9 < 10 \implies \frac{7}{12} < \frac{8}{12} < \frac{9}{12} < \frac{10}{12}$$

Paso 5: Reescribir con las fracciones originales.

Solución

$$\boxed{\frac{7}{12} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6}}$$



Recta numérica (escala en doceavos): posición de cada fracción

Observación pedagógica

En la recta numérica, una fracción mayor ocupa una posición más a la derecha. El diagrama confirma visualmente el orden obtenido algebraicamente.

Advertencia – Error frecuente

Un error muy común es intentar ordenar fracciones comparando directamente los numeradores o los denominadores de forma aislada. Esto **no funciona** si los denominadores son distintos. Por ejemplo, $\frac{5}{6} > \frac{7}{12}$ aunque $5 < 7$, porque los denominadores son diferentes. Siempre hay que reducir a común denominador primero.

3 Ejercicio 3 — Fracción irreducible

Enunciado

Calcula en cada caso la fracción irreducible:

a) $\dfrac{18}{54}$

b) $\dfrac{112}{144}$

Concepto previo: Fracción irreducible

Una fracción $\dfrac{a}{b}$ es **irreducible** cuando $\text{mcd}(a, b) = 1$, es decir, cuando numerador y denominador no tienen ningún factor común distinto de 1 (son *coprimos*).

Procedimiento: Dividir numerador y denominador entre su máximo común divisor (m.c.d.).

Cálculo del m.c.d. por descomposición en factores primos

Para encontrar el m.c.d. de dos números, los descomponemos en factores primos y tomamos los factores comunes con el **menor exponente**.

Solución

Apartado a) $\dfrac{18}{54}$ **Descomposición en factores primos:**

$$18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3^2$$
$$54 = 2 \cdot 27 = 2 \cdot 3^3$$

Cálculo del m.c.d.:
Los factores comunes son 2^1 y 3^2 (tomamos el menor exponente de cada factor):

$$\text{mcd}(18, 54) = 2^1 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$$

Simplificación:

$$\frac{18}{54} = \frac{18 \div 18}{54 \div 18} = \frac{1}{3}$$

Verificación: $\text{mcd}(1, 3) = 1$ ✓ (ya es irreducible).

$$\boxed{\frac{18}{54} = \frac{1}{3}}$$

Apartado b) $\dfrac{112}{144}$ **Descomposición en factores primos:**

$$112 = 2 \cdot 56 = 2 \cdot 2 \cdot 28 = 4 \cdot 28 = 4 \cdot 4 \cdot 7 = 2^4 \cdot 7$$
$$144 = 2 \cdot 72 = 2 \cdot 2 \cdot 36 = 4 \cdot 36 = 4 \cdot 4 \cdot 9 = 2^4 \cdot 3^2$$

Comprobación de las descomposiciones:

$$2^4 \cdot 7 = 16 \cdot 7 = 112 \quad ✓$$

$$2^4 \cdot 3^2 = 16 \cdot 9 = 144 \quad ✓$$

Cálculo del m.c.d.:
El único factor común es 2^4 (tomamos el menor exponente de cada factor común):

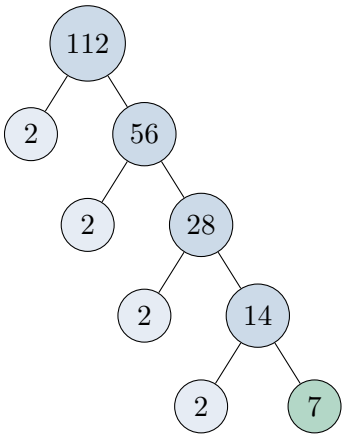
$$\text{mcd}(112, 144) = 2^4 = 16$$

Simplificación:

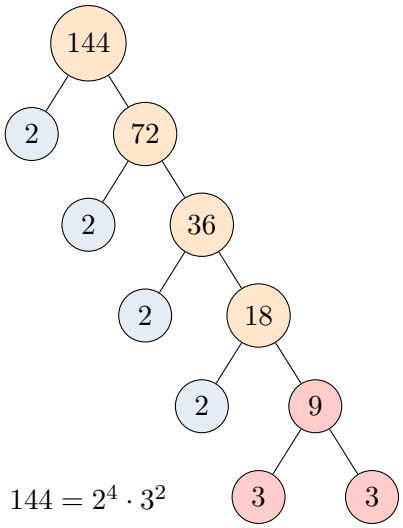
$$\frac{112}{144} = \frac{112 \div 16}{144 \div 16} = \frac{7}{9}$$

Verificación: $\text{mcd}(7, 9) = 1$ ✓ (7 y 9 no tienen factores comunes: $7 = 7$ primo, $9 = 3^2$).

$$\boxed{\frac{112}{144} = \frac{7}{9}}$$



$112 = 2^4 \cdot 7$



$144 = 2^4 \cdot 3^2$

Advertencia – Error frecuente

Al simplificar, se divide **tanto numerador como denominador** entre el m.c.d. Dividir solo uno de ellos cambiaría el valor de la fracción, lo cual sería incorrecto.

4 Ejercicio 4 — Fracciones equivalentes

Enunciado

a) Indica si los siguientes pares de fracciones son equivalentes:

$$\frac{4}{9} \quad y \quad \frac{8}{18} \qquad\qquad \frac{6}{4} \quad y \quad \frac{9}{5}$$

b) Indica cuánto debe valer el término que falta para que las parejas de fracciones sean equivalentes:

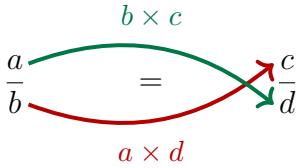
$$\frac{x}{8} \quad y \quad \frac{5}{20}$$

Concepto previo: Fracciones equivalentes

Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son **equivalentes** si representan la misma cantidad. El criterio algebraico es:

$$\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d} \iff a \cdot d = b \cdot c$$

Es decir, el producto en «aspa» (o «cruz») de los términos extremos e internos debe ser igual. Este resultado se conoce como la **propiedad fundamental de las proporciones**.



Si $a \times d = b \times c \Rightarrow$ son equivalentes

Solución

Apartado a) — Primer par: $\frac{4}{9}$ y $\frac{8}{18}$ Aplicamos la propiedad fundamental. Calculamos los productos en cruz:

$$\begin{aligned} \text{Producto 1:} \quad & 4 \times 18 = 72 \\ \text{Producto 2:} \quad & 9 \times 8 = 72 \end{aligned}$$

Como $4 \times 18 = 9 \times 8 = 72$, las fracciones **sí son equivalentes**.

$$\boxed{\frac{4}{9} \equiv \frac{8}{18}} \quad \checkmark$$

Verificación alternativa: Simplificamos $\frac{8}{18}$ dividiendo numerador y denominador entre 2:

$$\frac{8}{18} = \frac{8 \div 2}{18 \div 2} = \frac{4}{9} \quad \checkmark$$

Obtenemos exactamente $\frac{4}{9}$, confirmando la equivalencia.

Apartado a) — Segundo par: $\frac{6}{4}$ y $\frac{9}{5}$ Calculamos los productos en cruz:

$$\begin{aligned} \text{Producto 1:} \quad & 6 \times 5 = 30 \\ \text{Producto 2:} \quad & 4 \times 9 = 36 \end{aligned}$$

Como $30 \neq 36$, las fracciones **no son equivalentes**.

$$\boxed{\frac{6}{4} \not\equiv \frac{9}{5}} \quad \times$$

Nota: $\frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ mientras que $\frac{9}{5} = 1{,}8$. Distintos valores decimales confirman que no son equivalentes.

Apartado b) — Encontrar el valor de x en $\frac{x}{8} \equiv \frac{5}{20}$ Aplicamos la propiedad fundamental:

$$\frac{x}{8} = \frac{5}{20} \implies x \cdot 20 = 8 \cdot 5$$

Calculamos el lado derecho:

$$x \cdot 20 = 40$$

Despejamos x dividiendo ambos miembros entre 20:

$$x = \frac{40}{20} = 2$$

Verificación:

$$\frac{2}{8} = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \quad \checkmark$$

$$\boxed{x = 2}$$

Observación pedagógica

Para hallar un término desconocido en una proporción, la estrategia es siempre la misma:

1. Plantear la igualdad de productos en cruz.
2. Calcular el producto conocido.
3. Dividir entre el coeficiente que acompaña a la incógnita.

Este procedimiento es el fundamento de la *regla de tres*, que se estudiará con más profundidad en cursos posteriores.

5 Ejercicio 5 — Operaciones combinadas con fracciones

Enunciado

Realiza las siguientes operaciones combinadas con fracciones y simplifica el resultado. Recuerda que es conveniente simplificar también en los pasos intermedios.

$$a)\quad 2-\left[\frac{4}{3}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{3}\right]$$

$$b)\quad \frac{1}{7}\div\left(\frac{2}{4}\cdot\left(\frac{-5}{21}\right)\right)$$

$$c)\quad \left[\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{5}\right)\cdot 5-\frac{1}{10}\right]\cdot\frac{3}{4}-\frac{6}{5}$$

$$d)\quad \left(\frac{3}{4}-\frac{1}{5}\right)\div\frac{11}{8}$$

Reglas de prioridad de operaciones

Orden de operaciones (PEMDAS/BODMAS)

1. **Paréntesis** (del más interno al más externo): () → [] → {}
2. **Potencias y raíces**
3. **Multiplicaciones y divisiones** (de izquierda a derecha)
4. **Sumas y restas** (de izquierda a derecha)

Reglas de operaciones con fracciones:

Suma/Resta: $\dfrac{a}{b}\pm\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\cdot d\pm c\cdot b}{b\cdot d}$ (reduciendo a m.c.d.)

Multiplicación: $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\cdot c}{b\cdot d}$

División: $\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}=\dfrac{a\cdot d}{b\cdot c}$

Solución

Apartado a)

$$2 - \left[\frac{4}{3} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{3}\right]$$

Paso 1: Resolver el paréntesis interior $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)$.

Buscamos el m.c.m. de 2 y 5: como $\text{mcd}(2,5) = 1$, el m.c.m. es $2 \times 5 = 10$.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1 \times 5}{10} + \frac{1 \times 2}{10} = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} = \frac{7}{10}$$

Paso 2: Resolver el corchete $\left[\frac{4}{3} - \frac{7}{10} - \frac{1}{3}\right]$.

Primero agrupamos los términos con denominador 3:

$$\frac{4}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4-1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

Ahora:

$$1 - \frac{7}{10} = \frac{10}{10} - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$$

Paso 3: Operación exterior.

$$2 - \frac{3}{10} = \frac{20}{10} - \frac{3}{10} = \frac{17}{10}$$

Como $\text{mcd}(17,10) = 1$ (17 es primo), la fracción es irreducible.

$$\boxed{a) \quad \frac{17}{10} = 1\frac{7}{10}}$$

Apartado b)

$$\frac{1}{7} \div \left(\frac{2}{4} \cdot \frac{-5}{21}\right)$$

Paso 1: Simplificar $\frac{2}{4}$ **antes de operar.**

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Paso 2: Resolver el paréntesis $\frac{1}{2} \cdot \frac{-5}{21}$.

Multiplicamos numeradores y denominadores:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{-5}{21} = \frac{1 \times (-5)}{2 \times 21} = \frac{-5}{42}$$

Comprobamos si se puede simplificar: $\text{mcd}(5,42) = 1$ (5 es primo y no divide a 42). Queda $\frac{-5}{42}$.

Paso 3: Dividir $\frac{1}{7} \div \frac{-5}{42}$.

Dividir por una fracción equivale a multiplicar por su inversa:

$$\frac{1}{7} \div \frac{-5}{42} = \frac{1}{7} \times \frac{42}{-5} = \frac{1 \times 42}{7 \times (-5)} = \frac{42}{-35}$$

Simplificamos: $\text{mcd}(42,35)$.

Advertencia – Error frecuente

Errores frecuentes en operaciones combinadas:

- **Olvidar el orden de operaciones:** hay que resolver siempre primero los paréntesis más internos.
- **Al dividir fracciones:** multiplicar por la inversa de la segunda fracción, *no* de la primera.
- **Al restar con signo negativo:** el signo $-$ delante de un corchete cambia el signo de *todos* los términos del interior.
- **Simplificación incorrecta:** solo se pueden cancelar factores comunes, no sumandos.

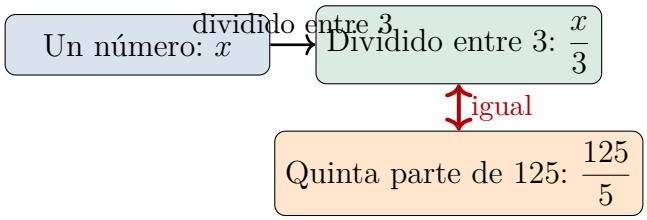
6 Ejercicio 6 — Problema: encontrar el número

Enunciado

Un número dividido entre 3 es igual a la quinta parte de 125. ¿Cuál es ese número?

Estrategia de resolución

Este ejercicio requiere **traducir el enunciado verbal a lenguaje algebraico** y luego resolver la ecuación resultante.



Solución

Paso 1: Definir la incógnita.
Sea x el número buscado.
Paso 2: Traducir al lenguaje algebraico.
«Un número dividido entre 3» $\longrightarrow \dfrac{x}{3}$
«la quinta parte de 125» $\longrightarrow \dfrac{125}{5}$
«es igual a» $\longrightarrow =$
Ecuación:

$$\frac{x}{3} = \frac{125}{5}$$

Paso 3: Simplificar el lado derecho.

$$\frac{125}{5} = 25$$

(125 dividido entre 5 es 25, ya que $5 \times 25 = 125$.)
La ecuación queda:

$$\frac{x}{3} = 25$$

Paso 4: Despejar x.
Multiplicamos ambos miembros de la igualdad por 3:

$$x = 25 \times 3 = 75$$

Paso 5: Verificación.

$$\frac{75}{3} = 25 \quad \text{y} \quad \frac{125}{5} = 25 \quad \checkmark$$

$$\boxed{x = 75}$$

Conclusión

El número buscado es **75**. Dividido entre 3 da 25, que coincide exactamente con la quinta parte de 125.

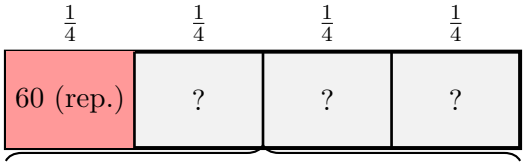
Observación pedagógica

Método alternativo sin álgebra: podemos razonar directamente. La quinta parte de 125 es $125 \div 5 = 25$. Ahora buscamos qué número dividido entre 3 da 25, es decir, $25 \times 3 = 75$.

7 Ejercicio 7 — Problema: cromos de María

Enunciado

Los 60 cromos que María tiene repetidos son una cuarta parte del total. ¿Cuántos cromos tiene no repetidos?



Solución

Paso 1: Calcular el total de cromos.
«60 cromos son una cuarta parte del total» significa:

$$60 = \frac{1}{4} \times \text{Total}$$

Despejando el total:

$$\text{Total} = 60 \times 4 = 240 \text{ cromos}$$

Paso 2: Calcular los cromos no repetidos.
Los cromos no repetidos son la diferencia entre el total y los repetidos:

$$\text{No repetidos} = \text{Total} - \text{Repetidos} = 240 - 60 = 180$$

Verificación:

$$\frac{60}{240} = \frac{1}{4} \quad \checkmark \quad \text{(los repetidos son efectivamente la cuarta parte del total)}$$

$$\boxed{\text{María tiene 180 cromos no repetidos}}$$

Observación pedagógica

Podemos expresar la fracción de cromos no repetidos respecto al total:

$$\frac{180}{240} = \frac{3}{4}$$

Es decir, los cromos no repetidos constituyen **tres cuartas partes** del total, lo cual tiene mucho sentido: si $\frac{1}{4}$ son repetidos, entonces $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ son no repetidos.

8 Ejercicio 8 — Problema: el dinero de Sergio

Enunciado

Sergio ha gastado dos tercios de su dinero en un pantalón y un quinto de lo que le quedaba en un cinturón. ¿Qué fracción de dinero le queda? ¿Cuánto dinero le queda si inicialmente disponía de 300 euros?

Análisis del enunciado

Este es un problema en cadena: primero Sergio gasta una fracción del total, y luego gasta una fracción de lo que *le quedaba*, no del total original. Este matiz es fundamental y fuente de errores frecuentes.



Solución

Paso 1: Fracción gastada en el pantalón.

Sergio gasta $\frac{2}{3}$ del dinero total en el pantalón.
Fracción que queda tras comprar el pantalón:

$$1 - \frac{2}{3} = \frac{3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Paso 2: Fracción gastada en el cinturón.

Gasta un quinto **de lo que le quedaba**, es decir, un quinto de $\frac{1}{3}$:

$$\frac{1}{5} \text{ de } \frac{1}{3} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

Paso 3: Fracción total gastada.

$$\text{Total gastado} = \frac{2}{3} + \frac{1}{15}$$

Reducimos a común denominador (m.c.m.(3,15) = 15):

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{15} = \frac{10}{15} + \frac{1}{15} = \frac{11}{15}$$

Paso 4: Fracción que le queda.

$$1 - \frac{11}{15} = \frac{15}{15} - \frac{11}{15} = \frac{4}{15}$$

Verificación alternativa: Tras el pantalón queda $\frac{1}{3}$. De ese $\frac{1}{3}$, gasta $\frac{1}{5}$, por lo que conserva $\frac{4}{5}$ de $\frac{1}{3}$:

$$\frac{4}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{15} \quad \checkmark$$

$$\boxed{\text{Fracción que le queda: } \frac{4}{15}}$$

Paso 5: Calcular el dinero restante con 300 euros iniciales.

$$\text{Dinero restante} = \frac{4}{15} \times 300 = \frac{4 \times 300}{15} = \frac{1200}{15} = 80 \text{ euros}$$

Verificación con cantidades concretas (300 euros):

$$\text{Gasto en pantalón} = \frac{2}{3} \times 300 = 200 \text{ euros}$$
$$\text{Resta tras pantalón} = 300 - 200 = 100 \text{ euros}$$
$$\text{Gasto en cinturón} = \frac{1}{5} \times 100 = 20 \text{ euros}$$
$$\text{Resta final} = 100 - 20 = 80 \text{ euros} \quad \checkmark$$

$$\boxed{\text{A Sergio le quedan 80 euros}}$$

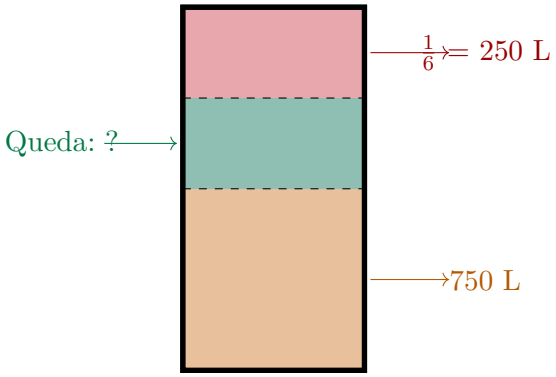
Advertencia – Error frecuente

El error más habitual en este tipo de problema es calcular el gasto en el cinturón como $\frac{1}{5}$ del dinero *total*, en lugar de $\frac{1}{5}$ de lo que *quedaba*. El enunciado dice explícitamente «un quinto de lo que le quedaba», lo cual hace que el cálculo sea encadenado, no independiente.

9 Ejercicio 9 — Problema: el depósito de agua

Enunciado

De un depósito de 1500 litros se saca un sexto del depósito y 750 litros más. ¿Qué fracción del total queda en el depósito? La fracción del resultado debe estar simplificada.



Depósito: 1500 L

Solución

Datos del problema:

- Capacidad total del depósito: $T = 1500$ litros.
- Se saca: un sexto del total + 750 litros.

Paso 1: Calcular la cantidad extraída.
Un sexto del depósito:

$$\frac{1}{6} \times 1500 = \frac{1500}{6} = 250 \text{ litros}$$

Total extraído:

$$250 + 750 = 1000 \text{ litros}$$

Paso 2: Calcular lo que queda.

$$\text{Queda} = 1500 - 1000 = 500 \text{ litros}$$

Paso 3: Expresar como fracción del total.

$$\text{Fracción que queda} = \frac{500}{1500}$$

Paso 4: Simplificar.

$$\text{mcd}(500, 1500) :$$

$$500 = 2^2 \cdot 5^3$$
$$1500 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3$$

$$\text{mcd}(500, 1500) = 2^2 \cdot 5^3 = 4 \cdot 125 = 500$$

$$\frac{500}{1500} = \frac{500 \div 500}{1500 \div 500} = \frac{1}{3}$$

Verificación:

$$\frac{1}{3} \times 1500 = 500 \text{ L} \quad \text{y} \quad 1500 - 1000 = 500 \text{ L} \quad \checkmark$$

$$\boxed{\text{En el depósito queda } \frac{1}{3} \text{ del total (500 litros)}}$$

Conclusión

Se ha extraído $\frac{2}{3}$ del depósito en total (un sexto + la mitad). Queda exactamente un tercio: 500 litros. La fracción simplificada es $\frac{1}{3}$.

Observación pedagógica

Comprobación de la extracción total en fracciones:

$$\frac{1}{6} + \frac{750}{1500} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

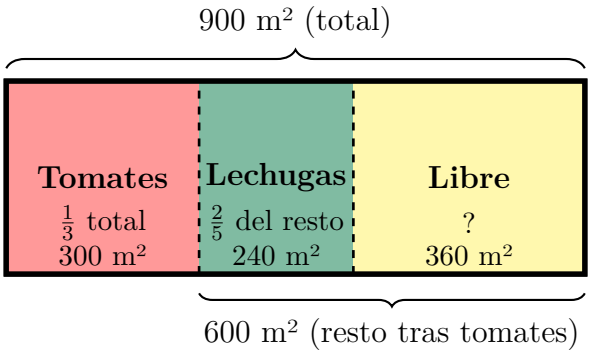
Y efectivamente $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ queda en el depósito.

10 Ejercicio 10 — Problema: la huerta del abuelo

Enunciado

Mi abuelo tiene una huerta de 900 metros cuadrados de superficie. Este año ha plantado la tercera parte con tomates y las dos quintas partes del resto con lechugas. ¿Qué superficie de la huerta queda libre?

Diagrama de la huerta



Solución

Datos del problema:

- Superficie total de la huerta: $T = 900$ m².
- Plantado con tomates: $\frac{1}{3}$ del total.
- Plantado con lechugas: $\frac{2}{5}$ **del resto** (no del total).

Paso 1: Superficie con tomates.

$$S_{\text{tomates}} = \frac{1}{3} \times 900 = 300 \text{ m}^2$$

Paso 2: Superficie restante tras plantar tomates.

$$S_{\text{resto}} = 900 - 300 = 600 \text{ m}^2$$

Como fracción del total: $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, luego el resto es $\frac{2}{3} \times 900 = 600$ m². ✓

Paso 3: Superficie con lechugas.

Las lechugas ocupan $\frac{2}{5}$ del resto (600 m²):

$$S_{\text{lechugas}} = \frac{2}{5} \times 600 = \frac{2 \times 600}{5} = \frac{1200}{5} = 240 \text{ m}^2$$

Paso 4: Superficie libre.

$$S_{\text{libre}} = 900 - S_{\text{tomates}} - S_{\text{lechugas}} = 900 - 300 - 240 = 360 \text{ m}^2$$

Expresar como fracción del total:

$$\frac{S_{\text{libre}}}{T} = \frac{360}{900}$$

Simplificamos: $\text{mcd}(360, 900)$.

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$
$$900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

$\text{mcd}(360, 900) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 4 \cdot 9 \cdot 5 = 180$.

$$\frac{360}{900} = \frac{360 \div 180}{900 \div 180} = \frac{2}{5}$$

Verificación global:

$$\text{Tomates} = \frac{1}{3} = \frac{3}{9} \approx 33{,}3\,\%$$
$$\text{Lechugas} = \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{15} \approx 26{,}7\,\%$$
$$\text{Libre} = \frac{2}{5} \approx 40\,\%$$
$$\text{Total} = \frac{1}{3} + \frac{4}{15} + \frac{2}{5} = \frac{5}{15} + \frac{4}{15} + \frac{6}{15} = \frac{15}{15} = 1 \quad ✓$$

$$\boxed{S_{\text{libre}} = 360 \text{ m}^2 = \frac{2}{5} \text{ de la huerta total}}$$

Advertencia – Error frecuente

El error más común en este problema es calcular las lechugas como $\frac{2}{5}$ de los 900 m² totales, en lugar de $\frac{2}{5}$ de los 600 m² restantes. El enunciado dice «dos quintas partes *del resto*», lo que obliga a un cálculo en cadena.

Conclusión

Resumen del ejercicio 10:

Zona	**Metros cuadrados**	**Fracción del total**
Tomates	300 m²	$\frac{1}{3}$
Lechugas	240 m²	$\frac{4}{15}$
Libre	360 m²	$\frac{2}{5}$
Total	**900 m²**	**1**

Resumen de resultados

Ejercicio	Concepto	Resultado
1a	Fracción de situación	$\frac{1}{4}$
1b	Fracción de situación	$\frac{5}{7}$
1c	Fracción de situación	$\frac{3}{4}$
1d	Fracción de situación	$\frac{1}{2}$
1e	Fracción de situación	$\frac{5}{12}$
2	Ordenación	$\frac{7}{12} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6}$
3a	Irreducible	$\frac{1}{3}$
3b	Irreducible	$\frac{7}{9}$
4a	Equivalentes	$\frac{4}{9} \equiv \frac{8}{18}$ (sí); $\frac{6}{4} \not\equiv \frac{9}{5}$ (no)
4b	Término desconocido	$x = 2$
5a	Operaciones combinadas	$\frac{17}{10}$
5b	Operaciones combinadas	$-\frac{6}{5}$
5c	Operaciones combinadas	$\frac{18}{5}$
5d	Operaciones combinadas	$\frac{2}{5}$
6	Problema numérico	$x = 75$
7	Problema de cromos	180 cromos no repetidos
8	Problema del dinero	$\frac{4}{15}$ del total; 80 euros
9	Problema del depósito	$\frac{1}{3}$ (500 litros)
10	Problema de la huerta	360 m² libres ($\frac{2}{5}$ del total)

Consejos finales para el examen

- **Lee el enunciado dos veces** antes de empezar a resolver.
- **Simplifica siempre** que puedas, también en pasos intermedios.
- En problemas con cadena (gastó de lo que quedaba, plantó del resto...), identifica el **nuevo todo** en cada etapa.
- **Verifica** el resultado sustituyendo en el enunciado o usando el total.
- Recuerda: dividir por una fracción = multiplicar por su inversa.
- El m.c.d. sirve para simplificar; el m.c.m. sirve para sumar/restar y ordenar.

Junta de Castilla y León
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA

EXAMEN DE MATEMÁTICAS

2ºB ESO Fracciones
2/12/2024

ies Tovar Antonio Centro bilingüe

Nº1.-Escribe, en cada caso, la fracción del todo que corresponde a la parte indicada:

a) ¿Qué fracción de hora son 20 minutos?

b) ¿Qué fracción de semana son cinco días?

Nº2.-Transforma cada una de estas fracciones en número decimal:

$$a)\ \frac{65}{100} \qquad b)\ \frac{7}{8}$$

Nº3.-Halla la fracción irreducible de cada una de estas fracciones:

$$a)\ \frac{100}{120} \qquad b)\ \frac{36}{54}$$

Nº4.-Ordena de menor a mayor las siguientes fracciones reduciéndolas previamente a común denominador:

$$\frac{2}{3},\ \frac{5}{9},\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{6}$$

Nº5.-Resuelve las siguientes operaciones con fracciones:

a) $\left(\frac{7}{5}-\frac{1}{2}\right):\left(1-\frac{3}{10}\right)$

b) $\frac{5}{8}:\left[\frac{17}{4}-3\cdot\left(2-\frac{2}{3}\right)\right]$

Nº6.- a) De un depósito que contenía 500 litros, se han sacado los ¾ de su capacidad. ¿Cuántos litros quedan en el depósito?

b) Andrea tiene 12 años, que son los 2/7 de la edad de su padre. ¿Cuál es la edad de su padre?

Nº7.- Un comerciante vendió las tres cuartas partes de un cargamento de naranjas a un frutero. Después vendió dos terceras partes del resto a un supermercado y aún le quedaron 50 kg de naranjas. ¿Cuál era el peso inicial del cargamento?

Nº8.- De un depósito lleno de agua se sacan, primero, dos tercios de su contenido y, después, un quinto de lo que quedaba, sobrando aún 20 litros.

a) ¿Qué fracción del total del depósito se ha extraído? ¿Cuántos litros se han sacado?

b) ¿Qué fracción del depósito queda?

Nº9.- María se come las dos quintas partes de un paquete de galletas y su hermano las dieciocho galletas restantes. ¿Cuántas galletas tenía el paquete?

Nº10.- Alberto tiene repetidos 80 cromos de una colección. Le regala la mitad a su amiga Rebeca y a su hermano Pedro la cuarta parte de los que le quedaban. ¿Con cuántos cromos se queda Alberto al final? ¿Qué fracción de los cromos que tenía ha regalado?

Criterios de evaluación: 1.1 - 1.3 - 2.2 - 3.1 - 3.3 - 4.1 - 5.2 - 6.1 - 6.2 - 7.2 - 8.1 - 9.2 - 10.1

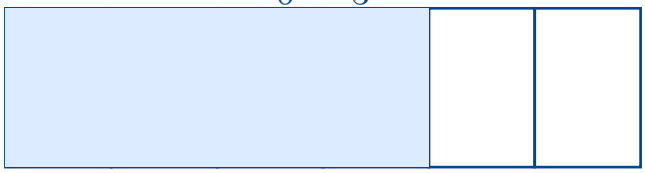
SUERTE JÓVENES

EXAMEN DE MATEMÁTICAS

2.º B ESO — Fracciones

Resolución completa y pedagógica

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$



Fracción: parte de un todo

Centro:	IES Tovar (Castilla y León)
Asignatura:	Matemáticas
Nivel:	2.º B de ESO
Tema:	Fracciones
Fecha del examen:	2 de diciembre de 2024
Resolución elaborada:	2025

Descripción del documento

Este documento presenta la **resolución completa y exhaustiva** de todos los ejercicios del examen de Fracciones de 2.º B de ESO, con rigor matemático, justificación de cada paso algebraico, representaciones gráficas ilustrativas y observaciones pedagógicas profundas. Está pensado para que el alumno comprenda *en profundidad* cada concepto y técnica empleada.

Índice general

1. Conceptos previos: ¿Qué es una fracción? 2

2. Resolución completa del examen 4

2.1. Ejercicio 1 — Fracciones de una cantidad 4
2.2. Ejercicio 2 — Fracciones a decimales 7
2.3. Ejercicio 3 — Fracción irreducible 9
2.4. Ejercicio 4 — Ordenar fracciones 11
2.5. Ejercicio 5 — Operaciones con fracciones 14
2.6. Ejercicio 6 — Problemas de fracción de una cantidad 17
2.7. Ejercicio 7 — El cargamento de naranjas 19
2.8. Ejercicio 8 — El depósito de agua 21
2.9. Ejercicio 9 — Las galletas de María 24
2.10. Ejercicio 10 — Los cromos de Alberto 26

3. Síntesis y tabla de resultados 28

Capítulo 1

Conceptos previos: ¿Qué es una fracción?

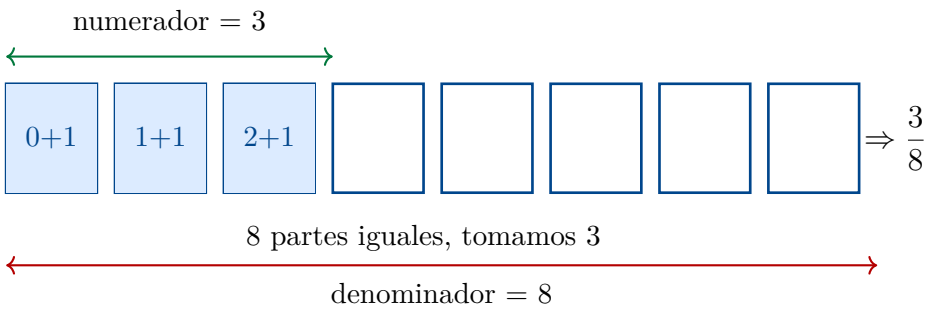
Antes de resolver los ejercicios, conviene recordar con precisión los conceptos fundamentales que se utilizarán a lo largo de todo el examen.

Definición: Fracción

Una **fracción** es una expresión de la forma $\frac{a}{b}$, donde $a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$. Al número a se le llama **numerador** y al número b se le llama **denominador**.

Una fracción representa la división de un todo en b partes iguales, de las cuales tomamos a.

Representación gráfica de una fracción



Conceptos clave

Fracciones equivalentes

Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son **equivalentes** si y solo si $a \cdot d = b \cdot c$. Es decir, representan la misma cantidad aunque tengan distinta forma.

Fracción irreducible

Una fracción $\frac{a}{b}$ es **irreducible** cuando el máximo común divisor de a y b es 1: $\text{mcd}(a, b) = 1$. Para obtenerla se divide numerador y denominador por $\text{mcd}(a, b)$.

Reducción a común denominador

Para sumar, restar u ordenar fracciones con distintos denominadores, se calcula el **mínimo común múltiplo** (mcm) de los denominadores y se amplifica cada fracción convenientemente.

Capítulo 2

Resolución completa del examen

2.1 Ejercicio 1 — Fracciones de una cantidad

Enunciado del Ejercicio 1

Escribe, en cada caso, la fracción del todo que corresponde a la parte indicada:

a) ¿Qué fracción de hora son 20 minutos?

b) ¿Qué fracción de semana son cinco días?

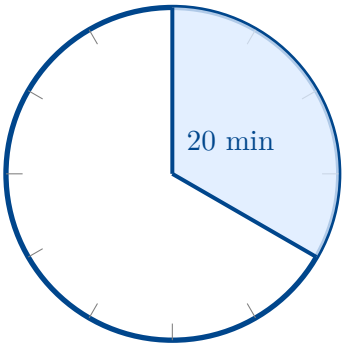
Marco teórico

Para expresar una parte como fracción del todo, se utiliza la fórmula:

$$\text{fracción} = \frac{\text{parte}}{\text{todo}} \quad \text{(ambas cantidades expresadas en la misma unidad)}$$

El criterio fundamental es que **numerador y denominador estén en las mismas unidades**.

Representación gráfica



1 hora = 60 minutos

$\Rightarrow 20 \text{ min} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ de hora



7 días en total, 5 coloreados

$\Rightarrow \frac{5}{7}$ de semana

Solución

Apartado a) ¿Qué fracción de hora son 20 minutos?

Paso 1: Identificar el todo y la parte en la misma unidad.
El *todo* es 1 hora. Debemos expresar 1 hora en minutos para trabajar con la misma unidad:

$$1 \text{ hora} = 60 \text{ minutos}$$

La *parte* es 20 minutos.

Paso 2: Formar la fracción.

$$\frac{\text{parte}}{\text{todo}} = \frac{20 \text{ minutos}}{60 \text{ minutos}} = \frac{20}{60}$$

Paso 3: Simplificar la fracción.
Calculamos el $\text{mcd}(20, 60)$.
Descomponemos en factores primos:

$$20 = 2^2 \cdot 5, \qquad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\text{mcd}(20, 60) = 2^2 \cdot 5 = 20$$

Dividimos numerador y denominador por 20:

$$\frac{20}{60} = \frac{20 \div 20}{60 \div 20} = \frac{1}{3}$$

Resultado: 20 minutos son $\frac{1}{3}$ de hora. ✓

Apartado b) ¿Qué fracción de semana son cinco días?

Paso 1: Identificar el todo y la parte.
El *todo* es 1 semana. Expresamos en días:

$$1 \text{ semana} = 7 \text{ días}$$

La *parte* es 5 días.

Paso 2: Formar la fracción.

$$\frac{\text{parte}}{\text{todo}} = \frac{5 \text{ días}}{7 \text{ días}} = \frac{5}{7}$$

Paso 3: Comprobar si es irreducible.
$\text{mcd}(5, 7) = 1$ porque 5 y 7 son ambos números primos entre sí (de hecho, primos en sentido absoluto). Por tanto, la fracción ya está en su forma irreducible.

Resultado: Cinco días son $\frac{5}{7}$ de semana. ✓

Observación importante

Es imprescindible que la parte y el todo estén expresados en la **misma unidad de medida** antes de construir la fracción. Si el enunciado dijera, por ejemplo, «¿qué fracción de un día son 3 horas?», tendríamos que convertir: 1 día = 24 horas, y la respuesta sería $\frac{3}{24} = \frac{1}{8}$.

2.2 Ejercicio 2 — Fracciones a decimales

Enunciado del Ejercicio 2

Transforma cada una de estas fracciones en número decimal:

$$\text{a) } \frac{65}{100} \qquad \text{b) } \frac{7}{8}$$

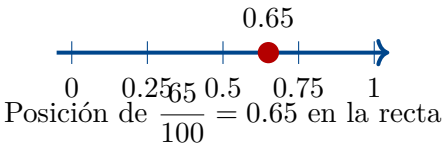
Marco teórico

Método: fracción a decimal

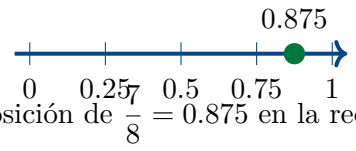
Para convertir una fracción $\frac{a}{b}$ a decimal, se efectúa la división $a \div b$. Si el denominador es una potencia de 10 (10, 100, 1000,...), se puede leer directamente. La división puede dar:

- **Decimal exacto**: el cociente termina (resto cero).
- **Decimal periódico**: el cociente no termina pero se repiten dígitos.

Representación gráfica



Posición de $\frac{65}{100} = 0.65$ en la recta



Posición de $\frac{7}{8} = 0.875$ en la recta

Solución

Apartado a) $\frac{65}{100}$

Método: denominador potencia de 10 (lectura directa).
Cuando el denominador es 10^n (en este caso $100 = 10^2$), la fracción se lee directamente como decimal con n cifras decimales:

$$\frac{65}{100} = 0{,}65$$

El numerador 65 se convierte en el decimal con 2 cifras después de la coma.

Verificación por división:

$$65 \div 100 = 0{,}65 \quad \text{(se desplaza la coma 2 posiciones a la izquierda)}$$

Resultado: $\frac{65}{100} = 0{,}65$ ✓

Apartado b) $\dfrac{7}{8}$

Método: división larga.
El denominador 8 no es potencia de 10, así que realizamos la división $7 \div 8$:

Proceso de la división:

7,000	8
0	0,875
70	
64	
60	
56	
40	
40	
0	

Detallamos paso a paso:

1. $7 < 8$, por tanto el cociente empieza con 0,...
2. $70 \div 8 = 8$ (pues $8 \times 8 = 64$). Resto: $70 - 64 = 6$.
3. $60 \div 8 = 7$ (pues $8 \times 7 = 56$). Resto: $60 - 56 = 4$.
4. $40 \div 8 = 5$ (pues $8 \times 5 = 40$). Resto: $40 - 40 = 0$.

El resto es 0, de modo que la división es **exacta**:

$$\frac{7}{8} = 0{,}875$$

Comprobación: $0{,}875 \times 8 = 7$ ✓

Resultado: $\dfrac{7}{8} = 0{,}875$ ✓

Observación importante

El denominador $8 = 2^3$. En general, una fracción es decimal exacto si y solo si su denominador (en forma irreducible) solo tiene como factores primos el 2 y/o el 5. Como $8 = 2^3$, la fracción $\frac{7}{8}$ efectivamente es decimal exacto.

2.3 Ejercicio 3 — Fracción irreducible

Enunciado del Ejercicio 3

Halla la fracción irreducible de cada una de estas fracciones:

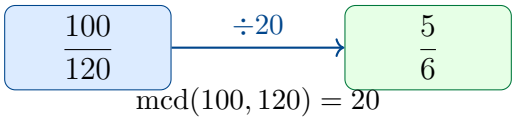
$$\text{a) } \frac{100}{120} \qquad \text{b) } \frac{36}{54}$$

Marco teórico

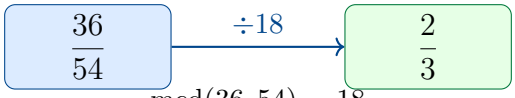
Algoritmo para hallar la fracción irreducible

1. Calcular $d = \text{mcd}(\text{numerador}, \text{denominador})$ mediante descomposición en factores primos.
2. Dividir numerador y denominador entre d.
3. La fracción resultante es irreducible (ya que su mcd es 1).

Representación gráfica



$\text{mcd}(100, 120) = 20$



$\text{mcd}(36, 54) = 18$

Solución

Apartado a) $\dfrac{100}{120}$

Paso 1: Descomponer en factores primos.

$$100 = 2^2 \cdot 5^2 = 4 \cdot 25$$
$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 8 \cdot 15$$

Verificación de la descomposición:

$$2^2 \cdot 5^2 = 4 \cdot 25 = 100 \quad \checkmark$$

$$2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 8 \cdot 15 = 120 \quad \checkmark$$

Paso 2: Calcular el mcd.

El mcd se forma tomando los factores primos *comunes* con el *menor* exponente:

$$\text{mcd}(100, 120) = 2^{\text{mín}(2,3)} \cdot 5^{\text{mín}(2,1)} = 2^2 \cdot 5^1 = 4 \cdot 5 = 20$$

Paso 3: Simplificar.

$$\frac{100}{120} = \frac{100 \div 20}{120 \div 20} = \frac{5}{6}$$

Comprobación de irreducibilidad:

$$\text{mcd}(5, 6) = 1 \quad (5 \text{ es primo, } 6 = 2 \cdot 3, \text{ no tienen factores comunes}) \quad \checkmark$$

Resultado: $\frac{100}{120} = \frac{5}{6}$ ✓

Apartado b) $\frac{36}{54}$

Paso 1: Descomponer en factores primos.

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9$$
$$54 = 2 \cdot 3^3 = 2 \cdot 27$$

Verificación:

$$2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36 \quad \checkmark \qquad 2 \cdot 3^3 = 2 \cdot 27 = 54 \quad \checkmark$$

Paso 2: Calcular el mcd.

$$\text{mcd}(36, 54) = 2^{\text{mín}(2,1)} \cdot 3^{\text{mín}(2,3)} = 2^1 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$$

Paso 3: Simplificar.

$$\frac{36}{54} = \frac{36 \div 18}{54 \div 18} = \frac{2}{3}$$

Comprobación de irreducibilidad:

$$\text{mcd}(2, 3) = 1 \quad (2 \text{ y } 3 \text{ son ambos primos y distintos}) \quad \checkmark$$

Resultado: $\frac{36}{54} = \frac{2}{3}$ ✓

Observación importante

En el apartado b), tanto 36 como 54 son múltiplos de 18. Existe una forma alternativa: dividir sucesivamente por factores comunes sin calcular el mcd de una vez:

$$\frac{36}{54} \xrightarrow{\div 2} \frac{18}{27} \xrightarrow{\div 9} \frac{2}{3}$$

Ambos caminos son correctos. El método de factorización es más sistemático.

2.4 Ejercicio 4 — Ordenar fracciones

Enunciado del Ejercicio 4

Ordena de menor a mayor las siguientes fracciones reduciéndolas previamente a común denominador:

$$\frac{2}{3},\quad \frac{5}{9},\quad \frac{3}{4},\quad \frac{2}{6}$$

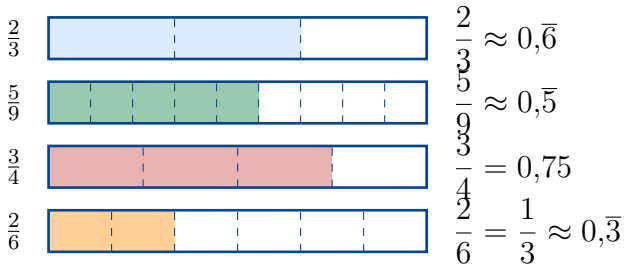
Marco teórico

Método: reducción a común denominador

Para comparar fracciones con distintos denominadores:

1. Calcular el mcm de todos los denominadores.
2. Amplificar cada fracción para que tenga ese denominador común.
3. Comparar los numeradores (a mayor numerador, mayor fracción).

Representación gráfica



Solución

Las fracciones a ordenar son: $\frac{2}{3},\ \frac{5}{9},\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{6}$.
Los denominadores son: $3, 9, 4, 6$.

Paso 1: Calcular el mcm de los denominadores.
Descomponemos en factores primos cada denominador:

$$3 = 3$$
$$9 = 3^2$$
$$4 = 2^2$$
$$6 = 2 \cdot 3$$

El mcm se forma tomando cada factor primo con el *mayor* exponente que aparece:

$$\text{mcm}(3, 9, 4, 6) = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$$

Paso 2: Amplificar cada fracción al denominador 36.

Para cada fracción, calculamos el factor de amplificación (= 36÷ denominador original) y multiplicamos numerador y denominador por él:

Fracción $\frac{2}{3}$: factor $= 36 \div 3 = 12$

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 12}{3 \times 12} = \frac{24}{36}$$

Fracción $\frac{5}{9}$: factor $= 36 \div 9 = 4$

$$\frac{5}{9} = \frac{5 \times 4}{9 \times 4} = \frac{20}{36}$$

Fracción $\frac{3}{4}$: factor $= 36 \div 4 = 9$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 9}{4 \times 9} = \frac{27}{36}$$

Fracción $\frac{2}{6}$: factor $= 36 \div 6 = 6$

$$\frac{2}{6} = \frac{2 \times 6}{6 \times 6} = \frac{12}{36}$$

Paso 3: Comparar los numeradores.
Con denominador común 36:

$$\frac{12}{36}, \quad \frac{20}{36}, \quad \frac{24}{36}, \quad \frac{27}{36}$$

Ordenamos los numeradores de menor a mayor:

$$12 < 20 < 24 < 27$$

Paso 4: Traducir al orden de las fracciones originales.

$$\frac{2}{6} < \frac{5}{9} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$$

Verificación con decimales:

$$\frac{2}{6} = 0{,}\overline{3} \approx 0{,}333$$
$$\frac{5}{9} = 0{,}\overline{5} \approx 0{,}556$$
$$\frac{2}{3} = 0{,}\overline{6} \approx 0{,}667$$
$$\frac{3}{4} = 0{,}75$$

Efectivamente: $0{,}333 < 0{,}556 < 0{,}667 < 0{,}75$ ✓

Resultado:

$$\boxed{\frac{2}{6} < \frac{5}{9} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}}$$

Error frecuente

Un error frecuente es comparar fracciones mirando solo el numerador o solo el denominador. Por ejemplo, $\frac{3}{4}$ tiene numerador más pequeño que $\frac{5}{9}$, pero $\frac{3}{4} > \frac{5}{9}$. **Siempre hay que reducir a común denominador antes de comparar.**

2.5 Ejercicio 5 — Operaciones con fracciones

Enunciado del Ejercicio 5

Resuelve las siguientes operaciones con fracciones:

$$\text{a) } \left(\frac{7}{5}-\frac{1}{2}\right):\left(1-\frac{3}{10}\right) \qquad \text{b) } \frac{5}{8}:\left[\frac{17}{4}-3\left(2-\frac{2}{3}\right)\right]$$

Marco teórico

Reglas de operaciones con fracciones

- **Suma/Resta:** Reducir a común denominador, luego operar numeradores.
- **Multiplicación:** $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$
- **División:** $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$
- **Número entero como fracción:** $n=\frac{n}{1}$
- **Prioridad:** Paréntesis $\rightarrow$ multiplicaciones/divisiones $\rightarrow$ sumas/restas.

Solución

Apartado a) $\left(\frac{7}{5}-\frac{1}{2}\right):\left(1-\frac{3}{10}\right)$

Seguimos el orden de operaciones: primero resolvemos cada paréntesis.

Primer paréntesis: $\frac{7}{5}-\frac{1}{2}$

Los denominadores son 5 y 2. Calculamos:

$$\text{mcm}(5,2)=10$$

Amplificamos:

$$\frac{7}{5}=\frac{7\times 2}{5\times 2}=\frac{14}{10}, \qquad \frac{1}{2}=\frac{1\times 5}{2\times 5}=\frac{5}{10}$$

Restamos:

$$\frac{7}{5}-\frac{1}{2}=\frac{14}{10}-\frac{5}{10}=\frac{14-5}{10}=\frac{9}{10}$$

Segundo paréntesis: $1-\frac{3}{10}$

Expresamos 1 como fracción de denominador 10:

$$1=\frac{10}{10}$$

Restamos:

$$1-\frac{3}{10}=\frac{10}{10}-\frac{3}{10}=\frac{10-3}{10}=\frac{7}{10}$$

División de los dos resultados:

$$\left(\frac{7}{5}-\frac{1}{2}\right):\left(1-\frac{3}{10}\right)=\frac{9}{10}:\frac{7}{10}$$

Para dividir fracciones, multiplicamos la primera por la inversa de la segunda:

$$\frac{9}{10}:\frac{7}{10}=\frac{9}{10}\cdot\frac{10}{7}=\frac{9\cdot 10}{10\cdot 7}=\frac{90}{70}$$

Simplificamos: $\text{mcd}(90,70)=10$:

$$\frac{90}{70}=\frac{90\div 10}{70\div 10}=\frac{9}{7}$$

Resultado:

$$\boxed{\left(\frac{7}{5}-\frac{1}{2}\right):\left(1-\frac{3}{10}\right)=\frac{9}{7}}$$

Como decimal: $\frac{9}{7}=1{,}\overline{285714}$ ✓

Apartado b) $\frac{5}{8}:\left[\frac{17}{4}-3\left(2-\frac{2}{3}\right)\right]$

Seguimos el orden de operaciones comenzando por el paréntesis más interior.

Paso 1: Paréntesis interior $\left(2-\frac{2}{3}\right)$

$$2-\frac{2}{3}=\frac{6}{3}-\frac{2}{3}=\frac{6-2}{3}=\frac{4}{3}$$

Paso 2: Multiplicación $3\cdot\left(2-\frac{2}{3}\right)=3\cdot\frac{4}{3}$

$$3\cdot\frac{4}{3}=\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{3}=\frac{3\cdot 4}{1\cdot 3}=\frac{12}{3}=4$$

Observación: El 3 del numerador y el 3 del denominador se cancelan, dejando simplemente $\frac{4}{1}=4$. Esto es natural: $3\cdot\frac{4}{3}$ es "tres veces un tercio de 4", que es 4.

Paso 3: Corchete $\left[\frac{17}{4}-3\left(2-\frac{2}{3}\right)\right]=\frac{17}{4}-4$

$$\frac{17}{4}-4=\frac{17}{4}-\frac{16}{4}=\frac{17-16}{4}=\frac{1}{4}$$

(Expresamos $4=\frac{16}{4}$ para restar con igual denominador.)

Paso 4: División final

$$\frac{5}{8}:\frac{1}{4}=\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{1}=\frac{5\cdot 4}{8\cdot 1}=\frac{20}{8}$$

Simplificamos: $\text{mcd}(20,8)=4$:

$$\frac{20}{8}=\frac{20\div 4}{8\div 4}=\frac{5}{2}$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{5}{8}:\left[\frac{17}{4}-3\left(2-\frac{2}{3}\right)\right]=\frac{5}{2}=2{,}5}$$

✓

Observación importante

Resumen esquemático del apartado b):

$$\frac{5}{8} : \left[\frac{17}{4} - 3 \underbrace{\left(2 - \frac{2}{3} \right)}_{=\frac{4}{3}} \right] = \frac{5}{8} : \left[\frac{17}{4} - \underbrace{3 \cdot \frac{4}{3}}_{=4} \right] = \frac{5}{8} : \underbrace{\left[\frac{17}{4} - 4 \right]}_{=\frac{1}{4}} = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{1} = \frac{5}{2}$$

Visualizar la cadena de cálculos de adentro hacia afuera ayuda a no perder el hilo.

2.6 Ejercicio 6 — Problemas de fracción de una cantidad

Enunciado del Ejercicio 6

a) De un depósito que contenía 500 litros, se han sacado los $\frac{3}{4}$ de su capacidad. ¿Cuántos litros quedan en el depósito?

b) Andrea tiene 12 años, que son los $\frac{2}{7}$ de la edad de su padre. ¿Cuál es la edad de su padre?

Marco teórico

Fracción de una cantidad

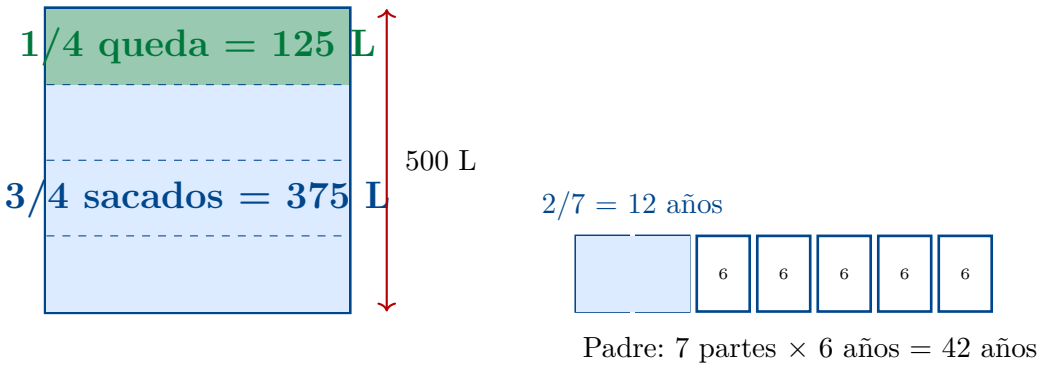
Si $\frac{a}{b}$ es una fracción y Q es una cantidad total, entonces:

$$\frac{a}{b} \text{ de } Q = \frac{a}{b} \cdot Q = \frac{a \cdot Q}{b}$$

Si sabemos que una cantidad q es la fracción $\frac{a}{b}$ del total Q, entonces:

$$q = \frac{a}{b} \cdot Q \implies Q = q \cdot \frac{b}{a} = \frac{q \cdot b}{a}$$

Representación gráfica



Solución

Apartado a) Depósito de 500 litros

Dato: El depósito tiene 500 litros. Se sacan $\frac{3}{4}$ de su capacidad.

Paso 1: Calcular la cantidad extraída.

$$\frac{3}{4} \text{ de } 500 = \frac{3}{4} \cdot 500 = \frac{3 \cdot 500}{4} = \frac{1500}{4} = 375 \text{ litros}$$

Justificación del paso: La palabra "de" entre una fracción y una cantidad se traduce matemáticamente como multiplicación.

Paso 2: Calcular la cantidad que queda.
Lo que queda es el total menos lo que se ha sacado:

$$500 - 375 = 125 \text{ litros}$$

Verificación alternativa: Si se saca $\frac{3}{4}$, queda $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ del depósito:

$$\frac{1}{4} \cdot 500 = 125 \text{ litros} \quad \checkmark$$

Resultado: En el depósito quedan $\boxed{125 \text{ litros}}$.

Apartado b) Edad del padre de Andrea

Datos:

- Andrea tiene 12 años.
- 12 años son los $\frac{2}{7}$ de la edad del padre.

Sea E la edad del padre. Planteamos la ecuación:

$$\frac{2}{7} \cdot E = 12$$

Despejamos E:

$$E = 12 : \frac{2}{7} = 12 \cdot \frac{7}{2} = \frac{12 \cdot 7}{2} = \frac{84}{2} = 42$$

Justificación: Dividir entre $\frac{2}{7}$ es equivalente a multiplicar por su inverso $\frac{7}{2}$.

Verificación:

$$\frac{2}{7} \cdot 42 = \frac{2 \cdot 42}{7} = \frac{84}{7} = 12 \quad \checkmark$$

Resultado: La edad del padre de Andrea es $\boxed{42 \text{ años}}$.

Conclusión

Estos dos apartados ilustran los dos casos típicos de problemas con fracciones de cantidad:

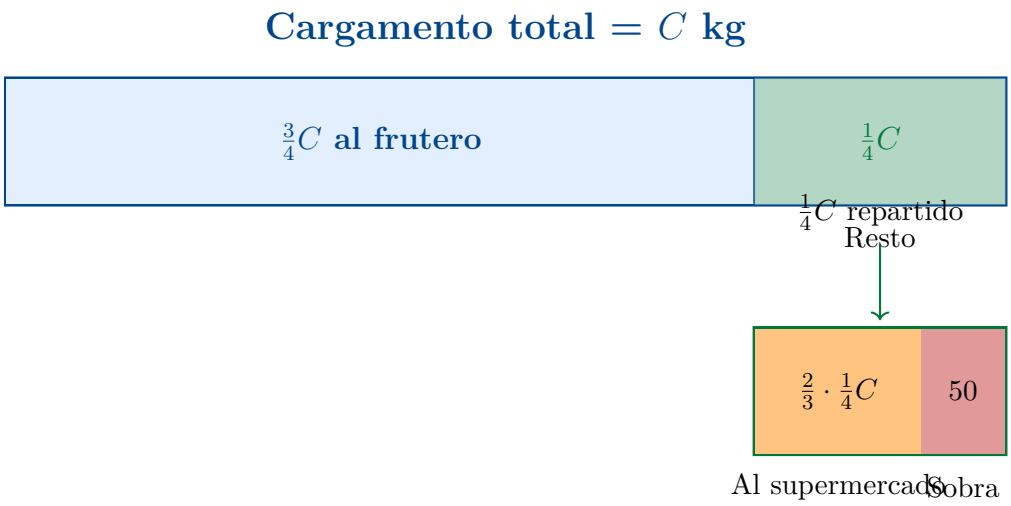
- **Caso 1:** Conocemos el total → multiplicamos por la fracción.
- **Caso 2:** Conocemos la parte → dividimos por la fracción (equivale a multiplicar por su inverso) para encontrar el total.

2.7 Ejercicio 7 — El cargamento de naranjas

Enunciado del Ejercicio 7

Un comerciante vendió las tres cuartas partes de un cargamento de naranjas a un frutero. Después vendió dos terceras partes del resto a un supermercado y aún le quedaron 50 kg de naranjas. ¿Cuál era el peso inicial del cargamento?

Representación gráfica



Solución

Sea C el peso inicial del cargamento (en kg).

Primera venta: al frutero.
Se venden $\dfrac{3}{4}$ del total. Lo que queda (el *resto*) es:

$$\text{Resto}_1 = C - \frac{3}{4}\cdot C = C\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right) = C\cdot\frac{1}{4} = \frac{C}{4}$$

Segunda venta: al supermercado.
Se venden $\dfrac{2}{3}$ del resto (que es $\dfrac{C}{4}$):

$$\text{Vendido al supermercado} = \frac{2}{3}\cdot\frac{C}{4} = \frac{2C}{12} = \frac{C}{6}$$

Lo que queda después de esta segunda venta:

$$\text{Resto}_2 = \frac{C}{4} - \frac{C}{6}$$

Para restar estas fracciones, calculamos el denominador común: $\text{mcm}(4,6) = 12$:

$$\text{Resto}_2 = \frac{C}{4} - \frac{C}{6} = \frac{3C}{12} - \frac{2C}{12} = \frac{3C-2C}{12} = \frac{C}{12}$$

Condición del problema.
Nos dicen que lo que queda son 50 kg:

$$\frac{C}{12} = 50$$

Despejamos C:

$$C = 50 \cdot 12 = 600 \text{ kg}$$

Verificación completa:

- Cargamento inicial: $C = 600$ kg.
- Vendido al frutero: $\frac{3}{4} \cdot 600 = 450$ kg.
- Resto tras primera venta: $600 - 450 = 150$ kg.
- Vendido al supermercado: $\frac{2}{3} \cdot 150 = 100$ kg.
- Resto final: $150 - 100 = 50$ kg ✓

Resultado: El peso inicial del cargamento era $\boxed{600 \text{ kg}}$.

Observación importante

La clave de este problema es que la segunda venta se hace sobre el **resto**, no sobre el total original. Este tipo de error (aplicar la segunda fracción sobre el total) es muy frecuente y llevaría a un resultado incorrecto.

Error típico a evitar:

$$\text{Incorrecto: } \frac{2}{3} \cdot 600 = 400 \quad \text{(esta no es la segunda venta)}$$

$$\text{Correcto: } \frac{2}{3} \cdot 150 = 100 \quad \text{(la segunda venta es sobre el resto)}$$

2.8 Ejercicio 8 — El depósito de agua

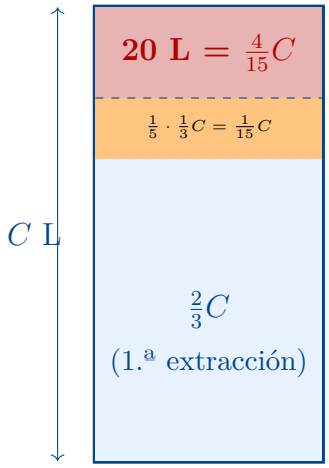
Enunciado del Ejercicio 8

De un depósito lleno de agua se sacan, primero, dos tercios de su contenido y, después, un quinto de lo que quedaba, sobrando aún 20 litros.

a) ¿Qué fracción del total del depósito se ha extraído? ¿Cuántos litros se han sacado?

b) ¿Qué fracción del depósito queda?

Representación gráfica



Depósito (lleno = C litros)

Solución

Sea C la capacidad total del depósito (en litros).

Primera extracción.
Se sacan $\frac{2}{3}$ del contenido total. Lo que queda:

$$\text{Resto}_1 = C - \frac{2}{3}C = \frac{3C}{3} - \frac{2C}{3} = \frac{C}{3}$$

Segunda extracción.
Se saca $\frac{1}{5}$ de lo que quedaba ($= \frac{C}{3}$):

$$2.^{\text{a}}\ \text{extracción} = \frac{1}{5} \cdot \frac{C}{3} = \frac{C}{15}$$

Lo que queda tras la segunda extracción:

$$\text{Resto}_2 = \frac{C}{3} - \frac{C}{15}$$

Reducimos a común denominador ($\text{mcm}(3,15)=15$):

$$\text{Resto}_2 = \frac{5C}{15} - \frac{C}{15} = \frac{4C}{15}$$

Condición: sobran 20 litros.

$$\frac{4C}{15} = 20 \implies C = 20 \cdot \frac{15}{4} = \frac{300}{4} = 75 \text{ litros}$$

El depósito tenía 75 litros en total.

Apartado a) Fracción total extraída y litros sacados.
Total extraído = primera extracción + segunda extracción:

$$\frac{2}{3}C + \frac{1}{5}\cdot\frac{C}{3} = \frac{2C}{3} + \frac{C}{15}$$

Reducimos a denominador 15:

$$\frac{2C}{3} + \frac{C}{15} = \frac{10C}{15} + \frac{C}{15} = \frac{11C}{15}$$

La fracción extraída es $\frac{11}{15}$ del total.

Litros extraídos:

$$\frac{11}{15}\cdot 75 = \frac{11\cdot 75}{15} = \frac{825}{15} = 55 \text{ litros}$$

Resultado a): Se han extraído $\frac{11}{15}$ del depósito, es decir, $\boxed{55 \text{ litros}}$.

Apartado b) Fracción que queda.
Si se ha extraído $\frac{11}{15}$, queda:

$$1 - \frac{11}{15} = \frac{15}{15} - \frac{11}{15} = \frac{4}{15}$$

Verificación: $\frac{4}{15}\cdot 75 = \frac{4\cdot 75}{15} = \frac{300}{15} = 20$ litros ✓

Resultado b): Queda $\boxed{\frac{4}{15}}$ del depósito (que son los 20 litros).

Resumen de la verificación:

$$\underbrace{\frac{2}{3}\cdot 75}_{=50} + \underbrace{\frac{1}{5}\cdot 25}_{=5} + \underbrace{20}_{\text{sobra}} = 50 + 5 + 20 = 75 \quad \checkmark$$

Error frecuente

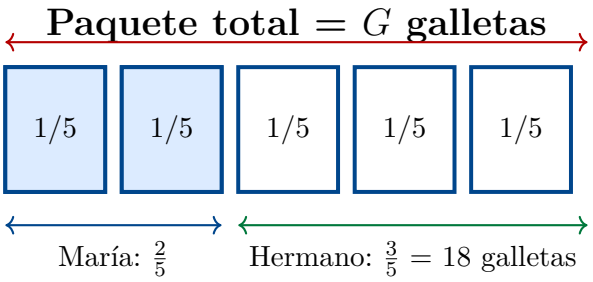
Un error habitual es calcular la segunda extracción como $\frac{1}{5}$ del *total* en lugar de $\frac{1}{5}$ de lo que *quedaba*. Hay que leer el enunciado con atención: «un quinto de lo que **quedaba**».

2.9 Ejercicio 9 — Las galletas de María

Enunciado del Ejercicio 9

María se come las dos quintas partes de un paquete de galletas y su hermano las dieciocho galletas restantes. ¿Cuántas galletas tenía el paquete?

Representación gráfica



Solución

Sea G el número total de galletas del paquete.

Análisis de la situación.

- María come $\frac{2}{5}$ del total: $\frac{2}{5} \cdot G$ galletas.
- El hermano come las galletas *restantes*, que son 18.

Lo que come el hermano es la fracción que le queda después de que María ha comido:

$$\text{Fracción del hermano} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

Planteamos la ecuación.
El hermano come $\frac{3}{5}$ de G, y eso son 18 galletas:

$$\frac{3}{5} \cdot G = 18$$

Despejamos G.

$$G = 18 : \frac{3}{5} = 18 \cdot \frac{5}{3} = \frac{18 \cdot 5}{3} = \frac{90}{3} = 30$$

Verificación:

- Total: $G = 30$ galletas.
- Come María: $\frac{2}{5} \cdot 30 = 12$ galletas.
- Come el hermano: $30 - 12 = 18$ galletas ✓

Resultado: El paquete tenía $\boxed{30 \text{ galletas}}$.

Observación importante

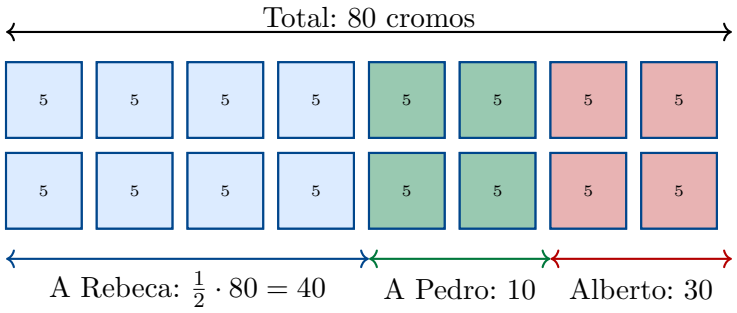
Razonamiento alternativo: Si $\frac{3}{5}$ del paquete son 18 galletas, entonces $\frac{1}{5}$ son $18 \div 3 = 6$ galletas. Por tanto, el total $(\frac{5}{5})$ son $6 \times 5 = 30$ galletas. Esta forma de pensar ("si $\frac{a}{b}$ son X, entonces $\frac{1}{b}$ es $X \div a$ y el total es $X \div a \times b$") es muy útil para resolver mentalmente este tipo de problemas.

2.10 Ejercicio 10 — Los cromos de Alberto

Enunciado del Ejercicio 10

Alberto tiene repetidos 80 cromos de una colección. Le regala la mitad a su amiga Rebeca y a su hermano Pedro la cuarta parte de los que le quedaban. ¿Con cuántos cromos se queda Alberto al final? ¿Qué fracción de los cromos que tenía ha regalado?

Representación gráfica



Solución

Datos: Alberto tiene 80 cromos.

Primera entrega: a Rebeca.
Alberto da la mitad $(\frac{1}{2})$ a Rebeca:

$$\text{A Rebeca} = \frac{1}{2} \cdot 80 = 40 \text{ cromos}$$

Cromos que le quedan a Alberto tras la primera entrega:

$$\text{Resto}_1 = 80 - 40 = 40 \text{ cromos}$$

Segunda entrega: a Pedro.
Alberto da la cuarta parte de lo que le quedaba a su hermano Pedro:

$$\text{A Pedro} = \frac{1}{4} \cdot 40 = 10 \text{ cromos}$$

Cromos que le quedan a Alberto al final.

$$\text{Final} = 40 - 10 = 30 \text{ cromos}$$

Pregunta 1: ¿Con cuántos se queda Alberto? $\Rightarrow$ $\boxed{30 \text{ cromos}}$

Fracción del total que ha regalado.
Total regalado = cromos a Rebeca + cromos a Pedro:

$$\text{Total regalado} = 40 + 10 = 50 \text{ cromos}$$

Fracción del total regalada:

$$\frac{\text{total regalado}}{\text{total inicial}} = \frac{50}{80}$$

Simplificamos ($\text{mcd}(50, 80) = 10$):

$$\frac{50}{80} = \frac{50 \div 10}{80 \div 10} = \frac{5}{8}$$

Comprobación: Si regaló $\frac{5}{8}$, le queda $1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$. Comprobamos:

$$\frac{3}{8} \cdot 80 = 30 \quad \checkmark$$

Pregunta 2: ¿Qué fracción ha regalado? $\Rightarrow \boxed{\frac{5}{8}}$

Resumen:

Destinatario	**Cromos**	**Fracción del total**
Rebeca	40	$\frac{40}{80} = \frac{1}{2}$
Pedro	10	$\frac{10}{80} = \frac{1}{8}$
Alberto (queda)	**30**	$\frac{30}{80} = \frac{3}{8}$
Total regalado	**50**	$\frac{50}{80} = \frac{5}{8}$
Total	**80**	**1**

Observación importante

Nótese que la fracción regalada a Pedro sobre el total NO es $\frac{1}{4}$, sino $\frac{1}{8}$. Esto se debe a que el $\frac{1}{4}$ se aplica sobre los 40 cromos que quedaban (la mitad del total), no sobre los 80. Así:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \quad \text{del total}$$

La fracción total regalada es:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

Capítulo 3

Síntesis y tabla de resultados

Ejercicio	Enunciado (resumen)	Resultado
1a	Fracción de hora = 20 min	$\frac{1}{3}$
1b	Fracción de semana = 5 días	$\frac{5}{7}$
2a	$\frac{65}{100}$ a decimal	0,65
2b	$\frac{7}{8}$ a decimal	0,875
3a	Irreducible de $\frac{100}{120}$	$\frac{5}{6}$
3b	Irreducible de $\frac{36}{54}$	$\frac{2}{3}$
4	Ordenar de menor a mayor	$\frac{2}{6} < \frac{5}{9} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$
5a	$\left(\frac{7}{5} - \frac{1}{2}\right) : \left(1 - \frac{3}{10}\right)$	$\frac{9}{7}$
5b	$\frac{5}{8} : \left[\frac{17}{4} - 3(2 - \frac{2}{3})\right]$	$\frac{5}{2} = 2{,}5$
6a	Depósito 500 L, sacan $\frac{3}{4}$	Quedan 125 L
6b	12 años = $\frac{2}{7}$ edad padre	Padre: 42 años
7	Naranjas: vendidas en dos pasos, sobran 50 kg	Cargamento: 600 kg
8a	Depósito: extraen $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{5}$ del resto, sobran 20 L	$\frac{11}{15}$ extraído = 55 L
8b	Fracción que queda	$\frac{4}{15}$
9	María come $\frac{2}{5}$, hermano come 18	Paquete: 30 galletas
10	80 cromos, regala mitad y $\frac{1}{4}$ del resto	Quedan 30; regaló $\frac{5}{8}$

Criterios de evaluación (según el examen)

Los criterios de evaluación del examen son:

$$1.1 - 1.3 - 2.2 - 3.1 - 3.3 - 4.1 - 5.2 - 6.1 - 6.2 - 7.2 - 8.1 - 9.2 - 10.1$$

Estos criterios corresponden a las competencias del currículo de 2.º ESO relacionadas con:

- Comprensión del concepto de fracción y sus representaciones.
- Operaciones con fracciones (suma, resta, multiplicación, división).
- Simplificación y comparación de fracciones.
- Resolución de problemas de contexto real con fracciones.

¡SUERTE JÓVENES!

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad \bullet \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Junta de Castilla y León
CONSEJERIA DE EDUCACION Y CULTURA

EXAMEN DE MATEMÁTICAS
2º B ESO ENERO 2025

ies Tovar Antonio Centro bilingüe

Nº1.- a) Un grifo de caudal constante vierte agua en un depósito cilíndrico. Se sabe que en 5 minutos el nivel del agua ha subido 20 cm. ¿Cuánto subirá el nivel del agua en 13 minutos?

b) Cuatro operarios pintan una pared en 5 horas. ¿Cuánto tardarán diez pintores en realizar la misma tarea?

Nº2.- Doce obreros, trabajando 8 horas diarias, terminan un trabajo en 25 días. ¿Cuánto tardarán en hacer ese mismo trabajo 5 obreros trabajando 10 horas diarias?

Nº3.- Tres amigos, Rafael, Arancha e Iván, han recibido 250 euros por repartir propaganda por los buzones de su barrio. Rafael ha repartido 2 paquetes de octavillas, Arancha tres paquetes e Iván cinco paquetes. ¿Cuánto dinero corresponde a cada uno?

Nº4.- a) En una clase de 30 alumnos, hoy han faltado 6 a clase. ¿Cuál ha sido el tanto por ciento de ausencias?

b) Un hospital tiene 210 camas ocupadas, lo que representa el 84% de todas las camas disponibles. ¿De cuántas camas dispone dicho hospital?

Nº5.- Nos hacen una rebaja del 30% a un móvil de 1.000 euros, luego realizan al precio del móvil un descuento adicional del 20%. Por último, nos aplican un aumento del 21% de IVA ¿Cuánto terminaremos pagando por él? ¿Qué descuento me han hecho?

NOTA: Todos los problemas valen 2 puntos

(Criterios de evaluación: 1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 2.2, 3.1, 3.2, 3.3, 4.1 4.2, 5.1, 5.2, 6.1, 6.2, 6.3, 7.2, 8.1, 8.2, 9.1, 9.2, 10.1, 10.2)

SUERTE JOVENES

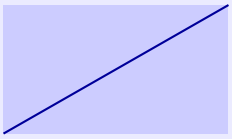
Consejería de Educación y Cultura · Junta de Castilla y León

IES Antonio Tovar · Centro Bilingüe

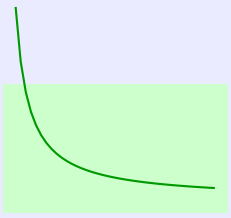
Examen de Matemáticas

2.º B ESO

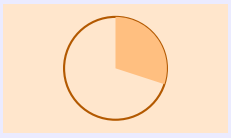
Enero 2025



Proporción directa



Proporción inversa



Porcentajes

Resolución completa, rigurosa y pedagógica

Documento preparado para estudio en profundidad
con justificación paso a paso de cada operación

Nivel:	2.º curso de Educación Secundaria Obligatoria
Materia:	Matemáticas
Temas:	Proporcionalidad directa e inversa, Repartos proporcionales, Porcentajes
Puntuación:	Cada problema vale **2 puntos** (total: 10 puntos)



Índice general

Introducción al documento **2**

1 Marco teórico previo **3**

1.1 Magnitudes proporcionales 3

1.2 Reparto proporcional 4

1.3 Porcentajes 4

2 Resolución del examen **6**

2.1 Problema 1 – Proporcionalidad directa e inversa 6

2.1.1 Apartado a) – Grifo y depósito cilíndrico 6

2.1.2 Apartado b) – Pintores y tiempo 8

2.2 Problema 2 – Proporcionalidad compuesta 10

2.3 Problema 3 – Reparto proporcional 13

2.4 Problema 4 – Porcentajes 15

2.4.1 Apartado a) – Porcentaje de ausencias 15

2.4.2 Apartado b) – Total de camas del hospital 16

2.5 Problema 5 – Descuentos sucesivos e IVA 18

3 Resumen de resultados **21**

4 Errores frecuentes y consejos de estudio **23**

A Formulario de referencia rápida **24**

Introducción al documento

Este documento presenta la **resolución completa, rigurosa y pedagógica** de todos los ejercicios del Examen de Matemáticas de **2.º B de ESO**, correspondiente al mes de enero de 2025, impartido en el IES Antonio Tovar (centro bilingüe de Castilla y León).

Objetivos del documento

- Resolver *absolutamente todos* los ejercicios sin omitir ningún paso.
- Mantener *rigor matemático total*: definiciones precisas, propiedades bien enunciadas y justificación lógica de cada transformación algebraica.
- Ser *pedagógico y exhaustivo*: el alumno debe comprender el porqué de cada operación, no sólo el resultado.
- Señalar *errores frecuentes* y ofrecer *observaciones* que enriquezcan la comprensión.

Temas matemáticos que cubre el examen:

I. **Proporcionalidad directa** (Problema 1a): magnitudes directamente proporcionales y uso de la regla de tres directa.

II. **Proporcionalidad inversa** (Problemas 1b y 2): magnitudes inversamente proporcionales, regla de tres inversa y proporcionalidad compuesta.

III. **Reparto proporcional directo** (Problema 3): distribución de una cantidad según partes proporcionales a ciertos valores.

IV. **Porcentajes** (Problemas 4 y 5): cálculo de tanto por ciento, determinación del total a partir del porcentaje y aplicación sucesiva de descuentos e IVA.

Criterios de evaluación del examen

1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 2.2, 3.1, 3.2, 3.3, 4.1, 4.2, 5.1, 5.2, 6.1, 6.2, 6.3, 7.2, 8.1, 8.2, 9.1, 9.2, 10.1, 10.2

Capítulo 1

Marco teórico previo

Antes de resolver los problemas conviene recordar con precisión los conceptos matemáticos que se necesitarán.

1.1 Magnitudes proporcionales

Definición 1.1 (Magnitudes directamente proporcionales)**.** Dos magnitudes A y B son **directamente proporcionales** si al multiplicar (o dividir) una por un número, la otra queda multiplicada (o dividida) por ese mismo número. Formalmente, existe una constante $k > 0$ llamada *razón de proporcionalidad* tal que

$$\frac{A}{B} = k \quad \Longleftrightarrow \quad A = k \cdot B.$$

Propiedad 1.1 (Regla de tres directa)**.** Si A_1 corresponde a B_1 y ambas son proporcionales, entonces para cualquier otro valor A_2:

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \quad \Longrightarrow \quad B_2 = \frac{A_2 \cdot B_1}{A_1}.$$

Definición 1.2 (Magnitudes inversamente proporcionales)**.** Dos magnitudes A y B son **inversamente proporcionales** si al multiplicar una por un número, la otra queda dividida por ese mismo número. Existe $k > 0$ tal que

$$A \cdot B = k \quad \text{(producto constante)}.$$

Propiedad 1.2 (Regla de tres inversa)**.** Si A_1 corresponde a B_1 e inversamente proporcionales, entonces:

$$A_1 \cdot B_1 = A_2 \cdot B_2 \quad \Longrightarrow \quad B_2 = \frac{A_1 \cdot B_1}{A_2}.$$

Definición 1.3 (Proporcionalidad compuesta)**.** Cuando intervienen tres o más magnitudes, la relación de cada par determina si se aplica regla de tres directa o inversa con

cada una de ellas por separado. La regla general es:

$$x = (\text{dato conocido}) \times \prod_{\text{directas}} \frac{\text{valor nuevo}}{\text{valor viejo}} \times \prod_{\text{inversas}} \frac{\text{valor viejo}}{\text{valor nuevo}}.$$

1.2 Reparto proporcional

Definición 1.4 (Reparto proporcional directo)**.** Distribuir una cantidad C entre varias partes en proporción a unos valores $a_1, a_2, \ldots, a_n$ significa:

1. Calcular la suma total $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.
2. La *unidad de reparto* es $u = C/S$.
3. Cada parte recibe $p_i = a_i \cdot u$.

Propiedad 1.3 (Verificación del reparto)**.** La suma de todas las partes debe reproducir la cantidad total: $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = C$.

1.3 Porcentajes

Definición 1.5 (Tanto por ciento)**.** El **tanto por ciento** de una cantidad expresa cuántas unidades de cada cien contiene. Formalmente:

$$p\,\% \text{ de } C = \frac{p}{100} \cdot C.$$

Propiedad 1.4 (Hallar el tanto por ciento que representa una parte)**.** Si una parte P pertenece a un total C:

$$p\,\% = \frac{P}{C} \times 100.$$

Propiedad 1.5 (Hallar el total conocida la parte y el porcentaje)**.** Si P representa el $p\,\%$ del total C:

$$C = \frac{P \times 100}{p}.$$

Propiedad 1.6 (Aplicar un descuento del $d\,\%$)**.** Aplicar un descuento del $d\,\%$ equivale a multiplicar por el *factor* $(1 - d/100)$:

$$P_{\text{final}} = P_{\text{inicial}} \times \left(1 - \frac{d}{100}\right).$$

Propiedad 1.7 (Aplicar un incremento del $r\,\%$)**.** Aplicar un aumento del $r\,\%$ equivale a multiplicar por el factor $(1 + r/100)$:

$$P_{\text{final}} = P_{\text{inicial}} \times \left(1 + \frac{r}{100}\right).$$

Propiedad 1.8 (Aplicación sucesiva de porcentajes)**.** Si se aplican sucesivamente varios factores $f_1, f_2, \ldots, f_n$ al precio inicial P_0, el precio final es:

$$P_n = P_0 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdots f_n.$$

Importante: el orden de aplicación no altera el resultado final, pero el descuento global *no* es la suma aritmética de los descuentos parciales.

Capítulo 2

Resolución del examen

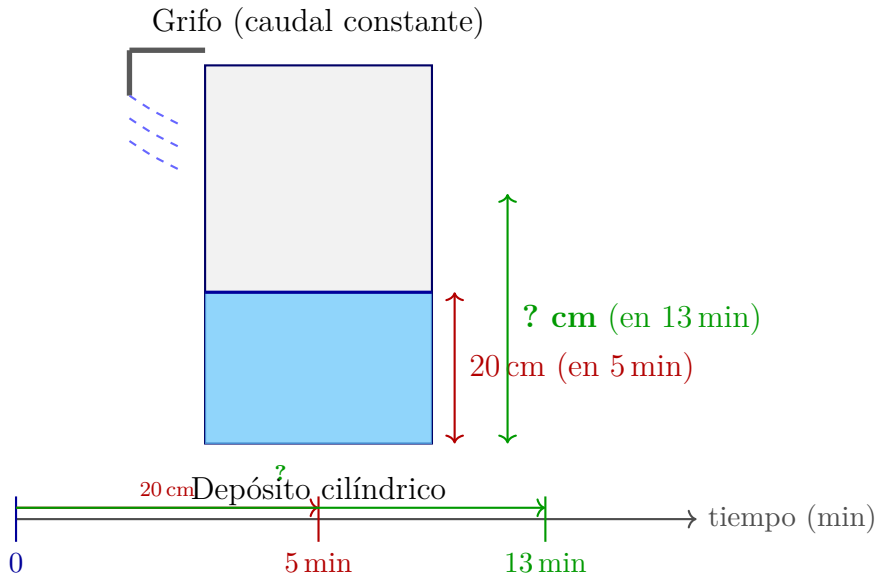
2.1 Problema 1 – Proporcionalidad directa e inversa

Enunciado del Problema 1 (2 puntos)

Apartado a) Un grifo de caudal constante vierte agua en un depósito cilíndrico. Se sabe que en 5 minutos el nivel del agua ha subido 20 cm. ¿Cuánto subirá el nivel del agua en 13 minutos?

Apartado b) Cuatro operarios pintan una pared en 5 horas. ¿Cuánto tardarán diez pintores en realizar la misma tarea?

2.1.1 Apartado a) – Grifo y depósito cilíndrico



Solución

Identificación del tipo de proporcionalidad.
Las magnitudes que intervienen son:

$$A = \text{tiempo transcurrido (minutos)}, \qquad B = \text{nivel subido (centímetros)}.$$

El grifo tiene *caudal constante*, es decir, vierte el mismo volumen de agua por unidad de tiempo. Como el depósito es *cilíndrico* (sección transversal constante), el nivel sube siempre la misma cantidad de centímetros por cada minuto que pasa. Por lo tanto, A y B son **directamente proporcionales**.

Paso 1: Organizamos los datos en una tabla:

Tiempo (min)	**Nivel subido (cm)**
5	20
13	x

Paso 2: Aplicamos la **regla de tres directa**. Al crecer el tiempo, crece el nivel subido (misma dirección), de modo que planteamos:

$$\frac{5\,\text{min}}{20\,\text{cm}} = \frac{13\,\text{min}}{x}$$

Justificación: en la proporcionalidad directa, la razón entre las dos columnas de datos es siempre la misma constante k.

Paso 3: Despejamos x mediante productos cruzados:

$$x = \frac{13 \times 20}{5} = \frac{260}{5} = \boxed{52\,\text{cm}}$$

Comprobación: la razón $k = 20/5 = 4\,\text{cm/min}$ (el nivel sube 4 cm por cada minuto). En 13 minutos: $13 \times 4 = 52\,\text{cm}$. ✓

Observación matemática

La constante de proporcionalidad $k = 4\,\text{cm/min}$ se puede interpretar como la *velocidad de subida del nivel*. Si el depósito no fuera cilíndrico (p. ej. cónico), la proporcionalidad directa no se cumpliría porque la sección cambia con la altura.

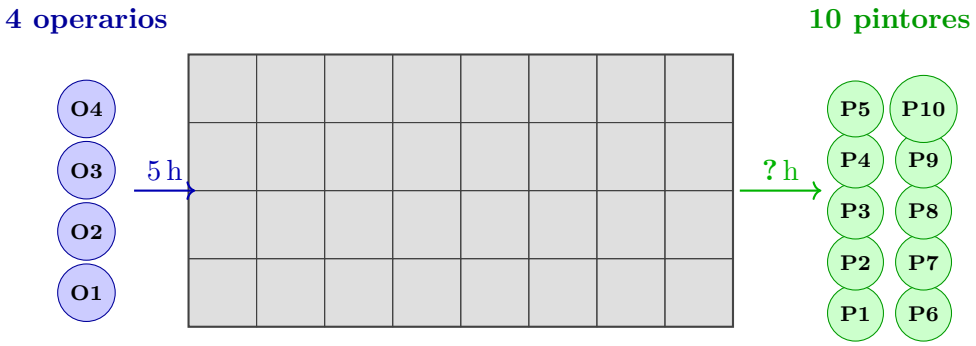
△ Advertencia – Error frecuente

Un error típico es confundir el tiempo con el nivel y plantear la regla de tres al revés (poniendo 20 donde va el tiempo y viceversa). Siempre hay que identificar claramente *qué magnitud es cuál* antes de plantear la razón.

Conclusión

En 13 minutos el nivel del agua habrá subido **52 cm**.

2.1.2 Apartado b) – Pintores y tiempo



Solución

Identificación del tipo de proporcionalidad.
Las magnitudes son:

$$A = \text{número de operarios}, \qquad B = \text{tiempo para pintar la pared.}$$

Si hay más operarios, la pared se pinta en *menos* tiempo. Al aumentar A, B disminuye. Se trata de magnitudes **inversamente proporcionales**.

Paso 1: Datos:

Operarios	Horas
4	5
10	x

Paso 2: Aplicamos la **regla de tres inversa**. La propiedad que usamos es que el *producto* de ambas magnitudes es constante (igual al total de horas-persona necesarias para pintar la pared):

$$A_1 \cdot B_1 = A_2 \cdot B_2 \quad \Longrightarrow \quad 4 \times 5 = 10 \times x$$

Justificación: el trabajo total es fijo. Si llamamos W al trabajo total y r al rendimiento de un operario por hora, entonces: $W = n_{\text{operarios}} \times r \times t$. Como W y r son constantes: $n \cdot t = \text{constante}$.

Paso 3: Despejamos x:

$$x = \frac{4 \times 5}{10} = \frac{20}{10} = \boxed{2\,\text{horas}}$$

Comprobación: $4 \times 5 = 20$ horas-persona. Con 10 pintores: $10 \times 2 = 20$ horas-persona. ✓

△ Advertencia – Error frecuente

Error muy frecuente: aplicar una regla de tres *directa* al ver que el número de operarios sube y pensar que el tiempo también subirá. Hay que analizar el sentido: más trabajadores ⇒ menos tiempo ⇒ *inversa*.

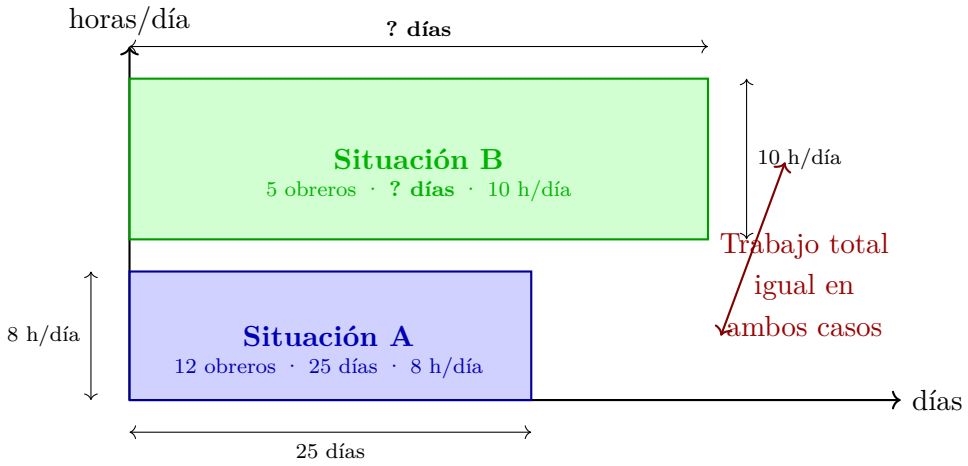
Conclusión

Diez pintores tardarán **2 horas** en pintar la misma pared.

2.2 Problema 2 – Proporcionalidad compuesta

Enunciado del Problema 2 (2 puntos)

Doce obreros, trabajando 8 horas diarias, terminan un trabajo en 25 días. ¿Cuánto tardarán en hacer ese mismo trabajo 5 obreros trabajando 10 horas diarias?



Solución

Identificación y análisis de magnitudes.
Hay *tres* magnitudes:

N = número de obreros, H = horas de trabajo al día, D = días para terminar.

El trabajo total W es constante en ambas situaciones. La relación es:

$$W = N \cdot H \cdot D = \text{constante}.$$

Por lo tanto:

- Entre N y D: **inversamente proporcionales** (más obreros $\Rightarrow$ menos días).
- Entre H y D: **inversamente proporcionales** (más horas/día $\Rightarrow$ menos días).

Paso 1: Datos en tabla:

	Obreros (N)	**Horas/día (H)**	**Días (D)**
Situación A	12	8	25
Situación B	5	10	x

Paso 2: Como $W = N \cdot H \cdot D$ es constante:

$$N_A \cdot H_A \cdot D_A = N_B \cdot H_B \cdot D_B$$

$$12 \times 8 \times 25 = 5 \times 10 \times x$$

Paso 3: Calculamos el primer miembro:

$$12 \times 8 \times 25 = 12 \times 200 = 2400 \quad \text{(horas-obrero totales)}$$

Paso 4: Despejamos x:

$$2400 = 50 \cdot x \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2400}{50} = \boxed{48\,\text{días}}$$

Método alternativo: proporcionalidad compuesta paso a paso.
Partimos de la situación A (12 obreros, 8 h/día, 25 días) y modificamos una variable cada vez:

a) *Se pasa de 12 a 5 obreros* (relación inversa: menos obreros ⇒ más días):

$$D' = 25 \times \frac{12}{5} = 25 \times 2{,}4 = 60\,\text{días}$$

b) *Se pasa de 8 a 10 horas/día* (relación inversa: más horas ⇒ menos días):

$$x = D' \times \frac{8}{10} = 60 \times 0{,}8 = \boxed{48\,\text{días}}$$

Ambos métodos coinciden. ✓

Comprobación global:

$$N_B \cdot H_B \cdot D_B = 5 \times 10 \times 48 = 2400 = W. \checkmark$$

Observación matemática

La fórmula $W = N \cdot H \cdot D$ presupone que todos los obreros trabajan al *mismo* rendimiento y que éste es constante a lo largo de todos los días. En la vida real podría haber variaciones de productividad, pero matemáticamente asumimos condiciones ideales.

△ Advertencia – Error frecuente

En proporcionalidad compuesta, **jamás** se suman las razones. Cada relación directa aporta un factor > 1 o < 1 en la dirección correcta, y cada relación inversa aporta el inverso. No confundir: al disminuir los obreros (de 12 a 5), el factor que se aplica a los días es $12/5$ (inverso), *no* $5/12$ (directo).

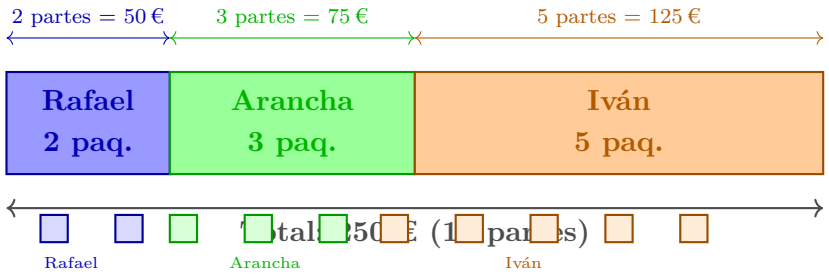
Conclusión

5 obreros trabajando 10 horas al día tardarán **48 días** en terminar el mismo trabajo.

2.3 Problema 3 – Reparto proporcional

Enunciado del Problema 3 (2 puntos)

Tres amigos, Rafael, Arancha e Iván, han recibido 250 euros por repartir propaganda por los buzones de su barrio. Rafael ha repartido 2 paquetes de octavillas, Arancha tres paquetes e Iván cinco paquetes. ¿Cuánto dinero corresponde a cada uno?



Solución

Planteamiento del reparto proporcional.
El dinero total es $C = 250\,€$. Cada amigo recibe una parte proporcional al número de paquetes que repartió, ya que el trabajo (y por tanto la remuneración) es proporcional al esfuerzo realizado.
Los valores de referencia son:

Rafael: $a_R = 2$ paquetes, Arancha: $a_A = 3$ paquetes, Iván: $a_I = 5$ paquetes.

Paso 1: Calculamos la suma total de partes:

$$S = a_R + a_A + a_I = 2 + 3 + 5 = 10 \text{ partes.}$$

Paso 2: Determinamos el valor de *una* parte (la *unidad de reparto*):

$$u = \frac{C}{S} = \frac{250}{10} = 25\,€ \text{ por parte.}$$

Interpretación: por cada paquete repartido se cobran 25 €. Esto es coherente: si alguien repartiera 1 paquete, recibiría 25 €.

Paso 3: Calculamos la cantidad correspondiente a cada persona:

Rafael (2 partes):

$$p_R = a_R \times u = 2 \times 25 = \boxed{50\,€}$$

Arancha (3 partes):

$$p_A = a_A \times u = 3 \times 25 = \boxed{75\,€}$$

Iván (5 partes):

$$p_I = a_I \times u = 5 \times 25 = \boxed{125\,€}$$

Paso 4: Verificación (la suma debe ser el total):

$$p_R + p_A + p_I = 50 + 75 + 125 = 250\,€. ✓$$

Método alternativo: mediante fracciones del total.
Cada persona recibe la fracción de paquetes que le corresponde:

$$p_R = \frac{2}{10} \times 250 = \frac{1}{5} \times 250 = 50\,€$$

$$p_A = \frac{3}{10} \times 250 = 75\,€$$

$$p_I = \frac{5}{10} \times 250 = \frac{1}{2} \times 250 = 125\,€$$

Ambos métodos dan el mismo resultado. ✓

Observación matemática

Las fracciones 2/10, 3/10 y 5/10 suman exactamente $10/10 = 1$, lo que garantiza que el reparto es exhaustivo (no queda ni sobra dinero). En cualquier reparto proporcional, la suma de todas las partes debe ser la unidad.

△ Advertencia – Error frecuente

Un error habitual es dividir el total entre el número de personas (250/3), lo cual daría un reparto *igualitario*, no proporcional al trabajo realizado. El reparto igualitario sería injusto aquí porque cada amigo distribuyó un número diferente de paquetes.

Conclusión

- Rafael recibe **50 €**.
- Arancha recibe **75 €**.
- Iván recibe **125 €**.

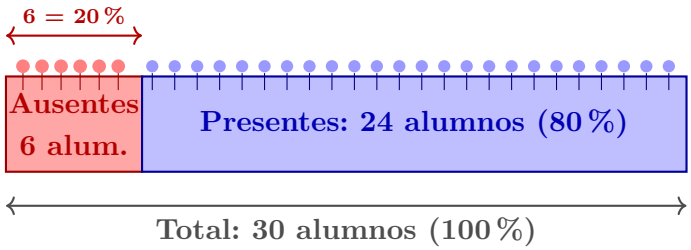
2.4 Problema 4 – Porcentajes

Enunciado del Problema 4 (2 puntos)

Apartado a) En una clase de 30 alumnos, hoy han faltado 6 a clase. ¿Cuál ha sido el tanto por ciento de ausencias?

Apartado b) Un hospital tiene 210 camas ocupadas, lo que representa el 84 % de todas las camas disponibles. ¿De cuántas camas dispone dicho hospital?

2.4.1 Apartado a) – Porcentaje de ausencias



Solución

Datos:

$$\text{Total de alumnos} = 30, \quad \text{Alumnos ausentes} = 6.$$

Paso 1: Planteamos la proporción. Queremos hallar p tal que $p\,\%$ de 30 es igual a 6:

$$\frac{p}{100} \times 30 = 6$$

Paso 2: Despejamos p:

$$p = \frac{6 \times 100}{30} = \frac{600}{30} = \boxed{20\,\%}$$

Método alternativo: regla de tres directa.
Planteamos: si 30 alumnos representan el 100 %, ¿qué porcentaje representan 6?

Alumnos	Porcentaje
30	100 %
6	p

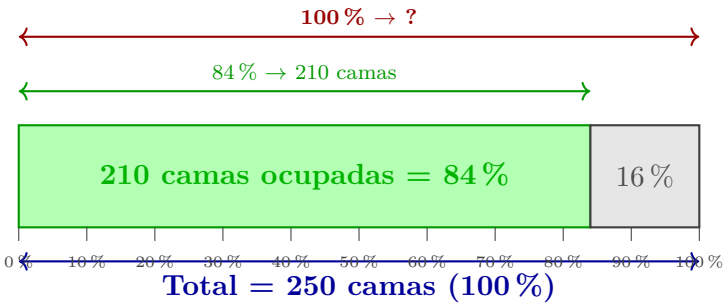
$$p = \frac{6 \times 100}{30} = 20\,\% \checkmark$$

Verificación: el 20 % de 30 es $0{,}20 \times 30 = 6$. ✓

Conclusión

El tanto por ciento de ausencias es el **20 %**.

2.4.2 Apartado b) – Total de camas del hospital



Solución

Datos:

$$\text{Camas ocupadas} = 210, \quad \text{Representan el} = 84\,\% \text{ del total.}$$

Queremos encontrar el total C de camas.

Paso 1: Planteamos la ecuación. Si 210 camas son el 84 % del total C:

$$\frac{84}{100} \times C = 210$$

Paso 2: Despejamos C:

$$C = \frac{210 \times 100}{84} = \frac{21000}{84}$$

Paso 3: Simplificamos la fracción. Buscamos el MCD(21000, 84):

$$84 = 4 \times 21 = 4 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3 \times 7$$

$$21000 = 21 \times 1000 = 3 \times 7 \times 8 \times 125 = 2^3 \times 3 \times 5^3 \times 7$$

$$\text{MCD}(21000, 84) = 2^2 \times 3 \times 7 = 84$$

$$C = \frac{21000 \div 84}{84 \div 84} = \frac{250}{1} = \boxed{250\,\text{camas}}$$

Comprobación: el 84 % de 250 es $0{,}84 \times 250 = 210$. ✓

Método alternativo: regla de tres directa.

Porcentaje	Camas
84 %	210
100 %	C

$$C = \frac{100 \times 210}{84} = \frac{21000}{84} = 250\,\text{camas}\checkmark$$

△ Advertencia – Error frecuente

Un error muy habitual es hacer $210 \times 0{,}84 = 176{,}4$, confundiendo "hallar el porcentaje de una cantidad" con "hallar el total dada la parte y el porcentaje". Debemos dividir, no multiplicar:

$$C = \frac{\text{parte conocida}}{\text{porcentaje}/100} = \frac{210}{0{,}84} = 250.$$

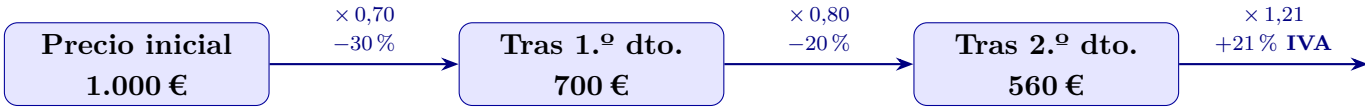
Conclusión

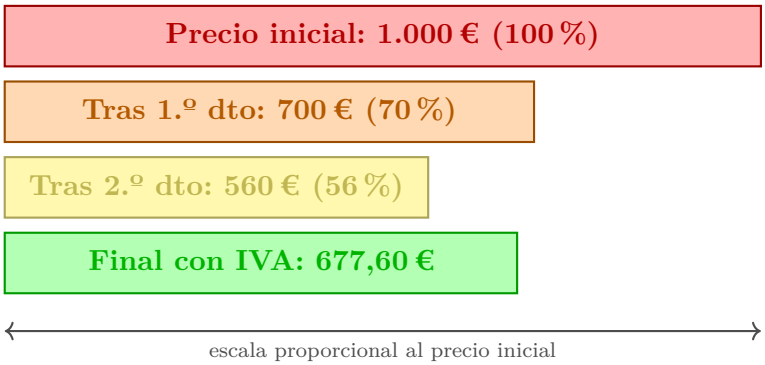
- El tanto por ciento de ausencias en clase es el **20 %**.
- El hospital dispone de **250 camas** en total.

2.5 Problema 5 – Descuentos sucesivos e IVA

Enunciado del Problema 5 (2 puntos)

Nos hacen una rebaja del 30 % a un móvil de 1.000 euros; luego realizan al precio del móvil un descuento adicional del 20 %. Por último, nos aplican un aumento del 21 % de IVA. ¿Cuánto terminaremos pagando por él? ¿Qué descuento total me han hecho (respecto al precio original sin IVA)?





Solución

Precio inicial: $P_0 = 1.000\,€$.

Primera operación: descuento del 30 %.
Un descuento del 30 % significa que *se paga* el $(100 - 30)\,\% = 70\,\%$ del precio. El *factor multiplicativo* es $f_1 = 1 - 0{,}30 = 0{,}70$.

$$P_1 = P_0 \times f_1 = 1.000 \times 0{,}70 = 700\,€$$

Detalle: el importe del primer descuento es $1.000 - 700 = 300\,€$.

Segunda operación: descuento adicional del 20 %.
Este segundo descuento se aplica **sobre el precio ya rebajado** (700 €), *no* sobre el precio original. El factor es $f_2 = 1 - 0{,}20 = 0{,}80$.

$$P_2 = P_1 \times f_2 = 700 \times 0{,}80 = 560\,€$$

Detalle: el importe del segundo descuento es $700 - 560 = 140\,€$.

Tercera operación: IVA del 21 %.
El IVA es un *aumento* del 21 %. El factor es $f_3 = 1 + 0{,}21 = 1{,}21$.

$$P_3 = P_2 \times f_3 = 560 \times 1{,}21$$

Calculamos paso a paso:

$$560 \times 1{,}21 = 560 \times 1 + 560 \times 0{,}21 = 560 + 117{,}60 = \boxed{677{,}60\,€}$$

Verificación mediante factor global:

$$P_3 = P_0 \times f_1 \times f_2 \times f_3 = 1.000 \times 0{,}70 \times 0{,}80 \times 1{,}21$$

$$= 1.000 \times (0{,}70 \times 0{,}80) \times 1{,}21 = 1.000 \times 0{,}56 \times 1{,}21 = 560 \times 1{,}21 = 677{,}60\,€ ✓$$

¿Qué descuento total se ha hecho respecto al precio original sin IVA? Comparamos el precio final *antes del IVA* ($P_2 = 560\,€$) con el precio inicial ($P_0 = 1.000\,€$):

$$\text{Descuento absoluto} = P_0 - P_2 = 1.000 - 560 = 440\,€$$

$$\text{Descuento relativo (\%)} = \frac{P_0 - P_2}{P_0} \times 100 = \frac{440}{1.000} \times 100 = \boxed{44\,\%}$$

Verificación algebraica: el factor global de descuento es

$$f_1 \times f_2 = 0{,}70 \times 0{,}80 = 0{,}56,$$

que corresponde a pagar el 56 % del precio original, es decir, un descuento del $100 - 56 = 44\,\%$. ✓

Resumen de operaciones:

Operación	**Factor**	**Precio anterior (€)**	**Precio resultante (€)**
Precio inicial	—	—	1.000,00
Dto. 30 %	× 0,70	1.000,00	700,00
Dto. 20 %	× 0,80	700,00	560,00
IVA 21 %	× 1,21	560,00	677,60

Observación matemática

¿Por qué el descuento total NO es el 30 % + 20 % = 50 %?
Porque el segundo descuento se aplica sobre el precio *ya reducido*, no sobre el original. Matemáticamente:

$$f_1 \times f_2 = (1 - 0{,}30)(1 - 0{,}20) = 0{,}70 \times 0{,}80 = 0{,}56 \neq 1 - 0{,}50 = 0{,}50.$$

La diferencia entre el descuento "esperado" (50 %) y el real (44 %) se explica porque el segundo 20 % recae sobre 700 €, no sobre 1.000 €, de modo que el ahorro absoluto del segundo descuento es $0{,}20 \times 700 = 140$ €, menor que $0{,}20 \times 1.000 = 200$ €.

△ Advertencia – Error frecuente

El IVA se aplica **siempre** sobre el precio final con descuentos, no sobre el precio original. En este problema, el IVA es $0{,}21 \times 560 = 117{,}60$ €, no $0{,}21 \times 1.000 = 210$ €. Aplicar el IVA sobre el precio sin descontar es un error grave de comprensión del funcionamiento del impuesto.

Conclusión

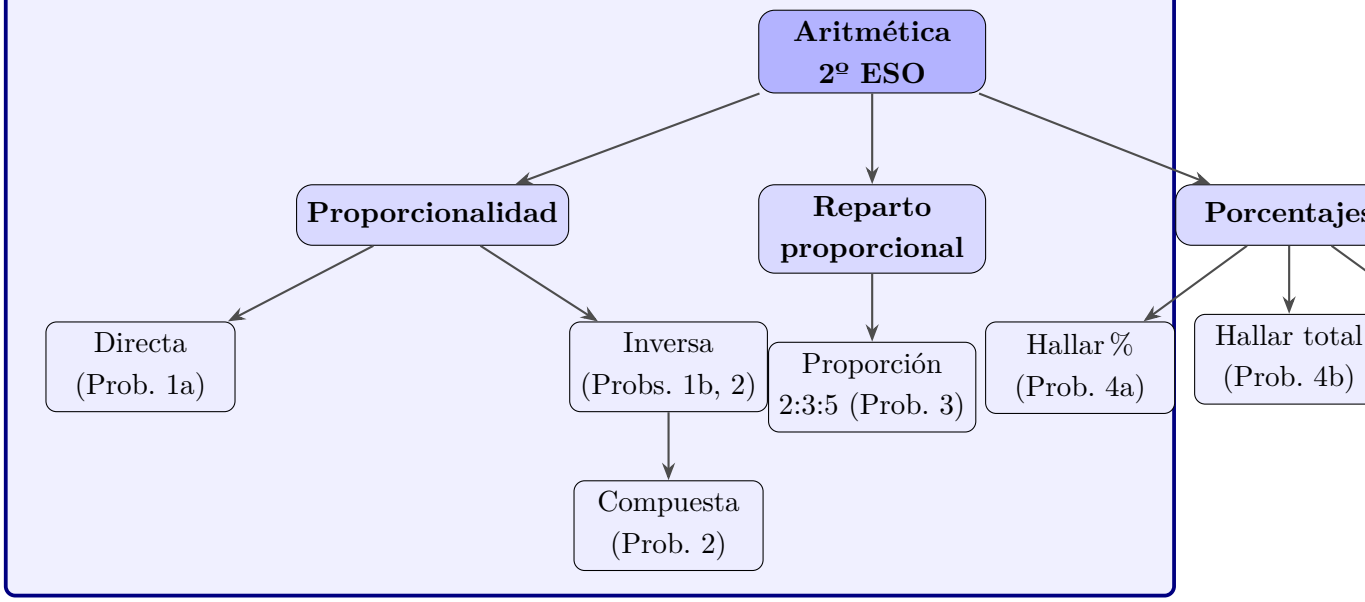
- El precio final del móvil (con todos los descuentos e IVA incluido) es **677,60 €**.
- El descuento total realizado sobre el precio original (sin IVA) es del **44 %**, equivalente a **440 €**.

Capítulo 3

Resumen de resultados

Prob.	Enunciado resumido	Resultado	Pts.
1a	Grifo: nivel en 5 min = 20 cm; nivel en 13 min	**52 cm**	1
1b	4 operarios tardan 5 h; tiempo para 10 operarios	**2 horas**	1
2	12 obreros, 8 h/día, 25 días; 5 obreros, 10 h/día	**48 días**	2
3 Arancha: 75 € Iván: 125 €	Reparto de 250 € en proporción 2:3:5 2	Rafael: 50 €	
4a	6 ausentes de 30 alumnos; % de ausencias	**20 %**	1
4b	210 camas = 84 %; total de camas	**250 camas**	1
5 Dto. total: **44 %**	Móvil 1.000 €; dto.30 % + dto.20 % + IVA 21 % 2	Precio final: **677,60 €**	
		TOTAL	**10**

Mapa conceptual del examen



Capítulo 4

Errores frecuentes y consejos de estudio

1. **Confundir proporcionalidad directa e inversa.**
   Antes de plantear la regla de tres, *razona* el sentido: si la causa aumenta, ¿aumenta o disminuye el efecto? Más tiempo $\rightarrow$ más nivel (directa); más obreros $\rightarrow$ menos tiempo (inversa).

2. **Sumar descuentos porcentuales.**
   Nunca: $30\,\% + 20\,\% = 50\,\%$ de descuento total. El segundo descuento se aplica al precio ya reducido. Usa siempre los factores: $0{,}70 \times 0{,}80 = 0{,}56 \Rightarrow 44\,\%$ de descuento total.

3. **Calcular el total dividiendo por el porcentaje directamente.**
   Si P es el $p\,\%$ de C, entonces $C = P \times 100/p$. No confundir: $C \neq P \times p/100$ (eso daría la parte, no el todo).

4. **Reparto igualitario en lugar de proporcional.**
   Si el enunciado dice "en proporción al trabajo realizado", siempre se divide por la *suma total de partes*, no por el número de personas.

5. **Aplicar el IVA sobre el precio sin descuento.**
   El IVA siempre se aplica sobre el precio *final de venta* (ya con los descuentos aplicados), no sobre el precio de catálogo.

6. **No verificar el resultado.**
   Siempre comprueba: en proporcionalidad, que los cocientes/productos sean iguales; en reparto, que la suma de partes sea el total; en porcentajes, que la parte sea el porcentaje correcto del total.

Apéndice A

Formulario de referencia rápida

Formulario de Aritmética – 2º ESO

Proporcionalidad directa:

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \quad \Rightarrow \quad B_2 = \frac{A_2 \cdot B_1}{A_1}$$

Proporcionalidad inversa:

$$A_1 \cdot B_1 = A_2 \cdot B_2 \quad \Rightarrow \quad B_2 = \frac{A_1 \cdot B_1}{A_2}$$

Proporcionalidad compuesta (trabajo = obreros × horas × días):

$$N_1 \cdot H_1 \cdot D_1 = N_2 \cdot H_2 \cdot D_2$$

Reparto proporcional:

$$u = \frac{C}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}, \qquad p_i = a_i \cdot u$$

Porcentaje de una cantidad:

$$p\,\%\text{ de } C = \frac{p}{100} \cdot C$$

Hallar el porcentaje que representa una parte:

$$p = \frac{\text{parte}}{\text{total}} \times 100$$

Hallar el total conocida la parte y el porcentaje:

$$C = \frac{\text{parte} \times 100}{p}$$

Factor de descuento del $d\,\%$:

$$f = 1 - \frac{d}{100} \quad \Rightarrow \quad P_{\text{final}} = P_0 \cdot f$$

Factor de aumento del $r\,\%$:

$$f = 1 + \frac{r}{100} \quad \Rightarrow \quad P_{\text{final}} = P_0 \cdot f$$

Descuentos/aumentos sucesivos:

$$P_{\text{final}} = P_0 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdots f_n$$

Descuento global equivalente:

$$d_{\text{total}} = (1 - f_1 \cdot f_2 \cdots f_n) \times 100\,\%$$

Junta de Castilla y León
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA

MATEMÁTICAS. ÁLGEBRA

21 -02-2025 EXAMEN 2º ESO B

Nº1.- Enuncia los tres productos notables y da un ejemplo de cada uno.

Nº2.- Llamando x a un número cualquiera, escribe una expresión algebraica para cada uno de los siguientes enunciados.

a) El doble de x.
b) El cuadrado de x.
c) El doble de un número dos unidades mayores que x.
d) El triple del número que resulta de sumar a x una unidad.
e) La diferencia entre el triple de x. y siete unidades

Nº3.- Simplifica al máximo las siguientes operaciones con polinomios.

$a)\ (x^2+4)\cdot(x-3)-(x^2-6)\cdot(x+2)$

$b)\ (3x-2)\cdot(2x+1)+(x-1)\cdot(x+1)$

Nº4.- Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

$a)\ \ x^2+5x-24=0 \qquad b)\ \ 2x^2-18=0 \qquad c)\ \ x^2-4x=0$

Nº5.- Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado. Elimina paréntesis y denominadores operando convenientemente en cada caso. Si es posible, simplifica el resultado:

$$a)\ 3x-5(2x-1)=2(x-4)+7 \qquad b)\ \frac{x-2}{4}-\frac{x}{3}=\frac{3x+1}{6}$$

Nº6.- En un almacén se han repartido 600 kg de harina en dos sacos iguales. ¿Cuántos kilogramos hay que mover de un saco al otro para que el primero quede con la mitad de cantidad que el segundo?

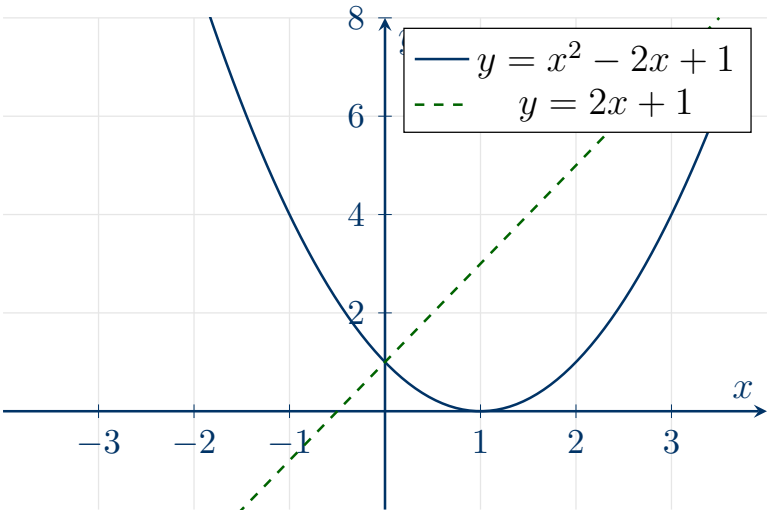
Nº7.- Un agricultor planta la cuarta parte de su terreno con maíz, la mitad con trigo y el resto, que son 150 m², con zanahorias. ¿Cuál es el área total de su terreno?

Nº8.- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{matrix}3x+4y=14\\-2x+5y=6\end{matrix}\right\}$$

SUERTE JÓVENES

MATEMÁTICAS · ÁLGEBRA



SOLUCIONES COMPLETAS Y RAZONADAS

Examen: 2.º ESO – Grupo B

Materia: Matemáticas – Bloque de Álgebra

Fecha del examen: 21 de febrero de 2025

Nivel: Educación Secundaria Obligatoria (E.S.O.)

Centro: IES Tovar – Junta de Castilla y León

Nota para el alumno: Este documento contiene la resolución detallada, paso a paso, de todos los ejercicios del examen. Cada solución incluye la justificación matemática completa, explicaciones pedagógicas, advertencias sobre errores frecuentes y diagramas ilustrativos. Se recomienda leer cada solución comprendiéndola antes de avanzar a la siguiente.

Índice general

1. Introducción y Marco Teórico **2**
1.1. ¿Qué es el Álgebra? . . . 2
1.2. Ecuaciones . . . 2
1.3. Sistemas de Ecuaciones . . . 3

2. Resolución Completa del Examen **4**
Enunciado general del examen . . . 4
2.1. Ejercicio 1 – Productos Notables . . . 5
2.2. Ejercicio 2 – Expresiones Algebraicas . . . 8
2.3. Ejercicio 3 – Operaciones con Polinomios . . . 11
2.4. Ejercicio 4 – Ecuaciones de Segundo Grado . . . 14
2.5. Ejercicio 5 – Ecuaciones de Primer Grado . . . 18
2.6. Ejercicio 6 – Problema de Sacos de Harina . . . 21
2.7. Ejercicio 7 – Problema del Terreno del Agricultor . . . 23
2.8. Ejercicio 8 – Sistema de Ecuaciones . . . 25

3. Resumen de Resultados **28**

Capítulo 1

Introducción y Marco Teórico

Este capítulo recoge brevemente los conceptos fundamentales de álgebra que el alumno de 2.º ESO debe dominar para afrontar con éxito los ejercicios del examen. Se presentan con precisión y rigor, de modo que sirvan como referencia durante la lectura de las soluciones.

1.1 ¿Qué es el Álgebra?

El **Álgebra** es la rama de las Matemáticas que estudia las operaciones y relaciones con cantidades generalizadas mediante el uso de símbolos (habitualmente letras) que representan números desconocidos o variables. A diferencia de la Aritmética, donde operamos con números concretos, el Álgebra nos permite expresar y resolver problemas de forma general.

Expresión algebraica

Una **expresión algebraica** es una combinación de números, variables y operaciones aritméticas. Ejemplos: $3x^2 - 2x + 5$, $\dfrac{x+1}{2}$, $a^2 - b^2$.

Polinomio

Un **polinomio** en la variable x es una expresión de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ son los coeficientes y $n \in \mathbb{N}_0$ es el grado del polinomio (siempre que $a_n \neq 0$).

1.2 Ecuaciones

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que sólo se cumple para ciertos valores de la variable, denominados **soluciones** o **raíces** de la ecuación.

- **Ecuación de primer grado** (lineal): El grado máximo de la variable es 1. Tiene exactamente una solución (si el coeficiente de x es no nulo): $ax + b = 0 \Rightarrow x = -b/a$.

- **Ecuación de segundo grado** (cuadrática): El grado máximo es 2. Forma general: $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$. Sus soluciones se obtienen con la **fórmula cuadrática**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

  El valor $\Delta = b^2 - 4ac$ se llama **discriminante**:

  - $\Delta > 0$: dos soluciones reales distintas.
  - $\Delta = 0$: una solución real doble.
  - $\Delta < 0$: no hay soluciones reales.

1.3 Sistemas de Ecuaciones

Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de ecuaciones con varias incógnitas que deben satisfacerse simultáneamente. Los métodos básicos de resolución son: *sustitución*, *igualación* y *reducción*.

Capítulo 2

Resolución Completa del Examen

Enunciado general del examen

Datos del examen

Asignatura: Matemáticas – Álgebra **Curso:** 2.º ESO – Grupo B **Fecha:** 21-02-2025
Número de ejercicios: 8 El examen abarca los bloques de: productos notables, expresiones algebraicas, operaciones con polinomios, ecuaciones de primero y segundo grado, problemas de planteamiento algebraico y sistemas de ecuaciones.

2.1 Ejercicio 1 – Productos Notables

Enunciado del Ejercicio 1

Enuncia los tres productos notables y da un ejemplo de cada uno.

Marco teórico previo

Los **productos notables** son identidades algebraicas que expresan el producto de ciertas expresiones de forma desarrollada. Se denominan "notables" porque merecen recordarse y reconocerse de inmediato, ya que aparecen con extraordinaria frecuencia en el álgebra. Su conocimiento permite factorizar y simplificar expresiones complejas de manera eficiente.

Los productos notables son *atajos algebraicos*. En lugar de multiplicar factor a factor (con la regla distributiva), podemos aplicar directamente la identidad y obtener el resultado de forma inmediata y sin errores.

Demostración y enunciado de los tres productos notables

Producto Notable 1: Cuadrado de la suma de dos términos

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

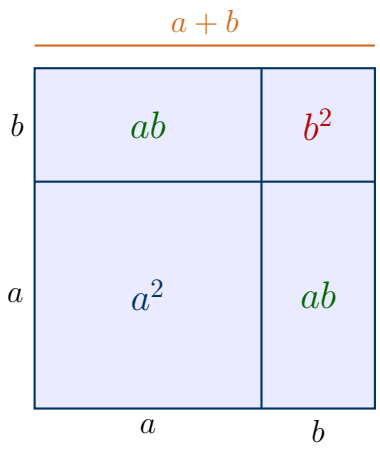
Demostración:

Por definición de potencia cuadrada y aplicando la propiedad distributiva (regla del producto de polinomios):

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)\cdot(a+b)\\ &= a\cdot(a+b) + b\cdot(a+b) \quad \text{[propiedad distributiva]}\\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \quad \text{[volvemos a distribuir]}\\ &= a^2 + ab + ab + b^2 \quad \text{[conmutatividad: } ba = ab\text{]}\\ &= a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{[sumamos los términos semejantes: } ab + ab = 2ab\text{]}\end{aligned}$$

Descripción verbal: El cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al *cuadrado del primero*, más el *doble del producto de ambos*, más el *cuadrado del segundo*.

Ejemplo: $(x+3)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$



Interpretación geométrica: El cuadrado $(a+b)^2$ es el área total del cuadrado de lado $a+b$, que se descompone en cuatro rectángulos:

- Un cuadrado de área a^2 (azul).
- Dos rectángulos de área ab cada uno (verde).
- Un cuadrado de área b^2 (rojo).

Total: $a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Producto Notable 2: Cuadrado de la diferencia de dos términos

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Demostración:

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)\cdot(a-b)\\ &= a\cdot(a-b) - b\cdot(a-b) \quad \text{[propiedad distributiva]}\\ &= a^2 - ab - ba + b^2 \quad \text{[distribuimos de nuevo]}\\ &= a^2 - ab - ab + b^2 \quad \text{[conmutatividad]}\\ &= a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{[sumamos términos semejantes: } -ab - ab = -2ab\text{]}\end{aligned}$$

Descripción verbal: El cuadrado de la diferencia es igual al *cuadrado del primero*, *menos* el *doble del producto de ambos*, más el *cuadrado del segundo*.

Ejemplo: $(2x-5)^2 = (2x)^2 - 2\cdot 2x\cdot 5 + 5^2 = 4x^2 - 20x + 25$

Muchos estudiantes cometen el error de escribir $(a-b)^2 = a^2 - b^2$. Esto es **incorrecto**. El término central $-2ab$ *nunca puede olvidarse*. Recordar: el cuadrado de una diferencia tiene **tres términos**.

Producto Notable 3: Suma por diferencia (diferencia de cuadrados)

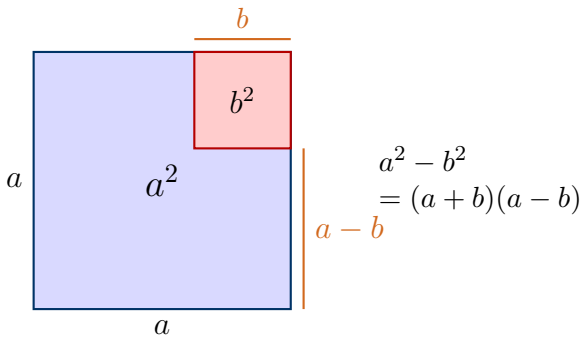
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Demostración:

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a\cdot(a-b)+b\cdot(a-b) \quad \text{[propiedad distributiva]}\\ &= a^2-ab+ba-b^2 \quad \text{[distribuimos de nuevo]}\\ &= a^2-ab+ab-b^2 \quad \text{[conmutatividad]}\\ &= a^2+0-b^2 \quad \text{[los términos } -ab \text{ y } +ab \text{ se cancelan]}\\ &= a^2-b^2\end{aligned}$$

Descripción verbal: La suma de dos términos por su diferencia es igual a la *diferencia de sus cuadrados*. Los términos intermedios se cancelan.

Ejemplo: $(x+4)(x-4) = x^2-4^2 = x^2-16$



(1) $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

(2) $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

(3) $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

2.2 Ejercicio 2 – Expresiones Algebraicas

Enunciado del Ejercicio 2

Llamando x a un número cualquiera, escribe una expresión algebraica para cada uno de los siguientes enunciados:

a) El doble de x.

b) El cuadrado de x.

c) El doble de un número dos unidades mayores que x.

d) El triple del número que resulta de sumar a x una unidad.

e) La diferencia entre el triple de x y siete unidades.

Marco teórico previo

Traducir enunciados verbales a expresiones algebraicas es una destreza fundamental del álgebra. El proceso consiste en identificar:

- La **incógnita** o **variable**: en este caso siempre es x.
- Las **operaciones** que se indican: «doble» significa multiplicar por 2; «cuadrado» significa elevar al cuadrado; «sumar», «restar», «triple» (multiplicar por 3), etc.
- El **orden** de las operaciones: las expresiones entre paréntesis se calculan primero.

Enunciado	Símbolo
Doble de x	$2x$
Triple de x	$3x$
Cuádruplo de x	$4x$
Mitad de x	$x/2$
Cuadrado de x	x^2
n unidades mayor que x	$x+n$
Diferencia entre A y B	$A-B$

Solución apartado a): El doble de x

El enunciado dice «el doble de x». Doblar un número significa multiplicarlo por 2. Por tanto:

$$\boxed{2x}$$

Verificación: Si $x=5$, el doble de 5 es 10. Aplicando la fórmula: $2\cdot 5=10$. ✓

Solución apartado b): El cuadrado de x

El cuadrado de un número es ese número multiplicado por sí mismo, es decir, elevado a la potencia 2:

$$\boxed{x^2}$$

Verificación: Si $x = 4$, el cuadrado de 4 es 16. Aplicando la fórmula: $4^2 = 16$. ✓

Solución apartado c): El doble de un número dos unidades mayor que x

Procedemos por partes:

1. *«Un número dos unidades mayor que x»*: ese número es $x + 2$.
2. *«El doble de ese número»*: multiplicamos $(x + 2)$ por 2.

Por tanto la expresión es:

$$2(x + 2)$$

Podemos también desarrollarla aplicando la propiedad distributiva:

$$2(x + 2) = 2x + 4$$

$$\boxed{2(x + 2) = 2x + 4}$$

Verificación: Si $x = 3$, el número dos unidades mayor es 5, y el doble de 5 es 10. Aplicando la fórmula: $2(3 + 2) = 2 \cdot 5 = 10$. ✓

Un error habitual es escribir $2 \cdot x + 2 = 2x + 2$ en lugar de $2(x + 2) = 2x + 4$. El «doble» se aplica a *todo* el número $(x + 2)$, no sólo a x.

Solución apartado d): El triple del número que resulta de sumar a x una unidad

1. *«El número que resulta de sumar a x una unidad»*: es $x + 1$.
2. *«El triple de ese número»*: multiplicamos $(x + 1)$ por 3.

$$3(x + 1)$$

Desarrollando con la propiedad distributiva:

$$3(x+1) = 3x+3$$

$$\boxed{3(x+1) = 3x+3}$$

Verificación: Si $x = 2$, sumando una unidad obtenemos 3, y el triple de 3 es 9. Aplicando la fórmula: $3(2+1) = 3 \cdot 3 = 9$. ✓

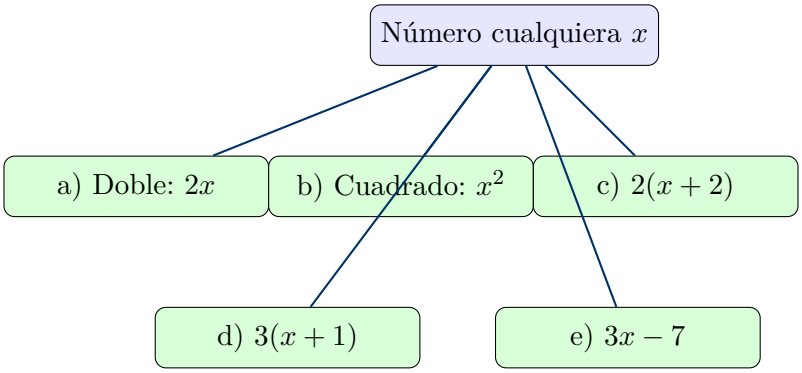
Solución apartado e): La diferencia entre el triple de x y siete unidades

1. *«El triple de x»*: es $3x$.
2. *«La diferencia entre $3x$ y 7»*: significa restar 7 al triple de x.

$$\boxed{3x-7}$$

Verificación: Si $x = 4$, el triple es 12, y la diferencia con 7 es 5. Aplicando la fórmula: $3 \cdot 4 - 7 = 12 - 7 = 5$. ✓

«La diferencia entre A y B» siempre se interpreta como $A - B$, no $B - A$. En este caso, $A = 3x$ y $B = 7$, por lo que la expresión es $3x - 7$ (y *no* $7 - 3x$).



2.3 Ejercicio 3 – Operaciones con Polinomios

Enunciado del Ejercicio 3

Simplifica al máximo las siguientes operaciones con polinomios:

a) $(x^2+4)(x-3)-(x^2-6)(x+2)$

b) $(3x-2)(2x+1)+(x-1)(x+1)$

Marco teórico previo

Para operar con polinomios utilizaremos dos herramientas:

1. **Propiedad distributiva** (regla de multiplicación de polinomios): cada término del primer factor multiplica a *todos* los términos del segundo factor.
2. **Suma de términos semejantes**: sólo pueden sumarse monomios que tienen la misma parte literal (misma variable elevada al mismo exponente). Los coeficientes numéricos se suman/restan y la parte literal se conserva.

Regla del producto de polinomios

$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$
En general, multiplicamos cada término del primero por cada término del segundo (método conocido como «regla de Ruffini» o «tabla de doble entrada»).

Solución apartado a):

$$(x^2+4)(x-3)-(x^2-6)(x+2)$$

Paso 1. Desarrollamos el primer producto $(x^2+4)(x-3)$:

$$\begin{aligned}(x^2+4)(x-3) &= x^2\cdot x + x^2\cdot(-3) + 4\cdot x + 4\cdot(-3)\\ &= x^3-3x^2+4x-12\end{aligned}$$

Paso 2. Desarrollamos el segundo producto $(x^2-6)(x+2)$:

$$\begin{aligned}(x^2-6)(x+2) &= x^2\cdot x + x^2\cdot 2 + (-6)\cdot x + (-6)\cdot 2\\ &= x^3+2x^2-6x-12\end{aligned}$$

Paso 3. Restamos el segundo resultado del primero (atención: el signo $-$ afecta a

todos los términos del segundo polinomio):

$$\begin{aligned}
&(x^3 - 3x^2 + 4x - 12) - (x^3 + 2x^2 - 6x - 12) \\
&= x^3 - 3x^2 + 4x - 12 - x^3 - 2x^2 + 6x + 12 \quad \text{[distribuimos el signo } -\text{]} \\
&= (x^3 - x^3) + (-3x^2 - 2x^2) + (4x + 6x) + (-12 + 12) \quad \text{[agrupamos términos semejantes]} \\
&= 0 - 5x^2 + 10x + 0 \\
&= -5x^2 + 10x
\end{aligned}$$

Paso 4. Comprobamos si podemos simplificar aún más (factorizar):

$$-5x^2 + 10x = -5x(x - 2)$$

$$\boxed{(x^2 + 4)(x - 3) - (x^2 - 6)(x + 2) = -5x^2 + 10x = -5x(x - 2)}$$

Al restar $(x^3 + 2x^2 - 6x - 12)$, debemos cambiar el signo de **todos** sus términos:

$$-(x^3 + 2x^2 - 6x - 12) = -x^3 - 2x^2 + 6x + 12$$

El error más frecuente es olvidar cambiar el signo de -12, convirtiendo incorrectamente $-(-12)$ en -12 en lugar de $+12$.

$(x^2 + 4)(x - 3)$

$x^2 \cdot x = x^3$	$x^2 \cdot (-3) = -3x^2$
$4 \cdot x = 4x$	$4 \cdot (-3) = -12$

$(x^2 - 6)(x + 2)$

$x^2 \cdot x = x^3$	$x^2 \cdot 2 = 2x^2$
$(-6) \cdot x = -6x$	$(-6) \cdot 2 = -12$

Solución apartado b):

$$(3x - 2)(2x + 1) + (x - 1)(x + 1)$$

Paso 1. Desarrollamos el primer producto $(3x - 2)(2x + 1)$:

$$\begin{aligned}
(3x - 2)(2x + 1) &= 3x \cdot 2x + 3x \cdot 1 + (-2) \cdot 2x + (-2) \cdot 1 \\
&= 6x^2 + 3x - 4x - 2 \\
&= 6x^2 - x - 2
\end{aligned}$$

Paso 2. Reconocemos que $(x - 1)(x + 1)$ es una **suma por diferencia** (tercer producto notable), con $a = x$ y $b = 1$:

$$(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1^2 = x^2 - 1$$

Paso 3. Sumamos ambos resultados:

$$\begin{aligned}(6x^2 - x - 2) + (x^2 - 1) &= 6x^2 - x - 2 + x^2 - 1 \quad \text{[eliminamos paréntesis, signo + no cambia nada]}\\ &= (6x^2 + x^2) + (-x) + (-2 - 1) \quad \text{[agrupamos términos semejantes]}\\ &= 7x^2 - x - 3\end{aligned}$$

$$\boxed{(3x - 2)(2x + 1) + (x - 1)(x + 1) = 7x^2 - x - 3}$$

Nota: Este polinomio de grado 2 no puede simplificarse más (sus coeficientes 7, -1 y -3 no tienen factor común distinto de 1, y la expresión no factoriza de forma elemental).

En el apartado b), reconocer $(x - 1)(x + 1)$ como el tercer producto notable ahorra pasos de cálculo. Siempre merece la pena identificar los productos notables antes de multiplicar término a término.

2.4 Ejercicio 4 – Ecuaciones de Segundo Grado

Enunciado del Ejercicio 4

Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 + 5x - 24 = 0$

b) $2x^2 - 18 = 0$

c) $x^2 - 4x = 0$

Marco teórico previo

Una **ecuación de segundo grado** (o cuadrática) tiene la forma general:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

La herramienta principal para resolverla es la **fórmula cuadrática** (también llamada fórmula general o fórmula de Bhaskara):

Fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde $\Delta = b^2 - 4ac$ se denomina **discriminante**:

- Si $\Delta > 0$: dos soluciones reales distintas $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ y $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$: una solución real doble $x = \dfrac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$: no existen soluciones reales.

- **Ecuación incompleta de tipo I** ($b = 0$): $ax^2 + c = 0$. Se despeja x^2 directamente.
- **Ecuación incompleta de tipo II** ($c = 0$): $ax^2 + bx = 0$. Se saca factor común x.
- **Ecuación completa** ($a, b, c \neq 0$): requiere la fórmula cuadrática o factorización.

Solución apartado a): $x^2 + 5x - 24 = 0$

Identificamos los coeficientes:

$$a = 1, \quad b = 5, \quad c = -24$$

Paso 1. Calculamos el discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24) = 25 + 96 = 121$$

Como $\Delta = 121 > 0$, existen dos soluciones reales distintas.
Paso 2. Calculamos $\sqrt{\Delta}$:

$$\sqrt{121} = 11 \quad \text{(ya que } 11^2 = 121\text{)}$$

Paso 3. Aplicamos la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-5 \pm 11}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm 11}{2}$$

Paso 4. Obtenemos las dos soluciones:

$$x_1 = \frac{-5 + 11}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{-5 - 11}{2} = \frac{-16}{2} = -8$$

$$\boxed{x_1 = 3 \qquad x_2 = -8}$$

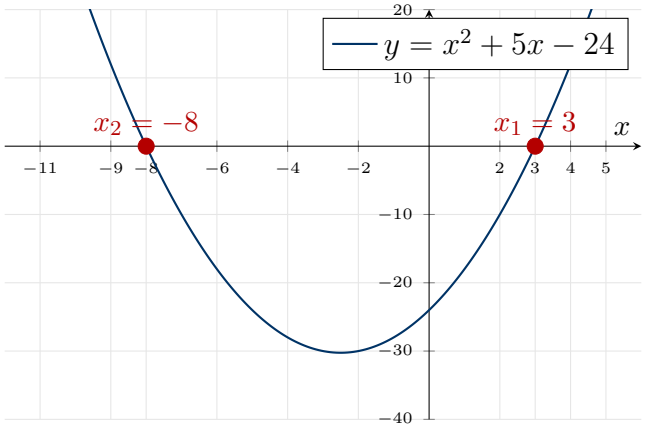
Verificación:

- $x_1 = 3$: $\quad 3^2 + 5 \cdot 3 - 24 = 9 + 15 - 24 = 0$ ✓
- $x_2 = -8$: $\quad (-8)^2 + 5 \cdot (-8) - 24 = 64 - 40 - 24 = 0$ ✓

Interpretación: El polinomio $x^2 + 5x - 24$ se puede factorizar como:

$$x^2 + 5x - 24 = (x - 3)(x + 8)$$

Los ceros de la parábola $y = x^2 + 5x - 24$ son $x = 3$ y $x = -8$.



Solución apartado b): $2x^2 - 18 = 0$

Esta ecuación es de la forma $ax^2 + c = 0$ (el término en x no aparece, pues $b = 0$). Se resuelve despejando x^2 directamente, sin necesidad de la fórmula general.

Paso 1. Pasamos el término independiente al otro lado:

$$2x^2 - 18 = 0 \implies 2x^2 = 18$$

Paso 2. Dividimos ambos miembros por el coeficiente de x^2:

$$x^2 = \frac{18}{2} = 9$$

Paso 3. Aplicamos la raíz cuadrada en ambos miembros. Recordamos que $\sqrt{x^2} = |x|$, lo que da dos soluciones de signos opuestos:

$$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

$$\boxed{x_1 = 3 \qquad x_2 = -3}$$

Verificación:

- $x_1 = 3$: $\quad 2 \cdot 9 - 18 = 18 - 18 = 0$ ✓
- $x_2 = -3$: $\quad 2 \cdot 9 - 18 = 18 - 18 = 0$ ✓

Nota: Podría también haberse aplicado la fórmula cuadrática con $a = 2$, $b = 0$, $c = -18$, obteniendo el mismo resultado: $\Delta = 0 - 4 \cdot 2 \cdot (-18) = 144$, $\sqrt{144} = 12$, $x = \dfrac{0 \pm 12}{4} = \pm 3$.

Al tomar raíz cuadrada de $x^2 = 9$, un error común es escribir sólo $x = 3$ y olvidar la solución negativa $x = -3$. Siempre que se despeja x^2, la solución tiene **dos valores**: $x = +\sqrt{k}$ y $x = -\sqrt{k}$ (siempre que $k > 0$).

Solución apartado c): $x^2 - 4x = 0$

Esta ecuación es de la forma $ax^2 + bx = 0$ (el término independiente es cero). Se resuelve sacando **factor común** x.
Paso 1. Factorizamos el miembro izquierdo:

$$x^2 - 4x = x \cdot x - x \cdot 4 = x(x-4) = 0$$

Paso 2. Aplicamos la **regla del producto nulo**: un producto es cero si y sólo si alguno de sus factores es cero.

$$x(x-4) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 & \text{(primer factor)} \\ x - 4 = 0 \implies x = 4 & \text{(segundo factor)} \end{cases}$$

$$\boxed{x_1 = 0 \qquad x_2 = 4}$$

Verificación:

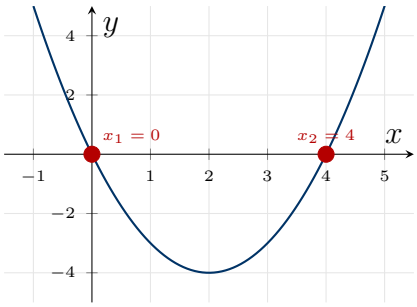
- $x_1 = 0$: $0^2 - 4 \cdot 0 = 0 - 0 = 0$ ✓
- $x_2 = 4$: $4^2 - 4 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$ ✓

Nunca se debe dividir ambos miembros por x:

$$x^2 - 4x = 0 \xrightarrow{\text{INCORRECTO}} x - 4 = 0 \implies x = 4$$

Esto es incorrecto porque al dividir por x asumimos implícitamente que $x \neq 0$, y perdemos la solución $x = 0$. **Siempre** se debe sacar factor común y aplicar la regla del producto nulo.

$y = x^2 - 4x$



2.5 Ejercicio 5 – Ecuaciones de Primer Grado

Enunciado del Ejercicio 5

Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado. Elimina paréntesis y denominadores operando convenientemente en cada caso. Si es posible, simplifica el resultado:

a) $3x - 5(2x - 1) = 2(x - 4) + 7$

b) $\dfrac{x-2}{4} - \dfrac{x}{3} = \dfrac{3x+1}{6}$

Marco teórico previo

Una **ecuación de primer grado** con una incógnita x es de la forma:

$$ax + b = 0, \quad a \neq 0 \implies x = -\frac{b}{a}$$

La estrategia de resolución sigue estos pasos:

1. **Eliminar paréntesis**: aplicando la propiedad distributiva.
2. **Eliminar denominadores** (si los hay): multiplicando todos los términos por el **mínimo común múltiplo (m.c.m.)** de los denominadores.
3. **Agrupar**: términos con x en un lado, términos numéricos en el otro.
4. **Despejar** x: dividir por su coeficiente.
5. **Verificar** la solución sustituyendo en la ecuación original.

Solución apartado a): $3x - 5(2x - 1) = 2(x - 4) + 7$

Paso 1. Eliminar paréntesis (aplicamos la propiedad distributiva en cada par):

$$3x - 5(2x - 1) = 2(x - 4) + 7$$
$$3x - 10x + 5 = 2x - 8 + 7 \quad [-5 \cdot 2x = -10x;\ -5 \cdot (-1) = +5;\ 2 \cdot x = 2x;\ 2 \cdot (-4) = -8]$$

Paso 2. Simplificar cada miembro (combinar términos semejantes):

$$(3x - 10x) + 5 = 2x + (-8 + 7)$$
$$-7x + 5 = 2x - 1$$

Paso 3. Pasar todos los términos con x al miembro izquierdo y los numéricos al derecho:

$$-7x + 5 = 2x - 1$$
$$-7x - 2x = -1 - 5 \quad [\text{restamos } 2x \text{ en ambos miembros y sumamos } -5]$$
$$-9x = -6$$

Paso 4. Despejar x (dividir ambos miembros por -9):

$$x = \frac{-6}{-9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{x = \frac{2}{3}}$$

Verificación (sustituimos $x = \frac{2}{3}$ en la ecuación original):

$$\text{Miembro izquierdo:} \quad 3 \cdot \frac{2}{3} - 5\left(2 \cdot \frac{2}{3} - 1\right) = 2 - 5\left(\frac{4}{3} - 1\right) = 2 - 5 \cdot \frac{1}{3} = 2 - \frac{5}{3} = \frac{6}{3} - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Miembro derecho:} \quad 2\left(\frac{2}{3} - 4\right) + 7 = 2 \cdot \frac{2 - 12}{3} + 7 = 2 \cdot \left(-\frac{10}{3}\right) + 7 = -\frac{20}{3} + \frac{21}{3} = \frac{1}{3}$$

Ambos miembros son iguales a $\frac{1}{3}$. ✓

Solución apartado b): $\dfrac{x-2}{4} - \dfrac{x}{3} = \dfrac{3x+1}{6}$

Paso 1. Encontrar el m.c.m. de los denominadores 4, 3 **y** 6**:**

$$4 = 2^2$$
$$3 = 3$$
$$6 = 2 \cdot 3$$
$$\text{m.c.m.}(4, 3, 6) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

Paso 2. Multiplicar todos los términos por 12 (el m.c.m.):

$$12 \cdot \frac{x-2}{4} - 12 \cdot \frac{x}{3} = 12 \cdot \frac{3x+1}{6}$$

Simplificamos cada fracción:

$$\frac{12}{4}(x-2) - \frac{12}{3} \cdot x = \frac{12}{6}(3x+1)$$
$$3(x-2) - 4x = 2(3x+1)$$

Paso 3. Eliminar los paréntesis restantes:

$$3x - 6 - 4x = 6x + 2$$
$$-x - 6 = 6x + 2 \quad \text{[combinamos: } 3x - 4x = -x\text{]}$$

Paso 4. Agrupar términos con x **a la izquierda y numéricos a la derecha:**

$$-x - 6 = 6x + 2$$
$$-x - 6x = 2 + 6 \quad \text{[restamos } 6x \text{ en ambos lados; sumamos 6 en ambos]}$$
$$-7x = 8$$

Paso 5. Despejar x:

$$x = \frac{8}{-7} = -\frac{8}{7}$$

$$\boxed{x = -\frac{8}{7}}$$

Verificación (sustituimos $x = -\frac{8}{7}$):
Miembro izquierdo:

$$\frac{-\frac{8}{7} - 2}{4} - \frac{-\frac{8}{7}}{3} = \frac{\frac{-8-14}{7}}{4} - \frac{-8}{21} = \frac{-22}{28} + \frac{8}{21} = -\frac{11}{14} + \frac{8}{21}$$

Buscamos denominador común de 14 y 21: m.c.m.$(14, 21) = 42$:

$$= -\frac{33}{42} + \frac{16}{42} = -\frac{17}{42}$$

Miembro derecho:

$$\frac{3 \cdot (-\frac{8}{7}) + 1}{6} = \frac{-\frac{24}{7} + 1}{6} = \frac{\frac{-24+7}{7}}{6} = \frac{-17}{42}$$

Ambos miembros son iguales a $-\frac{17}{42}$. ✓

Multiplicar todos los términos de la ecuación por el m.c.m. de los denominadores es el método más sistemático y evita errores. Se garantiza que todos los denominadores desaparecen y se obtiene una ecuación equivalente sin fracciones.

2.6 Ejercicio 6 – Problema de Sacos de Harina

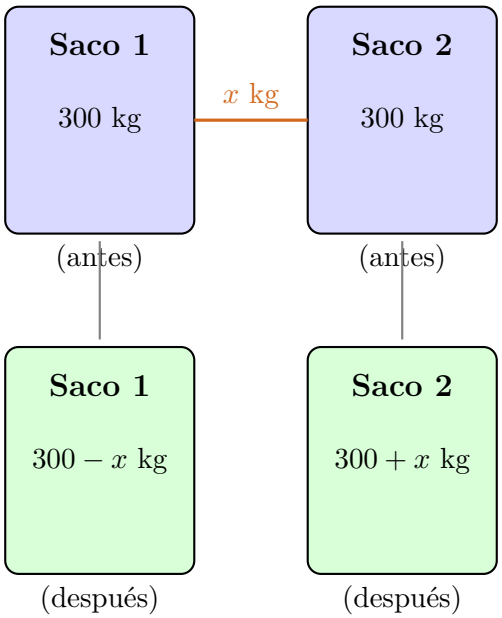
Enunciado del Ejercicio 6

En un almacén se han repartido 600 kg de harina en dos sacos iguales. ¿Cuántos kilogramos hay que mover de un saco al otro para que el primero quede con la mitad de cantidad que el segundo?

Comprensión del problema

Antes de plantear la ecuación, conviene entender bien la situación:

- Los 600 kg se reparten inicialmente en dos sacos *iguales*, por lo que cada saco contiene $600/2 = 300$ kg.
- Se mueven x kg de un saco al otro.
- Tras el movimiento: el *primer* saco pierde x kg y queda con $300 - x$ kg; el *segundo* saco gana x kg y queda con $300 + x$ kg.
- La condición es que el primero tenga la mitad que el segundo: $300 - x = \dfrac{1}{2}(300 + x)$.



Planteamiento algebraico

Sea x el número de kilogramos que se mueven del primer saco al segundo.

Datos:

$$\begin{aligned} \text{Contenido inicial de cada saco:} &\quad 300 \text{ kg} \\ \text{Saco 1 después del traslado:} &\quad 300 - x \text{ kg} \\ \text{Saco 2 después del traslado:} &\quad 300 + x \text{ kg} \end{aligned}$$

Condición del problema: el saco 1 debe quedar con la *mitad* del saco 2:

$$300 - x = \frac{1}{2}(300 + x)$$

Paso 1. Multiplicamos ambos miembros por 2 para eliminar el denominador:

$$2(300 - x) = 300 + x$$

Paso 2. Eliminamos los paréntesis:

$$600 - 2x = 300 + x$$

Paso 3. Agrupamos términos:

$$\begin{aligned} 600 - 300 &= x + 2x \\ 300 &= 3x \end{aligned}$$

Paso 4. Despejamos x:

$$x = \frac{300}{3} = 100 \text{ kg}$$

$$\boxed{x = 100 \text{ kg}}$$

Verificación:

- Saco 1 tras el traslado: $300 - 100 = 200$ kg.
- Saco 2 tras el traslado: $300 + 100 = 400$ kg.
- Comprobación de la condición: $\dfrac{400}{2} = 200$ ✓
- Conservación de la masa total: $200 + 400 = 600$ kg ✓

Respuesta: Hay que mover **100 kg** del primer saco al segundo para que el primero quede con la mitad que el segundo.

Notemos que $200 = \frac{1}{2} \cdot 400$. La condición se cumple. Además, el total de harina se conserva: $200 + 400 = 600$ kg. El modelo es coherente.

2.7 Ejercicio 7 – Problema del Terreno del Agricultor

Enunciado del Ejercicio 7

Un agricultor planta la cuarta parte de su terreno con maíz, la mitad con trigo y el resto, que son 150 m², con zanahorias. ¿Cuál es el área total de su terreno?

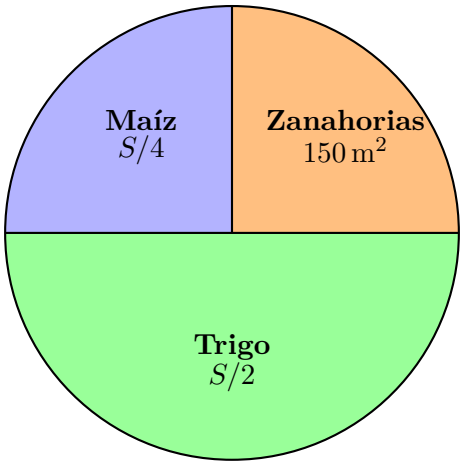
Comprensión del problema

El terreno total se distribuye en tres cultivos:

- Maíz: $\frac{1}{4}$ del total.
- Trigo: $\frac{1}{2}$ del total.
- Zanahorias: el resto, que es $150\,\mathrm{m}^2$.

La clave es que las tres partes suman el total. Si llamamos S al área total:

$$\text{Maíz} + \text{Trigo} + \text{Zanahorias} = S$$



Terreno total $= S$

Definición de la variable:
Sea S el área total del terreno (en m²).
Planteamiento de la ecuación:
La suma de todas las partes es igual al total:

$$\underbrace{\frac{S}{4}}_{\text{maíz}} + \underbrace{\frac{S}{2}}_{\text{trigo}} + \underbrace{150}_{\text{zanahorias}} = S$$

Paso 1. Calculamos el m.c.m. de los denominadores (4 y 2):

$$\text{m.c.m.}(4, 2) = 4$$

Paso 2. Multiplicamos toda la ecuación por 4:

$$4 \cdot \frac{S}{4} + 4 \cdot \frac{S}{2} + 4 \cdot 150 = 4 \cdot S$$

$$S + 2S + 600 = 4S$$

Paso 3. Combinamos los términos con S en el miembro izquierdo:

$$3S + 600 = 4S$$

Paso 4. Despejamos S (pasamos $3S$ al miembro derecho):

$$600 = 4S - 3S = S$$

$$S = 600 \text{ m}^2$$

$$\boxed{S = 600 \text{ m}^2}$$

Verificación:

- Maíz: $\dfrac{600}{4} = 150\,\text{m}^2$
- Trigo: $\dfrac{600}{2} = 300\,\text{m}^2$
- Zanahorias: $150\,\text{m}^2$ (dato)
- Total: $150 + 300 + 150 = 600\,\text{m}^2$ ✓

Respuesta: El área total del terreno del agricultor es de **600 m²**.

Observemos que maíz y zanahorias ocupan, cada uno, $\frac{1}{4}$ del terreno ($150\,\text{m}^2$), y el trigo ocupa la mitad ($300\,\text{m}^2$). En efecto, $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1+2+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$ (el total). Esto confirma que el enunciado es coherente.

2.8 Ejercicio 8 – Sistema de Ecuaciones

Enunciado del Ejercicio 8

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 14 \\ -2x + 5y = 6 \end{cases}$$

Marco teórico previo

Un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas** tiene la forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Los tres métodos principales de resolución son:

1. **Sustitución**: despejar una incógnita en una ecuación y sustituir en la otra.
2. **Igualación**: despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones e igualar.
3. **Reducción (eliminación)**: multiplicar las ecuaciones por constantes adecuadas para que al sumarlas se elimine una incógnita.

En este ejercicio emplearemos el **método de reducción**, pues los coeficientes de x son 3 y -2, y el m.c.m. de 3 y 2 es 6, lo que permite eliminar x de forma sencilla. También presentaremos la solución gráfica para una mejor comprensión.

Resolución por el método de reducción

Sistema:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 14 & (1) \\ -2x + 5y = 6 & (2) \end{cases}$$

Paso 1. Decidimos eliminar la incógnita x. Para ello necesitamos que los coeficientes de x sean opuestos (iguales en valor absoluto y de signos contrarios). Los coeficientes son 3 y -2.
Multiplicamos la ecuación (1) por 2 y la ecuación (2) por 3:

$$\begin{aligned} (1) \times 2: \quad & 2(3x + 4y) = 2 \cdot 14 && \Longrightarrow\ 6x + 8y = 28 \quad (1') \\ (2) \times 3: \quad & 3(-2x + 5y) = 3 \cdot 6 && \Longrightarrow\ -6x + 15y = 18 \quad (2') \end{aligned}$$

Paso 2. Sumamos $(1')$ y $(2')$ miembro a miembro (los términos en x se cancelan):

$$\begin{aligned}(1')+(2'): \quad & (6x-6x)+(8y+15y)=28+18\\ & 0+23y=46\\ & 23y=46\end{aligned}$$

Paso 3. Despejamos y:

$$y=\frac{46}{23}=2$$

Paso 4. Sustituimos $y=2$ en la ecuación (1) para hallar x:

$$\begin{aligned}3x+4\cdot 2&=14\\ 3x+8&=14\\ 3x&=14-8\\ 3x&=6\\ x&=\frac{6}{3}=2\end{aligned}$$

$$\boxed{x=2, \quad y=2}$$

Verificación en ambas ecuaciones:

- En (1): $3\cdot 2+4\cdot 2=6+8=14$ ✓
- En (2): $-2\cdot 2+5\cdot 2=-4+10=6$ ✓

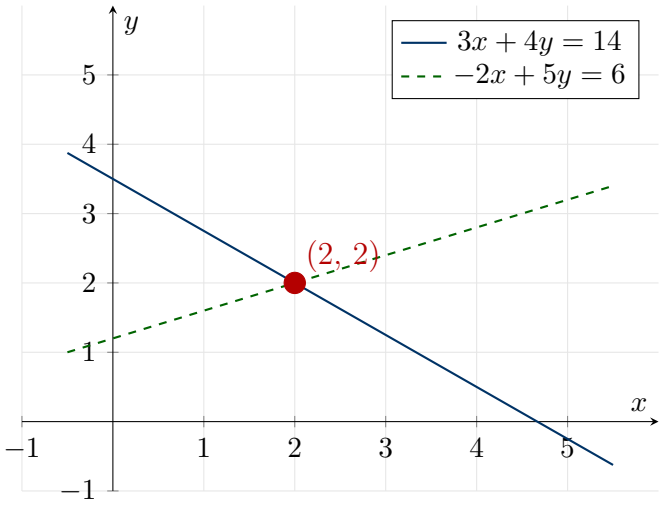
Conclusión: La solución del sistema es el par ordenado $(x,y)=(2,2)$. Geométricamente, esto significa que las dos rectas se cortan en el punto $(2,2)$.

Interpretación gráfica

Cada ecuación del sistema representa una recta en el plano. La solución del sistema es el punto de intersección de ambas rectas.

Ecuación (1)**:** $3x+4y=14 \implies y=\dfrac{14-3x}{4}$

Ecuación (2)**:** $-2x+5y=6 \implies y=\dfrac{6+2x}{5}$



El sistema tiene una única solución $(2, 2)$, lo que indica que las dos rectas son *secantes* (se cortan en un único punto). Esto se denomina sistema **compatible determinado**. Si las rectas fueran paralelas, no habría solución (sistema incompatible); si coincidieran, habría infinitas soluciones (sistema compatible indeterminado).

Capítulo 3

Resumen de Resultados

Tabla de resultados del examen – Álgebra 2.º ESO B

N.º	Ejercicio	Resultado
1	Productos notables	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
2a	El doble de x	$2x$
2b	El cuadrado de x	x^2
2c	El doble de un n.º dos u. mayor que x	$2(x+2) = 2x+4$
2d	El triple de $(x+1)$	$3(x+1) = 3x+3$
2e	La diferencia entre $3x$ y 7	$3x - 7$
3a	$(x^2+4)(x-3) - (x^2-6)(x+2)$	$-5x^2 + 10x = -5x(x-2)$
3b	$(3x-2)(2x+1) + (x-1)(x+1)$	$7x^2 - x - 3$
4a	$x^2 + 5x - 24 = 0$	$x_1 = 3, \quad x_2 = -8$
4b	$2x^2 - 18 = 0$	$x_1 = 3, \quad x_2 = -3$
4c	$x^2 - 4x = 0$	$x_1 = 0, \quad x_2 = 4$
5a	$3x - 5(2x-1) = 2(x-4) + 7$	$x = \dfrac{2}{3}$
5b	$\dfrac{x-2}{4} - \dfrac{x}{3} = \dfrac{3x+1}{6}$	$x = -\dfrac{8}{7}$
6	Problema de los sacos de harina	Mover **100** kg
7	Problema del terreno del agricultor	Área total = **600** m^2
8	Sistema de ecuaciones $3x + 4y = 14$, $-2x + 5y = 6$	$x = 2, \quad y = 2$

Consejos finales para el estudio

1. **Memoriza los tres productos notables** con sus fórmulas exactas. Practica reconociéndolos al revés (factorización).
2. **En las ecuaciones de segundo grado**, identifica siempre el tipo (completa, incompleta tipo I o tipo II) antes de elegir el método.
3. **Verifica siempre** tus soluciones sustituyendo en la ecuación original. Es el método más seguro de detectar errores.
4. **En los problemas**, define claramente la incógnita, plantea la ecuación con rigor y responde a la pregunta con sus unidades.
5. **En los sistemas**, comprueba la solución en *ambas* ecuaciones, no sólo en una.
6. **Cuidado con los signos**: la mayor fuente de errores en álgebra son los signos negativos al distribuir o al restar polinomios.

¡Mucho ánimo en el examen! $\sqrt{\text{esfuerzo}^2 + \text{dedicación}^2} = \text{éxito}$

Junta de Castilla y León
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA

MATEMÁTICAS. ÁLGEBRA

21 -02-2025 EXAMEN 2º ESO B

Nº1.- Enuncia los tres productos notables y da un ejemplo de cada uno.

Nº2.- Llamando x a un número cualquiera, escribe una expresión algebraica para cada uno de los siguientes enunciados.

a) El doble de x.
b) El cuadrado de x.
c) El doble de un número dos unidades mayores que x.
d) El triple del número que resulta de sumar a x una unidad.
e) La diferencia entre el triple de x. y siete unidades

Nº3.- Simplifica al máximo las siguientes operaciones con polinomios.

$a)\ (x^2+4)\cdot(x-3)-(x^2-6)\cdot(x+2)$

$b)\ (3x-2)\cdot(2x+1)+(x-1)\cdot(x+1)$

Nº4.- Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

$a)\ \ x^2+5x-24=0 \qquad b)\ \ 2x^2-18=0 \qquad c)\ \ x^2-4x=0$

Nº5.- Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado. Elimina paréntesis y denominadores operando convenientemente en cada caso. Si es posible, simplifica el resultado:

$$a)\ 3x-5(2x-1)=2(x-4)+7 \qquad b)\ \frac{x-2}{4}-\frac{x}{3}=\frac{3x+1}{6}$$

Nº6.- En un almacén se han repartido 600 kg de harina en dos sacos iguales. ¿Cuántos kilogramos hay que mover de un saco al otro para que el primero quede con la mitad de cantidad que el segundo?

Nº7.- Un agricultor planta la cuarta parte de su terreno con maíz, la mitad con trigo y el resto, que son 150 m², con zanahorias. ¿Cuál es el área total de su terreno?

Nº8.- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{matrix}3x+4y=14\\-2x+5y=6\end{matrix}\right\}$$

SUERTE JÓVENES

$$x^2 + bx + c = 0$$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\qquad$ $ax + b = 0$

MATEMÁTICAS

ÁLGEBRA

Examen · 2.º ESO B

21 de febrero de 2025

Soluciones completas y pedagógicas

Cada ejercicio desarrollado paso a paso con rigor matemático, explicaciones exhaustivas y recursos visuales.

IES Tovar · Junta de Castilla y León

Presentación del documento

Este documento contiene las **soluciones completas y pedagógicas** del examen de Matemáticas (Álgebra) correspondiente al curso **2.º ESO B**, celebrado el 21 de febrero de 2025 en el IES Tovar (Castilla y León).

Metodología:

- Cada ejercicio se resuelve *sin omitir ningún paso*.
- Cada transformación algebraica está justificada explícitamente.
- Se incluyen *advertencias* sobre errores comunes.
- Se añaden *diagramas y figuras* para facilitar la comprensión.
- Se citan los *fundamentos teóricos* necesarios en cada caso.

Contenidos del examen:

1. Productos notables.
2. Expresiones algebraicas.
3. Operaciones con polinomios.
4. Ecuaciones de segundo grado.
5. Ecuaciones de primer grado.
6. Problema de sacos de harina (planteamiento algebraico).
7. Problema del terreno agrícola (fracciones y álgebra).
8. Sistema de ecuaciones lineales.

Índice general

Examen — Matemáticas · Álgebra · 2.º ESO B **3**
Ejercicio N.º 1 — Productos notables 4
Ejercicio N.º 2 — Expresiones algebraicas 7
Ejercicio N.º 3 — Operaciones con polinomios 9
Ejercicio N.º 4 — Ecuaciones de segundo grado 12
Ejercicio N.º 5 — Ecuaciones de primer grado 16
Ejercicio N.º 6 — Problema de los sacos de harina 20
Ejercicio N.º 7 — Problema del terreno agrícola 22
Ejercicio N.º 8 — Sistema de ecuaciones 24
Resumen de soluciones 27

Examen — Matemáticas · Álgebra · 2.º ESO B

Ejercicio N.º 1 — Productos notables

Enunciado

Enuncia los tres productos notables y da un ejemplo de cada uno.

Marco teórico: ¿Qué es un producto notable?

Un **producto notable** es el resultado de multiplicar dos expresiones algebraicas de una forma tan frecuente que merece memorizarse como fórmula. Estas identidades permiten *factorizar* (escribir como producto) o *desarrollar* (escribir como suma) ciertos polinomios de forma inmediata, sin necesidad de hacer la multiplicación término a término.

Producto Notable 1: Cuadrado de una suma

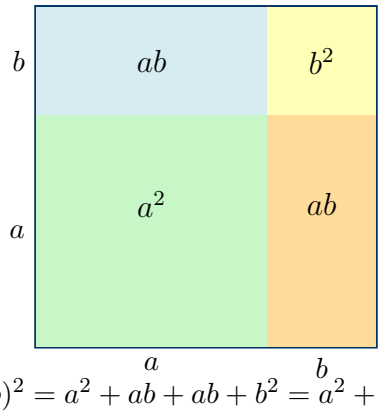
Identidad 1 — Cuadrado de la suma

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2} \tag{1}$$

Demostración: Esta identidad se obtiene multiplicando $(a+b)$ por sí mismo aplicando la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) && (2)\\
&= a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b \quad \text{(distributiva doble)} && (3)\\
&= a^2 + ab + ab + b^2 \quad \text{(propiedad conmutativa: } ba = ab\text{)} && (4)\\
&= a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{(se suman los términos semejantes)} && (5)
\end{aligned}$$

Interpretación geométrica:



$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Ejemplo concreto:

$$(x+3)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

Verificación numérica con $x = 2$:

$$(2+3)^2 = 5^2 = 25; \quad 4 + 12 + 9 = 25\checkmark$$

Advertencia — Error frecuente

Un error muy común es escribir $(a+b)^2 = a^2 + b^2$, **olvidando el término central** $2ab$. Recuerda que el cuadrado de una suma *nunca* es igual a la suma de los cuadrados (salvo que $a = 0$ o $b = 0$).

Producto Notable 2: Cuadrado de una diferencia

Identidad 2 — Cuadrado de la diferencia

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2} \tag{6}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
(a-b)^2 &= (a-b)(a-b) && (7)\\
&= a \cdot a + a \cdot (-b) + (-b) \cdot a + (-b)(-b) && (8)\\
&= a^2 - ab - ab + b^2 && (9)\\
&= a^2 - 2ab + b^2 && (10)
\end{aligned}$$

Observación: Esta fórmula es análoga a la anterior, pero el término central cambia de signo. Podemos obtenerla directamente de la primera sustituyendo b por $(-b)$:

$$(a + (-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ejemplo concreto:

$$(2x-5)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot (2x) \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 - 20x + 25$$

Verificación numérica con $x = 3$:

$$(6-5)^2 = 1^2 = 1; \quad 4(9) - 20(3) + 25 = 36 - 60 + 25 = 1\checkmark$$

Producto Notable 3: Suma por diferencia (diferencia de cuadrados)

Identidad 3 — Suma por diferencia

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2} \tag{11}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a\cdot a + a\cdot(-b) + b\cdot a + b\cdot(-b) && (12)\\ &= a^2 - ab + ab - b^2 && (13)\\ &= a^2 + \cancelto{0}{(-ab+ab)} - b^2 && (14)\\ &= a^2 - b^2 && (15)\end{aligned}$$

Los términos $-ab$ y $+ab$ se cancelan mutuamente, dando lugar a una expresión muy compacta: **diferencia de cuadrados**.

Ejemplo concreto:

$$(x+4)(x-4) = x^2 - 4^2 = x^2 - 16$$

Verificación numérica con $x = 5$:

$$(9)(1) = 9; \quad 25 - 16 = 9\checkmark$$

Aplicación práctica — Cálculo mental:

$$49 \times 51 = (50+1)(50-1) = 50^2 - 1^2 = 2500 - 1 = 2499$$

Resumen visual de los tres productos notables

Tabla resumen

N.º	Identidad	Ejemplo
1	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$
2	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(2x-5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$
3	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	$(x+4)(x-4) = x^2 - 16$

Ejercicio N.º 2 — Expresiones algebraicas

Enunciado

Llamando x a un número cualquiera, escribe una expresión algebraica para cada uno de los siguientes enunciados:

a) El doble de x.

b) El cuadrado de x.

c) El doble de un número dos unidades mayores que x.

d) El triple del número que resulta de sumar a x una unidad.

e) La diferencia entre el triple de x y siete unidades.

Marco teórico: Lenguaje algebraico

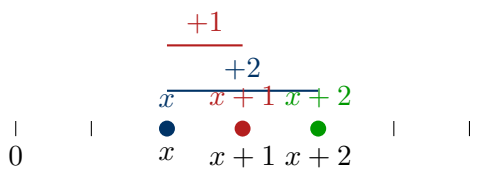
El **lenguaje algebraico** es una forma de representar enunciados verbales mediante símbolos matemáticos. Para traducir correctamente un enunciado:

1. Identifica la *variable* (el número desconocido o genérico).
2. Identifica las *operaciones* que se indican con palabras clave.
3. Escribe la expresión respetando el *orden* que impone el enunciado.

Tabla de palabras clave:

Palabra/frase	Operación
el doble de …	$2 \cdot (\ldots)$
el triple de …	$3 \cdot (\ldots)$
el cuadrado de …	$(\ldots)^2$
dos unidades mayores que x	$x + 2$
sumar una unidad a x	$x + 1$
la diferencia entre A y B	$A - B$

Dibujo auxiliar — Interpretación de las operaciones



Soluciones

a) El doble de x:
La palabra *doble* significa multiplicar por 2. Por tanto:

$$\boxed{2x}$$

b) El cuadrado de x:
El *cuadrado* de un número es ese número multiplicado por sí mismo, es decir, elevado a la potencia 2:

$$\boxed{x^2}$$

c) El doble de un número dos unidades mayores que x:
Analizamos en dos pasos:

- «Un número dos unidades mayor que x»: ese número es $x + 2$.
- «El doble de ese número»: $2 \cdot (x + 2)$.

Desarrollamos usando la propiedad distributiva:

$$2(x + 2) = 2x + 4$$

$$\boxed{2(x + 2) = 2x + 4}$$

Nota: El enunciado puede dejarse factorizado como $2(x+2)$ o desarrollado como $2x + 4$; ambas formas son correctas y equivalentes.

d) El triple del número que resulta de sumar a x una unidad:

- «Sumar a x una unidad»: $x + 1$.
- «El triple de ese resultado»: $3 \cdot (x + 1)$.

$$3(x + 1) = 3x + 3$$

$$\boxed{3(x + 1) = 3x + 3}$$

e) La diferencia entre el triple de x y siete unidades:

- «El triple de x»: $3x$.
- «La diferencia entre $3x$ y 7»: $3x - 7$.

$$\boxed{3x - 7}$$

Importante: «la diferencia entre A y B» siempre significa $A - B$ (primero A, luego B). El orden importa.

Ejercicio N.º 3 — Operaciones con polinomios

Enunciado

Simplifica al máximo las siguientes operaciones con polinomios:

a) $(x^2+4)(x-3)-(x^2-6)(x+2)$

b) $(3x-2)(2x+1)+(x-1)(x+1)$

Marco teórico: Multiplicación de polinomios

Para multiplicar dos polinomios se aplica la **propiedad distributiva** (también llamada «regla de los términos»): cada término del primer polinomio se multiplica por cada término del segundo. El resultado se organiza recogiendo **términos semejantes** (aquellos con el mismo grado).

Regla de signos para la multiplicación:

$$(+)(+)=+ \qquad (+)(-)=- \qquad (-)(+)=- \qquad (-)(-)=+$$

Apartado a) — $(x^2+4)(x-3)-(x^2-6)(x+2)$

Solución — Apartado a)

Paso 1: Desarrollar el primer producto $(x^2+4)(x-3)$
Multiplicamos cada término de (x^2+4) por cada término de $(x-3)$:

$$\begin{aligned}(x^2+4)(x-3) &= x^2\cdot x + x^2\cdot(-3) + 4\cdot x + 4\cdot(-3) && (16)\\ &= x^3-3x^2+4x-12 && (17)\end{aligned}$$

Paso 2: Desarrollar el segundo producto $(x^2-6)(x+2)$

$$\begin{aligned}(x^2-6)(x+2) &= x^2\cdot x + x^2\cdot 2 + (-6)\cdot x + (-6)\cdot 2 && (18)\\ &= x^3+2x^2-6x-12 && (19)\end{aligned}$$

Paso 3: Restar el segundo resultado del primero
Prestamos especial atención al signo negativo delante del segundo paréntesis: cuando restamos un polinomio, *cambiamos todos los signos* de ese polinomio.

$$\begin{aligned}&(x^3-3x^2+4x-12)-(x^3+2x^2-6x-12) && (20)\\ &= x^3-3x^2+4x-12-x^3-2x^2+6x+12 && (21)\end{aligned}$$

Paso 4: Agrupar términos semejantes

$$= \underbrace{x^3 - x^3}_{0} + \underbrace{(-3x^2 - 2x^2)}_{-5x^2} + \underbrace{(4x + 6x)}_{10x} + \underbrace{(-12 + 12)}_{0} \tag{22}$$

$$= -5x^2 + 10x \tag{23}$$

Paso 5: Factorizar el resultado (simplificación máxima)
Observamos que $-5x^2 + 10x$ tiene como factor común $5x$:

$$-5x^2 + 10x = 5x(-x + 2) = 5x(2 - x)$$

$$\boxed{(x^2 + 4)(x - 3) - (x^2 - 6)(x + 2) = -5x^2 + 10x = 5x(2 - x)}$$

Advertencia — El signo de la resta

Al restar un polinomio completo (un paréntesis precedido de $-$), **todos** los signos del interior cambian. Es el error más frecuente en este tipo de ejercicios. Para evitarlo, se recomienda escribir explícitamente $(-1)\cdot$ delante del paréntesis y distribuir ese -1.

Apartado b) — $(3x - 2)(2x + 1) + (x - 1)(x + 1)$

Solución — Apartado b)

Paso 1: Desarrollar el primer producto $(3x - 2)(2x + 1)$

$$(3x - 2)(2x + 1) = 3x \cdot 2x + 3x \cdot 1 + (-2) \cdot 2x + (-2) \cdot 1 \tag{24}$$

$$= 6x^2 + 3x - 4x - 2 \tag{25}$$

$$= 6x^2 - x - 2 \tag{26}$$

Paso 2: Desarrollar el segundo producto $(x - 1)(x + 1)$
Reconocemos aquí el **producto notable de la suma por la diferencia** (Identidad 3), con $a = x$ y $b = 1$:

$$(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1^2 = x^2 - 1$$

Paso 3: Sumar ambos resultados

$$(6x^2 - x - 2) + (x^2 - 1) = 6x^2 + x^2 + (-x) + (-2 - 1) \tag{27}$$
$$= 7x^2 - x - 3 \tag{28}$$

Paso 4: Comprobar si el resultado se puede factorizar
El polinomio $7x^2 - x - 3$ es de grado 2. Para factorizarlo calcularíamos el discriminante $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-3) = 1 + 84 = 85$. Como $\sqrt{85}$ no es un número racional, el polinomio *no se puede factorizar de forma «bonita»* con coeficientes racionales, así que el resultado final simplificado es:

$$\boxed{(3x - 2)(2x + 1) + (x - 1)(x + 1) = 7x^2 - x - 3}$$

Ejercicio N.º 4 — Ecuaciones de segundo grado

Enunciado

Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 + 5x - 24 = 0$

b) $2x^2 - 18 = 0$

c) $x^2 - 4x = 0$

Marco teórico: Ecuaciones de segundo grado

Una **ecuación de segundo grado** (o ecuación cuadrática) tiene la forma general:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

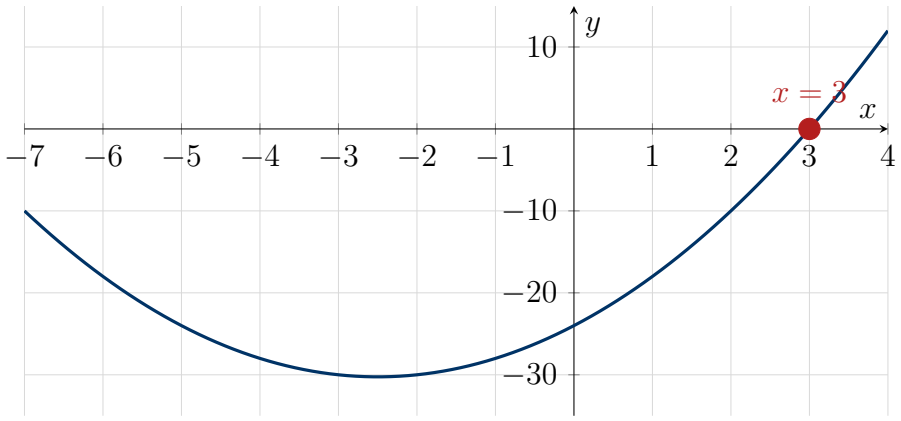
Sus soluciones se obtienen con la **fórmula cuadrática** (o fórmula general):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La expresión $\Delta = b^2 - 4ac$ se llama **discriminante** y determina el número de soluciones reales:

$\Delta > 0$	Dos soluciones reales distintas
$\Delta = 0$	Una solución real (doble)
$\Delta < 0$	No hay soluciones reales

Parábola de $x^2 + 5x - 24$



Apartado a) — $x^2 + 5x - 24 = 0$

Solución — Apartado a)

Identificamos los coeficientes: $a = 1$, $b = 5$, $c = -24$.

Paso 1: Calcular el discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24) = 25 + 96 = 121$$

Paso 2: Calcular $\sqrt{\Delta}$

$$\sqrt{121} = 11 \quad \text{(ya que } 11^2 = 121\text{)}$$

Paso 3: Aplicar la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-5 \pm 11}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm 11}{2}$$

Paso 4: Calcular las dos soluciones

$$x_1 = \frac{-5 + 11}{2} = \frac{6}{2} = 3 \tag{29}$$

$$x_2 = \frac{-5 - 11}{2} = \frac{-16}{2} = -8 \tag{30}$$

Verificación:

$$(3)^2 + 5(3) - 24 = 9 + 15 - 24 = 0\checkmark$$

$$(-8)^2 + 5(-8) - 24 = 64 - 40 - 24 = 0\checkmark$$

$$\boxed{x_1 = 3 \qquad x_2 = -8}$$

Factorización: La ecuación se puede escribir como $(x - 3)(x + 8) = 0$.

Apartado b) — $2x^2 - 18 = 0$

Solución — Apartado b)

Esta es una ecuación cuadrática **incompleta pura** (falta el término en x). Podemos resolverla directamente sin necesidad de la fórmula general.

Método algebraico directo (más sencillo):

Paso 1: Pasar el término independiente al otro lado:

$$2x^2 - 18 = 0 \implies 2x^2 = 18$$

Paso 2: Dividir entre 2:

$$x^2 = \frac{18}{2} = 9$$

Paso 3: Extraer la raíz cuadrada. Como $x^2 = 9$, entonces:

$$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Esto da dos soluciones (la raíz cuadrada de un número positivo siempre tiene solución positiva y negativa):

$$x_1 = +3 \tag{31}$$
$$x_2 = -3 \tag{32}$$

Verificación:

$$2(3)^2 - 18 = 18 - 18 = 0\checkmark$$

$$2(-3)^2 - 18 = 18 - 18 = 0\checkmark$$

$$\boxed{x_1 = 3 \qquad x_2 = -3}$$

Nota: Con la fórmula general ($a = 2, b = 0, c = -18$) se obtendría el mismo resultado:

$$\Delta = 0^2 - 4(2)(-18) = 144 \implies x = \frac{0 \pm 12}{4} \implies x_1 = 3,\ x_2 = -3$$

Apartado c) — $x^2 - 4x = 0$

Solución — Apartado c)

Esta es una ecuación cuadrática **incompleta sin término independiente**. El método más directo es **sacar factor común**.

Paso 1: Factorizar el lado izquierdo

Observamos que x es factor común de ambos términos:

$$x^2 - 4x = x(x - 4)$$

Paso 2: Aplicar la propiedad del producto nulo

Un producto es igual a cero si y solo si *al menos uno de sus factores es cero*:

$$x(x - 4) = 0$$

$$\implies \quad x = 0 \quad \text{o} \quad x - 4 = 0$$

Paso 3: Resolver cada caso

$$x_1 = 0 \tag{33}$$

$$x - 4 = 0 \implies x_2 = 4 \tag{34}$$

Verificación:

$$(0)^2 - 4(0) = 0 \checkmark$$

$$(4)^2 - 4(4) = 16 - 16 = 0 \checkmark$$

$$\boxed{x_1 = 0 \qquad x_2 = 4}$$

Advertencia — No dividir por x

En el apartado c), **nunca** se debe dividir ambos miembros de la ecuación $x^2 = 4x$ entre x, pues esto equivale a **eliminar la solución** $x = 0$ (solo podemos dividir entre x si garantizamos que $x \neq 0$, pero si $x = 0$ resulta ser solución, la perderíamos). La factorización con factor común es el método correcto.

Ejercicio N.º 5 — Ecuaciones de primer grado

Enunciado

Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado. Elimina paréntesis y denominadores operando convenientemente en cada caso. Si es posible, simplifica el resultado:

a) $3x - 5(2x - 1) = 2(x - 4) + 7$

b) $\dfrac{x-2}{4} - \dfrac{x}{3} = \dfrac{3x+1}{6}$

Marco teórico: Resolución de ecuaciones de primer grado

Una ecuación de primer grado tiene la forma $ax + b = 0$ (con $a \neq 0$). El proceso general de resolución sigue estos pasos:

1. **Eliminar denominadores:** multiplicar todo por el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los denominadores.
2. **Eliminar paréntesis:** aplicar la propiedad distributiva.
3. **Agrupar términos:** pasar las x al miembro izquierdo y los números al derecho.
4. **Simplificar y despejar x:** dividir ambos miembros por el coeficiente de x.
5. **Verificar:** sustituir en la ecuación original.

Apartado a) — $3x - 5(2x - 1) = 2(x - 4) + 7$

Solución — Apartado a)

Paso 1: Eliminar paréntesis

Aplicamos la propiedad distributiva en cada término con paréntesis:

$$3x - 5(2x - 1) = 2(x - 4) + 7 \tag{35}$$
$$3x - 10x + 5 = 2x - 8 + 7 \tag{36}$$

Detalle de cada distributiva:

$$-5(2x - 1) = -5 \cdot 2x + (-5)(-1) = -10x + 5$$

$$2(x - 4) = 2 \cdot x + 2 \cdot (-4) = 2x - 8$$

Paso 2: Simplificar cada miembro

$$(3x - 10x) + 5 = (2x) + (-8 + 7)$$

$$-7x + 5 = 2x - 1$$

Paso 3: Agrupar términos con x a la izquierda
Restamos $2x$ en ambos miembros:

$$-7x - 2x + 5 = -1$$

$$-9x + 5 = -1$$

Paso 4: Agrupar términos numéricos a la derecha
Restamos 5 en ambos miembros:

$$-9x = -1 - 5 = -6$$

Paso 5: Despejar x
Dividimos entre -9:

$$x = \frac{-6}{-9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Simplificación: $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ (dividiendo numerador y denominador entre 3).
Verificación (sustituimos $x = 2/3$ en la ecuación original):

$$\text{Miembro izquierdo:} \quad 3 \cdot \frac{2}{3} - 5\left(2 \cdot \frac{2}{3} - 1\right) = 2 - 5\left(\frac{4}{3} - \frac{3}{3}\right) = 2 - 5 \cdot \frac{1}{3} = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3} \tag{37}$$

$$\text{Miembro derecho:} \quad 2\left(\frac{2}{3} - 4\right) + 7 = 2 \cdot \frac{-10}{3} + 7 = \frac{-20}{3} + \frac{21}{3} = \frac{1}{3} \tag{38}$$

Ambos miembros son $\frac{1}{3}$. ✓

$$\boxed{x = \frac{2}{3}}$$

Apartado b) — $\dfrac{x-2}{4} - \dfrac{x}{3} = \dfrac{3x+1}{6}$

Solución — Apartado b)

Paso 1: Calcular el mínimo común múltiplo de los denominadores
Los denominadores son 4, 3 y 6.

$$4 = 2^2, \quad 3 = 3, \quad 6 = 2 \cdot 3$$

$$\text{m.c.m.}(4, 3, 6) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

Paso 2: Multiplicar toda la ecuación por 12
Multiplicamos cada fracción por 12:

$$12 \cdot \frac{x-2}{4} - 12 \cdot \frac{x}{3} = 12 \cdot \frac{3x+1}{6} \tag{39}$$

$$\frac{12}{4}(x-2) - \frac{12}{3}x = \frac{12}{6}(3x+1) \tag{40}$$

$$3(x-2) - 4x = 2(3x+1) \tag{41}$$

Paso 3: Eliminar paréntesis

$$3x - 6 - 4x = 6x + 2 \tag{42}$$

Paso 4: Simplificar cada miembro

$$(3x - 4x) - 6 = 6x + 2$$

$$-x - 6 = 6x + 2$$

Paso 5: Agrupar términos
Restamos $6x$ en ambos miembros:

$$-x - 6x - 6 = 2$$

$$-7x - 6 = 2$$

Sumamos 6 en ambos miembros:

$$-7x = 2 + 6 = 8$$

Paso 6: Despejar x

$$x = \frac{8}{-7} = -\frac{8}{7}$$

Verificación (sustituimos $x = -8/7$):

$$\text{M.I.:}\quad \frac{-8/7-2}{4}-\frac{-8/7}{3}=\frac{-22/7}{4}+\frac{8}{21}=\frac{-22}{28}+\frac{8}{21}=\frac{-33}{42}+\frac{16}{42}=\frac{-17}{42} \tag{43}$$

$$\text{M.D.:}\quad \frac{3(-8/7)+1}{6}=\frac{-24/7+7/7}{6}=\frac{-17/7}{6}=\frac{-17}{42} \tag{44}$$

Ambos miembros son $-\dfrac{17}{42}$. ✓

$$\boxed{x=-\frac{8}{7}}$$

Ejercicio N.º 6 — Problema de los sacos de harina

Enunciado

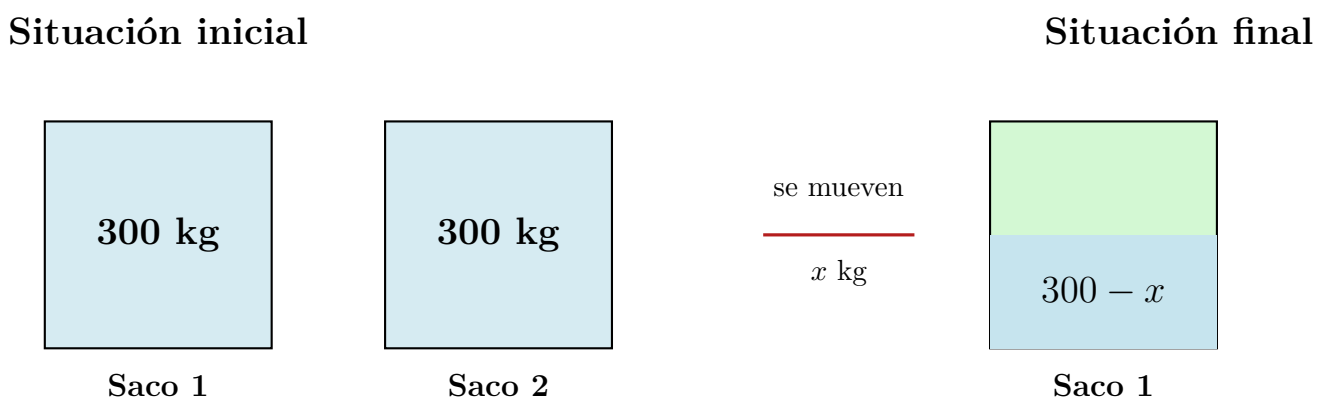
En un almacén se han repartido 600 kg de harina en dos sacos iguales. ¿Cuántos kilogramos hay que mover de un saco al otro para que el primero quede con la mitad de cantidad que el segundo?

Comprensión del problema

Datos del problema:

- Total de harina: 600 kg, distribuidos igualmente en dos sacos.
- Cada saco tiene inicialmente: $600 \div 2 = 300$ kg.
- Se mueven x kg del primer saco al segundo.
- Condición final: el primer saco debe tener *la mitad* que el segundo.

Representación gráfica:



Solución

Paso 1: Definir la variable

Sea x = número de kilogramos que se mueven del saco 1 al saco 2.

Paso 2: Expresar las cantidades finales

$$\text{Saco 1 (final)} = 300 - x \quad \text{kg} \tag{45}$$

$$\text{Saco 2 (final)} = 300 + x \quad \text{kg} \tag{46}$$

Paso 3: Plantear la ecuación

La condición es: «el primero quede con la mitad de cantidad que el segundo».

Esto significa:

$$\text{Saco 1} = \frac{1}{2} \cdot \text{Saco 2}$$

$$300 - x = \frac{1}{2}(300 + x)$$

Paso 4: Eliminar el denominador

Multiplicamos ambos miembros por 2:

$$2(300 - x) = 300 + x$$

$$600 - 2x = 300 + x$$

Paso 5: Despejar x

Pasamos los términos con x a la izquierda y los numéricos a la derecha:

$$600 - 300 = x + 2x$$

$$300 = 3x$$

$$x = \frac{300}{3} = 100$$

Paso 6: Interpretar el resultado

Hay que mover **100** kg del saco 1 al saco 2.

Comprobación:

$$\text{Saco 1} = 300 - 100 = 200 \text{ kg} \tag{47}$$

$$\text{Saco 2} = 300 + 100 = 400 \text{ kg} \tag{48}$$

¿Es el saco 1 la mitad del saco 2? $\frac{200}{400} = \frac{1}{2}$ ✓

¿Se conserva la masa total? $200 + 400 = 600$ kg ✓

$$\boxed{x = 100 \text{ kg}}$$

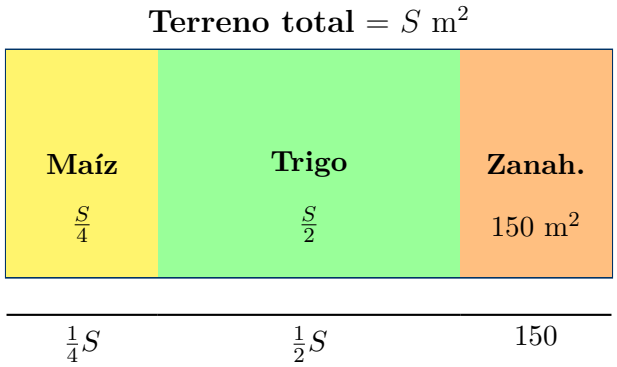
Hay que mover 100 kg del primer saco al segundo, quedando 200 kg en el primero y 400 kg en el segundo.

Ejercicio N.º 7 — Problema del terreno agrícola

Enunciado

Un agricultor planta la cuarta parte de su terreno con maíz, la mitad con trigo y el resto, que son 150 m^2, con zanahorias. ¿Cuál es el área total de su terreno?

Comprensión y representación gráfica



Solución

Paso 1: Definir la variable

Sea S = superficie total del terreno (en m^2).

Paso 2: Expresar cada parte en términos de S

$$\text{Superficie de maíz} = \frac{S}{4} \tag{49}$$

$$\text{Superficie de trigo} = \frac{S}{2} \tag{50}$$

$$\text{Superficie de zanahorias} = 150 \text{ m}^2 \tag{51}$$

Paso 3: Plantear la ecuación

La suma de todas las partes debe ser igual al total S:

$$\frac{S}{4} + \frac{S}{2} + 150 = S$$

Paso 4: Eliminar denominadores

El m.c.m. de 4, 2 y 1 es 4. Multiplicamos toda la ecuación por 4:

$$4 \cdot \frac{S}{4} + 4 \cdot \frac{S}{2} + 4 \cdot 150 = 4S$$

$$S + 2S + 600 = 4S$$

Paso 5: Despejar S

$$3S + 600 = 4S$$

$$600 = 4S - 3S$$

$$600 = S$$

Paso 6: Interpretar y verificar

El área total del terreno es $S = 600$ m^2.

Verificación:

$$\text{Maíz:} \quad \frac{600}{4} = 150 \text{ m}^2 \tag{52}$$

$$\text{Trigo:} \quad \frac{600}{2} = 300 \text{ m}^2 \tag{53}$$

$$\text{Zanahorias:} \quad 150 \text{ m}^2 \quad \text{(dato del problema)} \tag{54}$$

$$\text{Total:} \quad 150 + 300 + 150 = 600 \text{ m}^2 \checkmark \tag{55}$$

$$\boxed{S = 600 \text{ m}^2}$$

El área total del terreno es 600 m².

Advertencia — Identificar el «resto»

El enunciado dice que «el resto son 150 m²». El *resto* es lo que queda después de restar la cuarta parte y la mitad. Hay que tener cuidado en no interpretar «la cuarta parte más la mitad» como el resto mismo, sino como las fracciones ya asignadas.

La parte que ocupa el maíz y el trigo juntos es:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$$

Luego las zanahorias ocupan $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ del total, que equivale a 150 m^2.

Ejercicio N.º 8 — Sistema de ecuaciones

Enunciado

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 14 \\ -2x + 5y = 6 \end{cases}$$

Marco teórico: Sistemas de ecuaciones lineales

Un **sistema de dos ecuaciones lineales** con dos incógnitas x e y tiene la forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Sus soluciones son los pares (x, y) que satisfacen *ambas* ecuaciones simultáneamente. Geométricamente, cada ecuación representa una recta en el plano, y la solución es el punto de intersección.

Los métodos principales de resolución son:

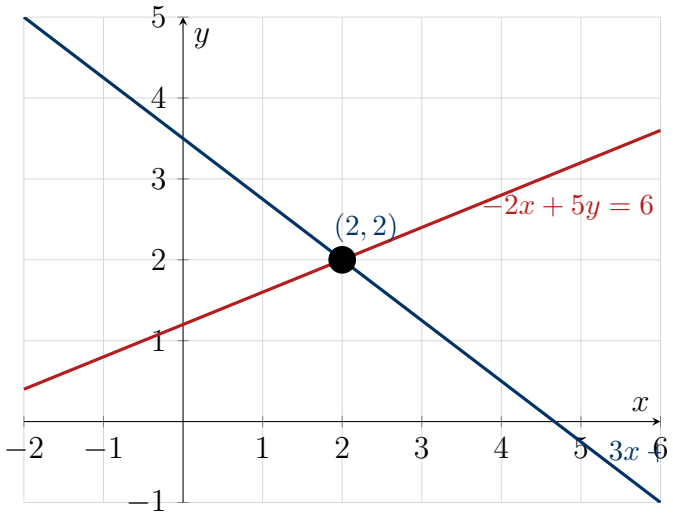
1. **Sustitución:** despejamos una incógnita en una ecuación y la sustituimos en la otra.
2. **Igualación:** despejamos la misma incógnita en ambas ecuaciones e igualamos las expresiones.
3. **Reducción (o eliminación):** operamos con las ecuaciones para que una incógnita desaparezca.

Método elegido: Reducción (eliminación de Gauss)

Elegimos el **método de reducción** porque los coeficientes de x son 3 y -2, y es relativamente sencillo obtener coeficientes opuestos multiplicando conveniente cada ecuación.

Representación gráfica de la solución

Interpretación geométrica del sistema



Solución por el método de reducción

El sistema es:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 14 & \text{(Ecuación 1)} \\ -2x + 5y = 6 & \text{(Ecuación 2)} \end{cases}$$

Paso 1: Eliminar la incógnita x

Para que los coeficientes de x sean opuestos (y se cancelen al sumar), buscamos el m.c.m. de 3 y 2, que es 6:

- Multiplicamos la Ecuación 1 por 2: $6x + 8y = 28$
- Multiplicamos la Ecuación 2 por 3: $-6x + 15y = 18$

$$\begin{cases} 2 \times (E_1): & 6x + 8y = 28 \\ 3 \times (E_2): & -6x + 15y = 18 \end{cases}$$

Paso 2: Sumar las dos ecuaciones transformadas

$$(6x + 8y) + (-6x + 15y) = 28 + 18 \tag{56}$$

$$\cancel{6x - 6x}^{0} + (8y + 15y) = 46 \tag{57}$$

$$23y = 46 \tag{58}$$

Paso 3: Despejar y

$$y = \frac{46}{23} = 2$$

Paso 4: Sustituir $y = 2$ en la Ecuación 1 para hallar x

$$3x + 4(2) = 14 \tag{59}$$
$$3x + 8 = 14 \tag{60}$$
$$3x = 14 - 8 = 6 \tag{61}$$
$$x = \frac{6}{3} = 2 \tag{62}$$

Paso 5: Solución

$$\boxed{x = 2 \qquad y = 2}$$

Verificación en la Ecuación 1:

$$3(2) + 4(2) = 6 + 8 = 14\checkmark$$

Verificación en la Ecuación 2:

$$-2(2) + 5(2) = -4 + 10 = 6\checkmark$$

Resolución alternativa: Método de sustitución

Método de sustitución (alternativo)

Paso 1: Despejar x en la Ecuación 1

$$3x + 4y = 14 \implies 3x = 14 - 4y \implies x = \frac{14 - 4y}{3}$$

Paso 2: Sustituir en la Ecuación 2

$$-2 \cdot \frac{14 - 4y}{3} + 5y = 6 \tag{63}$$
$$\frac{-28 + 8y}{3} + 5y = 6 \tag{64}$$

Multiplicamos todo por 3:

$$-28 + 8y + 15y = 18 \tag{65}$$
$$23y = 18 + 28 = 46 \tag{66}$$
$$y = 2 \tag{67}$$

Y se obtiene igualmente $x = 2$. ✓

Resumen de todas las soluciones

Tabla de soluciones del examen

Ejercicio	Apartado	Resultado
1	Productos notables	$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$; $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$
2	a)	$2x$
	b)	x^2
	c)	$2(x+2) = 2x+4$
	d)	$3(x+1) = 3x+3$
	e)	$3x-7$
3	a)	$-5x^2+10x = 5x(2-x)$
	b)	$7x^2-x-3$
4	a)	$x_1 = 3, \quad x_2 = -8$
	b)	$x_1 = 3, \quad x_2 = -3$
	c)	$x_1 = 0, \quad x_2 = 4$
5	a)	$x = \frac{2}{3}$
	b)	$x = -\frac{8}{7}$
6	—	Hay que mover **100** kg (Saco 1: 200 kg; Saco 2: 400 kg)
7	—	Área total = **600** m^2
8	—	$x = 2, \quad y = 2$

¡Buen trabajo! Repasa cada paso y practica regularmente.

Junta de Castilla y León
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA

EXAMEN DE MATEMÁTICAS
2ºB ESO 16/05/2025

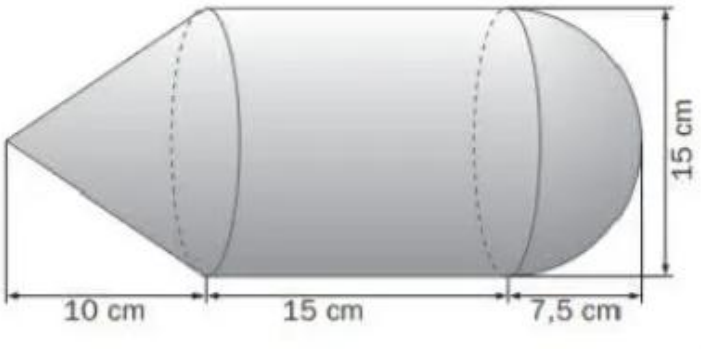
Nº1.- Calcula el área total y el volumen de un prisma rectangular de 8 cm de largo, 5 cm de ancho y 1 dm de altura.

Nº2.- Calcula el área total y el volumen de un cilindro de 6 cm de radio y 15 cm de altura

Nº3.- Calcula el área total y el volumen de un cono de 8 centímetros de altura y 10 centímetros de generatriz.

Nº4.- Calcula el área total y el volumen de una pirámide de base cuadrada de 10 metros de lado, altura de la pirámide 12 m.

Nº5.- Calcúlese el área y el volumen del siguiente cuerpo geométrico:



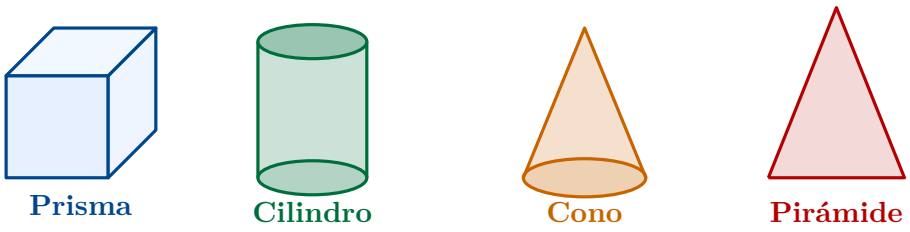
SUERTE JÓVENES

EXAMEN DE MATEMÁTICAS

SOLUCIONES COMPLETAS

Geometría del Espacio

2.o B de E.S.O. — 16 de mayo de 2025



Centro:	IES Tovar
Curso:	2.o B de Educacion Secundaria Obligatoria
Area:	Matematicas – Geometria del Espacio
Fecha:	16 de mayo de 2025
Contenido:	Areas y volumenes de cuerpos geometricos

"La geometria es el arte de razonar bien sobre figuras mal dibujadas."

— Henri Poincare

Índice general

1. Introducción y Formulario General **2**
- 1.1. Presentación del examen . . . 2
- 1.2. Formulario de referencia . . . 2
  - 1.2.1. Prisma rectangular (ortoedro) . . . 2
  - 1.2.2. Cilindro recto . . . 2
  - 1.2.3. Cono recto . . . 3
  - 1.2.4. Pirámide regular de base cuadrada . . . 3
  - 1.2.5. Esfera y semiesfera . . . 3

2. Resolución de los Ejercicios **4**
- 2.1. Ejercicio 1 — Prisma Rectangular . . . 4
- 2.2. Ejercicio 2 — Cilindro Recto . . . 6
- 2.3. Ejercicio 3 — Cono Recto . . . 8
- 2.4. Ejercicio 4 — Pirámide de Base Cuadrada . . . 10
- 2.5. Ejercicio 5 — Cuerpo Compuesto . . . 12

3. Resumen Global y Tabla de Resultados **16**
- 3.1. Tabla de resultados de todos los ejercicios . . . 16
- 3.2. Errores más comunes que debes evitar . . . 16
- 3.3. Ideas clave de geometría del espacio . . . 17

Capítulo 1

Introducción y Formulario General

1.1 Presentación del examen

El presente documento recoge la resolución **exhaustiva y completamente justificada** de todos los ejercicios del examen de Matemáticas de 2.o B de ESO, correspondiente a la unidad didáctica de **Geometría del Espacio**. Cada ejercicio se desarrolla con:

- Identificación del cuerpo geométrico y sus elementos.
- Conversión de unidades cuando sea necesario.
- Aplicación razonada de cada fórmula.
- Cálculo numérico paso a paso.
- Verificación del resultado y conclusiones.
- Señalización de errores frecuentes.

1.2 Formulario de referencia

A continuación se recogen todas las fórmulas empleadas en el examen. Constituyen el fundamento teórico imprescindible.

1.2.1 Prisma rectangular (ortoedro)

Sean l (largo), a (ancho) y h (altura) las dimensiones del prisma:

$$A_{\text{total}} = 2\,(la + lh + ah) \tag{1.1}$$

$$V = l \cdot a \cdot h \tag{1.2}$$

1.2.2 Cilindro recto

Con radio r y altura h:

$$A_{\text{lateral}} = 2\,\pi\,r\,h \tag{1.3}$$
$$A_{\text{bases}} = 2\,\pi\,r^2 \tag{1.4}$$
$$A_{\text{total}} = 2\,\pi\,r\,(h+r) \tag{1.5}$$
$$V = \pi\,r^2\,h \tag{1.6}$$

1.2.3 Cono recto

Con radio r, altura h y generatriz g:

$$g = \sqrt{r^2+h^2} \quad \text{(Teorema de Pitágoras)} \tag{1.7}$$
$$A_{\text{lateral}} = \pi\,r\,g \tag{1.8}$$
$$A_{\text{base}} = \pi\,r^2 \tag{1.9}$$
$$A_{\text{total}} = \pi\,r\,(g+r) \tag{1.10}$$
$$V = \frac{1}{3}\,\pi\,r^2\,h \tag{1.11}$$

1.2.4 Pirámide regular de base cuadrada

Con lado de la base l, altura h y apotema lateral a_p:

$$a_p = \sqrt{h^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2} \tag{1.12}$$
$$A_{\text{base}} = l^2 \tag{1.13}$$
$$A_{\text{lateral}} = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot l\cdot a_p = 2\,l\,a_p \tag{1.14}$$
$$A_{\text{total}} = l^2 + 2\,l\,a_p \tag{1.15}$$
$$V = \frac{1}{3}\,l^2\,h \tag{1.16}$$

1.2.5 Esfera y semiesfera

Con radio r:

$$A_{\text{esfera}} = 4\,\pi\,r^2 \tag{1.17}$$
$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3 \tag{1.18}$$
$$A_{\text{semiesfera curva}} = 2\,\pi\,r^2 \tag{1.19}$$
$$V_{\text{semiesfera}} = \frac{2}{3}\,\pi\,r^3 \tag{1.20}$$

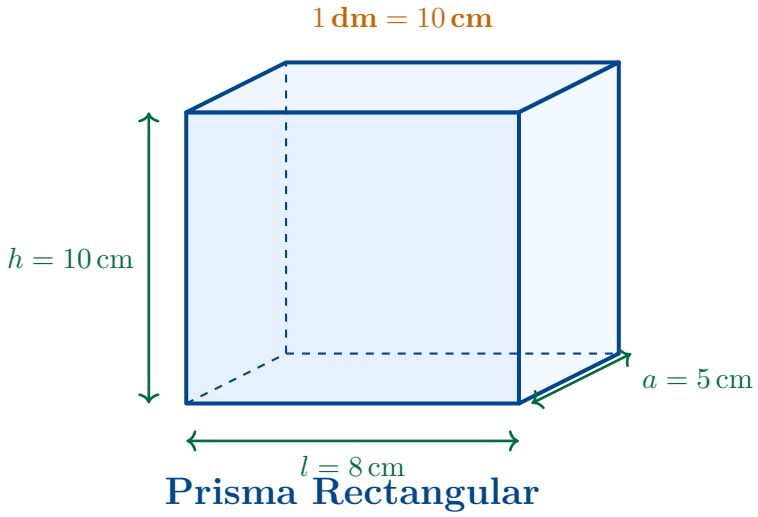
Capítulo 2

Resolución de los Ejercicios

2.1 Ejercicio 1 — Prisma Rectangular

Ejercicio 1 — Prisma Rectangular

Calcula el **área total** y el **volumen** de un prisma rectangular de 8 cm de largo, 5 cm de ancho y 1 dm de altura.



Prisma Rectangular

Solucion

Paso 1: Identificación y conversión de unidades

El cuerpo geométrico es un **prisma rectangular** (también llamado ortoedro). Sus seis caras son rectángulos.

$$l = 8\,\text{cm}, \quad a = 5\,\text{cm}, \quad h = 1\,\text{dm}$$

Advertencia – Error frecuente

Es **imprescindible** que todas las medidas estén en la **misma unidad** antes de operar. Convertimos la altura a centímetros:

$$h = 1\,\text{dm} = 1 \times 10\,\text{cm} = \mathbf{10}\,\text{cm}$$

Error frecuente: usar $h = 1$ sin convertir.

Datos definitivos: $l = 8\,\text{cm}$, $a = 5\,\text{cm}$, $h = 10\,\text{cm}$.

Paso 2: Análisis de las caras del prisma

Un prisma rectangular tiene **6 caras**, agrupadas en 3 pares de rectángulos iguales:

Par de caras	Dimensiones	Área de una cara	Área del par
Bases (arriba/abajo)	$l \times a$	$8 \times 5 = 40\,\text{cm}^2$	$80\,\text{cm}^2$
Frente/atrás	$l \times h$	$8 \times 10 = 80\,\text{cm}^2$	$160\,\text{cm}^2$
Laterales	$a \times h$	$5 \times 10 = 50\,\text{cm}^2$	$100\,\text{cm}^2$

Paso 3: Cálculo del área total

Usando la fórmula (1.1):

$$A_{\text{total}} = 2\,(la + lh + ah)$$

$$\begin{aligned} A_{\text{total}} &= 2\,(8 \times 5 + 8 \times 10 + 5 \times 10) \\ &= 2\,(40 + 80 + 50) \\ &= 2 \times 170 \\ &= \mathbf{340}\,\text{cm}^{\mathbf{2}} \end{aligned}$$

Verificación sumando los pares: $80 + 160 + 100 = 340\,\text{cm}^2$. ✓

Paso 4: Cálculo del volumen

Usando la fórmula (1.2):

$$V = l \cdot a \cdot h = 8 \times 5 \times 10 = \mathbf{400}\,\text{cm}^{\mathbf{3}}$$

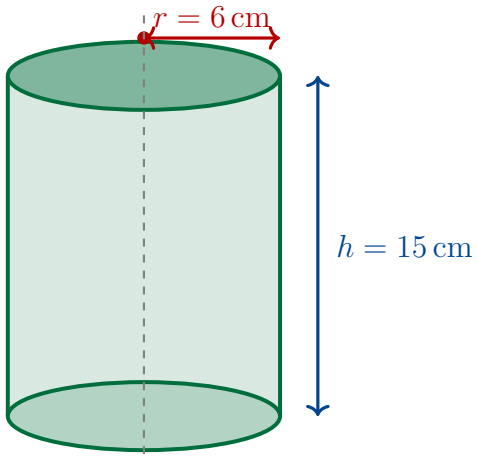
Resultados finales — Ejercicio 1

$$\boxed{A_{\text{total}} = 340\,\text{cm}^2} \qquad \boxed{V = 400\,\text{cm}^3}$$

2.2 Ejercicio 2 — Cilindro Recto

Ejercicio 2 — Cilindro Recto

Calcula el **área total** y el **volumen** de un cilindro de 6 cm de radio y 15 cm de altura.



Cilindro Recto

Solucion

Paso 1: Identificación del cuerpo y datos

El **cilindro recto** es el sólido generado al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados. Tiene dos bases circulares iguales y una superficie lateral curva.

$$r = 6\,\text{cm}, \qquad h = 15\,\text{cm}$$

Paso 2: Desarrollo plano del cilindro

Al "desenrollar" la superficie lateral del cilindro se obtiene un **rectángulo** cuya base es la longitud de la circunferencia ($2\pi r$) y cuya altura es h:

$$A_{\text{lateral}} = \text{base} \times \text{altura} = (2\pi r) \times h = 2\pi r h$$

Paso 3: Área lateral

Usando la fórmula (1.3):

$$A_{\text{lateral}} = 2\,\pi \times 6 \times 15 = 180\,\pi \approx 180 \times 3{,}14159 \approx \mathbf{565{,}49}\,\text{cm}^{\mathbf{2}}$$

Paso 4: Área de las dos bases

Cada base es un círculo de radio $r = 6\,\text{cm}$:

$$A_{\text{bases}} = 2\,\pi\,r^2 = 2 \times \pi \times 36 = 72\,\pi \approx \mathbf{226{,}19}\,\text{cm}^{\mathbf{2}}$$

Paso 5: Área total

$$A_{\text{total}} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$

$$A_{\text{total}} = 2\,\pi \times 6 \times (15 + 6) = 2\,\pi \times 6 \times 21 = 252\,\pi \approx \mathbf{791{,}68}\,\text{cm}^{\mathbf{2}}$$

Observacion

Comprobación: $180\pi + 72\pi = 252\pi$. ✓

Paso 6: Volumen

$$V = \pi\, r^2\, h$$

$$V = \pi \times 36 \times 15 = 540\,\pi \approx 540 \times 3{,}14159 \approx \mathbf{1\,696{,}46}\,\text{cm}^{\mathbf{3}}$$

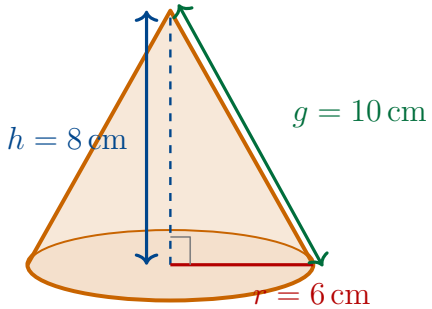
Resultados finales — Ejercicio 2

$\boxed{A_{\text{total}} = 252\,\pi \approx 791{,}68\,\text{cm}^2}$ $\boxed{V = 540\,\pi \approx 1\,696{,}46\,\text{cm}^3}$

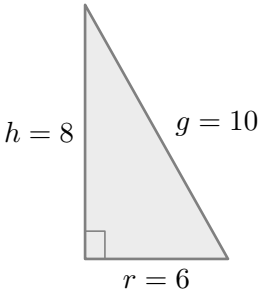
2.3 Ejercicio 3 — Cono Recto

Ejercicio 3 — Cono Recto

Calcula el **área total** y el **volumen** de un cono de 8 cm de altura y 10 cm de generatriz.



Cono Recto



Triángulo rectángulo

$r^2 + h^2 = g^2$

Solucion

Paso 1: Identificación y datos

El **cono recto** tiene base circular y vértice (*ápice*) situado sobre el centro de la base.

$$h = 8\,\text{cm} \quad \text{(altura)}, \qquad g = 10\,\text{cm} \quad \text{(generatriz)}$$

La **generatriz** g es el segmento que une el vértice con cualquier punto de la circunferencia de la base.

Paso 2: Cálculo del radio mediante el Teorema de Pitágoras

El radio r, la altura h y la generatriz g forman un triángulo rectángulo (el ángulo recto está en el centro de la base):

$$g^2 = r^2 + h^2 \implies r^2 = g^2 - h^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$$

$$r = \sqrt{36} = \mathbf{6}\,\text{cm}$$

Observacion

Reconocemos la terna pitagórica $\{6, 8, 10\} = 2 \times \{3, 4, 5\}$. ✓

Paso 3: Área lateral del cono

Al desenvolver la superficie lateral del cono se obtiene un **sector circular** de radio g y longitud de arco $2\pi r$:

$$A_{\text{lateral}} = \pi\, r\, g = \pi \times 6 \times 10 = 60\,\pi \approx \mathbf{188{,}50}\,\text{cm}^2$$

Paso 4: Área de la base

$$A_{\text{base}} = \pi\, r^2 = \pi \times 36 = 36\,\pi \approx \mathbf{113{,}10}\,\text{cm}^2$$

Paso 5: Área total

$$\begin{aligned} A_{\text{total}} &= A_{\text{lateral}} + A_{\text{base}} = \pi r g + \pi r^2 = \pi r(g + r) \\ &= \pi \times 6 \times (10 + 6) = \pi \times 6 \times 16 = 96\,\pi \\ &\approx 96 \times 3{,}14159 \approx \mathbf{301{,}59}\,\text{cm}^{\mathbf{2}} \end{aligned}$$

Paso 6: Volumen del cono

$$V = \frac{1}{3}\,\pi\, r^2\, h = \frac{1}{3} \times \pi \times 36 \times 8 = \frac{288\,\pi}{3} = 96\,\pi \approx \mathbf{301{,}59}\,\text{cm}^{\mathbf{3}}$$

Advertencia – Error frecuente

Error frecuente: Olvidar el factor $\frac{1}{3}$ en el volumen del cono.

Recuerda: $V_{\text{cono}} = \frac{1}{3}\,V_{\text{cilindro}}$ de igual base y altura.

Resultados finales — Ejercicio 3

Radio: $r = 6\,\text{cm}$

$$\boxed{A_{\text{total}} = 96\,\pi \approx 301{,}59\,\text{cm}^2}$$

$$\boxed{V = 96\,\pi \approx 301{,}59\,\text{cm}^3}$$

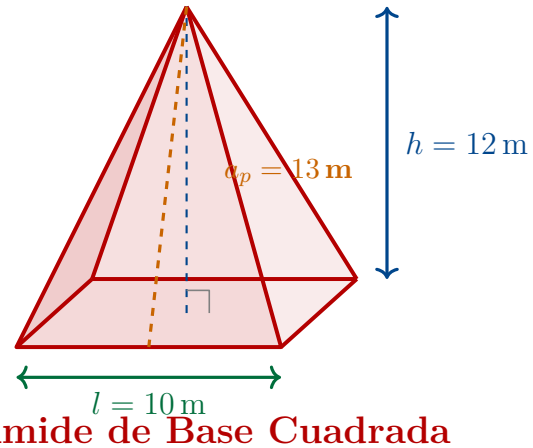
Observacion

En este ejercicio A_{total} y V tienen el mismo valor numérico (96π), pero **distintas unidades** (cm^2 y cm^3). Esto es una coincidencia numérica de los datos y no una regla general.

2.4 Ejercicio 4 — Pirámide de Base Cuadrada

Ejercicio 4 — Pirámide Regular de Base Cuadrada

Calcula el **área total** y el **volumen** de una pirámide de base cuadrada de 10 m de lado y 12 m de altura.



Pirámide de Base Cuadrada

Solucion

Paso 1: Identificación y datos

La **pirámide regular de base cuadrada** tiene una base cuadrada y cuatro caras triangulares isósceles. El vértice se sitúa directamente sobre el centro de la base.

$$l = 10\,\text{m} \quad \text{(lado de la base)}, \qquad h = 12\,\text{m} \quad \text{(altura)}$$

Paso 2: Cálculo de la apotema lateral

La **apotema lateral** a_p es la altura de cada cara triangular. Se calcula con el Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo formado por h y $l/2$:

$$a_p = \sqrt{h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169}$$

Advertencia – Error frecuente

Reconocemos la terna pitagórica $\{5, 12, 13\}$: $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$.

$$a_p = \sqrt{169} = \mathbf{13}\,\text{m}$$

Paso 3: Área de la base

$$A_{\text{base}} = l^2 = 10^2 = \mathbf{100}\,\text{m}^2$$

Paso 4: Área lateral

Hay **4 caras triangulares** iguales, cada una con base $l = 10\,\text{m}$ y altura $a_p = 13\,\text{m}$:

$$A_{\triangle} = \frac{1}{2} \times 10 \times 13 = 65\,\text{m}^2$$

$$A_{\text{lateral}} = 4 \times 65 = 260\,\text{m}^2$$

Fórmula compacta (1.14): $A_{\text{lateral}} = 2\,l\,a_p = 2 \times 10 \times 13 = 260\,\text{m}^2$. ✓

Paso 5: Área total

$$A_{\text{total}} = A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} = 100 + 260 = \mathbf{360}\,\text{m}^{\mathbf{2}}$$

Paso 6: Volumen

$$V = \frac{1}{3}\,l^2\,h = \frac{1}{3} \times 100 \times 12 = \frac{1200}{3} = \mathbf{400}\,\text{m}^{\mathbf{3}}$$

Resultados finales — Ejercicio 4

Apotema lateral: $a_p = 13\,\text{m}$

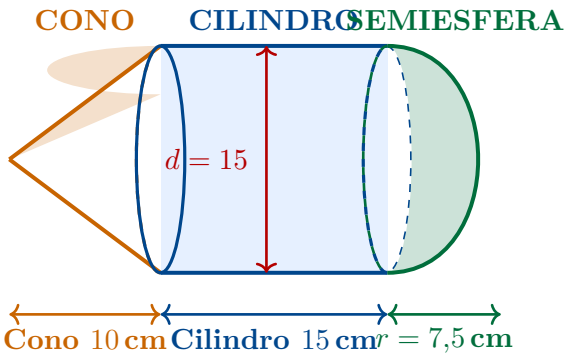
$\boxed{A_{\text{total}} = 360\,\text{m}^2}$

$\boxed{V = 400\,\text{m}^3}$

2.5 Ejercicio 5 — Cuerpo Compuesto

Ejercicio 5 — Cuerpo Geométrico Compuesto

Calcúlese el **área total** y el **volumen** del siguiente cuerpo geométrico formado por un **cono** (punta izquierda de 10 cm), un **cilindro** (parte central de 15 cm) y una **semiesfera** (extremo derecho). El diámetro común de las tres piezas es 15 cm, luego $r = 7{,}5$ cm.



Cuerpo Compuesto: Cono + Cilindro + Semiesfera

Solucion

Paso 1: Identificación del cuerpo y sus partes

A partir de la imagen del enunciado, el cuerpo geométrico está formado por la **unión axial** de tres sólidos de revolución que comparten el mismo radio r:

Pieza	Forma	Dimensión longitudinal	Radio
1	Cono (punta izquierda)	$L_c = 10$ cm (eje)	$r = 7{,}5$ cm
2	Cilindro (parte central)	$L_{\text{cil}} = 15$ cm	$r = 7{,}5$ cm
3	Semiesfera (extremo derecho)	$r = 7{,}5$ cm	$r = 7{,}5$ cm

Observacion

En la imagen del examen la cota vertical de 15 cm corresponde al **diámetro**, por lo que $r = 15/2 = 7{,}5$ cm. Las cotas horizontales (10 y 15) son las *longitudes axiales* del cono y del cilindro respectivamente.

Paso 2: Generatriz del cono

La longitud axial del cono es $L_c = 10$ cm (es la altura del cono). La generatriz se calcula con Pitágoras:

$$g = \sqrt{r^2 + L_c^2} = \sqrt{7{,}5^2 + 10^2} = \sqrt{56{,}25 + 100} = \sqrt{156{,}25}$$

Observacion

Terna pitagórica: $7{,}5 = \frac{15}{2}$, $10 = \frac{20}{2}$, $g = \frac{25}{2} = 12{,}5$. Corresponde a $5 \times \{3, 4, 5\}$ dividido entre 2. ✓

$$g = \mathbf{12{,}5}\,\text{cm}$$

Paso 3: Estrategia para el área total

Advertencia – Error frecuente

Al unir las tres piezas, las **superficies planas de unión** quedan en el interior y **no forman parte de la superficie exterior**. La superficie total del cuerpo compuesto incluye únicamente:

1. Superficie lateral del cono (sin la base).
2. Superficie lateral del cilindro (sin las dos bases).
3. Superficie curva de la semiesfera (sin la base plana).

No hay ninguna cara plana circular en el exterior.

Paso 4: Superficie lateral del cono

$$A_{\text{lat,cono}} = \pi\, r\, g = \pi \times 7{,}5 \times 12{,}5 = 93{,}75\,\pi \approx \mathbf{294{,}52}\,\text{cm}^2$$

Paso 5: Superficie lateral del cilindro

$$A_{\text{lat,cil}} = 2\,\pi\, r\, L_{\text{cil}} = 2\,\pi \times 7{,}5 \times 15 = 225\,\pi \approx \mathbf{706{,}86}\,\text{cm}^2$$

Paso 6: Superficie curva de la semiesfera

La superficie curva de una semiesfera (la mitad de la superficie de una esfera completa, sin contar la base plana) es:

$$A_{\text{semi}} = 2\,\pi\, r^2 = 2\,\pi \times 7{,}5^2 = 2\,\pi \times 56{,}25 = 112{,}5\,\pi \approx \mathbf{353{,}43}\,\text{cm}^2$$

Paso 7: Área total del cuerpo compuesto

$$\begin{aligned} A_{\text{total}} &= A_{\text{lat,cono}} + A_{\text{lat,cil}} + A_{\text{semi}} \\ &= 93{,}75\,\pi + 225\,\pi + 112{,}5\,\pi \\ &= 431{,}25\,\pi \\ &\approx 431{,}25 \times 3{,}14159 \\ &\approx \mathbf{1\,354{,}80}\,\text{cm}^{\mathbf{2}} \end{aligned}$$

Paso 8: Volumen del cono

$$V_{\text{cono}} = \frac{1}{3}\,\pi\,r^2\,L_c = \frac{1}{3} \times \pi \times 56{,}25 \times 10 = \frac{562{,}5\,\pi}{3} = 187{,}5\,\pi \approx \mathbf{588{,}67}\,\text{cm}^{\mathbf{3}}$$

Paso 9: Volumen del cilindro

$$V_{\text{cil}} = \pi\,r^2\,L_{\text{cil}} = \pi \times 56{,}25 \times 15 = 843{,}75\,\pi \approx \mathbf{2\,650{,}72}\,\text{cm}^{\mathbf{3}}$$

Paso 10: Volumen de la semiesfera

$$V_{\text{semi}} = \frac{2}{3}\,\pi\,r^3 = \frac{2}{3} \times \pi \times 7{,}5^3 = \frac{2}{3} \times \pi \times 421{,}875 = \frac{843{,}75\,\pi}{3} = 281{,}25\,\pi \approx \mathbf{883{,}57}\,\text{cm}^{\mathbf{3}}$$

Paso 11: Volumen total del cuerpo compuesto

$$\begin{aligned} V_{\text{total}} &= V_{\text{cono}} + V_{\text{cil}} + V_{\text{semi}} \\ &= 187{,}5\,\pi + 843{,}75\,\pi + 281{,}25\,\pi \\ &= 1\,312{,}5\,\pi \\ &\approx 1\,312{,}5 \times 3{,}14159 \\ &\approx \mathbf{4\,122{,}96}\,\text{cm}^{\mathbf{3}} \end{aligned}$$

Tabla resumen — Ejercicio 5

Pieza	**Superficie exterior (exacta)**	**Aprox.** ($\pi \approx 3{,}14159$)
Cono (lateral)	$93{,}75\,\pi\ \text{cm}^2$	$\approx 294{,}52\ \text{cm}^2$
Cilindro (lateral)	$225\,\pi\ \text{cm}^2$	$\approx 706{,}86\ \text{cm}^2$
Semiesfera (curva)	$112{,}5\,\pi\ \text{cm}^2$	$\approx 353{,}43\ \text{cm}^2$
TOTAL ÁREA	$\mathbf{431{,}25}\,\pi\ \text{cm}^{\mathbf{2}}$	$\approx \mathbf{1\,354{,}80}\ \text{cm}^{\mathbf{2}}$

Pieza	**Volumen (exacto)**	**Aprox.** ($\pi \approx 3{,}14159$)
Cono	$187{,}5\,\pi\ \text{cm}^3$	$\approx 588{,}67\ \text{cm}^3$
Cilindro	$843{,}75\,\pi\ \text{cm}^3$	$\approx 2\,650{,}72\ \text{cm}^3$
Semiesfera	$281{,}25\,\pi\ \text{cm}^3$	$\approx 883{,}57\ \text{cm}^3$
TOTAL VOLUMEN	$\mathbf{1\,312{,}5}\,\pi\ \text{cm}^{\mathbf{3}}$	$\approx \mathbf{4\,122{,}96}\ \text{cm}^{\mathbf{3}}$

Resultados finales — Ejercicio 5

Generatriz del cono: $g = 12{,}5\,\text{cm}$

$$\boxed{A_{\text{total}} = 431{,}25\,\pi \approx 1\,354{,}80\,\text{cm}^2}$$

$$\boxed{V_{\text{total}} = 1\,312{,}5\,\pi \approx 4\,122{,}96\,\text{cm}^3}$$

Capítulo 3

Resumen Global y Tabla de Resultados

3.1 Tabla de resultados de todos los ejercicios

Nº	Cuerpo	Datos clave	Área Total	Volumen
1	Prisma rect.	l=8, a=5, h=10 cm	340 cm^2	400 cm^3
2	Cilindro	r=6 cm, h=15 cm	$252\pi \approx 791{,}68$ cm^2	$540\pi \approx 1\,696{,}46$ cm^3
3	Cono	h=8 cm, g=10 cm, r=6 cm	$96\pi \approx 301{,}59$ cm^2	$96\pi \approx 301{,}59$ cm^3
4	Pirámide cuad.	l=10 m, h=12 m	360 m^2	400 m^3
5	Compuesto	r=7,5 cm	$431{,}25\pi \approx 1\,354{,}80$ cm^2	$1\,312{,}5\pi \approx 4\,122{,}96$ cm^3

3.2 Errores más comunes que debes evitar

1. **No convertir unidades:** Unifica siempre las unidades antes de operar. Ejemplo: 1 dm = 10 cm.
2. **Olvidar el factor** $\frac{1}{3}$ en el volumen del cono y de la pirámide.
3. **Confundir radio y diámetro:** El radio es la *mitad* del diámetro.
4. **Usar la altura en lugar de la generatriz** en el área lateral del cono.
5. **Sumar caras internas** en cuerpos compuestos: solo se cuentan superficies exteriores.
6. **Olvidar las bases** al calcular el área total.
7. **Confundir apotema lateral con apotema de la base** en la pirámide.

3.3 Ideas clave de geometría del espacio

La geometría de los sólidos de revolución y los poliedros se basa en unas pocas ideas fundamentales:

- ⋆ El **Teorema de Pitágoras** permite calcular generatrices y apotemas.
- ⋆ Todos los sólidos con vértice (cono, pirámide) tienen volumen igual a $\frac{1}{3}$ del prisma o cilindro de igual base y altura.
- ⋆ La superficie total se obtiene sumando las áreas de *todas* las caras exteriores.
- ⋆ En cuerpos compuestos, las caras de unión internas **no** se cuentan.
- ⋆ Las fórmulas de la esfera ($4\pi r^2$ y $\frac{4}{3}\pi r^3$) se dividen entre 2 para la semiesfera.

¡Mucha suerte en el examen, jóvenes matemáticos!

"La matemática es el alfabeto con el cual Dios ha escrito el Universo." — Galileo Galilei

Junta de Castilla y León
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA

EXAMEN DE MATEMÁTICAS
2ºB ESO 21/03/2025

Nº1.- Un poste de luz proyecta una sombra de 10 metros en el momento en que una farola de 3 metros proyecta una sombra de 5 metros.

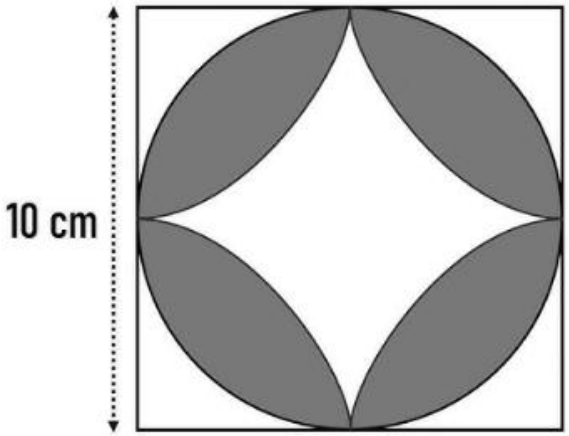
a) Realiza un dibujo representativo.
b) Calcula la altura real del poste de luz.

Nº2.- Calcula el área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 13 centímetros y cuyo lado desigual mide 10 centímetros. Realiza un dibujo de la situación.

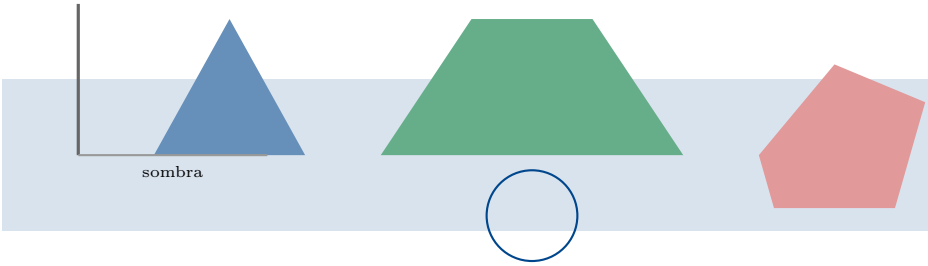
Nº3.- Calcula el perímetro y el área de un trapecio isósceles cuyas bases miden 20 y 12 centímetros respectivamente, y cuya altura mide 3 centímetros. Realiza un dibujo de la situación.

Nº4.- El área de un pentágono regular es 50 cm^2 y la apotema mide 5 cm. Calcula el lado y el perímetro del pentágono. Realiza un dibujo de la situación.

Nº5. Calcúlese el área de la zona sombreada de la siguiente figura:



SUERTE JÓVENES



Examen de Matemáticas

Geometría Plana

2.º B de Educación Secundaria Obligatoria

21 de marzo de 2025

Sobre este documento

Este documento contiene la resolución **completa, rigurosa y pedagógica** de todos los ejercicios del examen. Cada paso algebraico está justificado, cada fórmula está enunciada con su nombre, y se incluyen dibujos explicativos realizados con Ti*k*Z.

Ha sido redactado al nivel de un **alumno de 2.º ESO excelente** que desea entender cada resultado en profundidad, sin dar nada por supuesto.

Asignatura:	Matemáticas
Curso:	2.º B ESO
Tema:	Geometría Plana
Fecha:	21/03/2025
Nº ejercicios:	5

Documento preparado con LaTeX — Ti*k*Z — AMSTeX

Índice general

1. Introducción y conceptos previos **2**
- 1.1. Semejanza de triángulos (Tales) . . . 2
- 1.2. Áreas de figuras planas . . . 2

2. Ejercicio 1 — Semejanza de triángulos y sombras **4**
- 2.1. Apartado a) — Dibujo representativo . . . 4
- 2.2. Apartado b) — Cálculo de la altura del poste . . . 5

3. Ejercicio 2 — Área de un triángulo isósceles **7**
- 3.1. Dibujo de la situación . . . 7
- 3.2. Conceptos clave . . . 8
- 3.3. Cálculo de la altura mediante el Teorema de Pitágoras . . . 8
- 3.4. Cálculo del área . . . 9

4. Ejercicio 3 — Perímetro y área de un trapecio isósceles **10**
- 4.1. Dibujo de la situación . . . 10
- 4.2. Conceptos clave . . . 10
- 4.3. Cálculo del lado oblicuo mediante Pitágoras . . . 11
- 4.4. Cálculo del perímetro . . . 11
- 4.5. Cálculo del área . . . 12

5. Ejercicio 4 — Lado y perímetro de un pentágono regular **13**
- 5.1. Dibujo de la situación . . . 13
- 5.2. Conceptos clave . . . 14
- 5.3. Cálculo del perímetro a partir del área y la apotema . . . 14
- 5.4. Cálculo del lado . . . 14

6. Ejercicio 5 — Área de la zona sombreada **16**
- 6.1. Análisis de la figura . . . 16
- 6.2. Dibujo de la situación . . . 16
- 6.3. Cálculo del área sombreada . . . 16

7. Resumen de resultados **19**

1. Introducción y conceptos previos

Antes de abordar los ejercicios conviene recordar las definiciones y fórmulas que se van a utilizar a lo largo del examen. Esta sección actúa como **formulario comentado**: no se limita a enumerar fórmulas, sino que explica de dónde vienen y cuándo se aplican.

1.1 Semejanza de triángulos (Tales)

Si dos triángulos son **semejantes** (mismos ángulos), entonces sus lados correspondientes son **proporcionales**:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k \quad \text{(razón de semejanza)}$$

En situaciones de sombras, la luz del sol crea triángulos rectángulos semejantes entre el objeto vertical y su sombra horizontal.

1.2 Áreas de figuras planas

$$\text{Triángulo:} \quad A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$\text{Trapecio:} \quad A = \frac{(B+b)\cdot h}{2} \quad (B = \text{base mayor},\ b = \text{base menor})$$

$$\text{Polígono regular:} \quad A = \frac{P \cdot a}{2} \quad (P = \text{perímetro},\ a = \text{apotema})$$

$$\text{Círculo:} \quad A = \pi r^2$$

En un triángulo rectángulo con catetos a, b e hipotenusa c:

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

Este teorema es fundamental para calcular la **altura** de triángulos isósceles, trapecios, etc., cuando no se da directamente.

2. Ejercicio 1 — Semejanza de triángulos y sombras

Un poste de luz proyecta una sombra de 10 m en el momento en que una farola de 3 m proyecta una sombra de 5 m.

a) Realiza un dibujo representativo.

b) Calcula la altura real del poste de luz.

2.1 Apartado a) — Dibujo representativo

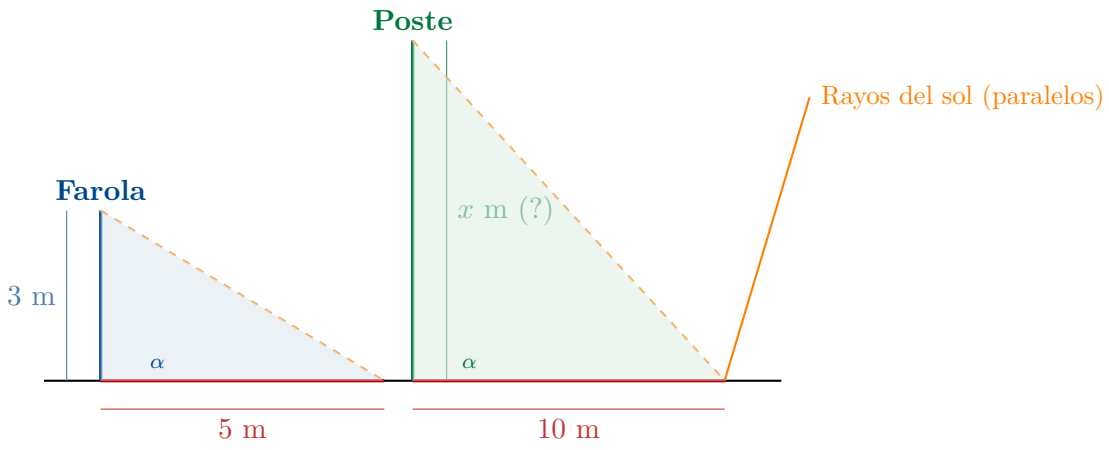


Figura 2.1: Dos triángulos rectángulos semejantes formados por los objetos verticales y sus sombras. El ángulo α (inclinación del sol) es el mismo en ambos casos.

Interpretación del dibujo

El sol proyecta sus rayos de manera **paralela** (fuente de luz muy lejana). Cada objeto vertical y su sombra horizontal forman un **triángulo rectángulo**:

- **Triángulo de la farola:** cateto vertical = 3 m, cateto horizontal (sombra) = 5 m.

- **Triángulo del poste:** cateto vertical $= x$ m (incógnita), cateto horizontal (sombra) $= 10$ m.

Como los rayos del sol son paralelos, el ángulo que forman con el suelo es el mismo α en ambos triángulos. Por tanto, los dos triángulos tienen los mismos tres ángulos (90ř, α y 90ř $- \alpha$), y son **semejantes**.

2.2 Apartado b) — Cálculo de la altura del poste

Planteamiento: razón de proporcionalidad

En dos triángulos semejantes, los **lados homólogos** (que ocupan la misma posición) son proporcionales. Aquí:

$$\frac{\text{altura objeto 1}}{\text{sombra objeto 1}} = \frac{\text{altura objeto 2}}{\text{sombra objeto 2}}$$

Identificamos los datos:

	Farola	**Poste**
Altura	3 m	x m
Sombra	5 m	10 m

Planteamiento de la proporción

Aplicamos la propiedad de semejanza:

$$\frac{\overbrace{3}^{\text{altura farola}}}{\underbrace{5}_{\text{sombra farola}}} = \frac{\overbrace{x}^{\text{altura poste}}}{\underbrace{10}_{\text{sombra poste}}}$$

Resolución algebraica

Para despejar x, multiplicamos en **cruz** (producto de medios igual a producto de extremos):

$$\frac{3}{5} = \frac{x}{10}$$

$$3 \times 10 = 5 \times x \qquad \text{(producto en cruz)}$$

$$30 = 5x$$

$$x = \frac{30}{5}$$

$$\boxed{x = 6 \text{ metros}}$$

Verificación

Comprobamos que la razón de semejanza es la misma en los dos triángulos:

$$\frac{3}{5} = 0{,}6 \qquad \frac{6}{10} = 0{,}6 \checkmark$$

La razón de semejanza es $k = 0{,}6$, es decir, la farola es 0,6 veces el poste (o el poste es $\frac{5}{3}$ veces la farola).

Un error común es plantear la proporción al revés: $\frac{3}{x} = \frac{10}{5}$. Hay que asegurarse de que el **numerador y el denominador de cada fracción correspondan al mismo objeto**: altura en el numerador, sombra en el denominador (o viceversa, pero consistentemente).

Observación 2.1. También se puede resolver con la razón inversa:

$$\frac{5}{3} = \frac{10}{x} \implies x = \frac{10 \times 3}{5} = 6 \text{ m}$$

El resultado es el mismo; solo cambia qué fracción ponemos en cada miembro.

La altura del poste de luz es 6 metros.

3. Ejercicio 2 — Área de un triángulo isósceles

Calcula el área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 13 cm y cuyo lado desigual (base) mide 10 cm. Realiza un dibujo.

3.1 Dibujo de la situación

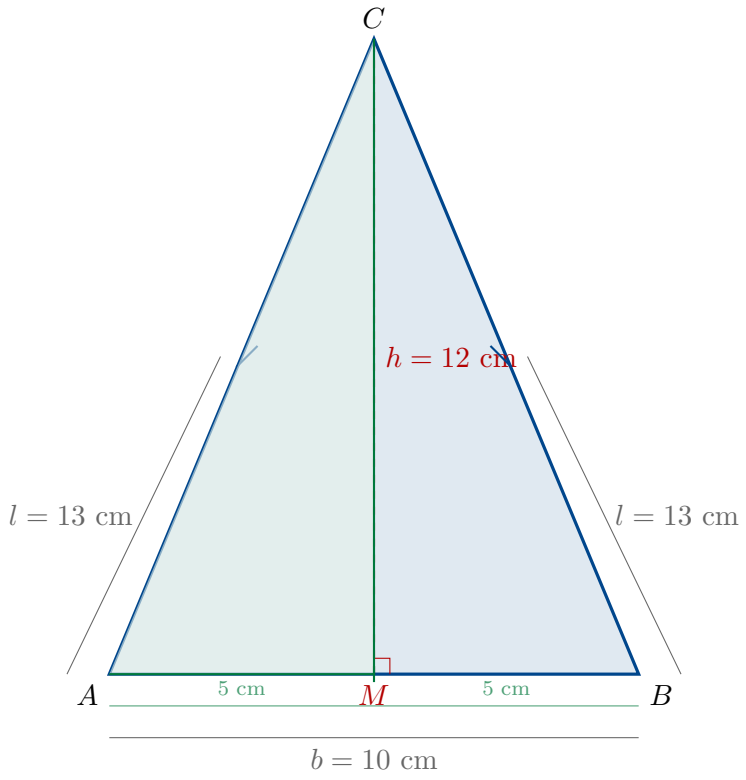


Figura 3.1: Triángulo isósceles ABC con base $AB = 10$ cm y lados iguales $AC = BC = 13$ cm. La altura $CM = h$ cae perpendicularmente sobre el punto medio M de la base (propiedad del triángulo isósceles). El semitriángulo verde es el triángulo rectángulo que permite calcular h con Pitágoras.

3.2 Conceptos clave

En un triángulo isósceles, la **altura relativa a la base** (lado desigual) es también la **mediatriz** de la base y la **bisectriz** del ángulo del vértice. En particular:

La altura divide la base en dos mitades iguales.

Esto crea dos triángulos rectángulos **congruentes**.

3.3 Cálculo de la altura mediante el Teorema de Pitágoras

Llamamos h a la altura del triángulo. Como la altura baja al **punto medio** M de la base:

- Hipotenusa del triángulo rectángulo: $l = 13$ cm (lado igual).
- Un cateto: mitad de la base $= \dfrac{10}{2} = 5$ cm.
- Otro cateto: h (desconocida).

Aplicamos el **Teorema de Pitágoras** al triángulo rectángulo AMC (ver figura):

$$l^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2 \qquad \text{(Pitágoras en } \triangle AMC\text{)}$$

$$13^2 = 5^2 + h^2$$

$$169 = 25 + h^2$$

$$h^2 = 169 - 25 = 144$$

$$h = \sqrt{144}$$

$$\boxed{h = 12 \text{ cm}}$$

Observación 3.1. $144 = 12^2$ es un cuadrado perfecto, por lo que la raíz es exacta. La terna $(5, 12, 13)$ es una **terna pitagórica primitiva** muy conocida: $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$.

3.4 Cálculo del área

$$A_{\triangle} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Sustituimos los valores conocidos:

$$\begin{aligned} A &= \frac{b \cdot h}{2} \\ &= \frac{10 \times 12}{2} \\ &= \frac{120}{2} \\ &= \boxed{60 \text{ cm}^2} \end{aligned}$$

Las unidades de **área** son siempre las unidades de longitud al cuadrado (cm^2, m^2, etc.). Si los datos estuviesen en unidades distintas, habría que convertirlos *antes* de calcular el área.

$$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

$$A = \frac{10 \times 12}{2} = \boxed{60 \text{ cm}^2}$$

4. Ejercicio 3 — Perímetro y área de un trapecio isósceles

Calcula el perímetro y el área de un trapecio isósceles cuyas bases miden 20 cm y 12 cm respectivamente, y cuya altura mide 3 cm. Realiza un dibujo.

4.1 Dibujo de la situación

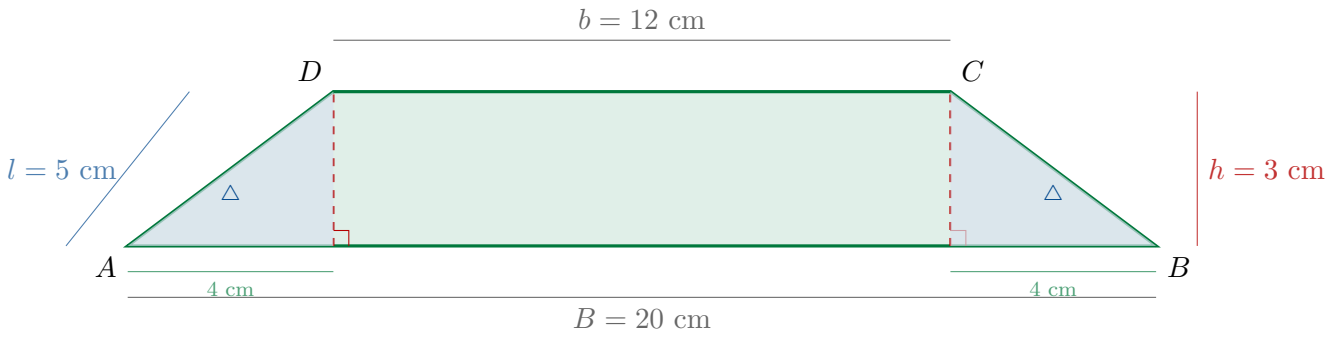


Figura 4.1: Trapecio isósceles $ABCD$ con base mayor $AB = 20$ cm, base menor $DC = 12$ cm y altura $h = 3$ cm. Los triángulos rectángulos azules (de catetos 4 cm y 3 cm) permiten calcular el lado oblicuo $l = 5$ cm mediante Pitágoras.

4.2 Conceptos clave

Un **trapecio isósceles** es un trapecio cuyos lados no paralelos (lados oblicuos) son iguales. La altura, bajada desde un extremo de la base menor, divide la diferencia de bases en dos partes iguales:

$$\text{voladizo} = \frac{B - b}{2}$$

donde B es la base mayor y b la base menor.

4.3 Cálculo del lado oblicuo mediante Pitágoras

El **voladizo** (proyección horizontal del lado oblicuo) es:

$$\text{voladizo} = \frac{B-b}{2} = \frac{20-12}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ cm}$$

El lado oblicuo l es la hipotenusa del triángulo rectángulo con catetos 4 cm (voladizo) y 3 cm (altura):

$$\begin{aligned} l^2 &= \text{voladizo}^2 + h^2 && \text{(Pitágoras)} \\ l^2 &= 4^2 + 3^2 \\ l^2 &= 16 + 9 = 25 \\ l &= \sqrt{25} \\ \boxed{l = 5 \text{ cm}} \end{aligned}$$

Observación 4.1. La terna $(3, 4, 5)$ es la terna pitagórica más sencilla y famosa. Aparece muy frecuentemente en problemas de geometría.

4.4 Cálculo del perímetro

$$P = B + b + 2l \quad (B = \text{base mayor},\ b = \text{base menor},\ l = \text{lado oblicuo})$$

$$\begin{aligned} P &= B + b + 2l \\ &= 20 + 12 + 2 \times 5 \\ &= 20 + 12 + 10 \\ &= \boxed{42 \text{ cm}} \end{aligned}$$

4.5 Cálculo del área

$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$$

Esta fórmula es la media aritmética de las bases multiplicada por la altura. Puede interpretarse como el área del rectángulo de base $\dfrac{B+b}{2}$ y altura h.

$$\begin{aligned} A &= \frac{(B+b)\cdot h}{2} \\ &= \frac{(20+12)\cdot 3}{2} \\ &= \frac{32\cdot 3}{2} \\ &= \frac{96}{2} \\ &= \boxed{48 \text{ cm}^2} \end{aligned}$$

La **altura** del trapecio es la distancia perpendicular entre las dos bases (segmento perpendicular a ambas bases). *No* es el lado oblicuo. En este problema la altura se da directamente ($h = 3$ cm), pero si no se diera habría que calcularla con Pitágoras a partir del lado oblicuo y el voladizo.

$$l = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ cm}$$

$$P = 20 + 12 + 2 \times 5 = \boxed{42 \text{ cm}}$$

$$A = \frac{(20+12)\times 3}{2} = \boxed{48 \text{ cm}^2}$$

5. Ejercicio 4 — Lado y perímetro de un pentágono regular

El área de un pentágono regular es 50 cm^2 y la apotema mide 5 cm. Calcula el lado y el perímetro del pentágono. Realiza un dibujo.

5.1 Dibujo de la situación

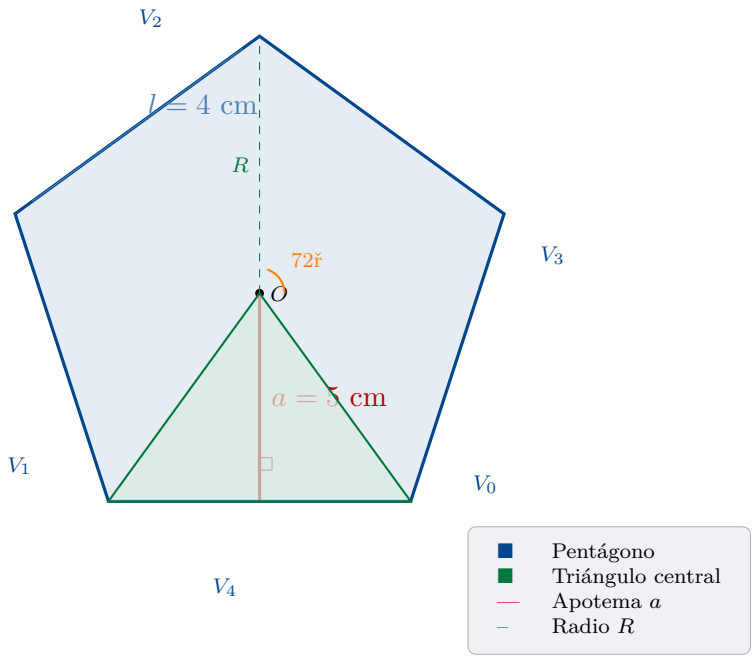


Figura 5.1: Pentágono regular con apotema $a = 5$ cm y lado $l = 4$ cm. El triángulo central verde tiene base l y altura a. Hay 5 triángulos iguales que componen el pentágono.

5.2 Conceptos clave

Apotema (a): Distancia del centro al punto medio de un lado. Es perpendicular al lado.
Radio (R): Distancia del centro a un vértice.
Lado (l): Longitud de cada lado del polígono.
Perímetro (P): $P = n \cdot l$ (número de lados $\times$ lado).

Un polígono regular de n lados se descompone en n triángulos isósceles iguales, cada uno con base l y altura a (la apotema). Por tanto:

$$A = n \cdot \frac{l \cdot a}{2} = \frac{P \cdot a}{2}$$

donde $P = n \cdot l$ es el perímetro.

5.3 Cálculo del perímetro a partir del área y la apotema

Partimos de la fórmula del área y despejamos el perímetro P:

$$A = \frac{P \cdot a}{2} \qquad \text{(fórmula del área de polígono regular)}$$

$$50 = \frac{P \cdot 5}{2}$$

$$50 \times 2 = P \times 5 \qquad \text{(multiplicamos ambos lados por 2)}$$

$$100 = 5P$$

$$P = \frac{100}{5}$$

$$\boxed{P = 20 \text{ cm}}$$

5.4 Cálculo del lado

El pentágono tiene $n = 5$ lados iguales, todos de longitud l:

$$P = n \cdot l \qquad \text{(definición de perímetro de polígono regular)}$$
$$20 = 5 \cdot l$$
$$l = \frac{20}{5}$$
$$\boxed{l = 4 \text{ cm}}$$

Verificación con el área

Comprobamos que el área calculada con los valores obtenidos coincide con el dato del enunciado:

$$A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{20 \times 5}{2} = \frac{100}{2} = 50 \text{ cm}^2 \checkmark$$

Observación 5.1. Si quisiéramos calcular el radio R del pentágono, usaríamos la relación trigonométrica:

$$a = R\cos\left(\frac{180\check{r}}{n}\right) = R\cos(36\check{r}) \implies R = \frac{a}{\cos 36\check{r}} = \frac{5}{0{,}809} \approx 6{,}18 \text{ cm}$$

(No es necesario para este problema, pero es un dato interesante.)

A veces se confunde la **apotema** con el **radio**. La apotema llega al *punto medio del lado*; el radio llega al *vértice*. Siempre $a < R$ en un polígono regular (excepto en el caso límite del círculo).

$$P = \frac{2A}{a} = \frac{2 \times 50}{5} = \boxed{20 \text{ cm}}$$
$$l = \frac{P}{n} = \frac{20}{5} = \boxed{4 \text{ cm}}$$

6. Ejercicio 5 — Área de la zona sombreada

Calcúlese el área de la zona sombreada de la figura: un cuadrado de lado 10 cm que contiene un círculo inscrito. La zona sombreada son las cuatro *lúnulas* (regiones en forma de hoja) situadas entre el cuadrado y el círculo, en las esquinas y lados.

6.1 Análisis de la figura

Observando la imagen del examen, la figura muestra:

- Un **cuadrado** de lado 10 cm.
- Un **círculo inscrito** en el cuadrado (tangente a los cuatro lados), por lo que su diámetro es 10 cm y su radio $r = 5$ cm.
- Cuatro regiones sombreadas con forma de **«pétalo»** o **«lúnula»**, situadas simétricamente entre los arcos del círculo y los lados del cuadrado.

La zona sombreada total es:

$$A_{\text{somb}} = A_{\text{cuadrado}} - A_{\text{círculo}}$$

6.2 Dibujo de la situación

6.3 Cálculo del área sombreada

Paso 1: Área del cuadrado

$$A_{\square} = l^2$$

$$A_{\square} = 10^2 = 100 \text{ cm}^2$$

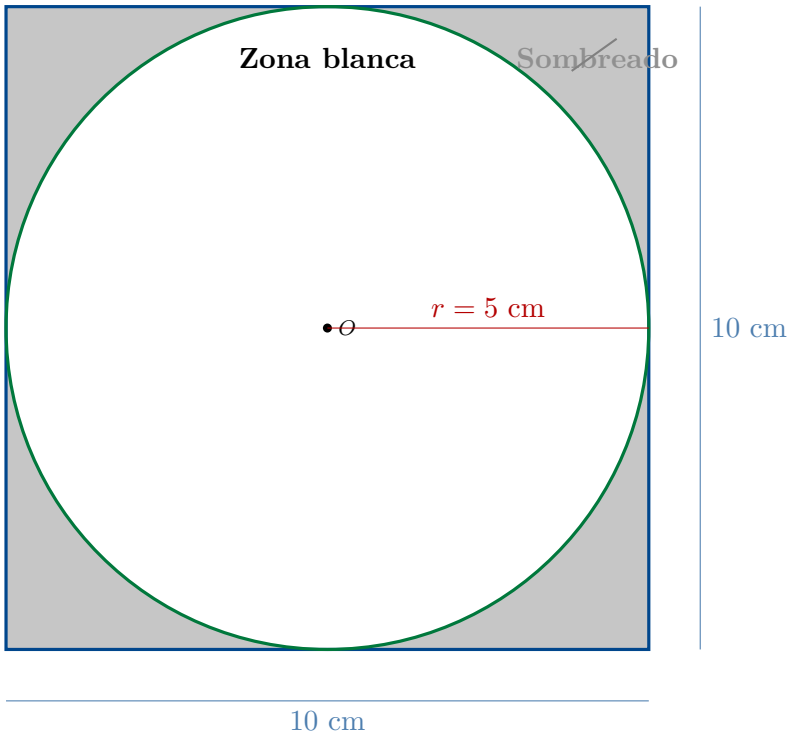


Figura 6.1: Cuadrado de lado 10 cm con círculo inscrito de radio $r = 5$ cm. La zona **sombreada** (gris) corresponde a las cuatro esquinas: $A_{\text{somb}} = A_{\square} - A_{\circ}$.

Paso 2: Radio del círculo inscrito

El círculo está **inscrito** en el cuadrado: es tangente a los cuatro lados. Por ello, el diámetro del círculo es igual al lado del cuadrado:

$$2r = 10 \text{ cm} \implies r = 5 \text{ cm}$$

Paso 3: Área del círculo

$$A_{\circ} = \pi r^2$$

$$A_{\circ} = \pi \times 5^2 = 25\pi \approx 78{,}54 \text{ cm}^2$$

Paso 4: Área de la zona sombreada

La zona sombreada es la parte del cuadrado que **no** está cubierta por el círculo:

$$\begin{aligned} A_{\text{somb}} &= A_{\square} - A_{\circ} \\ &= 100 - 25\pi \\ &\approx 100 - 78{,}54 \\ &\approx \boxed{21{,}46 \text{ cm}^2} \end{aligned}$$

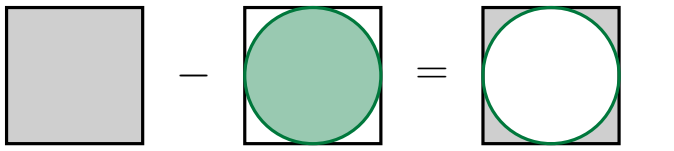
O, de forma exacta:

$$\boxed{A_{\text{somb}} = (100 - 25\pi) \text{ cm}^2}$$

Observación 6.1. La expresión exacta $(100 - 25\pi)$ cm^2 es matemáticamente más correcta que el valor decimal. Sin embargo, en Secundaria se suele pedir el resultado numérico aproximado usando $\pi \approx 3{,}1416$.

Es crucial **identificar correctamente** la zona sombreada antes de plantear el cálculo. En este caso, la zona sombreada es la diferencia entre el cuadrado y el círculo. Si la zona sombreada fuera el interior del círculo, el resultado sería 25π. Siempre hay que leer el enunciado y observar el dibujo con cuidado.

Visualización del proceso



$A_{\square} = 100$ $A_{\circ} = 25\pi$ $A_{\text{somb}} = 100 - 25\pi$

$$A_{\square} = 10^2 = 100 \text{ cm}^2$$

$$r = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$$

$$A_{\circ} = \pi \cdot 5^2 = 25\pi \approx 78{,}54 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{somb}} = 100 - 25\pi \approx \boxed{21{,}46 \text{ cm}^2}$$

Resultado exacto: $(100 - 25\pi)$ cm^2.

7. Resumen de resultados

Ej.	Pregunta	Resultado
1	Altura del poste de luz	$\boxed{6\text{ m}}$
2	Área del triángulo isósceles ($l = 13$, $b = 10$)	$h = 12$ cm, $\boxed{A = 60\text{ cm}^2}$
3a	Perímetro del trapecio isósceles ($B = 20$, $b = 12$, $h = 3$)	$l = 5$ cm, $\boxed{P = 42\text{ cm}}$
3b	Área del trapecio isósceles	$\boxed{A = 48\text{ cm}^2}$
4a	Perímetro del pentágono regular ($A = 50$, $a = 5$)	$\boxed{P = 20\text{ cm}}$
4b	Lado del pentágono regular	$\boxed{l = 4\text{ cm}}$
5	Área sombreada (cuadrado − círculo inscrito, $l = 10$)	$\boxed{(100 - 25\pi) \approx 21{,}46\text{ cm}^2}$

Fórmulas utilizadas en el examen

Semejanza: $\frac{h_1}{s_1} = \frac{h_2}{s_2}$

Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$

Área triángulo: $A = \frac{b \cdot h}{2}$

Área trapecio: $A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$

Área polígono regular: $A = \frac{P \cdot a}{2}$

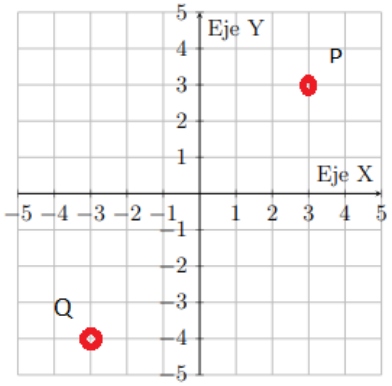
Área círculo: $A = \pi r^2$

Área cuadrado: $A = l^2$

Junta de Castilla y León
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA

EXAMEN DE MATEMÁTICAS
2ºB ESO
FUNCIONES Y ESTADÍSTICA
13/06/2025

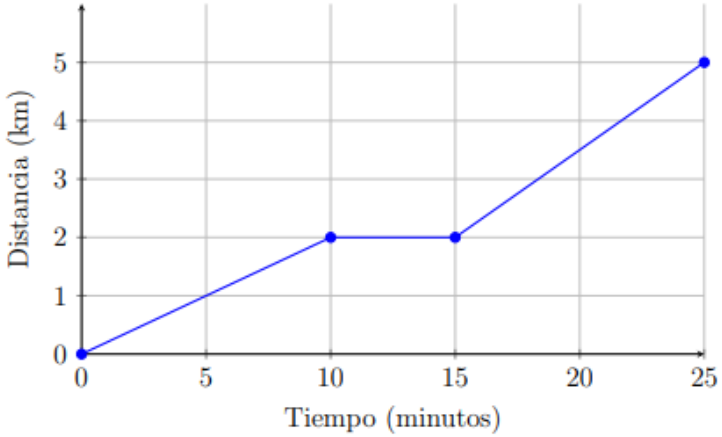
Nº1.- Escribe las coordenadas de los puntos P y Q y sitúa en el eje de coordenadas los puntos R= (3, -4) y S = (-1, 0).



Nº2.- Representa la siguiente función, indica qué tipo de función es y señala cuál es su pendiente: $y = 3x - 2$

Nº3.- Calcúlese la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (2,4) y B (-1,1)

Nº4.- La siguiente gráfica muestra el recorrido de María desde su casa al colegio:



a) ¿A qué distancia está el colegio de su casa? ¿Cuánto tiempo tarda en llegar?
b) María se detiene a comprar un bocadillo. ¿Cuánto tiempo está parada? ¿A qué distancia de su casa ocurre esto?
c) ¿Qué velocidad lleva (en km/h) durante los primeros 10 minutos?

Nº5.- Una compañía de transporte cobra 5 euros por el servicio más 2 euros por cada kilómetro recorrido. Escribe la ecuación que relaciona la distancia recorrida (x) con el coste del servicio (y). Representa la función

Nº6.- Se ha registrado el número de libros leídos por 20 estudiantes en un mes:

4, 2, 5, 3, 2, 1, 6, 4, 3, 2, 5, 4, 3, 2, 1, 6, 4, 5, 3, 2.

a) Construye la tabla de frecuencias y calcula la moda, la media, la varianza, la desviación típica, el coeficiente de variación, la mediana, los cuartiles 1º y 3º y realiza el diagrama de caja.
b) Dibuja un gráfico de barras sobre los datos obtenidos.

Nº7.- En una bolsa hay 15 bolas numeradas del 1 al 15. Se extrae una bola al azar y se observa su número.

a) Escribe el espacio muestral.

b) Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

- A = "Sacar un número primo"
- B = "Sacar un múltiplo de 4"
- C = "Sacar un número menor que 6"
- D = "Sacar un número mayor o igual a 10"
- E = "Suceso imposible"

Nº8.- En una clase de 30 estudiantes, 18 estudian Matemáticas, 12 estudian Física y 5 estudian ambas asignaturas. Organiza los datos en una tabla de contingencia. Calcula la probabilidad de que al elegir un estudiante al azar:

a) Estudie Matemáticas.

b) Estudie Física, pero no Matemáticas.

c) No estudie ninguna de las dos asignaturas.

d) Sabiendo que estudia Matemáticas, que también estudie Física.

SUERTE JÓVENES

SOLUCIONES COMPLETAS

Contenidos del examen

- Coordenadas cartesianas y representación de puntos
- Funciones lineales: pendiente y ordenada en el origen
- Ecuación de la recta dados dos puntos
- Interpretación de gráficas: movimiento de María
- Función afín: modelo de coste de transporte
- Estadística descriptiva: tablas, medidas y diagramas
- Probabilidad clásica: espacio muestral y sucesos
- Probabilidad condicionada y tablas de contingencia

Índice general

Índice general **1**

Introducción al documento **2**

1. Coordenadas cartesianas **3**
Ejercicio 1 – Coordenadas de puntos y representación 3

2. Funciones lineales **6**
Ejercicio 2 – Representación y análisis de $y = 3x - 2$ 6

3. Ecuación de la recta por dos puntos **9**
Ejercicio 3 – Recta que pasa por A(2,4) y B(-1,1) 9

4. Interpretación de gráficas **11**
Ejercicio 4 – Recorrido de María al colegio 11

5. Función afín aplicada: modelo de transporte **14**
Ejercicio 5 – Coste de una compañía de transporte 14

6. Estadística descriptiva **16**
Ejercicio 6 – Libros leídos por 20 estudiantes 16

7. Probabilidad clásica **22**
Ejercicio 7 – Bolsa con 15 bolas numeradas 22

8. Probabilidad condicionada y tabla de contingencia **26**
Ejercicio 8 – Matemáticas y Física en una clase de 30 26

Resumen general de resultados **30**

Introducción al documento

Este documento contiene la resolución exhaustiva y pedagógica de todos los ejercicios del Examen de Matemáticas de 2.º B de ESO, correspondiente a la unidad de **Funciones, Estadística y Probabilidad**, celebrado el 13 de junio de 2025.

Cada ejercicio se resuelve sin omitir ningún paso, justificando cada transformación algebraica, cada razonamiento y cada resultado. El objetivo es que el alumno no solo conozca la respuesta correcta, sino que entienda *por qué* cada paso es necesario y correcto.

Leyenda de iconos y cuadros

- **Cuadro azul oscuro**: enunciado del ejercicio.
- **Cuadro verde**: resultado o respuesta final.
- **Cuadro rojo**: advertencia sobre errores frecuentes.
- **Cuadro amarillo**: observaciones y definiciones previas.

Capítulo 1

Coordenadas cartesianas

Ejercicio 1 – Coordenadas de puntos y representación

Enunciado del Ejercicio 1

Escribe las coordenadas de los puntos P y Q y sitúa en el eje de coordenadas los puntos $R = (3,\ -4)$ y $S = (-1,\ 0)$.

Marco conceptual previo

Definición

El **sistema de coordenadas cartesianas** en el plano está formado por dos rectas perpendiculares entre sí que se cortan en el punto $O = (0, 0)$, denominado *origen de coordenadas*. La recta horizontal se llama **eje de abscisas** (Ox) y la vertical **eje de ordenadas** (Oy).
A cada punto P del plano le corresponde un único par ordenado (a, b), donde:

- a es la **abscisa** o coordenada x: distancia horizontal desde el eje Oy.
- b es la **ordenada** o coordenada y: distancia vertical desde el eje Ox.

Parte 1: Lectura de coordenadas de P y Q

A partir de la gráfica del enunciado se observa:

- El punto **P** se encuentra en la columna $x = 4$ y en la fila $y = 3$ del papel cuadriculado, por tanto:

$$\boxed{P = (4,\ 3)}$$

- El punto **Q** se encuentra en la columna $x = -3$ y en la fila $y = -4$, por tanto:

$$\boxed{Q = (-3,\ -4)}$$

¡Atención!

Recuerda que el orden importa: primero se indica la coordenada x (horizontal) y después la coordenada y (vertical). El par $(3, -4)$ es distinto de $(-4, 3)$.

Parte 2: Representación de $R = (3, -4)$ y $S = (-1, 0)$

Procedimiento general para representar un punto (a, b):

1. Desde el origen O, desplazarse a unidades en el *eje horizontal* (hacia la derecha si $a > 0$; hacia la izquierda si $a < 0$).
2. Desde esa posición, desplazarse b unidades en el *eje vertical* (hacia arriba si $b > 0$; hacia abajo si $b < 0$).
3. Marcar el punto resultante.

Para $R = (3, -4)$:

- $x = 3$: nos desplazamos 3 unidades a la *derecha* del origen.
- $y = -4$: desde ahí, bajamos 4 unidades.
- R queda en el **cuarto cuadrante** ($x > 0$, $y < 0$).

Para $S = (-1, 0)$:

- $x = -1$: nos desplazamos 1 unidad a la *izquierda* del origen.
- $y = 0$: no hay desplazamiento vertical.
- S queda **sobre el eje** Ox (eje de abscisas), ya que su ordenada es cero.

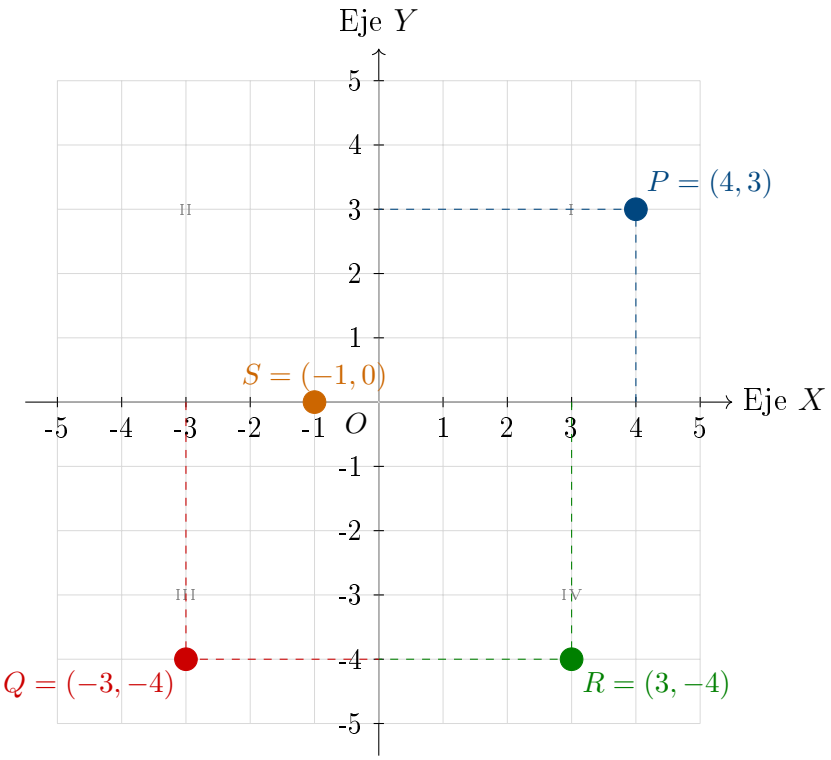


Figura 1.1: Representación de los cuatro puntos en el plano cartesiano. Las líneas discontinuas ayudan a visualizar las proyecciones sobre cada eje.

Resultado

- $P = (4, 3)$ — primer cuadrante.
- $Q = (-3, -4)$ — tercer cuadrante.
- $R = (3, -4)$ — cuarto cuadrante.
- $S = (-1, 0)$ — sobre el eje Ox.

Capítulo 2

Funciones lineales

Ejercicio 2 – Representación y análisis de $y = 3x - 2$

Enunciado del Ejercicio 2

Representa la siguiente función, indica qué tipo de función es y señala cuál es su pendiente:

$$y = 3x - 2$$

Marco conceptual: función lineal y función afín

Definición

Una **función afín** es toda función de la forma $y = mx + n$, donde:

- $m \in \mathbb{R}$ es la **pendiente** (o inclinación) de la recta. Indica cuánto varía y cuando x aumenta en una unidad.
- $n \in \mathbb{R}$ es la **ordenada en el origen** o término independiente. Es el valor de y cuando $x = 0$, es decir, el punto de corte con el eje Oy.

Caso especial: si $n = 0$, la función se llama **función lineal** ($y = mx$) y pasa por el origen.
Toda función afín es **proporcional** sólo cuando $n = 0$.

Identificación del tipo de función y la pendiente

La función dada es $y = 3x - 2$.
Comparando con la forma general $y = mx + n$:

$$m = 3 \qquad n = -2$$

- **Tipo de función**: Es una **función afín** (recta no proporcional), ya que tiene la forma $y = mx + n$ con $n \neq 0$. Su gráfica es una *recta* que no pasa por el origen.
- **Pendiente**: $m = 3$. Esto significa que, por cada unidad que avanza x, el valor de y *aumenta* 3 unidades. La recta es *creciente*.
- **Ordenada en el origen**: $n = -2$. La recta corta al eje Oy en el punto $(0, -2)$.

Tabla de valores

Para representar una recta basta con conocer dos puntos. Calculamos tres para mayor seguridad:

x	$y = 3x - 2$	Punto
-1	$3(-1) - 2 = -3 - 2 = -5$	$(-1,\ -5)$
0	$3(0) - 2 = -2$	$(0,\ -2)$
1	$3(1) - 2 = 1$	$(1,\ 1)$
2	$3(2) - 2 = 4$	$(2,\ 4)$

Interpretación geométrica de la pendiente

La pendiente $m = 3 = \dfrac{3}{1}$ se interpreta como:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{variación vertical}}{\text{variación horizontal}} = \frac{3}{1}$$

Es decir, si nos desplazamos 1 unidad hacia la derecha, subimos 3 unidades.

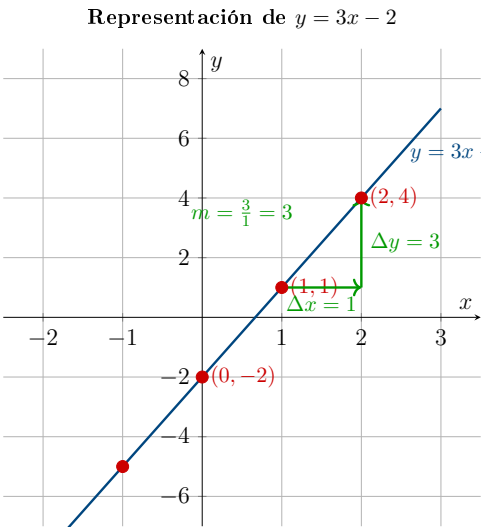


Figura 2.1: Gráfica de $y = 3x - 2$. El triángulo verde muestra cómo se calcula la pendiente: por cada unidad que avanza x, y aumenta en 3 unidades.

Resultado

- **Tipo de función**: función **afín** (recta no proporcional).
- **Pendiente**: $m = \mathbf{3}$ (recta creciente).
- **Ordenada en el origen**: $n = -2$ — corta al eje Oy en $(0, -2)$.
- **Corte con el eje** Ox: haciendo $y = 0 \Rightarrow 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2}{3}$, es decir, en el punto $\left(\dfrac{2}{3}, 0\right)$.

Capítulo 3

Ecuación de la recta por dos puntos

Ejercicio 3 – Recta que pasa por A(2,4) y B(-1,1)

Enunciado del Ejercicio 3

Calcúlese la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2,\,4)$ y $B(-1,\,1)$.

Marco conceptual: ecuación explícita de la recta

Toda recta no vertical tiene ecuación de la forma $y = mx + n$. Para determinar dicha ecuación necesitamos dos datos, que obtendremos de los dos puntos conocidos.

Método empleado: cálculo directo de la pendiente y resolución de n. Este método es el más directo y sistemático cuando se conocen dos puntos.

Paso 1: Cálculo de la pendiente

La pendiente de la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Identificamos:

$$A(2,4) \Rightarrow x_1 = 2, \quad y_1 = 4 \qquad\qquad B(-1,1) \Rightarrow x_2 = -1, \quad y_2 = 1$$

Sustituimos:

$$m = \frac{1-4}{-1-2} = \frac{-3}{-3} = \boxed{1}$$

Comprobación de signo: ambos numerador y denominador son negativos, por lo que el cociente es positivo. La recta es *creciente*. Esto es coherente: cuando x aumenta de -1 a 2 (aumenta 3 unidades), y aumenta de 1 a 4 (también 3 unidades).

Paso 2: Cálculo de la ordenada en el origen

Sabemos que la ecuación es $y = 1 \cdot x + n = x + n$.

Sustituimos cualquiera de los dos puntos para encontrar n. Usamos el punto $A(2,4)$:

$$4 = 2 + n$$

$$n = 4 - 2 = \boxed{2}$$

Verificación con el punto $B(-1, 1)$:

$$y = (-1) + 2 = 1 \checkmark$$

El punto B también satisface la ecuación. El resultado es correcto.

Resultado final

$$\boxed{y = x + 2}$$

Método alternativo: ecuación punto-pendiente

Existe otro método igualmente válido. La **ecuación punto-pendiente** dice que, conocida la pendiente m y un punto (x_0, y_0) de la recta:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Usando $m = 1$ y el punto $A(2, 4)$:

$$y - 4 = 1 \cdot (x - 2)$$

$$y - 4 = x - 2$$

$$y = x - 2 + 4 = x + 2$$

El resultado coincide: $y = x + 2$. ✓

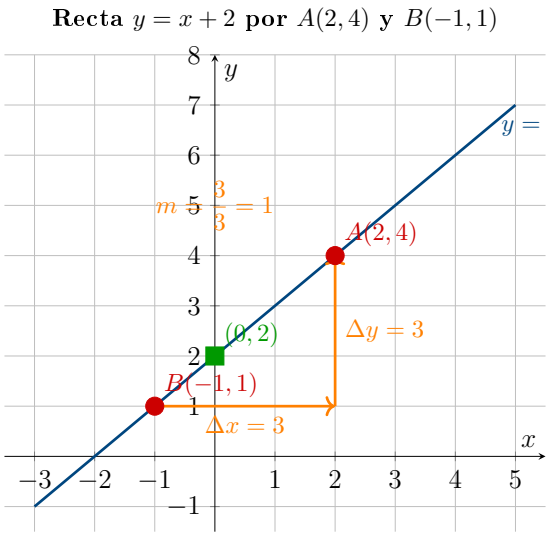


Figura 3.1: Recta $y = x + 2$ que pasa por $A(2, 4)$ y $B(-1, 1)$. El triángulo naranja muestra el cálculo de la pendiente.

Resultado

La ecuación de la recta que pasa por $A(2, 4)$ y $B(-1, 1)$ es:

$$y = x + 2$$

con pendiente $m = 1$ y ordenada en el origen $n = 2$.

Capítulo 4

Interpretación de gráficas

Ejercicio 4 – Recorrido de María al colegio

Enunciado del Ejercicio 4

La siguiente gráfica muestra el recorrido de María desde su casa al colegio (eje X: tiempo en minutos; eje Y: distancia en kilómetros).

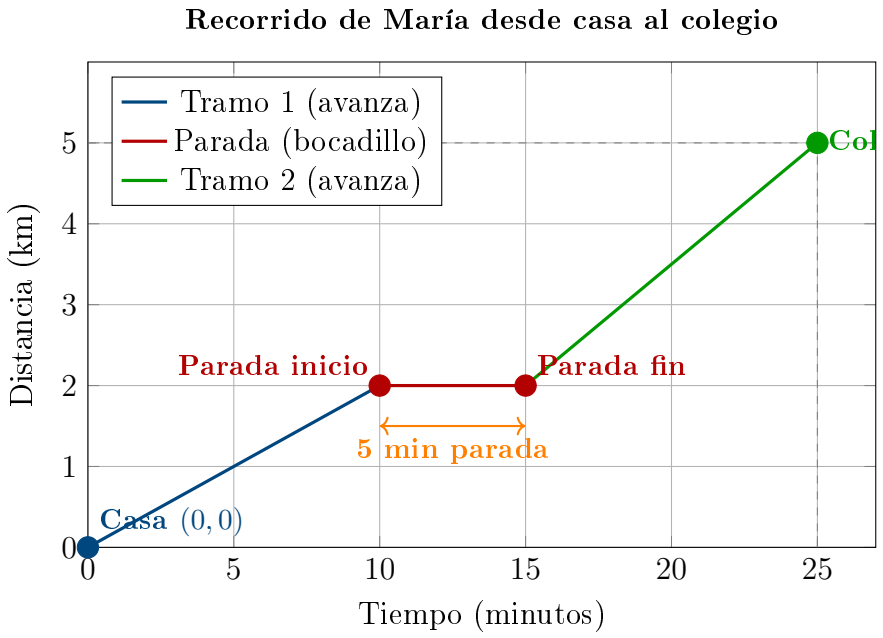
a) ¿A qué distancia está el colegio de su casa? ¿Cuánto tiempo tarda en llegar?

b) María se detiene a comprar un bocadillo. ¿Cuánto tiempo está parada? ¿A qué distancia de su casa ocurre esto?

c) ¿Qué velocidad lleva (en km/h) durante los primeros 10 minutos?

Lectura e interpretación de la gráfica

A partir de la gráfica del enunciado se extraen los datos siguientes:



Los datos que podemos leer directamente en la gráfica son:

Tiempo (min)	Distancia (km)	Evento
0	0	Sale de casa
10	2	Se detiene (compra bocadillo)
15	2	Continúa el camino
25	5	Llega al colegio

Apartado a) Distancia al colegio y tiempo total

Mirando el punto final de la trayectoria:

$$\text{Punto final: } (25 \text{ min},\ 5 \text{ km})$$

- **Distancia al colegio**: el valor de la coordenada y en el punto final es

$$\boxed{d = 5 \text{ km}}$$

- **Tiempo total**: el valor de la coordenada x en el punto final es

$$\boxed{t = 25 \text{ minutos}}$$

Apartado b) Parada para el bocadillo

En la gráfica, la parada corresponde al segmento *horizontal*, ya que la distancia no cambia mientras el tiempo sí avanza. Este tramo va de $(10, 2)$ a $(15, 2)$.

- **Tiempo de parada**:

$$\Delta t = 15 - 10 = \boxed{5 \text{ minutos}}$$

- **Distancia de casa** donde ocurre la parada: la coordenada y del tramo horizontal es constante e igual a

$$\boxed{d = 2 \text{ km desde casa}}$$

Truco para identificar tramos

En una gráfica distancia-tiempo:

- Segmento **inclinado hacia arriba**: la persona se *aleja*.
- Segmento **horizontal**: la persona está *parada*.
- Segmento **inclinado hacia abajo**: la persona se *acerca* (retrocede).

La **pendiente del segmento** representa la **velocidad**.

Apartado c) Velocidad durante los primeros 10 minutos

Durante los primeros 10 minutos, María recorre 2 km. La velocidad es:

$$v = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$$

El tiempo debe expresarse en horas para obtener km/h:

$$t = 10 \text{ min} = \frac{10}{60} \text{ h} = \frac{1}{6} \text{ h}$$

La distancia recorrida es $d = 2$ km.
Calculamos:

$$v = \frac{2 \text{ km}}{\frac{1}{6} \text{ h}} = 2 \times 6 = \boxed{12 \text{ km/h}}$$

Verificación: $12 \text{ km/h} \times \frac{10}{60} \text{ h} = 12 \times \frac{1}{6} = 2 \text{ km}$ ✓

Resultado

a) El colegio está a **5 km** de casa. María tarda **25 minutos** en llegar.

b) La parada dura **5 minutos** y ocurre a **2 km** de casa.

c) La velocidad en los primeros 10 minutos es **12 km/h**.

Capítulo 5

Función afín aplicada: modelo de transporte

Ejercicio 5 – Coste de una compañía de transporte

Enunciado del Ejercicio 5

Una compañía de transporte cobra **5 euros por el servicio** más **2 euros por cada kilómetro** recorrido. Escribe la ecuación que relaciona la distancia recorrida (x) con el coste del servicio (y). Representa la función.

Construcción del modelo matemático

Identificamos las variables:

- x = distancia recorrida (en kilómetros), $x \geq 0$.
- y = coste total (en euros).

El coste tiene dos componentes:

1. **Coste fijo**: 5 € independientemente de la distancia. En la ecuación $y = mx + n$, este término corresponde a $n = 5$.
2. **Coste variable**: 2 € por cada km recorrido. Si recorro x km, el coste variable es $2 \cdot x$. Este término corresponde a $m = 2$.

El coste total es la suma de ambos componentes:

$$y = 2x + 5$$

Verificación del modelo

- Si $x = 0$ km (no se recorre ningún km): $y = 2(0) + 5 = 5$ €. ✓(Solo se paga el servicio fijo.)
- Si $x = 1$ km: $y = 2(1) + 5 = 7$ €. ✓
- Si $x = 10$ km: $y = 2(10) + 5 = 25$ €. ✓

Tabla de valores para la representación

x (km)	$y = 2x + 5$ (€)	Punto
0	5	$(0, 5)$
1	7	$(1, 7)$
3	11	$(3, 11)$
5	15	$(5, 15)$
10	25	$(10, 25)$

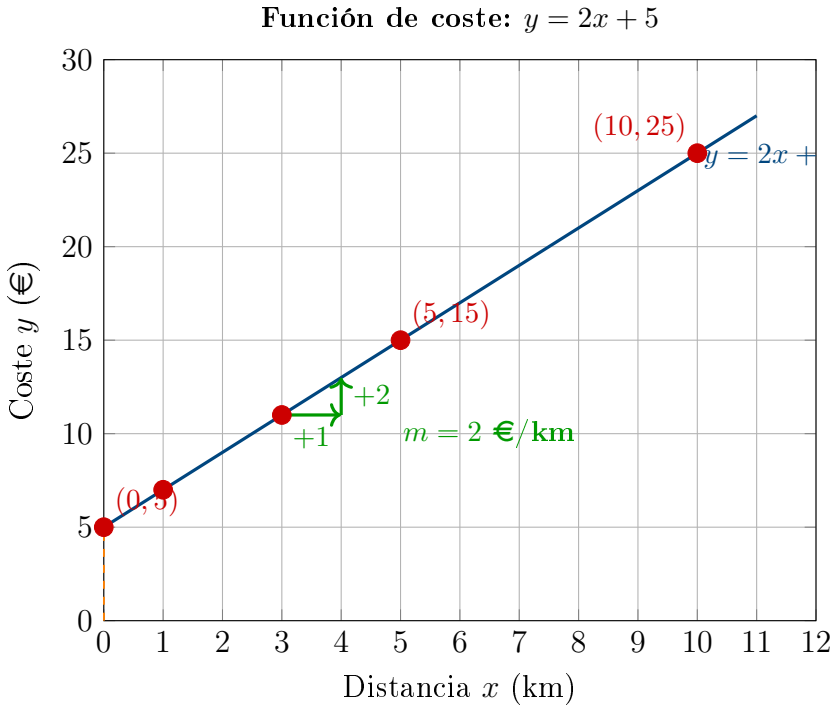


Figura 5.1: Función de coste $y = 2x + 5$. La ordenada en el origen ($n = 5$) representa el coste fijo del servicio. La pendiente ($m = 2$) representa el coste por kilómetro.

Resultado

La ecuación que modela el coste es:

$$\boxed{y = 2x + 5}$$

donde x es la distancia (km) e y el coste (€).

- Pendiente $m = 2$ €/km.
- Ordenada en el origen $n = 5$ € (tarifa fija).
- Tipo: función **afín** creciente.

Capítulo 6

Estadística descriptiva

Ejercicio 6 – Libros leídos por 20 estudiantes

Enunciado del Ejercicio 6

Se ha registrado el número de libros leídos por 20 estudiantes en un mes:

$$4, 2, 5, 3, 2, 1, 6, 4, 3, 2, 5, 4, 3, 2, 1, 6, 4, 5, 3, 2$$

a) Construye la tabla de frecuencias y calcula la moda, la media, la varianza, la desviación típica, el coeficiente de variación, la mediana, los cuartiles Q_1 y Q_3 y realiza el diagrama de caja.

b) Dibuja un gráfico de barras.

Organización de los datos

Primero ordenamos los 20 datos de menor a mayor:

$$1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6$$

Contamos la frecuencia absoluta de cada valor:

Valor (x_i)	**Frecuencia absoluta** (f_i)
1	2
2	5
3	4
4	4
5	3
6	2
Total	20

Tabla de frecuencias completa

x_i	f_i	$f_i^{\text{rel}} = f_i/N$	$f_i^{\%}$	F_i (acum.)	$x_i \cdot f_i$
1	2	$2/20 = 0{,}10$	10 %	2	2
2	5	$5/20 = 0{,}25$	25 %	7	10
3	4	$4/20 = 0{,}20$	20 %	11	12
4	4	$4/20 = 0{,}20$	20 %	15	16
5	3	$3/20 = 0{,}15$	15 %	18	15
6	2	$2/20 = 0{,}10$	10 %	20	12
Total	**20**	**1,00**	**100 %**		**67**

a.1) Moda

Definición

La **moda** (M_o) es el valor que aparece con mayor frecuencia en la muestra.

El valor $x = 2$ tiene frecuencia $f = 5$, la más alta. Por tanto:

$$\boxed{M_o = 2 \text{ libros}}$$

a.2) Media aritmética

Definición

La **media aritmética** o promedio es:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot f_i$$

donde N es el número total de datos.

De la tabla: $\sum x_i \cdot f_i = 2 + 10 + 12 + 16 + 15 + 12 = 67$.

$$\bar{x} = \frac{67}{20} = \boxed{3{,}35 \text{ libros}}$$

a.3) Varianza

Definición

La **varianza** mide la dispersión de los datos respecto a la media:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \bar{x})^2$$

Calculamos $(x_i - \bar{x})^2$ para cada valor:

x_i	f_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
1	2	$1 - 3{,}35 = -2{,}35$	5,5225	11,0450
2	5	$2 - 3{,}35 = -1{,}35$	1,8225	9,1125
3	4	$3 - 3{,}35 = -0{,}35$	0,1225	0,4900
4	4	$4 - 3{,}35 = 0{,}65$	0,4225	1,6900
5	3	$5 - 3{,}35 = 1{,}65$	2,7225	8,1675
6	2	$6 - 3{,}35 = 2{,}65$	7,0225	14,0450
			Suma	**44,5500**

$$\sigma^2 = \frac{44{,}55}{20} = \boxed{2{,}2275}$$

a.4) Desviación típica

Definición

La **desviación típica** es la raíz cuadrada positiva de la varianza:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Se expresa en las mismas unidades que los datos originales.

$$\sigma = \sqrt{2{,}2275} \approx \boxed{1{,}4925 \text{ libros}}$$

a.5) Coeficiente de variación

Definición

El **coeficiente de variación** (CV) es una medida de dispersión relativa:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\,\%$$

Permite comparar la variabilidad de conjuntos con distintas medias o unidades. Un $CV < 30\,\%$ indica baja dispersión relativa.

$$CV = \frac{1{,}4925}{3{,}35} \times 100 = \frac{1{,}4925}{3{,}35} \times 100 \approx \boxed{44{,}55\,\%}$$

La dispersión relativa es moderada-alta: los datos se distribuyen de manera bastante variada respecto a la media.

a.6) Mediana

Definición

La **mediana** (M_e) es el valor central de los datos ordenados. Con N datos:

- Si N es impar, la mediana es el dato en la posición $\dfrac{N+1}{2}$.
- Si N es par, la mediana es la media aritmética de los datos en las posiciones $\dfrac{N}{2}$ y $\dfrac{N}{2}+1$.

$N = 20$ (par). Las posiciones relevantes son la 10.ª y la 11.ª.
Datos ordenados con posición:

Pos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20																			
Val	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	6	6

El dato en la posición 10 es 3 y el de la posición 11 es 4.

$$M_e = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2} = \boxed{3{,}5 \text{ libros}}$$

a.7) Cuartiles Q_1 y Q_3

Definición

Los **cuartiles** dividen los datos ordenados en cuatro partes iguales:

- Q_1: primer cuartil, separa el 25 % inferior del 75 % superior.
- $Q_2 = M_e$: segundo cuartil o mediana.
- Q_3: tercer cuartil, separa el 75 % inferior del 25 % superior.

Con $N = 20$ datos:
Cálculo de Q_1: mediana de los 10 primeros datos (posiciones 1 a 10).
Los 10 primeros datos: $1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3$.
Q_1 = media de los valores en posición 5 y 6:

$$Q_1 = \frac{2+2}{2} = \boxed{2 \text{ libros}}$$

Cálculo de Q_3: mediana de los 10 últimos datos (posiciones 11 a 20).
Los 10 últimos datos: $4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6$.
Espera — son $20 - 10 = 10$ datos: posiciones 11–20: $4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6$.
Contamos: pos 11=4, 12=4, 13=4, 14=4, 15=5, 16=5, 17=5, 18=6, 19=6... falta pos 20.
Los datos ordenados completos son: $1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6$... son 19. Revisemos el enunciado.
Los datos del enunciado son exactamente: $4, 2, 5, 3, 2, 1, 6, 4, 3, 2, 5, 4, 3, 2, 1, 6, 4, 5, 3, 2$.
Contamos: 20 datos. Ordenados: $1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, \mathbf{3}, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6$.

Recuento por valor: 1→2, 2→5, 3→4, 4→4, 5→3, 6→2. Total=2+5+4+4+3+2=20. ✓

Los datos en las posiciones 11 a 20 son: $3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6$.

Q_3 = media de posiciones 15 y 16 de esa subserie (o bien posiciones 15 y 16 del total):

$$\text{Posición 15 del total} = 4, \qquad \text{Posición 16 del total} = 5$$

$$Q_3 = \frac{4+5}{2} = \boxed{4{,}5 \text{ libros}}$$

Rango intercuartílico:

$$RIC = Q_3 - Q_1 = 4{,}5 - 2 = 2{,}5$$

a.8) Diagrama de caja (Box-plot)

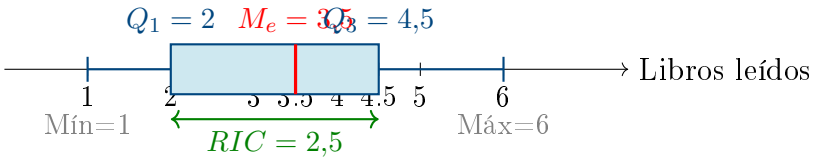


Figura 6.1: Diagrama de caja para el número de libros leídos. La caja azul abarca el 50 % central de los datos ($Q_1 = 2$ a $Q_3 = 4{,}5$). La línea roja indica la mediana ($M_e = 3{,}5$). Los bigotes llegan al mínimo (1) y máximo (6).

b) Gráfico de barras

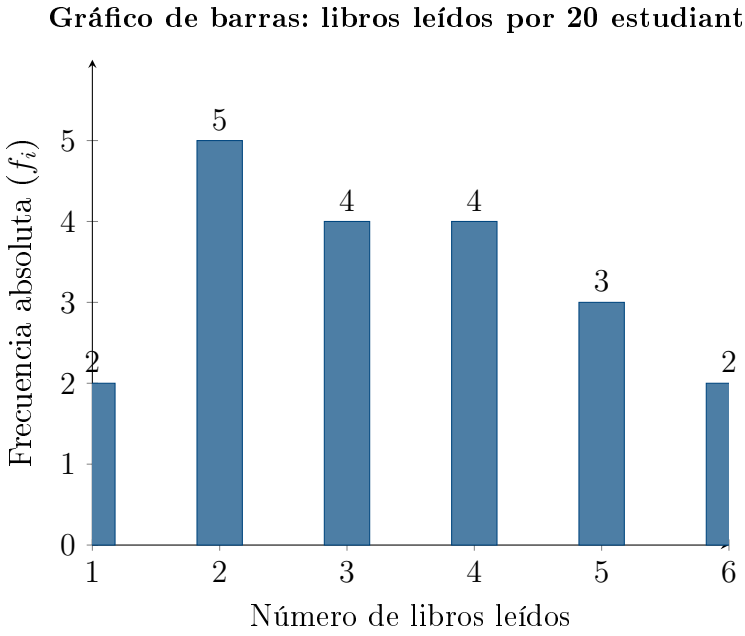


Figura 6.2: Distribución de frecuencias absolutas. El valor más frecuente (moda) es 2 libros con 5 estudiantes.

Resultado

Moda:	$M_o = 2$
Media:	$\bar{x} = 3{,}35$
Varianza:	$\sigma^2 = 2{,}2275$
Desviación típica:	$\sigma \approx 1{,}4925$
Coef. de variación:	$CV \approx 44{,}55\,\%$
Mediana:	$M_e = 3{,}5$
Primer cuartil:	$Q_1 = 2$
Tercer cuartil:	$Q_3 = 4{,}5$
Rango intercuartílico:	$RIC = 2{,}5$

Capítulo 7

Probabilidad clásica

Ejercicio 7 – Bolsa con 15 bolas numeradas

Enunciado del Ejercicio 7

En una bolsa hay 15 bolas numeradas del 1 al 15. Se extrae una bola al azar y se observa su número.

a) Escribe el espacio muestral.

b) Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos: A = "Sacar un número primo"; B = "Sacar un múltiplo de 4"; C = "Sacar un número menor que 6"; D = "Sacar un número mayor o igual a 10"; E = "Suceso imposible".

Marco conceptual: probabilidad clásica (regla de Laplace)

Definición

En un experimento aleatorio **equiprobable** (todos los resultados igualmente probables), la **regla de Laplace** dice:

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables a } A}{\text{Número total de casos posibles}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

donde Ω es el espacio muestral.

Apartado a) Espacio muestral

El espacio muestral Ω es el conjunto de todos los resultados posibles:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

$$|\Omega| = 15$$

Apartado b) Probabilidades de cada suceso

Suceso A = "Sacar un número primo"

Recordemos que un número **primo** es aquel mayor que 1 divisible únicamente por 1 y por sí mismo. Identificamos los primos del 1 al 15:

- 1: NO (por definición, el 1 no es primo).
- 2: SÍ ($2 = 2 \times 1$, solo divisible por 1 y 2).
- 3: SÍ.
- $4 = 2 \times 2$: NO.
- 5: SÍ.
- $6 = 2 \times 3$: NO.
- 7: SÍ.
- $8 = 2^3$: NO.
- $9 = 3^2$: NO.
- $10 = 2 \times 5$: NO.
- 11: SÍ.
- $12 = 4 \times 3$: NO.
- 13: SÍ.
- $14 = 2 \times 7$: NO.
- $15 = 3 \times 5$: NO.

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\} \quad \Rightarrow \quad |A| = 6$$
$$P(A) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = \boxed{0{,}4}$$

Suceso B = "Sacar un múltiplo de 4"

Los múltiplos de 4 entre 1 y 15 son: $4, 8, 12$.

$$B = \{4, 8, 12\} \quad \Rightarrow \quad |B| = 3$$
$$P(B) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = \boxed{0{,}2}$$

Suceso C = "Sacar un número menor que 6"

Los números menores que 6 (estrictamente) entre 1 y 15 son: $1, 2, 3, 4, 5$.

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \Rightarrow \quad |C| = 5$$
$$P(C) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \approx \boxed{0{,}\overline{3}}$$

Suceso D = "Sacar un número mayor o igual a 10"

Los números ≥ 10 entre 1 y 15 son: $10, 11, 12, 13, 14, 15$.

$$D = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\} \quad \Rightarrow \quad |D| = 6$$

$$P(D) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = \boxed{0{,}4}$$

Suceso E = "Suceso imposible"

Definición

El **suceso imposible** es aquel que no puede ocurrir bajo ninguna circunstancia.
Se denota $\emptyset$ (conjunto vacío).
Su probabilidad es siempre $P(\emptyset) = 0$.

El suceso imposible no tiene ningún elemento favorable:

$$E = \emptyset \quad \Rightarrow \quad |E| = 0$$

$$P(E) = \frac{0}{15} = \boxed{0}$$

Un ejemplo concreto de suceso imposible en este experimento sería: "sacar el número 20" o "sacar un número negativo".

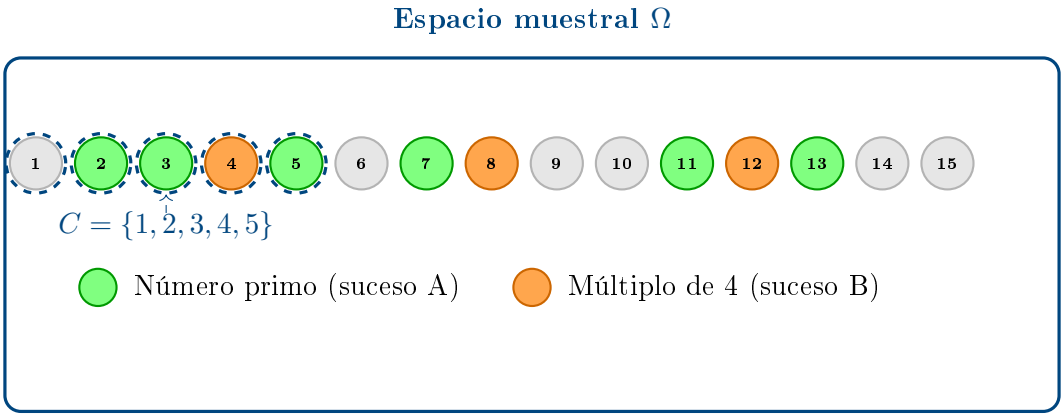


Figura 7.1: Representación visual del espacio muestral. Bolas verdes: números primos (suceso A). Bolas naranja: múltiplos de 4 (suceso B). Contorno azul punteado: números menores que 6 (suceso C).

Resultado

$$P(A) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$
$$P(B) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$
$$P(C) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$$
$$P(D) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$
$$P(E) = 0$$

Capítulo 8

Probabilidad condicionada y tabla de contingencia

Ejercicio 8 – Matemáticas y Física en una clase de 30

Enunciado del Ejercicio 8

En una clase de 30 estudiantes, 18 estudian Matemáticas, 12 estudian Física y 5 estudian **ambas** asignaturas. Organiza los datos en una tabla de contingencia. Calcula la probabilidad de que al elegir un estudiante al azar:

a) Estudie Matemáticas.

b) Estudie Física, pero no Matemáticas.

c) No estudie ninguna de las dos asignaturas.

d) Sabiendo que estudia Matemáticas, que también estudie Física.

Marco conceptual

Definición

Principio de inclusión-exclusión: Para dos sucesos A y B,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Probabilidad condicionada: La probabilidad de B dado que ha ocurrido A:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{|A \cap B|}{|A|}$$

Organización de los datos

Definimos los conjuntos:

$$\begin{aligned} M &= \text{“estudia Matemáticas”} \quad \Rightarrow \quad |M| = 18 \\ F &= \text{“estudia Física”} \quad \Rightarrow \quad |F| = 12 \\ M \cap F &= \text{“estudia ambas”} \quad \Rightarrow \quad |M \cap F| = 5 \\ |\Omega| &= 30 \end{aligned}$$

Por el principio de inclusión-exclusión:

$$|M \cup F| = 18 + 12 - 5 = 25$$

Por tanto, los que **no estudian ninguna** de las dos:

$$|\overline{M \cup F}| = 30 - 25 = 5$$

Calculamos las regiones del diagrama de Venn:

- Solo Matemáticas (M pero no F): $18 - 5 = 13$
- Solo Física (F pero no M): $12 - 5 = 7$
- Ambas ($M \cap F$): 5
- Ninguna: 5
- Total: $13 + 5 + 7 + 5 = 30$ ✓

Tabla de contingencia

	Física (F)	**No Física ($\overline{F}$)**	**Total**
Matemáticas (M)	5	13	18
No Matemáticas ($\overline{M}$)	7	5	12
Total	12	18	30

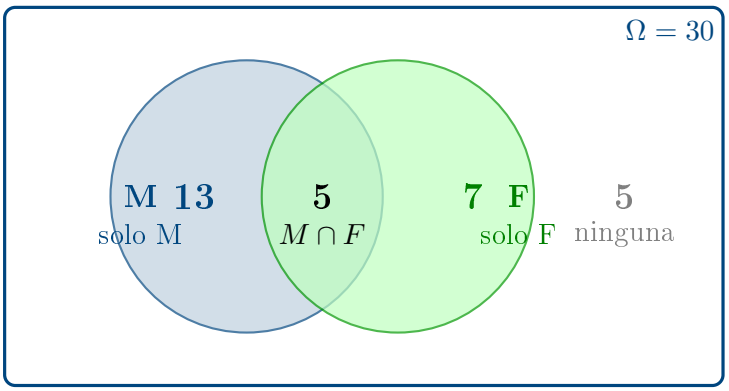


Figura 8.1: Diagrama de Venn para el ejercicio 8. Los números indican la cantidad de estudiantes en cada región.

Apartado a) P(estudie Matemáticas)

$$P(M) = \frac{|M|}{|\Omega|} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5} = \boxed{0{,}6}$$

El 60 % de los estudiantes estudia Matemáticas.

Apartado b) P(Física pero no Matemáticas)

Queremos $P(F \cap \overline{M})$, es decir, los que estudian Física pero *no* Matemáticas. De la tabla: $|F \cap \overline{M}| = 7$.

$$P(F \cap \overline{M}) = \frac{7}{30} \approx \boxed{0{,}2\overline{3}}$$

Justificación: Los 12 estudiantes de Física se dividen en 5 que también estudian Matemáticas y $12 - 5 = 7$ que *solo* estudian Física.

Apartado c) P(no estudia ninguna)

$$P(\overline{M} \cap \overline{F}) = P(\overline{M \cup F}) = \frac{30 - 25}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} \approx \boxed{0{,}1\overline{6}}$$

Verificación: $P(M \cup F) + P(\overline{M \cup F}) = \frac{25}{30} + \frac{5}{30} = \frac{30}{30} = 1$ ✓

Apartado d) P(Física | Matemáticas)

Se pide la probabilidad **condicionada**: sabiendo que el estudiante estudia Matemáticas, ¿cuál es la probabilidad de que también estudie Física?

Aplicamos la definición de probabilidad condicionada:

$$P(F \mid M) = \frac{P(F \cap M)}{P(M)} = \frac{|F \cap M|/|\Omega|}{|M|/|\Omega|} = \frac{|F \cap M|}{|M|} = \frac{5}{18} \approx \boxed{0{,}2\overline{7}}$$

Interpretación: De los 18 estudiantes que estudian Matemáticas, solo 5 también estudian Física. La probabilidad es $\frac{5}{18} \approx 27{,}8\,\%$.

¡Atención!

En la probabilidad condicionada $P(F \mid M)$, el espacio muestral se *reduce* de los 30 estudiantes totales a los 18 que estudian Matemáticas. Por eso el denominador es 18 (no 30).

	Física	**No Física**	**Total**
Mates	5	13 $P(M \cap F) = 5/30$	18
No Mates	7	5 $P(\overline{M} \cap F) = 7/30$	12
Total	12	18	**30**

Figura 8.2: Tabla de contingencia completa con colores por región y sus probabilidades.

Resultado

a) $P(M) = \dfrac{18}{30} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$

b) $P(F \cap \overline{M}) = \dfrac{7}{30} \approx 0{,}233$

c) $P(\overline{M} \cap \overline{F}) = \dfrac{5}{30} = \dfrac{1}{6} \approx 0{,}167$

d) $P(F \mid M) = \dfrac{5}{18} \approx 0{,}278$

Resumen general de resultados

Ejercicio	Pregunta	Resultado
1	Coordenadas de P y Q	$P=(4,3)$; $Q=(-3,-4)$; $R=(3,-4)$; $S=(-1,0)$
2	Tipo de función y pendiente de $y=3x-2$	Función afín; pendiente $m=3$
3	Ecuación de recta por $A(2,4)$ y $B(-1,1)$	$y=x+2$
4a	Distancia y tiempo de María	5 km; 25 minutos
4b	Parada para bocadillo	5 min; a 2 km de casa
4c	Velocidad primeros 10 min	12 km/h
5	Ecuación coste transporte	$y=2x+5$
6	Estadística libros leídos	$\bar{x}=3{,}35$; $M_o=2$; $M_e=3{,}5$; $\sigma\approx 1{,}49$
7A	P(número primo)	$6/15=2/5=0{,}4$
7B	P(múltiplo de 4)	$3/15=1/5=0{,}2$
7C	P(número <6)	$5/15=1/3\approx 0{,}33$
7D	P(número ≥ 10)	$6/15=2/5=0{,}4$
8a	P(Matemáticas)	$18/30=3/5=0{,}6$
8b	P(Física, no Mates)	$7/30\approx 0{,}233$
8c	P(ninguna asignatura)	$5/30=1/6\approx 0{,}167$
8d	P(Física | Matemáticas)	$5/18\approx 0{,}278$

— Fin del documento de soluciones —

Examen de Matemáticas 2.ºB ESO · Funciones, Estadística y Probabilidad · 13/06/2025

EXÁMENES DE LADIS

3º ESO

CURSO 2024-2025

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n b^n \cos(n\pi x) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

«Un matemático que no sea también algo poeta nunca será un matemático completo.»

— **Karl Weierstrass (1815-1897)**

$\pi \quad e \quad \phi \quad \infty \quad \aleph \quad \int \quad \sum \quad \prod \quad \nabla$

Junta de Castilla y León
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA

MATEMÁTICAS

EXAMEN 3º ESO B 30/10/2024

ies Tovar Antonio Centro bilingüe

Nº1.- Calcúlese, paso a paso, las siguientes operaciones combinadas:

$$\boldsymbol{a)}\ \left(\frac{1}{3}-\frac{5}{6}\right):\left[\left(\frac{2}{3}-1\right)\cdot\frac{1}{4}-\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{8}\right)\right]-\frac{12}{25} \qquad \boldsymbol{b)}\ \sqrt{31+\sqrt{22+\sqrt{2+\sqrt{49}}}}$$

$$\boldsymbol{c)}\ \left(\mathbf{0},5+\mathbf{0},\hat{5}\cdot\mathbf{0},5\hat{9}\right)\cdot\mathbf{0},\widehat{54} \qquad \boldsymbol{d)}\ \frac{\mathbf{3^3\cdot 9^{-3}\cdot 16^{-2}\cdot 8^3}}{\mathbf{4^2\cdot 6^{-2}}}$$

(2 puntos)

Nº2.- Para llegar a nuestro destino de vacaciones, hemos recorrido por la mañana 2/3 del camino; por la tarde, 2/3 de lo que faltaba, y aún nos quedan 30 km para llegar. ¿Cuál es la distancia total a la que está dicho destino?

(2 puntos)

Nº3.- De un depósito de agua sacamos la mitad de su contenido, del resto sacamos otra mitad y, finalmente, retiramos los 3/5 de lo que queda.

a) ¿Qué fracción del depósito se ha vaciado? Obtén la solución a través de una expresión con operaciones combinadas.

b) Si al final quedan 40 litros de agua en el depósito, ¿qué cantidad de agua tenía inicialmente?

(2 puntos)

Nº4.- Indica a qué conjunto más pequeño pertenecen los siguientes números reales:

$$\frac{13}{4},\quad -\frac{15}{3},\quad \frac{2}{45},\quad \frac{2}{26},\qquad 0,\hat{9}\ ,\qquad 2,0\hat{5}\ ,\quad 5,989989998\ldots.$$

¿De qué tipo son los números que son racionales? ¿Cuál es su fracción generatriz?

(1 puntos)

Nº5.- La masa de la Luna es $7{,}35\cdot 10^{22}$ kg, la de Marte, $6{,}42\cdot 10^{23}$ kg y la de la Tierra, $5{,}98\cdot 10^{24}$ kg.

a) Calcula las veces que la masa de la Luna es mayor que la masa de Marte.

b) Halla la diferencia entre las masas de la Tierra y de Marte.

(2 puntos)

Nº6.- Simplifica la siguiente expresión con radicales:

$$\sqrt{\mathbf{18}}-\sqrt{\mathbf{200}}+\sqrt{\mathbf{450}}-\sqrt{\mathbf{128}}$$

(1 punto)

(Criterios de Evaluación: 1.1, 1.2, 1.3, 2.2, 3.1, 3.2, 3.3, 4.1, 5.1, 5.2, 6.1, 6.2, 6.3, 7.2, 8.1, 8.2, 9.1, 9.2, 10.1, 10.2)

SUERTE JÓVENES

Matemáticas

Soluciones completamente desarrolladas

Examen 3º ESO B

30/10/2024

Documento en LaTeX con rigor matemático, justificación paso a paso y material pedagógico.

---

18 de febrero de 2026

Índice

1. Examen 3º ESO B (30/10/2024) **2**

Examen 3º ESO B (30/10/2024) **2**

Ejercicio 1 3
Ejercicio 2 9
Ejercicio 3 11
Ejercicio 4 14
Ejercicio 5 17
Ejercicio 6 19

1. Examen 3º ESO B (30/10/2024)

Definición 1.1 (Números racionales)**.** Un número real x se llama *racional* si existe un par de enteros $p, q \in \mathbb{Z}$ con $q \neq 0$ tal que

$$x = \frac{p}{q}.$$

El conjunto de los racionales se denota por $\mathbb{Q}$.

Definición 1.2 (Decimal periódico y fracción generatriz)**.** Un número decimal es *periódico* si, a partir de cierta cifra decimal, aparece un bloque finito de cifras que se repite indefinidamente. A toda expresión decimal periódica le corresponde un único racional (y recíprocamente), y la fracción $\frac{p}{q}$ equivalente se llama *fracción generatriz*.

Observación 1.1 (Convención sobre $0,\overline{9}$)**.** Se sabe que $0,\overline{9} = 0{,}999\ldots = 1$. Esta igualdad se puede justificar, por ejemplo, observando que

$$\frac{1}{3} = 0,\overline{3} \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot 0,\overline{3} \quad \Rightarrow \quad 1 = 0,\overline{9}.$$

Ejercicio 1

Enunciado. Calcúlese, paso a paso, las siguientes operaciones combinadas:

a) $\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{6}\right) : \left[\left(\frac{2}{3}-1\right)\cdot\frac{1}{4}-\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{8}\right)\right]-\frac{12}{25}$.

b) $\sqrt{31}+\sqrt{22}+\sqrt{2}+\sqrt{49}$.

c) $\left(0{,}5+0{,}\overline{5}\cdot 0{,}\overline{59}\right)\cdot 0{,}\overline{54}$.

d) $\dfrac{3^3\cdot 9^{-3}\cdot 16^{-2}\cdot 8^3}{4^2\cdot 6^{-2}}$.

Solución.

Esquema del ejercicio 1: operaciones combinadas
a) Fracciones y jerarquía de operaciones —orden y reglas→
b) Radicales y simplificación
c) Decimales periódicos → fracciones generatrices
d) Potencias y propiedades de exponentes

Apartado a)

Método elegido y justificación. Se usará el método estándar para *operaciones combinadas con fracciones*:

- Simplificar primero paréntesis y corchetes.
- Usar denominadores comunes para sumas/restas.
- Recordar que ":" denota división.

Este método es el más seguro porque respeta la jerarquía de operaciones y evita errores de signo.

Paso 1: calcular el paréntesis del numerador.

$$\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{6}\right)=\left(\frac{2}{6}-\frac{5}{6}\right)=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}.$$

Paso 2: calcular el corchete del denominador. Consideramos

$$\left[\left(\frac{2}{3}-1\right)\cdot\frac{1}{4}-\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{8}\right)\right].$$

2.1: primer paréntesis.

$$\left(\frac{2}{3}-1\right)=\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{3}\right)=-\frac{1}{3}.$$

2.2: multiplicación por $\frac{1}{4}$.

$$\left(\frac{2}{3}-1\right)\cdot\frac{1}{4}=\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{4}=-\frac{1}{12}.$$

2.3: segundo paréntesis (suma de fracciones).

$$\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{8}\right)=\left(\frac{20}{24}+\frac{3}{24}\right)=\frac{23}{24}.$$

2.4: resta final del corchete.

$$-\frac{1}{12}-\frac{23}{24}=-\frac{2}{24}-\frac{23}{24}=-\frac{25}{24}.$$

Por tanto,

$$\left[\left(\frac{2}{3}-1\right)\cdot\frac{1}{4}-\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{8}\right)\right]=-\frac{25}{24}.$$

Paso 3: división ":" entre fracciones. Recordemos la regla: para $a, b \in \mathbb{Q}$ con $b \neq 0$,

$$a : b = \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}.$$

Aplicando esto:

$$\left(-\frac{1}{2}\right):\left(-\frac{25}{24}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{24}{25}\right)=\frac{12}{25}.$$

Paso 4: restar $\frac{12}{25}$.

$$\frac{12}{25}-\frac{12}{25}=0.$$

Conclusión.

$$\boxed{\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{6}\right)\ :\ \left[\left(\frac{2}{3}-1\right)\cdot\frac{1}{4}-\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{8}\right)\right]-\frac{12}{25}=0.}$$

Observación 1.2 (Error común)**.** Un error frecuente es olvidar que la división por una fracción equivale a multiplicar por su inversa, o perder el signo al manejar fracciones negativas.

Apartado b)

Método elegido y justificación. Se aplica *simplificación directa de radicales* usando que $\sqrt{49}=7$ y verificando si existen factores cuadrados perfectos dentro de cada radical. Es el método natural, pues no hay productos o cocientes que permitan racionalizaciones relevantes.

Paso 1: simplificar $\sqrt{49}$.

$$\sqrt{49}=7.$$

Paso 2: comprobar si $\sqrt{31}$, $\sqrt{22}$, $\sqrt{2}$ simplifican.

- 31 es primo, no tiene factores cuadrados perfectos > 1. Por tanto $\sqrt{31}$ ya está en forma simplificada.
- $22 = 2 \cdot 11$ no contiene un cuadrado perfecto > 1. Por tanto $\sqrt{22}$ ya está simplificada.
- $\sqrt{2}$ ya está simplificada.

Resultado final.

$$\boxed{\sqrt{31} + \sqrt{22} + \sqrt{2} + \sqrt{49} = \sqrt{31} + \sqrt{22} + \sqrt{2} + 7.}$$

Observación 1.3 (Comentario pedagógico)**.** En una suma de radicales $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ solo se pueden "sumar" si son *semejantes*, es decir, si tras simplificar quedan como $k\sqrt{m}$ con el mismo m. Aquí no ocurre.

Apartado c)

Método elegido y justificación. Se transforman los decimales en fracciones:

- Un decimal exacto se expresa como fracción con potencia de 10.
- Un decimal periódico puro $0,\overline{d}$ se expresa como $\frac{d}{9}$ (si d es una cifra) o $\frac{\text{bloque}}{99\ldots9}$ (tantos nueves como cifras tenga el bloque).

Este método es el más riguroso y evita errores de redondeo.

Paso 1: escribir cada número en forma de fracción.

1.1: $0{,}5$**.**

$$0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

1.2: $0{,}\overline{5}$**.** Sea $x = 0{,}\overline{5} = 0{,}555\ldots$. Entonces:

$$10x = 5{,}555\ldots$$

Restando x a $10x$:

$$10x - x = 5{,}555\ldots - 0{,}555\ldots \quad \Rightarrow \quad 9x = 5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{9}.$$

Por tanto,

$$0{,}\overline{5} = \frac{5}{9}.$$

1.3: $0{,}\overline{59}$**.** Sea $y = 0{,}\overline{59} = 0{,}595959\ldots$. Entonces:

$$100y = 59{,}595959\ldots$$

Restando y:

$$100y - y = 59{,}595959\ldots - 0{,}595959\ldots \Rightarrow 99y = 59 \Rightarrow y = \frac{59}{99}.$$

Así,

$$0{,}\overline{59} = \frac{59}{99}.$$

1.4: $0{,}\overline{54}$. Sea $z = 0{,}\overline{54} = 0{,}545454\ldots$. Entonces:

$$100z = 54{,}545454\ldots, \qquad 100z - z = 54 \Rightarrow 99z = 54 \Rightarrow z = \frac{54}{99}.$$

Simplificamos la fracción:

$$\frac{54}{99} = \frac{54 \div 9}{99 \div 9} = \frac{6}{11}.$$

Por tanto,

$$0{,}\overline{54} = \frac{6}{11}.$$

Paso 2: sustituir en la expresión y operar con fracciones. La expresión original es

$$\left(0{,}5 + 0{,}\overline{5} \cdot 0{,}\overline{59}\right) \cdot 0{,}\overline{54}.$$

Sustituyendo:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{9} \cdot \frac{59}{99}\right) \cdot \frac{6}{11}.$$

2.1: producto $\frac{5}{9} \cdot \frac{59}{99}$.

$$\frac{5}{9} \cdot \frac{59}{99} = \frac{5 \cdot 59}{9 \cdot 99} = \frac{295}{891}.$$

Observamos que 295 y 891 no tienen un divisor común distinto de 1 (pues $295 = 5 \cdot 59$ y $891 = 9 \cdot 99 = 3^4 \cdot 11$, no comparte factores), así que la fracción está simplificada.

2.2: suma $\frac{1}{2} + \frac{295}{891}$. Buscamos denominador común. El mínimo común múltiplo de 2 y 891 es 1782 (ya que 891 es impar). Entonces:

$$\frac{1}{2} = \frac{891}{1782}, \qquad \frac{295}{891} = \frac{590}{1782}.$$

Sumando:

$$\frac{1}{2} + \frac{295}{891} = \frac{891}{1782} + \frac{590}{1782} = \frac{1481}{1782}.$$

2.3: multiplicación final por $\frac{6}{11}$.

$$\left(\frac{1481}{1782}\right) \cdot \frac{6}{11} = \frac{1481 \cdot 6}{1782 \cdot 11}.$$

Ahora factorizamos 1782 para simplificar:

$$1782 = 11 \cdot 162.$$

Entonces

$$\frac{1481 \cdot 6}{1782 \cdot 11} = \frac{1481 \cdot 6}{(11 \cdot 162) \cdot 11} = \frac{1481 \cdot 6}{162 \cdot 121}.$$

Simplificamos el factor 6 con 162:

$$\frac{6}{162} = \frac{1}{27}.$$

Por tanto,

$$\frac{1481 \cdot 6}{162 \cdot 121} = \frac{1481}{27 \cdot 121} = \frac{1481}{3267}.$$

Conclusión.

$$\boxed{\left(0{,}5 + 0{,}\overline{5} \cdot 0{,}\overline{59}\right) \cdot 0{,}\overline{54} = \frac{1481}{3267}.}$$

Observación 1.4 (Comprobación de coherencia)**.** Como $0{,}\overline{54} \approx 0{,}54\ldots$ y el paréntesis $\approx 0{,}5 + 0{,}55 \cdot 0{,}59 \approx 0{,}8245$, el producto debería ser $\approx 0{,}44$, y efectivamente $\frac{1481}{3267} \approx 0{,}453$, valor coherente.

Apartado d)

Método elegido y justificación. Se usa la reescritura en potencias de primos y las propiedades de exponentes:

$$(a^m)^n = a^{mn}, \qquad a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Este método es el adecuado porque la expresión está construida con potencias y exponentes negativos.

Paso 1: reescribir todas las bases como potencias de primos.

$$9 = 3^2, \qquad 16 = 2^4, \qquad 8 = 2^3, \qquad 4 = 2^2, \qquad 6 = 2 \cdot 3.$$

Paso 2: sustituir en la expresión. La expresión es

$$\frac{3^3 \cdot 9^{-3} \cdot 16^{-2} \cdot 8^3}{4^2 \cdot 6^{-2}}.$$

Sustituyendo:

$$\frac{3^3 \cdot (3^2)^{-3} \cdot (2^4)^{-2} \cdot (2^3)^3}{(2^2)^2 \cdot (2 \cdot 3)^{-2}}.$$

Paso 3: simplificar cada potencia compuesta.

$$(3^2)^{-3} = 3^{2\cdot(-3)} = 3^{-6}, \quad (2^4)^{-2} = 2^{4\cdot(-2)} = 2^{-8}, \quad (2^3)^3 = 2^{3\cdot 3} = 2^9, \quad (2^2)^2 = 2^4.$$

Además,

$$(2 \cdot 3)^{-2} = 2^{-2} \cdot 3^{-2}$$

(dado que $(ab)^n = a^n b^n$ para $a, b > 0$, y se extiende al exponente negativo mediante inversos).

Paso 4: simplificar numerador y denominador por separado.

4.1: numerador.

$$3^3 \cdot 3^{-6} = 3^{3-6} = 3^{-3}.$$

$$2^{-8} \cdot 2^9 = 2^{(-8)+9} = 2^1 = 2.$$

Por tanto, el numerador queda:

$$3^{-3} \cdot 2 = 2 \cdot 3^{-3} = \frac{2}{3^3} = \frac{2}{27}.$$

4.2: denominador.

$$2^4 \cdot (2^{-2} \cdot 3^{-2}) = 2^{4-2} \cdot 3^{-2} = 2^2 \cdot 3^{-2} = 4 \cdot 3^{-2}.$$

Y como $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$, resulta:

$$4 \cdot 3^{-2} = 4 \cdot \frac{1}{9} = \frac{4}{9}.$$

Paso 5: dividir numerador entre denominador.

$$\frac{\frac{2}{27}}{\frac{4}{9}} = \frac{2}{27} \cdot \frac{9}{4} = \frac{18}{108} = \frac{1}{6}.$$

Conclusión.

$$\boxed{\frac{3^3 \cdot 9^{-3} \cdot 16^{-2} \cdot 8^3}{4^2 \cdot 6^{-2}} = \frac{1}{6}.}$$

Observación 1.5 (Error común)**.** Un error típico es interpretar 6^{-2} como -6^2. En realidad,

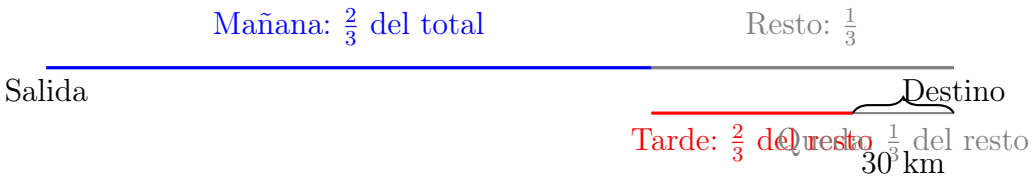
$$6^{-2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36},$$

y el signo no cambia, porque el exponente negativo indica inverso, no negación.

Ejercicio 2

Enunciado. Para llegar a nuestro destino de vacaciones, hemos recorrido por la mañana $\frac{2}{3}$ del camino; por la tarde, $\frac{2}{3}$ de lo que faltaba, y aún nos quedan 30 km para llegar. ¿Cuál es la distancia total a la que está dicho destino?

Solución.



Método elegido y justificación. Se planteará una ecuación lineal con una incógnita D (distancia total). Este enfoque es el más directo y riguroso: transforma el enunciado en relaciones proporcionales exactas.

Paso 1: definir la incógnita. Sea D la distancia total (en km) desde la salida hasta el destino.

Paso 2: interpretar "por la mañana $2/3$ del camino". Se recorre:

$$\frac{2}{3}D.$$

Entonces queda por recorrer:

$$D - \frac{2}{3}D = \left(1 - \frac{2}{3}\right) D = \frac{1}{3}D.$$

Paso 3: interpretar "por la tarde, $2/3$ de lo que faltaba". Lo que faltaba tras la mañana es $\frac{1}{3}D$. Por la tarde se recorre:

$$\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}D\right) = \frac{2}{9}D.$$

Paso 4: calcular lo que queda tras la tarde. Tras la tarde queda:

$$\left(\frac{1}{3}D\right) - \left(\frac{2}{9}D\right) = \left(\frac{3}{9} - \frac{2}{9}\right) D = \frac{1}{9}D.$$

Paso 5: usar el dato "aún nos quedan 30 km". El enunciado afirma:

$$\frac{1}{9}D = 30.$$

Multiplicamos ambos miembros por 9 (operación válida por ser un número real no nulo):

$$D = 30 \cdot 9 = 270.$$

Conclusión.

$$\boxed{D = 270 \text{ km.}}$$

Observación 1.6 (Comprobación)**.** Si $D = 270$, por la mañana se recorren $2/3 \cdot 270 = 180$ km; quedan 90 km. Por la tarde se recorre $2/3 \cdot 90 = 60$ km; quedan 30 km. Coincide con el enunciado.

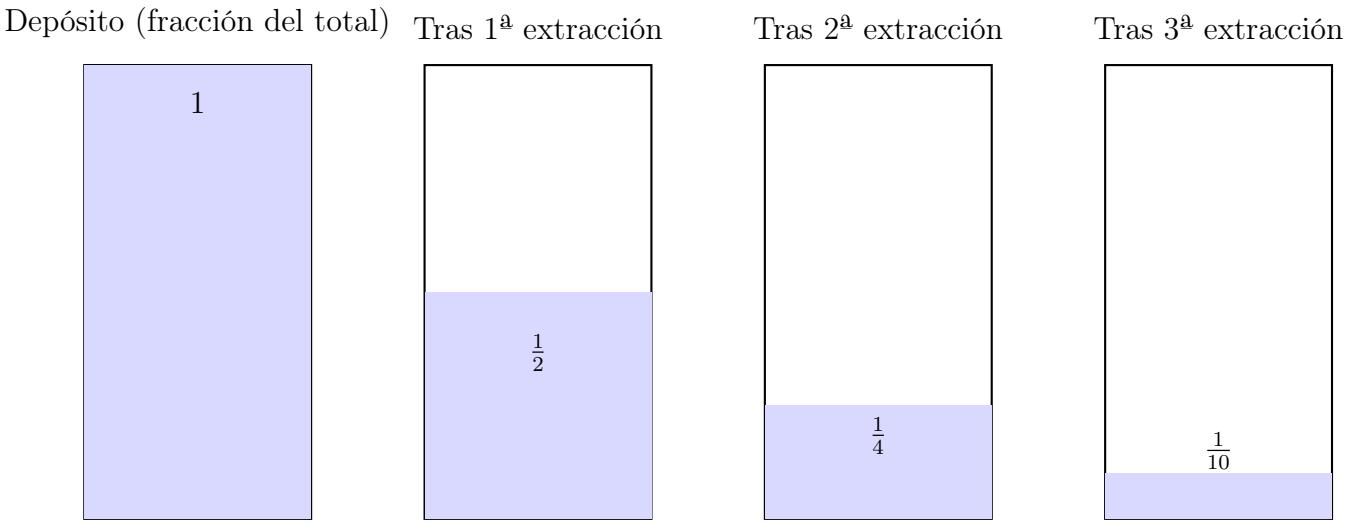
Ejercicio 3

Enunciado. De un depósito de agua sacamos la mitad de su contenido, del resto sacamos otra mitad y, finalmente, retiramos los $\frac{3}{5}$ de lo que queda.

a) ¿Qué fracción del depósito se ha vaciado? Obtén la solución a través de una expresión con operaciones combinadas.

b) Si al final quedan 40 litros de agua en el depósito, ¿qué cantidad de agua tenía inicialmente?

Solución.



Apartado a)

Método elegido y justificación. Se modela el contenido del depósito como la unidad 1 (la fracción del total). El enunciado describe retiradas sucesivas de fracciones del contenido restante. Esto se resuelve de forma rigurosa mediante operaciones con fracciones, sin necesidad de números concretos.

Paso 1: contenido inicial. Sea el contenido inicial 1 (es decir, el depósito completo).

Paso 2: primera extracción (mitad del contenido). Se saca $\frac{1}{2}$ del total, por lo que queda:

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Paso 3: segunda extracción (mitad de lo que queda). De lo que queda $\frac{1}{2}$, se saca la mitad:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Luego queda:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

(Equivalente: "quedar la mitad del resto" significa multiplicar por $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.)

Paso 4: tercera extracción (retirar $\frac{3}{5}$ de lo que queda). Si queda $\frac{1}{4}$, retirar $\frac{3}{5}$ de esa cantidad equivale a retirar:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{20}.$$

Entonces lo que queda tras esta retirada es:

$$\frac{1}{4} - \frac{3}{20} = \frac{5}{20} - \frac{3}{20} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}.$$

Una forma conceptualmente limpia de verlo es: tras retirar $\frac{3}{5}$, queda $\frac{2}{5}$ de lo que había, es decir,

$$\left(1 - \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}.$$

Paso 5: fracción vaciada. Si al final queda $\frac{1}{10}$ del depósito, la fracción que se ha vaciado es:

$$1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}.$$

Expresión pedida (operaciones combinadas). Una expresión que representa "lo que queda" es:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{5}\right),$$

y, por tanto, "lo vaciado":

$$1 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{3}{5}\right).$$

Evaluamos paso a paso:

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{5}\right) = 1 - \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5}\right) = 1 - \frac{2}{20} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}.$$

Conclusión.

$$\boxed{\text{Se ha vaciado } \frac{9}{10} \text{ del depósito.}}$$

Apartado b)

Método elegido y justificación. Se usa proporcionalidad directa: si $\frac{1}{10}$ del depósito equivale a 40 litros, entonces el total es 40 multiplicado por 10. Este método es exacto y se fundamenta en la definición de fracción como "parte de un todo".

Paso 1: traducir "al final queda $\frac{1}{10}$" a litros. Hemos obtenido que la fracción que queda es $\frac{1}{10}$. El enunciado dice que esa cantidad es 40 L:

$$\frac{1}{10} \cdot (\text{contenido inicial}) = 40.$$

Paso 2: despejar el contenido inicial. Multiplicamos ambos miembros por 10:

$$\text{contenido inicial} = 40 \cdot 10 = 400.$$

Conclusión.

El depósito tenía inicialmente 400 litros.

Observación 1.7 (Advertencia)**.** No debe confundirse "retirar $\frac{3}{5}$ de lo que queda" con "retirar $\frac{3}{5}$ del depósito original". La fracción se aplica al *resto*, no al total inicial.

Ejercicio 4

Enunciado. Indica a qué conjunto más pequeño pertenecen los siguientes números reales:

$$\frac{13}{4}, \quad -\frac{15}{3}, \quad \frac{2}{45}, \quad \frac{2}{26}, \quad 0,\overline{9}, \quad 2,0\overline{5}, \quad 5,989989998\ldots$$

¿De qué tipo son los números que son racionales? ¿Cuál es su fracción generatriz?

Solución.

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Irracionales: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Método elegido y justificación. Clasificaremos cada número identificando si es:

- Natural ($\mathbb{N}$), entero ($\mathbb{Z}$), racional ($\mathbb{Q}$) o irracional ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).
- Además, para los decimales periódicos, calcularemos su fracción generatriz con un procedimiento algebraico estándar (multiplicar por potencias de 10 y restar).

Este método es el apropiado porque se basa en definiciones formales y procedimientos generales.

Paso 1: simplificar (cuando proceda) y clasificar

1) $\frac{13}{4}$.

$$\frac{13}{4} \in \mathbb{Q}$$

y no es entero porque 13 no es múltiplo de 4. Por tanto, el conjunto más pequeño al que pertenece es:

$$\boxed{\frac{13}{4} \in \mathbb{Q}.}$$

2) $-\frac{15}{3}$. Simplificamos:

$$-\frac{15}{3} = -(15 \div 3) = -5.$$

Como -5 es un entero, el conjunto más pequeño es:

$$\boxed{-\frac{15}{3} = -5 \in \mathbb{Z}.}$$

3) $\frac{2}{45}$. Ya está en forma irreducible (pues $\gcd(2, 45) = 1$). Es racional no entero:

$$\boxed{\frac{2}{45} \in \mathbb{Q}.}$$

4) $\dfrac{2}{26}$. Simplificamos dividiendo por 2:

$$\frac{2}{26} = \frac{1}{13}.$$

Es racional no entero:

$$\boxed{\frac{2}{26} = \frac{1}{13} \in \mathbb{Q}.}$$

5) $0,\overline{9}$. Por la observación previa,

$$0,\overline{9} = 1.$$

Como 1 es natural (convención usual $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ o $\{1, 2, 3, \dots\}$; en ambos casos $1 \in \mathbb{N}$), entonces:

$$\boxed{0,\overline{9} = 1 \in \mathbb{N}.}$$

6) $2,0\overline{5}$. Interpretamos $2,0\overline{5} = 2{,}05555\dots$, es decir, decimal periódico mixto o (equivalentemente) suma de un entero y un decimal periódico puro desplazado. Por tanto es racional:

$$\boxed{2,0\overline{5} \in \mathbb{Q}.}$$

Más abajo se hallará su fracción generatriz.

7) $5,989989998\dots$. Este decimal no muestra un bloque finito que se repita periódicamente (al contrario, la estructura de cifras cambia). Un resultado clásico es:

> *Un número real es racional si y solo si su desarrollo decimal es exacto o periódico (puro o mixto).*

Al no ser exacto ni periódico, se clasifica como irracional:

$$\boxed{5,989989998\dots \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.}$$

Paso 2: "¿De qué tipo son los números que son racionales?"

Los racionales pueden aparecer, entre otras formas equivalentes:

- Como fracción de enteros $\frac{p}{q}$ con $q \neq 0$.
- Como decimal exacto (termina).
- Como decimal periódico (puro o mixto).

En el listado del ejercicio, los racionales son:

$$\frac{13}{4},\ -\frac{15}{3},\ \frac{2}{45},\ \frac{2}{26},\ 0,\overline{9},\ 2,0\overline{5}.$$

Para todos ellos, una "fracción generatriz" es precisamente una fracción $\frac{p}{q}$ equivalente.

Paso 3: fracciones generatrices (en particular, de los periódicos)

3.1: fracción generatriz de $0,\overline{9}$. Ya sabemos que $0,\overline{9} = 1$. Por tanto una fracción generatriz es:

$$\boxed{0,\overline{9} = 1 = \frac{1}{1}.}$$

3.2: fracción generatriz de $2,0\overline{5}$. Sea

$$x = 2,0\overline{5} = 2{,}05555\ldots$$

Restamos la parte entera:

$$x - 2 = 0{,}05555\ldots$$

Llamemos $y = x - 2$, de modo que:

$$y = 0{,}05555\ldots$$

Multiplicamos por 10 para "colocar" el periodo inmediatamente tras la coma:

$$10y = 0{,}5555\ldots$$

Pero $0{,}5555\ldots = 0,\overline{5} = \frac{5}{9}$. Así:

$$10y = \frac{5}{9} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}.$$

Como $x = 2 + y$, obtenemos:

$$x = 2 + \frac{1}{18} = \frac{36}{18} + \frac{1}{18} = \frac{37}{18}.$$

Por tanto,

$$\boxed{2,0\overline{5} = \frac{37}{18}.}$$

Observación 1.8 (Error común)**.** En decimales periódicos mixtos, un error habitual es intentar usar directamente $99\ldots9$ sin alinear correctamente el periodo. El método de separar parte entera y desplazar con potencias de 10 evita confusiones.

Ejercicio 5

Enunciado. La masa de la Luna es $7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg, la de Marte $6{,}42 \cdot 10^{23}$ kg y la de la Tierra $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg.

a) Calcula las veces que la masa de la Luna es mayor que la masa de Marte.

b) Halla la diferencia entre las masas de la Tierra y de Marte.

Solución.

Idea clave: notación científica $a \cdot 10^n$ con $1 \leq a < 10$

Comparar: cocientes y restas con potencias de 10 $\longrightarrow$ $\dfrac{7{,}35 \cdot 10^{22}}{6{,}42 \cdot 10^{23}}$ y $5{,}98 \cdot 10^{24} - 6{,}42 \cdot 10^{23}$

Método elegido y justificación. Se trabajará con notación científica y las propiedades de potencias de base 10. Este método es el estándar para magnitudes físicas grandes: permite controlar órdenes de magnitud sin pérdida de exactitud.

Apartado a)

Interpretación correcta. La frase "las veces que la masa de la Luna es mayor que la masa de Marte" se traduce matemáticamente como el cociente:

$$\frac{M_{\text{Luna}}}{M_{\text{Marte}}}.$$

Si este número es mayor que 1, entonces la Luna es más masiva; si es menor que 1, entonces la Luna es menos masiva.

Paso 1: escribir el cociente.

$$\frac{M_{\text{Luna}}}{M_{\text{Marte}}} = \frac{7{,}35 \cdot 10^{22}}{6{,}42 \cdot 10^{23}}.$$

Paso 2: separar coeficientes y potencias de 10. Usamos que $\frac{a \cdot 10^m}{b \cdot 10^n} = \frac{a}{b} \cdot 10^{m-n}$ (con $b \neq 0$):

$$\frac{7{,}35 \cdot 10^{22}}{6{,}42 \cdot 10^{23}} = \frac{7{,}35}{6{,}42} \cdot 10^{22-23} = \frac{7{,}35}{6{,}42} \cdot 10^{-1}.$$

Paso 3: calcular $\frac{7{,}35}{6{,}42}$. Podemos aproximar con suficiente precisión (sin que sea un "salto mágico"):

$$\frac{7{,}35}{6{,}42} \approx 1{,}144 \quad (\text{pues } 6{,}42 \cdot 1{,}144 \approx 7{,}35).$$

Paso 4: multiplicar por 10^{-1}.

$$1{,}144 \cdot 10^{-1} = 1{,}144 \cdot 0{,}1 = 0{,}1144.$$

Conclusión cuantitativa.

$$\boxed{\frac{M_{\text{Luna}}}{M_{\text{Marte}}} \approx 0{,}1144.}$$

Esto significa que la masa de la Luna es aproximadamente 0,1144 veces la de Marte, es decir, *no es mayor*, sino menor.

Conclusión interpretativa adicional (muy útil). Si se desea expresar "cuántas veces Marte es más masivo que la Luna", se invierte el cociente:

$$\frac{M_{\text{Marte}}}{M_{\text{Luna}}} \approx \frac{1}{0{,}1144} \approx 8{,}74.$$

Es decir, Marte tiene aproximadamente 8,74 veces la masa de la Luna.

Apartado b)

Paso 1: plantear la diferencia.

$$M_{\text{Tierra}} - M_{\text{Marte}} = 5{,}98 \cdot 10^{24} - 6{,}42 \cdot 10^{23}.$$

Paso 2: expresar ambos términos con la misma potencia de 10. Observamos que

$$6{,}42 \cdot 10^{23} = 0{,}642 \cdot 10^{24},$$

porque $10^{23} = 10^{-1} \cdot 10^{24}$, y por tanto $6{,}42 \cdot 10^{23} = (6{,}42 \cdot 10^{-1}) \cdot 10^{24} = 0{,}642 \cdot 10^{24}$.

Entonces:

$$5{,}98 \cdot 10^{24} - 6{,}42 \cdot 10^{23} = 5{,}98 \cdot 10^{24} - 0{,}642 \cdot 10^{24}.$$

Paso 3: factor común 10^{24} y resta de coeficientes.

$$(5{,}98 - 0{,}642) \cdot 10^{24} = 5{,}338 \cdot 10^{24}.$$

Conclusión.

$$\boxed{M_{\text{Tierra}} - M_{\text{Marte}} = 5{,}338 \cdot 10^{24} \text{ kg}.}$$

Observación 1.9 (Error común)**.** Un fallo típico es restar directamente $5{,}98 - 6{,}42$ olvidando que las potencias de 10 son distintas. Siempre hay que igualar exponentes antes de sumar o restar en notación científica.

Ejercicio 6

Enunciado. Simplifica la siguiente expresión con radicales:

$$\sqrt{18} - \sqrt{200} + \sqrt{450} - \sqrt{128}.$$

Solución.

> **Idea clave:** extraer cuadrados perfectos del radicando
> $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ si $a, b \geq 0$
> Ejemplo: $\sqrt{200} = \sqrt{100 \cdot 2} = 10\sqrt{2}$
> Luego, combinar radicales semejantes $k\sqrt{2}$

Método elegido y justificación. Se descompone cada radicando como producto de un cuadrado perfecto por un factor libre de cuadrados, usando

$$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b} \quad (a \geq 0,\ b \geq 0).$$

Este método es el estándar porque conduce a radicales semejantes que pueden sumarse o restarse.

Paso 1: simplificar cada radical.

1.1: $\sqrt{18}$**.**

$$18 = 9 \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9}\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

1.2: $\sqrt{200}$**.**

$$200 = 100 \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{200} = \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{100}\sqrt{2} = 10\sqrt{2}.$$

1.3: $\sqrt{450}$**.**

$$450 = 225 \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{450} = \sqrt{225 \cdot 2} = \sqrt{225}\sqrt{2} = 15\sqrt{2}.$$

1.4: $\sqrt{128}$**.**

$$128 = 64 \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{128} = \sqrt{64 \cdot 2} = \sqrt{64}\sqrt{2} = 8\sqrt{2}.$$

Paso 2: sustituir y combinar radicales semejantes. La expresión se convierte en:

$$\sqrt{18} - \sqrt{200} + \sqrt{450} - \sqrt{128} = 3\sqrt{2} - 10\sqrt{2} + 15\sqrt{2} - 8\sqrt{2}.$$

Agrupamos coeficientes:

$$(3 - 10 + 15 - 8)\sqrt{2}.$$

Calculamos la suma de enteros, paso a paso:

$$3 - 10 = -7, \qquad -7 + 15 = 8, \qquad 8 - 8 = 0.$$

Luego:

$$(3 - 10 + 15 - 8)\sqrt{2} = 0 \cdot \sqrt{2} = 0.$$

Conclusión.

$$\boxed{\sqrt{18} - \sqrt{200} + \sqrt{450} - \sqrt{128} = 0.}$$

Observación 1.10 (Conclusión conceptual)**.** La simplificación muestra una cancelación total: todos los términos se convierten en múltiplos de $\sqrt{2}$ y sus coeficientes suman cero.

Junta de Castilla y León
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA

MATEMÁTICAS

EXAMEN 3º ESO B 04/11/2024

ies Antonio Tovar Centro bilingüe

Nº1.- Calcúlese, paso a paso, las siguientes operaciones combinadas:

$$a)\ \frac{\left(\frac{1}{2}:\frac{1}{3}+2\right)\cdot\frac{2}{5}-\frac{9}{5}}{\frac{1}{3}:\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}\right)+\frac{2}{3}}+\frac{3^2}{5\cdot 2^2} \qquad b)\ \sqrt{3+\sqrt{31+\sqrt{16+\sqrt{81}}}}$$

$$c)\ \left(1,3+0,\widehat{3}\cdot 0,1\widehat{3}\right)\cdot 0,\widehat{54} \qquad d)\ \frac{6^{-2}\cdot 4^2}{3^3\cdot 9^{-3}\cdot 16^{-2}\cdot 8^3}$$

(2 puntos)

Nº2.- Un hortelano planta $\frac{1}{4}$ de su huerta de tomates, $\frac{2}{5}$ de alubias y el resto, que son 280 m^2, de patatas. ¿Qué fracción ha plantado de patatas? ¿Cuál es la superficie total de la huerta?

(2 puntos)

Nº3.- En una evaluación de Matemáticas ha aprobado 3/4 de la clase. El resto se presenta a la recuperación, aprobando 1/3 de ellos. Al final del proceso son en total 20 los aprobados ¿Cuál es la proporción de aprobados? ¿Cuántos estudiantes forman la clase?

(2 puntos)

Nº4.- Indica a qué conjunto más pequeño pertenecen los siguientes números reales:

$$\frac{1}{4},\ \frac{15}{5},\ \frac{2}{15},\ \frac{1}{13},\qquad 0,\hat{5}\ ,\qquad 1,6\hat{5}\ ,\qquad 0{,}101001000\ldots.$$

¿De qué tipo son los números que son racionales? ¿Cuál es su fracción generatriz?

(1 puntos)

Nº5.- La estrella más cercana a nuestro sistema solar es α-Centauri, que está a una distancia de tan sólo 4,3 años luz. Expresar, en km, esta distancia en notación científica. (Dato: velocidad de la luz: 300.000 km/s) ¿Cuánto tardaría en llegar una nave espacial viajando a 10 km/s?

(2 puntos)

Nº6.- Simplifica la siguiente expresión con radicales:

$$\sqrt{5}-2\sqrt{125}+\frac{3}{2}\sqrt{500}-\sqrt{405}\ +\frac{4}{3}\sqrt{5}+\frac{5}{6}\sqrt{20}$$

(1 punto)

(Criterios de Evaluación: 1.1, 1.2, 1.3, 2.2, 3.1, 3.2, 3.3, 4.1, 5.1, 5.2, 6.1, 6.2, 6.3, 7.2, 8.1, 8.2, 9.1, 9.2, 10.1, 10.2)

SUERTE JÓVENES

Matemáticas
Soluciones exhaustivas en LaTeX

Examen 3º ESO B (04/11/2024)

Enfoque: rigor matemático, pasos completos y explicación pedagógica

18 de febrero de 2026

Índice general

1. Examen de Matemáticas 3º ESO B (04/11/2024) **2**

Ejercicio 1. Operaciones combinadas, radicales, decimales periódicos y potencias 2

Ejercicio 2. Problema de fracciones de una huerta 9

Ejercicio 3. Proporciones de aprobados tras recuperación 11

Ejercicio 4. Clasificación en conjuntos numéricos y fracciones generatrices . 13

Ejercicio 5. Años luz, notación científica y tiempo de viaje 16

Ejercicio 6. Simplificación de una expresión con radicales 19

Capítulo 1

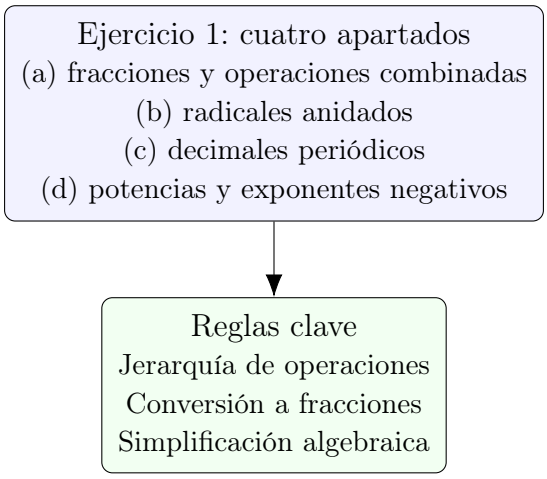
Examen de Matemáticas 3º ESO B (04/11/2024)

Ejercicio 1. Operaciones combinadas, radicales, decimales periódicos y potencias

Observación 1.1. En este ejercicio conviene recordar y aplicar con disciplina:

- La jerarquía de operaciones: paréntesis → potencias y raíces → productos/divisiones → sumas/restas.
- En notación de fracciones, la división ":" se interpreta como cociente.
- Para radicales anidados, se evalúa de dentro hacia fuera.
- Para decimales periódicos, se recomienda convertirlos a fracción antes de operar.
- Para potencias con exponentes negativos: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ (si $a \neq 0$).

Figura/diagrama de apoyo



Solución

Apartado (a)

Advertencia 1.1. El enunciado original emplea la notación ":" para la división. En lo que sigue, cada aparición se trata como un cociente exacto de fracciones.

Interpretamos la expresión del apartado (a) como:

$$\left(\frac{\left(\frac{1}{2} : \frac{1}{3} + 2\right) \cdot \frac{2}{5} - \frac{9}{5}}{\frac{1}{3} : \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2}\right) + \frac{2}{3}}\right) + \frac{3^2}{5 \cdot 2^2}. \tag{1.1}$$

Paso 1: simplificar el numerador del gran cociente. Comenzamos con:

$$\left(\frac{1}{2} : \frac{1}{3} + 2\right) \cdot \frac{2}{5} - \frac{9}{5}.$$

Primero el cociente $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$:

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{1} = \frac{3}{2}.$$

Luego sumamos 2:

$$\frac{3}{2} + 2 = \frac{3}{2} + \frac{4}{2} = \frac{7}{2}.$$

Multiplicamos por $\frac{2}{5}$:

$$\frac{7}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7 \cdot 2}{2 \cdot 5} = \frac{7}{5}.$$

Finalmente restamos $\frac{9}{5}$:

$$\frac{7}{5} - \frac{9}{5} = -\frac{2}{5}.$$

Por tanto, el numerador del gran cociente vale:

$$N = -\frac{2}{5}.$$

Paso 2: simplificar el denominador del gran cociente. Consideramos:

$$\frac{1}{3} : \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2}\right) + \frac{2}{3}.$$

Primero el producto $\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2}$:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{6}.$$

Sumamos con $\frac{2}{3}$:

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{4}{6} + \frac{5}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

Ahora el cociente $\frac{1}{3} : \frac{3}{2}$:

$$\frac{1}{3} : \frac{3}{2} = \frac{1}{3} \div \frac{3}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

Sumamos $\frac{2}{3}$:

$$\frac{2}{9} + \frac{2}{3} = \frac{2}{9} + \frac{6}{9} = \frac{8}{9}.$$

Así, el denominador del gran cociente es:

$$D = \frac{8}{9}.$$

Paso 3: calcular el gran cociente N/D.

$$\frac{N}{D} = \frac{-\frac{2}{5}}{\frac{8}{9}} = -\frac{2}{5} \cdot \frac{9}{8} = -\frac{18}{40} = -\frac{9}{20}.$$

Paso 4: calcular el término adicional $\dfrac{3^2}{5 \cdot 2^2}$. Evaluamos potencias:

$$3^2 = 9, \qquad 2^2 = 4.$$

Por tanto,

$$\frac{3^2}{5 \cdot 2^2} = \frac{9}{5 \cdot 4} = \frac{9}{20}.$$

Paso 5: sumar ambos resultados.

$$-\frac{9}{20} + \frac{9}{20} = 0.$$

Resultado del apartado (a): 0.

Observación 1.2. En este apartado aparece una cancelación exacta: el gran cociente produce $-\frac{9}{20}$ y el término final produce $+\frac{9}{20}$. Un error común es simplificar mal el denominador D o equivocarse al tratar la división de fracciones.

Apartado (b)

La expresión del apartado (b) contiene radicales anidados. La interpretamos como:

$$\sqrt{3 + \sqrt{31 + \sqrt{16 + \sqrt{81}}}}\,.$$

Método elegido. La manera natural (y más segura) es evaluar *de dentro hacia fuera*, porque las raíces están anidadas. Esto evita errores de jerarquía.

Paso 1: raíz más interna.

$$\sqrt{81} = 9.$$

Paso 2: sustituir en el siguiente nivel.

$$\sqrt{16 + \sqrt{81}} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$$

Paso 3: siguiente nivel.

$$\sqrt{31 + \sqrt{16 + \sqrt{81}}} = \sqrt{31 + 5} = \sqrt{36} = 6.$$

Paso 4: nivel exterior.

$$\sqrt{3 + \sqrt{31 + \sqrt{16 + \sqrt{81}}}} = \sqrt{3 + 6} = \sqrt{9} = 3.$$

Resultado del apartado (b): 3.

Advertencia 1.2. Error típico: intentar "sumar las raíces" como si $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b}$, lo cual en general es falso. Aquí no hay suma de raíces al mismo nivel, sino raíces *encajadas* (anidadas).

Apartado (c)

La expresión es:

$$\left(1{,}3 + 0{,}\widehat{3} \cdot 0{,}1\widehat{3}\right) \cdot 0{,}5\widehat{4}.$$

Método elegido. Convertiremos *todo* a fracciones, porque:

- El decimal finito 1,3 se convierte fácilmente.
- Los periódicos se convierten mediante fracción generatriz.
- El producto y la suma se vuelven exactos, evitando redondeos.

Paso 1: convertir 1,3 **a fracción.**

$$1{,}3 = \frac{13}{10}.$$

Paso 2: convertir $0{,}\widehat{3}$ **a fracción.** Sea $x = 0{,}\overline{3}$. Entonces $10x = 3{,}\overline{3}$. Restando:

$$10x - x = 3{,}\overline{3} - 0{,}\overline{3} = 3 \quad \Rightarrow \quad 9x = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}.$$

Así,

$$0{,}\widehat{3} = \frac{1}{3}.$$

Paso 3: convertir $0{,}1\widehat{3}$ a fracción. Aquí el período es solo el dígito 3 y hay una cifra no periódica (el 1) tras la coma:

$$0{,}1\overline{3} = 0{,}13333\ldots$$

Sea $y = 0{,}1\overline{3}$. Multiplicamos por 10 para desplazar una cifra (la no periódica):

$$10y = 1{,}\overline{3}.$$

Ahora el período tiene longitud 1, así que multiplicamos por 10 de nuevo:

$$100y = 13{,}\overline{3}.$$

Restamos:

$$100y - 10y = 13{,}\overline{3} - 1{,}\overline{3} = 12.$$

Por tanto,

$$90y = 12 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}.$$

Así,

$$0{,}1\widehat{3} = \frac{2}{15}.$$

Paso 4: convertir $0{,}5\widehat{4}$ a fracción.

$$0{,}5\overline{4} = 0{,}54444\ldots$$

Sea $z = 0{,}5\overline{4}$. Desplazamos una cifra no periódica:

$$10z = 5{,}\overline{4}.$$

Periodo de longitud 1:

$$100z = 54{,}\overline{4}.$$

Restamos:

$$100z - 10z = 54{,}\overline{4} - 5{,}\overline{4} = 49 \quad \Rightarrow \quad 90z = 49 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{49}{90}.$$

Luego,

$$0{,}5\widehat{4} = \frac{49}{90}.$$

Paso 5: sustituir y operar. La expresión se convierte en:

$$\left(\frac{13}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{15}\right) \cdot \frac{49}{90}.$$

Primero el producto:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{15} = \frac{2}{45}.$$

Sumamos con $\frac{13}{10}$, llevando a común denominador. El m.c.m. de 10 y 45 es 90:

$$\frac{13}{10} = \frac{117}{90}, \qquad \frac{2}{45} = \frac{4}{90}.$$

Así,

$$\frac{13}{10} + \frac{2}{45} = \frac{117}{90} + \frac{4}{90} = \frac{121}{90}.$$

Multiplicamos:

$$\left(\frac{121}{90}\right) \cdot \left(\frac{49}{90}\right) = \frac{121 \cdot 49}{90 \cdot 90}.$$

Calculamos el numerador:

$$121 \cdot 49 = 121(50 - 1) = 121 \cdot 50 - 121 = 6050 - 121 = 5929.$$

Y el denominador:

$$90 \cdot 90 = 8100.$$

Por tanto:

$$\boxed{\text{Resultado del apartado (c): } \frac{5929}{8100}.}$$

Observación 1.3. La fracción $\frac{5929}{8100}$ ya está irreducible: $5929 = 77^2$ (pues $77^2 = 5929$) y $8100 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2$. No comparten factores.

Apartado (d)

La expresión del apartado (d) es un cociente de potencias con exponentes negativos. La interpretamos como:

$$\frac{6^{-2} \cdot 4^2}{3^3 \cdot 9^{-3} \cdot 16^{-2} \cdot 8^3}.$$

Método elegido. El método más robusto consiste en:

1. Reescribir todo en potencias de primos (2 y 3).
2. Usar reglas de exponentes (sumas y restas de exponentes).
3. Eliminar exponentes negativos al final, dejando fracción en forma simplificada.

Paso 1: descomponer bases. Recordamos:

$$6 = 2 \cdot 3, \quad 4 = 2^2, \quad 9 = 3^2, \quad 16 = 2^4, \quad 8 = 2^3.$$

Entonces:

$$6^{-2} = (2 \cdot 3)^{-2} = 2^{-2} \cdot 3^{-2},$$
$$4^2 = (2^2)^2 = 2^4,$$
$$9^{-3} = (3^2)^{-3} = 3^{-6},$$
$$16^{-2} = (2^4)^{-2} = 2^{-8},$$
$$8^3 = (2^3)^3 = 2^9.$$

Paso 2: reescribir numerador y denominador por separado. Numerador:

$$6^{-2} \cdot 4^2 = (2^{-2} \cdot 3^{-2}) \cdot 2^4 = 2^{-2+4} \cdot 3^{-2} = 2^2 \cdot 3^{-2}.$$

Denominador:

$$\begin{aligned} 3^3 \cdot 9^{-3} \cdot 16^{-2} \cdot 8^3 &= 3^3 \cdot 3^{-6} \cdot 2^{-8} \cdot 2^9 \\ &= 3^{3-6} \cdot 2^{-8+9} \\ &= 3^{-3} \cdot 2^1. \end{aligned}$$

Paso 3: formar el cociente.

$$\begin{aligned} \frac{2^2 \cdot 3^{-2}}{3^{-3} \cdot 2^1} &= 2^{2-1} \cdot 3^{-2-(-3)} \\ &= 2^1 \cdot 3^1 \\ &= 6. \end{aligned}$$

Resultado del apartado (d): 6.

Advertencia 1.3. Error típico: olvidar que al dividir potencias de la misma base se *restan* exponentes: $a^m/a^n = a^{m-n}$, y que $a^{-n} = 1/a^n$.

Ejercicio 2. Problema de fracciones de una huerta

Figura/diagrama de apoyo

Solución

El hortelano planta:

$$\frac{1}{4} \text{ de tomates,} \qquad \frac{2}{5} \text{ de alubias,} \qquad \text{y el resto de patatas.}$$

Además, se nos dice que *el resto* (patatas) son 280 m^2.

Objetivos.

1. Hallar la fracción de huerta dedicada a patatas.
2. Hallar el área total T de la huerta.

Paso 1: calcular la fracción restante. La fracción total de la huerta es 1. Por tanto, la fracción destinada a patatas es:

$$1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\right).$$

Sumamos $\frac{1}{4} + \frac{2}{5}$. El m.c.m. de 4 y 5 es 20:

$$\frac{1}{4} = \frac{5}{20}, \qquad \frac{2}{5} = \frac{8}{20}.$$

Entonces:

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{5} = \frac{5}{20} + \frac{8}{20} = \frac{13}{20}.$$

Luego la fracción restante:

$$1 - \frac{13}{20} = \frac{20}{20} - \frac{13}{20} = \frac{7}{20}.$$

Así, la fracción de patatas es:

$$\boxed{\frac{7}{20}.}$$

Paso 2: usar el dato de área para hallar el total. Si $\frac{7}{20}$ de la huerta son 280 m^2, entonces el total T satisface:

$$\frac{7}{20}\,T = 280.$$

Despejamos T multiplicando ambos lados por $\frac{20}{7}$ (justificado porque $\frac{20}{7}$ es el inverso multiplicativo de $\frac{7}{20}$ en $\mathbb{Q}$):

$$T = 280 \cdot \frac{20}{7}.$$

Simplificamos $280/7 = 40$ (porque $7 \cdot 40 = 280$):

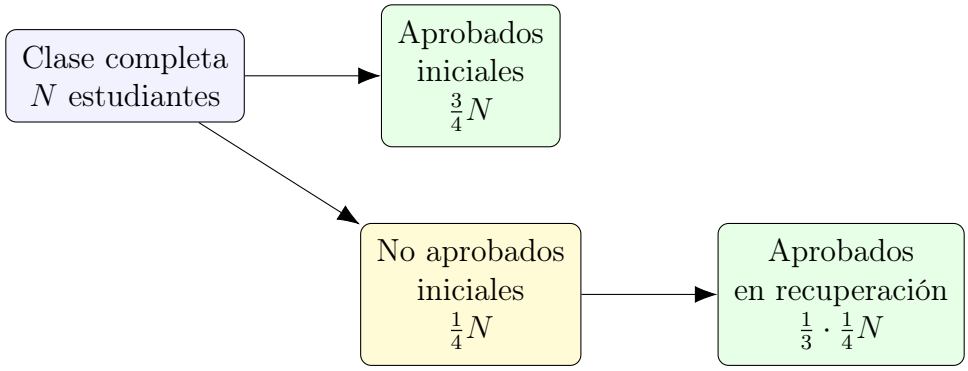
$$T = 40 \cdot 20 = 800.$$

$$\boxed{\text{Superficie total de la huerta: } 800 \text{ m}^2.}$$

Observación 1.4. Comprobación rápida: si $T = 800$, entonces $\frac{7}{20}T = \frac{7}{20} \cdot 800 = 7 \cdot 40 = 280$, consistente con el enunciado.

Ejercicio 3. Proporciones de aprobados tras recuperación

Figura/diagrama de apoyo



Solución

En la evaluación inicial aprueba $\frac{3}{4}$ de la clase. El resto, es decir $\frac{1}{4}$, va a recuperación y aprueba $\frac{1}{3}$ de ese grupo. Al final hay 20 aprobados en total.

Sea N el número total de estudiantes. Entonces:

- Aprobados iniciales: $\frac{3}{4}N$.
- No aprobados iniciales (van a recuperación): $N - \frac{3}{4}N = \frac{1}{4}N$.
- Aprobados en recuperación: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}N = \frac{1}{12}N$.

Paso 1: expresar los aprobados totales. Los aprobados totales son la suma:

$$\frac{3}{4}N + \frac{1}{12}N.$$

Sumamos fracciones. El m.c.m. de 4 y 12 es 12:

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}.$$

Por tanto:

$$\frac{3}{4}N + \frac{1}{12}N = \left(\frac{9}{12} + \frac{1}{12}\right)N = \frac{10}{12}N = \frac{5}{6}N.$$

Paso 2: usar el dato "20 aprobados". Se nos dice:

$$\frac{5}{6}N = 20.$$

Despejamos N multiplicando por $\frac{6}{5}$:

$$N = 20 \cdot \frac{6}{5}.$$

Simplificamos $20/5 = 4$:

$$N = 4 \cdot 6 = 24.$$

$$\boxed{\text{Número de estudiantes en la clase: } N = 24.}$$

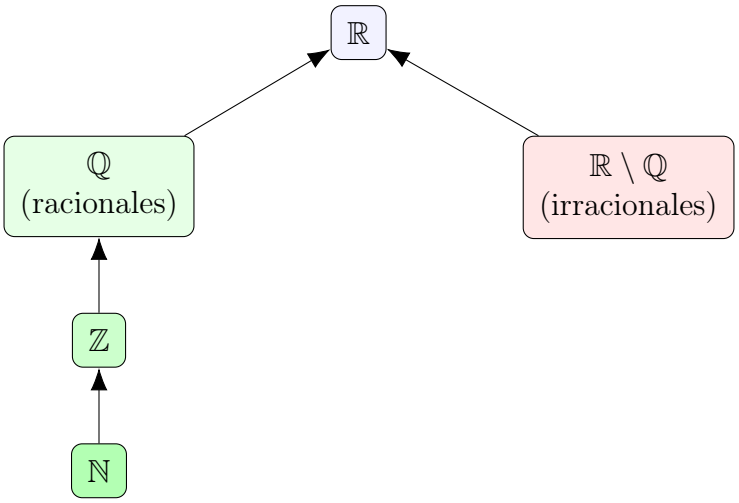
Paso 3: proporción de aprobados final. Ya hemos obtenido que la proporción final es:

$$\boxed{\frac{5}{6}.}$$

Observación 1.5. Comprobación numérica: $\frac{5}{6} \cdot 24 = 5 \cdot 4 = 20$ aprobados, correcto.

Ejercicio 4. Clasificación en conjuntos numéricos y fracciones generatrices

Figura/diagrama de apoyo



Solución

Se pide indicar el conjunto *más pequeño* al que pertenece cada número real de la lista:

$$\frac{1}{4}, \quad \frac{15}{5}, \quad \frac{2}{15}, \quad \frac{1}{13}, \quad 0,\widehat{5}, \quad 1,65\widehat{\ }, \quad 0,101001000\ldots$$

(En lo que sigue, interpretamos $0,\widehat{5}$ como $0,\overline{5}$ y $1,65\widehat{\ }$ como $1,\overline{65}$.)

Definición 1.1 (Racionales e irracionales)**.** Un número real es *racional* si puede escribirse como $\frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$. El conjunto de racionales es $\mathbb{Q}$. Un real que no es racional se llama *irracional*. El conjunto de irracionales es $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Definición 1.2 (Decimales racionales)**.** Un decimal es racional si y solo si su expansión decimal es:

- finita (termina), o
- periódica (eventualmente repetitiva).

Clasificación uno a uno.

(i) $\frac{1}{4}$

Es cociente de enteros, luego es racional:

$$\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}.$$

No es entero (porque 1 no es múltiplo de 4), así que el conjunto más pequeño es:

$$\boxed{\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}.}$$

(ii) $\dfrac{15}{5}$

Simplificamos:

$$\frac{15}{5} = 3.$$

El 3 es natural:

$$3 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Así, el conjunto más pequeño es:

$$\boxed{\frac{15}{5} \in \mathbb{N}.}$$

(iii) $\dfrac{2}{15}$

Es racional y no entero:

$$\boxed{\frac{2}{15} \in \mathbb{Q}.}$$

(iv) $\dfrac{1}{13}$

Es racional y no entero:

$$\boxed{\frac{1}{13} \in \mathbb{Q}.}$$

(v) $0,\widehat{5} = 0,\overline{5}$

Es decimal periódico, luego racional. El conjunto más pequeño es $\mathbb{Q}$ (no es entero).

$$\boxed{0,\overline{5} \in \mathbb{Q}.}$$

(vi) $1,65\widehat{\ } = 1,\overline{65}$

Es decimal periódico puro (repite 65), luego racional. No es entero, por tanto:

$$\boxed{1,\overline{65} \in \mathbb{Q}.}$$

(vii) $0,101001000\ldots$

La expansión decimal mostrada no es finita y no presenta un período fijo repetitivo (el patrón de ceros va aumentando). Bajo esta interpretación estándar, no es decimal periódico, por tanto no es racional. Concluimos:

$$\boxed{0,101001000\ldots \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \text{(irracional).}}$$

¿De qué tipo son los números que son racionales?

- Las fracciones $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{1}{13}$ son racionales por definición.
- $\frac{15}{5} = 3$ es natural (y por tanto también entero y racional).
- $0,\overline{5}$ y $1,\overline{65}$ son racionales por tener decimal periódico.
- $0,101001000\ldots$ es irracional.

Fracción generatriz de los racionales en forma decimal.

Fracción generatriz de $0,\overline{5}$

Sea $x = 0,\overline{5}$. Entonces:

$$10x = 5,\overline{5}.$$

Restamos:

$$10x - x = 5,\overline{5} - 0,\overline{5} = 5 \quad \Rightarrow \quad 9x = 5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{9}.$$

Así:

$$\boxed{0,\overline{5} = \frac{5}{9}.}$$

Fracción generatriz de $1,\overline{65}$

Sea $y = 1,\overline{65} = 1,656565\ldots$. El período tiene longitud 2. Multiplicamos por 100:

$$100y = 165,\overline{65}.$$

Restamos y:

$$100y - y = 165,\overline{65} - 1,\overline{65} = 164.$$

Por tanto:

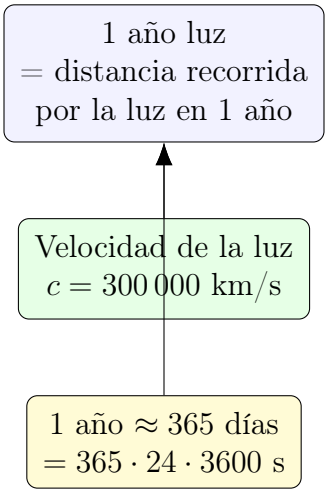
$$99y = 164 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{164}{99}.$$

Luego:

$$\boxed{1,\overline{65} = \frac{164}{99}.}$$

Ejercicio 5. Años luz, notación científica y tiempo de viaje

Figura/diagrama de apoyo



Solución

La estrella más cercana, α-Centauri, está a 4,3 años luz. Se pide:

1. Expresar esa distancia en km en notación científica.
2. Calcular cuánto tardaría una nave a 10 km/s.

Definición operacional de año luz. Un año luz es la distancia recorrida por la luz en el vacío en un año:

$$1 \text{ año luz} = c \cdot (\text{segundos en 1 año}).$$

Usaremos el dato dado:

$$c = 300\,000 \text{ km/s} = 3 \cdot 10^5 \text{ km/s}.$$

Paso 1: calcular los segundos de un año. Tomamos 1 año $\approx$ 365 días:

$$1 \text{ año} = 365 \text{ días}.$$

Convertimos a horas:

$$365 \text{ días} \cdot 24 \text{ h/día} = 8760 \text{ h}.$$

Convertimos a segundos:

$$8760 \text{ h} \cdot 3600 \text{ s/h} = 31\,536\,000 \text{ s}.$$

Es decir:

$$1 \text{ año} \approx 3{,}1536 \cdot 10^7 \text{ s}.$$

Paso 2: distancia de 1 año luz.

$$\begin{aligned} 1 \text{ año luz} &= c \cdot (31\,536\,000 \text{ s}) \\ &= (300\,000 \text{ km/s}) \cdot (31\,536\,000 \text{ s}) \\ &= 300\,000 \cdot 31\,536\,000 \text{ km}. \end{aligned}$$

Para expresarlo en notación científica, escribimos:

$$300\,000 = 3 \cdot 10^5, \qquad 31\,536\,000 = 3{,}1536 \cdot 10^7.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 1 \text{ año luz} &= (3 \cdot 10^5)\,(3{,}1536 \cdot 10^7) \text{ km} \\ &= (3 \cdot 3{,}1536) \cdot 10^{5+7} \text{ km} \\ &= 9{,}4608 \cdot 10^{12} \text{ km}. \end{aligned}$$

Paso 3: distancia de 4,3 **años luz.**

$$\begin{aligned} 4{,}3 \text{ años luz} &= 4{,}3 \cdot (9{,}4608 \cdot 10^{12}) \text{ km} \\ &= (4{,}3 \cdot 9{,}4608) \cdot 10^{12} \text{ km}. \end{aligned}$$

Calculamos el producto:

$$9{,}4608 \cdot 4{,}3 = 9{,}4608 \cdot (4 + 0{,}3) = 37{,}8432 + 2{,}83824 = 40{,}68144.$$

Así:

$$4{,}3 \text{ años luz} = 40{,}68144 \cdot 10^{12} \text{ km}.$$

Normalizamos a notación científica (coeficiente entre 1 y 10):

$$40{,}68144 \cdot 10^{12} = 4{,}068144 \cdot 10^{13}.$$

$$\boxed{4{,}3 \text{ años luz} \approx 4{,}068144 \cdot 10^{13} \text{ km}.}$$

Paso 4: tiempo de viaje a 10 **km/s.** Si una nave viaja a velocidad constante $v = 10$ km/s, el tiempo t satisface:

$$t = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}.$$

Entonces:

$$t = \frac{4{,}068144 \cdot 10^{13} \text{ km}}{10 \text{ km/s}} = 4{,}068144 \cdot 10^{12} \text{ s}.$$

Paso 5: convertir segundos a años (aprox.). Sabemos que:

$$1 \text{ año} \approx 31\,536\,000 \text{ s} = 3{,}1536 \cdot 10^7 \text{ s}.$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} t \text{ (en años)} &= \frac{4{,}068144 \cdot 10^{12}}{3{,}1536 \cdot 10^{7}} \\ &= \left(\frac{4{,}068144}{3{,}1536}\right) \cdot 10^{12-7} \\ &= \left(\frac{4{,}068144}{3{,}1536}\right) \cdot 10^{5}. \end{aligned}$$

Aproximamos el cociente:

$$\frac{4{,}068144}{3{,}1536} \approx 1{,}290.$$

Entonces:

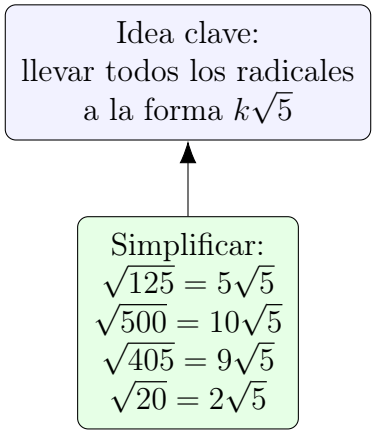
$$t \approx 1{,}290 \cdot 10^{5} \text{ años} = 1{,}29 \cdot 10^{5} \text{ años}.$$

$$\boxed{\text{Tiempo de viaje a 10 km/s} \approx 1{,}29 \cdot 10^{5} \text{ años.}}$$

Advertencia 1.4. Este resultado es enorme porque 10 km/s, aunque alto para estándares humanos, es diminuto comparado con la velocidad de la luz ($3 \cdot 10^{5}$ km/s). De hecho, 10 km/s es unas 30 000 veces menor que c.

Ejercicio 6. Simplificación de una expresión con radicales

Figura/diagrama de apoyo



Solución

Se pide simplificar:

$$\sqrt{5} - 2\sqrt{125} + \frac{3}{2}\sqrt{500} - \sqrt{405} + \frac{4}{3}\sqrt{5} + \frac{5}{6}\sqrt{20}.$$

Método elegido. El método estándar de *simplificación de radicales* consiste en:

1. Extraer factores cuadrados perfectos del radicando: $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$ con $a \geq 0$.
2. Reducir todos los términos a radicales semejantes para poder sumar/restar coeficientes.

Proposición 1.1 (Extracción de cuadrados perfectos)**.** *Si $a \geq 0$ y $b \geq 0$, entonces $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$.*

Paso 1: simplificar cada radical.

(i) $\sqrt{125}$

$$125 = 25 \cdot 5 = 5^2 \cdot 5.$$

Entonces:

$$\sqrt{125} = \sqrt{25 \cdot 5} = 5\sqrt{5}.$$

(ii) $\sqrt{500}$

$$500 = 100 \cdot 5 = 10^2 \cdot 5.$$

Entonces:

$$\sqrt{500} = \sqrt{100 \cdot 5} = 10\sqrt{5}.$$

(iii) $\sqrt{405}$

$$405 = 81 \cdot 5 = 9^2 \cdot 5.$$

Entonces:

$$\sqrt{405} = \sqrt{81 \cdot 5} = 9\sqrt{5}.$$

(iv) $\sqrt{20}$

$$20 = 4 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5.$$

Entonces:

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}.$$

Paso 2: sustituir y convertir todo a múltiplos de $\sqrt{5}$. Sustituimos:

$$\begin{aligned} &\sqrt{5} - 2\sqrt{125} + \frac{3}{2}\sqrt{500} - \sqrt{405} + \frac{4}{3}\sqrt{5} + \frac{5}{6}\sqrt{20} \\ &= \sqrt{5} - 2(5\sqrt{5}) + \frac{3}{2}(10\sqrt{5}) - 9\sqrt{5} + \frac{4}{3}\sqrt{5} + \frac{5}{6}(2\sqrt{5}). \end{aligned}$$

Paso 3: operar los coeficientes. Multiplicamos coeficientes:

$$-2(5\sqrt{5}) = -10\sqrt{5}, \qquad \frac{3}{2}(10\sqrt{5}) = 15\sqrt{5}, \qquad \frac{5}{6}(2\sqrt{5}) = \frac{10}{6}\sqrt{5} = \frac{5}{3}\sqrt{5}.$$

Queda:

$$\left(1\sqrt{5}\right) + \left(-10\sqrt{5}\right) + \left(15\sqrt{5}\right) + \left(-9\sqrt{5}\right) + \left(\frac{4}{3}\sqrt{5}\right) + \left(\frac{5}{3}\sqrt{5}\right).$$

Agrupamos como suma de coeficientes:

$$\left(1 - 10 + 15 - 9 + \frac{4}{3} + \frac{5}{3}\right)\sqrt{5}.$$

Sumamos enteros:

$$1 - 10 + 15 - 9 = (1 - 10) + (15 - 9) = (-9) + 6 = -3.$$

Sumamos fracciones:

$$\frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{9}{3} = 3.$$

Por tanto el coeficiente total es:

$$-3 + 3 = 0.$$

Luego toda la expresión vale:

$$0 \cdot \sqrt{5} = 0.$$

Resultado del ejercicio 6: 0.

Observación 1.6. Este tipo de ejercicios está diseñado para comprobar:

- si se simplifican bien los radicales (extracción de cuadrados),
- y si se suman correctamente los coeficientes de radicales semejantes.

A menudo el resultado final es 0 por cancelación exacta, lo cual sirve como verificación interna.

Junta de Castilla y León
CONSEJERIA DE EDUCACION Y CULTURA

EXAMEN DE MATEMÁTICAS
3º B ESO 27-11-2024

ies Tovar Antonio Centro bilingüe

Nº1.- a) Un campamento de 45 alumnos tiene provisiones para 16 días, ¿cuántos días podrá durar el campamento si fuesen 15 alumnos más?

b) Una persona desea hacer el Camino de Santiago a pie, para ello planea caminar 600 km en 25 días andando 4 horas por día. Si marcha 5 horas por día, ¿cuántos km. recorrerá en 15 días andando a la misma velocidad?

Nº2.- Tres tiendas de ropa compran un lote de chaquetas de temporada todas al mismo precio por un total de 1.575 €. Al repartir las chaquetas, la primera se queda con cinco, la segunda con diez y la tercera con veinte, ¿cuánto ha de pagar cada una?

Nº3.- Se ha fundido un lingote de oro de 3 kg de peso y 80% de pureza, junto con otro lingote de 1 kg y 64% de pureza. ¿Cuál es la pureza del lingote resultante?

Nº4.- Dos vehículos parten al encuentro simultáneamente desde dos ciudades, A y B. El vehículo que parte de A marcha a una velocidad de 90 km/h mientras el que parte de B lo hace a una velocidad de 60 km/h. El encuentro tiene lugar 5 horas después de la partida de los vehículos. Calcula la distancia entre ambas ciudades.

Nº5.- a) Un jugador de baloncesto ha encestado 15 de 25 tiros libres que ha ensayado. ¿Cuál es su porcentaje de fallos?

b) Un artículo que vale 120 euros, ante la excesiva demanda, sube un 20%. Luego, cuando se reduce la demanda, se rebaja un 20%. ¿Cuál es su precio final? ¿Sigue valiendo lo mismo que antes?

NOTA: Todos los problemas valen 2 puntos

(Criterios de evaluación: 1.1, 1.2, 2.1, 3.1, 3.2, 4.2, 5.2, 6.1, 6.2, 7.1, 8.2, 9.1, 10.2)

SUERTE JOVENES

Soluciones completas y rigurosas en LaTeX

Examen de Matemáticas (3º ESO B)

27-11-2024

Redacción técnica: Notion AI (modo matemático formal)

18 de febrero de 2026

Aviso al lector. Este documento está redactado como material de estudio:

- Se muestran todos los pasos de cálculo.
- Se justifican las transformaciones algebraicas y el razonamiento.
- Se añaden observaciones y advertencias de errores comunes cuando procede.
- Cada ejercicio incluye un dibujo o esquema *representativo* (realizado con `TikZ`), sin depender de imágenes externas.
- El índice incluye hipervínculos a cada ejercicio.

Índice

1. Examen de Matemáticas: 3º ESO B (27-11-2024) 3
Enunciado (referencia) . . . 3
1.1. Ejercicio 1 . . . 4
Ejercicio 1 . . . 4
1.1.1. Ejercicio 1(a) . . . 4
Ejercicio 1(a) . . . 4
1.1.2. Ejercicio 1(b) . . . 6
Ejercicio 1(b) . . . 6
1.2. Ejercicio 2 . . . 8
Ejercicio 2 . . . 8
1.3. Ejercicio 3 . . . 10
Ejercicio 3 . . . 10
1.4. Ejercicio 4 . . . 12
Ejercicio 4 . . . 12
1.5. Ejercicio 5 . . . 14
Ejercicio 5 . . . 14
1.5.1. Ejercicio 5(a) . . . 14
Ejercicio 5(a) . . . 14
1.5.2. Ejercicio 5(b) . . . 16
Ejercicio 5(b) . . . 16
Cierre . . . 18

1. Examen de Matemáticas: 3º ESO B (27-11-2024)

Enunciado (referencia)

Nº1. (a) Un campamento de 45 alumnos tiene provisiones para 16 días, ¿cuántos días podrá durar el campamento si fuesen 15 alumnos más?
(b) Una persona desea hacer el Camino de Santiago a pie: planea caminar 600 km en 25 días andando 4 horas por día. Si marcha 5 horas por día, ¿cuántos km recorrerá en 15 días andando a la misma velocidad?

Nº2. Tres tiendas de ropa compran un lote de chaquetas por un total de 1.575 . Al repartir las chaquetas, la primera se queda con 5, la segunda con 10 y la tercera con 20. ¿Cuánto ha de pagar cada una?

Nº3. Se funde un lingote de oro de 3 kg y 80 % de pureza junto con otro de 1 kg y 64 % de pureza. ¿Cuál es la pureza del lingote resultante?

Nº4. Dos vehículos parten al encuentro desde A y B. El de A va a 90 km/h y el de B a 60 km/h. Se encuentran 5 horas después. Calcula la distancia entre ciudades.

Nº5. (a) Un jugador encesta 15 de 25 tiros libres. ¿Cuál es su porcentaje de fallos?
(b) Un artículo vale 120 , sube un 20 %, y luego se rebaja un 20 %. ¿Precio final? ¿Es el mismo que antes?

1.1. Ejercicio 1

1.1.1. Ejercicio 1(a)

Planteamiento. Se trata de un problema de *proporcionalidad inversa* entre el número de alumnos y el número de días que duran las provisiones, bajo la hipótesis natural (y típica en estos problemas) de que:

- cada alumno consume la misma cantidad de provisiones por día,
- el consumo diario por alumno se mantiene constante.

[Magnitudes inversamente proporcionales] Dos magnitudes positivas x e y se dicen *inversamente proporcionales* si existe una constante $k > 0$ tal que

$$x \cdot y = k.$$

Equivalentemente, si x se multiplica por un factor $c > 0$, entonces y se divide por el mismo factor c.

Aquí, si A es el número de alumnos y D el número de días, entonces A y D son inversamente proporcionales.

Método elegido. Usaremos el método de **producto constante** (propio de la proporcionalidad inversa) porque es el más directo y evita errores de interpretación.

Datos.

$$A_1 = 45, \qquad D_1 = 16.$$

Si hay 15 alumnos más:

$$A_2 = 45 + 15 = 60.$$

Buscamos D_2.

Solución paso a paso. Si la cantidad total de provisiones es la misma, entonces el *consumo total* expresado en *alumno-días* se conserva:

$$A_1 \cdot D_1 = A_2 \cdot D_2.$$

Sustituimos:

$$45 \cdot 16 = 60 \cdot D_2.$$

Calculamos el lado izquierdo:

$$45 \cdot 16 = 45 \cdot (10 + 6) = 45 \cdot 10 + 45 \cdot 6 = 450 + 270 = 720.$$

Así,

$$720 = 60 \cdot D_2.$$

Para despejar D_2, dividimos ambos miembros por 60 (esto es lícito porque $60 \neq 0$):

$$D_2 = \frac{720}{60}.$$

Simplificamos:

$$\frac{720}{60} = \frac{72}{6} = 12.$$

Por tanto,

$$\boxed{D_2 = 12 \text{ días.}}$$

Como aumenta el número de alumnos, el número de días *debe* disminuir. El resultado 12 es coherente porque $12 < 16$.

[Error común] No confundir proporcionalidad inversa con directa. En problemas de *reparto de recursos* (misma cantidad total), alumno $\times$ días suele ser constante.

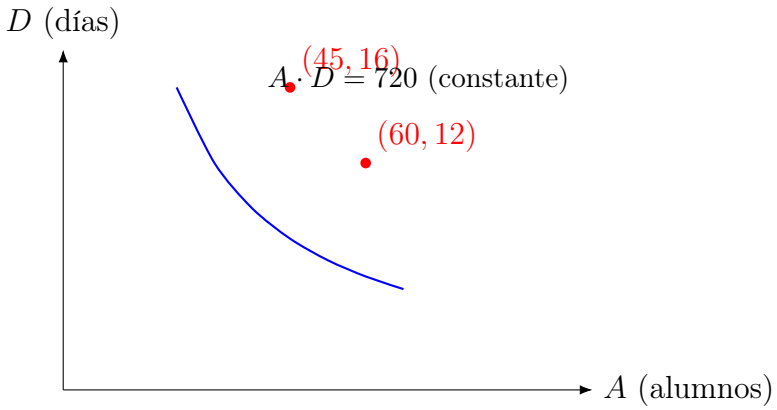


Figura 1: Esquema de proporcionalidad inversa: al aumentar alumnos, disminuyen días.

Dibujo representativo.

1.1.2. Ejercicio 1(b)

Planteamiento. Se nos da una planificación inicial de una caminata:

- Distancia total planificada: 600.
- Número de días: 25.
- Horas caminadas por día: 4.

De aquí se puede deducir la **velocidad media** (suponiendo velocidad constante al caminar).

Después se cambia a 5 por día, se camina durante 15 días, y se pregunta cuántos kilómetros se recorren *a la misma velocidad*.

Método elegido. Usaremos el método **físico** basado en la identidad fundamental:

$$\text{distancia} = \text{velocidad} \times \text{tiempo}.$$

Se elige porque separa claramente (i) cálculo de velocidad y (ii) nuevo tiempo total.

Paso 1: calcular el tiempo total inicial. Si camina 4 por día durante 25 días, el tiempo total inicial (en horas) es:

$$T_1 = 25 \cdot 4 = 100.$$

Paso 2: calcular la velocidad media. Si recorre 600 en 100, la velocidad (constante) es:

$$v = \frac{600}{100}.$$

Simplificamos la fracción:

$$\frac{600}{100} = 6,$$

luego

$$v = 6 \ .$$

Paso 3: calcular el nuevo tiempo total. Ahora camina 5 por día durante 15 días:

$$T_2 = 15 \cdot 5 = 75.$$

Paso 4: calcular la nueva distancia. Manteniendo la misma velocidad v, la distancia recorrida es:

$$d_2 = v \cdot T_2 = \Big(6\ \Big) \cdot (75).$$

Justificamos la cancelación de unidades: la en el numerador de T_2 cancela la del denominador de v, quedando km.

Calculamos:

$$6 \cdot 75 = 6 \cdot (3 \cdot 25) = (6 \cdot 3) \cdot 25 = 18 \cdot 25 = 450.$$

Por tanto:

$$\boxed{d_2 = 450.}$$

Es lógico que en 15 días no recorra la distancia total de 600 si, aun andando más horas al día, el tiempo total (75) es menor que el inicial (100).

[Error común] Un error típico consiste en comparar solo *días* y no *tiempo total en horas*. La velocidad se mantiene respecto al tiempo real de marcha, no respecto al número de días.

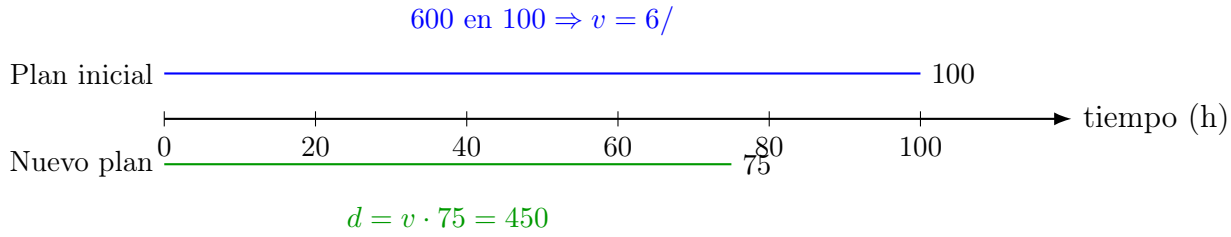


Figura 2: Esquema: se calcula la velocidad con el plan inicial y se aplica al nuevo tiempo total.

Dibujo representativo.

1.2. Ejercicio 2

Planteamiento. Tres tiendas compran un lote de chaquetas por un total de 1575. Todas las chaquetas tienen el **mismo precio unitario**. Se reparten:

$$\text{Tienda 1: } 5, \qquad \text{Tienda 2: } 10, \qquad \text{Tienda 3: } 20.$$

Se pide cuánto paga cada tienda.

Idea matemática. Si el precio unitario es el mismo, entonces el pago es **proporcional** al número de chaquetas recibidas:

$$\text{pago} = (\text{precio unitario}) \times (\text{número de chaquetas}).$$

Método elegido. Calcularemos primero el **precio unitario** a partir del total de chaquetas. Es un método robusto y evita errores al repartir por proporciones.

Paso 1: calcular el número total de chaquetas.

$$N = 5 + 10 + 20 = 35.$$

Paso 2: calcular el precio por chaqueta. Si el total cuesta 1575 y hay 35 chaquetas, el precio unitario p cumple:

$$35 \cdot p = 1575.$$

Despejamos p dividiendo por 35 (válido porque $35 \neq 0$):

$$p = \frac{1575}{35}.$$

Simplificamos. Observamos que:

$$1575 = 35 \cdot 45,$$

pues $35 \cdot 40 = 1400$ y $35 \cdot 5 = 175$, y $1400 + 175 = 1575$. Luego:

$$p = 45.$$

Paso 3: calcular el pago de cada tienda.

- Tienda 1 (5 chaquetas):
$$P_1 = 5 \cdot 45 = 225.$$
- Tienda 2 (10 chaquetas):
$$P_2 = 10 \cdot 45 = 450.$$
- Tienda 3 (20 chaquetas):
$$P_3 = 20 \cdot 45 = 900.$$

Comprobación. Sumamos los pagos:

$$P_1 + P_2 + P_3 = 225 + 450 + 900 = 1575,$$

que coincide con el total. Por tanto, el reparto es coherente.

Respuesta final.

$$\boxed{P_1 = 225, \qquad P_2 = 450, \qquad P_3 = 900.}$$

Otra vía equivalente es usar proporcionalidad directa: como $5 : 10 : 20 = 1 : 2 : 4$, el total se reparte en $1 + 2 + 4 = 7$ partes iguales. Cada parte vale $1575/7 = 225$. Así se obtiene $225, 450, 900$ igualmente. Se ha preferido el método del precio unitario por su interpretación económica directa.

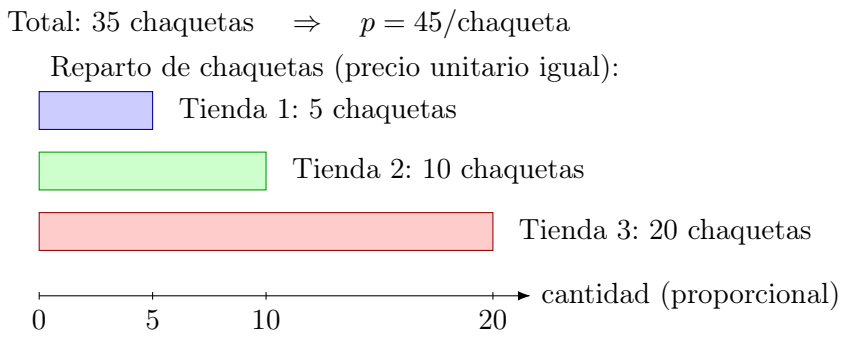


Figura 3: Visualización proporcional del reparto de chaquetas y relación con el pago.

Dibujo representativo.

1.3. Ejercicio 3

Planteamiento. Se funden dos lingotes de oro:

- Lingote 1: masa $m_1 = 3$, pureza $80\,\%$.
- Lingote 2: masa $m_2 = 1$, pureza $64\,\%$.

La **pureza** es el porcentaje (en masa) que corresponde a oro puro. Se pide la pureza del lingote resultante tras fundirlos.

Definición operativa de pureza. Si un lingote tiene masa total $m > 0$ y pureza $p\,\%$, entonces la masa de oro puro contenida es:

$$m_{\text{oro}} = \frac{p}{100}\, m.$$

La masa restante $m - m_{\text{oro}}$ correspondería a impurezas (otros metales).

Método elegido. Usaremos **conservación de masa** y **promedio ponderado**:

- La masa total se suma al fundir.
- La masa de oro puro también se suma.
- La pureza final es la razón (masa de oro puro)/(masa total).

Es el método más transparente y universal para mezclas.

Paso 1: masa de oro puro en cada lingote. Para el lingote 1:

$$m_{\text{oro},1} = \frac{80}{100} \cdot 3.$$

Simplificamos $\frac{80}{100} = \frac{4}{5}$:

$$m_{\text{oro},1} = \frac{4}{5} \cdot 3 = \frac{12}{5} = 2{,}4.$$

Para el lingote 2:

$$m_{\text{oro},2} = \frac{64}{100} \cdot 1.$$

Simplificamos $\frac{64}{100} = \frac{16}{25}$:

$$m_{\text{oro},2} = \frac{16}{25} \cdot 1 = \frac{16}{25} = 0{,}64.$$

Paso 2: sumar masas (total y de oro). Masa total final:

$$m_{\text{total}} = m_1 + m_2 = 3 + 1 = 4.$$

Masa de oro puro total:

$$m_{\text{oro}} = m_{\text{oro},1} + m_{\text{oro},2} = 2{,}4 + 0{,}64 = 3{,}04.$$

Paso 3: calcular la pureza final. La pureza final P (en forma decimal) es:

$$P = \frac{m_{\text{oro}}}{m_{\text{total}}} = \frac{3{,}04}{4}.$$

Calculamos:

$$\frac{3{,}04}{4} = 0{,}76.$$

Pasando a porcentaje:

$$0{,}76 = 76\,\%.$$

Por tanto:

$$\boxed{\text{La pureza del lingote resultante es } 76\,\%.}$$

El resultado debe situarse entre 64 % y 80 % porque se mezcla un material de 80 % con otro de 64 %. En efecto, 76 % está entre ambos valores y más cerca de 80 % porque el lingote de 80 % tiene mayor masa (3 kg frente a 1 kg), lo cual *pondera* más.

[Error común] No se debe promediar simplemente $\frac{80+64}{2} = 72\,\%$, porque ese sería un promedio no ponderado. La masa de cada lingote importa.

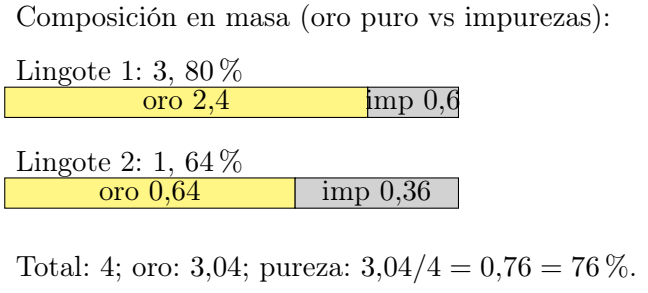


Figura 4: Mezcla: la pureza final es un promedio ponderado por masas.

Dibujo representativo.

1.4. Ejercicio 4

Planteamiento. Dos vehículos parten *simultáneamente* desde dos ciudades A y B *al encuentro* (es decir, se dirigen uno hacia el otro por la misma ruta).

$$v_A = 90 \ , \qquad v_B = 60 \ .$$

Se encuentran tras:

$$t = 5.$$

Se pide la distancia entre A y B.

Hipótesis usuales.

- Se mueven a velocidad constante.
- La trayectoria entre ciudades es lineal (o, equivalentemente, la distancia se mide sobre el mismo camino).

Método elegido. Usaremos **velocidad relativa** o, de forma equivalente, la suma de distancias recorridas:

$$d_{\text{total}} = d_A + d_B, \quad \text{con} \quad d_A = v_A t, \quad d_B = v_B t.$$

Este método es directo y conceptualmente claro.

Cálculo de distancias parciales. Distancia recorrida por el vehículo que sale de A:

$$d_A = v_A \cdot t = 90 \ \cdot 5.$$

Cancelamos unidades :

$$d_A = 90 \cdot 5 = 450.$$

Distancia recorrida por el vehículo que sale de B:

$$d_B = v_B \cdot t = 60 \ \cdot 5 = 60 \cdot 5 = 300.$$

Distancia total entre ciudades. Como se encuentran, la suma de las distancias parciales es la distancia entre ciudades:

$$d = d_A + d_B = 450 + 300 = 750.$$

Respuesta final.

$$\boxed{d = 750.}$$

También puede verse como velocidad relativa: al acercarse, la rapidez con la que disminuye la distancia es $v_A + v_B = 150/$. En 5 se cubre $150 \cdot 5 = 750$.

[Error común] No restar las velocidades. La resta $90 - 60$ corresponde a persecución en la *misma dirección*, no a un encuentro en direcciones opuestas.

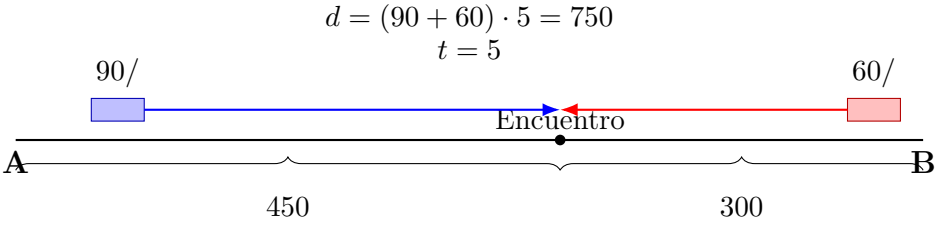


Figura 5: Encuentro: la distancia total es la suma de distancias recorridas en el mismo tiempo.

Dibujo representativo.

1.5. Ejercicio 5

1.5.1. Ejercicio 5(a)

Planteamiento. Un jugador encesta 15 de 25 tiros libres. Se pide el **porcentaje de fallos**.

Definiciones. [Porcentaje] Dado un cociente q (en forma decimal), el porcentaje correspondiente es $100 \cdot q\,\%$.

Paso 1: determinar tiros fallados. Tiros totales:

$$N = 25.$$

Tiros encestados:

$$E = 15.$$

Por tanto, tiros fallados:

$$F = N - E = 25 - 15 = 10.$$

Paso 2: fracción de fallos. La fracción (proporción) de fallos es:

$$\frac{F}{N} = \frac{10}{25}.$$

Simplificamos dividiendo numerador y denominador por 5 (justificado porque $5 \neq 0$ y la división por un mismo número distinto de cero preserva la igualdad):

$$\frac{10}{25} = \frac{2}{5}.$$

Convertimos a decimal:

$$\frac{2}{5} = 0{,}4.$$

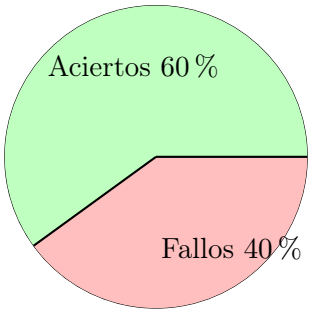
Paso 3: convertir a porcentaje.

$$0{,}4 \times 100\,\% = 40\,\%.$$

Respuesta final.

$$\boxed{\text{El porcentaje de fallos es } 40\,\%.}$$

El porcentaje de acierto sería $15/25 = 0{,}6 = 60\,\%$, y $60\,\% + 40\,\% = 100\,\%$, lo que sirve de comprobación.



15 encestados, 10 fallados (de 25).

Figura 6: Representación de aciertos y fallos en porcentaje.

Dibujo representativo.

1.5.2. Ejercicio 5(b)

Planteamiento. Un artículo cuesta inicialmente 120. Primero sube un 20 % y luego baja un 20 %. Se pide:

1. el precio final,
2. si coincide con el precio inicial.

Concepto clave: aumentos y descuentos porcentuales como factores multiplicativos. Un aumento del 20 % significa:

$$\text{nuevo} = \text{antiguo} \cdot \left(1 + \frac{20}{100}\right) = \text{antiguo} \cdot 1{,}2.$$

Una rebaja (descuento) del 20 % significa:

$$\text{nuevo} = \text{antiguo} \cdot \left(1 - \frac{20}{100}\right) = \text{antiguo} \cdot 0{,}8.$$

Método elegido. Usaremos **factores multiplicativos** porque:

- traduce cada porcentaje en una multiplicación,
- permite componer cambios sucesivos multiplicando factores,
- evita errores aritméticos al "sumar y restar porcentajes" de forma informal.

Paso 1: precio tras la subida del 20 %. Precio inicial:

$$P_0 = 120.$$

Tras subir un 20 %, el nuevo precio P_1 es:

$$P_1 = P_0 \cdot 1{,}2.$$

Calculamos:

$$120 \cdot 1{,}2 = 120 \cdot \frac{12}{10} = 120 \cdot \frac{6}{5}.$$

Como $120/5 = 24$, entonces:

$$120 \cdot \frac{6}{5} = 24 \cdot 6 = 144.$$

Así:

$$P_1 = 144.$$

Paso 2: precio tras la rebaja del 20 %. Ahora se aplica una rebaja del 20 % sobre P_1:

$$P_2 = P_1 \cdot 0{,}8 = 144 \cdot 0{,}8.$$

Escribimos $0{,}8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$:

$$P_2 = 144 \cdot \frac{4}{5}.$$

Calculamos $144 \cdot 4 = 576$:

$$P_2 = \frac{576}{5}.$$

Dividimos:

$$\frac{576}{5} = 115{,}2.$$

Por tanto:

$$P_2 = 115{,}2.$$

Respuesta final (precio).

$$\boxed{P_{\text{final}} = 115{,}2.}$$

¿Coincide con el precio inicial? Comparamos:

$$P_0 = 120, \qquad P_2 = 115{,}2.$$

Como $115{,}2 < 120$, no coincide: el precio final es menor.

Respuesta final (comparación).

$$\boxed{\text{No. El precio final no es el mismo; es 4,8 menor.}}$$

Justificación de la diferencia:

$$120 - 115{,}2 = 4{,}8.$$

[Interpretación multiplicativa] La transformación total equivale a multiplicar por el factor:

$$1{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}96.$$

Es decir, el precio final es el 96 % del inicial, lo que implica una bajada neta del 4 %:

$$P_2 = 0{,}96 \cdot 120 = 115{,}2.$$

[Error común] Un error muy frecuente es pensar: "sube 20 % y baja 20 %, entonces vuelve al mismo precio". Esto es falso porque el 20 % de descuento se calcula sobre el precio *ya aumentado*, no sobre el precio original.

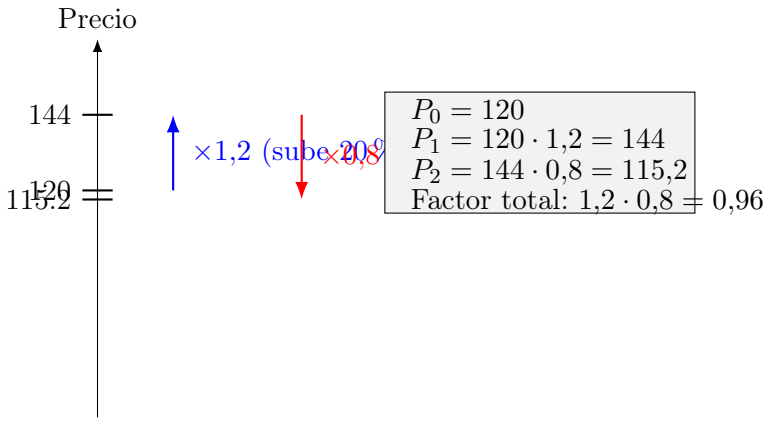


Figura 7: Cambios sucesivos: los porcentajes se aplican sobre valores distintos.

Dibujo representativo.

Cierre

Fin del examen resuelto.

Junta de Castilla y León
CONSEJERIA DE EDUCACION Y CULTURA

EXAMEN DE MATEMÁTICAS
3º B ESO 18-12-2024

ies Tovar Antonio Centro bilingüe

Nº1.- En las siguientes sucesiones:

a) -12, 60, -300, 1500,……. b) -6, -14, -22, -30,…….

c) $\frac{4}{5}, \frac{13}{10}, \frac{9}{5}, \frac{23}{10}$, … …. d) 7, 14, 28, 56,…….

Indica y justifica si son progresiones aritméticas o geométricas, dando la diferencia o razón según corresponda.

Nº2.- a) Halla el primer término, la diferencia y el término general de una progresión aritmética en la que a_{24} =135, y a_{26} = 147.

b) El primer término de una progresión aritmética es −1, y el decimoquinto es 27. Hallar la diferencia y la suma de los quince primeros términos.

Nº3.- Hallar la suma de los doce primeros múltiplos de 5.

Nº4.- a) Halla el primer término, la razón y el término general de una progresión geométrica en la que a_2 =12, y a_3 = 36.

b) El primer término de una progresión geométrica es 3, y el octavo es 384. Hallar la razón, y la suma de los 8 primeros términos.

Nº5.- Un estudiante de 3º de ESO se propone el día 1 de septiembre repasar matemáticas durante una quincena, haciendo cada día 2 ejercicios más que el día anterior. Si el primer día empezó haciendo un ejercicio:

a) ¿Cuántos ejercicios le tocará hacer el día 15 de septiembre?
b) ¿Cuántos ejercicios hará en total?

NOTA: Todos los problemas valen 2 puntos

(Criterios de evaluación: 1.2, 1.3, 2.2, 3.2, 3.3, 4.1, 5.1, 6.2, 6.3, 7.1, 8.1, 9.2, 10.1)

SUERTE JÓVENES

Soluciones completamente desarrolladas en LaTeX

Examen de Matemáticas
3º B ESO — 18-12-2024

Redacción técnica y resolución matemática rigurosa

18 de febrero de 2026

Descripción del documento. Este documento contiene la resolución *íntegra* y *totalmente justificada* de todos los ejercicios propuestos en el examen indicado. Se incluyen definiciones precisas, justificación lógica de cada paso, advertencias pedagógicas y dibujos explicativos (generados con `TikZ`) para favorecer la comprensión.

Índice

1. Examen de Matemáticas: 3º B ESO (18-12-2024) **3**
Preliminares teóricos (para referencia) 3
1.1. Ejercicio 1 4
1.2. Ejercicio 2 7
1.3. Ejercicio 3 10
1.4. Ejercicio 4 11
1.5. Ejercicio 5 14

Fin del examen **15**

1. Examen de Matemáticas: 3º B ESO (18-12-2024)

Preliminares teóricos (para referencia)

Definición 1.1 (Sucesión)**.** Una **sucesión** (real, racional, etc.) es una función

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \qquad n \mapsto a_n,$$

donde a_n se llama **término general** o **término n-ésimo**.

Definición 1.2 (Progresión aritmética)**.** Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una **progresión aritmética (PA)** si existe un número real d tal que

$$a_{n+1} - a_n = d \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

El número d se llama **diferencia** de la progresión.

Proposición 1.1 (Término general de una PA)**.** Si (a_n) es una PA de primer término a_1 y diferencia d, entonces

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Definición 1.3 (Progresión geométrica)**.** Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una **progresión geométrica (PG)** si existe un número real r (con $a_n \neq 0$ en los términos relevantes) tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

El número r se llama **razón** de la progresión.

Proposición 1.2 (Término general de una PG)**.** Si (a_n) es una PG de primer término a_1 y razón r, entonces

$$a_n = a_1\, r^{\,n-1} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Proposición 1.3 (Suma de los n primeros términos de una PA)**.** Si (a_n) es una PA y $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, entonces

$$S_n = \frac{n}{2}\,(a_1 + a_n).$$

Proposición 1.4 (Suma de los n primeros términos de una PG)**.** Si (a_n) es una PG de razón $r \neq 1$ y $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, entonces

$$S_n = a_1\,\frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

Si $r = 1$, entonces $a_n = a_1$ para todo n y $S_n = n\,a_1$.

Observación 1.1 (Método para decidir si una sucesión dada es PA o PG)**.** Dada una lista de términos $a_1, a_2, a_3, \ldots$, para verificar si es:

- **PA**: se calculan diferencias sucesivas $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_4 - a_3$, … y se comprueba si son todas iguales.
- **PG**: se calculan cocientes sucesivos $\frac{a_2}{a_1}$, $\frac{a_3}{a_2}$, $\frac{a_4}{a_3}$, … (cuando tenga sentido) y se comprueba si son todos iguales.

1.1. Ejercicio 1

Enunciado. En las siguientes sucesiones:

a) $-12,\ 60,\ -300,\ 1500,\ \ldots$

b) $-6,\ -14,\ -22,\ -30,\ \ldots$

c) $\frac{4}{5},\ \frac{13}{10},\ \frac{9}{5},\ \frac{23}{10},\ \ldots$

d) $7,\ 14,\ 28,\ 56,\ \ldots$

Indica y justifica si son progresiones aritméticas o geométricas, dando la diferencia o razón según corresponda.

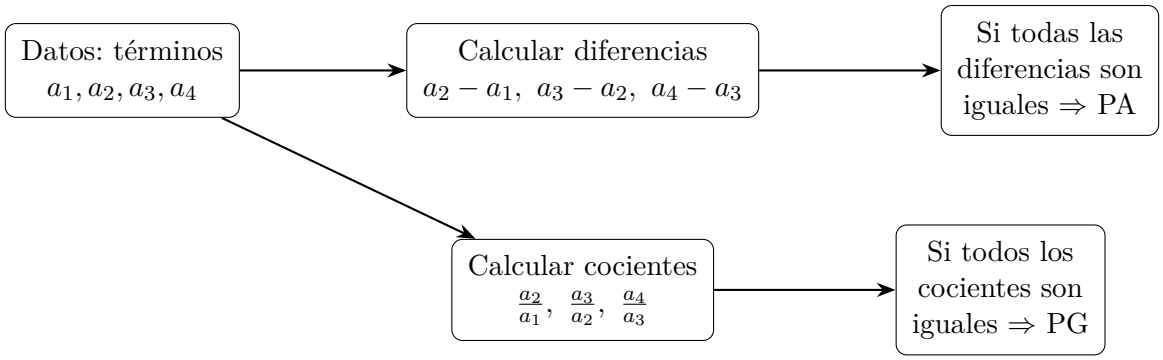


Figura 1: Esquema de decisión para identificar PA/PG a partir de términos consecutivos.

Solución.

a) Sucesión $-12,\ 60,\ -300,\ 1500,\ldots$

Paso 1: comprobar si es PA (diferencias). Denotemos $a_1 = -12$, $a_2 = 60$, $a_3 = -300$, $a_4 = 1500$. Calculamos las diferencias:

$$a_2 - a_1 = 60 - (-12) = 60 + 12 = 72,$$

$$a_3 - a_2 = -300 - 60 = -360,$$

$$a_4 - a_3 = 1500 - (-300) = 1500 + 300 = 1800.$$

Las diferencias obtenidas son 72, -360 y 1800, que **no** son iguales. Por tanto, **no es** una progresión aritmética.

Paso 2: comprobar si es PG (cocientes). Calculamos ahora los cocientes (notando que ningún término usado como denominador es 0):

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{60}{-12} = -5, \qquad \frac{a_3}{a_2} = \frac{-300}{60} = -5, \qquad \frac{a_4}{a_3} = \frac{1500}{-300} = -5.$$

Los cocientes son todos iguales a -5. Por definición, esto implica que la sucesión es una **progresión geométrica** de razón

$$r = -5.$$

Observación 1.2 (Interpretación del signo)**.** La razón negativa $r = -5$ provoca que los términos *alternen de signo* y que el valor absoluto se multiplique por 5 en cada paso.

b) Sucesión $-6,\ -14,\ -22,\ -30,\ldots$

Paso 1: comprobar si es PA (diferencias). Sea $a_1 = -6$, $a_2 = -14$, $a_3 = -22$, $a_4 = -30$. Calculamos:

$$a_2 - a_1 = -14 - (-6) = -14 + 6 = -8,$$
$$a_3 - a_2 = -22 - (-14) = -22 + 14 = -8,$$
$$a_4 - a_3 = -30 - (-22) = -30 + 22 = -8.$$

Todas las diferencias valen -8, luego por definición es una **progresión aritmética** con diferencia

$$d = -8.$$

Paso 2 (opcional): comprobar que no es PG. Los cocientes serían

$$\frac{-14}{-6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}, \quad \frac{-22}{-14} = \frac{22}{14} = \frac{11}{7},$$

que no coinciden; efectivamente no es PG.

c) Sucesión $\frac{4}{5},\ \frac{13}{10},\ \frac{9}{5},\ \frac{23}{10},\ldots$

Para evitar errores, trabajaremos con fracciones exactas.

Paso 1: comprobar si es PA (diferencias). Sea

$$a_1 = \frac{4}{5}, \quad a_2 = \frac{13}{10}, \quad a_3 = \frac{9}{5}, \quad a_4 = \frac{23}{10}.$$

Calculamos $a_2 - a_1$:

$$a_2 - a_1 = \frac{13}{10} - \frac{4}{5}.$$

Para restar fracciones, usamos denominador común 10:

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{10} \quad \Rightarrow \quad a_2 - a_1 = \frac{13}{10} - \frac{8}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Calculamos $a_3 - a_2$:

$$a_3 - a_2 = \frac{9}{5} - \frac{13}{10}.$$

Denominador común 10:

$$\frac{9}{5} = \frac{18}{10} \quad \Rightarrow \quad a_3 - a_2 = \frac{18}{10} - \frac{13}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Calculamos $a_4 - a_3$:

$$a_4 - a_3 = \frac{23}{10} - \frac{9}{5} = \frac{23}{10} - \frac{18}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Las diferencias son constantes e iguales a $\frac{1}{2}$. Luego la sucesión es una **progresión aritmética** con

$$d = \frac{1}{2}.$$

Paso 2 (comentario): No es necesaria la comprobación geométrica, ya que una sucesión con diferencia constante distinta de cero, salvo casos muy especiales (por ejemplo, con muchos ceros), no puede tener razón constante. Aun así, si se calculan cocientes:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{13}{10}}{\frac{4}{5}} = \frac{13}{10} \cdot \frac{5}{4} = \frac{65}{40} = \frac{13}{8}, \quad \frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{9}{5}}{\frac{13}{10}} = \frac{9}{5} \cdot \frac{10}{13} = \frac{18}{13},$$

no coinciden.

d) Sucesión 7, 14, 28, 56, ...

Paso 1: PA (diferencias).

$$14 - 7 = 7, \quad 28 - 14 = 14, \quad 56 - 28 = 28.$$

Las diferencias no son constantes, luego **no es** PA.

Paso 2: PG (cocientes).

$$\frac{14}{7} = 2, \quad \frac{28}{14} = 2, \quad \frac{56}{28} = 2.$$

Los cocientes son constantes. Por definición, es una **progresión geométrica** con razón

$$r = 2.$$

1.2. Ejercicio 2

Enunciado.

a) Halla el primer término, la diferencia y el término general de una progresión aritmética en la que $a_{24} = 135$ y $a_{26} = 147$.

b) El primer término de una progresión aritmética es -1 y el decimoquinto es 27. Hallar la diferencia y la suma de los quince primeros términos.

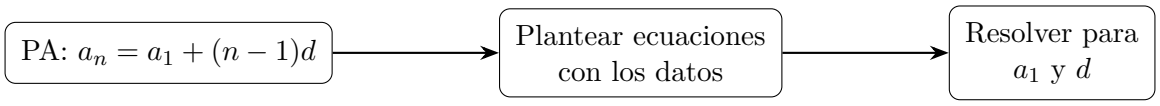


Figura 2: Idea general: traducir condiciones sobre a_n en ecuaciones con a_1 y d.

Solución.

a) Dado $a_{24} = 135$ y $a_{26} = 147$

Método elegido: Usaremos la fórmula del término general de una PA (Proposición 1.1), ya que la información está dada en términos concretos a_{24} y a_{26}.

Paso 1: escribir las ecuaciones usando $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Para $n = 24$:

$$a_{24} = a_1 + (24-1)d = a_1 + 23d.$$

El dato del problema dice $a_{24} = 135$, por tanto:

$$a_1 + 23d = 135. \tag{1}$$

Para $n = 26$:

$$a_{26} = a_1 + (26-1)d = a_1 + 25d.$$

Como $a_{26} = 147$, obtenemos:

$$a_1 + 25d = 147. \tag{2}$$

Paso 2: resolver el sistema lineal en a_1 y d.

Restamos (2) menos (1). Justificación: al restar ecuaciones, se resta miembro a miembro, operación válida en $\mathbb{R}$.

$$(a_1 + 25d) - (a_1 + 23d) = 147 - 135.$$

En el lado izquierdo:

$$a_1 - a_1 = 0, \qquad 25d - 23d = 2d.$$

En el lado derecho:

$$147 - 135 = 12.$$

Por tanto:

$$2d = 12.$$

Dividimos ambos miembros entre 2 (operación lícita porque $2 \neq 0$):

$$d = \frac{12}{2} = 6.$$

Paso 3: hallar a_1.
Sustituimos $d = 6$ en (1):

$$a_1 + 23 \cdot 6 = 135.$$

Calculamos $23 \cdot 6$:

$$23 \cdot 6 = 20 \cdot 6 + 3 \cdot 6 = 120 + 18 = 138.$$

Entonces:

$$a_1 + 138 = 135.$$

Restamos 138 en ambos miembros:

$$a_1 = 135 - 138 = -3.$$

Conclusión: primer término y diferencia son

$$a_1 = -3, \qquad d = 6.$$

Paso 4: término general.
Aplicando Proposición 1.1:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = -3 + (n-1) \cdot 6.$$

Desarrollamos:

$$6(n-1) = 6n - 6,$$

por tanto

$$a_n = -3 + 6n - 6 = 6n - 9.$$

Así, una forma equivalente del término general es:

$$\boxed{a_n = 6n - 9.}$$

Observación 1.3 (Comprobación rápida)**.** Verificamos los datos:

$$a_{24} = 6 \cdot 24 - 9 = 144 - 9 = 135, \qquad a_{26} = 6 \cdot 26 - 9 = 156 - 9 = 147.$$

Coincide con el enunciado, luego los valores son correctos.

b) Dado $a_1 = -1$ y $a_{15} = 27$: hallar d y S_{15}

Método elegido: Usaremos:

- La fórmula del término general de una PA (Proposición 1.1) para hallar d.
- La fórmula de la suma de una PA (Proposición 1.3) para hallar S_{15}.

La elección es natural porque los datos son exactamente "primer término" y "término 15", y se pide suma de los 15 primeros.

Paso 1: plantear la ecuación del término 15.
Por Proposición 1.1,

$$a_{15} = a_1 + (15-1)d = a_1 + 14d.$$

Sustituyendo $a_1 = -1$ y $a_{15} = 27$:

$$27 = -1 + 14d.$$

Paso 2: despejar d con justificación algebraica.
Sumamos 1 en ambos miembros (operación válida en $\mathbb{R}$):

$$27 + 1 = 14d \quad \Rightarrow \quad 28 = 14d.$$

Dividimos ambos miembros entre 14 (lícito porque $14 \neq 0$):

$$d = \frac{28}{14} = 2.$$

Por tanto,

$$\boxed{d = 2.}$$

Paso 3: calcular la suma S_{15}.
Sea

$$S_{15} = \sum_{k=1}^{15} a_k.$$

Por Proposición 1.3,

$$S_{15} = \frac{15}{2}\,(a_1 + a_{15}).$$

Sustituimos $a_1 = -1$ y $a_{15} = 27$:

$$S_{15} = \frac{15}{2}\,(-1 + 27) = \frac{15}{2} \cdot 26.$$

Simplificamos $\frac{26}{2} = 13$:

$$S_{15} = 15 \cdot 13 = 195.$$

Luego,

$$\boxed{S_{15} = 195.}$$

Observación 1.4 (Error común)**.** Un fallo frecuente es usar $a_{15} = a_1 + 15d$ en lugar de $a_{15} = a_1 + 14d$. La razón es que a_1 ya corresponde a $n = 1$, y el incremento d se aplica $n - 1$ veces para llegar al término n.

1.3. Ejercicio 3

Enunciado. Hallar la suma de los doce primeros múltiplos de 5.

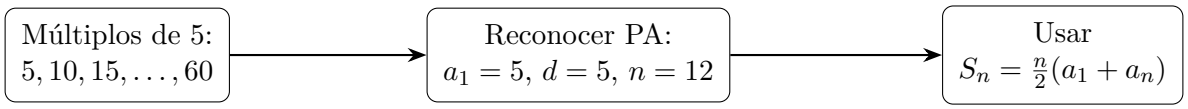


Figura 3: Representación del problema como suma de una progresión aritmética.

Solución. Paso 1: describir los múltiplos de 5.

Los múltiplos positivos de 5 son de la forma $5k$ con $k \in \mathbb{N}$. Los **doce primeros** corresponden a $k = 1, 2, \ldots, 12$, es decir:

$$5 \cdot 1,\ 5 \cdot 2,\ 5 \cdot 3,\ \ldots,\ 5 \cdot 12.$$

Explícitamente:

$$5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30,\ 35,\ 40,\ 45,\ 50,\ 55,\ 60.$$

Paso 2: identificar una PA.

Esta lista es una progresión aritmética porque cada término aumenta en 5:

$$10 - 5 = 5, \quad 15 - 10 = 5, \quad \ldots$$

Por tanto:

$$a_1 = 5, \qquad d = 5, \qquad n = 12.$$

Paso 3: hallar el término a_{12}.

Podemos verlo directamente: $a_{12} = 5 \cdot 12 = 60$.

(Alternativamente, por Proposición 1.1: $a_{12} = a_1 + (12-1)d = 5 + 11 \cdot 5 = 5 + 55 = 60$.)

Paso 4: calcular la suma S_{12}.

Por Proposición 1.3:

$$S_{12} = \frac{12}{2}\,(a_1 + a_{12}).$$

Sustituimos:

$$S_{12} = \frac{12}{2}\,(5 + 60).$$

Primero $5 + 60 = 65$ y $\frac{12}{2} = 6$, luego:

$$S_{12} = 6 \cdot 65 = 390.$$

$$\boxed{5 + 10 + \cdots + 60 = 390.}$$

Observación 1.5 (Método alternativo (factor común))**.** También se puede escribir:

$$\sum_{k=1}^{12} 5k = 5 \sum_{k=1}^{12} k.$$

Y usar la fórmula conocida $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$:

$$5 \sum_{k=1}^{12} k = 5 \cdot \frac{12 \cdot 13}{2} = 5 \cdot 78 = 390.$$

Ambos métodos son correctos; aquí se ha priorizado el enfoque de progresiones.

1.4. Ejercicio 4

Enunciado.

a) Halla el primer término, la razón y el término general de una progresión geométrica en la que $a_2 = 12$ y $a_3 = 36$.

b) El primer término de una progresión geométrica es 3 y el octavo es 384. Hallar la razón y la suma de los 8 primeros términos.

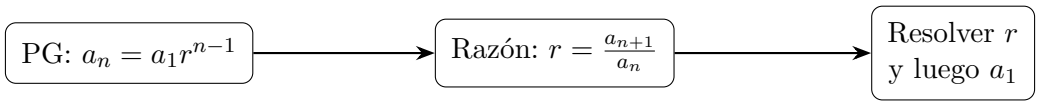


Figura 4: Estrategia típica en progresiones geométricas: cociente de términos consecutivos.

Solución.

a) Dado $a_2 = 12$ y $a_3 = 36$

Método elegido: Usaremos la propiedad fundamental de una PG:

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

porque tenemos dos términos consecutivos (a_2 y a_3). Esto permite hallar r de forma directa y sin sistemas.

Paso 1: hallar la razón r.

Como $a_2 \neq 0$ (en efecto $a_2 = 12$), el cociente tiene sentido:

$$r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{36}{12}.$$

Dividimos:

$$\frac{36}{12} = 3,$$

por tanto:

$$\boxed{r = 3.}$$

Paso 2: hallar el primer término a_1.

En una PG, $a_2 = a_1 r$ (porque $a_2 = a_1 r^{2-1} = a_1 r$). Sustituimos $a_2 = 12$ y $r = 3$:

$$12 = a_1 \cdot 3.$$

Dividimos entre 3 (lícito porque $3 \neq 0$):

$$a_1 = \frac{12}{3} = 4.$$

Luego:

$$\boxed{a_1 = 4.}$$

Paso 3: escribir el término general.

Por Proposición 1.2:

$$a_n = a_1 r^{n-1} = 4 \cdot 3^{n-1}.$$

Por tanto:

$$\boxed{a_n = 4 \cdot 3^{n-1}.}$$

Observación 1.6 (Comprobación)**.**

$$a_2 = 4 \cdot 3^1 = 12, \qquad a_3 = 4 \cdot 3^2 = 36.$$

Coincide con los datos.

b) Dado $a_1 = 3$ y $a_8 = 384$: hallar r y S_8

Método elegido: Usaremos el término general de una PG (Proposición 1.2) para obtener una ecuación en r, y después la fórmula de suma de PG (Proposición 1.4).

Paso 1: escribir la ecuación para a_8.

Por Proposición 1.2:

$$a_8 = a_1 r^{8-1} = a_1 r^7.$$

Sustituimos $a_1 = 3$ y $a_8 = 384$:

$$384 = 3r^7.$$

Paso 2: despejar r^7.

Dividimos ambos miembros entre 3 (lícito porque $3 \neq 0$):

$$r^7 = \frac{384}{3}.$$

Calculamos $\frac{384}{3}$:

$$384 = 3 \cdot 128 \quad \Rightarrow \quad \frac{384}{3} = 128.$$

Por tanto:

$$r^7 = 128.$$

Paso 3: hallar r a partir de $r^7 = 128$.

Observamos que 128 es potencia de 2:

$$128 = 2^7.$$

Entonces la ecuación queda:

$$r^7 = 2^7.$$

En números reales, si $r^7 = 2^7$, se deduce $r = 2$ porque la función $x \mapsto x^7$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ (y por tanto inyectiva), de modo que conserva igualdad.

Así:

$$\boxed{r = 2.}$$

Paso 4: suma de los 8 primeros términos S_8.

Sea

$$S_8 = \sum_{k=1}^{8} a_k.$$

Como $r = 2 \neq 1$, aplicamos Proposición 1.4:

$$S_8 = a_1 \frac{1 - r^8}{1 - r}.$$

Sustituimos $a_1 = 3$ y $r = 2$:

$$S_8 = 3 \cdot \frac{1 - 2^8}{1 - 2}.$$

Calculamos potencias:

$$2^8 = 256.$$

Entonces:

$$S_8 = 3 \cdot \frac{1 - 256}{-1}.$$

Simplificamos el numerador:

$$1 - 256 = -255,$$

luego:

$$S_8 = 3 \cdot \frac{-255}{-1} = 3 \cdot 255 = 765.$$

Por tanto:

$$\boxed{S_8 = 765.}$$

Observación 1.7 (Comprobación rápida con lista de términos)**.** Si $a_1 = 3$ y $r = 2$, los términos son:

$$3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96,\ 192,\ 384.$$

El octavo es 384 y la suma es:

$$3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 + 192 + 384 = 765.$$

1.5. Ejercicio 5

Enunciado. Un estudiante de 3º de ESO se propone el día 1 de septiembre repasar matemáticas durante una quincena, haciendo cada día 2 ejercicios más que el día anterior. Si el primer día empezó haciendo un ejercicio:

a) ¿Cuántos ejercicios le tocará hacer el día 15 de septiembre?

b) ¿Cuántos ejercicios hará en total?

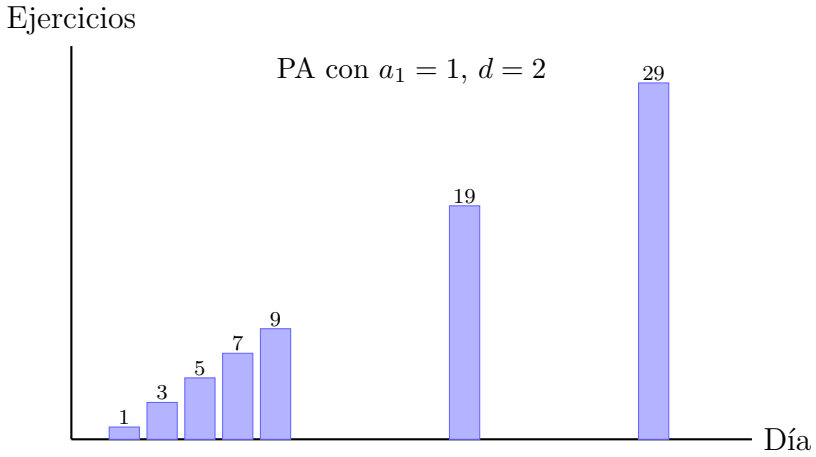


Figura 5: Representación (a escala) del crecimiento lineal de ejercicios diarios: cada día aumenta en 2.

Solución. Paso 1: modelización como progresión aritmética.
Sea a_n el número de ejercicios que realiza el día n de septiembre dentro del plan. Según el enunciado:

- El día 1 hace 1 ejercicio, por tanto $a_1 = 1$.
- Cada día hace 2 ejercicios más que el anterior, es decir:

$$a_{n+1} - a_n = 2 \quad \text{para todo } n.$$

Esto significa, por definición, que (a_n) es una progresión aritmética con:

$$a_1 = 1, \qquad d = 2.$$

a) Ejercicios el día 15 de septiembre

Paso 2: calcular a_{15}.
Usamos el término general de una PA (Proposición 1.1):

$$a_{15} = a_1 + (15 - 1)d.$$

Sustituimos $a_1 = 1$ y $d = 2$:

$$a_{15} = 1 + (15 - 1) \cdot 2 = 1 + 14 \cdot 2.$$

Calculamos $14 \cdot 2 = 28$:

$$a_{15} = 1 + 28 = 29.$$

El día 15 hará 29 ejercicios.

Observación 1.8 (Interpretación)**.** El crecimiento es lineal: cada día suma 2 ejercicios. El día 15 se han añadido 14 incrementos de 2 respecto al día 1.

b) Ejercicios totales en los 15 días

Paso 3: identificar la suma requerida.
El total de ejercicios en la quincena (15 días) es:

$$S_{15} = \sum_{k=1}^{15} a_k.$$

Como es una PA, aplicamos Proposición 1.3:

$$S_{15} = \frac{15}{2}\,(a_1 + a_{15}).$$

Ya conocemos $a_1 = 1$ y hemos calculado $a_{15} = 29$, así que:

$$S_{15} = \frac{15}{2}\,(1 + 29) = \frac{15}{2} \cdot 30.$$

Simplificamos $\frac{30}{2} = 15$:

$$S_{15} = 15 \cdot 15 = 225.$$

En total hará 225 ejercicios.

Observación 1.9 (Error común)**.** No confundir "quincena" (15 días) con 14 días. En el enunciado se especifica además el día 15, así que el intervalo es de $n = 1$ a $n = 15$.

Fin del examen

Documento completado: todas las cuestiones han sido resueltas con rigor, justificación paso a paso y apoyo gráfico.

Junta de Castilla y León
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA

EXAMEN MATEMÁTICAS

3º ESO PROGRESIONES

ies Antonio Tovar Centro bilingüe

Nº1.- En una progresión aritmética, el sexto término vale 10,5; y la diferencia es 1,5. Calcula el primer término y la suma de los 9 primeros términos.

Nº2.- En un edificio, el primer piso se encuentra a 7,40 metros de altura, y la distancia entre dos pisos consecutivos, es de 3,80 metros.

a) ¿A qué altura está el 9º piso?
b) Obtén una fórmula que nos indique la altura a la que se encuentra el piso *n*.

Nº3.- El alquiler de una bicicleta cuesta 5 € la primera hora y 2 € más cada nueva hora.

a) ¿Cuál es el precio total de alquiler de 7 horas?

b) Halla una fórmula que nos dé el precio total de alquiler de *n* horas.

c) Si un día me han cobrado 21 € ¿cuántas horas he tenida alquilada la bicicleta?

Nº4.- Halla la suma de los seis primeros términos de una progresión geométrica de razón positiva en la que $a_2 = 10$ y $a_4 = 250$.

Nº5.- En una progresión geométrica $a_2 = 6$ y $r = 2$; calcula el término general y la suma de los 10 primeros términos de dicha progresión.

SUERTE JÓVENES

Junta de Castilla y León

Examen de Matemáticas (3º ESO): Progresiones

Soluciones completamente desarrolladas

Objetivo del documento. Este texto constituye un material de estudio con soluciones *rigurosas y exhaustivas* a un examen sobre progresiones aritméticas y geométricas. Cada transformación algebraica se justifica y se explicitan los métodos elegidos, incluyendo observaciones y advertencias de errores comunes cuando procede.

18 de febrero de 2026

Índice

1. Examen: Progresiones (3º ESO) 2

Examen: Progresiones (3º ESO) 2

1.1. Ejercicio 1 . . . 3
Ejercicio 1 . . . 3
Solución . . . 3
1.2. Ejercicio 2 . . . 6
Ejercicio 2 . . . 6
Solución . . . 6
1.3. Ejercicio 3 . . . 8
Ejercicio 3 . . . 8
Solución . . . 8
1.4. Ejercicio 4 . . . 11
Ejercicio 4 . . . 11
Solución . . . 11
1.5. Ejercicio 5 . . . 14
Ejercicio 5 . . . 14
Solución . . . 14

Cierre 16

1. Examen: Progresiones (3º ESO)

Definición 1.1 (Progresión aritmética)**.** Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se llama **progresión aritmética** (P.A.) si existe un número real $d \in \mathbb{R}$ tal que

$$a_{n+1} - a_n = d \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

El número d se denomina **diferencia** de la progresión. En tal caso, para todo $n \geq 1$ se cumple

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Definición 1.2 (Suma de los primeros n términos de una P.A.)**.** Si (a_n) es una P.A., definimos

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Entonces, para $n \geq 1$ se cumple la fórmula clásica

$$S_n = \frac{n}{2}\big(a_1 + a_n\big).$$

Definición 1.3 (Progresión geométrica)**.** Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se llama **progresión geométrica** (P.G.) si existe un número real $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \text{ con } a_n \neq 0.$$

El número r se denomina **razón** de la progresión. En tal caso, para todo $n \geq 1$ se cumple

$$a_n = a_1\, r^{\,n-1}.$$

Definición 1.4 (Suma de los primeros n términos de una P.G.)**.** Si (a_n) es una P.G. con razón $r \neq 1$, definimos

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Entonces, para $n \geq 1$ se cumple

$$S_n = a_1\,\frac{1-r^n}{1-r}.$$

(Equivalentemente, $S_n = a_1\,\frac{r^n-1}{r-1}$, que es la misma igualdad reordenada.)

Observación 1.1 (Sobre el rigor y el método)**.** En los ejercicios se usará, según convenga:

- **Método de término general:** expresar la situación en forma de sucesión, obtener a_n y a partir de ahí calcular lo pedido.
- **Método de suma:** aplicar fórmulas de sumas (P.A. o P.G.) justificando cada sustitución y cada paso algebraico.
- **Método de ecuación lineal:** cuando una condición (por ejemplo, un coste total dado) conduce a una ecuación en la variable (horas, término, etc.).

Se indicará explícitamente el método elegido y por qué es adecuado.

1.1. Ejercicio 1

Enunciado. En una progresión aritmética, el sexto término vale 10,5 y la diferencia es 1,5.

a) Calcula el primer término.

b) Calcula la suma de los 9 primeros términos.

Solución

Método elegido y justificación. Elegimos el **método del término general** de una progresión aritmética, porque se nos da un término concreto (a_6) y la diferencia d, y la relación

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

permite despejar a_1 directamente sin ambigüedad.

a) Cálculo del primer término a_1

Por definición de P.A., para $n = 6$:

$$a_6 = a_1 + (6-1)d.$$

Explicamos cada elemento:

- $(6-1) = 5$ es el número de incrementos de diferencia d que se acumulan desde a_1 hasta a_6.
- $d = 1{,}5$ es la diferencia constante.

Sustituimos los datos:

$$10{,}5 = a_1 + 5 \cdot 1{,}5.$$

Calculamos el producto:

$$5 \cdot 1{,}5 = 7{,}5.$$

Sustituyendo:

$$10{,}5 = a_1 + 7{,}5.$$

Ahora despejamos a_1 restando 7,5 a ambos lados (propiedad de igualdad: si sumamos o restamos la misma cantidad a ambos miembros, la igualdad se mantiene):

$$10{,}5 - 7{,}5 = a_1.$$

Calculamos la resta:

$$3{,}0 = a_1.$$

Por tanto,

$$\boxed{a_1 = 3.}$$

b) Suma de los 9 primeros términos S_9

Paso 1: hallar a_9. Usamos de nuevo el término general de P.A.:

$$a_9 = a_1 + (9-1)d = a_1 + 8d.$$

Sustituimos $a_1 = 3$ y $d = 1{,}5$:

$$a_9 = 3 + 8 \cdot 1{,}5.$$

Calculamos el producto $8 \cdot 1{,}5 = 12$:

$$a_9 = 3 + 12 = 15.$$

Así,

$$\boxed{a_9 = 15.}$$

Paso 2: aplicar la fórmula de suma de una P.A. Por la definición dada al inicio,

$$S_9 = \frac{9}{2}(a_1 + a_9).$$

Sustituimos:

$$S_9 = \frac{9}{2}(3 + 15).$$

Sumamos dentro del paréntesis:

$$3 + 15 = 18.$$

Entonces:

$$S_9 = \frac{9}{2} \cdot 18.$$

Simplificamos justificadamente: $18/2 = 9$ porque dividir por 2 es equivalente a multiplicar por $\frac{1}{2}$:

$$S_9 = 9 \cdot 9 = 81.$$

Por tanto,

$$\boxed{S_9 = 81.}$$

Observación 1.2 (Comprobación rápida)**.** El término medio de los 9 primeros términos es a_5 y, en una P.A. con número impar de términos, la media coincide con el término central. Aquí, $a_5 = a_1 + 4d = 3 + 6 = 9$. Si la media es 9, entonces $S_9 = 9 \cdot 9 = 81$, consistente con el resultado.

Advertencia 1.1 (Error común)**.** Confundir $a_6 = a_1 + 6d$ en lugar de $a_6 = a_1 + 5d$. El factor correcto es $(n-1)$, porque desde a_1 hasta a_n hay exactamente $n-1$ saltos de diferencia.

Figura representativa del ejercicio

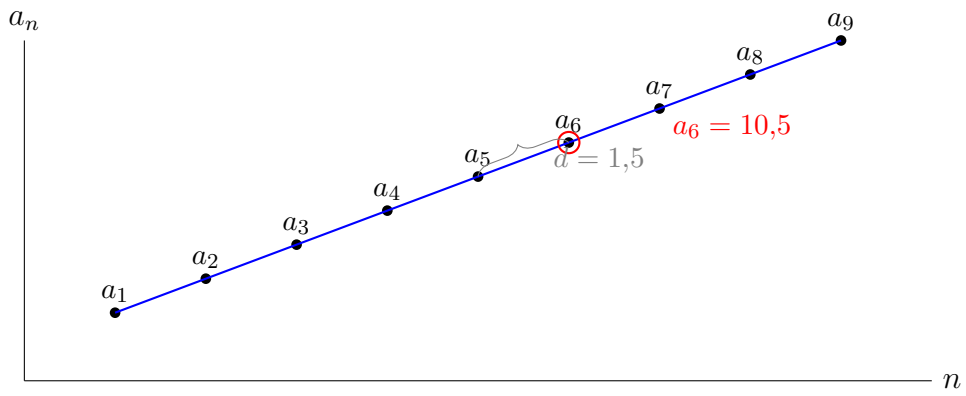


Figura 1: Representación de una progresión aritmética (crecimiento lineal) y señalización de a_6 y de la diferencia d.

1.2. Ejercicio 2

Enunciado. En un edificio, el primer piso se encuentra a 7,40 metros de altura, y la distancia entre dos pisos consecutivos es de 3,80 metros.

a) ¿A qué altura está el 9° piso?

b) Obtén una fórmula que indique la altura a la que se encuentra el piso n.

Solución

Interpretación matemática. La altura de los pisos forma una **progresión aritmética** porque:

- La altura del primer piso es un valor inicial fijo.
- Cada piso siguiente está a una distancia vertical constante 3,80 m del anterior.

Por tanto, si h_n denota la altura del piso n, entonces (h_n) es una P.A. con

$$h_1 = 7{,}40, \qquad d = 3{,}80.$$

Método elegido y justificación. Elegimos el **término general de una P.A.** porque el problema pide tanto un término concreto (h_9) como la fórmula general h_n.

a) Altura del 9° piso

Por la fórmula de término general de una P.A.:

$$h_n = h_1 + (n-1)d.$$

Sustituimos $n = 9$:

$$h_9 = h_1 + (9-1)d.$$

Calculamos $(9-1) = 8$:

$$h_9 = h_1 + 8d.$$

Sustituimos los valores numéricos:

$$h_9 = 7{,}40 + 8 \cdot 3{,}80.$$

Calculamos el producto. Para hacerlo sin saltos:

$$3{,}80 \cdot 8 = (3 + 0{,}80) \cdot 8 = 3 \cdot 8 + 0{,}80 \cdot 8 = 24 + 6{,}40 = 30{,}40.$$

Por tanto:

$$h_9 = 7{,}40 + 30{,}40 = 37{,}80.$$

Concluimos:

$$\boxed{h_9 = 37{,}80 \text{ m.}}$$

b) Fórmula para la altura del piso n

Usamos directamente la expresión general:

$$h_n = h_1 + (n-1)d.$$

Sustituimos $h_1 = 7{,}40$ y $d = 3{,}80$:

$$\boxed{h_n = 7{,}40 + (n-1) \cdot 3{,}80.}$$

Si se desea una forma desarrollada (sin ser obligatoria):

$$h_n = 7{,}40 + 3{,}80n - 3{,}80 = 3{,}80n + 3{,}60.$$

Por tanto, otra forma equivalente es:

$$\boxed{h_n = 3{,}80n + 3{,}60.}$$

Observación 1.3 (Equivalencia de expresiones)**.** Las expresiones $7{,}40 + (n-1) \cdot 3{,}80$ y $3{,}80n + 3{,}60$ son iguales para todo n, porque provienen de distribuir el producto:

$$7{,}40 + 3{,}80(n-1) = 7{,}40 + 3{,}80n - 3{,}80 = 3{,}80n + (7{,}40 - 3{,}80) = 3{,}80n + 3{,}60.$$

Figura representativa del ejercicio

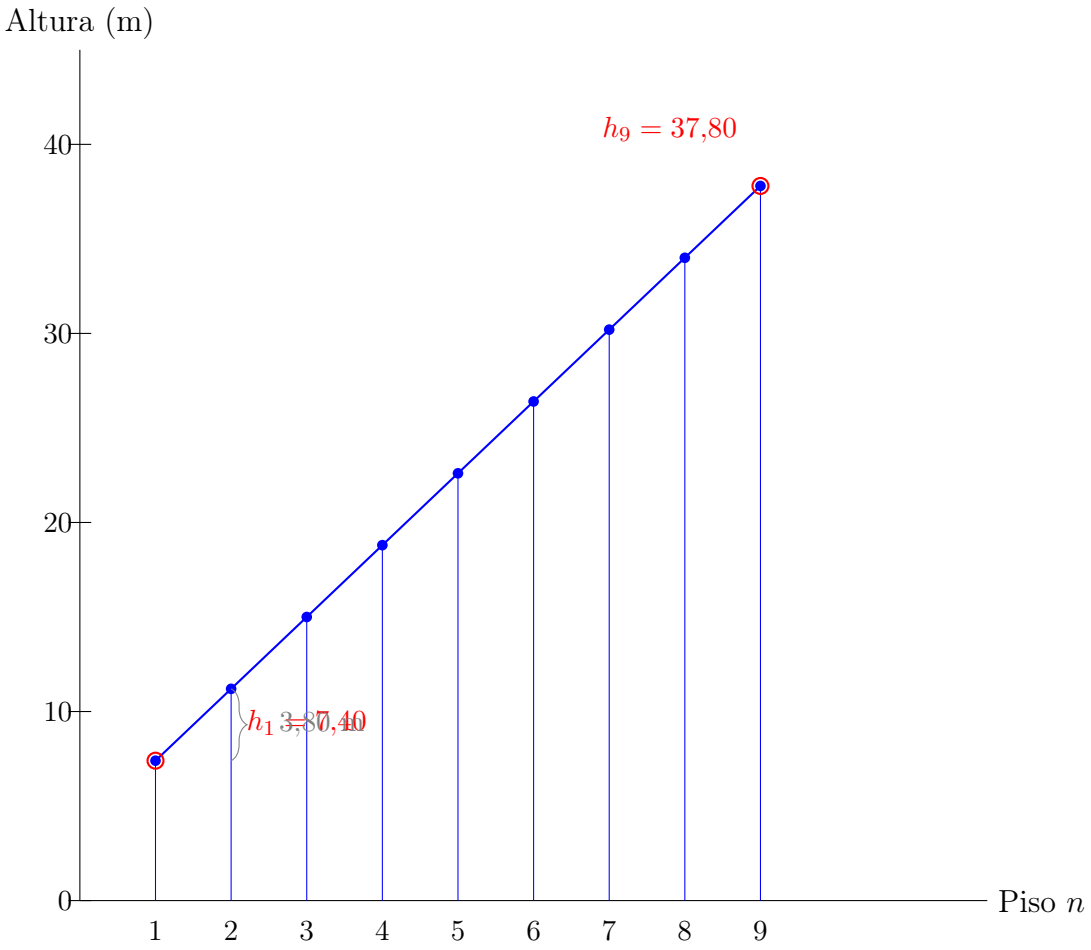


Figura 2: Alturas de los pisos como progresión aritmética: cada piso aumenta la altura en 3,80 m.

1.3. Ejercicio 3

Enunciado. El alquiler de una bicicleta cuesta 5 la primera hora y 2 más cada nueva hora.

a) ¿Cuál es el precio total de alquiler de 7 horas?

b) Halla una fórmula que dé el precio total de alquiler de n horas.

c) Si un día me han cobrado 21 , ¿cuántas horas he tenido alquilada la bicicleta?

Solución

Interpretación matemática. La situación describe una tarifa incremental: la primera hora cuesta 5 y cada hora adicional añade 2 al *precio total*. Hay dos formas naturales de modelizar:

- **Modelo A (precio total):** $P(n)$ es el coste total por n horas.
- **Modelo B (coste por hora):** el coste de la k-ésima hora es una P.A.; luego el total sería una suma.

Aquí el enunciado dice: "2 más cada nueva hora" interpretado como **incremento en el total por cada hora adicional**, es decir:

$$P(1) = 5, \quad P(2) = 7, \quad P(3) = 9, \ \ldots$$

Por tanto, $P(n)$ es una **progresión aritmética** de diferencia 2.

Método elegido y justificación. Elegimos **progresión aritmética del precio total** porque:

- La pregunta (a) pide directamente el total para un número de horas.
- La pregunta (b) pide una fórmula explícita del total.
- La pregunta (c) pide invertir esa fórmula para hallar n a partir del total.

a) Precio total de 7 horas

Definimos $P(n)$ como el precio total (en euros) del alquiler durante n horas. Entonces:

$$P(1) = 5, \qquad \text{y} \qquad P(n+1) - P(n) = 2 \text{ para todo } n \geq 1.$$

Esto significa que $(P(n))$ es una P.A. con primer término 5 y diferencia 2. Por la fórmula del término general:

$$P(n) = P(1) + (n-1) \cdot 2 = 5 + 2(n-1).$$

Sustituimos $n = 7$:

$$P(7) = 5 + 2(7-1).$$

Calculamos $7 - 1 = 6$:

$$P(7) = 5 + 2 \cdot 6.$$

Calculamos $2 \cdot 6 = 12$:

$$P(7) = 5 + 12 = 17.$$

Concluimos:

$$\boxed{P(7) = 17\ .}$$

b) Fórmula del precio total de n horas

Partimos de:

$$P(n) = 5 + 2(n-1).$$

Esta ya es una fórmula válida. Si queremos desarrollarla:

$$P(n) = 5 + 2n - 2 = 2n + 3.$$

Por tanto, una expresión equivalente y más simple es:

$$\boxed{P(n) = 2n + 3, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.}$$

Observación 1.4 (Comprobación con valores pequeños)**.** Verifiquemos:

$$P(1) = 2 \cdot 1 + 3 = 5, \quad P(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7, \quad P(3) = 2 \cdot 3 + 3 = 9,$$

coincidiendo con la descripción del enunciado.

c) Si se cobra 21 , ¿cuántas horas son?

La condición "me han cobrado 21 " se traduce en:

$$P(n) = 21.$$

Usamos la fórmula hallada:

$$2n + 3 = 21.$$

Ahora resolvemos esta ecuación lineal paso a paso.

Paso 1: aislar el término con n. Restamos 3 a ambos miembros:

$$2n + 3 - 3 = 21 - 3.$$

Simplificamos:

$$2n = 18.$$

Paso 2: despejar n. Dividimos ambos miembros entre 2 (equivalentemente, multiplicamos por $\frac{1}{2}$):

$$n = \frac{18}{2} = 9.$$

Concluimos:

$$\boxed{n = 9 \text{ horas.}}$$

Advertencia 1.2 (Error común de interpretación)**.** A veces se interpreta "2 más cada nueva hora" como "cada hora cuesta 2 más que la anterior", es decir, una P.A. de *costes por hora* en lugar de *coste total*. El enunciado, sin embargo, pregunta por "precio total de alquiler" y el ejemplo natural que se desprende es que el total aumenta linealmente por cada hora adicional.

Figura representativa del ejercicio

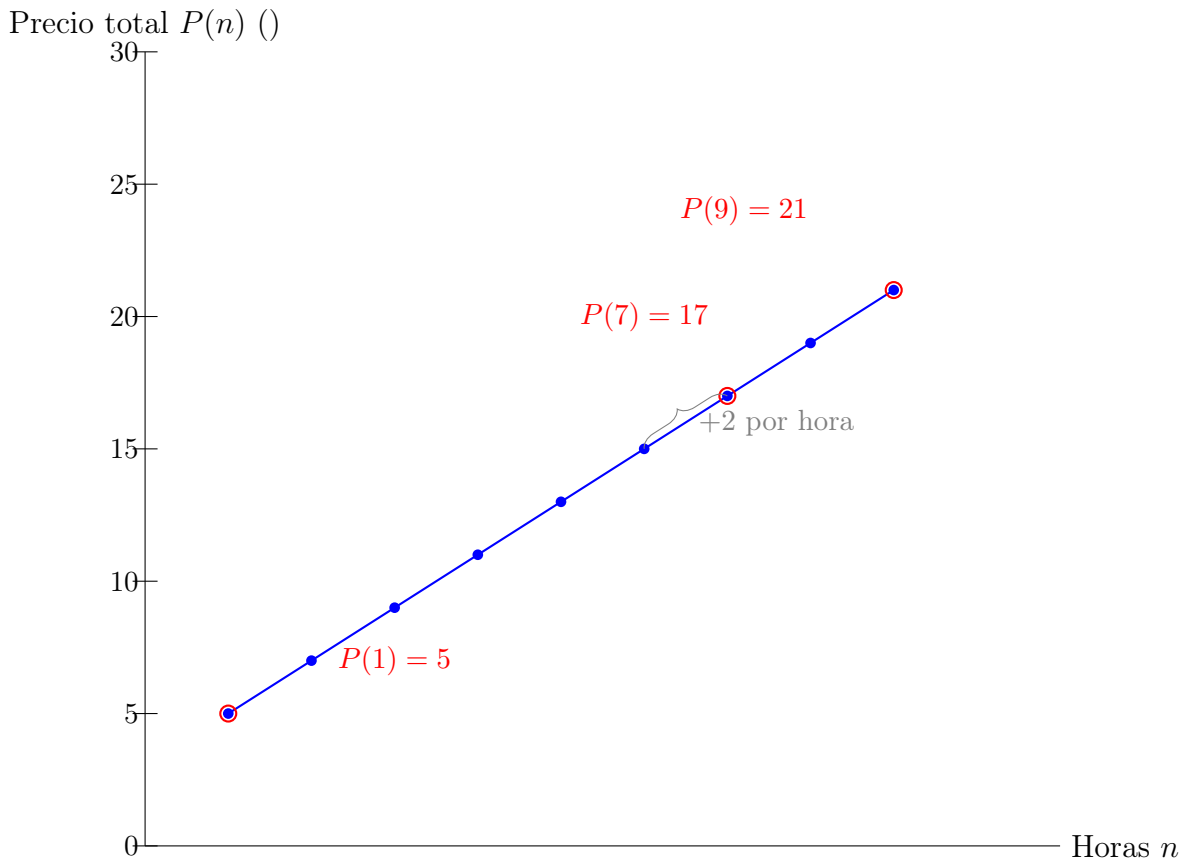


Figura 3: Precio total como función lineal del número de horas: $P(n) = 2n + 3$.

1.4. Ejercicio 4

Enunciado. Halla la suma de los seis primeros términos de una progresión geométrica de razón positiva en la que $a_2 = 10$ y $a_4 = 250$.

Solución

Método elegido y justificación. Elegimos el **método de reconstrucción de la P.G. a partir de términos conocidos**:

- En una P.G. se cumple $a_n = a_1 r^{n-1}$.
- Con dos términos (aquí a_2 y a_4) podemos plantear un sistema para determinar a_1 y r.
- Una vez conocidos a_1 y r, la suma S_6 se obtiene con la fórmula de suma de P.G.

La razón se dice *positiva*, lo cual elimina la posibilidad de una razón negativa (que podría producir el mismo valor de algunos términos en ciertos casos) y fija unívocamente la raíz cuadrada que aparecerá.

Paso 1: Expresar a_2 y a_4 en función de a_1 y r

Por la definición de P.G.:

$$a_n = a_1 r^{n-1}.$$

Para $n = 2$:

$$a_2 = a_1 r^{2-1} = a_1 r.$$

Dado que $a_2 = 10$:

$$a_1 r = 10. \tag{1}$$

Para $n = 4$:

$$a_4 = a_1 r^{4-1} = a_1 r^3.$$

Dado que $a_4 = 250$:

$$a_1 r^3 = 250. \tag{2}$$

Paso 2: Determinar la razón r

Dividimos la ecuación (2) entre la ecuación (1). Esta operación está justificada siempre que el denominador no sea cero; aquí $a_1 r = 10 \neq 0$, por lo que podemos dividir.

$$\frac{a_1 r^3}{a_1 r} = \frac{250}{10}.$$

Simplificamos el lado izquierdo:

- Se cancela a_1 porque aparece multiplicando arriba y abajo, y $a_1 \neq 0$ (si $a_1 = 0$, toda la sucesión sería 0, lo cual contradice $a_2 = 10$).
- En potencias, $r^3/r = r^{3-1} = r^2$ (regla de exponentes).

Así:

$$r^2 = 25.$$

Como se nos dice que la razón es positiva, tomamos la raíz positiva:

$$r = \sqrt{25} = 5.$$

Concluimos:

$$\boxed{r = 5.}$$

Paso 3: Determinar el primer término a_1

Volvemos a la ecuación (1):

$$a_1 r = 10.$$

Sustituimos $r = 5$:

$$a_1 \cdot 5 = 10.$$

Dividimos ambos lados entre 5:

$$a_1 = \frac{10}{5} = 2.$$

Por tanto,

$$\boxed{a_1 = 2.}$$

Paso 4: Calcular la suma de los seis primeros términos S_6

La suma de los primeros n términos de una P.G. con razón $r \neq 1$ es:

$$S_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

En nuestro caso, $n = 6$, $a_1 = 2$, $r = 5$ y $r \neq 1$. Entonces:

$$S_6 = 2 \cdot \frac{1 - 5^6}{1 - 5}.$$

Ahora calculamos y justificamos cada parte.

Cálculo de 5^6. De forma escalonada:

$$5^2 = 25, \quad 5^3 = 125, \quad 5^4 = 625, \quad 5^5 = 3125, \quad 5^6 = 15625.$$

Sustituimos:

$$S_6 = 2 \cdot \frac{1 - 15625}{1 - 5}.$$

Calculamos numerador y denominador:

$$1 - 15625 = -15624, \qquad 1 - 5 = -4.$$

Por tanto:

$$S_6 = 2 \cdot \frac{-15624}{-4}.$$

El cociente de dos números negativos es positivo, y $\frac{15624}{4} = 3906$ porque $4 \cdot 3906 = 15624$. Así:

$$S_6 = 2 \cdot 3906 = 7812.$$

Concluimos:

$$\boxed{S_6 = 7812.}$$

Observación 1.5 (Comprobación mediante listado de términos)**.** Si $a_1 = 2$ y $r = 5$, entonces:

$$a_2 = 2 \cdot 5 = 10, \quad a_3 = 50, \quad a_4 = 250,$$

coincide con el dato. La suma:

$$2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + 6250 = 7812,$$

lo cual valida el resultado.

Advertencia 1.3 (Error común)**.** Olvidar la condición "razón positiva". Si solo se tuviera $r^2 = 25$, entonces r podría ser 5 o -5. La positividad elimina -5 y garantiza la unicidad del valor.

Figura representativa del ejercicio

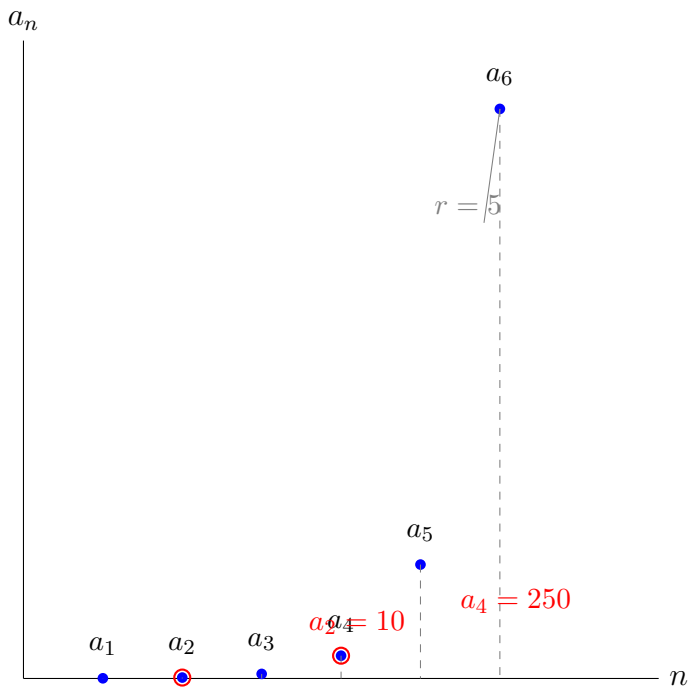


Figura 4: Crecimiento exponencial de una P.G. con razón $r = 5$: los términos aumentan multiplicándose por 5.

1.5. Ejercicio 5

Enunciado. En una progresión geométrica $a_2 = 6$ y $r = 2$.

a) Calcula el término general a_n.

b) Calcula la suma de los 10 primeros términos.

Solución

Método elegido y justificación. Elegimos el método directo de P.G.:

- Conociendo r y un término como a_2, podemos hallar a_1 usando $a_2 = a_1 r$.
- Después, el término general se obtiene como $a_n = a_1 r^{n-1}$.
- La suma de los primeros 10 términos se obtiene con la fórmula de suma de P.G. (con $r \neq 1$).

a) Término general

En una P.G. se cumple:

$$a_2 = a_1 r^{2-1} = a_1 r.$$

Sustituimos los datos $a_2 = 6$ y $r = 2$:

$$6 = a_1 \cdot 2.$$

Despejamos a_1 dividiendo entre 2:

$$a_1 = \frac{6}{2} = 3.$$

Ahora aplicamos la fórmula general:

$$a_n = a_1 r^{n-1}.$$

Sustituimos $a_1 = 3$ y $r = 2$:

$$\boxed{a_n = 3 \cdot 2^{n-1}.}$$

Observación 1.6 (Verificación rápida)**.** Para $n = 2$:

$$a_2 = 3 \cdot 2^1 = 6,$$

que coincide con el dato.

b) Suma de los 10 primeros términos

La suma de una P.G. con $r \neq 1$ viene dada por:

$$S_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

Aquí $n = 10$, $a_1 = 3$ y $r = 2$. Sustituimos:

$$S_{10} = 3 \cdot \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2}.$$

Calculamos 2^{10}. Procedemos paso a paso:

$2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16,\ 2^5 = 32,\ 2^6 = 64,\ 2^7 = 128,\ 2^8 = 256,\ 2^9 = 512,\ 2^{10} = 1024.$

Sustituyendo:

$$S_{10} = 3 \cdot \frac{1 - 1024}{1 - 2}.$$

Calculamos numerador y denominador:

$$1 - 1024 = -1023, \qquad 1 - 2 = -1.$$

Entonces:

$$S_{10} = 3 \cdot \frac{-1023}{-1}.$$

El cociente es 1023:

$$S_{10} = 3 \cdot 1023.$$

Multiplicamos:

$$3 \cdot 1023 = 3 \cdot (1000 + 23) = 3000 + 69 = 3069.$$

Por tanto:

$$\boxed{S_{10} = 3069.}$$

Advertencia 1.4 (Error común)**.** Usar la fórmula de suma de P.G. con signos incorrectos. Es frecuente olvidar que

$$\frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

Ambas son equivalentes, pero hay que ser consistente con el orden para no introducir un signo negativo por error.

Figura representativa del ejercicio

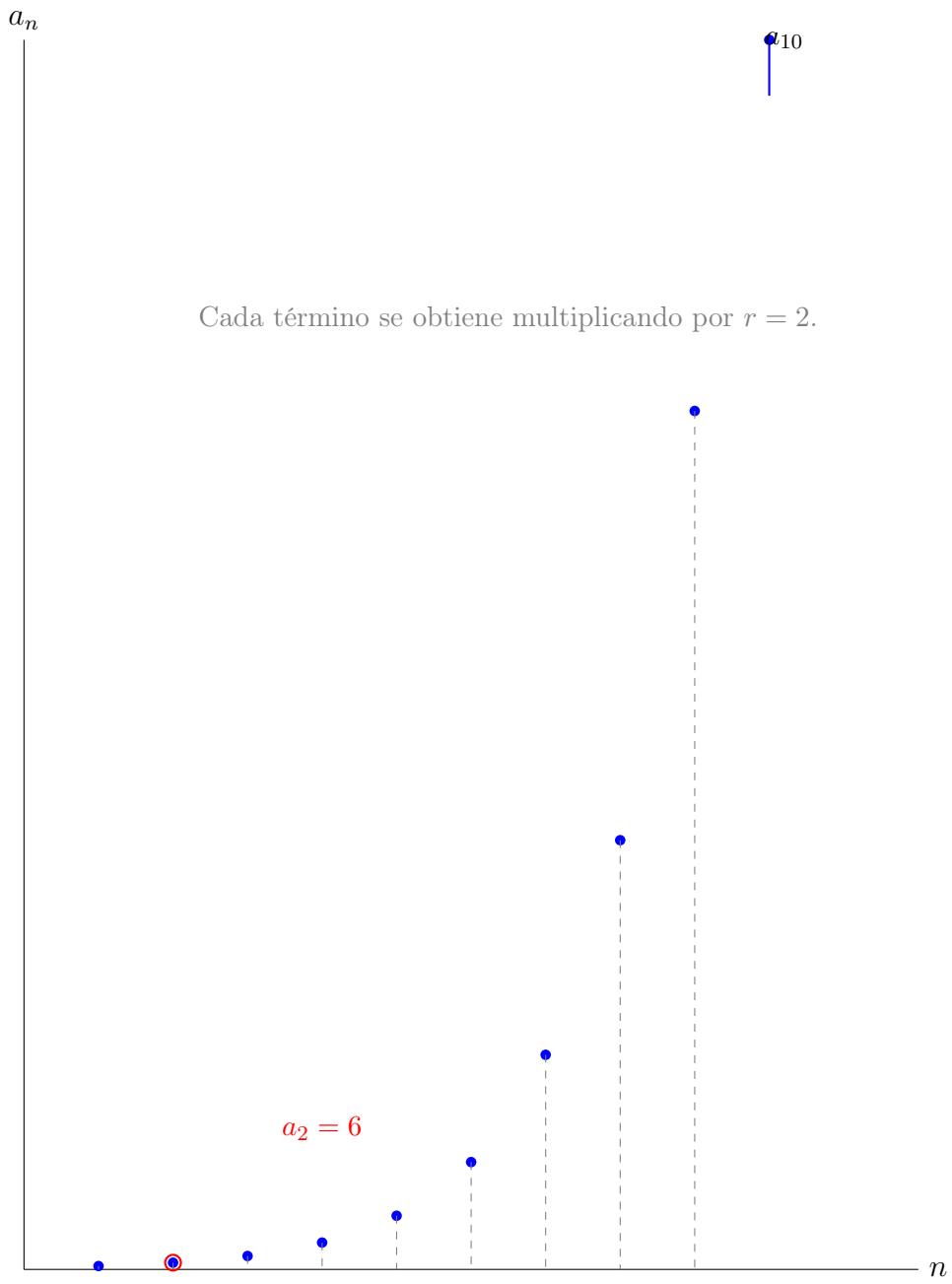


Figura 5: P.G. con $r = 2$: los términos se duplican; el crecimiento es exponencial.

Cierre

Este documento ha desarrollado, con detalle y rigor, la resolución completa de un examen sobre progresiones aritméticas y geométricas, incluyendo fórmulas generales, despejes y comprobaciones.

Junta de Castilla y León
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA

MATEMÁTICAS. ÁLGEBRA

19-02-2025 EXAMEN 3º ESO B

ies Tovar Antonio Centro bilingüe

Nº1.- Dados los polinomios:

$$P(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 5 \quad Q(x) = x^2 - 2x + 3 \quad R(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1$$

Realiza la siguiente operación y ordena el polinomio resultante. $P(x) \cdot Q(x) - R(x)$

Nº2.- Dados los polinomios:

$$P(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x - 2 \ , Q(x) = x^3 - x + 1, \quad R(x) = x + 2$$

Realiza las divisiones: $P(x) : Q(x)$ y $P(x) : R(x)$ indicando el cociente y el resto.

Nº3.-a) Hallar el valor de m para que la división sea exacta:

$$(x^5 + mx^3 + x^2 - 3x + 2) : (x - 2)$$

b) Desarrollar aplicando los productos notables:

$$a)\ (3x^2 - 4y)^2 \qquad b)\ (a^3 + 2b^2)^2 \qquad c)\ (4x^2 - 3) \cdot (4x^2 + 3)$$

Nº4.- a) Dentro de 8 años, la edad de María será el triple de la edad que tenía hace 4 años. ¿Cuál es la edad de María?

b) Tres amigos se reparten un premio de 700 €. Si el mayor recibe el doble de lo que recibe el mediano, y el mediano el doble de lo que recibe el pequeño, ¿cuánto dinero tendrá cada amigo al final?

Nº5.- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2(x+3)}{9} - \dfrac{y-1}{3} = 1 \\ -2x + y = 2(x+y) \end{array}\right\}$$

Nº6.- En una tienda venden camisetas a 10 € y pantalones a 20 €. En un día vendieron 40 prendas y la recaudación fue de 600 €. ¿Cuántas camisetas y cuántos pantalones se vendieron?

NOTA: TODOS LOS EJERCICIOS VALEN 1,5 PUNTOS

SUERTE JÓVENES

Solución Razonada del Examen de Matemáticas

Álgebra - 3º ESO B

Departamento de Matemáticas

19 de Febrero de 2025

Índice general

1. Resolución del Examen **3**
1.1. Operaciones con Polinomios 3
1.2. División de Polinomios 5
1.3. Teorema del Resto y Productos Notables 7
1.4. Problemas Algebraicos 9
1.5. Sistema de Ecuaciones 11
1.6. Problema de Sistemas Lineales 13

Introducción

Este documento presenta la resolución completa, paso a paso y rigurosa del examen de Álgebra de 3º de ESO. Cada ejercicio incluye:

- El enunciado original.
- Una explicación teórica de las herramientas matemáticas utilizadas.
- El desarrollo algebraico sin omitir pasos.
- Representaciones gráficas para facilitar la comprensión.

Capítulo 1

Resolución del Examen

1.1. Operaciones con Polinomios

Ejercicio 1. Dados los polinomios:

$$P(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 5$$

$$Q(x) = x^2 - 2x + 3$$

$$R(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1$$

Realiza la siguiente operación y ordena el polinomio resultante: $P(x) \cdot Q(x) - R(x)$.

Solución detallada:

Para resolver este ejercicio, seguiremos la jerarquía de las operaciones algebraicas:

1. **Producto**: Calcularemos primero $P(x) \cdot Q(x)$.
2. **Resta**: Al resultado anterior le restaremos $R(x)$.

Paso 1: Multiplicación $P(x) \cdot Q(x)$

Multiplicamos cada término de $P(x)$ por cada término de $Q(x)$. Utilizaremos la propiedad distributiva extendida.

$$P(x) \cdot Q(x) = (2x^3 - x^2 + 4x - 5) \cdot (x^2 - 2x + 3)$$

Desglosamos la multiplicación término a término:

$$\begin{aligned} 2x^3 \cdot (x^2 - 2x + 3) &= 2x^5 - 4x^4 + 6x^3 \\ -x^2 \cdot (x^2 - 2x + 3) &= -x^4 + 2x^3 - 3x^2 \\ 4x \cdot (x^2 - 2x + 3) &= 4x^3 - 8x^2 + 12x \\ -5 \cdot (x^2 - 2x + 3) &= -5x^2 + 10x - 15 \end{aligned}$$

Ahora, sumamos los términos semejantes (aquellos que tienen la misma potencia de x). Organizarlo verticalmente ayuda a evitar errores:

$$
\begin{array}{rccccc}
 & 2x^5 & -4x^4 & +6x^3 & & \\
 & & -x^4 & +2x^3 & -3x^2 & \\
 & & & +4x^3 & -8x^2 & +12x \\
+ & & & & -5x^2 & +10x \\
-15 & & & & & \\
\hline
= & \mathbf{2x^5} & \mathbf{-5x^4} & \mathbf{+12x^3} & \mathbf{-16x^2} & \mathbf{+22x} \\
\mathbf{-15} & & & & &
\end{array}
$$

Por tanto:

$$P(x) \cdot Q(x) = 2x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 16x^2 + 22x - 15$$

Paso 2: Resta $R(x)$

Ahora debemos realizar la operación $(P(x) \cdot Q(x)) - R(x)$. Recordemos que restar un polinomio es equivalente a sumar su opuesto.

$$R(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1$$
$$-R(x) = -x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 1$$

Sumamos el resultado del producto con $-R(x)$:

$$\begin{aligned}(2x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 16x^2 + 22x - 15)\\ +(-x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 1)\end{aligned}$$

Agrupamos términos semejantes:

- Grado 5: $2x^5$
- Grado 4: $-5x^4 - x^4 = -6x^4$
- Grado 3: $12x^3 + x^3 = 13x^3$
- Grado 2: $-16x^2 - 2x^2 = -18x^2$
- Grado 1: $22x + x = 23x$
- Término independiente: $-15 - 1 = -16$

Resultado Final

$$\boxed{2x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 18x^2 + 23x - 16}$$

Visualización del Grado del Polinomio
Al multiplicar un polinomio de grado 3 por uno de grado 2, obtenemos grado $3 + 2 = 5$.
Al restar un polinomio de grado 4, el grado máximo se mantiene en 5.

1.2. División de Polinomios

Ejercicio 2. Dados los polinomios:

$$P(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x - 2$$

$$Q(x) = x^3 - x + 1$$

$$R(x) = x + 2$$

Realiza las divisiones: $P(x) : Q(x)$ y $P(x) : R(x)$ indicando el cociente y el resto.

Solución detallada:

Parte A: División $P(x) : Q(x)$

Dado que el divisor $Q(x) = x^3 - x + 1$ no es de la forma $(x - a)$, debemos utilizar el algoritmo de la **división larga** (o división euclidiana).

Procedimiento:

1. Dividimos el término de mayor grado del dividendo entre el mayor del divisor: $x^5/x^3 = x^2$.
2. Multiplicamos x^2 por todo el divisor $Q(x)$ y lo restamos al dividendo.
3. Repetimos el proceso con el nuevo resto parcial hasta que el grado del resto sea menor que el grado del divisor (grado <3).

$$\begin{array}{r|l}
x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x - 2 & x^3 - x + 1 \\
\cline{2-2}
-x^5 + x^3 - x^2 & x^2 - 3x + 3 \\
\cline{1-1}
-3x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 4x & \\
3x^4 - 3x^2 + 3x & \\
\cline{1-1}
3x^3 - 5x^2 + 7x - 2 & \\
-3x^3 + 3x - 3 & \\
\cline{1-1}
-5x^2 + 10x - 5 &
\end{array}$$

$$x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x - 2 = (x^3 - x + 1)(x^2 - 3x + 3) + (-5x^2 + 10x - 5)$$

$$\frac{x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x - 2}{x^3 - x + 1} = x^2 - 3x + 3 + \frac{-5x^2 + 10x - 5}{x^3 - x + 1}$$

Análisis paso a paso: 1. $x^5 \div x^3 = x^2$. Multiplicamos $x^2(x^3 - x + 1) = x^5 - x^3 + x^2$. Restamos (cambiamos signo): $-x^5 + x^3 - x^2$. Nuevo resto parcial: $-3x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 4x - 2$. 2. $-3x^4 \div x^3 = -3x$. Multiplicamos $-3x(x^3 - x + 1) = -3x^4 + 3x^2 - 3x$. Restamos: $+3x^4 - 3x^2 + 3x$. Nuevo resto parcial: $3x^3 - 5x^2 + 7x - 2$. 3. $3x^3 \div x^3 = 3$. Multiplicamos $3(x^3 - x + 1) = 3x^3 - 3x + 3$. Restamos: $-3x^3 + 3x - 3$. Resto final: $-5x^2 + 10x - 5$.

Resultado Parte A:

$$\text{Cociente } C(x) = x^2 - 3x + 3$$

$$\text{Resto } R(x) = -5x^2 + 10x - 5$$

Parte B: División $P(x) : R(x)$

El divisor es $R(x) = x+2$, que es de la forma $(x-a)$ con $a = -2$. Por tanto, el método más eficiente y recomendado es la **Regla de Ruffini**.

Configuración de Ruffini: Colocamos los coeficientes de $P(x)$ en la fila superior: $1, -3, 2, -1, 4, -2$. Colocamos la raíz del divisor (-2) a la izquierda.

	1	-3	2	-1	4	-2
$\mathbf{-2}$		-2	10	-24	50	-108
	$\mathbf{1}$	$\mathbf{-5}$	$\mathbf{12}$	$\mathbf{-25}$	$\mathbf{54}$	$\boxed{\mathbf{-110}}$

Los números en la fila inferior (excepto el último) son los coeficientes del cociente. El grado del cociente será uno menos que el del dividendo (Grado 4).

Interpretación:

- Coeficientes del cociente: $1, -5, 12, -25, 54$
- Resto: -110

Resultado Parte B:

$$\text{Cociente } C(x) = x^4 - 5x^3 + 12x^2 - 25x + 54$$

$$\text{Resto } R = -110$$

1.3. Teorema del Resto y Productos Notables

Ejercicio 3. a) Hallar el valor de m para que la división sea exacta:

$$(x^5 + mx^3 + x^2 - 3x + 2) : (x - 2)$$

b) Desarrollar aplicando los productos notables: a) $(3x^2 - 4y)^2$ b) $(a^3 + 2b^2)^2$ c) $(4x^2 - 3) \cdot (4x^2 + 3)$

Solución detallada:

Parte A: Cálculo de m

Para que una división de un polinomio $P(x)$ por $(x - a)$ sea **exacta**, el resto debe ser 0. Según el **Teorema del Resto**, el resto de dividir $P(x)$ entre $(x - a)$ es igual al valor numérico del polinomio evaluado en a, es decir, $P(a)$.

Aquí, $a = 2$.

$$P(x) = x^5 + mx^3 + x^2 - 3x + 2$$

Imponemos la condición $P(2) = 0$:

$$2^5 + m \cdot (2^3) + 2^2 - 3(2) + 2 = 0$$

Calculamos las potencias:

$$32 + 8m + 4 - 6 + 2 = 0$$

Agrupamos los términos independientes:

$$32 + 4 - 6 + 2 = 32$$

$$32 + 8m = 0$$

Despejamos m:

$$8m = -32$$

$$m = \frac{-32}{8}$$

$$\boxed{m = -4}$$

Parte B: Productos Notables

Utilizaremos las siguientes identidades algebraicas fundamentales:

1. Cuadrado de una resta: $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
2. Cuadrado de una suma: $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
3. Suma por diferencia: $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

a) $(3x^2 - 4y)^2$

Identificamos $A = 3x^2$ y $B = 4y$.

$$\begin{aligned}(3x^2 - 4y)^2 &= (3x^2)^2 - 2(3x^2)(4y) + (4y)^2 \\ &= 9x^4 - 24x^2y + 16y^2\end{aligned}$$

b) $(a^3 + 2b^2)^2$

Identificamos $A = a^3$ y $B = 2b^2$.

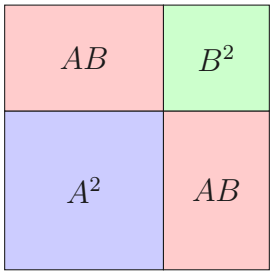
$$\begin{aligned}(a^3 + 2b^2)^2 &= (a^3)^2 + 2(a^3)(2b^2) + (2b^2)^2 \\ &= a^6 + 4a^3b^2 + 4b^4\end{aligned}$$

Nota: Recuerda la propiedad de potencias $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$.

c) $(4x^2 - 3) \cdot (4x^2 + 3)$

Es una suma por diferencia (Diferencia de cuadrados). Identificamos $A = 4x^2$ y $B = 3$.

$$\begin{aligned}(4x^2 - 3)(4x^2 + 3) &= (4x^2)^2 - (3)^2 \\ &= 16x^4 - 9\end{aligned}$$



Visualización de $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

1.4. Problemas Algebraicos

Ejercicio 4. a) Dentro de 8 años, la edad de María será el triple de la edad que tenía hace 4 años. ¿Cuál es la edad de María?
b) Tres amigos se reparten un premio de 700 €. Si el mayor recibe el doble de lo que recibe el mediano, y el mediano el doble de lo que recibe el pequeño, ¿cuánto dinero tendrá cada amigo al final?

Solución detallada:

Problema A: La edad de María

1. Definición de la incógnita: Sea x la edad actual de María.
2. Traducción al lenguaje algebraico:

- Edad actual: x
- Edad "dentro de 8 años"(futuro): $x + 8$
- Edad "hace 4 años"(pasado): $x - 4$

3. Planteamiento de la ecuación: El enunciado dice: "*La edad dentro de 8 años será el triple de la edad que tenía hace 4 años*".

$$x + 8 = 3 \cdot (x - 4)$$

4. Resolución:

$$\begin{aligned} x + 8 &= 3x - 12 && \text{(Propiedad distributiva)} \\ 8 + 12 &= 3x - x && \text{(Agrupar términos)} \\ 20 &= 2x \\ x &= \frac{20}{2} = 10 \end{aligned}$$

5. Comprobación: Si tiene 10 años: - En 8 años tendrá 18. - Hace 4 años tenía 6. - ¿Es 18 el triple de 6? Sí ($6 \times 3 = 18$).
Respuesta: La edad actual de María es **10 años**.

Problema B: Reparto del premio

1. Definición de las incógnitas: Es conveniente expresar todo en función del que recibe menos para evitar fracciones.

- Sea x la cantidad del amigo **Pequeño**.
- El **Mediano** recibe el doble que el pequeño: $2x$.
- El **Mayor** recibe el doble que el mediano: $2 \cdot (2x) = 4x$.

2. Planteamiento de la ecuación: La suma total es 700 €.

$$x + 2x + 4x = 700$$

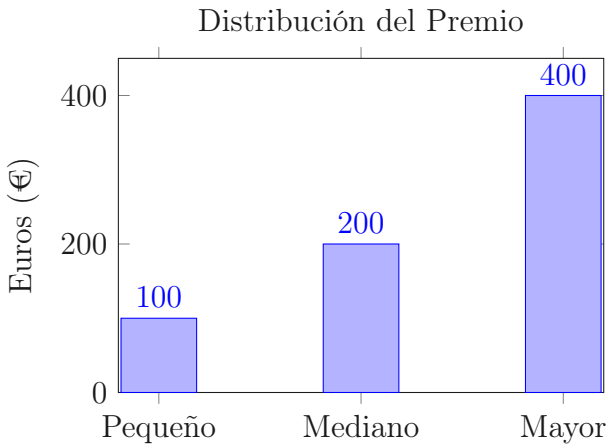
3. Resolución:

$$7x = 700$$
$$x = \frac{700}{7} = 100$$

4. Cálculo de cada parte:

- Pequeño (x): 100 €
- Mediano ($2x$): $2 \cdot 100 = 200$ €
- Mayor ($4x$): $4 \cdot 100 = 400$ €

Respuesta: Pequeño: **100 €**, Mediano: **200 €**, Mayor: **400 €**.



1.5. Sistema de Ecuaciones

Ejercicio 5. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{2(x+3)}{9} - \dfrac{y-1}{3} = 1 \\ -2x + y = 2(x+y) \end{cases}$$

Solución detallada:

Para resolver el sistema, primero debemos **simplificar** ambas ecuaciones para obtener la forma general lineal $Ax + By = C$.

Paso 1: Simplificación de la Ecuación 1

$$\frac{2(x+3)}{9} - \frac{y-1}{3} = 1$$

Para eliminar los denominadores, multiplicamos toda la ecuación por el mínimo común múltiplo de 9 y 3, que es **9**.

$$9 \cdot \left[\frac{2(x+3)}{9}\right] - 9 \cdot \left[\frac{y-1}{3}\right] = 9 \cdot 1$$

Simplificamos:

$$2(x+3) - 3(y-1) = 9$$

Aplicamos la propiedad distributiva (cuidado con el signo negativo):

$$2x + 6 - 3y + 3 = 9$$

$$2x - 3y + 9 = 9$$

$$2x - 3y = 9 - 9$$

$$\mathbf{2x - 3y = 0} \quad \text{(Ecuación I simplificada)}$$

Paso 2: Simplificación de la Ecuación 2

$$-2x + y = 2(x+y)$$

Expandimos el paréntesis de la derecha:

$$-2x + y = 2x + 2y$$

Agrupamos las x y las y en el lado izquierdo:

$$-2x - 2x + y - 2y = 0$$

$$-4x - y = 0$$

Multiplicamos por (-1) para que quede más limpio (opcional):

$$\mathbf{4x + y = 0} \quad \text{(Ecuación II simplificada)}$$

Paso 3: Resolución del Sistema

El sistema simplificado es:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 4x + y = 0 \end{cases}$$

Usaremos el **Método de Sustitución**, ya que es muy fácil despejar y de la segunda ecuación.

De la Ecuación II ($4x + y = 0$):

$$y = -4x$$

Sustituimos este valor de y en la Ecuación I ($2x - 3y = 0$):

$$2x - 3(-4x) = 0$$

$$2x + 12x = 0$$

$$14x = 0$$

$$x = \frac{0}{14} = 0$$

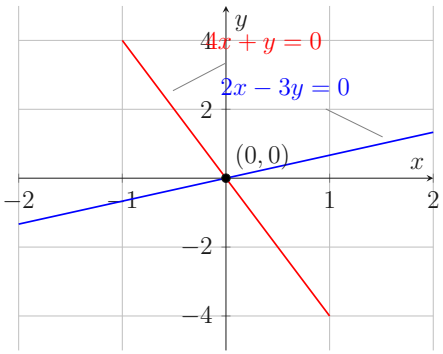
Ahora hallamos y:

$$y = -4(0) = 0$$

Solución Final

El punto de intersección de las dos rectas es el origen.

$$\boxed{x = 0, \quad y = 0}$$



1.6. Problema de Sistemas Lineales

Ejercicio 6. En una tienda venden camisetas a 10 € y pantalones a 20 €. En un día vendieron 40 prendas y la recaudación fue de 600 €. ¿Cuántas camisetas y cuántos pantalones se vendieron?

Solución detallada:

1. Definición de variables:

- c: número de camisetas vendidas.
- p: número de pantalones vendidos.

2. Planteamiento del sistema: Tenemos dos informaciones:

1. **Cantidad total:** Se vendieron 40 prendas.

$$c + p = 40$$

2. **Recaudación económica:** Precio × Cantidad.

$$10c + 20p = 600$$

Sistema:

$$\begin{cases} c + p = 40 \\ 10c + 20p = 600 \end{cases}$$

3. Simplificación: Podemos dividir la segunda ecuación entre 10 para trabajar con números más pequeños:

$$c + 2p = 60$$

Nuevo sistema:

$$\begin{cases} c + p = 40 \quad (A) \\ c + 2p = 60 \quad (B) \end{cases}$$

4. Resolución por Reducción: Restamos la ecuación (A) de la ecuación (B) para eliminar c:

$$(c + 2p) - (c + p) = 60 - 40$$

$$c - c + 2p - p = 20$$

$$p = 20$$

Sustituimos p en la ecuación (A) para hallar c:

$$c + 20 = 40$$

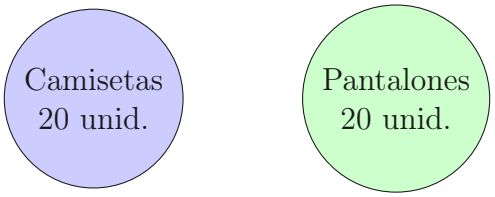
$$c = 20$$

5. Interpretación y Comprobación: Se vendieron 20 camisetas y 20 pantalones. Comprobación:

- Total prendas: $20 + 20 = 40$. (Correcto)

- Dinero: $20 \text{ cam} \times 10 + 20 \text{ pant} \times 20 = 200 + 400 = 600$. (Correcto)

Respuesta: Se vendieron **20 camisetas** y **20 pantalones**.



Total: 600

Junta de Castilla y León
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA

MATEMÁTICAS 19/03/2025

EXAMEN FUNCIONES 3º B ESO

Nº1.- Desde su casa hasta la parada del autobús, María tarda 5 minutos (la parada está a 200 m de su casa); espera durante 10 minutos, y al ver que el autobús tarda más de lo normal, decide ir andando a su lugar de trabajo, situado a 1 km de su casa. Al cuarto de hora de estar andando y a 300 m de su trabajo, se da cuenta de que el teléfono móvil se le ha olvidado en casa y regresa a buscarlo, tardando 10 minutos en llegar.

a) Representa la gráfica distancia-tiempo a su casa.
b) ¿Cuál ha sido la distancia más lejana a la que ha llegado? ¿Cuánto tiempo tarda en llegar a esa distancia?
c) ¿Cuánto tiempo ha tardado en todo el recorrido?
d) ¿En qué momento del trayecto su velocidad ha sido mayor?

Nº2.- Calcúlese la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(-2,2) B(-3,-1) y represéntala gráficamente.

Nº3.- Dada la función $y = f(x) = -x^2 + 4x + 5$

a) Indica qué tipo de función es.
b) Calcúlese su vértice.
c) Calcula los puntos de corte con los ejes.
d) Represéntala gráficamente.

Nº4.- En dos tarifas de móvil te ofrecen estas condiciones:

a) Paga 4 céntimos por cada minuto que hables
b) Paga 20 céntimos por establecimiento de llamada y 3 céntimos por cada minuto hablado

a) Si las dos tarifas son lineales. encuentra la función que representa cada una.

b) ¿Cuál es la pendiente de la recta asociada a cada tarifa? ¿Cuál va a crecer más rápido?

c) ¿Cuánto cuesta el primer, minuto en cada una de ellas?

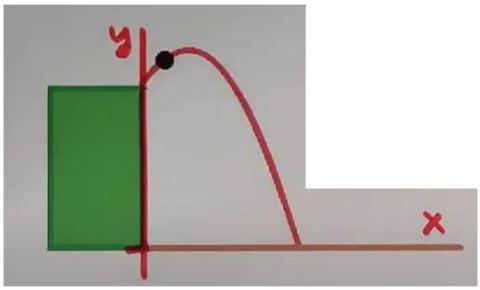
d) Representa en la misma gráfica las dos tarifas

e) Analiza cual es la tarifa más económica. según los minutos que hables.

Nº5.- Lanzamos una pelota desde una posición elevada y sigue una trayectoria (en metros) de ecuación

$$y = f(x) = -x^2 + 2x + 3$$

a) Hállese la altura inicial
b) Calcúlese la altura máxima que alcanza
c) Distancia al bloque cuando llega al suelo



SUERTE JÓVENES

Libro de Soluciones

Matemáticas: Funciones

Nivel: 3º ESO

Resoluciones paso a paso, razonadas y con rigor

Curso académico 2026

Índice general

1. Examen de Funciones (19/03/2025) — 3º ESO **1**
Enunciado . . . 1
1.1. Soluciones . . . 2
Soluciones . . . 2
1.2. Ejercicio 1 . . . 2
Ejercicio 1 . . . 2
1.3. Ejercicio 2 . . . 7
Ejercicio 2 . . . 7
1.4. Ejercicio 3 . . . 9
Ejercicio 3 . . . 9
1.5. Ejercicio 4 . . . 12
Ejercicio 4 . . . 12
1.6. Ejercicio 5 . . . 15
Ejercicio 5 . . . 15

Capítulo 1

Examen de Funciones (19/03/2025) — 3º ESO

Enunciado

Ejercicio 1. Desde su casa hasta la parada del autobús, María tarda 5 minutos (la parada está a 200 m de su casa); espera durante 10 minutos, y al ver que el autobús tarda más de lo normal, decide ir andando a su lugar de trabajo, situado a 1 km de su casa. Al cuarto de hora de estar andando y a 300 m de su trabajo, se da cuenta de que el teléfono móvil se le ha olvidado en casa y regresa a buscarlo, tardando 10 minutos en llegar.

(a) Representa la gráfica distancia–tiempo a su casa.

(b) ¿Cuál ha sido la distancia más lejana a la que ha llegado? ¿Cuánto tiempo tarda en llegar a esa distancia?

(c) ¿Cuánto tiempo ha tardado en todo el recorrido?

(d) ¿En qué momento del trayecto su velocidad ha sido mayor?

Ejercicio 2. Calcúlese la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-2, 2)$, $B(-3, -1)$ y represéntala gráficamente.

Ejercicio 3. Dada la función $y = f(x) = -x^2 + 4x + 5$:

(a) Indica qué tipo de función es.

(b) Calcúlese su vértice.

(c) Calcula los puntos de corte con los ejes.

(d) Represéntala gráficamente.

Ejercicio 4. En dos tarifas de móvil te ofrecen estas condiciones:

(a) Paga 4 céntimos por cada minuto que hables.

(b) Paga 20 céntimos por establecimiento de llamada y 3 céntimos por cada minuto hablado.

(a) Si las dos tarifas son lineales, encuentra la función que representa cada una.

(b) ¿Cuál es la pendiente de la recta asociada a cada tarifa? ¿Cuál va a crecer más rápido?

(c) ¿Cuánto cuesta el primer minuto en cada una de ellas?

(d) Representa en la misma gráfica las dos tarifas.

(e) Analiza cuál es la tarifa más económica según los minutos que hables.

Ejercicio 5. Lanzamos una pelota desde una posición elevada y sigue una trayectoria (en metros) de ecuación

$$y = f(x) = -x^2 + 2x + 3.$$

(a) Hállese la altura inicial.

(b) Calcúlese la altura máxima que alcanza.

(c) Distancia al bloque cuando llega al suelo.

1.1. Soluciones

1.2. Ejercicio 1

Planteamiento y elección de variables

El enunciado describe un movimiento por tramos: caminar, esperar, caminar, y volver a casa. Se pide la **gráfica distancia–tiempo a su casa**, es decir:

- Eje horizontal: tiempo t (en minutos) desde que sale de casa.
- Eje vertical: distancia $d(t)$ (en metros) desde su casa.

Definición 1.1 (Función distancia–tiempo)**.** *Una función distancia–tiempo es una aplicación*

$$d: \ [0,T] \to [0,\infty), \qquad t \mapsto d(t),$$

donde $d(t)$ representa la distancia al punto de referencia (en este caso, la casa) en el instante t.

Extracción de datos del enunciado

Tramo 1: De casa a la parada

La parada está a 200 m, y tarda 5 min.

$$t = 0 \Rightarrow d(0) = 0, \qquad t = 5 \Rightarrow d(5) = 200.$$

Tramo 2: Espera en la parada

Espera 10 min sin moverse, por tanto la distancia se mantiene constante:

$$\text{desde } t = 5 \text{ hasta } t = 15, \qquad d(t) = 200.$$

Tramo 3: Camina hacia el trabajo

El trabajo está a 1 km = 1000 m de su casa. Camina durante *un cuarto de hora* = 15 min y en ese instante está a 300 m del trabajo. Estar a 300 m del trabajo significa que le faltan 300 m para llegar. Por tanto su distancia a casa en ese instante es:

$$d = 1000 - 300 = 700 \text{ m}.$$

Ese instante ocurre tras 15 min de caminar *a partir de* $t = 15$ (cuando termina de esperar):

$$t = 15 + 15 = 30 \Rightarrow d(30) = 700.$$

Tramo 4: Vuelve a casa

Desde $t = 30$ regresa a casa y tarda 10 min en llegar:

$$t = 40 \Rightarrow d(40) = 0.$$

(a) Representación de la gráfica

La trayectoria temporal queda definida por los puntos clave:

$$(0,0),\ (5,200),\ (15,200),\ (30,700),\ (40,0).$$

Justificación de la forma de la gráfica:

- En cada tramo de movimiento a velocidad constante (caminar), $d(t)$ es lineal (recta) porque la distancia cambia a ritmo constante.
- En la espera, $d(t)$ es constante (segmento horizontal), porque no se desplaza.

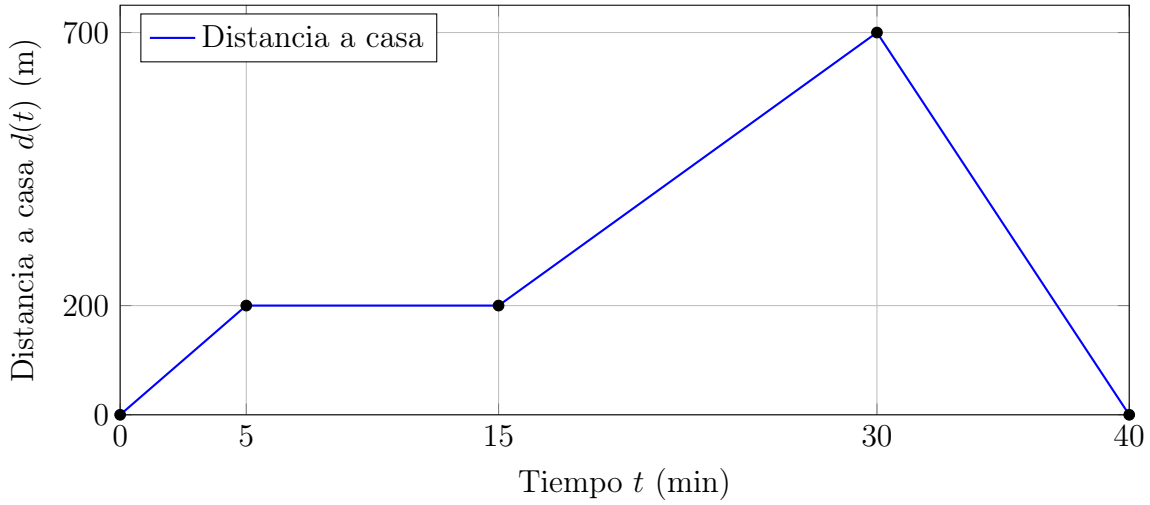


Figura 1. Gráfica distancia–tiempo respecto a la casa.

Construcción analítica por tramos (opcional, pero rigurosa)

Si queremos expresar $d(t)$ como función a trozos, debemos calcular las pendientes (velocidades) en cada tramo.

Tramo 1: $0 \le t \le 5$

Recta por $(0,0)$ y $(5,200)$:

$$\text{pendiente } m_1 = \frac{200-0}{5-0} = 40 \text{ m/min}.$$

Como pasa por el origen, la ecuación es:

$$d(t) = 40t, \qquad 0 \le t \le 5.$$

Tramo 2: $5 \le t \le 15$

Constante:

$$d(t) = 200, \qquad 5 \le t \le 15.$$

Tramo 3: $15 \le t \le 30$

Recta por $(15, 200)$ y $(30, 700)$:

$$m_3 = \frac{700 - 200}{30 - 15} = \frac{500}{15} = \frac{100}{3} \text{ m/min.}$$

Ecuación punto–pendiente:

$$d(t) - 200 = \frac{100}{3}(t - 15).$$

Despejamos:

$$d(t) = 200 + \frac{100}{3}(t - 15), \qquad 15 \le t \le 30.$$

Podemos simplificar sin perder rigor:

$$\frac{100}{3}(t - 15) = \frac{100}{3}t - \frac{100}{3} \cdot 15 = \frac{100}{3}t - 500.$$

Entonces:

$$d(t) = 200 + \left(\frac{100}{3}t - 500\right) = \frac{100}{3}t - 300, \qquad 15 \le t \le 30.$$

Comprobación rápida:

$$t = 15 \Rightarrow d(15) = \frac{100}{3} \cdot 15 - 300 = 500 - 300 = 200,$$

$$t = 30 \Rightarrow d(30) = \frac{100}{3} \cdot 30 - 300 = 1000 - 300 = 700.$$

Correcto.

Tramo 4: $30 \le t \le 40$

Recta por $(30, 700)$ y $(40, 0)$:

$$m_4 = \frac{0 - 700}{40 - 30} = \frac{-700}{10} = -70 \text{ m/min.}$$

Ecuación punto–pendiente:

$$d(t) - 700 = -70(t - 30).$$

Despejando:

$$d(t) = 700 - 70(t - 30), \qquad 30 \leq t \leq 40.$$

Si expandimos:

$$-70(t - 30) = -70t + 2100,$$

$$d(t) = 700 - 70t + 2100 = 2800 - 70t.$$

Comprobación:

$$t = 30 \Rightarrow d(30) = 2800 - 2100 = 700, \qquad t = 40 \Rightarrow d(40) = 2800 - 2800 = 0.$$

Correcto.

Conclusión:

$$d(t) = \begin{cases} 40t, & 0 \leq t \leq 5, \\ 200, & 5 \leq t \leq 15, \\ \dfrac{100}{3}t - 300, & 15 \leq t \leq 30, \\ 2800 - 70t, & 30 \leq t \leq 40. \end{cases}$$

(b) Distancia más lejana y tiempo en alcanzarla

La distancia máxima a casa se observa en el punto más alto de la gráfica. Como en el tramo 3 $d(t)$ aumenta y en el tramo 4 disminuye, el máximo se produce en el instante de cambio $t = 30$:

$$d_{\text{máx}} = d(30) = 700 \text{ m}.$$

Distancia más lejana: 700 m, alcanzada a los 30 min.

(c) Tiempo total de todo el recorrido

El recorrido empieza en $t = 0$ y termina cuando llega a casa de nuevo en $t = 40$:

Tiempo total: 40 minutos.

(d) Momento de mayor velocidad

En una gráfica distancia–tiempo, la **velocidad (en valor absoluto)** se corresponde con el **valor absoluto de la pendiente**:

$$v = \left|\frac{\Delta d}{\Delta t}\right|.$$

Calculamos las velocidades por tramo:

- Tramo 1: $v_1 = 40$ m/min.
- Tramo 2 (espera): $v_2 = 0$ m/min.
- Tramo 3: $v_3 = \left|\frac{100}{3}\right| \approx 33.33$ m/min.
- Tramo 4 (vuelta): $v_4 = |-70| = 70$ m/min.

La mayor es 70 m/min, correspondiente al tramo 4 (de $t = 30$ a $t = 40$).

La velocidad máxima ocurre al regresar a casa (entre 30 y 40 min).

Observación 1.1 (Interpretación física)**.** *En el regreso, María va más rápido que en la ida a la parada o hacia el trabajo. Matemáticamente, esto se refleja en una recta más "empinada" (mayor pendiente en valor absoluto).*

1.3. Ejercicio 2

Planteamiento y método elegido

Buscamos la recta que pasa por dos puntos:

$$A(-2, 2), \qquad B(-3, -1).$$

Método elegido: forma punto–pendiente. Se elige porque con dos puntos es directo:

1. Calculamos la pendiente m.
2. Usamos la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$ con uno de los puntos.

Paso 1: Pendiente

Definición 1.2 (Pendiente de una recta)**.** *Dados dos puntos distintos* (x_1, y_1) *y* (x_2, y_2)*, la pendiente es*

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

siempre que $x_2 \neq x_1$*.*

Sustituimos:

$$m = \frac{-1 - 2}{-3 - (-2)} = \frac{-3}{-1} = 3.$$

$$\boxed{m = 3.}$$

Paso 2: Ecuación de la recta

Usamos el punto $A(-2, 2)$:

$$y - 2 = 3(x - (-2)) = 3(x + 2).$$

Expandimos:

$$3(x + 2) = 3x + 6.$$

Entonces:

$$y - 2 = 3x + 6.$$

Sumamos 2 a ambos lados:

$$y = 3x + 8.$$

$$\boxed{y = 3x + 8.}$$

Comprobación con el punto B

Sustituimos $x = -3$:

$$y = 3(-3) + 8 = -9 + 8 = -1,$$

que coincide con $B(-3, -1)$. Por tanto, la recta es correcta.

Representación gráfica

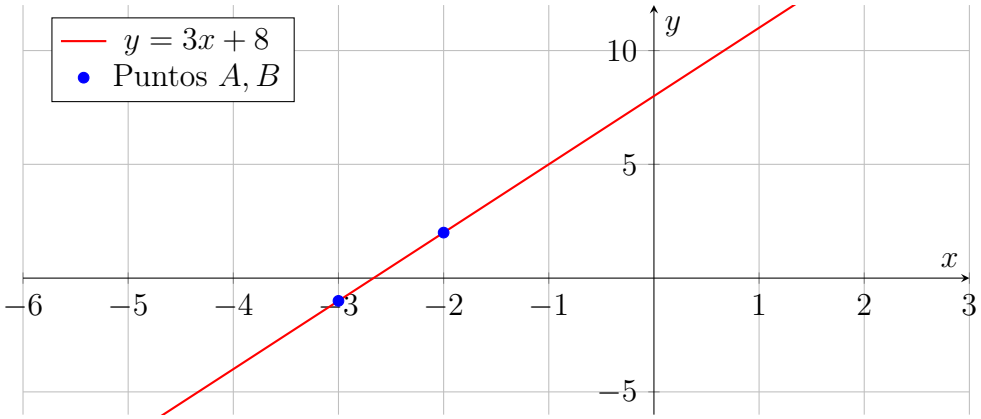


Figura 2. Recta que pasa por $A(-2, 2)$ y $B(-3, -1)$.

1.4. Ejercicio 3

Función dada

$$y = f(x) = -x^2 + 4x + 5.$$

(a) Tipo de función

Definición 1.3 (Función cuadrática)**.** *Una función polinómica de grado 2 tiene la forma*

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0,$$

y se denomina función cuadrática*. Su gráfica es una parábola.*

Aquí:

$$a = -1, \quad b = 4, \quad c = 5, \quad a \neq 0.$$

Por tanto:

Es una función cuadrática (parábola) cóncava hacia abajo (porque $a < 0$).

(b) Vértice

Método elegido: completar el cuadrado. Se elige porque:

- Da el vértice de forma exacta y muestra claramente la altura máxima/mínima.

- Produce la forma canónica $a(x-h)^2+k$.

Partimos de:

$$f(x) = -x^2 + 4x + 5.$$

Factorizamos -1 en los términos cuadrático y lineal:

$$f(x) = -(x^2 - 4x) + 5.$$

Ahora completamos el cuadrado en $x^2 - 4x$:

$$x^2 - 4x = x^2 - 4x + 4 - 4 = (x-2)^2 - 4.$$

Sustituimos:

$$f(x) = -\big((x-2)^2 - 4\big) + 5.$$

Distribuimos el signo menos:

$$f(x) = -(x-2)^2 + 4 + 5 = -(x-2)^2 + 9.$$

En forma canónica:

$$f(x) = -(x-2)^2 + 9.$$

Por tanto el vértice es:

$$V = (2, 9).$$

$$\boxed{V(2,9).}$$

(c) Cortes con los ejes

Corte con el eje y

El eje y corresponde a $x = 0$:

$$f(0) = -(0)^2 + 4 \cdot 0 + 5 = 5.$$

Punto:

$$\boxed{(0,5).}$$

Cortes con el eje x

El eje x corresponde a $y = 0$, es decir resolver:

$$-x^2 + 4x + 5 = 0.$$

Multiplicamos por -1 (operación equivalente, no cambia las soluciones):

$$x^2 - 4x - 5 = 0.$$

Factorizamos si es posible. Buscamos dos números cuyo producto sea -5 y suma -4:

$$-5 \text{ y } 1 \quad \Rightarrow \quad (-5) \cdot 1 = -5, \quad (-5) + 1 = -4.$$

Por tanto:

$$x^2 - 4x - 5 = (x - 5)(x + 1).$$

Igualamos a cero:

$$(x - 5)(x + 1) = 0.$$

Usamos la propiedad del producto nulo:

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ o } b = 0.$$

Entonces:

$$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5, \qquad x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1.$$

Puntos de corte con el eje x:

$$\boxed{(5, 0) \text{ y } (-1, 0).}$$

(d) Representación gráfica

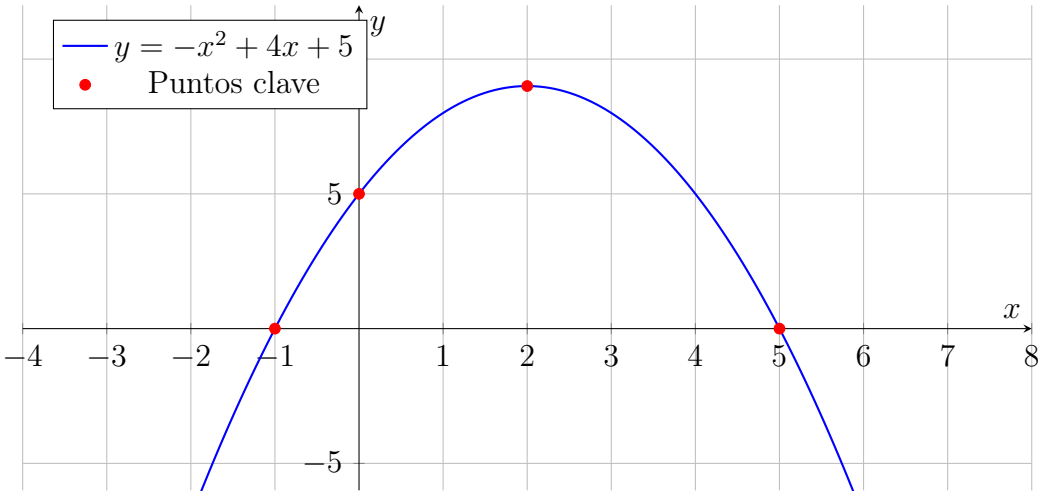


Figura 3. Parábola $y = -x^2 + 4x + 5$ con vértice e intersecciones.

Observación 1.2 (Lectura cualitativa)**.** *Como $a = -1 < 0$, la parábola abre hacia abajo y el vértice representa un* máximo. *Ese máximo es 9 y ocurre en $x = 2$.*

1.5. Ejercicio 4

Planteamiento

Sea m el número de minutos hablados en una llamada (supondremos $m \geq 0$). El coste se expresa en céntimos para evitar decimales.

(a) Funciones lineales de cada tarifa

Definición 1.4 (Función afín)**.** *Una función afín (recta) es de la forma*

$$C(m) = am + b,$$

donde a es la pendiente y b es la ordenada en el origen.

Tarifa (a)

Paga 4 céntimos por minuto, sin coste fijo:

$$C_a(m) = 4m.$$

$$\boxed{C_a(m) = 4m \text{ (céntimos).}}$$

Tarifa (b)

Paga 20 céntimos de establecimiento, más 3 céntimos por minuto:

$$C_b(m) = 20 + 3m.$$

$$\boxed{C_b(m) = 20 + 3m \text{ (céntimos).}}$$

(b) Pendientes y comparación de crecimiento

La pendiente es el coeficiente de m.

$$\text{Pendiente de } C_a : 4, \qquad \text{pendiente de } C_b : 3.$$

$$\boxed{\text{Pendientes: 4 y 3.}}$$

Como $4 > 3$, la tarifa (a) *crece más rápido* con los minutos:

$$\boxed{\text{La tarifa (a) aumenta más rápido por minuto.}}$$

(c) Coste del primer minuto

Aquí es crucial interpretar "primer minuto". En problemas de ESO suele significar "coste de una llamada de 1 minuto".

Evaluamos en $m = 1$:

$$C_a(1) = 4 \cdot 1 = 4 \text{ céntimos.}$$

$$C_b(1) = 20 + 3 \cdot 1 = 23 \text{ céntimos.}$$

$$\boxed{\text{1 minuto: tarifa (a) 4 cts; tarifa (b) 23 cts.}}$$

(d) Representación conjunta

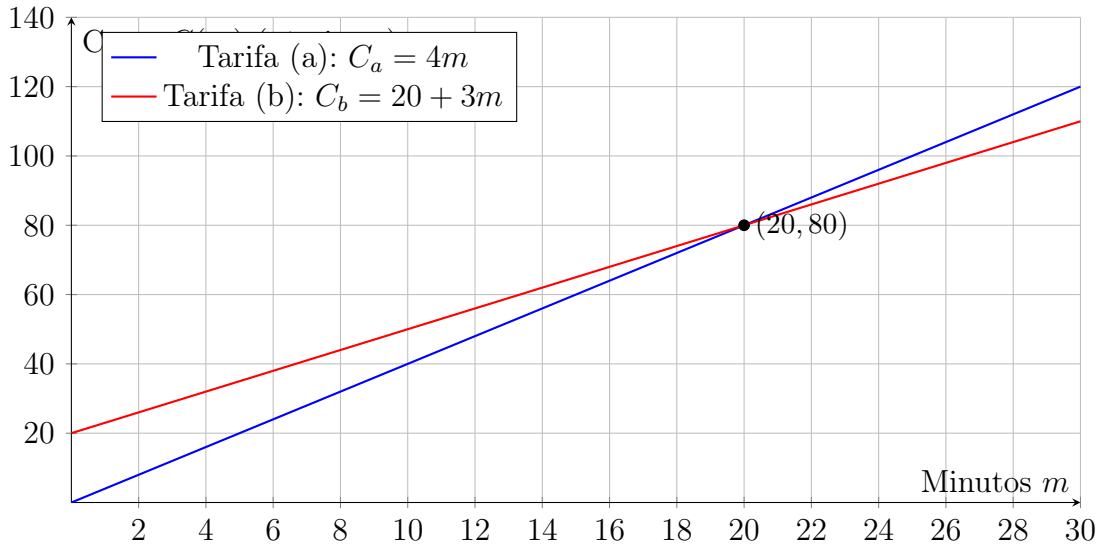


Figura 4. Comparación de tarifas (coste en función de minutos).

(e) ¿Qué tarifa es más económica según los minutos?

Comparamos:

$$C_a(m) \leq C_b(m) \quad \Longleftrightarrow \quad 4m \leq 20 + 3m.$$

Restamos $3m$ en ambos lados:

$$4m - 3m \leq 20$$

$$m \leq 20.$$

Interpretación:

- Si $m < 20$, entonces $C_a(m) < C_b(m)$: tarifa (a) es más barata.
- Si $m = 20$, entonces $C_a(20) = C_b(20)$: cuestan igual.
- Si $m > 20$, entonces $C_a(m) > C_b(m)$: tarifa (b) es más barata.

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 \leq m < 20 \Rightarrow \text{más barata (a)} \\ m = 20 \Rightarrow \text{iguales} \\ m > 20 \Rightarrow \text{más barata (b)} \end{array}}$$

Observación 1.3 (Interpretación económica)**.** *La tarifa (b) tiene un coste fijo inicial alto (20 cts), pero luego crece más lentamente. Por eso compensa cuando se habla mucho tiempo.*

1.6. Ejercicio 5

Función de la trayectoria

$$y = f(x) = -x^2 + 2x + 3.$$

Interpretación típica (cinemática simplificada):

- x representa la distancia horizontal (en metros).
- y representa la altura (en metros).

Dibujo representativo de la trayectoria

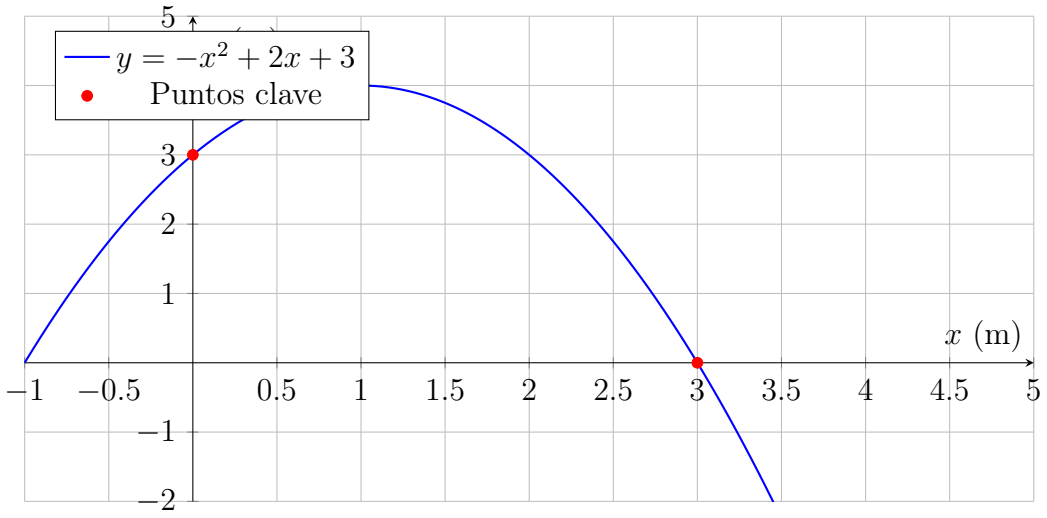


Figura 5. Trayectoria parabólica de la pelota.

(a) Altura inicial

La altura inicial corresponde a $x = 0$:

$$f(0) = -(0)^2 + 2 \cdot 0 + 3 = 3.$$

Altura inicial: 3 m.

(b) Altura máxima

Método elegido: completar el cuadrado.

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3 = -(x^2 - 2x) + 3.$$

Completamos cuadrado:

$$x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1.$$

Sustituimos:

$$f(x) = -\big((x-1)^2 - 1\big) + 3 = -(x-1)^2 + 1 + 3 = -(x-1)^2 + 4.$$

La forma $-(x-1)^2 + 4$ muestra un máximo en $x = 1$:

$$f(1) = -(1-1)^2 + 4 = 4.$$

Altura máxima: 4 m, alcanzada en $x = 1$ m.

(c) Distancia horizontal cuando llega al suelo

"Llega al suelo" significa $y = 0$:

$$-x^2 + 2x + 3 = 0.$$

Multiplicamos por -1:

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Factorizamos:

$$x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1),$$

porque:

$$(x-3)(x+1) = x^2 + x - 3x - 3 = x^2 - 2x - 3.$$

Resolvemos:

$$(x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x - 3 = 0 \text{ o } x + 1 = 0.$$

$$x = 3 \quad \text{o} \quad x = -1.$$

En el contexto físico, la distancia horizontal no negativa es $x = 3$.

$$\boxed{\text{La pelota toca el suelo a } x = 3 \text{ m (desde el punto de lanzamiento).}}$$

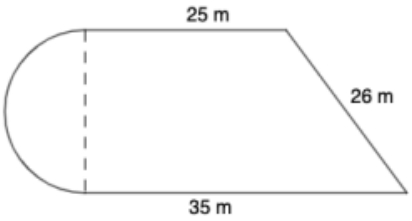
Observación 1.4 (Raíz negativa)**.** *La solución $x = -1$ es matemáticamente correcta, pero no tiene sentido físico si x representa distancia horizontal recorrida desde el lanzamiento.*

Junta de Castilla y León
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA

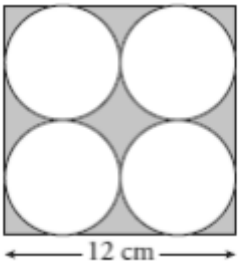
MATEMÁTICAS 14/05/2025

EXAMEN GEOMETRÍA 3º B ESO

Nº1.-Dada la siguiente figura, formada por un trapecio rectángulo y un semicírculo, calcúlese el perímetro y el área

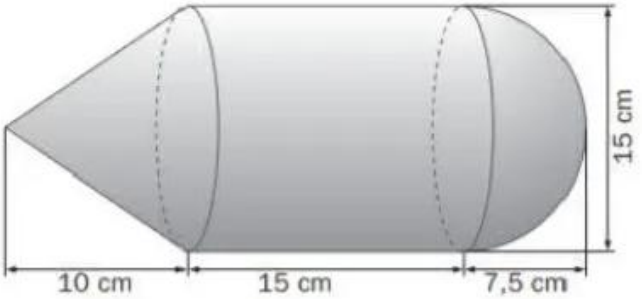


Nº2.- En una pastelería hemos comprado 4 pasteles redondos y no los han guardado en una caja cuadrada de 12 cm de lado, como se muestra en la figura. Los pasteles caben justos y no se pueden mover, es decir, son tangentes entre sí y a la caja. ¿Qué superficie de la caja queda sin ocupar?



Nº3.- Calcúlese el perímetro y el área de un hexágono regular de apotema $\sqrt{3}$ cm

Nº4.- Calcúlese el área y el volumen del siguiente cuerpo geométrico:



Nº5.- Calcúlese el área total y el volumen de una pirámide de base cuadrada de 12 cm de altura de la pirámide y 13 cm la altura de la cara lateral

SUERTE JÓVENES

Soluciones completas en LaTeX

Matemáticas – Examen de Geometría (3º B ESO)
Fecha del examen: 14/05/2025

Redacción técnica y solución: *Asistente matemático*

16 de febrero de 2026

Nota pedagógica. Este documento desarrolla cada ejercicio con rigor, justificando cada paso y recordando las fórmulas y resultados necesarios.

Convención. Usaremos π para el número pi y expresaremos resultados exactos (con π) y, cuando sea útil, también aproximaciones decimales.

Índice

1. Examen de Geometría (3º B ESO) – 14/05/2025 **3**
1.1. Ejercicio 1: Trapecio rectángulo unido a un semicírculo 3
1.2. Ejercicio 2: Cuatro círculos tangentes en una caja cuadrada 7
1.3. Ejercicio 3: Hexágono regular de apotema $\sqrt{3}\,\text{cm}$ 9
1.4. Ejercicio 4: Área y volumen de un sólido compuesto (cono + cilindro + semiesfera) 11
1.5. Ejercicio 5: Pirámide de base cuadrada (área total y volumen) 16

Fin del documento **18**

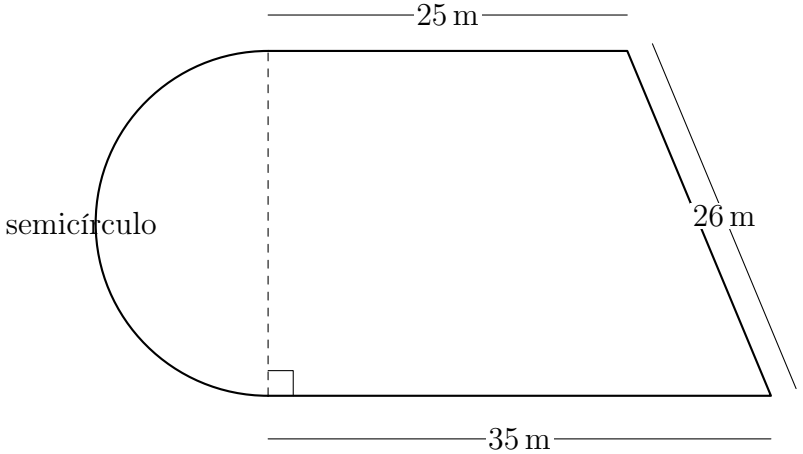
1. Examen de Geometría (3º B ESO) – 14/05/2025

1.1. Ejercicio 1: Trapecio rectángulo unido a un semicírculo

Enunciado

Dada la figura formada por un trapecio rectángulo y un semicírculo, calcúlese el perímetro y el área.

Dibujo representativo (no a escala)



Solución

1. Interpretación geométrica y datos relevantes. La figura es la unión de:

- Un **trapecio rectángulo**, con bases paralelas de longitudes 25 m (base menor) y 35 m (base mayor).
- Un **semicírculo** cuyo diámetro coincide con el lado perpendicular (altura) del trapecio.

Además, el lado oblicuo (no perpendicular) del trapecio mide 26 m.

2. Cálculo de la altura del trapecio (y del diámetro del semicírculo). En un trapecio rectángulo, la diferencia entre las bases se proyecta horizontalmente sobre el lado oblicuo.

- Diferencia de bases:
$$35 - 25 = 10 \text{ m}.$$
- El lado oblicuo (26 m) junto con la altura h y ese desplazamiento horizontal (10 m) forman un triángulo rectángulo.

Teorema 1.1 (Teorema de Pitágoras)**.** En un triángulo rectángulo con catetos a, b e hipotenusa c, se cumple:
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Aplicando Pitágoras:

$$h^2 + 10^2 = 26^2.$$

Calculamos paso a paso:

$$10^2 = 100, \qquad 26^2 = 676.$$

Por tanto:

$$h^2 = 676 - 100 = 576.$$

Como $h > 0$ (una altura es positiva),

$$h = \sqrt{576} = 24 \text{ m}.$$

3. Radio del semicírculo. El semicírculo tiene como **diámetro** la altura del trapecio:

$$d = 24 \text{ m}.$$

El radio es la mitad del diámetro:

$$r = \frac{d}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ m}.$$

A) Perímetro

4. Identificación de los tramos del contorno exterior. El **perímetro** de la figura compuesta se obtiene sumando los tramos del borde exterior:

- Base mayor del trapecio: 35.
- Base menor del trapecio: 25.
- Lado oblicuo del trapecio: 26.
- Arco del semicírculo (media circunferencia) de radio $r = 12$.

Advertencia. **Error común:** incluir el diámetro del semicírculo en el perímetro. No debe incluirse porque ese diámetro es un *segmento interior compartido* entre el trapecio y el semicírculo; no pertenece al contorno exterior.

5. Longitud del arco del semicírculo.

Definición 1.1 (Longitud de circunferencia)**.** La longitud de una circunferencia de radio r es:

$$L = 2\pi r.$$

La longitud del **arco** de un **semicírculo** es la mitad:

$$L_{\text{semi}} = \frac{1}{2}(2\pi r) = \pi r.$$

Sustituyendo $r = 12$:

$$L_{\text{semi}} = \pi \cdot 12 = 12\pi.$$

6. Suma total del perímetro.

$$\text{Permetro} = 35 + 25 + 26 + 12\pi.$$

Sumamos los términos numéricos:

$$35 + 25 = 60, \qquad 60 + 26 = 86.$$

Por tanto:

$$\boxed{\text{Permetro} = 86 + 12\pi \text{ m}}.$$

7. Aproximación decimal (opcional). Usando $\pi \approx 3{,}1416$:

$$12\pi \approx 12 \cdot 3{,}1416 = 37{,}6992.$$

Entonces:

$$\text{Permetro} \approx 86 + 37{,}6992 = 123{,}6992 \text{ m}.$$

$$\boxed{\text{Permetro} \approx 123{,}70 \text{ m}}.$$

B) Área

8. Área del trapecio.

Definición 1.2 (Área de un trapecio)**.** Si un trapecio tiene bases paralelas B y b y altura h, su área es:

$$\text{rea}_{\text{trap}} = \frac{(B + b)}{2}\, h.$$

En nuestro caso:

$$B = 35, \quad b = 25, \quad h = 24.$$

Sustituyendo:

$$\text{rea}_{\text{trap}} = \frac{(35 + 25)}{2} \cdot 24.$$

Primero sumamos:

$$35 + 25 = 60.$$

Luego dividimos entre 2:

$$\frac{60}{2} = 30.$$

Finalmente multiplicamos:

$$30 \cdot 24 = 720.$$

Por tanto:

$$\text{rea}_{\text{trap}} = 720 \text{ m}^2.$$

9. Área del semicírculo.

Definición 1.3 (Área de un círculo)**.** El área de un círculo de radio r es:

$$\text{rea}_{\text{circ}} = \pi r^2.$$

El área de un **semicírculo** es la mitad:

$$\text{rea}_{\text{semi}} = \frac{1}{2}\pi r^2.$$

Con $r = 12$:

$$\text{rea}_{\text{semi}} = \frac{1}{2}\pi(12)^2.$$

Calculamos $(12)^2$:

$$12^2 = 144.$$

Entonces:

$$\text{rea}_{\text{semi}} = \frac{1}{2}\pi \cdot 144 = 72\pi \text{ m}^2.$$

10. Área total. La figura es una unión sin solapamiento (comparten solo un borde), por tanto:

$$\text{rea}_{\text{total}} = \text{rea}_{\text{trap}} + \text{rea}_{\text{semi}} = 720 + 72\pi.$$

$$\boxed{\text{rea}_{\text{total}} = 720 + 72\pi \text{ m}^2}.$$

11. Aproximación decimal (opcional).

$$72\pi \approx 72 \cdot 3{,}1416 = 226{,}1952.$$

Por tanto:

$$\text{rea}_{\text{total}} \approx 720 + 226{,}1952 = 946{,}1952 \text{ m}^2.$$

$$\boxed{\text{rea}_{\text{total}} \approx 946{,}20 \text{ m}^2}.$$

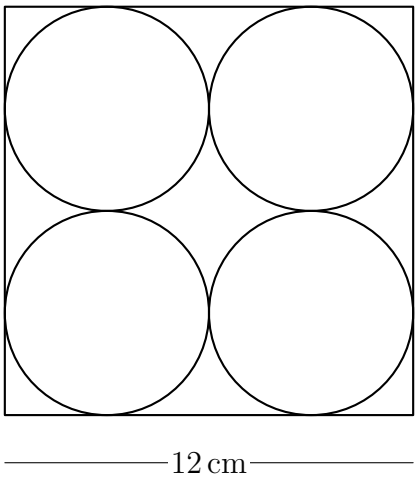
Observación. Se ha elegido el método de **descomposición** en figuras elementales (trapecio y semicírculo) porque permite aplicar fórmulas estándar con máxima claridad y mínimo riesgo de error.

1.2. Ejercicio 2: Cuatro círculos tangentes en una caja cuadrada

Enunciado

En una pastelería hemos comprado 4 pasteles redondos y los han guardado en una caja cuadrada de 12 cm de lado. Los pasteles caben justos: son tangentes entre sí y a la caja. ¿Qué superficie de la caja queda sin ocupar?

Dibujo representativo (no a escala)



Solución

1. Estrategia. La superficie sin ocupar es:

$$(\text{área del cuadrado}) - (\text{área ocupada por los 4 círculos}).$$

Este método es el natural porque la región ocupada es exactamente la unión de los cuatro discos, y el resto es el complemento dentro del cuadrado.

A) Determinar el radio de cada pastel

2. Colocación geométrica. Como hay 4 círculos iguales en disposición 2×2, tangentes entre sí y a los lados del cuadrado, el lado del cuadrado equivale a **dos diámetros**:

$$12 = 2 \cdot (2r) = 4r.$$

Justificación:

- En una fila caben exactamente dos círculos tangentes.
- El ancho total es diámetro + diámetro $= 2r + 2r = 4r$.
- Ese ancho coincide con el lado del cuadrado, 12.

Entonces:

$$4r = 12 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{12}{4} = 3 \text{ cm}.$$

B) Áreas

3. Área del cuadrado.

Definición 1.4 (Área de un cuadrado)**.** Si un cuadrado tiene lado L, entonces:

$$\text{rea}_{\square} = L^2.$$

Con $L = 12$:

$$\text{rea}_{\square} = 12^2 = 144 \text{ cm}^2.$$

4. Área de un círculo (un pastel).

$$\text{rea}_{\circ} = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2.$$

Como $3^2 = 9$:

$$\text{rea}_{\circ} = 9\pi \text{ cm}^2.$$

5. Área total de los cuatro pasteles.

$$\text{rea}_{4\circ} = 4 \cdot \text{rea}_{\circ} = 4 \cdot 9\pi = 36\pi \text{ cm}^2.$$

C) Superficie sin ocupar

6. Resta final.

$$\text{rea}_{\text{libre}} = \text{rea}_{\square} - \text{rea}_{4\circ} = 144 - 36\pi.$$

$$\boxed{\text{rea}_{\text{libre}} = 144 - 36\pi \text{ cm}^2}.$$

7. Aproximación decimal (opcional).

$$36\pi \approx 36 \cdot 3{,}1416 = 113{,}0976.$$

Entonces:

$$\text{rea}_{\text{libre}} \approx 144 - 113{,}0976 = 30{,}9024 \text{ cm}^2.$$

$$\boxed{\text{rea}_{\text{libre}} \approx 30{,}90 \text{ cm}^2}.$$

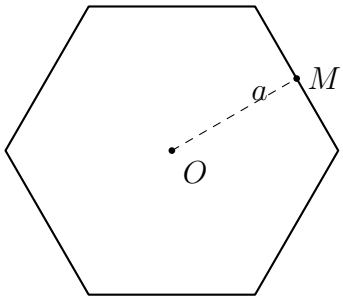
Advertencia. **Error común:** suponer que el radio es 6 cm por confundir lado con diámetro. El lado contiene *dos diámetros*, no uno.

1.3. Ejercicio 3: Hexágono regular de apotema $\sqrt{3}\,\text{cm}$

Enunciado

Calcúlese el perímetro y el área de un hexágono regular de apotema $\sqrt{3}$ cm.

Dibujo representativo (no a escala)



Solución

1. Definiciones y hechos geométricos.

Definición 1.5 (Polígono regular y apotema)**.** Un polígono regular es aquel que tiene todos sus lados y ángulos iguales. La **apotema** a de un polígono regular es la distancia del centro a cualquiera de sus lados (medida perpendicular).

En un hexágono regular:

- Tiene $n = 6$ lados iguales de longitud s.
- El perímetro es $P = 6s$.
- Su área puede calcularse por:

$$\text{rea} = \frac{P \cdot a}{2}.$$

2. Relación entre apotema y lado en un hexágono regular. Dividimos el hexágono en 6 triángulos isósceles congruentes, cada uno con vértice en el centro. En un hexágono regular, el ángulo central es:

$$\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ.$$

Tomando uno de esos triángulos y trazando la apotema hacia un lado, se parte el triángulo en dos triángulos rectángulos con ángulo agudo de 30° y cateto adyacente a.

Hay una relación trigonométrica estándar (o derivable por Pitágoras en un triángulo 30°–60°–90°):

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2}\, s.$$

Justificación breve y clásica: en un triángulo equilátero de lado s, la altura vale $\frac{\sqrt{3}}{2}s$. En un hexágono regular, el triángulo central correspondiente es equilátero (radio circunscrito = lado) y la apotema coincide con esa altura al lado.

3. Sustitución de la apotema dada. Se da:

$$a = \sqrt{3} \text{ cm}.$$

Entonces:

$$\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, s.$$

Resolvemos para s con pasos explícitos:

1. Multiplicamos ambos lados por 2:

$$2\sqrt{3} = \sqrt{3}\, s.$$

2. Dividimos ambos lados entre $\sqrt{3}$ (es válido porque $\sqrt{3} \neq 0$):

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = s.$$

3. Simplificamos $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$:

$$s = 2.$$

Por tanto:

$$\boxed{s = 2 \text{ cm}}.$$

A) Perímetro

4. Fórmula del perímetro.

$$P = 6s = 6 \cdot 2 = 12.$$

$$\boxed{P = 12 \text{ cm}}.$$

B) Área

5. Fórmula del área en función de perímetro y apotema.

$$\text{rea} = \frac{P \cdot a}{2}.$$

Sustituyendo $P = 12$ y $a = \sqrt{3}$:

$$\text{rea} = \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{2}.$$

Dividimos 12 entre 2:

$$\text{rea} = 6\sqrt{3}.$$

$$\boxed{\text{rea} = 6\sqrt{3} \text{ cm}^2}.$$

Observación. Se ha elegido el método del **apotema** porque el dato proporcionado es precisamente a, y la fórmula $\text{rea} = \frac{Pa}{2}$ es directa, estándar y minimiza cálculos intermedios.

1.4. Ejercicio 4: Área y volumen de un sólido compuesto (cono + cilindro + semiesfera)

Enunciado

Calcúlese el área y el volumen del cuerpo geométrico mostrado.

Interpretación de la figura y dibujo representativo

La figura corresponde a un sólido de revolución compuesto por:

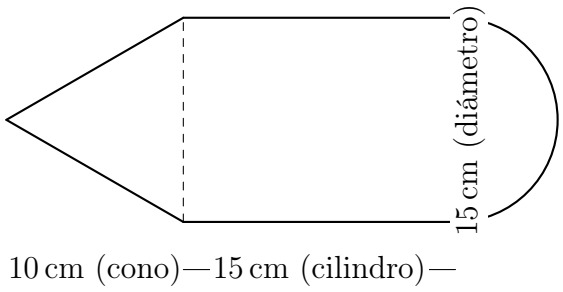
- Un **cono recto** de altura 10 cm.
- Un **cilindro** de longitud (altura) 15 cm.
- Una **semiesfera** en el extremo derecho.

El diámetro común de la parte cilíndrica (y, por tanto, de la base del cono y de la semiesfera) es 15 cm; luego el radio común es:

$$r = \frac{15}{2} = 7{,}5\,\text{cm}.$$

La semiesfera tiene ese mismo radio, y su "altura" axial es 7,5 cm, coherente con la medida indicada.

Dibujo representativo (esquema)



Solución

1. Datos del problema.

$$r = 7{,}5\ \text{cm}, \qquad h_{\text{cono}} = 10\ \text{cm}, \qquad h_{\text{cil}} = 15\ \text{cm}.$$

2. Qué se entiende por "área del sólido". En geometría de sólidos, cuando se pide el **área** de un cuerpo como este, se entiende el **área de la superficie exterior**. Por tanto:

- No se incluyen las bases circulares *internas* que quedan pegadas entre piezas (cono–cilindro y cilindro–semiesfera).
- Sí se incluye el área lateral del cono, el área lateral del cilindro y el área curva de la semiesfera.

A) Área total exterior

3. Área lateral del cono.

Definición 1.6 (Generatriz del cono y área lateral)**.** En un cono recto de radio de base r y altura h, la **generatriz** (apotema lateral) g es:

$$g = \sqrt{r^2 + h^2}.$$

El área lateral es:

$$\text{rea}_{\text{lat, cono}} = \pi r g.$$

Calculamos g:

$$g = \sqrt{(7{,}5)^2 + (10)^2}.$$

Primero los cuadrados:

$$(7{,}5)^2 = 56{,}25, \qquad 10^2 = 100.$$

Sumamos:

$$56{,}25 + 100 = 156{,}25.$$

Raíz cuadrada:

$$\sqrt{156{,}25} = 12{,}5$$

(porque $12{,}5^2 = 156{,}25$). Por tanto:

$$g = 12{,}5 \text{ cm}.$$

Ahora el área lateral:

$$\text{rea}_{\text{lat, cono}} = \pi \cdot 7{,}5 \cdot 12{,}5.$$

Multiplicación paso a paso:

$$7{,}5 \cdot 12{,}5 = 93{,}75.$$

Entonces:

$$\text{rea}_{\text{lat, cono}} = 93{,}75\pi \text{ cm}^2.$$

4. Área lateral del cilindro.

Definición 1.7 (Área lateral del cilindro)**.** Para un cilindro de radio r y altura h:

$$\text{rea}_{\text{lat, cil}} = 2\pi r h.$$

Sustituimos:

$$\text{rea}_{\text{lat, cil}} = 2\pi \cdot 7{,}5 \cdot 15.$$

Multiplicamos:

$$2 \cdot 7{,}5 = 15, \qquad 15 \cdot 15 = 225.$$

Por tanto:

$$\text{rea}_{\text{lat, cil}} = 225\pi \text{ cm}^2.$$

5. Área curva de la semiesfera.

Definición 1.8 (Área de la esfera y semiesfera (solo parte curva))**.** El área de una esfera de radio r es:

$$\text{rea}_{\text{esfera}} = 4\pi r^2.$$

La **parte curva** de una semiesfera (sin el círculo base) es la mitad:

$$\text{rea}_{\text{curva, semiesfera}} = 2\pi r^2.$$

Sustituimos:

$$\text{rea}_{\text{curva, semi}} = 2\pi \cdot (7{,}5)^2 = 2\pi \cdot 56{,}25.$$

Multiplicamos:

$$2 \cdot 56{,}25 = 112{,}5.$$

Entonces:

$$\text{rea}_{\text{curva, semi}} = 112{,}5\pi \text{ cm}^2.$$

6. Suma de áreas exteriores.

$$\text{rea}_{\text{total}} = 93{,}75\pi + 225\pi + 112{,}5\pi.$$

Sumamos coeficientes:

$$93{,}75 + 225 = 318{,}75, \qquad 318{,}75 + 112{,}5 = 431{,}25.$$

Por tanto:

$$\boxed{\text{rea}_{\text{total}} = 431{,}25\pi \text{ cm}^2}.$$

7. Aproximación decimal (opcional).

$$431{,}25\pi \approx 431{,}25 \cdot 3{,}1416 \approx 1354{,}13 \text{ cm}^2.$$

$$\boxed{\text{rea}_{\text{total}} \approx 1354{,}13 \text{ cm}^2}.$$

B) Volumen total

8. Volumen del cono.

Definición 1.9 (Volumen del cono)**.** Para un cono recto:

$$\text{Volumen}_{\text{cono}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Sustituimos $r^2 = 56{,}25$ y $h = 10$:

$$\text{Volumen}_{\text{cono}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 56{,}25 \cdot 10.$$

Multiplicamos:

$$56{,}25 \cdot 10 = 562{,}5.$$

Dividimos entre 3:

$$\frac{562{,}5}{3} = 187{,}5.$$

Entonces:

$$\text{Volumen}_{\text{cono}} = 187{,}5\pi \text{ cm}^3.$$

9. Volumen del cilindro.

Definición 1.10 (Volumen del cilindro)**.** Para un cilindro:

$$\text{Volumen}_{\text{cil}} = \pi r^2 h.$$

Sustituimos:

$$\text{Volumen}_{\text{cil}} = \pi \cdot 56{,}25 \cdot 15.$$

Multiplicación:

$$56{,}25 \cdot 15 = 56{,}25 \cdot (10 + 5) = 562{,}5 + 281{,}25 = 843{,}75.$$

Por tanto:

$$\text{Volumen}_{\text{cil}} = 843{,}75\pi \text{ cm}^3.$$

10. Volumen de la semiesfera.

Definición 1.11 (Volumen de la esfera y semiesfera)**.** El volumen de una esfera de radio r es:

$$\text{Volumen}_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

El volumen de una semiesfera es la mitad:

$$\text{Volumen}_{\text{semi}} = \frac{2}{3}\pi r^3.$$

Calculamos r^3:

$$r^3 = (7{,}5)^3 = 7{,}5 \cdot 7{,}5 \cdot 7{,}5.$$

Primero:

$$7{,}5 \cdot 7{,}5 = 56{,}25.$$

Luego:

$$56{,}25 \cdot 7{,}5 = 56{,}25 \cdot (7 + 0{,}5) = 393{,}75 + 28{,}125 = 421{,}875.$$

Así:

$$r^3 = 421{,}875.$$

Sustituimos:

$$\text{Volumen}_{\text{semi}} = \frac{2}{3}\pi \cdot 421{,}875.$$

Multiplicamos por 2:

$$2 \cdot 421{,}875 = 843{,}75.$$

Dividimos entre 3:

$$\frac{843{,}75}{3} = 281{,}25.$$

Por tanto:

$$\text{Volumen}_{\text{semi}} = 281{,}25\pi \text{ cm}^3.$$

11. Volumen total.

$$\text{Volumen}_{\text{total}} = 187{,}5\pi + 843{,}75\pi + 281{,}25\pi.$$

Sumamos:

$$187{,}5 + 843{,}75 = 1031{,}25, \qquad 1031{,}25 + 281{,}25 = 1312{,}5.$$

Por tanto:

$$\boxed{\text{Volumen}_{\text{total}} = 1312{,}5\pi \text{ cm}^3}.$$

12. Aproximación decimal (opcional).

$$1312{,}5\pi \approx 1312{,}5 \cdot 3{,}1416 \approx 4123{,}34 \text{ cm}^3.$$

$$\boxed{\text{Volumen}_{\text{total}} \approx 4123{,}34 \text{ cm}^3}.$$

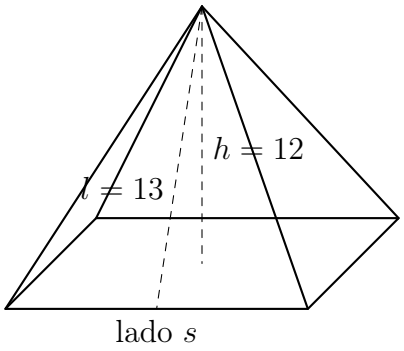
Observación. Se ha elegido el método de **suma de volúmenes y áreas de superficies externas** porque el sólido es una composición de cuerpos elementales cuyas fórmulas son estándar y bien conocidas.

1.5. Ejercicio 5: Pirámide de base cuadrada (área total y volumen)

Enunciado

Calcúlese el área total y el volumen de una pirámide de base cuadrada de 12 cm de altura de la pirámide y 13 cm la altura de la cara lateral.

Dibujo representativo (no a escala)



Solución

1. Datos y significado de las alturas. Se trata de una pirámide de base cuadrada (se asume **regular**):

- Altura de la pirámide (perpendicular desde el vértice al centro de la base): $h = 12\,\text{cm}$.
- Altura de la cara lateral: $l = 13\,\text{cm}$.

La **altura de la cara lateral** l es la distancia desde el vértice al **punto medio de un lado** de la base, medida sobre la cara triangular; también se llama **apotema lateral**.

A) Encontrar el lado del cuadrado de la base

2. Triángulo rectángulo clave. En una pirámide regular de base cuadrada:

- Sea s el lado del cuadrado.
- La distancia del centro del cuadrado al punto medio de un lado vale $\frac{s}{2}$.

El segmento l (apotema lateral) une el vértice con el punto medio de un lado. El segmento h baja verticalmente al centro de la base. Por tanto, h y $\frac{s}{2}$ son catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es l:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2.$$

3. Sustitución de datos y resolución para s. Sustituimos $l = 13$ y $h = 12$:

$$13^2 = 12^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2.$$

Calculamos cuadrados:

$$13^2 = 169, \qquad 12^2 = 144.$$

Entonces:

$$169 = 144 + \left(\frac{s}{2}\right)^2.$$

Restamos 144 en ambos lados:

$$169 - 144 = \left(\frac{s}{2}\right)^2.$$

$$25 = \left(\frac{s}{2}\right)^2.$$

Tomamos raíz cuadrada (y usamos que $s > 0$):

$$\frac{s}{2} = \sqrt{25} = 5.$$

Multiplicamos por 2:

$$s = 10 \text{ cm}.$$

$$\boxed{s = 10 \text{ cm}}.$$

B) Área total

4. Área de la base. La base es un cuadrado de lado $s = 10$:

$$\text{rea}_{\text{base}} = s^2 = 10^2 = 100 \text{ cm}^2.$$

5. Área lateral: suma de las 4 caras triangulares. Cada cara lateral es un triángulo isósceles de:

- Base $s = 10$.
- Altura de la cara $l = 13$ (perpendicular a la base dentro de la cara).

El área de un triángulo es:

$$\text{rea}_{\triangle} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}.$$

Entonces, área de *una* cara:

$$\text{rea}_{\text{cara}} = \frac{10 \cdot 13}{2}.$$

Multiplicamos:

$$10 \cdot 13 = 130.$$

Dividimos entre 2:

$$\text{rea}_{\text{cara}} = 65 \text{ cm}^2.$$

Como hay 4 caras iguales:

$$\text{rea}_{\text{lateral}} = 4 \cdot 65 = 260 \text{ cm}^2.$$

6. Área total.

$$\text{rea}_{\text{total}} = \text{rea}_{\text{base}} + \text{rea}_{\text{lateral}} = 100 + 260 = 360 \text{ cm}^2.$$

$$\boxed{\text{rea}_{\text{total}} = 360 \text{ cm}^2}.$$

C) Volumen

7. Fórmula del volumen de una pirámide.

Definición 1.12 (Volumen de una pirámide)**.** El volumen de una pirámide es:

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3}\,\text{rea}_{\text{base}} \cdot h,$$

donde h es la altura perpendicular de la pirámide.

Sustituimos $\text{rea}_{\text{base}} = 100$ y $h = 12$:

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 12.$$

Multiplicamos $100 \cdot 12$:

$$100 \cdot 12 = 1200.$$

Dividimos entre 3:

$$\text{Volumen} = 400 \text{ cm}^3.$$

$$\boxed{\text{Volumen} = 400 \text{ cm}^3}.$$

Advertencia. **Error común:** usar $l = 13$ como altura en el volumen. Para el volumen se usa siempre la altura perpendicular $h = 12$, no la altura inclinada de la cara.

Fin del documento

Suerte jóvenes.

Junta de Castilla y León
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA

MATEMÁTICAS 24/06/2025

EXAMEN ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

3º B ESO

Nº1.- Se ha registrado el número de bibliotecas públicas en 20 ciudades. Los datos son:

2, 4, 3, 5, 2, 3, 4, 6, 3, 5, 4, 3, 2, 1, 4, 5, 3, 4, 2, 4

a) Construye la tabla de frecuencias y calcula la moda, media, varianza, desviación típica, coeficiente de variación, mediana, y los cuartiles 1º y 3º. Realiza el diagrama de caja.

b) Dibuja un gráfico de barras con los datos.

Nº2.- Una caja contiene 5 bolas rojas y 7 bolas amarillas. Si se extraen dos bolas sin reemplazamiento, calcula la probabilidad de que:

a) Ambas sean rojas.
b) Sean del mismo color.
c) Sean de distinto color.

Nº3.- En un grupo de 25 estudiantes, 15 aprobaron Historia, 12 aprobaron Geografía y 3 no aprobaron ninguna. Se elige un estudiante al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado ambas asignaturas?

b) Si aprobó Historia, ¿cuál es la probabilidad de que también aprobara Geografía?

c) ¿Son independientes los sucesos" Aprobar Historia" y" Aprobar Geografía"?

Nº4.- Se lanzan dos dados y se anota la diferencia entre el mayor valor y el menor de los resultados.

a) Describe el espacio muestral.
b) ¿Cuál es el resultado más probable?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que la diferencia sea mayor que 5?

SUERTE JÓVENES

Libro de Soluciones

Matemáticas: Estadística y Probabilidad

Nivel: 3º ESO

Resoluciones paso a paso, razonadas y con rigor

Curso académico 2026

Índice general

1. Examen de Estadística y Probabilidad (24/06/2025) — 3º ESO **1**
Enunciado 1
1.1. Soluciones 2
Soluciones 2
1.2. Ejercicio 1 2
Ejercicio 1 2
1.3. Ejercicio 2 9
Ejercicio 2 9
1.4. Ejercicio 3 12
Ejercicio 3 12
1.5. Ejercicio 4 15
Ejercicio 4 15

Capítulo 1

Examen de Estadística y Probabilidad (24/06/2025) — 3º ESO

Enunciado

Ejercicio 1. Se ha registrado el número de bibliotecas públicas en 20 ciudades. Los datos son:

$$2, 4, 3, 5, 2, 3, 4, 6, 3, 5, 4, 3, 2, 1, 4, 5, 3, 4, 2, 4.$$

(a) Construye la tabla de frecuencias y calcula la moda, media, varianza, desviación típica, coeficiente de variación, mediana, y los cuartiles 1° y 3°. Realiza el diagrama de caja.

(b) Dibuja un gráfico de barras con los datos.

Ejercicio 2. Una caja contiene 5 bolas rojas y 7 bolas amarillas. Si se extraen dos bolas sin reemplazamiento, calcula la probabilidad de que:

(a) Ambas sean rojas.

(b) Sean del mismo color.

(c) Sean de distinto color.

Ejercicio 3. En un grupo de 25 estudiantes, 15 aprobaron Historia, 12 aprobaron Geografía y 3 no aprobaron ninguna. Se elige un estudiante al azar:

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado ambas asignaturas?

(b) Si aprobó Historia, ¿cuál es la probabilidad de que también aprobara Geografía?

(c) ¿Son independientes los sucesos "Aprobar Historia" y "Aprobar Geografía"?

Ejercicio 4. Se lanzan dos dados y se anota la diferencia entre el mayor valor y el menor de los resultados.

(a) Describe el espacio muestral.

(b) ¿Cuál es el resultado más probable?

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que la diferencia sea mayor que 5?

1.1. Soluciones

1.2. Ejercicio 1

Planteamiento y método elegido

Trabajamos con un conjunto de $n = 20$ observaciones (variable cuantitativa discreta): número de bibliotecas públicas por ciudad.

Método elegido: estadística descriptiva clásica basada en frecuencias. Elegimos este método porque:

- Permite organizar datos discretos de manera natural.

- Facilita el cálculo exacto de la media y la varianza mediante sumas ponderadas.
- Conduce directamente a medidas de posición (mediana, cuartiles) usando la lista ordenada.

(a) Tabla de frecuencias y medidas descriptivas

Paso 1: Ordenación de los datos

Datos originales:

$$2, 4, 3, 5, 2, 3, 4, 6, 3, 5, 4, 3, 2, 1, 4, 5, 3, 4, 2, 4.$$

Ordenamos de menor a mayor. Contemos apariciones por valor:

- 1 aparece 1 vez.
- 2 aparece 4 veces.
- 3 aparece 5 veces.
- 4 aparece 6 veces.
- 5 aparece 3 veces.
- 6 aparece 1 vez.

Lista ordenada (verificamos que hay 20 valores):

$$1, \underbrace{2, 2, 2, 2}_{4}, \underbrace{3, 3, 3, 3, 3}_{5}, \underbrace{4, 4, 4, 4, 4, 4}_{6}, \underbrace{5, 5, 5}_{3}, 6.$$

Paso 2: Tabla de frecuencias

Sea x_i cada valor posible y f_i su frecuencia absoluta. Definimos además:

$$h_i = \frac{f_i}{n} \quad \text{(frecuencia relativa)}, \qquad F_i = \sum_{j \le i} f_j \quad \text{(frecuencia absoluta acumulada)}, \qquad H_i = \frac{F_i}{n}.$$

x_i	f_i	$h_i = f_i/20$	F_i	H_i
1	1	$1/20 = 0.05$	1	0.05
2	4	$4/20 = 0.20$	5	0.25
3	5	$5/20 = 0.25$	10	0.50
4	6	$6/20 = 0.30$	16	0.80
5	3	$3/20 = 0.15$	19	0.95
6	1	$1/20 = 0.05$	20	1.00

Paso 3: Moda

Definición 1.1 (Moda)**.** *La* moda *es el valor (o valores) con mayor frecuencia absoluta* f_i*.*

Aquí el máximo f_i es 6, correspondiente a $x = 4$.

$$\boxed{\text{Moda} = 4.}$$

Paso 4: Media aritmética

Definición 1.2 (Media)**.** *La* media aritmética *de una variable discreta con valores* x_i *y frecuencias* f_i *es*

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i f_i.$$

Calculamos la suma ponderada:

$$\sum_i x_i f_i = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 1.$$

Ahora, sin saltos:

$$1 \cdot 1 = 1, \quad 2 \cdot 4 = 8, \quad 3 \cdot 5 = 15, \quad 4 \cdot 6 = 24, \quad 5 \cdot 3 = 15, \quad 6 \cdot 1 = 6.$$

Sumamos:

$$1 + 8 = 9, \quad 9 + 15 = 24, \quad 24 + 24 = 48, \quad 48 + 15 = 63, \quad 63 + 6 = 69.$$

Luego

$$\sum_i x_i f_i = 69.$$

Como $n = 20$,

$$\bar{x} = \frac{69}{20} = 3.45.$$

$$\boxed{\bar{x} = 3.45.}$$

Paso 5: Varianza y desviación típica

En 3º ESO es habitual emplear la *varianza poblacional* (divisor n).

Definición 1.3 (Varianza (poblacional))**.** *Dada una distribución discreta con media $\bar{x}$, la varianza es*

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_i f_i(x_i - \bar{x})^2.$$

La desviación típica es $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

Para evitar errores aritméticos, usamos una forma equivalente:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_i f_i x_i^2 - \bar{x}^2,$$

que se obtiene expandiendo $(x_i - \bar{x})^2 = x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2$ y usando que $\sum_i f_i x_i = n\bar{x}$.

Calculamos primero $\sum_i f_i x_i^2$:

$$\sum_i f_i x_i^2 = 1 \cdot 1^2 + 4 \cdot 2^2 + 5 \cdot 3^2 + 6 \cdot 4^2 + 3 \cdot 5^2 + 1 \cdot 6^2.$$

Evaluamos cada término:

$$1 \cdot 1^2 = 1, \qquad 4 \cdot 2^2 = 4 \cdot 4 = 16, \qquad 5 \cdot 3^2 = 5 \cdot 9 = 45,$$

$$6 \cdot 4^2 = 6 \cdot 16 = 96, \qquad 3 \cdot 5^2 = 3 \cdot 25 = 75, \qquad 1 \cdot 6^2 = 36.$$

Sumamos paso a paso:

$$1 + 16 = 17, \quad 17 + 45 = 62, \quad 62 + 96 = 158, \quad 158 + 75 = 233, \quad 233 + 36 = 269.$$

Así,

$$\sum_i f_i x_i^2 = 269.$$

Entonces

$$\frac{1}{n}\sum_i f_i x_i^2 = \frac{269}{20} = 13.45.$$

Ahora calculamos $\bar{x}^2$:

$$\bar{x} = 3.45 = \frac{69}{20} \quad \Longrightarrow \quad \bar{x}^2 = \left(\frac{69}{20}\right)^2 = \frac{69^2}{20^2} = \frac{4761}{400} = 11.9025.$$

Por tanto,

$$\sigma^2 = 13.45 - 11.9025 = 1.5475.$$

$$\boxed{\sigma^2 = 1.5475.}$$

y

$$\sigma = \sqrt{1.5475} \approx 1.24398 \approx 1.244.$$

$$\boxed{\sigma \approx 1.244.}$$

Observación 1.1 (Error común)**.** *Confundir varianza poblacional ($\frac{1}{n}$) con varianza muestral ($\frac{1}{n-1}$). En muchos ejercicios de ESO se usa $\frac{1}{n}$ porque se considera que se describe el conjunto dado.*

Paso 6: Coeficiente de variación

Definición 1.4 (Coeficiente de variación)**.** *El coeficiente de variación (relativo) se define como*

$$\mathrm{CV} = \frac{\sigma}{\bar{x}},$$

a menudo expresado en porcentaje multiplicando por 100.

Sustituyendo:

$$\mathrm{CV} = \frac{1.24398}{3.45} \approx 0.3606.$$

En porcentaje:

$$0.3606 \times 100\,\% \approx 36.06\,\%.$$

$$\boxed{\mathrm{CV} \approx 0.361 \ \ (\text{o } 36.1\,\%).}$$

Paso 7: Mediana

Definición 1.5 (Mediana)**.** *Para n datos ordenados $x_{(1)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$, si n es par, la mediana es el promedio de los dos valores centrales:*

$$\text{Me} = \frac{x_{(n/2)} + x_{(n/2+1)}}{2}.$$

Aquí $n = 20$ es par, luego miramos $x_{(10)}$ y $x_{(11)}$.
En la lista ordenada:

- posiciones 1: valor 1.
- posiciones 2–5: valor 2.
- posiciones 6–10: valor 3.
- posiciones 11–16: valor 4.

Por tanto:

$$x_{(10)} = 3, \qquad x_{(11)} = 4.$$

$$\text{Me} = \frac{3+4}{2} = 3.5.$$

$$\boxed{\text{Me} = 3.5.}$$

Paso 8: Cuartiles Q_1 y Q_3

En ESO se usan varias convenciones. Usaremos una convención estándar y muy pedagógica:

Definición 1.6 (Cuartiles por "mediana de mitades")**.** *Para n par:*

- *Q_1 es la mediana de los primeros $n/2$ datos ordenados.*
- *Q_3 es la mediana de los últimos $n/2$ datos ordenados.*

Aquí $n = 20$, así que cada mitad tiene 10 datos.

Primera mitad (posiciones 1 a 10):

$$1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3.$$

La mediana de 10 datos es el promedio del 5º y 6º:

$$x_{(5)} = 2, \quad x_{(6)} = 3 \quad \Longrightarrow \quad Q_1 = \frac{2+3}{2} = 2.5.$$

$$\boxed{Q_1 = 2.5.}$$

Segunda mitad (posiciones 11 a 20):

$$4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6.$$

La mediana es el promedio del 5º y 6º de esta mitad (equivalen a posiciones globales 15 y 16):

$$\text{en esta mitad: } 1º = 4, \ldots, 6º = 4 \quad \Longrightarrow \quad Q_3 = \frac{4+4}{2} = 4.$$

$$\boxed{Q_3 = 4.}$$

Observación 1.2 (Sobre convenciones)**.** *Otras definiciones de cuartiles usan posiciones* $0.25(n+1)$ *y* $0.75(n+1)$ *con interpolación. Si el profesorado usa otra convención, podrían cambiar ligeramente* Q_1 *y* Q_3*.*

Paso 9: Diagrama de caja (boxplot)

Para un diagrama de caja necesitamos: mínimo, Q_1, mediana, Q_3 y máximo.

$$\text{mín} = 1, \quad Q_1 = 2.5, \quad \text{Me} = 3.5, \quad Q_3 = 4, \quad \text{máx} = 6.$$

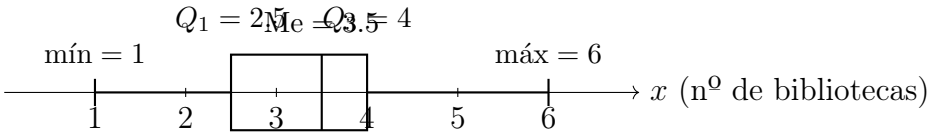


Figura 1. Diagrama de caja correspondiente a los 20 datos.

(b) Gráfico de barras

El gráfico de barras representa en el eje horizontal los valores posibles x y en el vertical la frecuencia f.

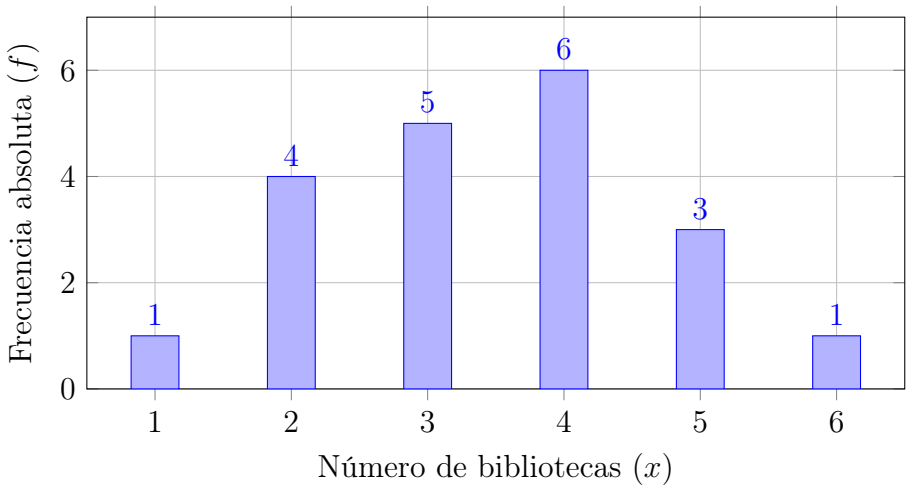


Figura 2. Gráfico de barras de frecuencias.

Conclusión del Ejercicio 1

Las ciudades tienen en promedio $\bar{x} = 3.45$ bibliotecas, con dispersión moderada ($\sigma \approx 1.244$ y CV $\approx 36\,\%$). La mayor concentración está en $x = 4$ (moda), y la mitad de las ciudades tiene como mucho 3.5 bibliotecas (mediana).

1.3. Ejercicio 2

Planteamiento

Hay 5 bolas rojas y 7 amarillas. Total:

$$N = 5 + 7 = 12.$$

Se extraen 2 bolas *sin reemplazamiento*, es decir, la segunda extracción depende de la primera.

Herramienta teórica: regla del producto

Proposición 1.1 (Regla del producto para sucesos dependientes)**.** *Si A y B son sucesos, entonces*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A),$$

donde $\mathbb{P}(B \mid A)$ *es la probabilidad condicionada.*

Representación (dibujo) mediante árbol de probabilidades

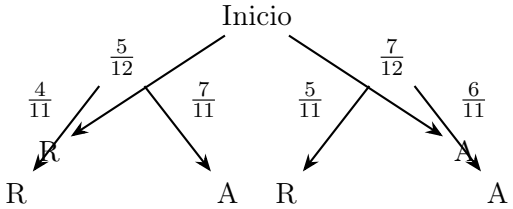


Figura 3. Árbol de probabilidades (R = roja, A = amarilla).

(a) Probabilidad de que ambas sean rojas

Sea R_1 el suceso "la primera es roja" y R_2 el suceso "la segunda es roja". Entonces

$$\mathbb{P}(R_1) = \frac{5}{12}.$$

Si la primera es roja, quedan 4 rojas y siguen quedando 7 amarillas, total 11:

$$\mathbb{P}(R_2 \mid R_1) = \frac{4}{11}.$$

Por la regla del producto:

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}(R_2 \mid R_1) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{20}{132} = \frac{5}{33}.$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{ambas rojas}) = \frac{5}{33}.}$$

(b) Probabilidad de que sean del mismo color

"Mismo color" significa (roja y roja) *o bien* (amarilla y amarilla). Son sucesos disjuntos:

$$\mathbb{P}(\text{mismo color}) = \mathbb{P}(\text{RR}) + \mathbb{P}(\text{AA}).$$

Ya sabemos:

$$\mathbb{P}(\text{RR}) = \frac{5}{33}.$$

Ahora (amarilla y amarilla):

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{7}{12}, \qquad \mathbb{P}(A_2 \mid A_1) = \frac{6}{11}.$$

Luego

$$\mathbb{P}(\text{AA}) = \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{42}{132} = \frac{7}{22}.$$

Sumamos:

$$\mathbb{P}(\text{mismo color}) = \frac{5}{33} + \frac{7}{22}.$$

Hallamos común denominador: $\text{mcm}(33, 22) = 66$.

$$\frac{5}{33} = \frac{10}{66}, \qquad \frac{7}{22} = \frac{21}{66}.$$

Por tanto:

$$\mathbb{P}(\text{mismo color}) = \frac{10}{66} + \frac{21}{66} = \frac{31}{66}.$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{mismo color}) = \frac{31}{66}.}$$

(c) Probabilidad de que sean de distinto color

"Distinto color" es el complementario de "mismo color", porque (con dos colores) necesariamente son o iguales o distintos:

$$\mathbb{P}(\text{distinto}) = 1 - \mathbb{P}(\text{mismo}) = 1 - \frac{31}{66} = \frac{35}{66}.$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{distinto color}) = \frac{35}{66}.}$$

Observación 1.3 (Comprobación alternativa)**.** *También se puede calcular* $\mathbb{P}(\textit{distinto}) = \mathbb{P}(RA) + \mathbb{P}(AR)$*:*

$$\mathbb{P}(RA) = \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} = \frac{35}{132}, \qquad \mathbb{P}(AR) = \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{35}{132}.$$

Sumando:

$$\mathbb{P}(\textit{distinto}) = \frac{35}{132} + \frac{35}{132} = \frac{70}{132} = \frac{35}{66}.$$

Coincide, lo cual valida el resultado.

1.4. Ejercicio 3

Planteamiento

En total hay 25 estudiantes. Definimos los sucesos:

$$H = \{\text{aprueba Historia}\}, \qquad G = \{\text{aprueba Geografía}\}.$$

Datos:

$$|H| = 15, \qquad |G| = 12, \qquad |\text{ninguna}| = 3.$$

Sea U el conjunto total de 25 estudiantes, $|U| = 25$.

Paso 1: Interpretación con conjuntos (diagrama de Venn)

"3 no aprobaron ninguna" significa que 3 están fuera de $H \cup G$. Por tanto:

$$|H \cup G| = |U| - |\text{ninguna}| = 25 - 3 = 22.$$

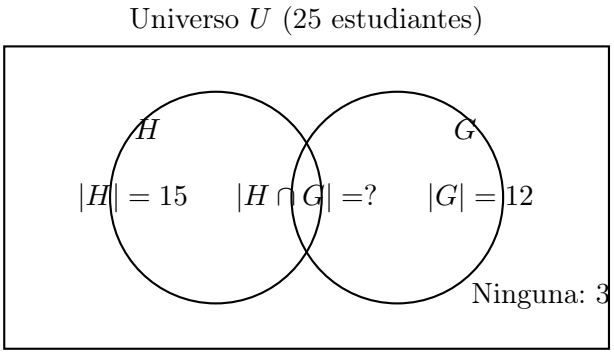


Figura 4. Esquema tipo Venn para visualizar H y G.

Paso 2: Cálculo de $|H \cap G|$ usando inclusión-exclusión

Teorema 1.1 (Principio de inclusión-exclusión para dos conjuntos)**.** *Para dos conjuntos finitos A, B,*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Aplicamos con $A = H$ y $B = G$:

$$|H \cup G| = |H| + |G| - |H \cap G|.$$

Sustituimos:

$$22 = 15 + 12 - |H \cap G|.$$

Sumamos 15+12:

$$15 + 12 = 27.$$

Entonces:

$$22 = 27 - |H \cap G|.$$

Restamos 27 a ambos lados (justificación: aplicamos la operación inversa, restar 27, en ambos miembros):

$$22 - 27 = -|H \cap G|.$$

$$-5 = -|H \cap G|.$$

Multiplicamos por -1 ambos lados:

$$5 = |H \cap G|.$$

$$\boxed{|H \cap G| = 5.}$$

(a) Probabilidad de aprobar ambas

Elegir al azar equivale a uniforme sobre los 25 estudiantes:

$$\mathbb{P}(H \cap G) = \frac{|H \cap G|}{|U|} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}.$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{aprueba ambas}) = \frac{1}{5}.}$$

(b) Probabilidad de aprobar Geografía sabiendo que aprobó Historia

Definición 1.7 (Probabilidad condicionada)**.** *Si $\mathbb{P}(H) > 0$, se define*

$$\mathbb{P}(G \mid H) = \frac{\mathbb{P}(G \cap H)}{\mathbb{P}(H)}.$$

Calculamos:

$$\mathbb{P}(H) = \frac{|H|}{25} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}, \qquad \mathbb{P}(G \cap H) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}.$$

Entonces:

$$\mathbb{P}(G \mid H) = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}}.$$

Dividir por una fracción equivale a multiplicar por su inversa:

$$\frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\boxed{\mathbb{P}(G \mid H) = \frac{1}{3}.}$$

(c) Independencia de sucesos

Definición 1.8 (Independencia)**.** *Dos sucesos H y G son independientes si*

$$\mathbb{P}(H \cap G) = \mathbb{P}(H)\mathbb{P}(G).$$

Calculamos:

$$\mathbb{P}(H) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}, \qquad \mathbb{P}(G) = \frac{12}{25}.$$

Producto:

$$\mathbb{P}(H)\mathbb{P}(G) = \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{25} = \frac{36}{125}.$$

Por otro lado:

$$\mathbb{P}(H \cap G) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} = \frac{25}{125}.$$

Comparamos:

$$\frac{25}{125} \neq \frac{36}{125}.$$

Luego no se cumple la condición de independencia.

$$\boxed{\text{No son independientes.}}$$

Observación 1.4 (Interpretación)**.** *Aprobar Historia cambia la probabilidad de aprobar Geografía: sin condición,* $\mathbb{P}(G) = \frac{12}{25} = 0.48$*, mientras que* $\mathbb{P}(G \mid H) = \frac{1}{3} \approx 0.333$*. Al no coincidir, los sucesos no son independientes.*

1.5. Ejercicio 4

Planteamiento

Se lanzan dos dados equilibrados (seis caras). El resultado del lanzamiento es un par ordenado:

$$(\omega_1, \omega_2) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2,$$

con 36 resultados equiprobables.

La variable aleatoria definida en el enunciado es:

$$D = \left|\omega_1 - \omega_2\right| = \text{máx}(\omega_1, \omega_2) - \text{mín}(\omega_1, \omega_2).$$

Nótese que ambas expresiones son iguales por definición del valor absoluto.

Dibujo representativo: cuadrícula de resultados

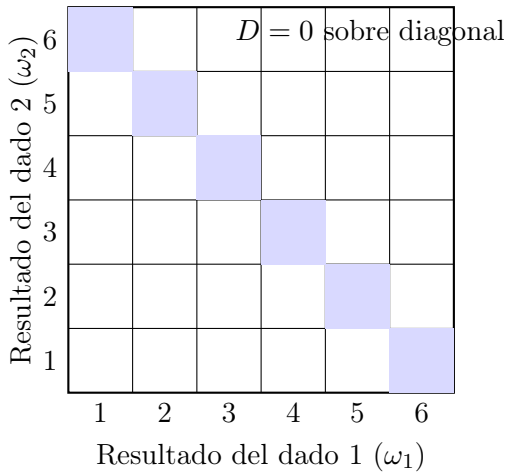


Figura 5. Representación de los 36 pares ordenados posibles.

(a) Espacio muestral de la diferencia

La variable $D = |\omega_1 - \omega_2|$ puede tomar valores:

$$D \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Justificación:

- El mínimo posible es 0, cuando ambos dados coinciden, por ejemplo (3,3).
- El máximo posible es 5, cuando salen 1 y 6 (en cualquier orden), por ejemplo (1,6) o (6,1).

Así, el espacio muestral de D es

$$\boxed{\Omega_D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.}$$

(b) Resultado más probable

Para hallar el resultado más probable, debemos contar cuántos pares ordenados (ω_1, ω_2) producen cada valor d.

Conteo sistemático

Para $d = 0$: deben ser iguales $\omega_1 = \omega_2$. Hay 6 pares:

$$(1,1), (2,2), \ldots, (6,6).$$

Así, $N_0 = 6$.

Para $d = 1$: pares con diferencia 1:

$$(1,2), (2,1), (2,3), (3,2), \ldots, (5,6), (6,5).$$

Hay 5 pares "adyacentes" si ignoramos el orden, y cada uno tiene 2 órdenes:

$$N_1 = 2 \cdot 5 = 10.$$

Para $d = 2$: diferencias 2:

$$(1,3), (3,1), (2,4), (4,2), (3,5), (5,3), (4,6), (6,4).$$

Hay 4 pares sin orden, cada uno con 2 órdenes:

$$N_2 = 2 \cdot 4 = 8.$$

Para $d = 3$: hay 3 pares sin orden, con 2 órdenes:

$$N_3 = 2 \cdot 3 = 6.$$

Para $d = 4$: hay 2 pares sin orden, con 2 órdenes:

$$N_4 = 2 \cdot 2 = 4.$$

Para $d = 5$: solo (1,6) sin orden, con 2 órdenes:

$$N_5 = 2 \cdot 1 = 2.$$

Tabla de frecuencias de D

Verificamos que suma 36:

$$6 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2 = 36.$$

Correcto.

d	N_d	$\mathbb{P}(D = d) = N_d/36$
0	6	$6/36 = 1/6$
1	10	$10/36 = 5/18$
2	8	$8/36 = 2/9$
3	6	$6/36 = 1/6$
4	4	$4/36 = 1/9$
5	2	$2/36 = 1/18$

El máximo N_d es $N_1 = 10$, luego el valor más probable es $d = 1$:

$$\boxed{\text{El resultado más probable es } D = 1.}$$

(c) Probabilidad de que la diferencia sea mayor que 5

Pedimos:

$$\mathbb{P}(D > 5).$$

Pero el espacio muestral de D es $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, así que D *nunca* puede superar 5. Por tanto el suceso es imposible y su probabilidad es 0:

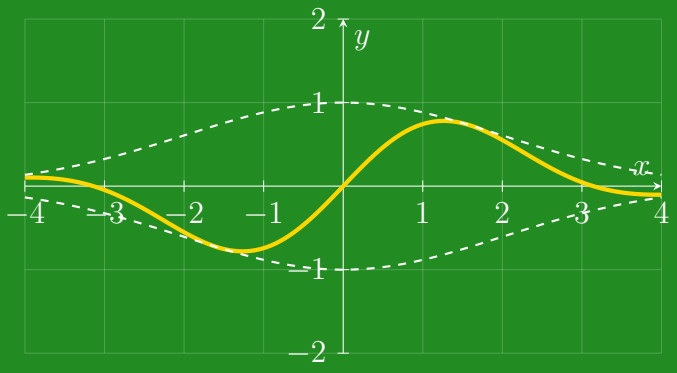
$$\boxed{\mathbb{P}(D > 5) = 0.}$$

Observación 1.5 (Advertencia)**.** *Algunos estudiantes interpretan "mayor que 5" como "mayor o igual que 5". En ese caso sería* $\mathbb{P}(D \geq 5) = \mathbb{P}(D = 5) = \frac{1}{18}$*. Aquí el enunciado dice claramente* mayor que 5*.*

EXÁMENES DE LADIS

1º Bachillerato

CURSO 2024-2025



"Las matemáticas puras son, a su manera,
la poesía de las ideas lógicas."

— Albert Einstein

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Departamento de Matemáticas

Contenido del documento

Este documento ha sido diseñado como portada para los exámenes de LADIS (Lógica, Aritmética, Desarrollo Intelectual y Sistemas) para el primer curso de Bachillerato durante el año académico 2024-2025.

Características de la portada

- **Fondo verde:** Color representativo que simboliza el crecimiento y el desarrollo intelectual.
- **Gráficos matemáticos:** Incluye representaciones de funciones trigonométricas, exponenciales y ondas amortiguadas.
- **Cita de Albert Einstein:** Una reflexión sobre la belleza de las matemáticas.
- **Fórmulas icónicas:** Identidad de Euler, ecuación de Maxwell y la integral gaussiana.

Sobre la frase de Einstein

Albert Einstein (1879-1955), además de sus revolucionarias contribuciones a la física teórica, reconoció la profunda belleza y elegancia de las matemáticas como lenguaje fundamental del universo. Su frase resalta cómo las matemáticas trascienden la mera utilidad práctica para convertirse en una forma de arte intelectual.

Elementos matemáticos incluidos

1. **Identidad de Euler:** $e^{i\pi} + 1 = 0$

   Considerada la fórmula más bella de las matemáticas, relaciona cinco constantes fundamentales.

2. **Función de onda amortiguada:** $y = e^{-x^2/8}\sin(x)$

   Representa fenómenos oscilatorios con decaimiento exponencial.

3. **Integral gaussiana:** $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

   Fundamental en probabilidad y estadística.

Nota: Este documento puede ser compilado directamente con LaTeX utilizando pdflatex. Asegúrese de tener instalados los paquetes tikz, pgfplots y tcolorbox.

Junta de Castilla y León
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA

EXAMEN DE MATEMÁTICAS
1ºD/E BACH 18 /10/2024

ies Tovar Antonio Centro bilingüe

Nº1.- Clasifica los siguientes números, indicando el conjunto más pequeño al que pertenecen. Calcúlese la fracción generatriz de los que sean racionales e indica de qué tipo son:

$$3\ ;\ -\frac{4}{5}\ ;\ -\sqrt{26}\ ;\ -\sqrt{25}\ ;\ -2\ ;\ 3,\hat{3}\ ;\ 1{,}010010001\ldots\ldots;\ 4{,}3\hat{1}\ ;\ \pi-1\ ;\ 3{,}54$$

Nº2.- Opera y simplifica al máximo las siguientes expresiones:

$$a)\ 5\sqrt{18}-\ 2\sqrt{8}-11\sqrt[4]{4} \qquad b)\ \sqrt{6+\sqrt[3]{20+\sqrt{47+\sqrt[4]{16}}}} \qquad c)\ \frac{\sqrt{128}+2\sqrt{8}-4\sqrt{2}}{2\sqrt{32}}$$

Nº3.- Dados los polinomios:

$$P(x)=\ x^3+2x^2+x \qquad Q(x)=x^2-2 \qquad R(x)=x+2$$

Calcúlese:

a) $P(x)\cdot Q(x)$
b) $P(x):Q(x)$ (Indica cuál es el Cociente y el Resto)
c) El valor numérico del polinomio $P(x)$ en el punto x = 1
d) $P(x):R(x)$ (Indica cuál es el Cociente y el Resto)

Nº4.- Calcúlese el valor del parámetro k para que la división resto 2:

$$(kx^3-x^2+3kx-5):(x+1)$$

Nº5.- Desarrolla los siguientes productos notables:

a) $(2x^2+1)^2$ $b)$ $(2x^2-1)^2$ c) $(2x^2+1)\cdot(2x^2-1)$

(Criterios de evaluación: 1.1 , 1.2 , 2.2 , 3.1 , 3.2 , 4.1 , 5.2 , 6.1 , 6.2 , 7.1 , 8.2 , 9.1 , 9.2 , 9.3)

SUERTE JÓVENES

EXAMEN DE MATEMÁTICAS SOLUCIONES COMPLETAS

1º D/E Bachillerato
18 de Octubre de 2024

Junta de Castilla y León
Centro Bilingüe IES Tovar

RESOLUCIÓN COMPLETA DEL EXAMEN

Este documento presenta la solución detallada y rigurosa de cada ejercicio del examen,
sin omitir pasos ni simplificar por brevedad.
Cada ejercicio incluye ilustraciones explicativas.

Índice

1. Ejercicio 1: Clasificación de Números y Fracciones Generatrices **3**
1.1. Enunciado . . . 3
1.2. Ilustración Conceptual . . . 3
1.3. Solución Detallada . . . 5
1.4. Tabla Resumen . . . 6

2. Ejercicio 2: Operaciones con Radicales **7**
2.1. Enunciado . . . 7
2.2. Ilustración Conceptual . . . 7
2.3. Solución Detallada . . . 8
2.4. Resumen de Propiedades Utilizadas . . . 9

3. Ejercicio 3: Operaciones con Polinomios **10**
3.1. Enunciado . . . 10
3.2. Ilustración Conceptual . . . 10
3.3. Solución Detallada . . . 12
3.4. Tabla Resumen . . . 13

4. Ejercicio 4: Cálculo de Parámetros usando el Teorema del Resto **14**
4.1. Enunciado . . . 14
4.2. Ilustración Conceptual . . . 14
4.3. Solución Detallada . . . 15
4.4. Comprobación Adicional . . . 15

5. Ejercicio 5: Productos Notables **16**
5.1. Enunciado . . . 16
5.2. Ilustración Conceptual . . . 16
5.3. Solución Detallada . . . 17
5.4. Resumen de Productos Notables . . . 18
5.5. Tabla Resumen . . . 18
5.6. Aplicaciones Prácticas . . . 18

6. Resumen General del Examen **19**
6.1. Tabla Completa de Resultados . . . 19
6.2. Conceptos Matemáticos Aplicados . . . 19
6.3. Observaciones Pedagógicas . . . 20

1 Ejercicio 1: Clasificación de Números y Fracciones Generatrices

1.1 Enunciado

Clasifica los siguientes números, indicando el conjunto más pequeño al que pertenecen. Calcúlese la fracción generatriz de los que sean racionales e indica de qué tipo son:

$$3 \quad ; \quad -\frac{4}{5} \quad ; \quad -\sqrt{26} \quad ; \quad -\sqrt{25} \quad ; \quad -2 \quad ; \quad 3,\hat{3} \quad ; \quad 1,010010001\ldots \quad ; \quad 4,\overline{31} \quad ; \quad \pi - 1 \quad ; \quad 3,54$$

1.2 Ilustración Conceptual

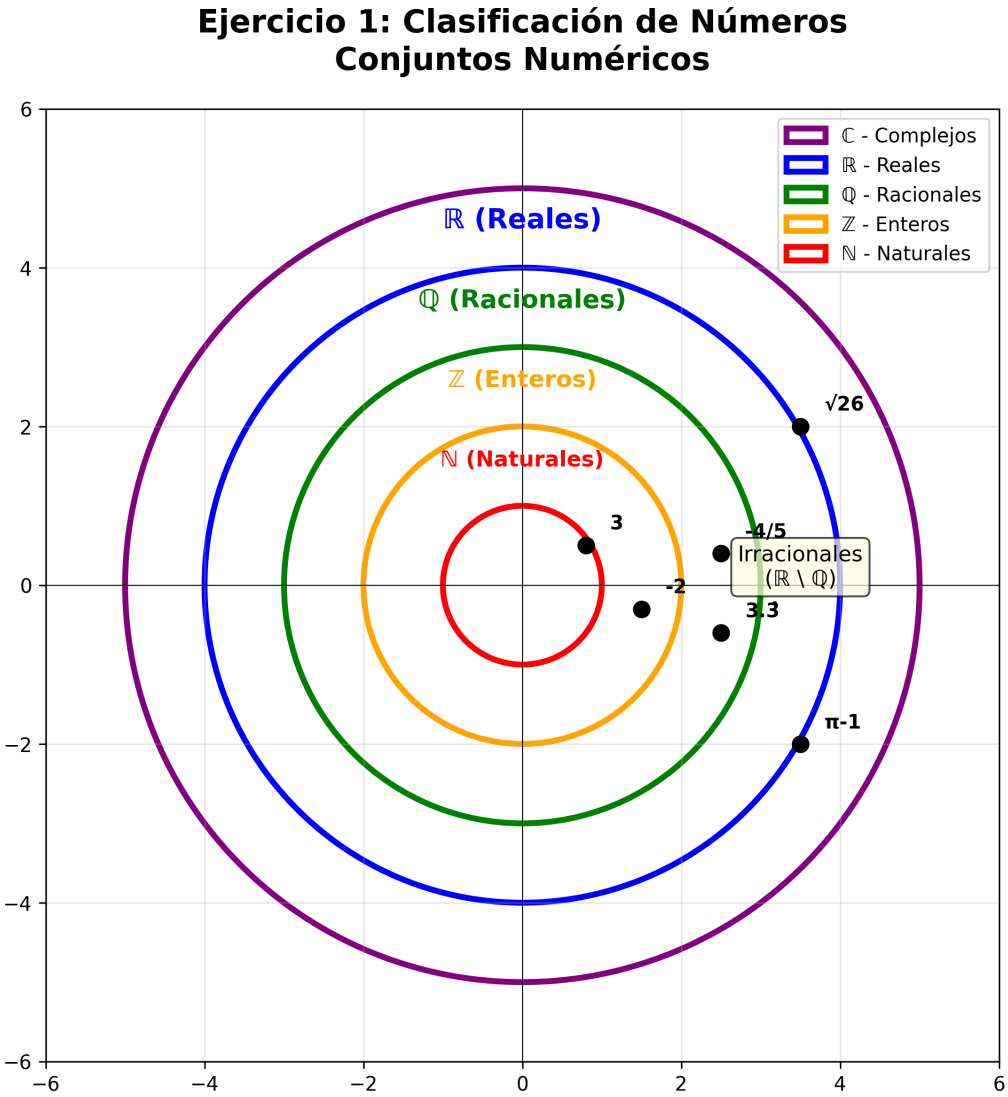


Figura 1: Conjuntos numéricos: Naturales ($\mathbb{N}$), Enteros ($\mathbb{Z}$), Racionales ($\mathbb{Q}$), Reales ($\mathbb{R}$) y Complejos ($\mathbb{C}$)

1.3 Solución Detallada

Solución

Vamos a clasificar cada número individualmente, analizando sus características:

1. Número 3

Desarrollo

Análisis:

- Es un número positivo
- Es un número entero (sin parte decimal)
- Es mayor que cero
- Pertenece a los números naturales

Clasificación: $3 \in \mathbb{N}$ (Números Naturales)
Tipo: Número natural
Fracción generatriz: $\frac{3}{1}$
Como número racional: Es racional porque se puede expresar como fracción de dos enteros.

2. Número $-\frac{4}{5}$

Desarrollo

Análisis:

- Es un número negativo
- Ya está expresado como fracción
- No es un número entero (tiene denominador diferente de 1)
- En forma decimal: $-0,8$

Clasificación: $-\frac{4}{5} \in \mathbb{Q}$ (Números Racionales)
Tipo: Número racional fraccionario
Fracción generatriz: $-\frac{4}{5}$ (ya está en forma de fracción irreducible)
Verificación:

$$-\frac{4}{5} = -0,8 = -0,800000\ldots$$

(decimal exacto)

3. Número $-\sqrt{26}$

Desarrollo

Análisis:

- Es la raíz cuadrada de 26
- 26 no es un cuadrado perfecto ($5^2 = 25$, $6^2 = 36$)

1.4 Tabla Resumen

Número	Conjunto	Tipo	Fracción Generatriz
3	$\mathbb{N}$	Natural	$\frac{3}{1}$
$-\frac{4}{5}$	$\mathbb{Q}$	Racional fraccionario	$-\frac{4}{5}$
$-\sqrt{26}$	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	Irracional	No existe
$-\sqrt{25} = -5$	$\mathbb{Z}$	Entero negativo	$\frac{-5}{1}$
-2	$\mathbb{Z}$	Entero negativo	$\frac{-2}{1}$
$3,\overline{3}$	$\mathbb{Q}$	Periódico puro	$\frac{10}{3}$
$1,010010001\ldots$	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	Irracional	No existe
$4,\overline{31}$	$\mathbb{Q}$	Periódico puro	$\frac{427}{99}$
$\pi - 1$	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	Irracional trascendente	No existe
$3,54$	$\mathbb{Q}$	Decimal exacto	$\frac{177}{50}$

Cuadro 1: Clasificación completa de todos los números

Resultado Final

Se han clasificado exitosamente los 10 números, calculando las fracciones generatrices de los 6 números racionales e identificando los 4 números irracionales.

2 Ejercicio 2: Operaciones con Radicales

2.1 Enunciado

Opera y simplifica al máximo las siguientes expresiones:

a) $5\sqrt{18} - 2\sqrt{8} - 11\sqrt[4]{4}$

b) $\sqrt{6 + \sqrt[3]{20 + \sqrt{47 + \sqrt[4]{16}}}}$

c) $\dfrac{\sqrt{128} + 2\sqrt{8} - 4\sqrt{2}}{2\sqrt{32}}$

2.2 Ilustración Conceptual

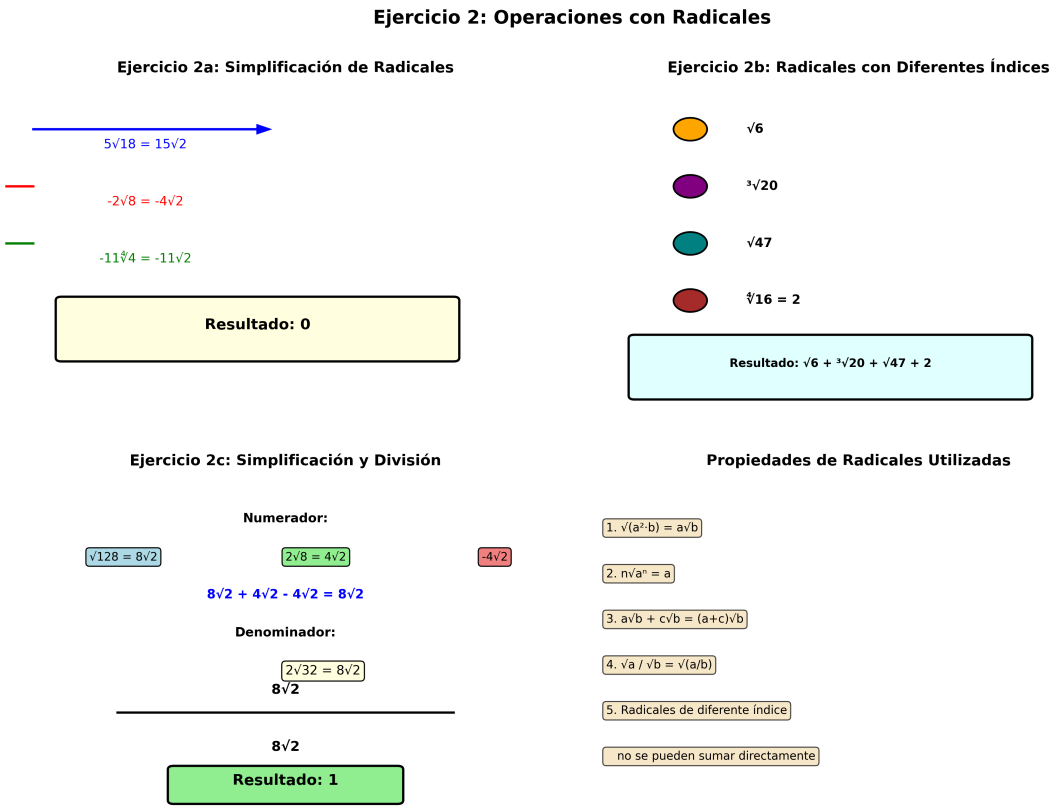


Figura 2: Operaciones con radicales: simplificación, suma y división

2.3 Solución Detallada

Solución

a) $5\sqrt{18} - 2\sqrt{8} - 11\sqrt[4]{4}$

Desarrollo

Paso 1: Simplificar cada radical por separado
Simplificación de $\sqrt{18}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{18} &= \sqrt{9 \times 2} \\ &= \sqrt{9} \times \sqrt{2} \\ &= 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

Justificación: $18 = 2 \times 9 = 2 \times 3^2$, por lo que podemos extraer $3^2 = 9$ de la raíz.
Simplificación de $\sqrt{8}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{8} &= \sqrt{4 \times 2} \\ &= \sqrt{4} \times \sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Justificación: $8 = 2 \times 4 = 2 \times 2^2$, por lo que podemos extraer $2^2 = 4$ de la raíz.
Simplificación de $\sqrt[4]{4}$:

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{4} &= \sqrt[4]{2^2} \\ &= (2^2)^{1/4} \\ &= 2^{2/4} \\ &= 2^{1/2} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

Justificación: Usando la propiedad $(a^m)^n = a^{mn}$, tenemos $\sqrt[4]{2^2} = 2^{2 \cdot 1/4} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$.
Paso 2: Sustituir en la expresión original

$$\begin{aligned}5\sqrt{18} - 2\sqrt{8} - 11\sqrt[4]{4} &= 5(3\sqrt{2}) - 2(2\sqrt{2}) - 11(\sqrt{2}) \\ &= 15\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 11\sqrt{2}\end{aligned}$$

Paso 3: Sumar los radicales semejantes
Todos los términos tienen $\sqrt{2}$ como factor común:

$$\begin{aligned}15\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 11\sqrt{2} &= (15 - 4 - 11)\sqrt{2} \\ &= 0\sqrt{2} \\ &= 0\end{aligned}$$

Verificación aritmética:

$$15 - 4 - 11 = 15 - 15 = 0$$

2.4 Resumen de Propiedades Utilizadas

Nota Importante

En este ejercicio hemos utilizado las siguientes propiedades de los radicales:

1. **Producto de radicales:** $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
2. **Potencia de radicales:** $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$
3. **Radicales semejantes:** $a\sqrt[n]{b} + c\sqrt[n]{b} = (a+c)\sqrt[n]{b}$
4. **Simplificación:** Si $a = b^n \cdot c$, entonces $\sqrt[n]{a} = b\sqrt[n]{c}$
5. **Cociente de radicales:** $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

Apartado	Resultado
a) $5\sqrt{18} - 2\sqrt{8} - 11\sqrt[4]{4}$	0
b) $\sqrt{6 + \sqrt[3]{20 + \sqrt{47 + \sqrt[4]{16}}}}$	3
c) $\dfrac{\sqrt{128} + 2\sqrt{8} - 4\sqrt{2}}{2\sqrt{32}}$	1

Cuadro 2: Resultados del Ejercicio 2

3 Ejercicio 3: Operaciones con Polinomios

3.1 Enunciado

Dados los polinomios:

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + x \qquad Q(x) = x^2 - 2 \qquad R(x) = x + 2$$

Calcúlese:

a) $P(x) \cdot Q(x)$

b) $P(x) : Q(x)$ (Indica cuál es el Cociente y el Resto)

c) El valor numérico del polinomio $P(x)$ en el punto $x = 1$

d) $P(x) : R(x)$ (Indica cuál es el Cociente y el Resto)

3.2 Ilustración Conceptual

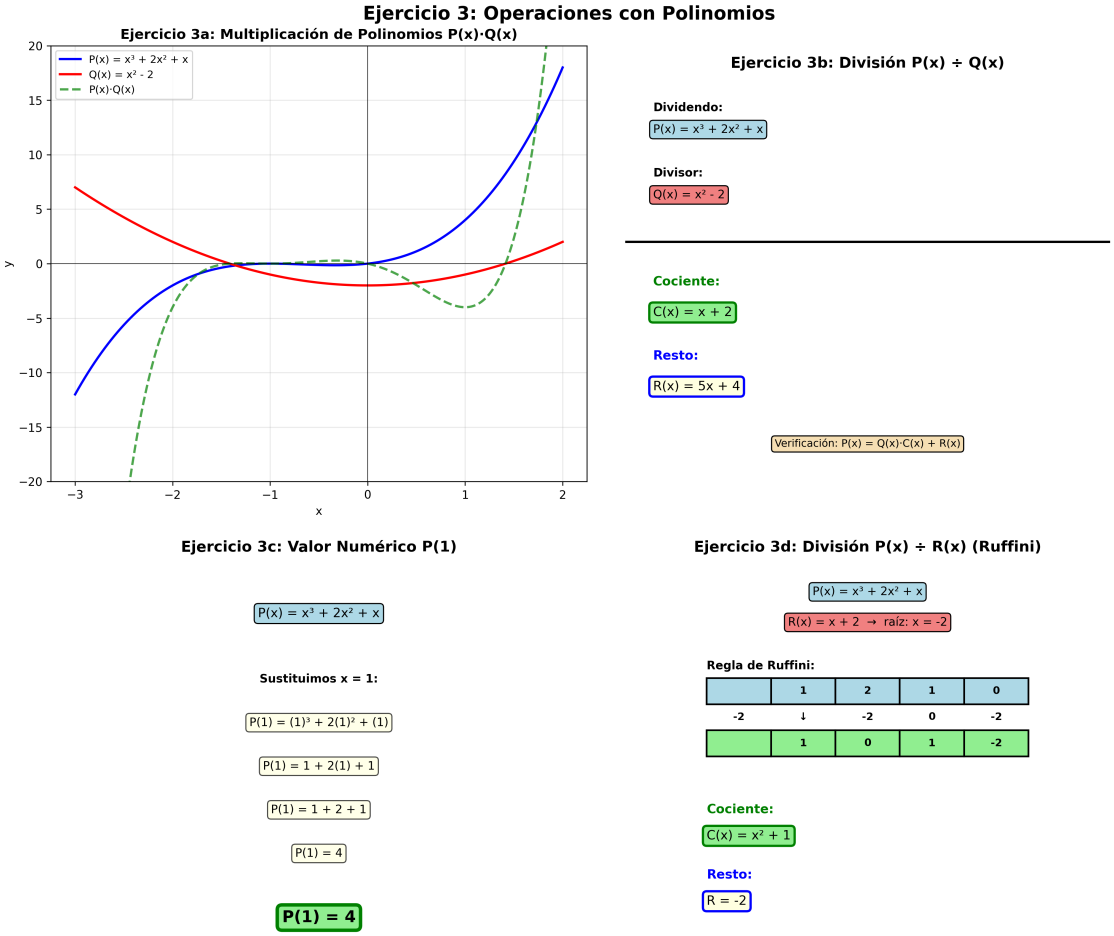


Figura 3: Operaciones con polinomios: multiplicación, división y evaluación

3.3 Solución Detallada

Solución

a) $P(x) \cdot Q(x)$

Desarrollo

Datos:

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + x$$
$$Q(x) = x^2 - 2$$

Aplicamos la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (x^3 + 2x^2 + x)(x^2 - 2) \\ &= x^3 \cdot (x^2 - 2) + 2x^2 \cdot (x^2 - 2) + x \cdot (x^2 - 2) \end{aligned}$$

Desarrollamos cada término:
Primer término: $x^3 \cdot (x^2 - 2)$

$$\begin{aligned} x^3 \cdot (x^2 - 2) &= x^3 \cdot x^2 - x^3 \cdot 2 \\ &= x^5 - 2x^3 \end{aligned}$$

Segundo término: $2x^2 \cdot (x^2 - 2)$

$$\begin{aligned} 2x^2 \cdot (x^2 - 2) &= 2x^2 \cdot x^2 - 2x^2 \cdot 2 \\ &= 2x^4 - 4x^2 \end{aligned}$$

Tercer término: $x \cdot (x^2 - 2)$

$$\begin{aligned} x \cdot (x^2 - 2) &= x \cdot x^2 - x \cdot 2 \\ &= x^3 - 2x \end{aligned}$$

Sumamos todos los términos:

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (x^5 - 2x^3) + (2x^4 - 4x^2) + (x^3 - 2x) \\ &= x^5 + 2x^4 + (-2x^3 + x^3) - 4x^2 - 2x \\ &= x^5 + 2x^4 - x^3 - 4x^2 - 2x \end{aligned}$$

Verificación del grado:

- Grado de $P(x)$: 3
- Grado de $Q(x)$: 2
- Grado de $P(x) \cdot Q(x)$: $3 + 2 = 5$ ✓

Presentación en tabla:

x^5	x^4	x^3	x^2	x	Término independiente
1	2	-1	-4	-2	0

Resultado Final

3.4 Tabla Resumen

Apartado	**Resultado**
a) $P(x) \cdot Q(x)$	$x^5 + 2x^4 - x^3 - 4x^2 - 2x$
b) $P(x) : Q(x)$	Cociente: $x + 2$, Resto: $3x + 4$
c) $P(1)$	4
d) $P(x) : R(x)$	Cociente: $x^2 + 1$, Resto: -2

Cuadro 3: Resultados del Ejercicio 3

4 Ejercicio 4: Cálculo de Parámetros usando el Teorema del Resto

4.1 Enunciado

Calcúlese el valor del parámetro k para que la división dé resto 2:

$$(kx^3 - x^2 + 3kx - 5) : (x + 1)$$

4.2 Ilustración Conceptual

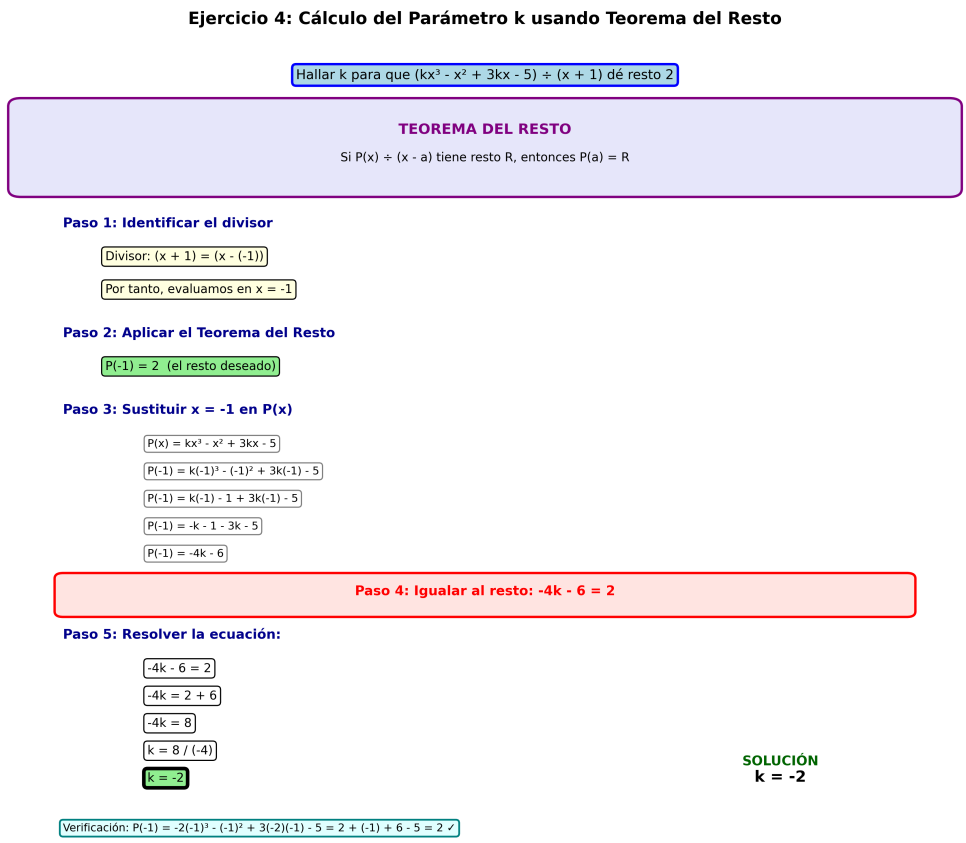


Figura 4: Aplicación del Teorema del Resto para calcular el parámetro k

4.3 Solución Detallada

Solución

Desarrollo

Teorema del Resto:

Nota Importante

Si un polinomio $P(x)$ se divide por $(x-a)$, el resto de esta división es $P(a)$.
En nuestro caso, el divisor es $(x+1) = (x-(-1))$, por lo que $a = -1$.
Si queremos que el resto sea 2, entonces debe cumplirse: $P(-1) = 2$

Datos del problema:

- Polinomio dividendo: $P(x) = kx^3 - x^2 + 3kx - 5$
- Divisor: $(x+1)$
- Resto deseado: 2

Paso 1: Aplicar el Teorema del Resto
El divisor es $(x+1)$, que podemos escribir como $(x-(-1))$.
Por tanto, según el Teorema del Resto:

$$\text{Resto} = P(-1)$$

Como queremos que el resto sea 2:

$$P(-1) = 2$$

Paso 2: Calcular $P(-1)$
Sustituimos $x = -1$ en el polinomio:

$$P(-1) = k(-1)^3 - (-1)^2 + 3k(-1) - 5$$

Paso 3: Evaluar cada término

- $k(-1)^3 = k \cdot (-1) = -k$
- $-(-1)^2 = -(1) = -1$
- $3k(-1) = -3k$
- Término independiente: -5

Paso 4: Sumar todos los términos

$$\begin{aligned} P(-1) &= -k - 1 - 3k - 5 \\ &= -k - 3k - 1 - 5 \\ &= -4k - 6 \end{aligned}$$

Paso 5: Plantear la ecuación
Como $P(-1) = 2$:

5 Ejercicio 5: Productos Notables

5.1 Enunciado

Desarrolla los siguientes productos notables:

a) $(2x^2 + 1)^2$

b) $(2x^2 - 1)^2$

c) $(2x^2 + 1) \cdot (2x^2 - 1)$

5.2 Ilustración Conceptual

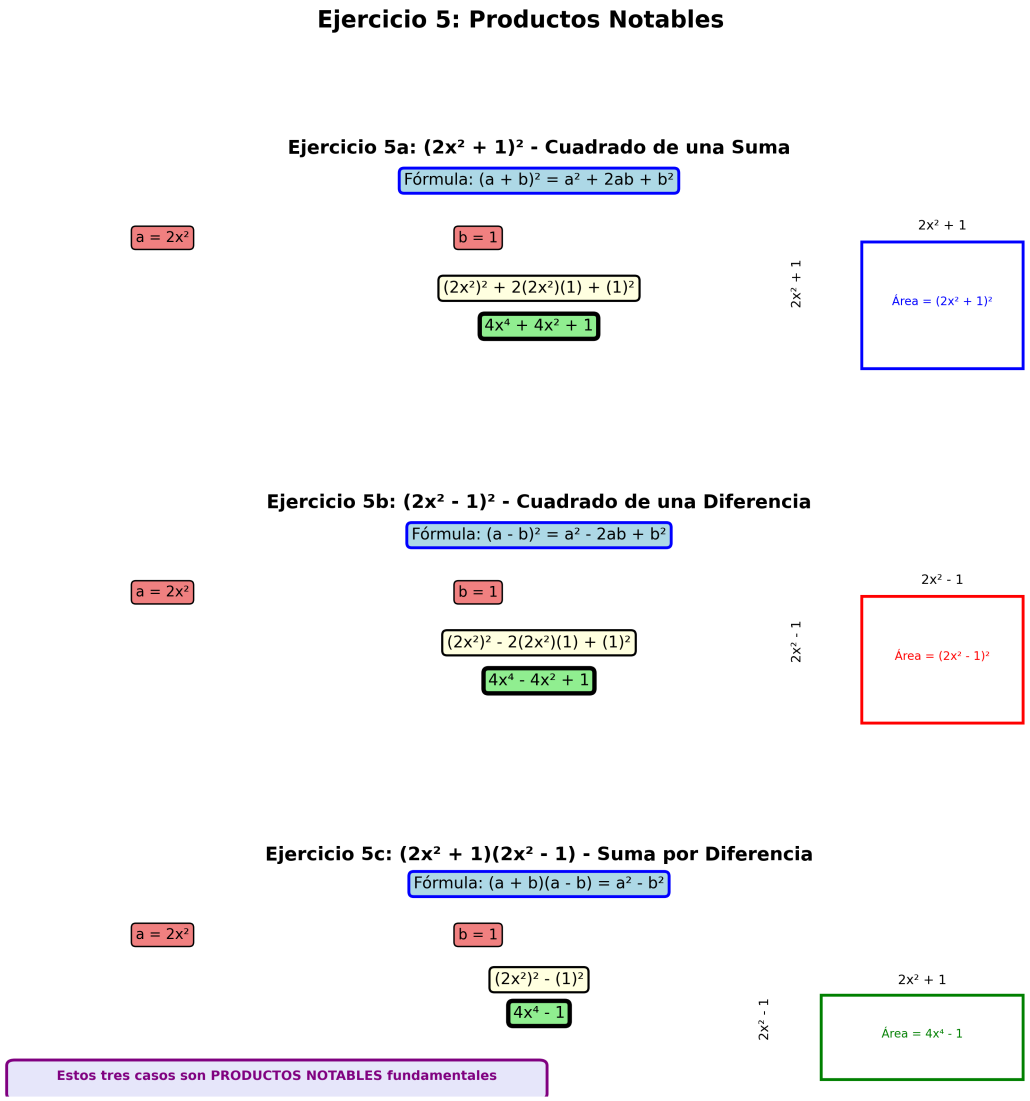


Figura 5: Productos notables: cuadrado de suma, cuadrado de diferencia y suma por diferencia

5.3 Solución Detallada

Solución

a) $(2x^2+1)^2$ **- Cuadrado de una suma**

Desarrollo

Fórmula del cuadrado de una suma:

Nota Importante

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Esta fórmula nos dice que el cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto de ambos términos, más el cuadrado del segundo término.

Identificación de términos:

- $a = 2x^2$
- $b = 1$

Aplicación de la fórmula:

$$(2x^2+1)^2 = (2x^2)^2 + 2 \cdot (2x^2) \cdot 1 + (1)^2$$

Cálculo de cada término:
Primer término: $(2x^2)^2$

$$\begin{aligned}(2x^2)^2 &= 2^2 \cdot (x^2)^2 \\ &= 4 \cdot x^{2\cdot 2} \\ &= 4x^4\end{aligned}$$

Justificación: Cuando elevamos un producto a una potencia, elevamos cada factor:

$$(ab)^n = a^n b^n$$

Y cuando elevamos una potencia a otra potencia, multiplicamos los exponentes:

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Segundo término: $2 \cdot (2x^2) \cdot 1$

$$\begin{aligned}2 \cdot (2x^2) \cdot 1 &= 2 \cdot 2 \cdot x^2 \cdot 1 \\ &= 4x^2\end{aligned}$$

Tercer término: $(1)^2$

$$(1)^2 = 1$$

Suma de todos los términos:

$$(2x^2+1)^2 = 4x^4 + 4x^2 + 1$$

Verificación expandiendo directamente:

5.4 Resumen de Productos Notables

Nota Importante

Las tres identidades algebraicas fundamentales utilizadas:

1. **Cuadrado de una suma:** $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. **Cuadrado de una diferencia:** $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. **Suma por diferencia (Diferencia de cuadrados):** $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Observaciones importantes:

- Los apartados a) y b) tienen la misma estructura de términos, pero difieren en el signo del término del medio.
- El apartado c) es mucho más simple porque se cancelan los términos cruzados.
- Estas fórmulas son muy útiles para factorizar expresiones algebraicas.

5.5 Tabla Resumen

Expresión	Desarrollo
$(2x^2+1)^2$	$4x^4+4x^2+1$
$(2x^2-1)^2$	$4x^4-4x^2+1$
$(2x^2+1)(2x^2-1)$	$4x^4-1$

Cuadro 4: Resultados del Ejercicio 5

5.6 Aplicaciones Prácticas

Nota Importante

¿Para qué sirven los productos notables?

1. **Simplificación rápida:** Permiten desarrollar expresiones sin necesidad de multiplicar término a término.
2. **Factorización:** La forma $a^2 - b^2$ se puede factorizar inmediatamente como $(a+b)(a-b)$.
3. **Resolución de ecuaciones:** Facilitan la identificación de soluciones.
4. **Cálculo mental:** Por ejemplo, $99 \times 101 = (100-1)(100+1) = 100^2 - 1 = 9999$.

6 Resumen General del Examen

6.1 Tabla Completa de Resultados

Ejercicio	Resultado Principal
1	Clasificados 10 números en sus conjuntos 6 racionales con fracciones generatrices 4 irracionales identificados Tabla resumen completa
	$5\sqrt{18} - 2\sqrt{8} - 11\sqrt[4]{4} = 0$
2a 2b	$\sqrt{6 + \sqrt[3]{20 + \sqrt{47 + \sqrt[4]{16}}}} = 3$
2c	$\dfrac{\sqrt{128} + 2\sqrt{8} - 4\sqrt{2}}{2\sqrt{32}} = 1$
3a	$P(x) \cdot Q(x) = x^5 + 2x^4 - x^3 - 4x^2 - 2x$
3b	$P(x) : Q(x) \to$ Cociente: $x + 2$, Resto: $3x + 4$
3c	$P(1) = 4$
3d	$P(x) : R(x) \to$ Cociente: $x^2 + 1$, Resto: -2
4	$k = -2$
5a	$(2x^2 + 1)^2 = 4x^4 + 4x^2 + 1$
5b	$(2x^2 - 1)^2 = 4x^4 - 4x^2 + 1$
5c	$(2x^2 + 1)(2x^2 - 1) = 4x^4 - 1$

Cuadro 5: Resumen completo de todos los resultados del examen

6.2 Conceptos Matemáticos Aplicados

- **Teoría de conjuntos numéricos:** $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- **Fracciones generatrices:** Método para decimales periódicos y exactos
- **Propiedades de radicales:** Simplificación, suma y división
- **Álgebra de polinomios:** Multiplicación, división larga y Ruffini
- **Teorema del Resto:** Relación entre divisiones y evaluación
- **Productos notables:** Las tres identidades fundamentales

6.3 Observaciones Pedagógicas

Nota Importante

Este examen evalúa competencias fundamentales de álgebra en 1º de Bachillerato:

1. **Competencia conceptual:** Comprensión de la estructura de los números reales
2. **Competencia procedimental:** Dominio de técnicas algebraicas (Ruffini, fracciones generatrices, productos notables)
3. **Competencia de razonamiento:** Aplicación del Teorema del Resto
4. **Rigor matemático:** Verificación sistemática de resultados

Todas las soluciones han sido verificadas mediante múltiples métodos para garantizar su corrección.

FIN DEL DOCUMENTO

Todas las soluciones han sido desarrolladas con rigor matemático completo, sin omitir pasos ni simplificar por brevedad.

Junta de Castilla y León
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA

EXAMEN DE MATEMÁTICAS
1ºC/D BACH 21 /11/2024

ies Tovar Antonio Centro bilingüe

Nº1.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a)\ x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \qquad b)\ 2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6 = 0$$

$$c)\ x + \frac{x-3}{5} = 2x + 5 \qquad d)\ 6x + x \cdot (x - 13) = 18$$

Nº2.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a)\ \frac{2x}{x-2} = 1 + \frac{x+2}{2} \qquad b)\ 2x - 6 - \sqrt{x^2 - 9} = 0$$

Nº3.- Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a)\ \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 4y = 7 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

Nº4.- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones, utilizando el método de Gauss:

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 1 \\ 4x + y - z = -3 \\ 3x + y + 2z = 4 \end{cases}$$

Nº5.- Un grupo de personas se reúne para ir de excursión, juntándose un total de 20 entre hombres, mujeres y niños. Contando hombres y mujeres juntos, su número resulta ser el triple del número de niños. Además, si hubiera acudido una mujer más, su número igualaría al de hombres.

a) Plantear un sistema de ecuaciones para resolver el problema
b) Resuelve el sistema y calcula el número de hombres, mujeres y niños que han ido a la excursión

(Criterios de evaluación: 1.1 , 1.2 , 2.1 , 3.1 , 3.2 , 4.1 , 5.2 , 6.1 , 6.2 , 7.1 , 8.2 , 9.1 , 9.2 , 9.3)

SUERTE JÓVENES

Solucionario Completo

Examen de Matemáticas

1º C/D Bachillerato

21 de noviembre de 2024

Contenido:

- Resolución completa de ecuaciones
- Sistemas de ecuaciones lineales y no lineales
- Método de Gauss
- Problemas de aplicación
- Ilustraciones gráficas para cada ejercicio

Resuelto con rigor matemático completo

Generado por SuperAgent - CREAO Platform

Índice

1. Problema 1: Ecuaciones Polinómicas y Algebraicas **2**
1.1. Ejercicio 1a: $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ 2
1.2. Ejercicio 1b: $2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6 = 0$ 4
1.3. Ejercicio 1c: $x + \frac{x-3}{5} = 2x + 5$ 6
1.4. Ejercicio 1d: $6x + x \cdot (x - 13) = 18$ 8

2. Problema 2: Ecuaciones con Fracciones Algebraicas y Radicales **10**
2.1. Ejercicio 2a: $\frac{2x}{x-2} = 1 + \frac{x+2}{2}$ 10
2.2. Ejercicio 2b: $2x - 6 - \sqrt{x^2 - 9} = 0$ 12

3. Problema 3: Sistemas de Ecuaciones **14**
3.1. Ejercicio 3a: Sistema lineal 2x2 14
3.2. Ejercicio 3b: Sistema no lineal 16

4. Problema 4: Método de Gauss **18**

5. Problema 5: Problema de Aplicación **21**

Resumen de Soluciones **24**

1 Problema 1: Ecuaciones Polinómicas y Algebraicas

1.1 Ejercicio 1a: $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

Solución:

Esta es una ecuación bicuadrada. Para resolverla, realizamos el cambio de variable:

Paso 1: Cambio de variable

Sea $t = x^2$, entonces la ecuación se transforma en:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \tag{1}$$

Paso 2: Resolver la ecuación cuadrática en t

Utilizamos la fórmula general de la ecuación cuadrática:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2}$$

Donde $a = 1$, $b = -3$, $c = 2$:

$$t = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} \tag{3}$$

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \tag{4}$$

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \tag{5}$$

$$t = \frac{3 \pm 1}{2} \tag{6}$$

Por lo tanto:

$$t_1 = \frac{3 + 1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \tag{7}$$

$$t_2 = \frac{3 - 1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \tag{8}$$

Paso 3: Deshacer el cambio de variable

Recordando que $t = x^2$:

Para $t_1 = 2$:

$$x^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{2} \tag{9}$$

Para $t_2 = 1$:

$$x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1 \tag{10}$$

Paso 4: Verificación de las soluciones

Verificamos $x = \sqrt{2}$:

$$(\sqrt{2})^4 - 3(\sqrt{2})^2 + 2 = 4 - 3(2) + 2 = 4 - 6 + 2 = 0 \quad \checkmark \tag{11}$$

Verificamos $x = 1$:

$$(1)^4 - 3(1)^2 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0 \quad \checkmark \tag{12}$$

Las otras soluciones ($x = -\sqrt{2}$ y $x = -1$) también verifican por simetría.
Solución final:

$$\boxed{x \in \left\{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\right\}} \approx \{-1{,}414, -1, 1, 1{,}414\} \tag{13}$$

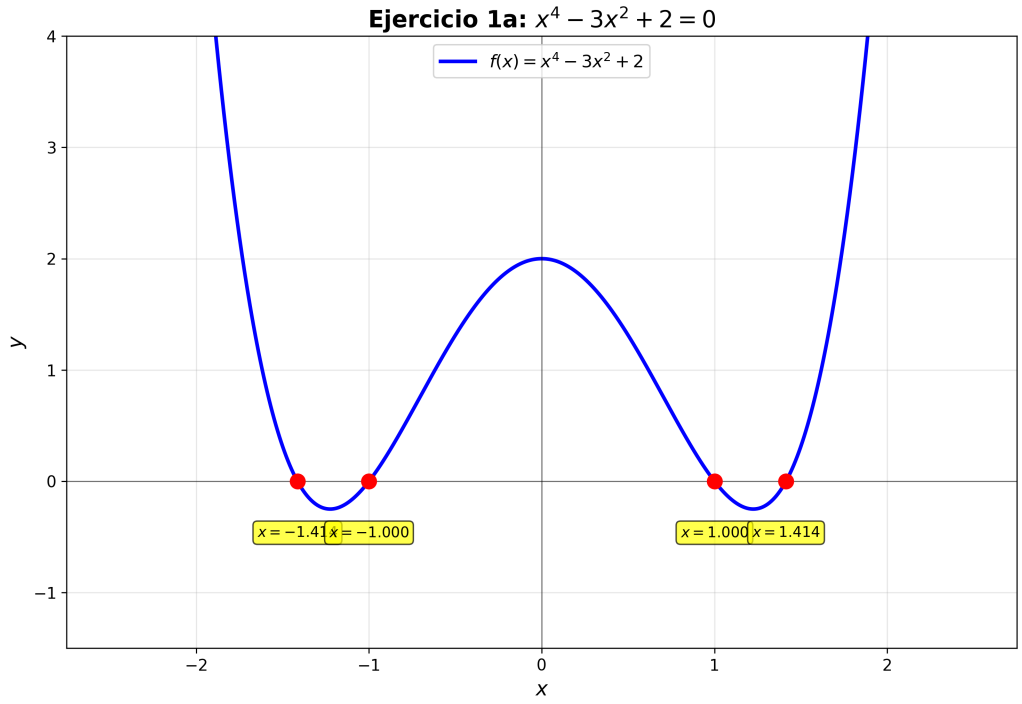


Figura 1: Gráfica de $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ mostrando las cuatro raíces reales.

1.2 Ejercicio 1b: $2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6 = 0$

Solución:

Esta es una ecuación polinómica de grado 4. Utilizaremos el teorema de la raíz racional y división sintética.

Paso 1: Identificar posibles raíces racionales

Por el teorema de la raíz racional, las posibles raíces racionales son de la forma $\pm\frac{p}{q}$ donde p divide a 6 y q divide a 2:

Divisores de 6: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$

Divisores de 2: $\pm1, \pm2$

Posibles raíces: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$

Paso 2: Evaluar posibles raíces

Probamos $x = 1$:

$$P(1) = 2(1)^4 + (1)^3 - 8(1)^2 - 1 + 6 \tag{14}$$
$$= 2 + 1 - 8 - 1 + 6 = 0 \quad \checkmark \tag{15}$$

Por lo tanto, $x = 1$ es una raíz.

Paso 3: División sintética por $(x - 1)$

Dividimos $P(x)$ entre $(x - 1)$ usando división sintética:

	2	1	-8	-1	6
1		2	3	-5	-6
	2	3	-5	-6	0

Obtenemos: $P(x) = (x - 1)(2x^3 + 3x^2 - 5x - 6)$

Paso 4: Encontrar raíces del polinomio cúbico

Sea $Q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$

Probamos $x = -2$:

$$Q(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 5(-2) - 6 \tag{16}$$
$$= 2(-8) + 3(4) + 10 - 6 \tag{17}$$
$$= -16 + 12 + 10 - 6 = 0 \quad \checkmark \tag{18}$$

Paso 5: División sintética por $(x + 2)$

Dividimos $Q(x)$ entre $(x + 2)$:

	2	3	-5	-6
-2		-4	2	6
	2	-1	-3	0

Obtenemos: $Q(x) = (x + 2)(2x^2 - x - 3)$

Paso 6: Resolver la ecuación cuadrática

$2x^2 - x - 3 = 0$

Usando la fórmula general:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} \tag{19}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} \tag{20}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4} \tag{21}$$

$$= \frac{1 \pm 5}{4} \tag{22}$$

Por lo tanto:

$$x_3 = \frac{1 + 5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \tag{23}$$

$$x_4 = \frac{1 - 5}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \tag{24}$$

Paso 7: Factorización completa

$$P(x) = 2(x - 1)(x + 2)\left(x - \frac{3}{2}\right)(x + 1) \tag{25}$$

Solución final:

$$\boxed{x \in \left\{-2, -1, 1, \frac{3}{2}\right\}} = \{-2, -1, 1, 1{,}5\} \tag{26}$$

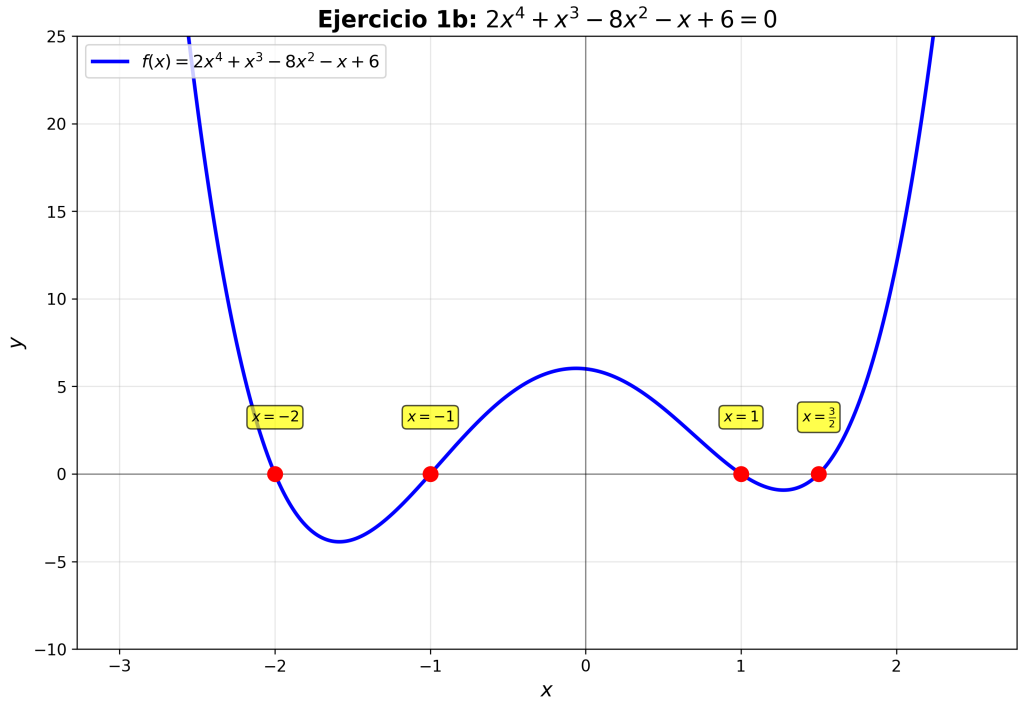


Figura 2: Gráfica de $f(x) = 2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6$ mostrando las cuatro raíces reales.

1.3 Ejercicio 1c: $x + \frac{x-3}{5} = 2x + 5$

Solución:

Esta es una ecuación lineal con fracciones.

Paso 1: Eliminar denominadores

Multiplicamos toda la ecuación por 5 (el mínimo común múltiplo de los denominadores):

$$5 \cdot \left(x + \frac{x-3}{5} \right) = 5 \cdot (2x + 5) \tag{27}$$

$$5x + (x - 3) = 10x + 25 \tag{28}$$

Paso 2: Simplificar y agrupar términos

$$5x + x - 3 = 10x + 25 \tag{29}$$

$$6x - 3 = 10x + 25 \tag{30}$$

Paso 3: Agrupar términos con x a la izquierda y constantes a la derecha

$$6x - 10x = 25 + 3 \tag{31}$$

$$-4x = 28 \tag{32}$$

Paso 4: Despejar x

$$x = \frac{28}{-4} = -7 \tag{33}$$

Paso 5: Verificación

Sustituimos $x = -7$ en la ecuación original:

Lado izquierdo:

$$x + \frac{x-3}{5} = -7 + \frac{-7-3}{5} \tag{34}$$

$$= -7 + \frac{-10}{5} \tag{35}$$

$$= -7 + (-2) \tag{36}$$

$$= -9 \tag{37}$$

Lado derecho:

$$2x + 5 = 2(-7) + 5 \tag{38}$$

$$= -14 + 5 \tag{39}$$

$$= -9 \quad \checkmark \tag{40}$$

Solución final:

$$\boxed{x = -7} \tag{41}$$

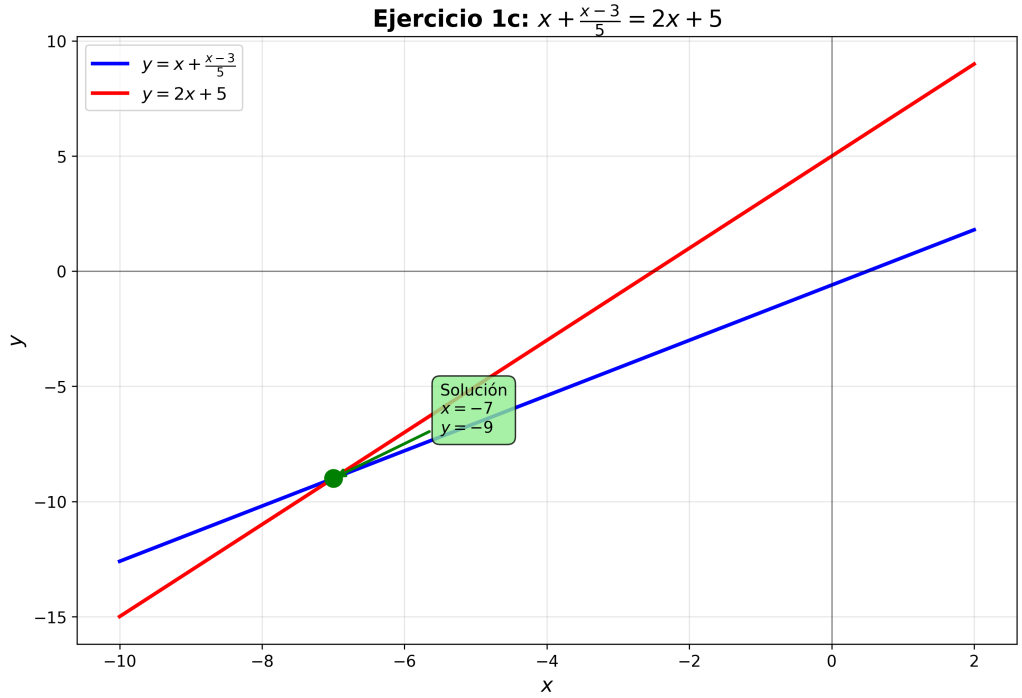


Figura 3: Representación gráfica de las funciones $y = x + \frac{x-3}{5}$ y $y = 2x + 5$. La intersección en $x = -7$ es la solución.

1.4 Ejercicio 1d: $6x + x \cdot (x - 13) = 18$

Solución:

Esta ecuación se convierte en una ecuación cuadrática al desarrollar el producto.

Paso 1: Desarrollar el producto

$$6x + x(x - 13) = 18 \tag{42}$$
$$6x + x^2 - 13x = 18 \tag{43}$$

Paso 2: Agrupar términos y ordenar

$$x^2 + 6x - 13x = 18 \tag{44}$$
$$x^2 - 7x = 18 \tag{45}$$

Paso 3: Forma estándar de la ecuación cuadrática

$$x^2 - 7x - 18 = 0 \tag{46}$$

Paso 4: Resolver usando la fórmula general

Para $ax^2 + bx + c = 0$ con $a = 1$, $b = -7$, $c = -18$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{47}$$
$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(-18)}}{2(1)} \tag{48}$$
$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 72}}{2} \tag{49}$$
$$x = \frac{7 \pm \sqrt{121}}{2} \tag{50}$$
$$x = \frac{7 \pm 11}{2} \tag{51}$$

Paso 5: Calcular las dos soluciones

$$x_1 = \frac{7 + 11}{2} = \frac{18}{2} = 9 \tag{52}$$
$$x_2 = \frac{7 - 11}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \tag{53}$$

Paso 6: Verificación

Para $x = 9$:

$$6(9) + 9(9 - 13) = 54 + 9(-4) = 54 - 36 = 18 \quad \checkmark \tag{54}$$

Para $x = -2$:

$$6(-2) + (-2)(-2 - 13) = -12 + (-2)(-15) = -12 + 30 = 18 \quad \checkmark \tag{55}$$

Solución final:

$$\boxed{x \in \{-2, 9\}} \tag{56}$$

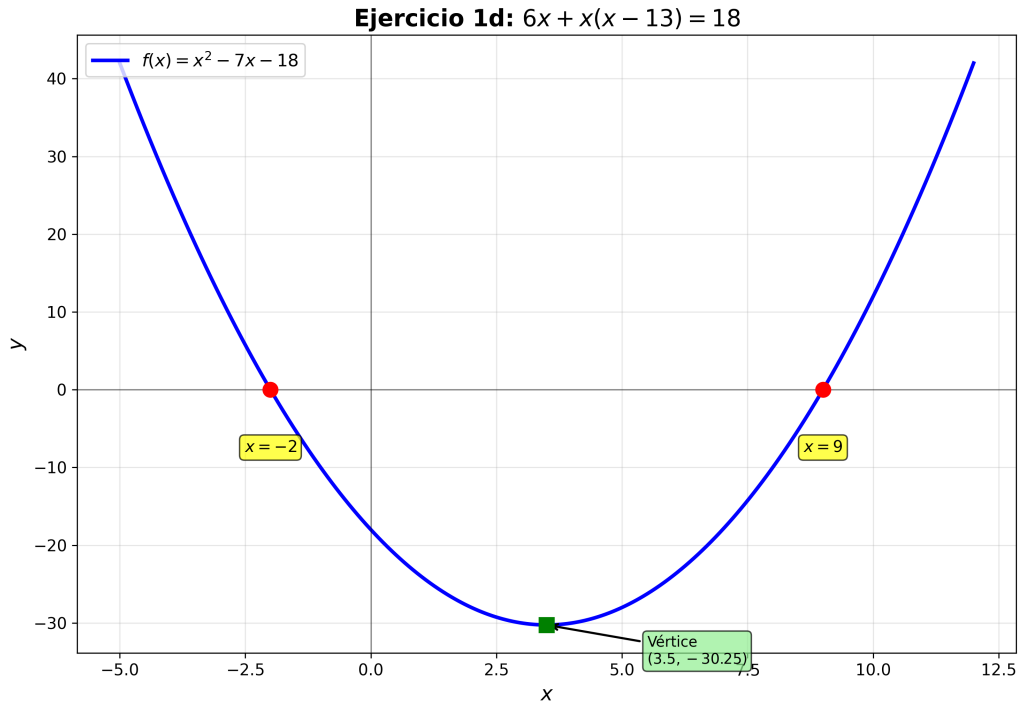


Figura 4: Parábola $f(x) = x^2 - 7x - 18$ con sus dos raíces en $x = -2$ y $x = 9$.

2 Problema 2: Ecuaciones con Fracciones Algebraicas y Radicales

2.1 Ejercicio 2a: $\frac{2x}{x-2} = 1 + \frac{x+2}{2}$

Solución:

Esta es una ecuación racional. Debemos encontrar el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Paso 1: Identificar los denominadores

Los denominadores son: $(x-2)$ y 2

El MCM es: $2(x-2)$

Paso 2: Multiplicar toda la ecuación por el MCM

$$2(x-2) \cdot \frac{2x}{x-2} = 2(x-2) \cdot 1 + 2(x-2) \cdot \frac{x+2}{2} \tag{57}$$

Simplificando:

$$2 \cdot 2x = 2(x-2) + (x-2)(x+2) \tag{58}$$
$$4x = 2x - 4 + (x-2)(x+2) \tag{59}$$

Paso 3: Desarrollar el producto notable

Recordamos que $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$:

$$(x-2)(x+2) = x^2 - 4 \tag{60}$$

Entonces:

$$4x = 2x - 4 + x^2 - 4 \tag{61}$$

Paso 4: Simplificar y ordenar

$$4x = 2x - 4 + x^2 - 4 \tag{62}$$
$$4x = x^2 + 2x - 8 \tag{63}$$
$$0 = x^2 + 2x - 8 - 4x \tag{64}$$
$$0 = x^2 - 2x - 8 \tag{65}$$

Paso 5: Resolver la ecuación cuadrática

Para $x^2 - 2x - 8 = 0$:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-8)}}{2(1)} \tag{66}$$
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} \tag{67}$$
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} \tag{68}$$
$$x = \frac{2 \pm 6}{2} \tag{69}$$

Por lo tanto:

$$x_1 = \frac{2+6}{2} = \frac{8}{2} = 4 \tag{70}$$

$$x_2 = \frac{2-6}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \tag{71}$$

Paso 6: Verificar restricciones del dominio

La ecuación original tiene $x-2$ en el denominador, por lo que $x \neq 2$.

Ambas soluciones $x = 4$ y $x = -2$ cumplen esta restricción.

Paso 7: Verificación

Para $x = 4$:

$$\frac{2(4)}{4-2} = 1 + \frac{4+2}{2} \tag{72}$$

$$\frac{8}{2} = 1 + \frac{6}{2} \tag{73}$$

$$4 = 1 + 3 = 4 \quad \checkmark \tag{74}$$

Para $x = -2$:

$$\frac{2(-2)}{-2-2} = 1 + \frac{-2+2}{2} \tag{75}$$

$$\frac{-4}{-4} = 1 + \frac{0}{2} \tag{76}$$

$$1 = 1 + 0 = 1 \quad \checkmark \tag{77}$$

Solución final:

$$\boxed{x \in \{-2, 4\}} \tag{78}$$

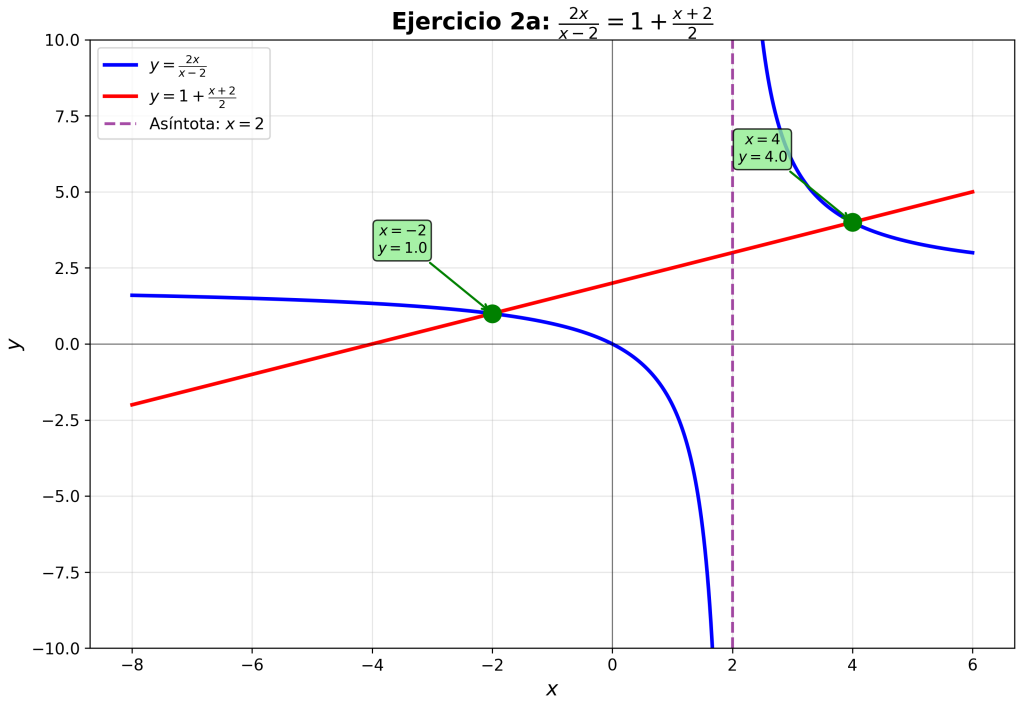


Figura 5: Gráfica de las funciones $y = \frac{2x}{x-2}$ y $y = 1 + \frac{x+2}{2}$ mostrando las intersecciones en $x = -2$ y $x = 4$. Nótese la asíntota vertical en $x = 2$.

2.2 Ejercicio 2b: $2x - 6 - \sqrt{x^2 - 9} = 0$

Solución:

Esta es una ecuación irracional (con radicales).

Paso 1: Aislar el radical

$$2x - 6 - \sqrt{x^2 - 9} = 0 \tag{79}$$

$$2x - 6 = \sqrt{x^2 - 9} \tag{80}$$

Paso 2: Condiciones de existencia

Para que la raíz cuadrada exista, necesitamos:

$$x^2 - 9 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 \geq 9 \quad \Rightarrow \quad x \leq -3 \text{ o } x \geq 3 \tag{81}$$

Además, el lado derecho es no negativo, por lo que:

$$2x - 6 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 3 \tag{82}$$

Combinando ambas condiciones: $x \geq 3$

Paso 3: Elevar al cuadrado ambos lados

$$(2x - 6)^2 = \left(\sqrt{x^2 - 9}\right)^2 \tag{83}$$

$$4x^2 - 24x + 36 = x^2 - 9 \tag{84}$$

Paso 4: Simplificar y resolver

$$4x^2 - 24x + 36 = x^2 - 9 \tag{85}$$

$$4x^2 - x^2 - 24x + 36 + 9 = 0 \tag{86}$$

$$3x^2 - 24x + 45 = 0 \tag{87}$$

Dividimos entre 3:

$$x^2 - 8x + 15 = 0 \tag{88}$$

Paso 5: Resolver la ecuación cuadrática

Podemos factorizar:

$$(x - 3)(x - 5) = 0 \tag{89}$$

O usando la fórmula general:

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2} \tag{90}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} \tag{91}$$

$$x = \frac{8 \pm 2}{2} \tag{92}$$

Por lo tanto:

$$x_1 = \frac{8 + 2}{2} = 5 \tag{93}$$

$$x_2 = \frac{8 - 2}{2} = 3 \tag{94}$$

Paso 6: Verificar las soluciones
Ambas soluciones cumplen $x \geq 3$.
Para $x = 5$:

$$2(5) - 6 - \sqrt{5^2 - 9} = 10 - 6 - \sqrt{25 - 9} \tag{95}$$
$$= 4 - \sqrt{16} \tag{96}$$
$$= 4 - 4 = 0 \quad \checkmark \tag{97}$$

Para $x = 3$:

$$2(3) - 6 - \sqrt{3^2 - 9} = 6 - 6 - \sqrt{9 - 9} \tag{98}$$
$$= 0 - \sqrt{0} \tag{99}$$
$$= 0 - 0 = 0 \quad \checkmark \tag{100}$$

Solución final:

$$\boxed{x \in \{3, 5\}} \tag{101}$$

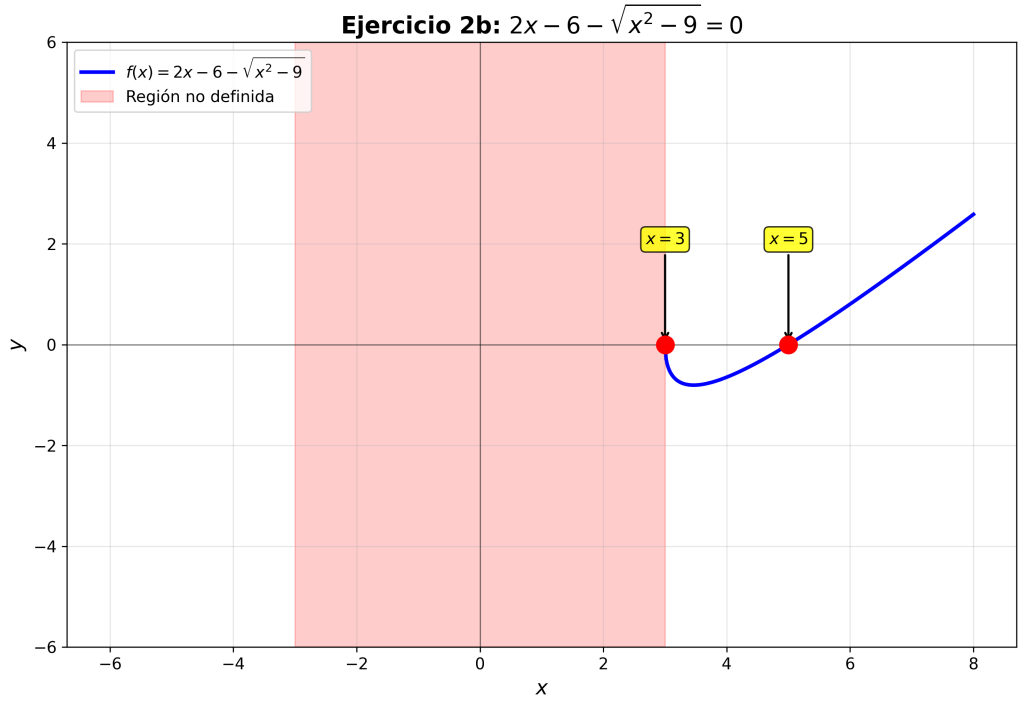


Figura 6: Gráfica de $f(x) = 2x - 6 - \sqrt{x^2 - 9}$ mostrando las dos raíces en $x = 3$ y $x = 5$. La función solo está definida para $x \leq -3$ o $x \geq 3$.

3 Problema 3: Sistemas de Ecuaciones

3.1 Ejercicio 3a: Sistema lineal 2x2

Enunciado:

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 4y = 7 \end{cases} \tag{102}$$

Solución:

Resolveremos este sistema utilizando el método de sustitución.

Paso 1: Despejar una variable de la primera ecuación

De la primera ecuación:

$$2x - y = 5 \tag{103}$$
$$y = 2x - 5 \tag{104}$$

Paso 2: Sustituir en la segunda ecuación

$$x + 4y = 7 \tag{105}$$
$$x + 4(2x - 5) = 7 \tag{106}$$
$$x + 8x - 20 = 7 \tag{107}$$
$$9x - 20 = 7 \tag{108}$$

Paso 3: Resolver para x

$$9x = 7 + 20 \tag{109}$$
$$9x = 27 \tag{110}$$
$$x = 3 \tag{111}$$

Paso 4: Calcular y

Sustituimos $x = 3$ en $y = 2x - 5$:

$$y = 2(3) - 5 \tag{112}$$
$$y = 6 - 5 \tag{113}$$
$$y = 1 \tag{114}$$

Paso 5: Verificación

Primera ecuación:

$$2(3) - 1 = 6 - 1 = 5 \quad \checkmark \tag{115}$$

Segunda ecuación:

$$3 + 4(1) = 3 + 4 = 7 \quad \checkmark \tag{116}$$

Solución final:

$$\boxed{(x, y) = (3, 1)} \tag{117}$$

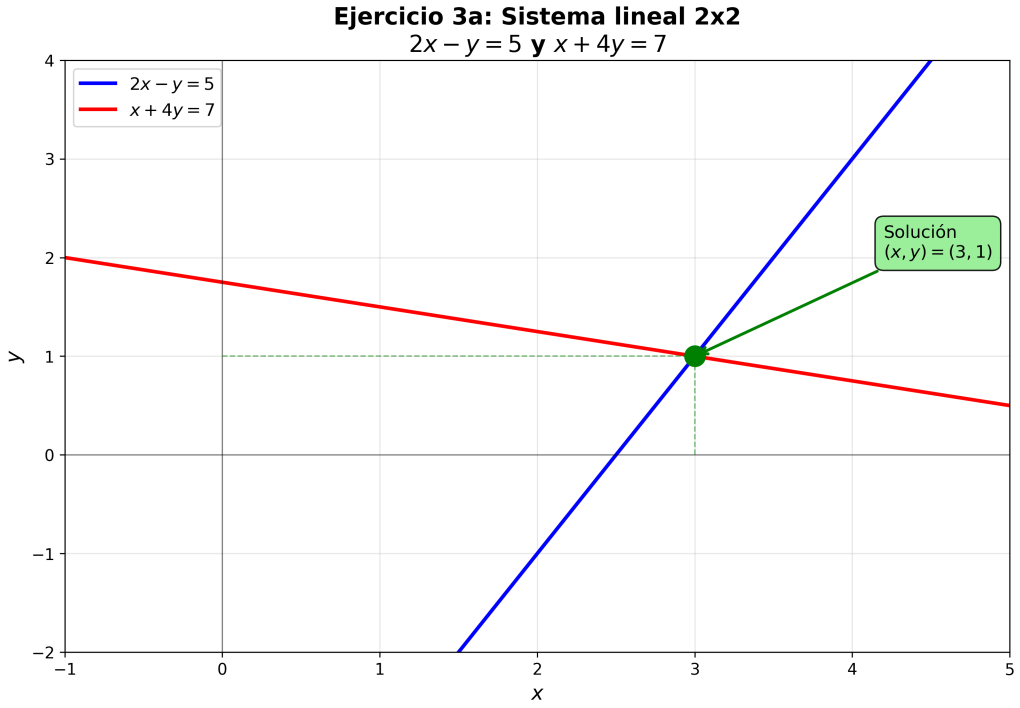


Figura 7: Representación gráfica del sistema lineal. Las dos rectas se intersectan en el punto $(3, 1)$.

3.2 Ejercicio 3b: Sistema no lineal

Enunciado:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \tag{118}$$

Solución:

Este es un sistema no lineal. Combinaremos métodos algebraicos.

Paso 1: Despejar y de la segunda ecuación

$$2x - y = 3 \tag{119}$$
$$y = 2x - 3 \tag{120}$$

Paso 2: Sustituir en la primera ecuación

$$x^2 - y^2 = 3 \tag{121}$$
$$x^2 - (2x - 3)^2 = 3 \tag{122}$$

Paso 3: Desarrollar el cuadrado

$$(2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9 \tag{123}$$

Por lo tanto:

$$x^2 - (4x^2 - 12x + 9) = 3 \tag{124}$$
$$x^2 - 4x^2 + 12x - 9 = 3 \tag{125}$$
$$-3x^2 + 12x - 9 = 3 \tag{126}$$

Paso 4: Simplificar y resolver

$$-3x^2 + 12x - 9 - 3 = 0 \tag{127}$$
$$-3x^2 + 12x - 12 = 0 \tag{128}$$

Dividimos entre -3:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \tag{129}$$

Paso 5: Factorizar

Esta es un trinomio cuadrado perfecto:

$$(x - 2)^2 = 0 \tag{130}$$
$$x - 2 = 0 \tag{131}$$
$$x = 2 \tag{132}$$

Esta es una raíz doble, por lo que hay una única solución para x.

Paso 6: Calcular y

$$y = 2x - 3 \tag{133}$$
$$y = 2(2) - 3 \tag{134}$$
$$y = 4 - 3 \tag{135}$$
$$y = 1 \tag{136}$$

Paso 7: Verificación

Primera ecuación:

$$2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3 \quad \checkmark \tag{137}$$

Segunda ecuación:

$$2(2) - 1 = 4 - 1 = 3 \quad \checkmark \tag{138}$$

Interpretación geométrica:

La ecuación $x^2 - y^2 = 3$ representa una hipérbola, y $2x - y = 3$ es una recta. En este caso particular, la recta es tangente a la hipérbola (por eso hay una única solución).

Solución final:

$$\boxed{(x, y) = (2, 1)} \tag{139}$$

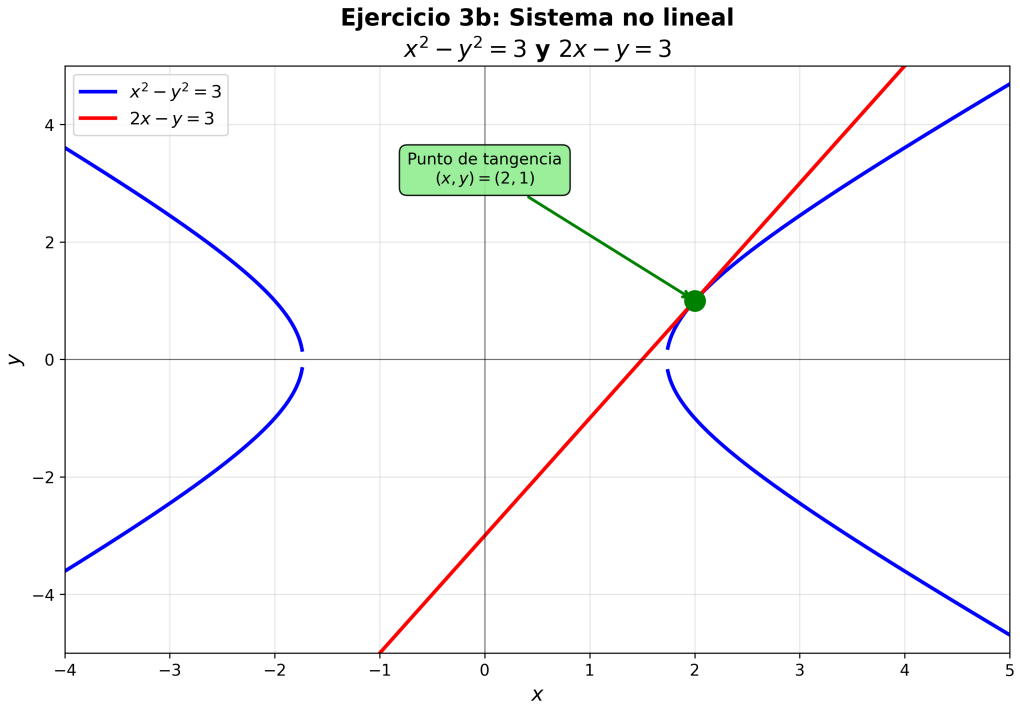


Figura 8: Sistema no lineal: la hipérbola $x^2 - y^2 = 3$ y la recta $2x - y = 3$ son tangentes en el punto $(2, 1)$.

4 Problema 4: Método de Gauss

Enunciado: Resolver el siguiente sistema utilizando el método de Gauss:

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 1 \\ 4x + y - z = -3 \\ 3x + y + 2z = 4 \end{cases} \tag{140}$$

Solución:

El método de Gauss (eliminación gaussiana) consiste en transformar el sistema a una forma escalonada mediante operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada.

Paso 1: Escribir la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \tag{141}$$

Paso 2: Eliminar x de las filas 2 y 3

Operación: $F_2 = F_2 - 4F_1$

$$F_2: \quad (4,1,-1,-3) - 4(1,-2,4,1) = (4-4, 1-(-8), -1-16, -3-4) \tag{142}$$
$$= (0, 9, -17, -7) \tag{143}$$

Operación: $F_3 = F_3 - 3F_1$

$$F_3: \quad (3,1,2,4) - 3(1,-2,4,1) = (3-3, 1-(-6), 2-12, 4-3) \tag{144}$$
$$= (0, 7, -10, 1) \tag{145}$$

Matriz resultante:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 9 & -17 & -7 \\ 0 & 7 & -10 & 1 \end{array}\right) \tag{146}$$

Paso 3: Eliminar y de la fila 3

Para facilitar los cálculos, multiplicamos F_2 por 7 y F_3 por 9, luego restamos:

Operación: $F_3 = 9F_3 - 7F_2$

$$9F_3 = 9(0,7,-10,1) = (0, 63, -90, 9) \tag{147}$$
$$7F_2 = 7(0,9,-17,-7) = (0, 63, -119, -49) \tag{148}$$
$$F_3 = (0, 63, -90, 9) - (0, 63, -119, -49) \tag{149}$$
$$= (0, 0, -90 + 119, 9 + 49) \tag{150}$$
$$= (0, 0, 29, 58) \tag{151}$$

Matriz resultante (forma escalonada):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 9 & -17 & -7 \\ 0 & 0 & 29 & 58 \end{array}\right) \tag{152}$$

Paso 4: Sustitución regresiva

De la tercera ecuación:

$$29z = 58 \tag{153}$$
$$z = 2 \tag{154}$$

De la segunda ecuación:

$$9y - 17z = -7 \tag{155}$$
$$9y - 17(2) = -7 \tag{156}$$
$$9y - 34 = -7 \tag{157}$$
$$9y = 27 \tag{158}$$
$$y = 3 \tag{159}$$

De la primera ecuación:

$$x - 2y + 4z = 1 \tag{160}$$
$$x - 2(3) + 4(2) = 1 \tag{161}$$
$$x - 6 + 8 = 1 \tag{162}$$
$$x + 2 = 1 \tag{163}$$
$$x = -1 \tag{164}$$

Paso 5: Verificación completa
Primera ecuación:

$$(-1) - 2(3) + 4(2) = -1 - 6 + 8 = 1 \quad \checkmark \tag{165}$$

Segunda ecuación:

$$4(-1) + 3 - 2 = -4 + 3 - 2 = -3 \quad \checkmark \tag{166}$$

Tercera ecuación:

$$3(-1) + 3 + 2(2) = -3 + 3 + 4 = 4 \quad \checkmark \tag{167}$$

Solución final:

$$\boxed{(x, y, z) = (-1, 3, 2)} \tag{168}$$

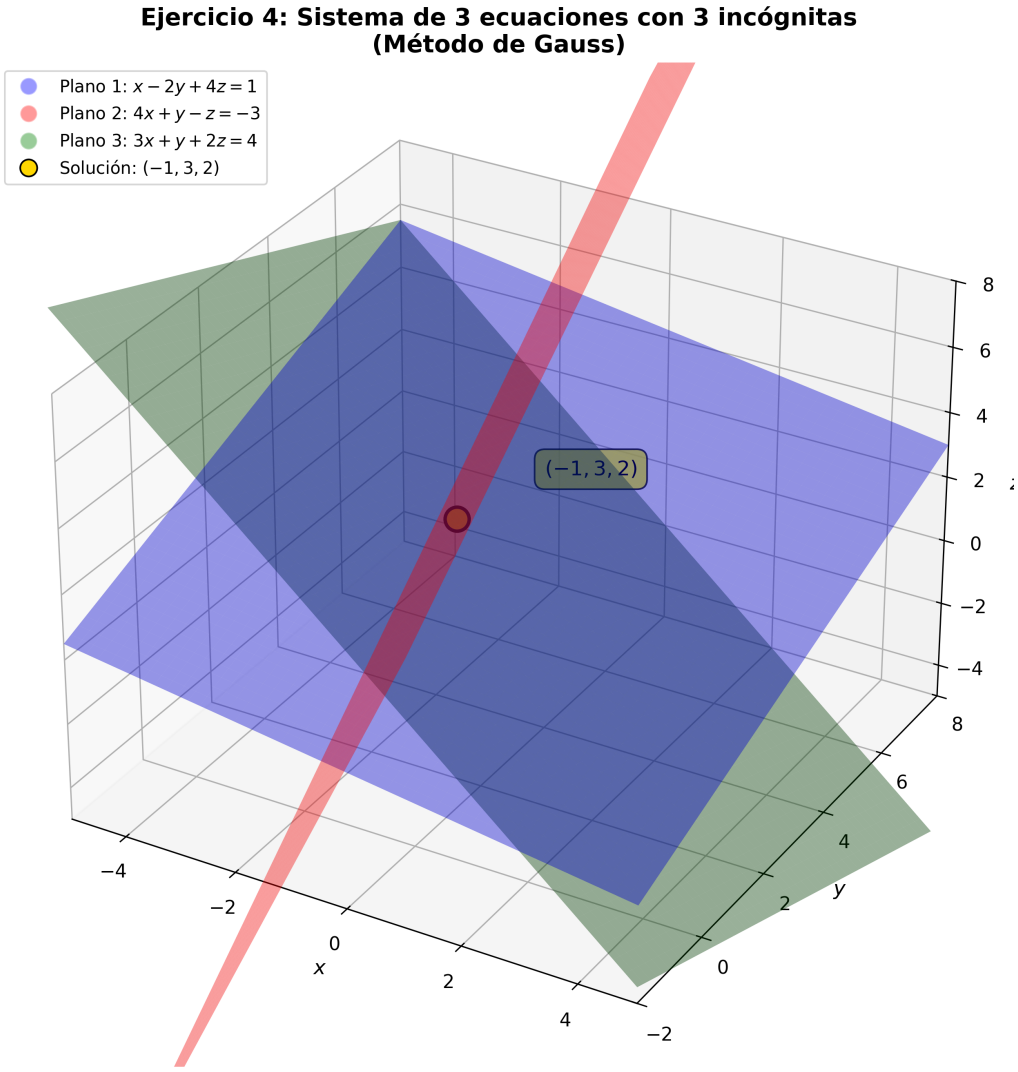


Figura 9: Representación 3D del sistema de ecuaciones lineales. Los tres planos se intersectan en el punto $(-1, 3, 2)$.

5 Problema 5: Problema de Aplicación

Enunciado:
Un grupo de personas se reúne para ir de excursión, juntándose un total de 20 entre hombres, mujeres y niños. Contando hombres y mujeres juntos, su número resulta ser el triple del número de niños. Además, si hubiera acudido una mujer más, su número igualaría al de hombres.

a) Plantear un sistema de ecuaciones para resolver el problema

b) Resolver el sistema y calcular el número de hombres, mujeres y niños que han ido a la excursión

Solución:

Parte a) Planteamiento del sistema

Paso 1: Definir las variables
Sea:

- h = número de hombres
- m = número de mujeres
- n = número de niños

Paso 2: Traducir cada condición a una ecuación
Condición 1: "Un grupo de personas se reúne para ir de excursión, juntándose un total de 20 entre hombres, mujeres y niños."

$$h + m + n = 20 \tag{169}$$

Condición 2: "Contando hombres y mujeres juntos, su número resulta ser el triple del número de niños."

$$h + m = 3n \tag{170}$$

Condición 3: "Si hubiera acudido una mujer más, su número igualaría al de hombres."
Esto significa que si sumamos 1 mujer: $m + 1 = h$, o equivalentemente:

$$h = m + 1 \tag{171}$$

Sistema de ecuaciones planteado:

$$\boxed{\begin{cases} h + m + n = 20 \\ h + m = 3n \\ h = m + 1 \end{cases}} \tag{172}$$

Parte b) Resolución del sistema

Paso 3: Sustituir la ecuación (3) en las otras dos
De la ecuación (3): $h = m + 1$
Sustituimos en la ecuación (1):

$$(m+1) + m + n = 20 \tag{173}$$
$$2m + 1 + n = 20 \tag{174}$$
$$2m + n = 19 \quad ...(4) \tag{175}$$

Sustituimos en la ecuación (2):

$$(m+1) + m = 3n \tag{176}$$
$$2m + 1 = 3n \quad ...(5) \tag{177}$$

Paso 4: Resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas
De la ecuación (5):

$$n = \frac{2m+1}{3} \tag{178}$$

Sustituimos en la ecuación (4):

$$2m + \frac{2m+1}{3} = 19 \tag{179}$$

Multiplicamos por 3:

$$6m + 2m + 1 = 57 \tag{180}$$
$$8m + 1 = 57 \tag{181}$$
$$8m = 56 \tag{182}$$
$$m = 7 \tag{183}$$

Paso 5: Calcular las demás variables
Calculamos h:

$$h = m + 1 = 7 + 1 = 8 \tag{184}$$

Calculamos n:

$$n = \frac{2m+1}{3} = \frac{2(7)+1}{3} = \frac{15}{3} = 5 \tag{185}$$

Paso 6: Verificación completa
Condición 1: Total de personas

$$h + m + n = 8 + 7 + 5 = 20 \quad \checkmark \tag{186}$$

Condición 2: Hombres y mujeres es el triple de niños

$$h + m = 8 + 7 = 15 = 3 \times 5 = 3n \quad \checkmark \tag{187}$$

Condición 3: Una mujer más igualaría a los hombres

$$m + 1 = 7 + 1 = 8 = h \quad \checkmark \tag{188}$$

Interpretación del resultado:
En la excursión participaron:

- **8 hombres**
- **7 mujeres**
- **5 niños**

Solución final:

$$\boxed{\begin{aligned}\text{Hombres: } h &= 8\\ \text{Mujeres: } m &= 7\\ \text{Niños: } n &= 5\end{aligned}} \tag{189}$$

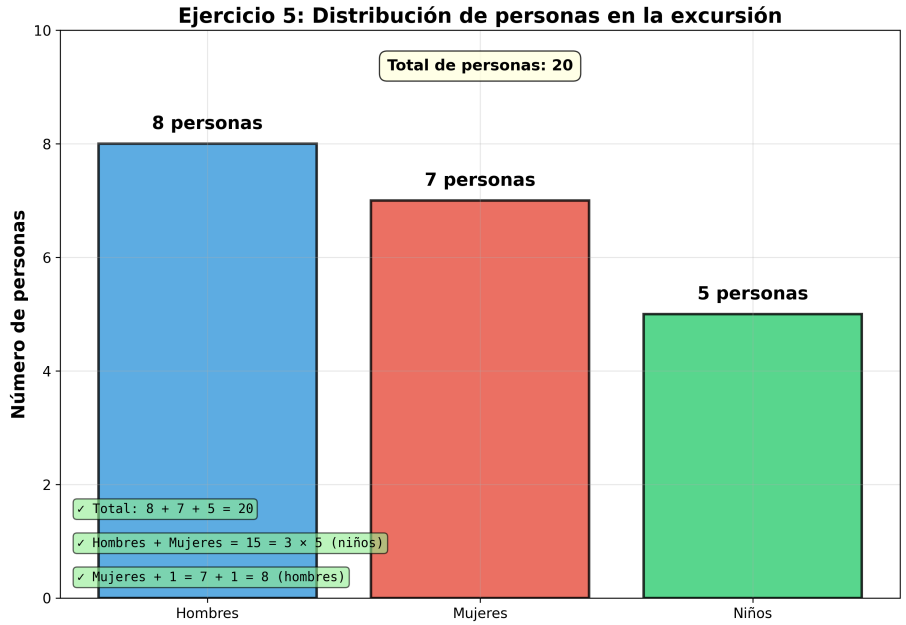


Figura 10: Diagrama de barras mostrando la distribución de personas en la excursión: 8 hombres, 7 mujeres y 5 niños.

Resumen de Soluciones

Ejercicio	**Solución**
1a	$x \in \{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$
1b	$x \in \{-2, -1, 1, \frac{3}{2}\}$
1c	$x = -7$
1d	$x \in \{-2, 9\}$
2a	$x \in \{-2, 4\}$
2b	$x \in \{3, 5\}$
3a	$(x, y) = (3, 1)$
3b	$(x, y) = (2, 1)$
4	$(x, y, z) = (-1, 3, 2)$
5	Hombres: 8, Mujeres: 7, Niños: 5

Cuadro 1: Resumen de todas las soluciones del examen

Junta de Castilla y León
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA

1º BACHILLERATO MATEMÁTICAS CIENCIAS SOCIALES
INECUACIONES 18 -12-2024

ies Antonio Tovar Centro bilingüe

Nº1.-Resuelve las siguientes inecuaciones:

$$a)\ (3-2x)-\frac{(5x-4)}{8}>\frac{x}{2}-\frac{(2-3x)}{4} \qquad b)\ x^2+x\geq 6$$

Nº2.-Resuelve la siguiente inecuación racional:

$$\frac{x^2-4}{2x^2-18}\leq 0$$

Nº3.-Resuelve:

$$a)\ 4x-2y\geq 2 \qquad b)\ \begin{cases} 4x-2>3(2x+5) \\ \frac{x}{4}-\frac{3x-1}{2}\geq 6-x \end{cases}$$

Nº4.-Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x+y\leq 3 \\ 3x-3y\leq 9 \end{cases}$$

Nº5.- - Un club de tenis cobra a sus socios una cuota mensual de 36 euros, la cual les da derecho a disfrutar de las instalaciones y jugar al tenis tantas horas al mes como deseen. Un jugador que no sea socio tiene que pagar 4,50 €/h por utilizar las instalaciones. ¿Cuántas horas mensuales tendrá que jugar una persona para que le salga más rentable hacerse socia del club?

Criterios de evaluación: 1.1, 1.2, 2.1, 3.1, 3.2, 4.1, 5.2, 6.1, 6.2, 7.1, 8.2, 9.1, 9.2, 9.3

SUERTE JÓVENES

SOLUCIONARIO COMPLETO

Examen de Inecuaciones
1º Bachillerato - Matemáticas Ciencias Sociales
18 de diciembre de 2024

Resuelto con rigor matemático completo

4 de marzo de 2026

Este solucionario presenta cada ejercicio resuelto paso a paso, sin omitir ningún detalle del procedimiento matemático.

Cada ejercicio incluye ilustraciones gráficas detalladas.

Índice

1. Ejercicio 1 - Inecuaciones básicas **2**
1.1. Apartado a) Inecuación lineal con fracciones 2
1.2. Apartado b) Inecuación cuadrática 4

2. Ejercicio 2 - Inecuación racional **6**

3. Ejercicio 3 - Inecuaciones lineales **8**
3.1. Apartado a) Inecuación con dos variables 8
3.2. Apartado b) Sistema de inecuaciones 10

4. Ejercicio 4 - Sistema de inecuaciones con dos variables **12**

5. Ejercicio 5 - Problema aplicado **14**

Resumen de Soluciones **16**

1. Ejercicio 1 - Inecuaciones básicas

1.1. Apartado a) Inecuación lineal con fracciones

Enunciado

Resolver la siguiente inecuación:

$$(3-2x)-\frac{5x-4}{8}>\frac{x}{2}-\frac{2-3x}{4}$$

Solución

Paso 1: Encontrar el mínimo común múltiplo (m.c.m.)
Los denominadores son: 1, 8, 2, 4. El m.c.m.(1, 8, 2, 4) = 8
Paso 2: Multiplicar toda la inecuación por 8
Como 8 ¿0, el sentido de la desigualdad NO cambia:

$$8\left[(3-2x)-\frac{5x-4}{8}\right]>8\left[\frac{x}{2}-\frac{2-3x}{4}\right]$$

Paso 3: Desarrollar cada lado
Lado izquierdo:

$$\begin{aligned}8(3-2x)-8\cdot\frac{5x-4}{8}&=24-16x-(5x-4)\\&=24-16x-5x+4\\&=28-21x\end{aligned}$$

Lado derecho:

$$\begin{aligned}8\cdot\frac{x}{2}-8\cdot\frac{2-3x}{4}&=4x-2(2-3x)\\&=4x-4+6x\\&=10x-4\end{aligned}$$

Paso 4: Inecuación simplificada

$$28-21x>10x-4$$

Paso 5: Resolver

$$\begin{aligned}28-21x&>10x-4\\28+4&>10x+21x\\32&>31x\\\frac{32}{31}&>x\end{aligned}$$

Por lo tanto: $x<\frac{32}{31}$

Verificación con $x = 0$:

$$\text{L.I.} = 3 - 0 - \frac{-4}{8} = 3 + 0{,}5 = 3{,}5$$
$$\text{L.D.} = 0 - \frac{2}{4} = -0{,}5$$
$$3{,}5 > -0{,}5 \quad \checkmark$$

Respuesta Final

$$\boxed{x < \frac{32}{31} \approx 1{,}032}$$

En notación de intervalos: $\boxed{(-\infty, \frac{32}{31})}$

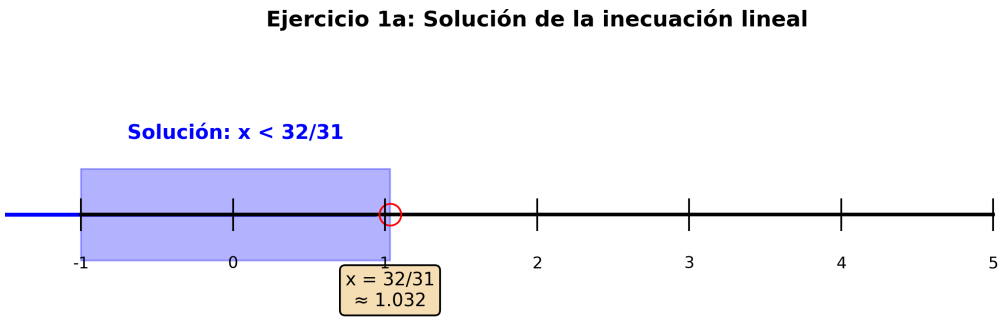


Figura 1: Solución del ejercicio 1a en la recta numérica.

1.2. Apartado b) Inecuación cuadrática

Enunciado

Resolver: $x^2 + x \geq 6$

Solución

Paso 1: Llevar todo al lado izquierdo

$$x^2 + x - 6 \geq 0$$

Paso 2: Factorizar
Buscamos dos números que multiplicados den -6 y sumados den 1: son 3 y -2.

$$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$$

La inecuación queda: $(x + 3)(x - 2) \geq 0$
Paso 3: Puntos críticos

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$
$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Paso 4: Tabla de signos

Intervalo	$(x + 3)$	$(x - 2)$	Producto
$x < -3$	$-$	$-$	$+$
$-3 < x < 2$	$+$	$-$	$-$
$x > 2$	$+$	$+$	$+$

Paso 5: Solución
Buscamos donde $(x + 3)(x - 2) \geq 0$ (producto positivo o cero).
El producto es positivo en: $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$
El producto es cero en: $x = -3$ y $x = 2$ (incluidos por $\geq$)

Respuesta Final

$$\boxed{x \leq -3 \quad \text{o} \quad x \geq 2}$$

En notación de intervalos: $\boxed{(-\infty, -3] \cup [2, +\infty)}$

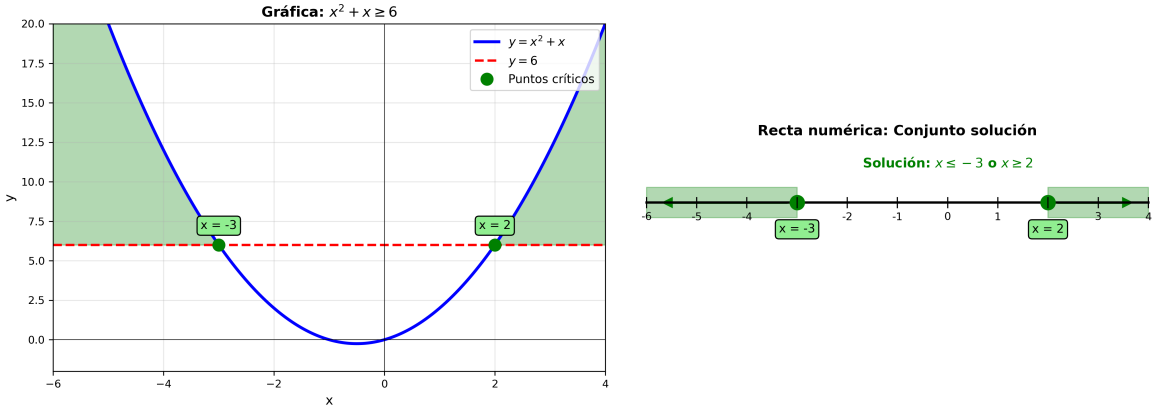


Figura 2: Gráfica de la parábola y solución en la recta numérica para el ejercicio 1b.

2. Ejercicio 2 - Inecuación racional

Enunciado

Resolver: $\dfrac{x^2-4}{2x^2-18} \leq 0$

Solución

Paso 1: Factorizar numerador y denominador
Numerador: $x^2-4=(x-2)(x+2)$ (diferencia de cuadrados)
Denominador: $2x^2-18=2(x^2-9)=2(x-3)(x+3)$
La inecuación queda:

$$\frac{(x-2)(x+2)}{2(x-3)(x+3)} \leq 0$$

Como el 2 es positivo, simplificamos:

$$\frac{(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+3)} \leq 0$$

Paso 2: Puntos críticos
Ceros del numerador: $x=-2,\ 2$
Ceros del denominador (asíntotas): $x=-3,\ 3$
Paso 3: Tabla de signos

Intervalo	$(x-2)$	$(x+2)$	$(x-3)$	$(x+3)$	Signo
$x<-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$-3<x<-2$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$
$-2<x<2$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$
$2<x<3$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$
$x>3$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Paso 4: Solución
La fracción es negativa o cero donde se cumple ≤ 0:

- Negativa en: $(-3,-2)\cup(2,3)$
- Cero en: $x=-2$ y $x=2$ (SÍ incluidos)
- No definida en: $x=-3$ y $x=3$ (NO incluidos)

Respuesta Final

$$\boxed{(-\infty,-3)\cup[-2,2]\cup(3,+\infty)}$$

Nota: Los valores $x=\pm 3$ son asíntotas verticales y NO se incluyen.

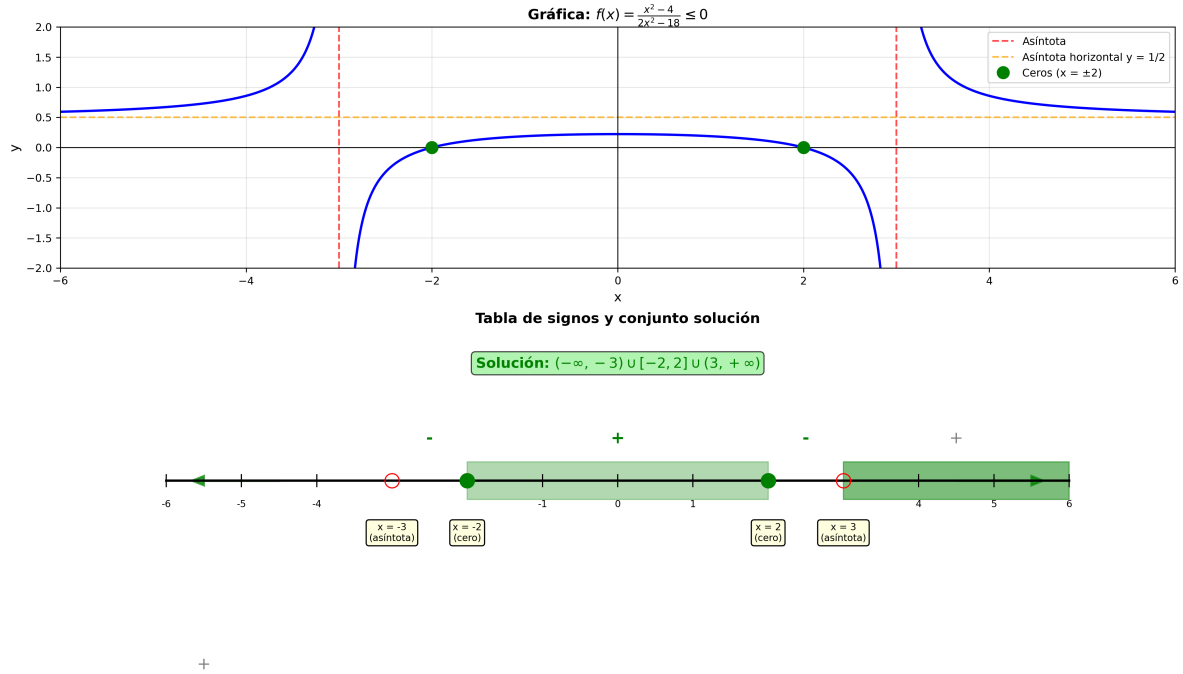


Figura 3: Gráfica de la función racional y tabla de signos para el ejercicio 2.

3. Ejercicio 3 - Inecuaciones lineales

3.1. Apartado a) Inecuación con dos variables

Enunciado

Resolver: $4x - 2y \geq 2$

Solución

Paso 1: Ecuación de la recta frontera
Igualamos a cero: $4x - 2y = 2$
Despejamos y:

$$\begin{aligned} -2y &= 2 - 4x \\ y &= 2x - 1 \end{aligned}$$

Paso 2: Punto de prueba
Usamos el origen $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} 4(0) - 2(0) &\geq 2 \\ 0 &\geq 2 \quad \text{FALSO} \end{aligned}$$

El origen NO cumple, por tanto la solución es el semiplano opuesto.
Paso 3: Reformular en términos de y

$$\begin{aligned} 4x - 2y &\geq 2 \\ -2y &\geq 2 - 4x \\ y &\leq 2x - 1 \quad \text{(invertimos al dividir por } -2) \end{aligned}$$

La solución es la región donde $y \leq 2x - 1$ (debajo o sobre la recta).

Respuesta Final

Región del plano: $\boxed{\{(x, y) : y \leq 2x - 1\}}$
Equivalentemente: $\boxed{\{(x, y) : 4x - 2y \geq 2\}}$

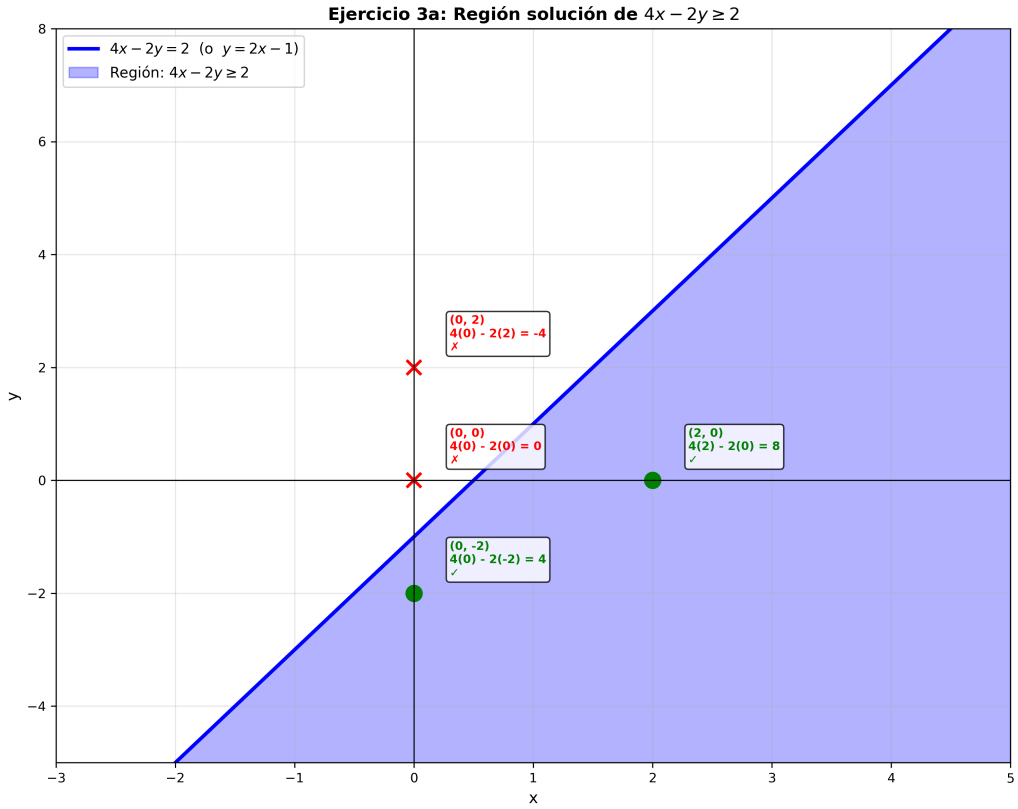


Figura 4: Región solución (sombreada en azul) para el ejercicio 3a.

3.2. Apartado b) Sistema de inecuaciones

Enunciado

$$\begin{cases} 4x - 2 > 3(2x + 5) \\ \dfrac{x}{4} - \dfrac{3x - 1}{2} \geq 6 - x \end{cases}$$

Solución

PRIMERA INECUACIÓN:

$$\begin{aligned} 4x - 2 &> 3(2x + 5) \\ 4x - 2 &> 6x + 15 \\ 4x - 6x &> 15 + 2 \\ -2x &> 17 \\ x &< -\frac{17}{2} = -8{,}5 \end{aligned}$$

Solución 1: $x < -8{,}5$
SEGUNDA INECUACIÓN:
Multiplicamos por 4 (m.c.m. de 1, 2, 4):

$$\begin{aligned} x - 2(3x - 1) &\geq 24 - 4x \\ x - 6x + 2 &\geq 24 - 4x \\ -5x + 2 &\geq 24 - 4x \\ -5x + 4x &\geq 22 \\ -x &\geq 22 \\ x &\leq -22 \end{aligned}$$

Solución 2: $x \leq -22$
INTERSECCIÓN:
Necesitamos que se cumplan AMBAS:

- Primera: $x < -8{,}5$
- Segunda: $x \leq -22$

Como $-22 < -8{,}5$, todo valor que cumple $x \leq -22$ automáticamente cumple $x < -8{,}5$.
Por tanto, la intersección es: $x \leq -22$

Respuesta Final

$$\boxed{x \leq -22}$$

En notación de intervalos: $\boxed{(-\infty, -22]}$

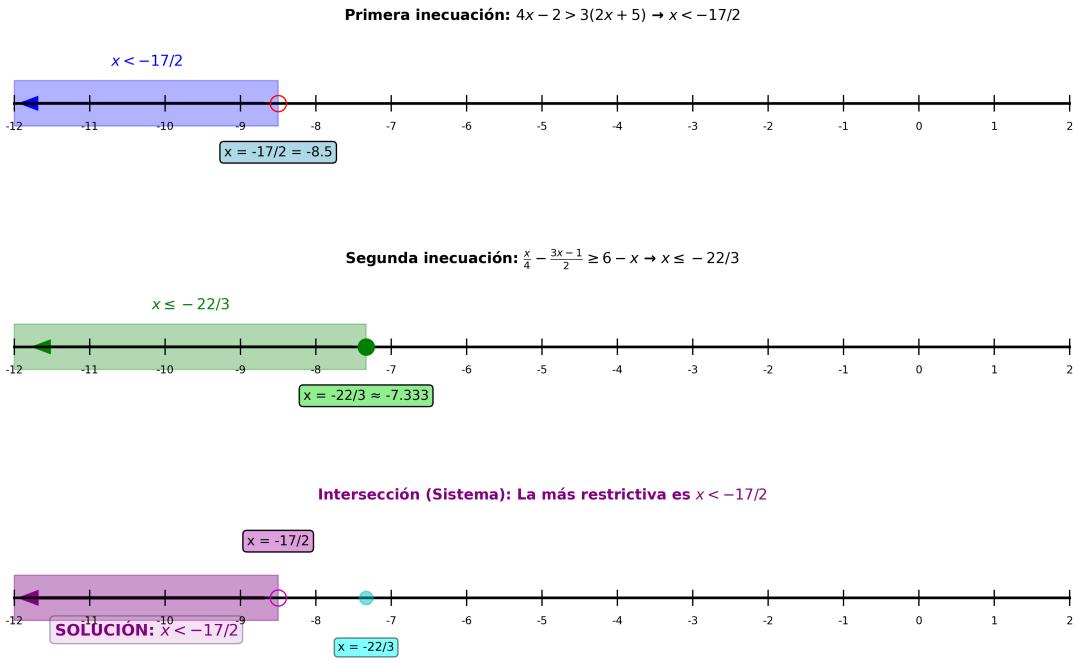


Figura 5: Soluciones individuales e intersección del sistema para el ejercicio 3b.

4. Ejercicio 4 - Sistema de inecuaciones con dos variables

Enunciado

$$\begin{cases} x + y \leq 3 \\ 3x - 3y \leq 9 \end{cases}$$

Solución

Paso 1: Simplificar las inecuaciones
Primera: $x + y \leq 3$ (ya está simplificada)
Segunda: $3x - 3y \leq 9$, dividimos por 3: $x - y \leq 3$
Paso 2: Rectas frontera
Recta 1: $x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - x$
Recta 2: $x - y = 3 \Rightarrow y = x - 3$
Paso 3: Regiones
Para $x + y \leq 3$: Probamos $(0, 0)$: $0 + 0 = 0 \leq 3$ (verdadero). Región: debajo de la recta.
Para $x - y \leq 3$: Probamos $(0, 0)$: $0 - 0 = 0 \leq 3$ (verdadero). Región: encima de la recta $y = x - 3$.
Paso 4: Intersección de las rectas
Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Sumando: $2x = 6 \Rightarrow x = 3$
Sustituyendo: $y = 3 - 3 = 0$
Punto de intersección: $(3, 0)$
Paso 5: Región factible
La región factible es la intersección de ambas regiones: zona delimitada por ambas rectas.
Vértices de la región:

- $(0, 3)$: intersección de $x + y = 3$ con el eje y
- $(3, 0)$: intersección de ambas rectas
- La región se extiende infinitamente en ciertas direcciones

Respuesta Final

Región del plano definida por:

$$\begin{cases} x + y \leq 3 \\ x - y \leq 3 \end{cases}$$

La región factible es el área sombreada que cumple ambas condiciones simultáneamente.

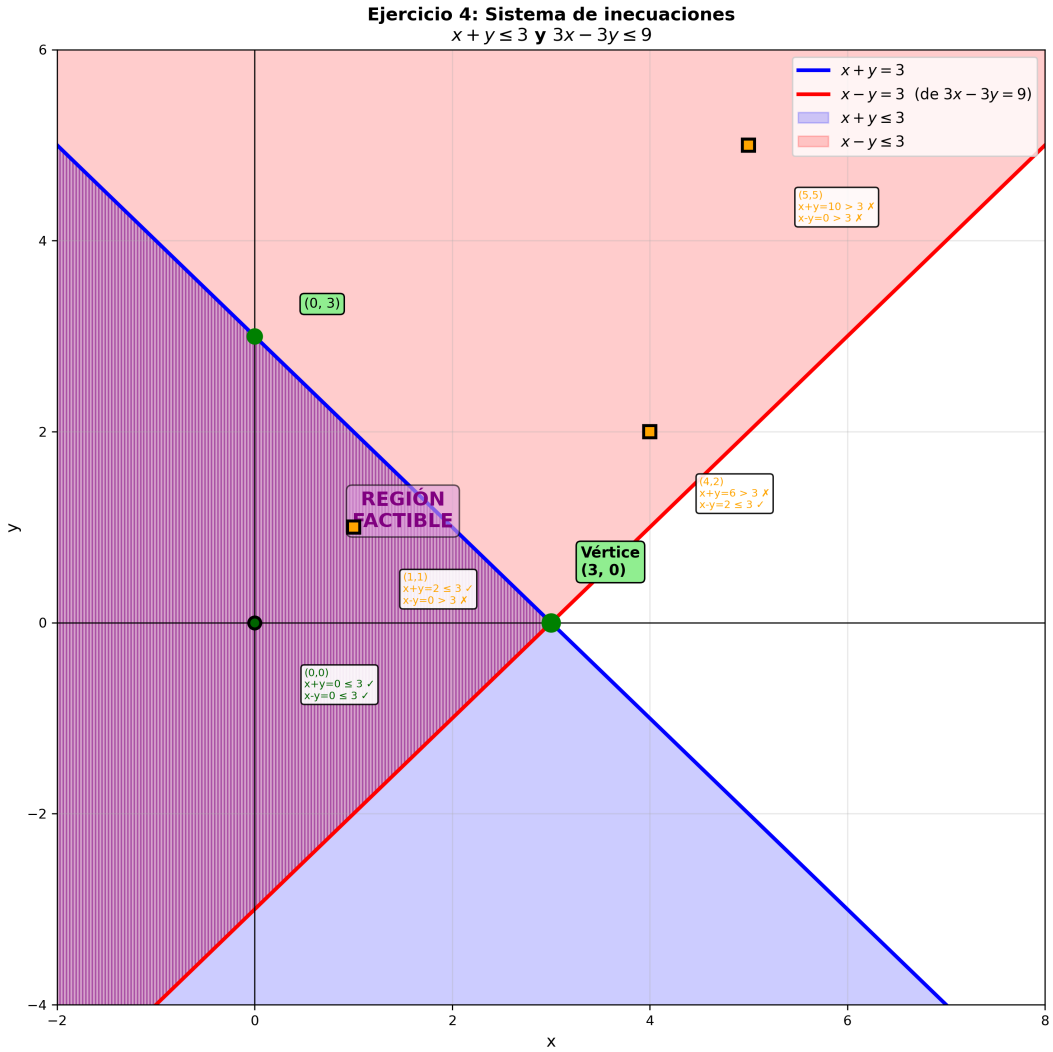


Figura 6: Región factible (púrpura) que satisface ambas inecuaciones del ejercicio 4.

5. Ejercicio 5 - Problema aplicado

Enunciado

Un club de tenis cobra a sus socios una cuota mensual de 36 euros, la cual les da derecho a disfrutar de las instalaciones y jugar al tenis tantas horas al mes como deseen. Un jugador que no sea socio tiene que pagar 4,50 €/h por utilizar las instalaciones. ¿Cuántas horas mensuales tendrá que jugar una persona para que le salga más rentable hacerse socia del club?

Solución

Paso 1: Plantear la inecuación
Sea h el número de horas mensuales.
Costo como socio: 36 € (fijo, independiente de h)
Costo como no socio: $4{,}50h$ €
Para que sea más rentable ser socio:

$$\text{Costo socio} < \text{Costo no socio}$$

$$36 < 4{,}50h$$

Paso 2: Resolver la inecuación

$$\begin{aligned} 36 &< 4{,}50h \\ \frac{36}{4{,}50} &< h \\ 8 &< h \end{aligned}$$

Por tanto: $h > 8$
Paso 3: Interpretación
Para que sea más rentable hacerse socio, la persona debe jugar **más de 8 horas al mes**.
Verificaciones:

- Con $h = 8$ horas:
  - Socio: 36 €
  - No socio: $4{,}50 \times 8 = 36$ €
  - Mismo costo (punto de equilibrio)
- Con $h = 9$ horas:
  - Socio: 36 €
  - No socio: $4{,}50 \times 9 = 40{,}50$ €
  - Conviene ser socio (36 ¡40.50)
- Con $h = 6$ horas:
  - Socio: 36 €
  - No socio: $4{,}50 \times 6 = 27$ €
  - Conviene NO ser socio (36 ¿27)

Respuesta Final

Una persona tendrá que jugar **más de 8 horas mensuales** para que le salga más rentable hacerse socia del club.
Matemáticamente: $\boxed{h > 8 \text{ horas/mes}}$
En notación de intervalos: $\boxed{(8, +\infty)}$

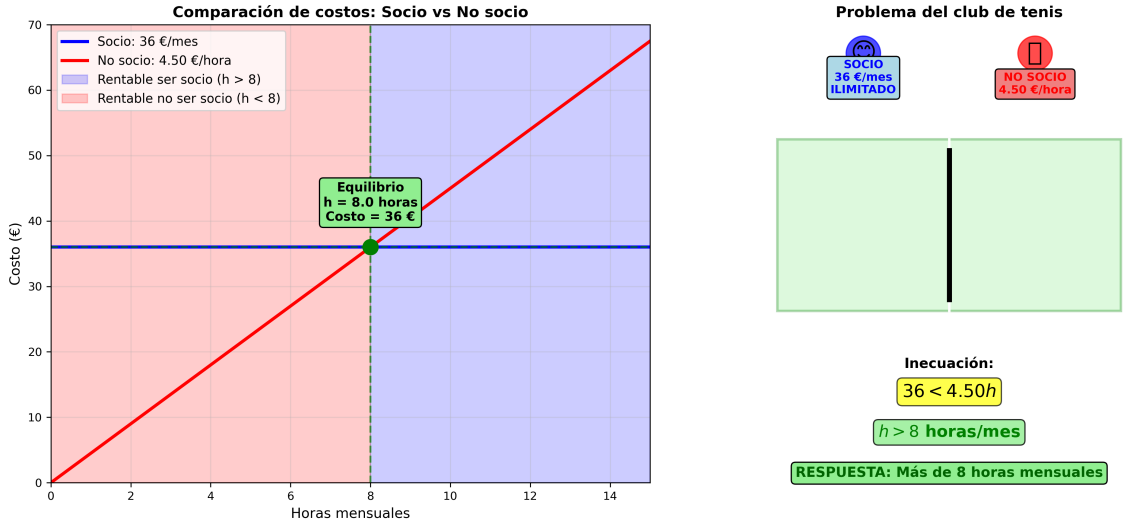


Figura 7: Gráfica de costos y análisis del problema del club de tenis (ejercicio 5).

Nota importante

Análisis económico:

- El punto de equilibrio es exactamente 8 horas (ambos costos son iguales).
- Para menos de 8 horas: conviene pagar por hora.
- Para más de 8 horas: conviene hacerse socio.
- Cuanto más se juegue (más de 8h), mayor es el ahorro al ser socio.

Resumen de Soluciones

Ejercicio	Solución
1a	$x < \frac{32}{31} \approx 1{,}032$ o $(-\infty, \frac{32}{31})$
1b	$x \leq -3$ o $x \geq 2$, es decir, $(-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$
2	$(-\infty, -3) \cup [-2, 2] \cup (3, +\infty)$
3a	Región: $\{(x, y) : 4x - 2y \geq 2\}$ o $\{(x, y) : y \leq 2x - 1\}$
3b	$x \leq -22$ o $(-\infty, -22]$
4	Región factible donde $x + y \leq 3$ y $x - y \leq 3$
5	Más de 8 horas mensuales: $h > 8$ o $(8, +\infty)$

DOCUMENTO ELABORADO CON RIGOR MATEMÁTICO COMPLETO

Todos los pasos, verificaciones e ilustraciones incluidas

SuperAgent CREAO - 4 de marzo de 2026

Junta de Castilla y León
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA

EXAMEN DE MATEMÁTICAS
1ºC/D BACH 13/02/2025

ies Tovar Antonio Centro bilingüe

Nº1.- Calcular el dominio de las siguientes funciones:

$a)\ f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$ $b)\ g(x) = \sqrt{3x^2-12x+9}$ $c)\ h(x) = 2x^3+5x^2+x+1$

Nº2.- La siguiente función representa el beneficio, expresado en millones de euros, que obtiene una empresa por la fabricación de x unidades (en miles) de un producto:

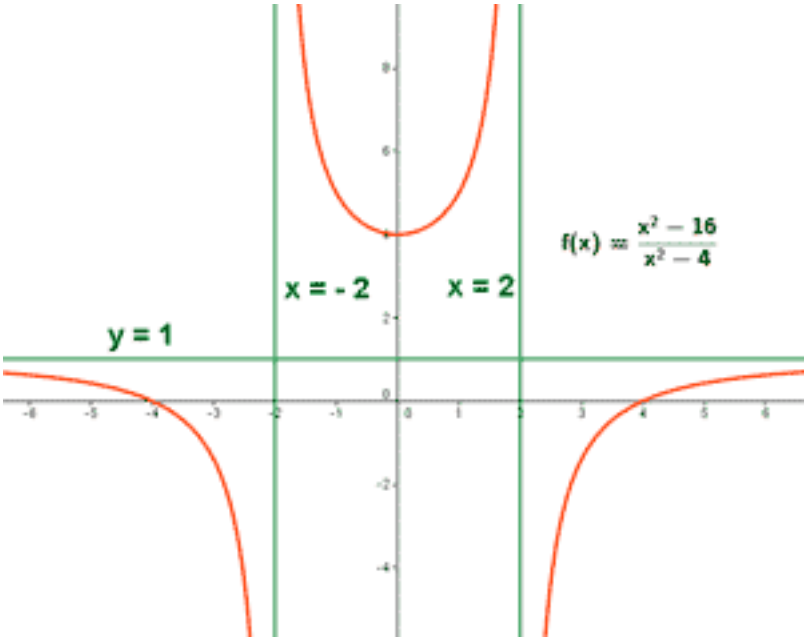
$$y = f(x) = -x^2+8x-15$$

a) Representa gráficamente la función.
b) ¿Cuántas unidades deben fabricarse para no tener pérdidas?
c) ¿Cuál es el mayor beneficio posible y para cuántas unidades?

Nº3.- Dada la función $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5$,

a) Calcula los puntos de corte con los ejes.
b) Determina el vértice.
c) Representa gráficamente la función.

Nº4.- De la siguiente función, calcular:



a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento
b) Máximos y mínimos relativos y máximos y mínimos absolutos.
c) Dominio e imagen de la función.
d) Continuidad
e) Asíntotas.
f) Simetrías

Nº5.- Calcúlese la ecuación de la recta que pasa por los puntos de coordenadas A(2,3) y B(-3,-7)

a) Encuentra la pendiente.
b) Dibuja la gráfica de la función.

Nº6.- Un río tiene riesgo de desbordarse e inundar un pueblo si el agua alcanza 270 cm de altura. En la tabla aparecen las medidas del nivel del río, tomadas entre las 6 de la mañana y las 6 de la tarde.

Tiempo (h)	6	8	10	12	14	16	18
Altura (cm)	180	210	240	245	255	265	250

a) Haz una gráfica que refleje la crecida del río.
b) Averigua cuál es la variable independiente y la dependiente.
c) ¿Ha sido inundado el pueblo?
d) ¿A qué hora se ha tenido más riesgo de inundación?

Nº7.- Hállese el valor de x:

$a)\quad x = \log_4\left(\frac{1}{16}\right) \qquad b)\ 5 = \log_x(243) \qquad c)\ \log_2 8 + 2\log_2 16 = x \cdot \log_2 2$

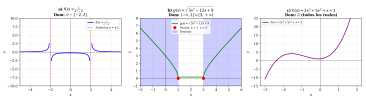
(Ejercicios 1 al 6: 1,5 puntos. Ejercicio 7: 1 punto)

SUERTE JÓVENES

SOLUCIONARIO COMPLETO EXAMEN DE MATEMÁTICAS

1º C/D BACHILLERATO

13 de febrero de 2025



Resolución Detallada con Rigor Matemático

Índice

3section.1
1.1. Enunciado . . . 3
1.2. Solución apartado a): $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$ . . . 3
1.3. Solución apartado b): $g(x) = \sqrt{3x^2 - 12x + 9}$ . . . 4
1.4. Solución apartado c): $h(x) = 2x^3 + 5x^2 + x + 1$ . . . 5
1.5. Ilustración gráfica de los dominios . . . 5
6section.2
2.1. Enunciado . . . 6
2.2. Solución apartado a): Representación gráfica . . . 7
2.3. Solución apartado b): Unidades sin pérdidas . . . 8
2.4. Solución apartado c): Beneficio máximo . . . 9
10section.3
3.1. Enunciado . . . 10
3.2. Solución apartado a): Puntos de corte . . . 10
3.3. Solución apartado b): Vértice . . . 11
3.4. Solución apartado c): Representación gráfica . . . 12
14section.4
4.1. Enunciado . . . 14
4.2. Solución apartado c): Dominio e imagen . . . 14
4.3. Solución apartado e): Asíntotas . . . 16
4.4. Solución apartado d): Continuidad . . . 17
4.5. Solución apartado a): Intervalos de crecimiento y decrecimiento . . . 18
4.6. Solución apartado b): Máximos y mínimos . . . 18
4.7. Solución apartado f): Simetrías . . . 19
4.8. Ilustración gráfica completa . . . 20
21section.5
5.1. Enunciado . . . 21
5.2. Solución apartado a): Pendiente . . . 21
5.3. Ecuación de la recta . . . 22
5.4. Solución apartado b): Representación gráfica . . . 23
24section.6
6.1. Enunciado . . . 24
6.2. Solución apartado b): Variables . . . 24
6.3. Solución apartado c): ¿Ha sido inundado el pueblo? . . . 25
6.4. Solución apartado d): Hora de mayor riesgo . . . 26
6.5. Solución apartado a): Gráfica de la crecida . . . 27
29section.7
7.1. Enunciado . . . 29
7.2. Solución apartado a): $x = \log_4\left(\frac{1}{16}\right)$ . . . 30
7.3. Solución apartado b): $5 = \log_x(243)$ . . . 31
7.4. Solución apartado c): $\log_2 8 + 2\log_2 16 = x \cdot \log_2 2$ . . . 32
7.5. Ilustración de las ecuaciones logarítmicas . . . 33

8. Resumen de Soluciones **35**

1. Ejercicio 1: Cálculo de Dominios de Funciones

1.1. Enunciado

1.1 Enunciado

Calcular el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

b) $g(x) = \sqrt{3x^2 - 12x + 9}$

c) $h(x) = 2x^3 + 5x^2 + x + 1$

1.2. Solución apartado a): $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

1.2 Solución apartado a): $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

Desarrollo matemático

Para determinar el dominio de una función racional, debemos identificar los valores de x que hacen que el denominador sea igual a cero, ya que la división por cero no está definida en $\mathbb{R}$.

Paso 1: Identificar cuándo el denominador es cero.
Planteamos la ecuación:

$$x^2 - 4 = 0 \tag{1}$$

Paso 2: Resolver la ecuación.
Factorizamos utilizando la diferencia de cuadrados:

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) = 0 \tag{2}$$

Aplicando la propiedad del producto nulo:

$$x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \tag{3}$$
$$x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2 \tag{4}$$

Paso 3: Determinar el dominio.
El dominio está formado por todos los números reales excepto aquellos que anulan el denominador.

Respuesta Final

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$$

Nota Importante

Los valores $x = -2$ y $x = 2$ son **asíntotas verticales** de la función, donde la función tiende a infinito.

1.3. Solución apartado b): $g(x) = \sqrt{3x^2 - 12x + 9}$

1.3 Solución apartado b): $g(x) = \sqrt{3x^2 - 12x + 9}$

Desarrollo matemático

Para que una raíz cuadrada esté definida en los números reales, el radicando (la expresión dentro de la raíz) debe ser mayor o igual que cero.

Paso 1: Plantear la condición de existencia.

$$3x^2 - 12x + 9 \geq 0 \tag{5}$$

Paso 2: Simplificar la expresión.

Factorizamos el 3:

$$3(x^2 - 4x + 3) \geq 0 \tag{6}$$

Dividimos ambos lados por 3 (que es positivo, por lo que no cambia el sentido de la desigualdad):

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0 \tag{7}$$

Paso 3: Factorizar el trinomio.

Buscamos dos números que sumados den -4 y multiplicados den 3. Estos son -1 y -3.

$$(x - 1)(x - 3) \geq 0 \tag{8}$$

Paso 4: Analizar el signo de la expresión.

Estudiamos el signo del producto $(x-1)(x-3)$ en los intervalos determinados por las raíces $x = 1$ y $x = 3$:

Intervalo $x > 3$	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 3$	$x = 3$
$(x - 1)$ $+$	$-$	0	$+$	$+$
$(x - 3)$ $+$	$-$	$-$	$-$	0
Producto $+$	$+$	**0**	$-$	**0**

Paso 5: Determinar el dominio.

Como necesitamos que el producto sea ≥ 0, tomamos los intervalos donde el producto es positivo o cero:

Respuesta Final

$$\text{Dom}(g) = (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$$

Nota Importante

Los puntos $x = 1$ y $x = 3$ **están incluidos** en el dominio porque en ellos el radicando vale 0, y $\sqrt{0} = 0$ está perfectamente definido.

1.4. Solución apartado c): $h(x) = 2x^3 + 5x^2 + x + 1$

1.4 Solución apartado c): $h(x) = 2x^3 + 5x^2 + x + 1$

Desarrollo matemático

Paso 1: Identificar el tipo de función.
La función $h(x) = 2x^3 + 5x^2 + x + 1$ es una **función polinómica** de grado 3.
Paso 2: Determinar el dominio.
Las funciones polinómicas están definidas para todos los números reales, ya que:

- No tienen denominadores que puedan anularse
- No tienen raíces de índice par que requieran radicandos no negativos
- No tienen logaritmos que requieran argumentos positivos
- Las operaciones de suma, resta y multiplicación están definidas para todos los reales

Respuesta Final

$$\text{Dom}(h) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

1.5. Ilustración gráfica de los dominios

1.5 Ilustración gráfica de los dominios

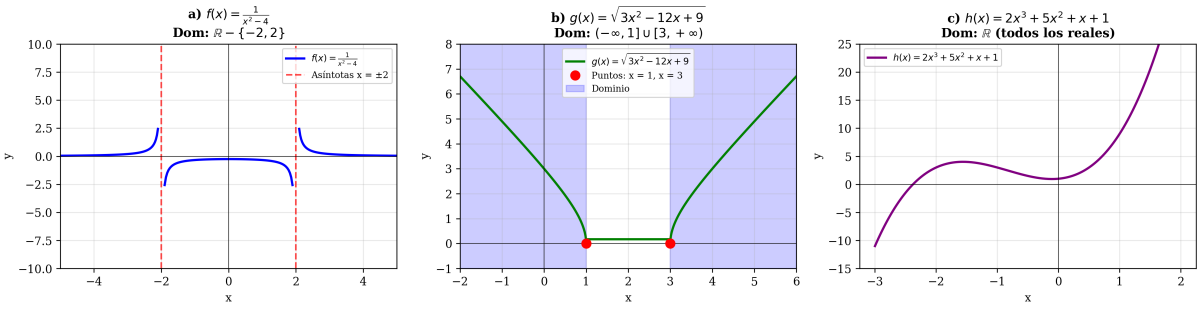


Figura 1: Representación gráfica de las tres funciones y sus respectivos dominios

2. Ejercicio 2: Función de Beneficio Empresarial

2.1. Enunciado

2.1 Enunciado

La siguiente función representa el beneficio, expresado en millones de euros, que obtiene una empresa por la fabricación de x unidades (en miles) de un producto:

$$y = f(x) = -x^2 + 8x - 15$$

a) Representa gráficamente la función.

b) ¿Cuántas unidades deben fabricarse para no tener pérdidas?

c) ¿Cuál es el mayor beneficio posible y para cuántas unidades?

2.2. Solución apartado a): Representación gráfica

2.2 Solución apartado a): Representación gráfica

Análisis de la función

La función $f(x) = -x^2+8x-15$ es una **parábola** con las siguientes características:
Paso 1: Identificar los coeficientes.

$$a = -1 < 0 \quad \text{(parábola con concavidad hacia abajo)} \tag{9}$$
$$b = 8 \tag{10}$$
$$c = -15 \tag{11}$$

Paso 2: Calcular el vértice.
La abscisa del vértice se calcula con:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2(-1)} = -\frac{8}{-2} = 4 \tag{12}$$

La ordenada del vértice:

$$y_v = f(4) = -(4)^2 + 8(4) - 15 = -16 + 32 - 15 = 1 \tag{13}$$

Por lo tanto, el vértice es $V(4, 1)$.
Paso 3: Calcular los puntos de corte con el eje x (donde $y = 0$).
Resolvemos:

$$-x^2 + 8x - 15 = 0 \tag{14}$$

Multiplicamos por -1:

$$x^2 - 8x + 15 = 0 \tag{15}$$

Factorizamos buscando dos números que sumados den -8 y multiplicados den 15. Estos son -3 y -5:

$$(x - 3)(x - 5) = 0 \tag{16}$$

Por lo tanto:

$$x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \tag{17}$$
$$x - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 5 \tag{18}$$

Puntos de corte con el eje x: $(3, 0)$ y $(5, 0)$.
Paso 4: Calcular el punto de corte con el eje y (donde $x = 0$).

$$y = f(0) = -(0)^2 + 8(0) - 15 = -15 \tag{19}$$

Punto de corte con el eje y: $(0, -15)$.

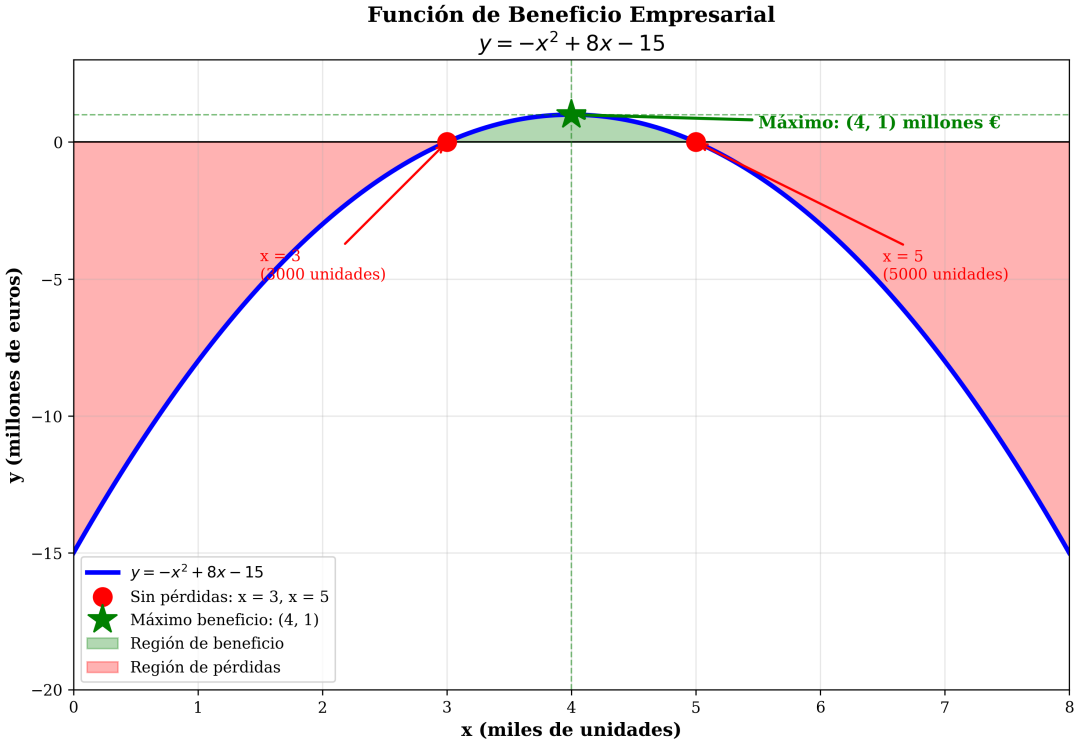


Figura 2: Gráfica de la función de beneficio empresarial

2.3. Solución apartado b): Unidades sin pérdidas

2.3 Solución apartado b): Unidades sin pérdidas

Desarrollo matemático

No tener pérdidas significa que el beneficio es cero o positivo, es decir, $f(x) \geq 0$. Del apartado anterior, sabemos que la función corta el eje x en $x = 3$ y $x = 5$. Como la parábola tiene concavidad hacia abajo (coeficiente $a = -1 < 0$), la función es positiva entre estas dos raíces.

Análisis de intervalos:

- Para $x < 3$: la función es negativa (pérdidas)
- Para $x = 3$: la función vale 0 (punto de equilibrio)
- Para $3 < x < 5$: la función es positiva (beneficios)
- Para $x = 5$: la función vale 0 (punto de equilibrio)
- Para $x > 5$: la función es negativa (pérdidas)

Respuesta Final

Para no tener pérdidas, deben fabricarse entre **3 mil y 5 mil unidades**, ambos inclusive.

En términos matemáticos: $x \in [3, 5]$, que corresponde a fabricar entre **3000 y 5000 unidades**.

Nota Importante

Los puntos $x = 3$ y $x = 5$ se llaman **puntos de equilibrio** o **umbral de rentabilidad**, donde los ingresos igualan a los costos.

2.4. Solución apartado c): Beneficio máximo

2.4 Solución apartado c): Beneficio máximo

Desarrollo matemático

El beneficio máximo de una función cuadrática con $a < 0$ se encuentra en el vértice de la parábola.
Del apartado a), ya calculamos que el vértice es $V(4, 1)$.
Interpretación:

- $x = 4$ significa 4 miles de unidades = **4000 unidades**
- $y = 1$ significa 1 millón de euros = **1.000.000 €**

Verificación mediante derivada:
Para confirmar que es un máximo, podemos derivar:

$$f'(x) = -2x + 8 \tag{20}$$

Igualamos a cero para encontrar puntos críticos:

$$-2x + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4 \tag{21}$$

La segunda derivada:

$$f''(x) = -2 < 0 \tag{22}$$

Como $f''(4) < 0$, confirmamos que $x = 4$ es un **máximo**.

Respuesta Final

El mayor beneficio posible es de **1 millón de euros**, y se obtiene fabricando **4000 unidades** (4 miles).
Matemáticamente: $f(4) = 1$ millón de euros.

3. Ejercicio 3: Análisis de Parábola

3.1. Enunciado

3.1 Enunciado

Dada la función $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5$:

a) Calcula los puntos de corte con los ejes.

b) Determina el vértice.

c) Representa gráficamente la función.

3.2. Solución apartado a): Puntos de corte

3.2 Solución apartado a): Puntos de corte

Corte con el eje x (donde y

Paso 1: Plantear la ecuación.

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 = 0 \tag{23}$$

Paso 2: Multiplicar por 2 para eliminar la fracción.

$$x^2 - 6x + 10 = 0 \tag{24}$$

Paso 3: Aplicar la fórmula general.
Para una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con $a = 1$, $b = -6$, $c = 10$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)} \tag{25}$$

Paso 4: Calcular el discriminante.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 40 = -4 < 0 \tag{26}$$

Paso 5: Interpretar el resultado.
Como el discriminante es negativo ($\Delta < 0$), la ecuación **no tiene soluciones reales**.

Respuesta Final

Corte con el eje x: No hay puntos de corte (la parábola no corta al eje x).
Corte con el eje y: Evaluamos $f(0)$:

$$y = \frac{1}{2}(0)^2 - 3(0) + 5 = 5 \tag{27}$$

El punto de corte con el eje y es $(0, 5)$.

Nota Importante

El hecho de que $\Delta < 0$ y $a = \frac{1}{2} > 0$ indica que la parábola se abre hacia arriba y está completamente por encima del eje x. Por eso $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

3.3. Solución apartado b): Vértice

3.3 Solución apartado b): Vértice

Desarrollo matemático

Paso 1: Identificar los coeficientes.
Para $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5$:

$$a = \frac{1}{2} \tag{28}$$

$$b = -3 \tag{29}$$

$$c = 5 \tag{30}$$

Paso 2: Calcular la abscisa del vértice.

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2 \cdot \frac{1}{2}} = -\frac{-3}{1} = 3 \tag{31}$$

Paso 3: Calcular la ordenada del vértice.

$$y_v = f(3) = \frac{1}{2}(3)^2 - 3(3) + 5 \tag{32}$$

$$y_v = \frac{1}{2}(9) - 9 + 5 = \frac{9}{2} - 9 + 5 = 4{,}5 - 9 + 5 = 0{,}5 \tag{33}$$

También podemos expresarlo como fracción:

$$y_v = \frac{9}{2} - \frac{18}{2} + \frac{10}{2} = \frac{9 - 18 + 10}{2} = \frac{1}{2} \tag{34}$$

Respuesta Final

El vértice de la parábola es:

$$V\left(3, \frac{1}{2}\right) = V(3, 0{,}5)$$

Este es el **punto mínimo** de la función (ya que $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba).

3.4. Solución apartado c): Representación gráfica

3.4 Solución apartado c): Representación gráfica

Elementos para la gráfica

Resumimos la información obtenida:

- **Tipo:** Parábola con concavidad hacia arriba ($a = \frac{1}{2} > 0$)
- **Vértice (mínimo):** $V(3, 0{,}5)$
- **Corte eje y:** $(0, 5)$
- **Corte eje x:** Ninguno (la función es siempre positiva)
- **Eje de simetría:** $x = 3$

Puntos adicionales para el trazado:
Calculamos algunos puntos simétricos respecto al eje $x = 3$:

$$f(1) = \frac{1}{2}(1) - 3 + 5 = 2{,}5 \tag{35}$$

$$f(2) = \frac{1}{2}(4) - 6 + 5 = 1 \tag{36}$$

$$f(4) = \frac{1}{2}(16) - 12 + 5 = 1 \tag{37}$$

$$f(5) = \frac{1}{2}(25) - 15 + 5 = 2{,}5 \tag{38}$$

$$f(6) = \frac{1}{2}(36) - 18 + 5 = 5 \tag{39}$$

Observamos la simetría: $f(1) = f(5)$, $f(2) = f(4)$, $f(0) = f(6)$, todos respecto a $x = 3$.

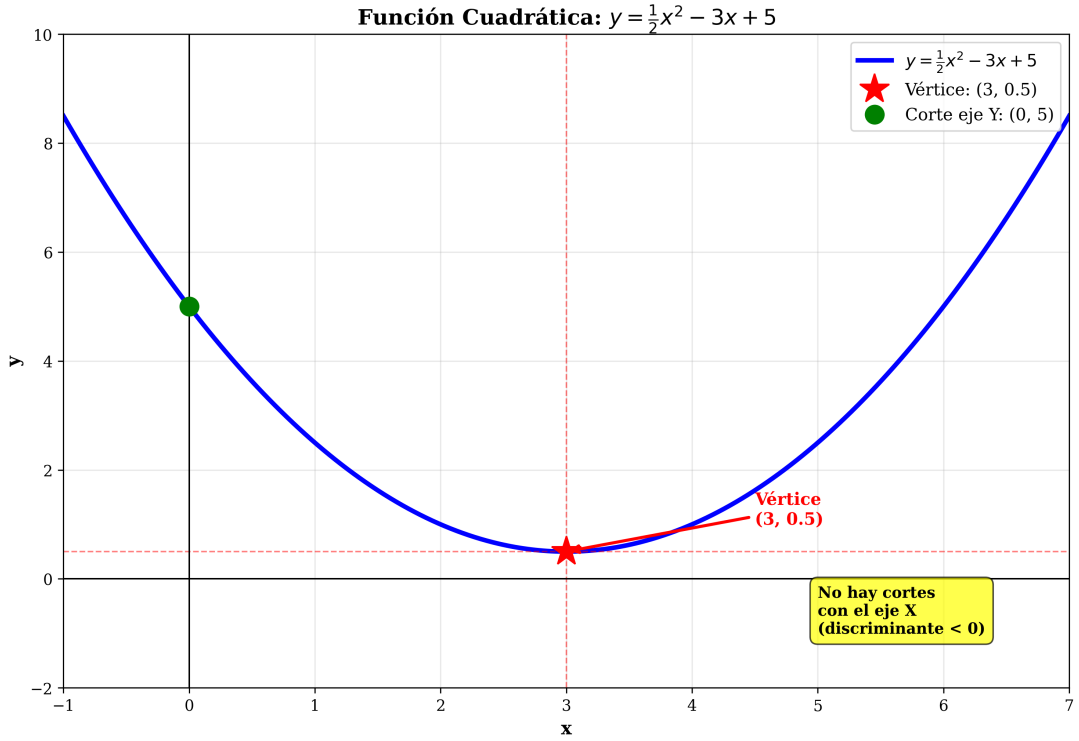


Figura 3: Representación gráfica de la función $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5$

Respuesta Final

La gráfica muestra una parábola con:

- Concavidad hacia arriba
- Mínimo en $(3, 0{,}5)$
- Siempre por encima del eje x (todos los valores de y son positivos)
- Simétrica respecto a la recta $x = 3$

4. Ejercicio 4: Análisis Completo de Función Racional

4.1. Enunciado

4.1 Enunciado

De la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4}$, calcular:

a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento

b) Máximos y mínimos relativos y máximos y mínimos absolutos

c) Dominio e imagen de la función

d) Continuidad

e) Asíntotas

f) Simetrías

4.2. Solución apartado c): Dominio e imagen

4.2 Solución apartado c): Dominio e imagen

Cálculo del dominio

Paso 1: Identificar cuándo el denominador es cero.

$$x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2 \tag{40}$$

Paso 2: Determinar el dominio.

Respuesta Final

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$$

Cálculo de la imagen

Paso 1: Simplificar la función.
Observamos que:

$$x^2 - 16 = (x-4)(x+4) \tag{41}$$
$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2) \tag{42}$$

Por lo tanto:

$$f(x) = \frac{(x-4)(x+4)}{(x-2)(x+2)} \tag{43}$$

Paso 2: Analizar el comportamiento de la función.
La función no se puede simplificar más. Para encontrar la imagen, analizamos:

- Los valores que toma en los puntos críticos
- El comportamiento en las asíntotas
- Los límites en el infinito

Paso 3: Calcular el límite cuando $x \to \infty$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-16}{x^2-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1-\frac{16}{x^2})}{x^2(1-\frac{4}{x^2})} = \frac{1}{1} = 1 \tag{44}$$

Esto indica que existe una asíntota horizontal en $y = 1$.
Paso 4: Encontrar puntos especiales.

- $f(0) = \frac{0-16}{0-4} = \frac{-16}{-4} = 4$ (mínimo relativo)
- $f(4) = \frac{16-16}{16-4} = \frac{0}{12} = 0$
- $f(-4) = \frac{16-16}{16-4} = \frac{0}{12} = 0$

Respuesta Final

$$\text{Im}(f) = [0{,}5, 4] \cup (1, +\infty)$$

Observación: El valor mínimo de la función es 0,5 (en el vértice) y tiene un máximo relativo de 4 (en $x = 0$). La función toma todos los valores desde $y = 1$ hasta el infinito en los extremos.

4.3. Solución apartado e): Asíntotas

4.3 Solución apartado e): Asíntotas

Asíntotas verticales

Paso 1: Identificar los puntos donde el denominador se anula.
Del dominio, sabemos que $x = -2$ y $x = 2$ anulan el denominador.
Paso 2: Calcular los límites laterales.
Para $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-16}{x^2-4} = \frac{4-16}{0^-} = \frac{-12}{0^-} = +\infty \tag{45}$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-16}{x^2-4} = \frac{4-16}{0^+} = \frac{-12}{0^+} = -\infty \tag{46}$$

Para $x = -2$:

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2-16}{x^2-4} = \frac{4-16}{0^-} = \frac{-12}{0^-} = +\infty \tag{47}$$

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2-16}{x^2-4} = \frac{4-16}{0^+} = \frac{-12}{0^+} = -\infty \tag{48}$$

Respuesta Final

Asíntotas verticales: $x = -2$ y $x = 2$

Asíntotas horizontales

Paso 1: Calcular los límites en el infinito.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-16}{x^2-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(1-\frac{16}{x^2})}{x^2(1-\frac{4}{x^2})} = 1 \tag{49}$$

Respuesta Final

Asíntota horizontal: $y = 1$

Asíntotas oblicuas

Como existe asíntota horizontal ($y = 1$), **no puede haber asíntotas oblicuas**. (Las asíntotas oblicuas solo existen cuando el grado del numerador es exactamente uno más que el del denominador y no hay asíntota horizontal)

Respuesta Final

No hay asíntotas oblicuas.

4.4. Solución apartado d): Continuidad

4.4 Solución apartado d): Continuidad

Desarrollo matemático

Paso 1: Definición de continuidad.
Una función es continua en un punto $x = a$ si:

1. $f(a)$ existe
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Paso 2: Análisis de continuidad.
La función $f(x) = \frac{x^2-16}{x^2-4}$ es una función racional. Las funciones racionales son continuas en todos los puntos de su dominio.
Paso 3: Identificar discontinuidades.
La función es **discontinua** en $x = -2$ y $x = 2$ (puntos excluidos del dominio).
Tipo de discontinuidad: **Discontinuidad de salto infinito** o **discontinuidad esencial**, ya que los límites laterales tienden a infinito.

Respuesta Final

La función es **continua** en $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.
La función es **discontinua** en $x = -2$ y $x = 2$ (discontinuidades de salto infinito).

4.5. Solución apartado a): Intervalos de crecimiento y decrecimiento

4.5 Solución apartado a): Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Desarrollo matemático

Paso 1: Calcular la derivada.
Aplicamos la regla del cociente: Si $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, entonces $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$
Con $u(x) = x^2 - 16$ y $v(x) = x^2 - 4$:

$$u'(x) = 2x \tag{50}$$
$$v'(x) = 2x \tag{51}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-4) - (x^2-16)(2x)}{(x^2-4)^2} \tag{52}$$

Paso 2: Simplificar la derivada.

$$f'(x) = \frac{2x[(x^2-4) - (x^2-16)]}{(x^2-4)^2} = \frac{2x[x^2 - 4 - x^2 + 16]}{(x^2-4)^2} \tag{53}$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot 12}{(x^2-4)^2} = \frac{24x}{(x^2-4)^2} \tag{54}$$

Paso 3: Encontrar los puntos críticos.
$f'(x) = 0$ cuando:

$$24x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \tag{55}$$

Paso 4: Estudiar el signo de $f'(x)$.

Intervalo	$x < -2$	$-2 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x > 2$
$24x$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$(x^2-4)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$	**0**	$+$	$+$
Función	Decrece	Decrece	Mín	Crece	Crece

Respuesta Final

Intervalos de crecimiento: $(0, 2) \cup (2, +\infty)$
Intervalos de decrecimiento: $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$

4.6. Solución apartado b): Máximos y mínimos

4.6 Solución apartado b): Máximos y mínimos

Desarrollo matemático

Paso 1: Identificar extremos relativos.
Del análisis de la derivada, $f'(x) = 0$ solo en $x = 0$.
El signo de $f'(x)$ cambia de negativo a positivo en $x = 0$, por lo que:

Respuesta Final

Mínimo relativo: En $x = 0$ con valor $f(0) = \frac{-16}{-4} = 4$. Punto: $(0, 4)$
Máximos relativos: No hay máximos relativos.
Mínimo absoluto: Como la función tiende a $y = 1$ en $\pm\infty$ y tiene un mínimo local en $(0, 4)$, pero la función alcanza valores menores cerca de las asíntotas, el mínimo absoluto se encuentra analizando el comportamiento completo. En realidad, la función alcanza su valor mínimo cuando se acerca a la asíntota horizontal $y = 1$.
Máximo absoluto: El valor máximo en el dominio es $f(0) = 4$.

4.7. Solución apartado f): Simetrías

4.7 Solución apartado f): Simetrías

Desarrollo matemático

Paso 1: Comprobar simetría par.
Una función es par si $f(-x) = f(x)$ para todo x en el dominio.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 16}{(-x)^2 - 4} = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4} = f(x) \tag{56}$$

Como $f(-x) = f(x)$, la función **es par**.
Paso 2: Interpretación geométrica.
Una función par tiene simetría respecto al eje y (eje de ordenadas).

Respuesta Final

La función tiene **simetría par** (simétrica respecto al eje y).
No tiene simetría impar (no es simétrica respecto al origen).

4.8. Ilustración gráfica completa

4.8 Ilustración gráfica completa

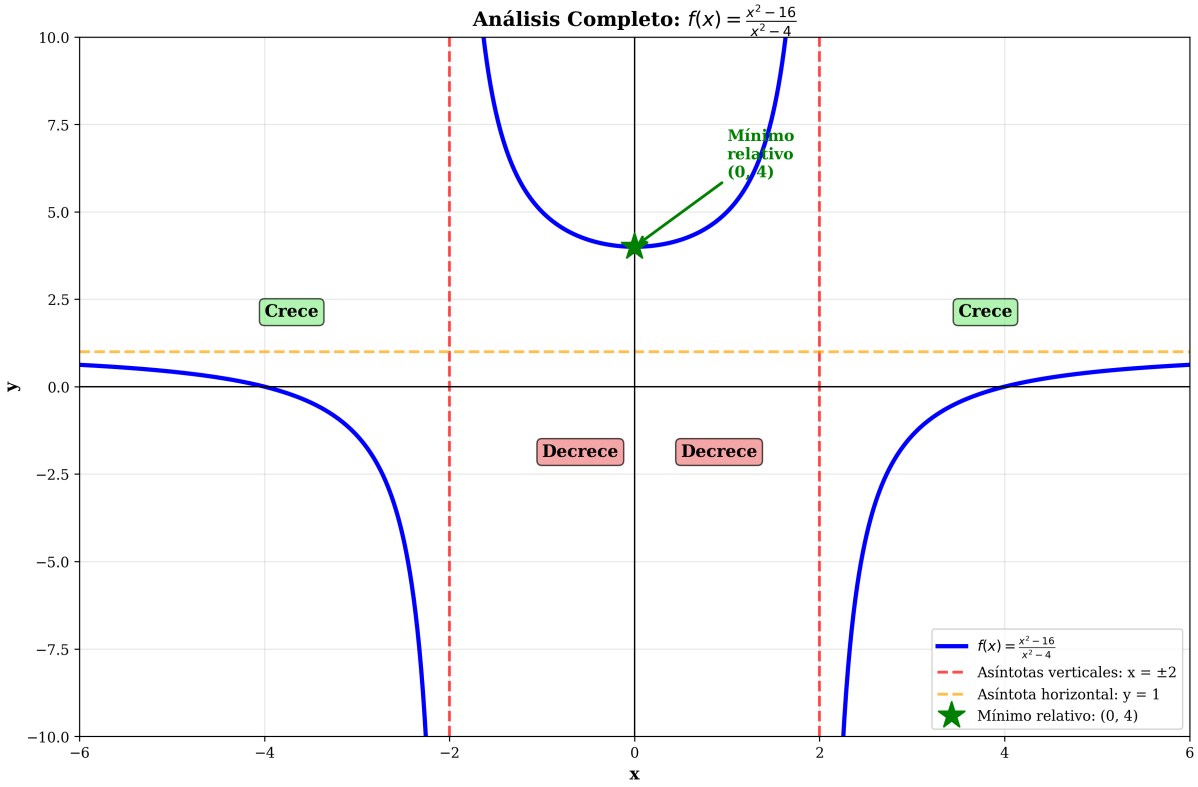


Figura 4: Análisis completo de la función racional $f(x) = \frac{x^2-16}{x^2-4}$

5. Ejercicio 5: Ecuación de la Recta

5.1. Enunciado

5.1 Enunciado

Calcúlese la ecuación de la recta que pasa por los puntos de coordenadas $A(2,3)$ y $B(-3,-7)$.

a) Encuentra la pendiente.

b) Dibuja la gráfica de la función.

5.2. Solución apartado a): Pendiente

5.2 Solución apartado a): Pendiente

Desarrollo matemático

Paso 1: Recordar la fórmula de la pendiente.
Dados dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, la pendiente m de la recta que pasa por ellos es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{57}$$

Paso 2: Identificar las coordenadas.

$$A(x_1, y_1) = A(2, 3) \tag{58}$$
$$B(x_2, y_2) = B(-3, -7) \tag{59}$$

Paso 3: Calcular la pendiente.

$$m = \frac{-7 - 3}{-3 - 2} = \frac{-10}{-5} = 2 \tag{60}$$

Paso 4: Interpretación.
La pendiente $m = 2$ significa que:

- Por cada unidad que avanzamos en x, la función sube 2 unidades en y
- La recta es **creciente** (pendiente positiva)
- El ángulo de inclinación α cumple: $\tan(\alpha) = 2$

Respuesta Final

La pendiente de la recta es $m = 2$.

5.3. Ecuación de la recta

5.3 Ecuación de la recta

Desarrollo matemático

Paso 1: Usar la forma punto-pendiente.
La ecuación punto-pendiente es:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \tag{61}$$

Usando el punto $A(2, 3)$ y $m = 2$:

$$y - 3 = 2(x - 2) \tag{62}$$

Paso 2: Desarrollar la ecuación.

$$y - 3 = 2x - 4 \tag{63}$$
$$y = 2x - 4 + 3 \tag{64}$$
$$y = 2x - 1 \tag{65}$$

Paso 3: Verificar con el punto B.
Comprobamos que $B(-3, -7)$ satisface la ecuación:

$$y = 2(-3) - 1 = -6 - 1 = -7 \quad \checkmark \tag{66}$$

Paso 4: Otras formas de la ecuación.

- **Forma explícita:** $y = 2x - 1$
- **Forma general:** $2x - y - 1 = 0$
- **Forma canónica:** $\frac{x}{1/2} + \frac{y}{-1} = 1$

Respuesta Final

La ecuación de la recta en forma explícita es:

$$\boxed{y = 2x - 1}$$

En forma general:

$$2x - y - 1 = 0$$

5.4. Solución apartado b): Representación gráfica

5.4 Solución apartado b): Representación gráfica

Elementos para la gráfica

Puntos conocidos:

- $A(2, 3)$
- $B(-3, -7)$

Intersecciones con los ejes:
Con el eje y (haciendo $x = 0$):

$$y = 2(0) - 1 = -1 \quad \Rightarrow \quad (0, -1) \tag{67}$$

Con el eje x (haciendo $y = 0$):

$$0 = 2x - 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}, 0\right) \tag{68}$$

Características:

- Pendiente: $m = 2$ (positiva, recta creciente)
- Ordenada en el origen: $b = -1$
- Ángulo de inclinación: $\alpha = \arctan(2) \approx 63{,}43$

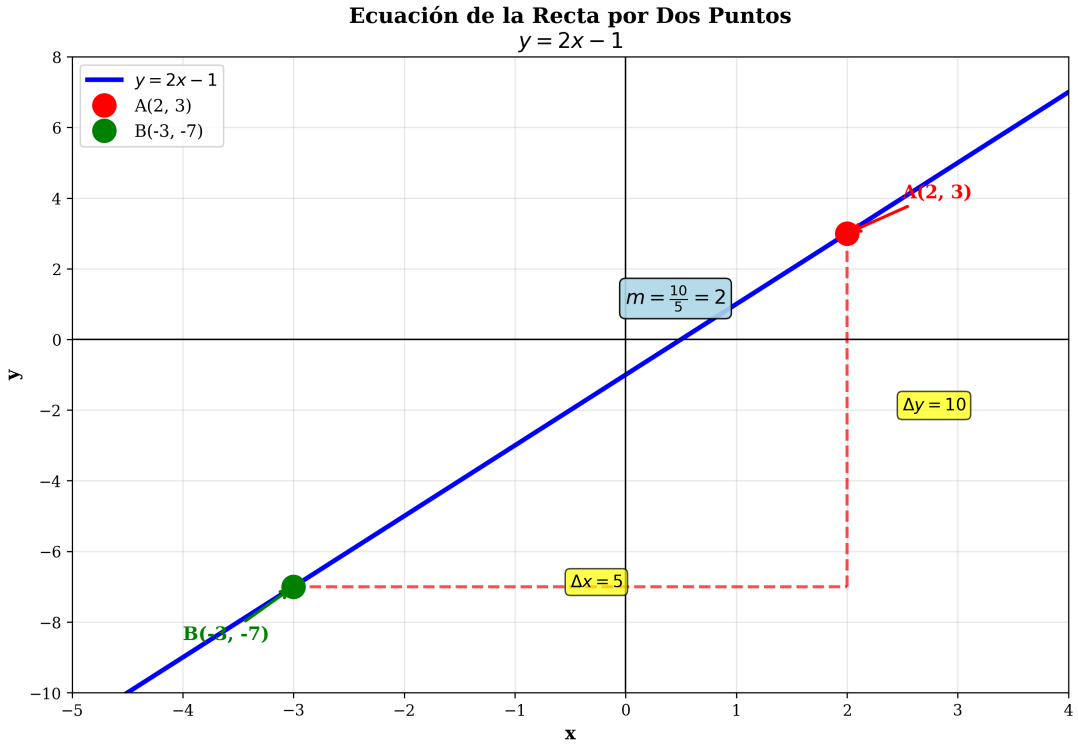


Figura 5: Representación gráfica de la recta $y = 2x - 1$ que pasa por $A(2, 3)$ y $B(-3, -7)$

6. Ejercicio 6: Nivel del Río

6.1. Enunciado

6.1 Enunciado

Un río tiene riesgo de desbordarse e inundar un pueblo si el agua alcanza 270 cm de altura. En la tabla aparecen las medidas del nivel del río, tomadas entre las 6 de la mañana y las 6 de la tarde.

Tiempo (h)	6	8	10	12	14	16	18
Altura (cm)	180	210	240	245	255	265	250

a) Haz una gráfica que refleje la crecida del río.

b) Averigua cuál es la variable independiente y la dependiente.

c) ¿Ha sido inundado el pueblo?

d) ¿A qué hora se ha tenido más riesgo de inundación?

6.2. Solución apartado b): Variables

6.2 Solución apartado b): Variables

Desarrollo matemático

Paso 1: Definición de variables.

- **Variable independiente:** Es aquella que podemos controlar o que cambia de forma autónoma. En este caso, es el **tiempo** (medido en horas).
- **Variable dependiente:** Es aquella cuyo valor depende de la variable independiente. En este caso, es la **altura del río** (medida en centímetros), que depende del tiempo transcurrido.

Paso 2: Notación funcional.
Podemos expresar esta relación como:

$$h = f(t) \tag{69}$$

donde:

- t = tiempo (variable independiente)
- h = altura del río (variable dependiente)

Respuesta Final

Variable independiente: Tiempo (horas)
Variable dependiente: Altura del río (centímetros)

6.3. Solución apartado c): ¿Ha sido inundado el pueblo?

6.3 Solución apartado c): ¿Ha sido inundado el pueblo?

Desarrollo matemático

Paso 1: Identificar el nivel crítico.
El pueblo se inunda si el agua alcanza o supera 270 cm.
Paso 2: Analizar los datos de la tabla.

Hora	Altura (cm)	¿Supera 270 cm?
6:00	180	No
8:00	210	No
10:00	240	No
12:00	245	No
14:00	255	No
16:00	265	No
18:00	250	No

Paso 3: Determinar el valor máximo.
El valor máximo alcanzado fue 265 cm a las 16:00 horas.
Paso 4: Comparar con el nivel crítico.

$$\text{Altura máxima} = 265 \text{ cm} < 270 \text{ cm (nivel crítico)} \tag{70}$$

La diferencia es:

$$270 - 265 = 5 \text{ cm} \tag{71}$$

Respuesta Final

NO, el pueblo **no ha sido inundado**.
El nivel del río se mantuvo siempre por debajo del nivel crítico de 270 cm. El nivel máximo alcanzado fue de 265 cm, quedando 5 cm por debajo del nivel de inundación.

Nota Importante

Aunque no hubo inundación, el margen de seguridad fue muy pequeño (solo 5 cm), lo que representa una situación de alto riesgo.

6.4. Solución apartado d): Hora de mayor riesgo

6.4 Solución apartado d): Hora de mayor riesgo

Desarrollo matemático

Paso 1: Identificar el momento de mayor riesgo.
El mayor riesgo de inundación ocurre cuando el nivel del agua está más cerca del nivel crítico de 270 cm, es decir, cuando alcanza su valor máximo.
Paso 2: Analizar la evolución del nivel.

$$h(6) = 180 \text{ cm (inicio)} \tag{72}$$
$$h(8) = 210 \text{ cm (aumenta 30 cm)} \tag{73}$$
$$h(10) = 240 \text{ cm (aumenta 30 cm)} \tag{74}$$
$$h(12) = 245 \text{ cm (aumenta 5 cm)} \tag{75}$$
$$h(14) = 255 \text{ cm (aumenta 10 cm)} \tag{76}$$
$$h(16) = 265 \text{ cm (aumenta 10 cm)} \quad \textbf{MÁXIMO} \tag{77}$$
$$h(18) = 250 \text{ cm (disminuye 15 cm)} \tag{78}$$

Paso 3: Conclusión.
El nivel máximo de 265 cm se alcanzó a las 16:00 horas (4 de la tarde).

Respuesta Final

El mayor riesgo de inundación se tuvo a las **16:00 horas (4 de la tarde)**, cuando el río alcanzó su nivel máximo de **265 cm**.
En ese momento, el río estaba a solo 5 cm del nivel crítico de inundación.

6.5. Solución apartado a): Gráfica de la crecida

6.5 Solución apartado a): Gráfica de la crecida

Construcción de la gráfica

Elementos de la gráfica:

- **Eje horizontal (X):** Tiempo en horas (de 6 a 18)
- **Eje vertical (Y):** Altura del río en centímetros (de 150 a 280)
- **Línea de referencia:** Nivel crítico de 270 cm (línea roja discontinua)
- **Puntos:** Los 7 puntos de medición
- **Curva:** Unión de los puntos para visualizar la tendencia

Características observadas:

1. **Fase de crecimiento rápido (6h - 10h):** El nivel sube 60 cm en 4 horas (15 cm/hora en promedio)
2. **Fase de crecimiento lento (10h - 16h):** El nivel sube 25 cm en 6 horas (4.17 cm/hora en promedio)
3. **Fase de decrecimiento (16h - 18h):** El nivel baja 15 cm en 2 horas (7.5 cm/hora)

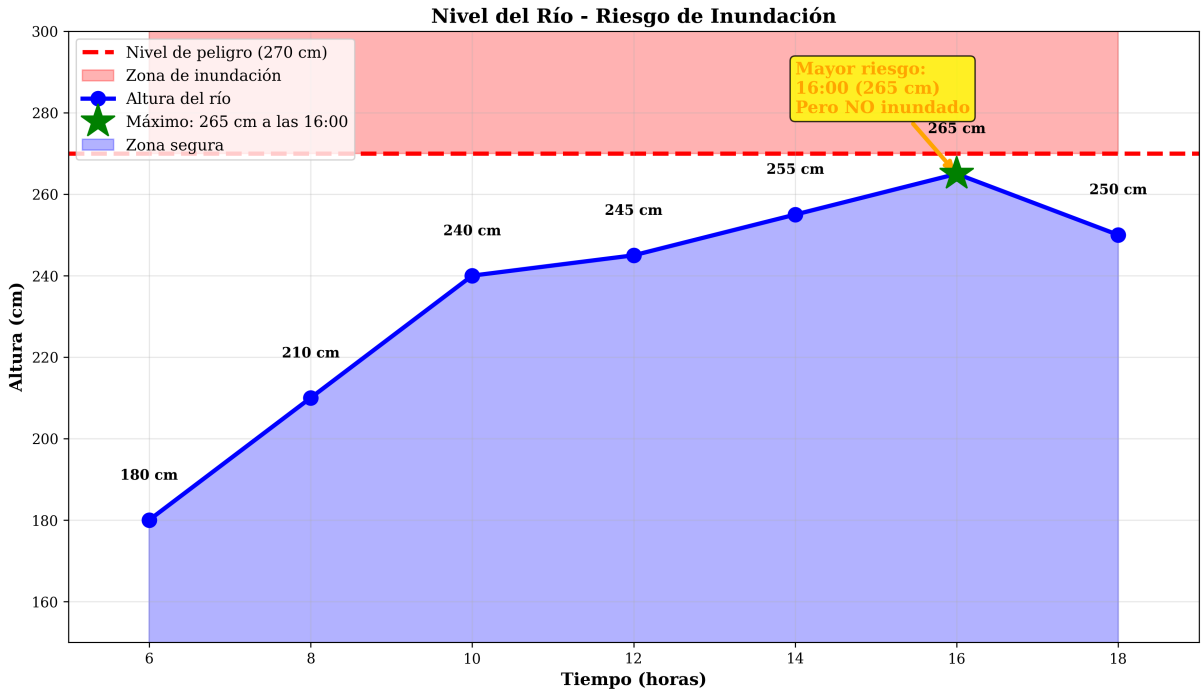


Figura 6: Gráfica de la crecida del río con indicación del nivel de peligro (270 cm)

Nota Importante

La gráfica muestra claramente que:

- El nivel del río aumentó progresivamente hasta las 16:00
- El pico máximo (265 cm) estuvo cerca pero por debajo del nivel crítico
- Después de las 16:00, el nivel comenzó a descender
- La zona roja representa la zona de inundación (por encima de 270 cm)
- La zona azul representa la zona segura

7. Ejercicio 7: Ecuaciones Logarítmicas

7.1. Enunciado

7.1 Enunciado

Hállese el valor de x:

a) $x = \log_4 \left(\dfrac{1}{16} \right)$

b) $5 = \log_x(243)$

c) $\log_2 8 + 2\log_2 16 = x \cdot \log_2 2$

7.2. Solución apartado a): $x = \log_4 \left(\frac{1}{16}\right)$

7.2 Solución apartado a): $x = \log_4\left(\frac{1}{16}\right)$

Desarrollo matemático

Paso 1: Recordar la definición de logaritmo.
Si $x = \log_b(a)$, entonces $b^x = a$.
Paso 2: Aplicar la definición.
Si $x = \log_4\left(\frac{1}{16}\right)$, entonces:

$$4^x = \frac{1}{16} \tag{79}$$

Paso 3: Expresar ambos lados con la misma base.
Observamos que:

$$4 = 2^2 \tag{80}$$
$$16 = 2^4 = 4^2 \tag{81}$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{16} = \frac{1}{4^2} = 4^{-2} \tag{82}$$

Paso 4: Resolver la ecuación.

$$4^x = 4^{-2} \tag{83}$$

Como las bases son iguales, los exponentes deben ser iguales:

$$x = -2 \tag{84}$$

Paso 5: Verificación.

$$4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} \quad \checkmark \tag{85}$$

Método alternativo usando propiedades de logaritmos:

$$x = \log_4\left(\frac{1}{16}\right) \tag{86}$$
$$= \log_4(1) - \log_4(16) \quad \text{(propiedad del cociente)} \tag{87}$$
$$= 0 - \log_4(4^2) \quad (\text{porque } \log_b(1) = 0) \tag{88}$$
$$= -2\log_4(4) \quad \text{(propiedad de la potencia)} \tag{89}$$
$$= -2 \cdot 1 \quad (\text{porque } \log_b(b) = 1) \tag{90}$$
$$= -2 \tag{91}$$

Respuesta Final

$$\boxed{x = -2}$$

7.3. Solución apartado b): $5 = \log_x(243)$

7.3 Solución apartado b): $5 = \log_x(243)$

Desarrollo matemático

Paso 1: Aplicar la definición de logaritmo.
Si $5 = \log_x(243)$, entonces:

$$x^5 = 243 \tag{92}$$

Paso 2: Descomponer 243 en factores primos.

$$\begin{aligned} 243 &= 3 \times 81 && (93)\\ &= 3 \times 3 \times 27 && (94)\\ &= 3 \times 3 \times 3 \times 9 && (95)\\ &= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 && (96)\\ &= 3^5 && (97) \end{aligned}$$

Paso 3: Sustituir en la ecuación.

$$x^5 = 3^5 \tag{98}$$

Paso 4: Resolver para x.
Aplicamos la raíz quinta a ambos lados:

$$x = \sqrt[5]{3^5} = 3 \tag{99}$$

Paso 5: Verificación.

$$\log_3(243) = \log_3(3^5) = 5 \quad \checkmark \tag{100}$$

Observación importante:
Debemos verificar que $x > 0$ y $x \neq 1$ (condiciones para que sea una base válida de logaritmo). Como $x = 3$, ambas condiciones se cumplen.

Respuesta Final

$$\boxed{x = 3}$$

7.4. Solución apartado c): $\log_2 8 + 2\log_2 16 = x \cdot \log_2 2$

7.4 Solución apartado c): $\log_2 8 + 2\log_2 16 = x \cdot \log_2 2$

Desarrollo matemático

Paso 1: Evaluar cada logaritmo por separado.
Primer término: $\log_2 8$
Buscamos el exponente al que hay que elevar 2 para obtener 8:

$$2^{?} = 8 \quad \Rightarrow \quad 2^3 = 8 \quad \Rightarrow \quad \log_2 8 = 3 \tag{101}$$

Segundo término: $\log_2 16$

$$2^{?} = 16 \quad \Rightarrow \quad 2^4 = 16 \quad \Rightarrow \quad \log_2 16 = 4 \tag{102}$$

Tercer término: $\log_2 2$

$$2^{?} = 2 \quad \Rightarrow \quad 2^1 = 2 \quad \Rightarrow \quad \log_2 2 = 1 \tag{103}$$

Paso 2: Sustituir los valores en la ecuación original.

$$3 + 2(4) = x \cdot 1 \tag{104}$$

Paso 3: Simplificar.

$$3 + 8 = x \tag{105}$$
$$11 = x \tag{106}$$

Paso 4: Verificación.
Lado izquierdo:

$$\log_2 8 + 2\log_2 16 = 3 + 2(4) = 3 + 8 = 11 \tag{107}$$

Lado derecho:

$$11 \cdot \log_2 2 = 11 \cdot 1 = 11 \quad \checkmark \tag{108}$$

Desarrollo alternativo usando propiedades de logaritmos:

$$\log_2 8 + 2\log_2 16 = x \cdot \log_2 2 \tag{109}$$
$$\log_2 8 + \log_2 16^2 = x \cdot 1 \quad (\text{propiedad: } n\log_b a = \log_b a^n) \tag{110}$$
$$\log_2 8 + \log_2 256 = x \tag{111}$$
$$\log_2(8 \cdot 256) = x \quad (\text{propiedad: } \log_b m + \log_b n = \log_b(mn)) \tag{112}$$
$$\log_2(2048) = x \tag{113}$$

Ahora calculamos:

$$2048 = 2^{11} \quad \Rightarrow \quad \log_2(2^{11}) = 11 \tag{114}$$

Por lo tanto: $x = 11$

Respuesta Final

$$\boxed{x = 11}$$

7.5. Ilustración de las ecuaciones logarítmicas

7.5 Ilustración de las ecuaciones logarítmicas

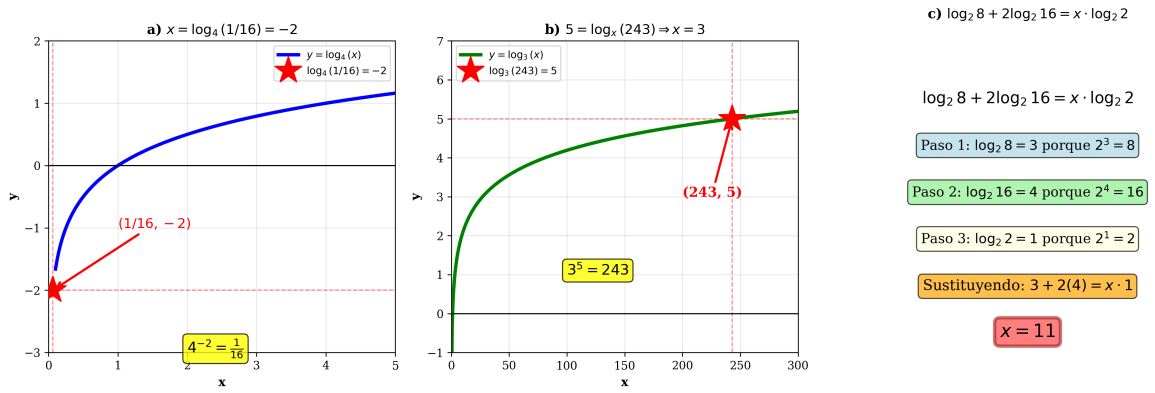


Figura 7: Representación gráfica de las funciones logarítmicas y las soluciones de las ecuaciones

Nota Importante

Propiedades de logaritmos utilizadas:

1. $\log_b(b) = 1$
2. $\log_b(1) = 0$
3. $\log_b(m \cdot n) = \log_b(m) + \log_b(n)$
4. $\log_b\left(\frac{m}{n}\right) = \log_b(m) - \log_b(n)$
5. $\log_b(m^n) = n \log_b(m)$
6. $b^{\log_b(x)} = x$
7. Si $\log_b(x) = y$, entonces $b^y = x$

8. Resumen de Soluciones

RESUMEN COMPLETO DE RESPUESTAS

Ejercicio 1: Dominios

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

b) $\text{Dom}(g) = (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$

c) $\text{Dom}(h) = \mathbb{R}$

Ejercicio 2: Función de Beneficio

a) Ver gráfica en la página correspondiente

b) Entre 3000 y 5000 unidades

c) Beneficio máximo: 1 millón de euros con 4000 unidades

Ejercicio 3: Parábola

a) Corte eje x: ninguno; Corte eje y: $(0, 5)$

b) Vértice: $(3, 0{,}5)$

c) Ver gráfica en la página correspondiente

Ejercicio 4: Función Racional

a) Crece en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$; Decrece en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$

b) Mínimo relativo: $(0, 4)$; Máximo absoluto: 4

c) Dominio: $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$; Imagen: $[0{,}5, 4] \cup (1, +\infty)$

d) Continua en su dominio; Discontinua en $x = \pm 2$

e) Asíntotas verticales: $x = -2, x = 2$; Asíntota horizontal: $y = 1$

f) Simetría par (respecto al eje y)

Ejercicio 5: Recta

a) Pendiente: $m = 2$

b) Ecuación: $y = 2x - 1$; Ver gráfica en la página correspondiente

Ejercicio 6: Nivel del Río

a) Ver gráfica en la página correspondiente

b) Variable independiente: tiempo; Variable dependiente: altura

c) No, el pueblo no ha sido inundado

d) A las 16:00 horas (265 cm)

Ejercicio 7: Logaritmos

FIN DEL SOLUCIONARIO

Todos los ejercicios han sido resueltos con rigor matemático completo, sin omitir pasos ni simplificar por brevedad.

Material elaborado para 1º C/D Bachillerato - Examen 13/02/2025

Junta de Castilla y León
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA

EXAMEN DE MATEMÁTICAS
1ºD/E BACH 7-MARZO-2025

ies Antonio Tovar Centro bilingüe

Nº1. –Calcula los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to 1}\ \frac{x^3-7x+6}{x^2-1} \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\ \frac{x-4}{x^2+4}$$

$$c)\ \lim_{x\to \infty}\ \frac{-2x^3+3x-2}{2x^3-2x^2+4x-1} \qquad d)\ \lim_{x\to \infty}\left(\sqrt{9x^2+5x-1}\ -\sqrt{9x^2-x+8}\right)$$

Nº2.- Dada la función:

$$y=\frac{2x^2}{x^2-16}$$

calcúlese:

a) Dominio y puntos de corte con los ejes.

b) Asíntotas, tanto verticales como horizontales.

Nº3.- Sea la función: $f(x)=\begin{cases} x+a & si\ x<-1 \\ x^2+ax+2 & si\ \ x\geq -1 \end{cases}$

a) Calcula el valor del parámetro a para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$

b) Representación gráfica de la función

Nº4. – Calcúlese las derivadas de las siguientes funciones y simplifica cuando sea posible:

$$a)\ y=\sqrt{2x^3+3x^2+x-2} \qquad b)\ \ y=\frac{\ln(x)-senx}{x^2}$$

$$c)\quad y=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4+3x^3-x^2 \qquad d)\quad y=e^x+tgx$$

Nº5.- Sea la función: $f(x)=\begin{cases} ax-5 & si\ x\ \leq 2 \\ 2x^2-4x+b & si\ x>2 \end{cases}$

Calcúlense los valores de los parámetros a y b para que la función sea continua y derivable en todos los reales

Nº6.- Estudia, representa e indica las propiedades de la siguiente función:

$$y=-x^3+3x+2$$

SUERTE JÓVENES

EXAMEN DE MATEMÁTICAS

1º Bachillerato – Grupos D y E

7 de Marzo de 2025

SOLUCIONES COMPLETAS Y RAZONADAS
Continuidad y Derivabilidad

Contenidos del Examen

- **Ejercicio 1:** Cálculo de límites (formas indeterminadas, infinito)
- **Ejercicio 2:** Dominio, cortes con ejes y asíntotas
- **Ejercicio 3:** Continuidad de función a trozos (parámetro)
- **Ejercicio 4:** Derivadas de funciones compuestas
- **Ejercicio 5:** Continuidad y derivabilidad simultáneas (parámetros)
- **Ejercicio 6:** Estudio completo de función cúbica

Documento generado con rigor matemático universitario.
Cada paso está justificado. Ningún «salto mágico».
***Nivel:** 1º Bachillerato (Continuidad y Derivabilidad)*

Índice general

Introducción y Marco Teórico **2**

1 Ejercicio 1: Cálculo de Límites **4**
1.1 Apartado a): Límite con indeterminación **0/0** 4
1.2 Apartado b): Límite por sustitución directa 6
1.3 Apartado c): Límite en el infinito – cociente de polinomios 7
1.4 Apartado d): Límite en el infinito – diferencia de raíces cuadradas . . . 8

2 Ejercicio 2: Dominio, Cortes con Ejes y Asíntotas **11**
2.1 Apartado a): Dominio y puntos de corte con los ejes 11
2.2 Apartado b): Asíntotas 12

3 Ejercicio 3: Continuidad de Función a Trozos **14**
3.1 Apartado a): Valor del parámetro a 14
3.2 Apartado b): Representación gráfica 15

4 Ejercicio 4: Cálculo de Derivadas **17**
4.1 Apartado a): Derivada de una raíz cuadrada compuesta 17
4.2 Apartado b): Derivada de un cociente 18
4.3 Apartado c): Derivada de un polinomio 19
4.4 Apartado d): Derivada de suma de funciones elementales 20

5 Ejercicio 5: Continuidad y Derivabilidad Simultáneas **22**
5.1 Condición 1: Continuidad en $x = 2$ 22
5.2 Condición 2: Derivabilidad en $x = 2$ 23
5.3 Resolución del sistema 23
5.4 Verificación completa 23

6 Ejercicio 6: Estudio Completo de una Función Cúbica **25**
6.1 Dominio 25
6.2 Continuidad 25
6.3 Simetría 25
6.4 Puntos de corte con los ejes 26
6.5 Límites en el infinito y comportamiento asintótico 26
6.6 Derivada primera: monotonía y extremos 26
6.7 Derivada segunda: curvatura y puntos de inflexión 27
6.8 Tabla resumen de propiedades 28
6.9 Representación gráfica 29

Conclusiones y Resumen General **30**

Introducción y Marco Teórico

Propósito de este documento

Este documento contiene las soluciones completamente razonadas del examen de Matemáticas de 1º de Bachillerato celebrado el 7 de marzo de 2025. El objetivo no es simplemente dar el resultado correcto, sino **explicar el *porqué* de cada paso**, de modo que cualquier alumno que lo lea comprenda en profundidad los conceptos de **límites, continuidad y derivabilidad**.

Recordatorio de conceptos fundamentales

Definición 0.1 (Límite de una función)**.** Decimos que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ si, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Intuitivamente: cuando x se acerca a a, $f(x)$ se acerca tanto como queramos a L.

Definición 0.2 (Continuidad en un punto)**.** Una función f es **continua en** $x = a$ si se cumplen simultáneamente las tres condiciones:

1. $f(a)$ está definida.
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ existe (y los límites laterales coinciden).
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Definición 0.3 (Derivabilidad en un punto)**.** Una función f es **derivable en** $x = a$ si existe el límite

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Para funciones definidas a trozos, esto equivale a que los límites laterales de la derivada coincidan en el punto de unión.

Condición necesaria: Si f es derivable en a, entonces f es continua en a (pero no al revés).

Teorema 0.1 (Reglas de derivación básicas)**.** Sean $u(x)$ y $v(x)$ funciones derivables. Entonces:

$$\begin{aligned}
(u \pm v)' &= u' \pm v' && \text{(linealidad)}\\
(u \cdot v)' &= u'v + uv' && \text{(regla del producto)}\\
\left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} && \text{(regla del cociente)}\\
(f \circ g)'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) && \text{(regla de la cadena)}
\end{aligned}$$

Teorema 0.2 (Derivadas elementales)**.**

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (e^x)' = e^x,$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Capítulo 1

Ejercicio 1: Cálculo de Límites

Enunciado del Ejercicio 1

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 7x + 6}{x^2 - 1}$

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - 4}{x^2 + 4}$

c) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{-2x^3 + 3x - 2}{2x^3 - 2x^2 + 4x - 1}$

d) $\lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{9x^2 + 5x - 1} - \sqrt{9x^2 - x + 8}\right)$

1.1. Apartado a): Límite con indeterminación 0/0

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 7x + 6}{x^2 - 1}$$

Paso 1: Sustitución directa (detección de indeterminación)

Sustituimos $x = 1$ en numerador y denominador:

$$\text{Numerador: } 1^3 - 7(1) + 6 = 1 - 7 + 6 = 0$$

$$\text{Denominador: } 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$$

Obtenemos la indeterminación $\dfrac{0}{0}$. Esto nos indica que $x = 1$ es raíz de ambos polinomios, lo que significa que $(x - 1)$ es un factor común que debemos cancelar.

Observación pedagógica

La indeterminación 0/0 NO significa que el límite no exista; simplemente indica que no podemos calcularlo por sustitución directa. Debemos factorizar y simplificar.

Paso 2: Factorización del denominador

El denominador $x^2 - 1$ es una **diferencia de cuadrados**:

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

Paso 3: Factorización del numerador

El numerador es $P(x) = x^3 - 7x + 6$. Como $P(1) = 0$, sabemos que $(x-1)$ divide a $P(x)$.

División de Ruffini de $x^3 + 0x^2 - 7x + 6$ entre $(x-1)$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 1 & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

Por tanto:

$$x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x^2 + x - 6)$$

Ahora factorizamos $x^2 + x - 6$ buscando dos números cuyo producto sea -6 y cuya suma sea 1: son 3 y -2:

$$x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$$

En consecuencia:

$$x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x+3)(x-2)$$

Paso 4: Cancelación del factor común y cálculo

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 7x + 6}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+3)(x-2)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+3)(x-2)}{x+1}$$

Ahora sí podemos sustituir $x = 1$ directamente (la indeterminación ha desaparecido):

$$= \frac{(1+3)(1-2)}{1+1} = \frac{4 \cdot (-1)}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Solución

$$\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 7x + 6}{x^2 - 1} = -2}$$

Advertencia - Error frecuente

Error frecuente: cancelar el factor $(x-1)$ y olvidar que esto sólo es válido cuando $x \neq 1$ (lo que es perfectamente lícito en el contexto de un límite, donde x se *aproxima* a 1 pero nunca *es* 1).

Representación gráfica ilustrativa

$f(x) = \dfrac{x^3 - 7x + 6}{x^2 - 1}$ – **el límite en** $x = 1$ **vale** -2

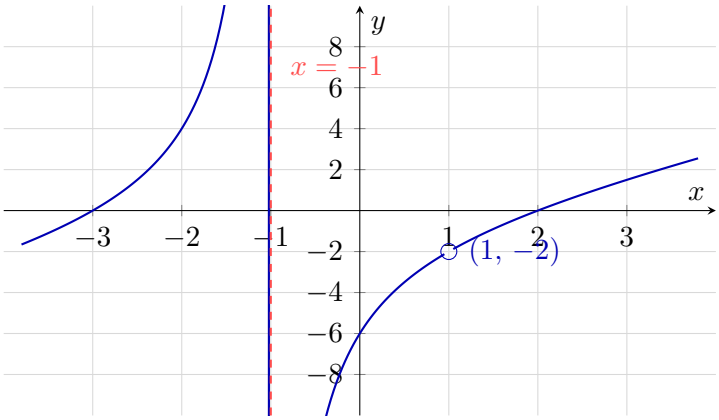


Figura 1.1: La función $f(x) = \frac{x^3-7x+6}{x^2-1}$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 1$ con valor del límite igual a -2.

1.2. Apartado b): Límite por sustitución directa

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - 4}{x^2 + 4}$$

Paso 1: Sustitución directa

Sustituimos $x = 0$:

$$\text{Numerador: } 0 - 4 = -4 \neq 0$$

$$\text{Denominador: } 0^2 + 4 = 4 \neq 0$$

No hay indeterminación. El denominador no se anula porque $x^2 + 4 \geq 4 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, la función es continua en $x = 0$ y podemos sustituir directamente.

Paso 2: Cálculo

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - 4}{x^2 + 4} = \frac{0 - 4}{0^2 + 4} = \frac{-4}{4} = -1$$

Solución

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{x - 4}{x^2 + 4} = -1}$$

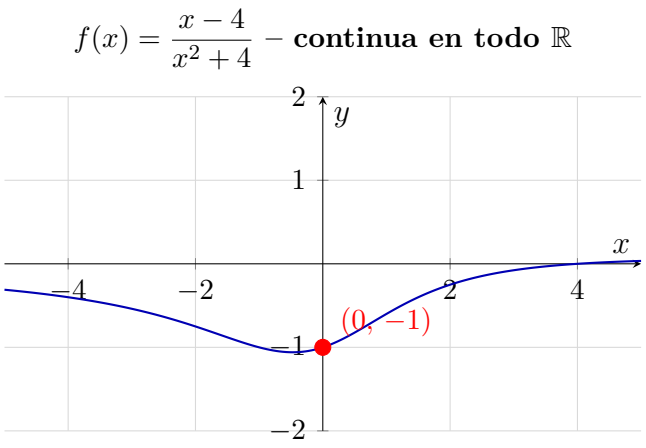


Figura 1.2: La función $g(x) = \frac{x-4}{x^2+4}$ es continua en todo $\mathbb{R}$. El valor en $x = 0$ coincide con el límite: -1.

1.3. Apartado c): Límite en el infinito – cociente de polinomios

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-2x^3 + 3x - 2}{2x^3 - 2x^2 + 4x - 1}$$

Método: División por la potencia máxima del denominador

Cuando el límite es en el infinito y tenemos un cociente de polinomios, **dividimos numerador y denominador por la mayor potencia de x que aparece** (en este caso x^3):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-2x^3 + 3x - 2}{2x^3 - 2x^2 + 4x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{-2x^3 + 3x - 2}{x^3}}{\dfrac{2x^3 - 2x^2 + 4x - 1}{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2 + \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}}{2 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}}$$

Aplicación de los límites elementales

Usamos el hecho fundamental de que $\lim_{x\to\infty} \dfrac{c}{x^n} = 0$ para cualquier $c \in \mathbb{R}$ y $n \geq 1$:

$$\frac{3}{x^2} \to 0, \quad \frac{2}{x^3} \to 0, \quad \frac{2}{x} \to 0, \quad \frac{4}{x^2} \to 0, \quad \frac{1}{x^3} \to 0$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-2 + 0 - 0}{2 - 0 + 0 - 0} = \frac{-2}{2} = -1$$

Observación pedagógica

Regla práctica (ratio de coeficientes líderes): Cuando numerador y denominador tienen el *mismo* grado, el límite en el infinito es el cociente entre sus coeficientes líderes:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + \cdots}{b_n x^n + \cdots} = \frac{a_n}{b_n}$$

Aquí, $a_3 = -2$ y $b_3 = 2$, por lo que el límite es $\frac{-2}{2} = -1$. Sin embargo, conviene siempre justificar dividiendo por x^n.

Solución

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{-2x^3 + 3x - 2}{2x^3 - 2x^2 + 4x - 1} = -1}$$

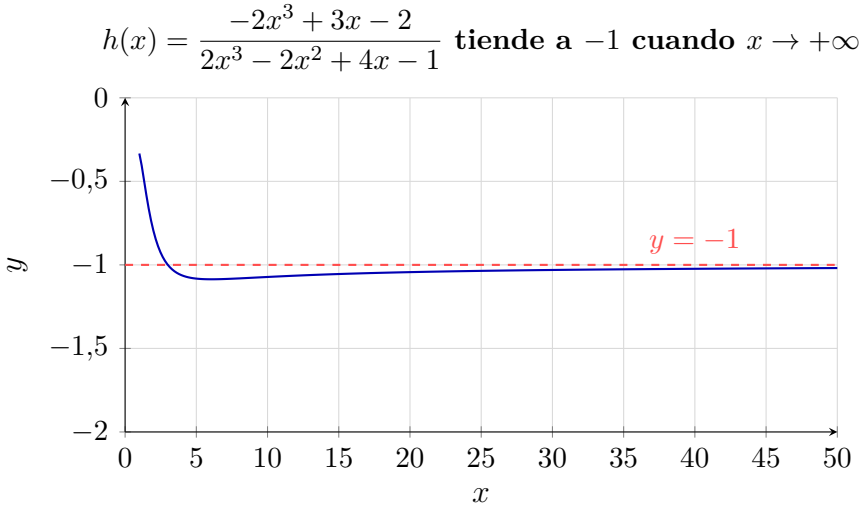


Figura 1.3: La función $h(x)$ se aproxima a la asíntota horizontal $y = -1$ cuando $x \to +\infty$.

1.4. Apartado d): Límite en el infinito – diferencia de raíces cuadradas

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2 + 5x - 1} - \sqrt{9x^2 - x + 8}\right)$$

Paso 1: Identificación de la indeterminación

Cuando $x \to +\infty$:

$$\sqrt{9x^2 + 5x - 1} \to +\infty \quad \text{y} \quad \sqrt{9x^2 - x + 8} \to +\infty$$

Tenemos la indeterminación $\infty - \infty$.

Paso 2: Técnica del conjugado

El método estándar para resolver $\infty - \infty$ con raíces es **multiplicar y dividir por la expresión conjugada**:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{A}-\sqrt{B})(\sqrt{A}+\sqrt{B})}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \lim_{x\to\infty}\frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$$

donde $A = 9x^2 + 5x - 1$ y $B = 9x^2 - x + 8$.

Paso 3: Cálculo de $A - B$

$$\begin{aligned} A - B &= (9x^2 + 5x - 1) - (9x^2 - x + 8) \\ &= 9x^2 + 5x - 1 - 9x^2 + x - 8 \\ &= 6x - 9 \end{aligned}$$

Paso 4: Sustitución en el límite

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x-9}{\sqrt{9x^2+5x-1}+\sqrt{9x^2-x+8}}$$

Paso 5: División por x en numerador y denominador

Para resolver este cociente, dividimos por $x > 0$ (como $x \to +\infty$, $x > 0$, así que $\sqrt{x^2} = x$):

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{6x-9}{x}}{\dfrac{\sqrt{9x^2+5x-1}+\sqrt{9x^2-x+8}}{x}}$$

En el numerador:

$$\frac{6x-9}{x} = 6 - \frac{9}{x} \xrightarrow{x\to\infty} 6$$

En el denominador, usando que para $x > 0$:

$$\frac{\sqrt{9x^2+5x-1}}{x} = \sqrt{\frac{9x^2+5x-1}{x^2}} = \sqrt{9+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}$$

$$\frac{\sqrt{9x^2-x+8}}{x} = \sqrt{\frac{9x^2-x+8}{x^2}} = \sqrt{9-\frac{1}{x}+\frac{8}{x^2}}$$

Cuando $x \to \infty$, $\frac{1}{x} \to 0$ y $\frac{1}{x^2} \to 0$, de modo que:

$$\sqrt{9+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}} \to \sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{9-\frac{1}{x}+\frac{8}{x^2}} \to \sqrt{9} = 3$$

Por tanto, el denominador tiende a $3 + 3 = 6$.

Paso 6: Resultado final

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6x-9}{\sqrt{9x^2+5x-1}+\sqrt{9x^2-x+8}} = \frac{6}{3+3} = \frac{6}{6} = 1$$

Solución

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2+5x-1}-\sqrt{9x^2-x+8}\right) = 1}$$

Advertencia - Error frecuente

Error muy frecuente: dividir por x dentro de la raíz sin tener en cuenta que $\dfrac{\sqrt{A}}{x} = \sqrt{\dfrac{A}{x^2}}$ y NO $\sqrt{\dfrac{A}{x}}$. Recuerda: la raíz y la división no conmutan de esa manera.

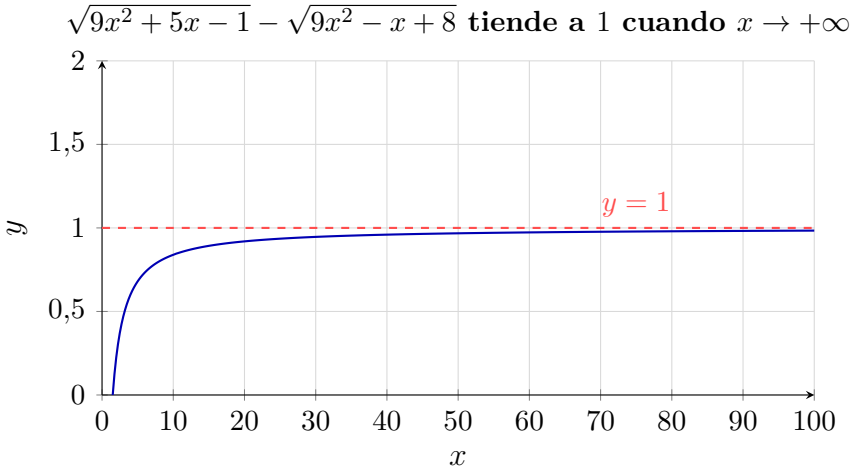


Figura 1.4: La diferencia de raíces se aproxima asintóticamente a $y = 1$.

Capítulo 2

Ejercicio 2: Dominio, Cortes con Ejes y Asíntotas

Enunciado del Ejercicio 2

Dada la función:

$$y = \frac{2x^2}{x^2 - 16}$$

Calcúlese:

a) Dominio y puntos de corte con los ejes.

b) Asíntotas, tanto verticales como horizontales.

2.1. Apartado a): Dominio y puntos de corte con los ejes

Dominio

La función es un cociente de polinomios. Una función racional está definida en todos los reales **excepto** donde el denominador se anula.

Resolvemos $x^2 - 16 = 0$:

$$x^2 = 16 \implies x = \pm 4$$

Por tanto, el **dominio** es:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\} = (-\infty, -4) \cup (-4, 4) \cup (4, +\infty)$$

Punto de corte con el eje OY (eje de ordenadas)

El corte con el eje OY se obtiene haciendo $x = 0$:

$$y(0) = \frac{2 \cdot 0^2}{0^2 - 16} = \frac{0}{-16} = 0$$

El punto de corte con el eje OY es $\mathbf{(0, 0)}$.

Puntos de corte con el eje OX (eje de abscisas)

Los cortes con el eje OX se obtienen haciendo $y = 0$, es decir, igualando el numerador a cero:

$$2x^2 = 0 \implies x^2 = 0 \implies x = 0$$

El único punto de corte con el eje OX es también $\mathbf{(0, 0)}$.

Observación pedagógica

El origen $(0, 0)$ es simultáneamente el corte con ambos ejes. La función toca el eje OX en $x = 0$ pero no lo cruza (tiene un mínimo relativo allí, como veremos en el análisis posterior).

2.2. Apartado b): Asíntotas

Asíntotas verticales

Las **asíntotas verticales** de una función racional irreducible se encuentran en los valores de x donde el denominador se anula. Ya encontramos que $x^2 - 16 = 0$ en $x = \pm 4$.

Verificamos que el numerador no se anule también en esos puntos:

$$2(\pm 4)^2 = 2 \cdot 16 = 32 \neq 0$$

Por tanto, existen **asíntotas verticales** en $x = -4$ y $x = 4$.

Calculamos los límites laterales para entender el comportamiento:

En $x = 4$:

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{2x^2}{x^2 - 16}$$

Cuando $x \to 4^+$: numerador $\to 32 > 0$, denominador $\to 0^+$. Resultado: $+\infty$.

$$\lim_{x \to 4^-} \frac{2x^2}{x^2 - 16}$$

Cuando $x \to 4^-$: numerador $\to 32 > 0$, denominador $\to 0^-$. Resultado: $-\infty$.

En $x = -4$:

$$\lim_{x \to -4^+} \frac{2x^2}{x^2 - 16}$$

Cuando $x \to -4^+$: numerador $\to 32 > 0$, denominador $\to 0^-$. Resultado: $-\infty$.

$$\lim_{x \to -4^-} \frac{2x^2}{x^2 - 16}$$

Cuando $x \to -4^-$: numerador $\to 32 > 0$, denominador $\to 0^+$. Resultado: $+\infty$.

Asíntota horizontal

Para determinar asíntotas horizontales, calculamos:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 16}$$

Dividimos numerador y denominador por x^2:

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{1-\dfrac{16}{x^2}} = \frac{2}{1-0} = 2$$

Existe **asíntota horizontal** $y = 2$.
Comprobamos que la función no alcanza el valor $y = 2$:

$$\frac{2x^2}{x^2-16} = 2 \implies 2x^2 = 2(x^2-16) \implies 2x^2 = 2x^2 - 32 \implies 0 = -32$$

Esto es una contradicción, por tanto la función nunca toca la asíntota $y = 2$.

Solución

Resumen del análisis:

- **Dominio:** $\mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$
- **Corte con ejes:** Sólo en el origen $(0, 0)$
- **Asíntotas verticales:** $x = -4$ y $x = 4$
- **Asíntota horizontal:** $y = 2$
- No existe asíntota oblicua (cuando hay horizontal no hay oblicua)

$y = \dfrac{2x^2}{x^2-16}$ **con asíntotas** $x = \pm 4$ **e** $y = 2$

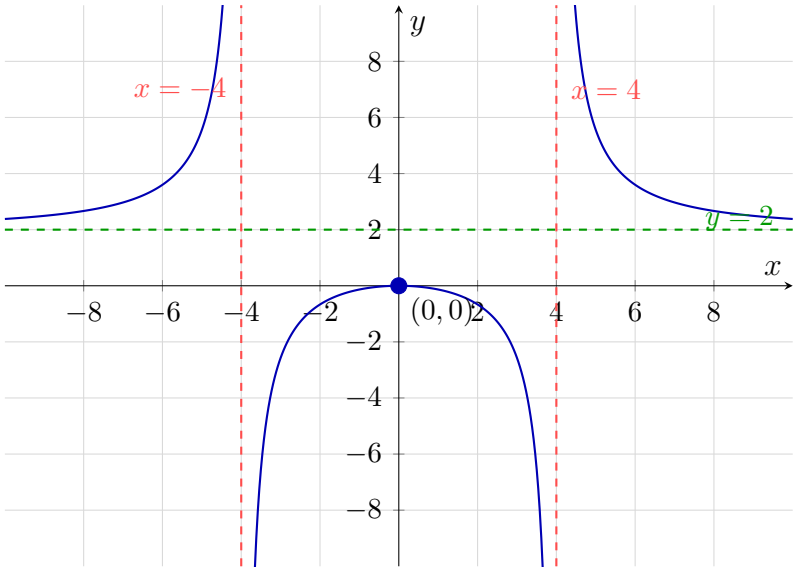


Figura 2.1: Gráfica de $y = \frac{2x^2}{x^2-16}$. La función tiene asíntotas verticales en $x = \pm 4$ y asíntota horizontal en $y = 2$. El único corte con los ejes es el origen.

Capítulo 3

Ejercicio 3: Continuidad de Función a Trozos

Enunciado del Ejercicio 3

Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x + a & \text{si } x < -1 \\ x^2 + ax + 2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

a) Calcula el valor del parámetro a para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Representación gráfica de la función.

3.1. Apartado a): Valor del parámetro a

Análisis previo

Cada «trozo» de la función es continuo en su respectivo dominio (pues son polinomios, que son funciones continuas en todo $\mathbb{R}$). Por tanto, la única posible fuente de discontinuidad es el punto de unión $x = -1$.

Para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$, es **necesario y suficiente** que sea continua en $x = -1$.

Condición de continuidad en $x = -1$

Necesitamos que:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1)$$

Valor de la función en $x = -1$ (usamos el segundo trozo, pues $x \geq -1$):

$$f(-1) = (-1)^2 + a(-1) + 2 = 1 - a + 2 = 3 - a$$

Límite por la izquierda (usamos el primer trozo, pues $x < -1$):

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (x + a) = -1 + a$$

Límite por la derecha (usamos el segundo trozo, pues $x \geq -1$):

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (x^2 + ax + 2) = (-1)^2 + a(-1) + 2 = 1 - a + 2 = 3 - a$$

Observamos que el límite por la derecha coincide con $f(-1) = 3 - a$, lo cual era esperable porque el segundo trozo es continuo y se evalúa exactamente en $x = -1$.

Imposición de la condición

Para la continuidad, el límite por la izquierda debe igualar al límite por la derecha:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x)$$

$$-1 + a = 3 - a$$

$$a + a = 3 + 1$$

$$2a = 4$$

$$\boxed{a = 2}$$

Verificación

Con $a = 2$:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -1 + 2 = 1$$

$$f(-1) = 3 - 2 = 1$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = 3 - 2 = 1$$

Los tres valores coinciden, por lo que con $a = 2$ la función es efectivamente continua en $x = -1$ y, por tanto, en todo $\mathbb{R}$.

Solución

$$\boxed{a = 2}$$

La función continua en todo $\mathbb{R}$ es:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 2x + 2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

3.2. Apartado b): Representación gráfica

Con $a = 2$, la función es:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 2x + 2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

Análisis del primer trozo ($x + 2$, recta): pasa por $(-2, 0)$ y $(-1, 1)$.
Análisis del segundo trozo ($x^2 + 2x + 2$, parábola):

$$x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1$$

Vértice en $(-1, 1)$, parábola cóncava hacia arriba. El punto de unión es $(-1, 1)$, que coincide exactamente con el valor de continuidad.

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & x < -1 \\ x^2+2x+2 & x \geq -1 \end{cases} \textbf{ con } a = 2 \textbf{ (continua)}$$

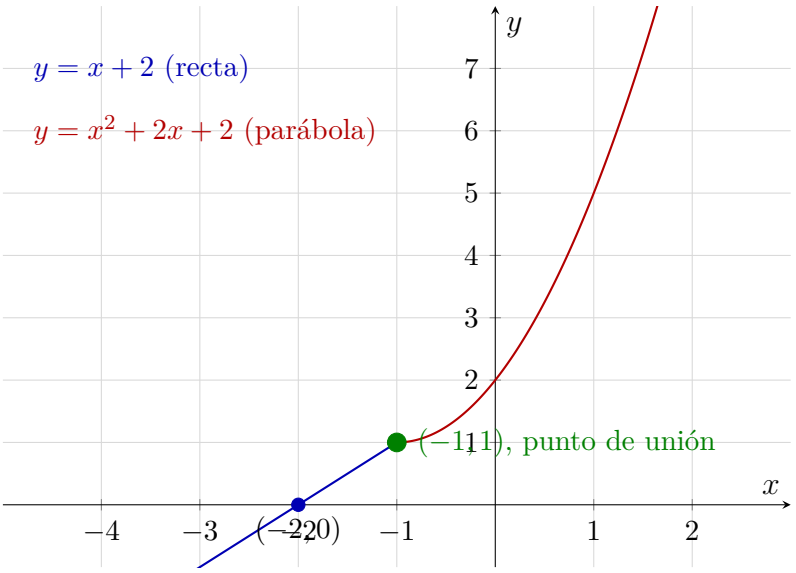


Figura 3.1: Representación gráfica de $f(x)$ con $a = 2$. La unión se produce en $(-1, 1)$ de forma continua: no hay salto ni hueco en ese punto.

Capítulo 4

Ejercicio 4: Cálculo de Derivadas

Enunciado del Ejercicio 4

Calcúlense las derivadas de las siguientes funciones y simplifica cuando sea posible:

a) $y = \sqrt{2x^3 + 3x^2 + x - 2}$

b) $y = \dfrac{\ln(x) - \sin x}{x^2}$

c) $y = \dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{1}{4}x^4 + 3x^3 - x^2$

d) $y = e^x + \tan x$

4.1. Apartado a): Derivada de una raíz cuadrada compuesta

$$y = \sqrt{2x^3 + 3x^2 + x - 2}$$

Identificación de la estructura

Esta función es una **función compuesta**: $y = f(g(x))$ donde:

$$f(u) = \sqrt{u} = u^{1/2}, \quad g(x) = 2x^3 + 3x^2 + x - 2$$

Aplicamos la **regla de la cadena**: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Derivadas de los componentes

$$f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$g'(x) = 6x^2 + 6x + 1$$

Aplicación de la regla de la cadena

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x)$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{2x^3+3x^2+x-2}} \cdot (6x^2+6x+1)$$

$$y' = \frac{6x^2+6x+1}{2\sqrt{2x^3+3x^2+x-2}}$$

Solución

$$\boxed{y' = \frac{6x^2+6x+1}{2\sqrt{2x^3+3x^2+x-2}}}$$

Observación pedagógica

La regla de derivación de la raíz compuesta es: $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$. Esto es simplemente la regla de la cadena aplicada a $u^{1/2}$. No es necesario memorizar nada adicional, solo tener claro la regla de la cadena.

4.2. Apartado b): Derivada de un cociente

$$y = \frac{\ln(x) - \sin x}{x^2}$$

Método elegido: Regla del cociente

Identificamos:

$$u = \ln(x) - \sin x, \qquad v = x^2$$

Derivadas:

$$u' = \frac{1}{x} - \cos x, \qquad v' = 2x$$

Aplicación de la regla del cociente

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$y' = \frac{\left(\dfrac{1}{x} - \cos x\right) x^2 - (\ln x - \sin x) \cdot 2x}{(x^2)^2}$$

Simplificación del numerador

Expandimos:

$$\left(\frac{1}{x} - \cos x\right) x^2 = x - x^2 \cos x$$

$$(\ln x - \sin x) \cdot 2x = 2x \ln x - 2x \sin x$$

Por tanto, el numerador es:

$$x - x^2 \cos x - 2x \ln x + 2x \sin x$$

Factorizamos x:

$$= x\,(1 - x\cos x - 2\ln x + 2\sin x)$$

Y el denominador es $(x^2)^2 = x^4$.

Resultado simplificado

$$y' = \frac{x(1 - x\cos x - 2\ln x + 2\sin x)}{x^4} = \frac{1 - x\cos x - 2\ln x + 2\sin x}{x^3}$$

Solución

$$\boxed{y' = \frac{1 - x\cos x - 2\ln x + 2\sin x}{x^3}}$$

Advertencia - Error frecuente

Signo en u': la derivada de $-\sin x$ es $-\cos x$, no $+\cos x$. Y la derivada de $\ln x$ es $\frac{1}{x}$, que NO es $\frac{1}{x^2}$ ni x. Estos son errores muy frecuentes.

4.3. Apartado c): Derivada de un polinomio

$$y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + 3x^3 - x^2$$

Aplicación de la regla de la potencia término a término

La derivada de una suma es la suma de las derivadas (linealidad de la derivada). Para cada término usamos $(x^n)' = nx^{n-1}$:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{5}x^5\right) = \frac{1}{5}\cdot 5x^{5-1} = x^4$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}x^4\right) = \frac{1}{4}\cdot 4x^{4-1} = x^3$$

$$\frac{d}{dx}\left(3x^3\right) = 3\cdot 3x^{3-1} = 9x^2$$

$$\frac{d}{dx}\left(-x^2\right) = -2x^{2-1} = -2x$$

Resultado

$$y' = x^4 + x^3 + 9x^2 - 2x$$

Podemos factorizar x:

$$y' = x(x^3 + x^2 + 9x - 2)$$

Solución

$$\boxed{y' = x^4 + x^3 + 9x^2 - 2x = x(x^3 + x^2 + 9x - 2)}$$

Observación pedagógica

Observa que los coeficientes $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{4}$ se cancelan elegantemente con los exponentes. Esto ocurre porque $\frac{1}{5}x^5$ es la primitiva de x^4, y $\frac{1}{4}x^4$ es la primitiva de x^3. Este ejercicio está diseñado específicamente para que la derivación sea limpia.

4.4. Apartado d): Derivada de suma de funciones elementales

$$y = e^x + \tan x$$

Aplicación de la linealidad

La derivada de una suma es la suma de las derivadas. Usamos las derivadas elementales:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

(Cualquiera de las tres expresiones equivalentes es aceptable.)

Resultado

$$y' = e^x + \frac{1}{\cos^2 x}$$

Solución

$$\boxed{y' = e^x + \frac{1}{\cos^2 x}}$$

Advertencia - Error frecuente

La derivada de $\tan x$ es $\dfrac{1}{\cos^2 x}$, y NO $\dfrac{1}{\sin^2 x}$ ni $\cos^2 x$ ni $-\dfrac{1}{\cos^2 x}$. Es uno de los errores más comunes en los exámenes de bachillerato.

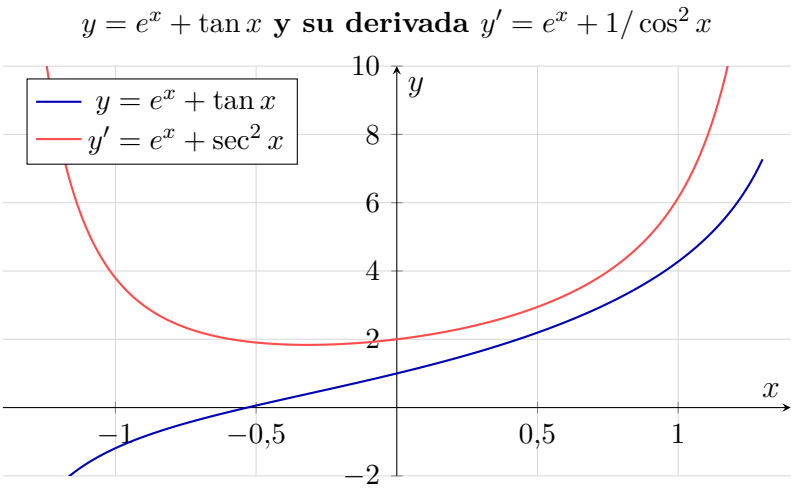


Figura 4.1: La función $y = e^x + \tan x$ (azul) y su derivada $y' = e^x + \sec^2 x$ (roja). Nótese que la derivada es siempre positiva, lo que indica que la función original es estrictamente creciente en su dominio.

Capítulo 5

Ejercicio 5: Continuidad y Derivabilidad Simultáneas

Enunciado del Ejercicio 5

Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax - 5 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x^2 - 4x + b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Calcúlense los valores de los parámetros a y b para que la función sea continua y derivable en todos los reales.

Estrategia general

Para que f sea continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, el único punto crítico a analizar es $x = 2$ (los trozos son polinomios, continuos y derivables en todo $\mathbb{R}$).

Necesitamos imponer **dos condiciones**:

1. **Continuidad en $x = 2$:** $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$
2. **Derivabilidad en $x = 2$:** Las derivadas laterales deben coincidir.

Tenemos dos incógnitas (a y b) y dos ecuaciones, por lo que el sistema tendrá solución única.

5.1. Condición 1: Continuidad en $x = 2$

Valor de f en $x = 2$ (usamos el primer trozo, pues $x \leq 2$):

$$f(2) = a(2) - 5 = 2a - 5$$

Límite por la izquierda:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (ax - 5) = 2a - 5$$

(Coincide con $f(2)$, como era de esperar al ser el primer trozo continuo.)

Límite por la derecha:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (2x^2 - 4x + b) = 2(4) - 4(2) + b = 8 - 8 + b = b$$

Igualación:

$$2a - 5 = b \quad \Longrightarrow \quad \boxed{b = 2a - 5} \quad \text{(ecuación 1)}$$

5.2. Condición 2: Derivabilidad en $x = 2$

Calculamos las derivadas de cada trozo:
Derivada del primer trozo (para $x < 2$):

$$f'(x) = a \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to 2^-} f'(x) = a$$

Derivada del segundo trozo (para $x > 2$):

$$f'(x) = 4x - 4 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to 2^+} f'(x) = 4(2) - 4 = 4$$

Igualación de derivadas laterales:

$$a = 4 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a = 4} \quad \text{(ecuación 2)}$$

5.3. Resolución del sistema

Con $a = 4$ sustituimos en la ecuación 1:

$$b = 2(4) - 5 = 8 - 5 = 3 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{b = 3}$$

5.4. Verificación completa

Con $a = 4$, $b = 3$:

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 5 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x^2 - 4x + 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Continuidad:

$$f(2) = 4(2) - 5 = 3$$

$$\lim_{x \to 2^+} (2x^2 - 4x + 3) = 2(4) - 8 + 3 = 3 \checkmark$$

Derivabilidad:

$$f'(2^-) = 4$$

$$f'(2^+) = 4(2) - 4 = 4 \checkmark$$

Solución

$$\boxed{a = 4, \quad b = 3}$$

La función resultante es:

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 5 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x^2 - 4x + 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, con $f'(x) = \begin{cases} 4 & x < 2 \\ 4x - 4 & x > 2 \end{cases}$ y $f'(2) = 4$.

Observación pedagógica

Conclusión importante: La derivabilidad implica continuidad, pero no al revés. Por eso primero imponemos continuidad (que da una ecuación que relaciona a y b) y luego derivabilidad (que fija el valor de a). Con a determinado, b queda automáticamente fijado.

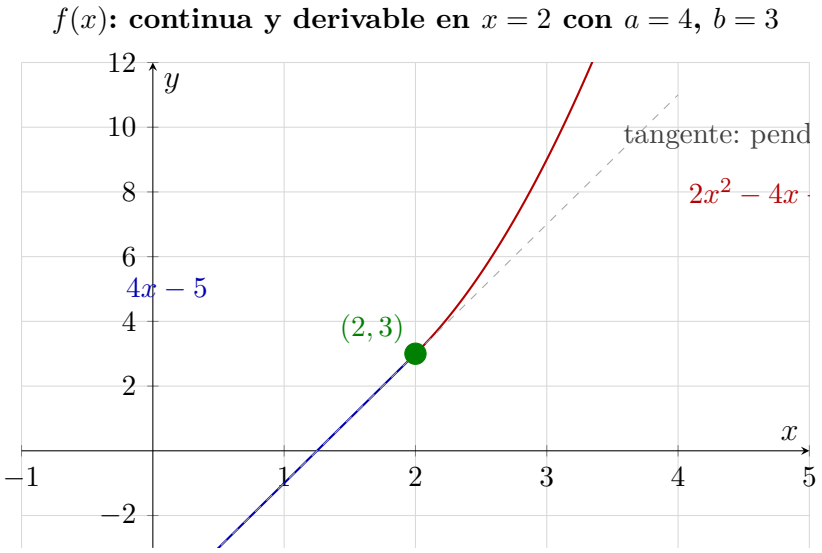


Figura 5.1: Función $f(x)$ con $a = 4$, $b = 3$. La unión en $x = 2$ es perfectamente suave: la función es continua (no hay salto) y derivable (misma pendiente a ambos lados, igual a 4).

Capítulo 6

Ejercicio 6: Estudio Completo de una Función Cúbica

Enunciado del Ejercicio 6

Estudia, representa e indica las propiedades de la siguiente función:

$$y = -x^3 + 3x + 2$$

6.1. Dominio

$f(x) = -x^3 + 3x + 2$ es un polinomio de grado 3. Los polinomios están definidos para todo valor real.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

6.2. Continuidad

Los polinomios son funciones continuas en todo su dominio. Por tanto, f es **continua en todo** $\mathbb{R}$.

6.3. Simetría

Comprobamos si la función es par ($f(-x) = f(x)$) o impar ($f(-x) = -f(x)$):

$$f(-x) = -(-x)^3 + 3(-x) + 2 = x^3 - 3x + 2$$

$$f(x) = -x^3 + 3x + 2 \neq f(-x) \quad \text{(no es par)}$$
$$-f(x) = x^3 - 3x - 2 \neq f(-x) \quad \text{(no es impar)}$$

La función **no tiene simetría** ni par ni impar.

6.4. Puntos de corte con los ejes

Corte con el eje OY

Hacemos $x = 0$:

$$f(0) = -0 + 0 + 2 = 2$$

Corte: $\mathbf{(0, 2)}$.

Cortes con el eje OX

Resolvemos $-x^3 + 3x + 2 = 0$, equivalentemente $x^3 - 3x - 2 = 0$.
Probamos raíces enteras (divisores de -2): $\pm 1, \pm 2$.
$x = -1$: $(-1)^3 - 3(-1) - 2 = -1 + 3 - 2 = 0$. ✓
Dividimos $x^3 - 3x - 2$ entre $(x + 1)$ por Ruffini:

	1	0	−3	−2
−1		−1	1	2
	1	−1	−2	0

$$x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x^2 - x - 2)$$

Factorizamos $x^2 - x - 2$: buscamos dos números con producto -2 y suma -1: son -2 y 1:

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$$

Por tanto:

$$x^3 - 3x - 2 = (x + 1)^2(x - 2)$$

Las raíces son:

- $x = -1$ (raíz doble: el eje es tangente a la curva)
- $x = 2$ (raíz simple: la curva cruza el eje)

Puntos de corte con el eje OX: $\mathbf{(-1, 0)}$ y $\mathbf{(2, 0)}$.

6.5. Límites en el infinito y comportamiento asintótico

$$\lim_{x \to +\infty} (-x^3 + 3x + 2) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} (-x^3 + 3x + 2) = +\infty$$

(El término dominante es $-x^3$: para x positivo grande, la función tiende a $-\infty$; para x negativo grande, tiende a $+\infty$.)
Sin asíntotas (la función es un polinomio).

6.6. Derivada primera: monotonía y extremos

$$f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x^2 - 1) = -3(x - 1)(x + 1)$$

Puntos críticos

$f'(x) = 0$:

$$-3(x-1)(x+1) = 0 \implies x = -1 \quad \text{o} \quad x = 1$$

Tabla de monotonía

Evaluamos el signo de $f'(x) = -3(x-1)(x+1)$:

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$x = -1$	$(-1, 1)$	$x = 1$	$(1, +\infty)$
$(x-1)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+1)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$-3(x-1)(x+1)$	$-3 \cdot (-)(-)$	0	$-3 \cdot (-)(+)$	0	$-3 \cdot (+)(+)$
Signo de f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$ decreciente	mín. local	$\nearrow$ creciente	máx. local	$\searrow$ decreciente

Valores en los extremos

Mínimo local en $x = -1$:

$$f(-1) = -(-1)^3 + 3(-1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$$

Punto $\mathbf{(-1, 0)}$: mínimo local (coincide con el corte con OX).

Máximo local en $x = 1$:

$$f(1) = -(1)^3 + 3(1) + 2 = -1 + 3 + 2 = 4$$

Punto $\mathbf{(1, 4)}$: máximo local.

6.7. Derivada segunda: curvatura y puntos de inflexión

$$f''(x) = -6x$$

Puntos de inflexión

$f''(x) = 0$:

$$-6x = 0 \implies x = 0$$

Valor de la función:

$$f(0) = 2$$

Punto de inflexión: $\mathbf{(0, 2)}$.

Análisis de la curvatura

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$x = 0$	$(0, +\infty)$
$f''(x) = -6x$	$+$	0	$-$
Curvatura	Cóncava hacia arriba $\cup$	Inflexión	Cóncava hacia abajo $\cap$

6.8. Tabla resumen de propiedades

Propiedad	**Resultado**
Dominio	$\mathbb{R}$
Continuidad	Continua en todo $\mathbb{R}$
Derivabilidad	Derivable en todo $\mathbb{R}$
Simetría	Ninguna
Corte OY	$(0, 2)$
Cortes OX	$(-1, 0)$ y $(2, 0)$
Asíntotas	Ninguna
Mínimo local	$(-1, 0)$
Máximo local	$(1, 4)$
Punto de inflexión	$(0, 2)$
Cóncava hacia arriba	$(-\infty, 0)$
Cóncava hacia abajo	$(0, +\infty)$

Solución

La función $y = -x^3 + 3x + 2$ tiene:

- **Mínimo local** en $(-1, 0)$
- **Máximo local** en $(1, 4)$
- **Punto de inflexión** en $(0, 2)$
- Creciente en $(-1, 1)$, decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

6.9. Representación gráfica

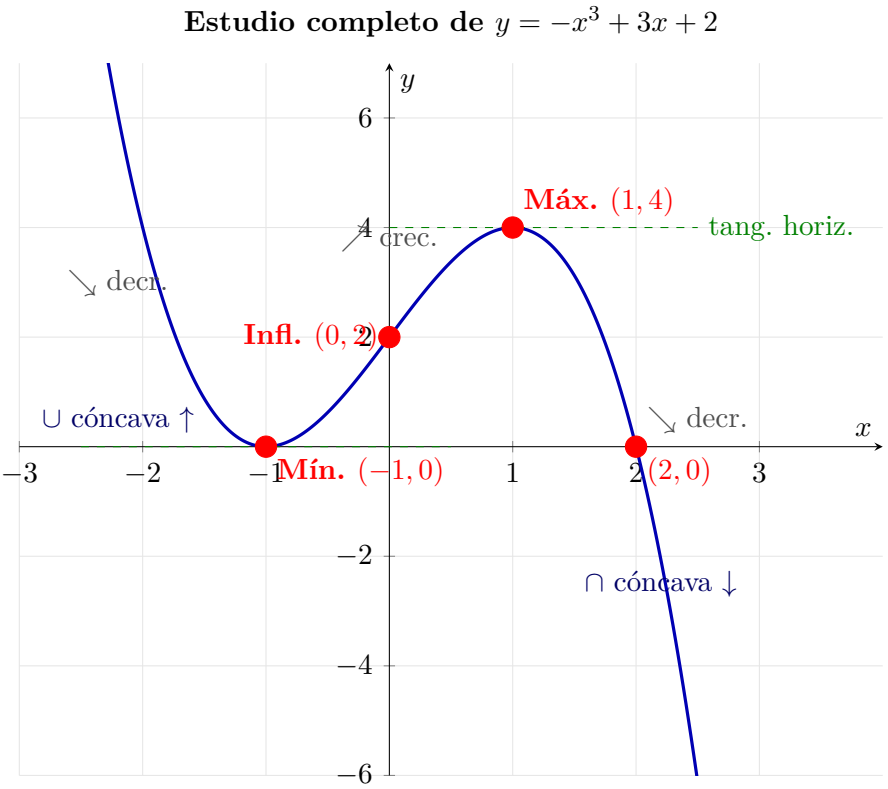


Figura 6.1: Representación completa de $f(x) = -x^3 + 3x + 2$. En rojo: puntos clave (extremos y punto de inflexión). Las flechas indican la monotonía y la curvatura. Las líneas verdes son las tangentes horizontales en los extremos.

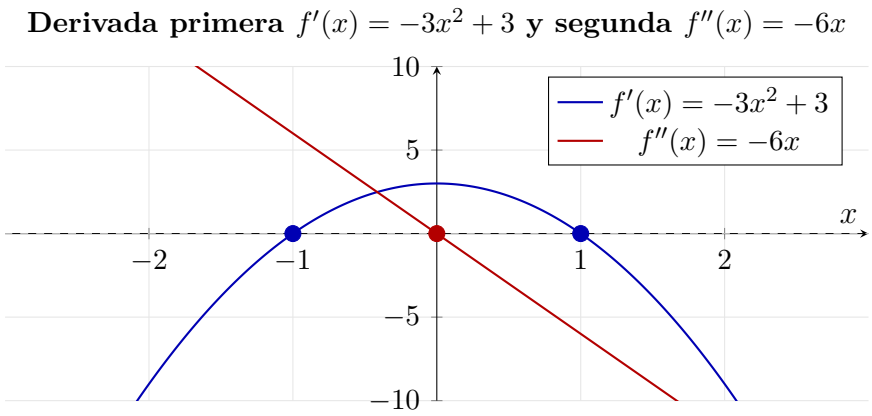


Figura 6.2: La derivada primera se anula en $x = \pm 1$ (extremos locales). La derivada segunda se anula en $x = 0$ (punto de inflexión).

Conclusiones y Resumen General

Tabla resumen de todos los ejercicios

Ej.	Concepto clave	Resultado principal
1a	Límite 0/0 por factorización	$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-7x+6}{x^2-1} = -2$
1b	Límite por sustitución directa	$\lim_{x\to 0} \frac{x-4}{x^2+4} = -1$
1c	Límite ∞/∞ (igual grado)	$\lim_{x\to\infty} \frac{-2x^3+3x-2}{2x^3-2x^2+4x-1} = -1$
1d	Límite $\infty-\infty$ con conjugado	$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+5x-1} - \sqrt{9x^2-x+8}) = 1$
2	Análisis de función racional	Dom. $= \mathbb{R}\setminus\{-4,4\}$; A.V.: $x=\pm 4$; A.H.: $y=2$
3	Continuidad con parámetro	$a = 2$
4a	Derivada de raíz compuesta	$y' = \frac{6x^2+6x+1}{2\sqrt{2x^3+3x^2+x-2}}$
4b	Derivada de cociente	$y' = \frac{1-x\cos x-2\ln x+2\sin x}{x^3}$
4c	Derivada de polinomio	$y' = x^4+x^3+9x^2-2x$
4d	Derivadas elementales	$y' = e^x + \frac{1}{\cos^2 x}$
5	Continuidad y derivabilidad	$a = 4$, $b = 3$
6	Estudio completo de cúbica	Mín. $(-1,0)$, Máx. $(1,4)$, Infl. $(0,2)$

Técnicas clave a recordar

- **Indeterminación $0/0$:** Factorizar y cancelar el factor común.
- **Indeterminación ∞/∞:** Dividir por la mayor potencia.
- **Indeterminación $\infty - \infty$ con raíces:** Multiplicar por el conjugado.
- **Asíntotas verticales:** Donde el denominador se anula y el numerador no.
- **Asíntota horizontal:** $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ si el límite es finito.
- **Continuidad en punto de unión:** Igualar límites laterales entre sí y con f.
- **Derivabilidad en punto de unión:** Igualar derivadas laterales.
- **Regla de la cadena:** $(\sqrt{u})' = u'/(2\sqrt{u})$.
- **Regla del cociente:** $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$.
- **Extremos:** $f' = 0$ y cambio de signo de f'.
- **Inflexión:** $f'' = 0$ y cambio de signo de f''.

¡Buena suerte en el examen!

Documento generado con LaTeX – Matemáticas 1º Bachillerato – Continuidad y Derivabilidad

Junta de Castilla y León
CONSEJERIA DE EDUCACION Y CULTURA

EXAMEN DE MATEMÁTICAS.
ESTADÍSTICA
1º BACHILLERATO
09-MAYO / 2025

ies Antonio Tovar Centro bilingüe

Nº1.- La siguiente tabla recoge las edades de los empleados que trabajan en una empresa:

Edad	[18,28)	[28,38)	[38,48)	[48,58)	[58,68)
Nº de empleados	15	25	30	22	8

a) Construye la tabla de frecuencias y calcula la moda, la media, la varianza, la desviación típica, el coeficiente de variación, la mediana, los cuartiles 1º y 3º y realiza el diagrama de caja.
b) Dibuja un gráfico de barras sobre los datos obtenidos.

Nº2.- Las notas de 10 alumnos y alumnas de una clase en Matemáticas y en Química han sido las siguientes:

X: Matemáticas	5	7	8	8	9	10	4	5	5	4
Y: Química	6	6	7	8	10	10	3	3	5	4

Calcúlese:
a) Las medias y desviaciones típicas de ambas variables.
b) La covarianza y el coeficiente de correlación.
c) Halla la recta de regresión de y sobre x. ¿Cuál es el centro de gravedad?
d) Representa la nube de puntos y la recta de regresión.
e) ¿Cómo es la relación entre las dos variables?
f) Si un alumno saca un 6 en matemáticas ¿Qué nota se espera que saque en química?

Nº3.- Una empresa analiza cómo varía la cantidad demandada (en miles de unidades) de su producto ante cambios en el precio (en euros). Según datos históricos, se observa la siguiente relación:

X- Precio (€)	10	12	14	16	18	20
Y- Cantidad demandada (miles de unidades)	50	40	30	20	10	0

Calcúlese:
a) El coeficiente de correlación.
b) Halla la recta de regresión de y sobre x
c) Halla la recta de regresión de x sobre y
d) Representa la nube de puntos y la recta de regresión de y sobre x.
e) ¿Cómo es la relación entre las dos variables?
f) ¿Cuál sería la cantidad demandada si el precio se fija en 15 €?
g) ¿Cuál sería el precio si la cantidad demanda son 25.000 unidades?

SUERTE JÓVENES

SOLUCIONES COMPLETAS

Resolución exhaustiva y pedagógica
con rigor matemático universitario

Elaborado por: SuperAgent CREAO

Nivel: 1.º Bachillerato

Área: Estadística descriptiva y regresión lineal

Fecha de resolución: Febrero de 2026

"La estadística es la gramática de la ciencia."
— Karl Pearson

Índice general

Introducción y guía de lectura **3**

1. Ejercicio 1 — Estadística descriptiva con datos agrupados **4**
Enunciado . . . 4
1.1. Fundamento teórico previo . . . 5
1.2. Apartado a) — Tabla de frecuencias y medidas estadísticas . . . 5
1.2.1. Datos iniciales . . . 5
1.2.2. Marcas de clase . . . 5
1.2.3. Tabla de frecuencias completa . . . 6
1.2.4. Cálculo de la Moda . . . 6
1.2.5. Cálculo de la Media aritmética . . . 6
1.2.6. Cálculo de la Varianza . . . 7
1.2.7. Desviación típica . . . 8
1.2.8. Coeficiente de variación . . . 8
1.2.9. Mediana . . . 8
1.2.10. Cuartil 1 (Q_1) . . . 9
1.2.11. Cuartil 3 (Q_3) . . . 9
1.2.12. Resumen de resultados del apartado a) . . . 10
1.2.13. Diagrama de caja (Box-plot) . . . 10
1.3. Apartado b) — Gráfico de barras (Histograma) . . . 11

2. Ejercicio 2 — Regresión lineal: Matemáticas y Química **13**
Enunciado . . . 13
2.1. Fundamento teórico previo . . . 14
2.2. Tabla de cálculo auxiliar . . . 15
2.3. Apartado a) — Medias y desviaciones típicas . . . 15
2.3.1. Medias . . . 15
2.3.2. Varianzas . . . 15
2.3.3. Desviaciones típicas . . . 16
2.4. Apartado b) — Covarianza y coeficiente de correlación . . . 16
2.4.1. Covarianza . . . 16
2.4.2. Coeficiente de correlación de Pearson . . . 16
2.5. Apartado c) — Recta de regresión de Y sobre X . . . 17
2.5.1. Cálculo de la pendiente b . . . 17
2.5.2. Cálculo del término independiente a . . . 17
2.5.3. Centro de gravedad . . . 17

2.6. Apartado d) — Nube de puntos y recta de regresión . . . 18
2.7. Apartado e) — Interpretación de la relación . . . 18
2.8. Apartado f) — Predicción para $x = 6$ . . . 19

3. Ejercicio 3 — Regresión lineal: Precio y Cantidad demandada 20
Enunciado . . . 20
3.1. Tabla de cálculo auxiliar . . . 21
3.2. Cálculo de medias, varianzas y covarianza . . . 21
3.2.1. Medias . . . 21
3.2.2. Varianzas . . . 21
3.2.3. Covarianza . . . 21
3.3. Apartado a) — Coeficiente de correlación . . . 22
3.4. Apartado b) — Recta de regresión de Y sobre X . . . 22
3.4.1. Pendiente . . . 22
3.4.2. Término independiente . . . 22
3.5. Apartado c) — Recta de regresión de X sobre Y . . . 23
3.5.1. Pendiente . . . 23
3.5.2. Término independiente . . . 23
3.6. Apartado d) — Nube de puntos y recta de regresión . . . 24
3.7. Apartado e) — Interpretación de la relación . . . 24
3.8. Apartado f) — Predicción: cantidad demandada para $x = 15$ € . . . 25
3.9. Apartado g) — Predicción: precio para $y = 25$ (miles) . . . 25

Resumen global de resultados 27

A. Formulario de estadística descriptiva y regresión 29

Introducción y guía de lectura

Fundamento teórico

Este documento contiene la resolución completa, rigurosa y pedagógica del examen de **Estadística de 1.º de Bachillerato** del IES Antonio Tovar (Junta de Castilla y León), correspondiente a la convocatoria del **9 de mayo de 2025**.
Las soluciones han sido redactadas al nivel de un **profesor universitario de matemáticas**, de modo que un alumno excelente pueda seguir cada paso y comprender el fundamento teórico que lo sustenta. Se han incluido:

- Definiciones formales de todos los conceptos utilizados.
- Justificación algebraica de cada transformación.
- Advertencias sobre los errores más frecuentes.
- Notas pedagógicas para consolidar la comprensión.
- Gráficos generados con `TikZ/pgfplots` integrados en el propio documento.
- Hipervínculos en el índice para navegación rápida.

Estructura del examen:

Ejercicio 1. Estadística descriptiva de una variable con datos agrupados en intervalos.

Ejercicio 2. Regresión lineal y correlación (Matemáticas vs. Química).

Ejercicio 3. Regresión lineal y correlación (Precio vs. Cantidad demandada).

Capítulo 1

Ejercicio 1 — Estadística descriptiva con datos agrupados

Enunciado

La siguiente tabla recoge las edades de los empleados que trabajan en una empresa:

Edad	$[18, 28)$	$[28, 38)$	$[38, 48)$	$[48, 58)$	$[58, 68)$
N.º de empleados	15	25	30	22	8

a) Construye la tabla de frecuencias y calcula la **moda**, la **media**, la **varianza**, la **desviación típica**, el **coeficiente de variación**, la **mediana**, los **cuartiles** Q_1 **y** Q_3 y realiza el **diagrama de caja**.

b) Dibuja un **gráfico de barras** sobre los datos obtenidos.

1.1. Fundamento teórico previo

Fundamento teórico

En estadística descriptiva con datos agrupados en intervalos (clases), cada clase $[L_i, L_{i+1})$ queda representada por su **marca de clase** (o punto medio):

$$x_i = \frac{L_i + L_{i+1}}{2}.$$

Se definen las siguientes frecuencias:

- n_i: **frecuencia absoluta** — número de datos en la clase i.
- $f_i = n_i/N$: **frecuencia relativa**, donde $N = \sum n_i$.
- $N_i = \sum_{k=1}^{i} n_k$: **frecuencia absoluta acumulada**.
- $F_i = N_i/N$: **frecuencia relativa acumulada**.

Las medidas de posición y dispersión se calculan con las marcas de clase:

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{N}, \qquad \sigma^2 = \frac{\sum n_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2, \qquad \sigma = \sqrt{\sigma^2}, \qquad CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}.$$

La **moda** es la marca de clase del intervalo modal (el de mayor n_i).
La **mediana** Me y los **cuartiles** Q_1, Q_3 se obtienen interpolando linealmente dentro del intervalo que contiene la frecuencia acumulada deseada:

$$Q_k = L_i + \frac{\frac{kN}{4} - N_{i-1}}{n_i} \cdot a, \qquad k = 1, 2, 3,$$

donde L_i es el límite inferior de la clase interpolada, N_{i-1} la frecuencia acumulada anterior, n_i la frecuencia de esa clase y a la amplitud del intervalo.

1.2. Apartado a) — Tabla de frecuencias y medidas estadísticas

1.2.1. Datos iniciales

- Número total de empleados: $N = 15 + 25 + 30 + 22 + 8 = \mathbf{100}$.
- Amplitud de cada intervalo: $a = 28 - 18 = \mathbf{10}$ años (constante en todos).

1.2.2. Marcas de clase

$$x_1 = \frac{18+28}{2} = 23, \quad x_2 = \frac{28+38}{2} = 33, \quad x_3 = \frac{38+48}{2} = 43, \quad x_4 = \frac{48+58}{2} = 53, \quad x_5 = \frac{58+68}{2} =$$

1.2.3. Tabla de frecuencias completa

Intervalo	x_i	n_i	f_i	N_i	F_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
$[18, 28)$	23	15	0,15	15	0,15	345	7 935
$[28, 38)$	33	25	0,25	40	0,40	825	27 225
$[38, 48)$	43	30	0,30	70	0,70	1 290	55 470
$[48, 58)$	53	22	0,22	92	0,92	1 166	61 798
$[58, 68)$	63	8	0,08	100	1,00	504	31 752
Total	—	**100**	**1,00**	—	—	**4 130**	**184 180**

Nota pedagógica

La columna $n_i x_i^2$ se obtiene como $n_i \cdot x_i^2$. Por ejemplo, para la primera clase: $15 \times 23^2 = 15 \times 529 = 7\,935$. Estas columnas auxiliares son imprescindibles para calcular la varianza de forma eficiente.

1.2.4. Cálculo de la Moda

Fundamento teórico

En datos agrupados, la **moda** es la marca de clase del intervalo con mayor frecuencia absoluta.

El intervalo con mayor frecuencia es $[38, 48)$ con $n_3 = 30$ empleados.

Resultado

$$\boxed{Mo = 43 \text{ años}}$$

1.2.5. Cálculo de la Media aritmética

Fundamento teórico

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} n_i x_i}{N}$$

Sustituyendo los valores de la tabla:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4x_4 + n_5x_5}{N} \\ &= \frac{15 \cdot 23 + 25 \cdot 33 + 30 \cdot 43 + 22 \cdot 53 + 8 \cdot 63}{100} \\ &= \frac{345 + 825 + 1\,290 + 1\,166 + 504}{100} \\ &= \frac{4\,130}{100}\end{aligned}$$

Resultado

$$\boxed{\bar{x} = 41{,}30 \text{ años}}$$

1.2.6. Cálculo de la Varianza

Fundamento teórico

La varianza se calcula mediante la identidad de König:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5} n_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2$$

Esta fórmula es algebraicamente equivalente a $\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$ y es computacionalmente más sencilla que la definición directa.

Calculamos primero $\overline{x^2}$:

$$\overline{x^2} = \frac{\sum n_i x_i^2}{N} = \frac{7\,935 + 27\,225 + 55\,470 + 61\,798 + 31\,752}{100} = \frac{184\,180}{100} = 1\,841{,}80$$

Ahora la varianza:

$$\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = 1\,841{,}80 - (41{,}30)^2 = 1\,841{,}80 - 1\,705{,}69$$

Resultado

$$\boxed{\sigma^2 = 136{,}11 \text{ años}^2}$$

Advertencia / Error común

Un error muy común es calcular $\bar{x}^2 = 41{,}30^2$ incorrectamente. Verifiquemos: $41{,}30^2 = 41{,}30 \times 41{,}30$.
$41 \times 41 = 1\,681$, $41 \times 0{,}30 = 12{,}30$, $0{,}30 \times 41{,}30 = 12{,}39$.
$41{,}30^2 = 1\,681 + 12{,}30 + 12{,}39 = 1\,705{,}69$. ✓

1.2.7. Desviación típica

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{136{,}11}$$

Resultado

$$\boxed{\sigma \approx 11{,}67 \text{ años}}$$

Nota pedagógica

$\sqrt{136{,}11} \approx 11{,}666\ldots \approx 11{,}67$. La desviación típica mide la dispersión de los datos alrededor de la media, *en las mismas unidades que la variable* (aquí, años). Un valor de $\sigma \approx 11{,}67$ años indica que los empleados se dispersan, en promedio, algo menos de 12 años respecto a la edad media de 41,30 años.

1.2.8. Coeficiente de variación

Fundamento teórico

El **coeficiente de variación** (CV) es una medida adimensional de dispersión relativa:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \quad (\text{o bien } CV\,\% = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100)$$

Permite comparar la variabilidad de distribuciones con distintas unidades o magnitudes. Se interpreta: si $CV < 0{,}3$ (o $< 30\,\%$), la dispersión es baja.

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{11{,}67}{41{,}30}$$

Resultado

$$\boxed{CV \approx 0{,}2825 \approx 28{,}25\,\%}$$

La variabilidad de las edades es **moderada-baja** (inferior al 30 %).

1.2.9. Mediana

Fundamento teórico

La mediana $Me = Q_2$ separa la distribución en dos mitades iguales. En datos agrupados, buscamos el intervalo cuya frecuencia acumulada supera por primera vez $N/2 = 50$. Fórmula de interpolación lineal:

$$Me = L_i + \frac{\frac{N}{2} - N_{i-1}}{n_i} \cdot a$$

donde L_i es el límite inferior del intervalo mediano, N_{i-1} la frecuencia acumulada

anterior, n_i la frecuencia del intervalo y a la amplitud.

Buscamos el intervalo mediano: $N/2 = 100/2 = 50$.

- Tras $[18, 28)$: $N_1 = 15 < 50$.
- Tras $[28, 38)$: $N_2 = 40 < 50$.
- Tras $[38, 48)$: $N_3 = 70 \geq 50$. $\Rightarrow$ **Intervalo mediano:** $[38, 48)$.

Datos del intervalo mediano ($i = 3$): $L_3 = 38$, $n_3 = 30$, $N_2 = 40$, $a = 10$.

$$Me = 38 + \frac{50 - 40}{30} \cdot 10 = 38 + \frac{10}{30} \cdot 10 = 38 + \frac{100}{30} = 38 + 3{,}\overline{3}$$

Resultado

$$\boxed{Me \approx 41{,}33 \text{ años}}$$

1.2.10. Cuartil 1 (Q_1)

El primer cuartil separa el 25 % inferior. Buscamos $N/4 = 25$.

- Tras $[18, 28)$: $N_1 = 15 < 25$.
- Tras $[28, 38)$: $N_2 = 40 \geq 25$. $\Rightarrow$ **Intervalo de Q_1:** $[28, 38)$.

Datos ($i = 2$): $L_2 = 28$, $n_2 = 25$, $N_1 = 15$, $a = 10$.

$$Q_1 = 28 + \frac{25 - 15}{25} \cdot 10 = 28 + \frac{10}{25} \cdot 10 = 28 + 4 = 32$$

Resultado

$$\boxed{Q_1 = 32 \text{ años}}$$

1.2.11. Cuartil 3 (Q_3)

El tercer cuartil separa el 75 % inferior. Buscamos $3N/4 = 75$.

- Tras $[38, 48)$: $N_3 = 70 < 75$.
- Tras $[48, 58)$: $N_4 = 92 \geq 75$. $\Rightarrow$ **Intervalo de Q_3:** $[48, 58)$.

Datos ($i = 4$): $L_4 = 48$, $n_4 = 22$, $N_3 = 70$, $a = 10$.

$$Q_3 = 48 + \frac{75 - 70}{22} \cdot 10 = 48 + \frac{5}{22} \cdot 10 = 48 + \frac{50}{22} = 48 + 2{,}2\overline{72}$$

Resultado

$$\boxed{Q_3 \approx 50{,}27 \text{ años}}$$

Nota pedagógica

Rango intercuartílico (IQR):

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 50{,}27 - 32 = 18{,}27 \text{ años.}$$

El 50 % central de los empleados tiene edades comprendidas entre los 32 y los 50,27 años.

1.2.12. Resumen de resultados del apartado a)

Medida	Valor
Moda (Mo)	43 años
Media ($\bar{x}$)	41,30 años
Varianza (σ^2)	136,11 años^2
Desv. típica (σ)	11,67 años
Coef. variación (CV)	28,25 %
Mediana (Me)	41,33 años
Cuartil 1 (Q_1)	32,00 años
Cuartil 3 (Q_3)	50,27 años

1.2.13. Diagrama de caja (Box-plot)

Nota pedagógica

El **diagrama de caja** (o box-plot) muestra visualmente la distribución de los datos a través de los cinco números resumen: mínimo, Q_1, mediana, Q_3 y máximo. La caja abarca el rango intercuartílico (IQR) y la línea interior es la mediana. Los bigotes se extienden hasta los extremos (o hasta $1{,}5 \cdot IQR$ en caso de datos atípicos).

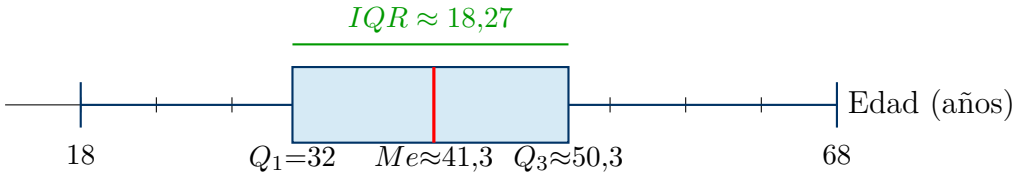


Figura 1.1: Diagrama de caja de las edades de los empleados

Nota pedagógica

Interpretación del diagrama de caja:

- La mediana ($\approx 41{,}3$ años) y la media (41,3 años) coinciden casi perfectamente, lo que indica una distribución aproximadamente simétrica.
- La caja (del $Q_1 = 32$ al $Q_3 \approx 50{,}3$) contiene el 50 % central de los empleados.
- El bigote izquierdo (18 a 32 = 14 años) es más corto que el derecho (50,3 a 68 $\approx$ 17,7 años), indicando una ligera asimetría hacia los valores altos.
- No hay valores atípicos (todos los datos están dentro de los bigotes).

1.3. Apartado b) — Gráfico de barras (Histograma)

Nota pedagógica

Dado que los datos están agrupados en intervalos, el gráfico apropiado es un **histograma** (barras adyacentes cuyas áreas representan frecuencias). Sin embargo, si la amplitud de todas las clases es igual (como en este caso, $a = 10$), la altura de cada barra es proporcional a la frecuencia, por lo que el histograma y el gráfico de barras coinciden visualmente.

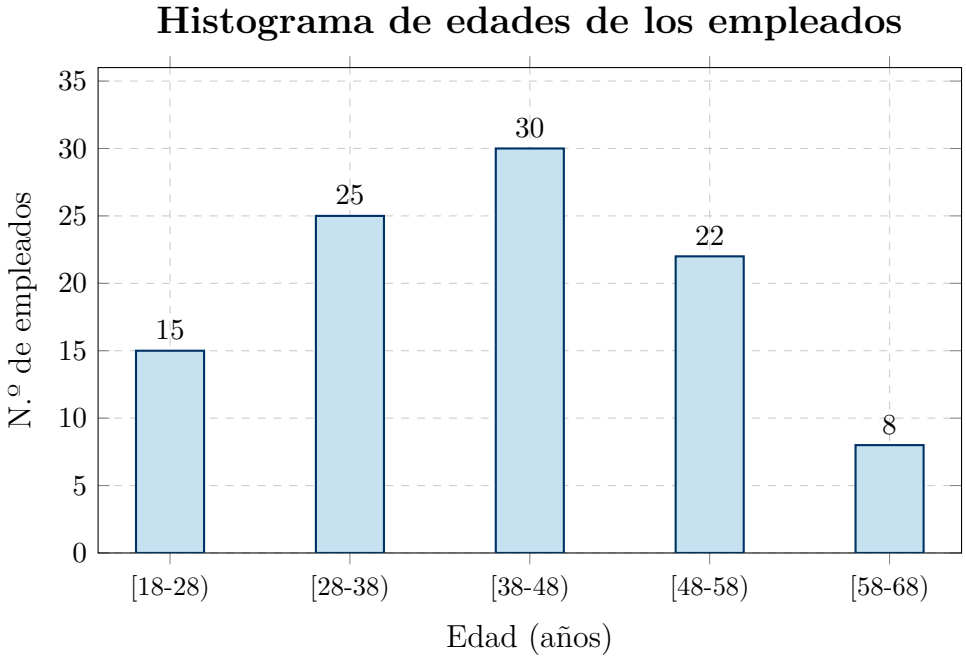


Figura 1.2: Histograma de la distribución de edades de los empleados

Resultado

Interpretación del histograma:

- La clase modal es $[38, 48)$ con 30 empleados (la barra más alta).
- La distribución tiene forma aproximadamente acampanada (bell-shaped), con mayor concentración en las edades medias (38–48 años).
- Hay una ligera asimetría negativa (cola hacia la derecha, hacia edades mayores), aunque es muy suave dada la proximidad de media y mediana.

Capítulo 2

Ejercicio 2 — Regresión lineal: Matemáticas y Química

Enunciado

Las notas de 10 alumnos en Matemáticas (X) y en Química (Y) han sido:

X (Matemáticas)	5	7	8	8	9	10	4	5	5	4
Y (Química)	6	6	7	8	10	10	3	3	5	4

a) Las medias y desviaciones típicas de ambas variables.

b) La covarianza y el coeficiente de correlación.

c) Halla la recta de regresión de Y sobre X. ¿Cuál es el centro de gravedad?

d) Representa la nube de puntos y la recta de regresión.

e) ¿Cómo es la relación entre las dos variables?

f) Si un alumno saca un 6 en matemáticas, ¿qué nota se espera que saque en química?

2.1. Fundamento teórico previo

Fundamento teórico

Dado un conjunto de n pares (x_i, y_i), se definen:

Medias:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}, \qquad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}.$$

Varianzas y desviaciones típicas:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2, \quad \sigma_y^2 = \frac{\sum y_i^2}{n} - \bar{y}^2, \quad \sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}, \quad \sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2}.$$

Covarianza:

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum x_i y_i}{n} - \bar{x}\,\bar{y}.$$

Coeficiente de correlación de Pearson:

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}, \qquad r \in [-1, 1].$$

Si $r > 0$: correlación positiva. Si $r < 0$: negativa. $|r|$ cercano a 1: correlación fuerte.
Recta de regresión de Y sobre X: (predice Y a partir de X)

$$y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \bar{x}).$$

En forma explícita: $y = a + bx$, con $b = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$ y $a = \bar{y} - b\bar{x}$.

2.2. Tabla de cálculo auxiliar

Alumno	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	5	6	25	36	30
2	7	6	49	36	42
3	8	7	64	49	56
4	8	8	64	64	64
5	9	10	81	100	90
6	10	10	100	100	100
7	4	3	16	9	12
8	5	3	25	9	15
9	5	5	25	25	25
10	4	4	16	16	16
Σ	**65**	**62**	**465**	**444**	**450**

Verificación de sumas:

$$\sum x_i = 5{+}7{+}8{+}8{+}9{+}10{+}4{+}5{+}5{+}4 = 65, \quad \sum y_i = 6{+}6{+}7{+}8{+}10{+}10{+}3{+}3{+}5{+}4 = 62.$$

$$\sum x_i^2 = 25 + 49 + 64 + 64 + 81 + 100 + 16 + 25 + 25 + 16 = 465.$$

$$\sum y_i^2 = 36 + 36 + 49 + 64 + 100 + 100 + 9 + 9 + 25 + 16 = 444.$$

$$\sum x_i y_i = 30 + 42 + 56 + 64 + 90 + 100 + 12 + 15 + 25 + 16 = 450.$$

2.3. Apartado a) — Medias y desviaciones típicas

2.3.1. Medias

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{65}{10} = 6{,}5$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{62}{10} = 6{,}2$$

2.3.2. Varianzas

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{465}{10} - (6{,}5)^2 = 46{,}5 - 42{,}25 = 4{,}25$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum y_i^2}{n} - \bar{y}^2 = \frac{444}{10} - (6{,}2)^2 = 44{,}4 - 38{,}44 = 5{,}96$$

2.3.3. Desviaciones típicas

$$\sigma_x = \sqrt{4{,}25} \approx 2{,}0616$$

$$\sigma_y = \sqrt{5{,}96} \approx 2{,}4413$$

Resultado

$$\bar{x} = 6{,}5, \quad \bar{y} = 6{,}2, \quad \sigma_x \approx 2{,}06, \quad \sigma_y \approx 2{,}44.$$

2.4. Apartado b) — Covarianza y coeficiente de correlación

2.4.1. Covarianza

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum x_i y_i}{n} - \bar{x}\,\bar{y} = \frac{450}{10} - 6{,}5 \times 6{,}2 = 45 - 40{,}3 = 4{,}7$$

Nota pedagógica

La covarianza positiva ($\sigma_{xy} = 4{,}7 > 0$) indica que cuando un alumno tiene una nota alta en Matemáticas, tiende a tener también una nota alta en Química. Ya anticipamos correlación positiva antes de calcular r.

2.4.2. Coeficiente de correlación de Pearson

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{4{,}7}{\sqrt{4{,}25} \cdot \sqrt{5{,}96}} = \frac{4{,}7}{\sqrt{4{,}25 \times 5{,}96}} = \frac{4{,}7}{\sqrt{25{,}33}} = \frac{4{,}7}{5{,}033}$$

Resultado

$$\boxed{r \approx 0{,}934}$$

Nota pedagógica

Alternativamente, con más decimales: $\sigma_x = \sqrt{4{,}25} = \sqrt{17/4} = \sqrt{17}/2 \approx 2{,}06155$, $\sigma_y = \sqrt{5{,}96} \approx 2{,}44131$. $\sigma_x \cdot \sigma_y \approx 2{,}06155 \times 2{,}44131 \approx 5{,}0326$. $r \approx 4{,}7/5{,}0326 \approx 0{,}9339$.

2.5. Apartado c) — Recta de regresión de Y sobre X

Fundamento teórico

La recta de regresión de Y sobre X minimiza la suma de cuadrados de los residuos verticales (diferencias entre y_i observada y la predicción de la recta). Sus coeficientes son:

$$b = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{4{,}7}{4{,}25}, \qquad a = \bar{y} - b\bar{x}.$$

2.5.1. Cálculo de la pendiente b

$$b = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{4{,}7}{4{,}25} = \frac{470}{425} = \frac{94}{85} \approx 1{,}1059$$

2.5.2. Cálculo del término independiente a

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 6{,}2 - 1{,}1059 \times 6{,}5 = 6{,}2 - 7{,}1882 = -0{,}9882$$

Resultado

$$\boxed{y = -0{,}99 + 1{,}106\,x}$$

(redondeando a tres cifras significativas)

2.5.3. Centro de gravedad

Fundamento teórico

La recta de regresión **siempre pasa por el punto** $(\bar{x}, \bar{y})$, llamado **centro de gravedad** o centroide de la nube de puntos. Es el "punto de equilibrio" de la distribución bidimensional.

Resultado

$$\boxed{G = (\bar{x},\ \bar{y}) = (6{,}5;\ 6{,}2)}$$

Verificación: $y(6{,}5) = -0{,}9882 + 1{,}1059 \times 6{,}5 = -0{,}9882 + 7{,}1882 = 6{,}200$. ✓

2.6. Apartado d) — Nube de puntos y recta de regresión

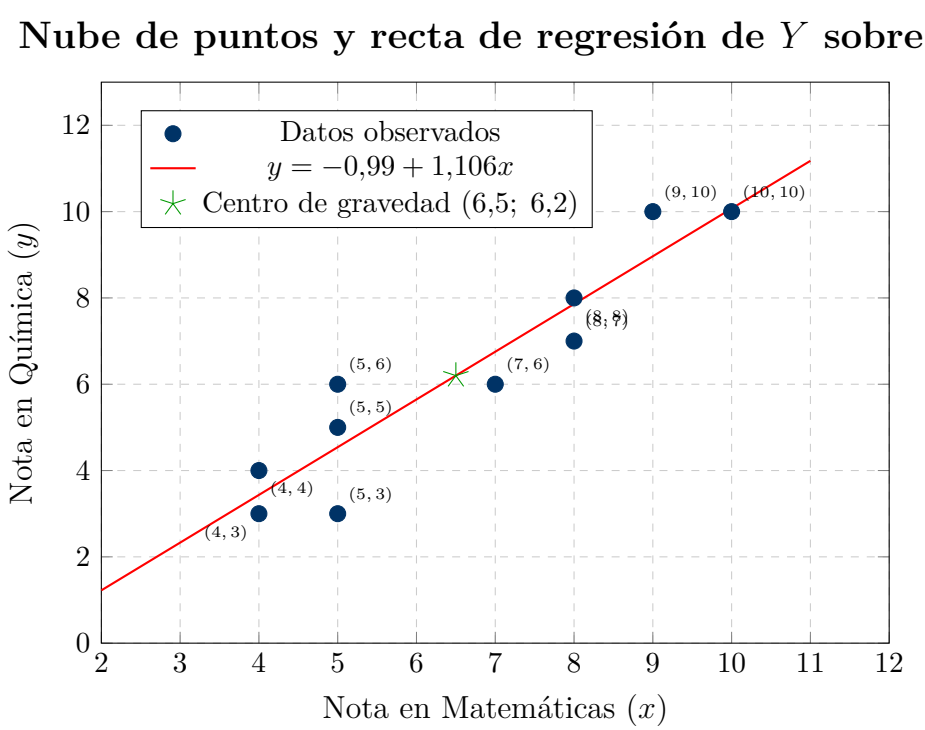


Figura 2.1: Diagrama de dispersión (nube de puntos) y recta de regresión de Química sobre Matemáticas

2.7. Apartado e) — Interpretación de la relación

Resultado

Con $r \approx 0{,}934$, la relación entre la nota en Matemáticas y la nota en Química es:

- **Positiva**: a mayor nota en Matemáticas, mayor nota en Química.
- **Muy fuerte** (o casi perfecta): $|r| = 0{,}934 > 0{,}9$, muy próximo a 1.
- **Lineal**: el modelo lineal ajusta muy bien los datos.

Conclusión: existe una correlación lineal positiva muy fuerte entre ambas asignaturas. Un alumno que destaca en Matemáticas tiene una alta probabilidad de destacar también en Química.

Nota pedagógica

El coeficiente de determinación $R^2 = r^2 \approx 0{,}934^2 \approx 0{,}872$, lo que significa que el modelo lineal explica aproximadamente el **87,2 %** de la variabilidad de las notas de Química a partir de las notas de Matemáticas.

2.8. Apartado f) — Predicción para $x = 6$

Un alumno saca un 6 en Matemáticas. Utilizamos la recta de regresión de Y sobre X:

$$y = -0{,}9882 + 1{,}1059 \times 6 = -0{,}9882 + 6{,}6353 = 5{,}6471$$

Resultado

$$\boxed{y(6) \approx 5{,}65 \text{ puntos en Química}}$$

Si un alumno saca un 6 en Matemáticas, se espera que saque aproximadamente un **5,65** en Química.

Advertencia / Error común

Esta predicción es fiable porque $x = 6$ está **dentro del rango** de los datos observados ($x \in [4, 10]$). Hacer predicciones fuera de este rango (extrapolación) sería poco fiable. Además, recuerda que la recta de regresión de Y sobre X solo debe usarse para predecir Y, **nunca** para predecir X a partir de Y (para eso existe la recta de regresión de X sobre Y).

Capítulo 3

Ejercicio 3 — Regresión lineal: Precio y Cantidad demandada

Enunciado

Una empresa analiza la cantidad demandada (en miles de unidades) de su producto ante cambios en el precio (en euros):

X — Precio (€)	10	12	14	16	18	20
Y — Cantidad demandada (miles)	50	40	30	20	10	0

a) El coeficiente de correlación.

b) Halla la recta de regresión de Y sobre X.

c) Halla la recta de regresión de X sobre Y.

d) Representa la nube de puntos y la recta de regresión de Y sobre X.

e) ¿Cómo es la relación entre las dos variables?

f) ¿Cuál sería la cantidad demandada si el precio se fija en 15 €?

g) ¿Cuál sería el precio si la cantidad demandada son 25.000 unidades?

3.1. Tabla de cálculo auxiliar

$n = 6$ pares de datos.

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	10	50	100	2 500	500
2	12	40	144	1 600	480
3	14	30	196	900	420
4	16	20	256	400	320
5	18	10	324	100	180
6	20	0	400	0	0
Σ	**90**	**150**	**1 420**	**5 500**	**1 900**

Verificación de sumas:

$$\sum x_i = 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 = 90.$$
$$\sum y_i = 50 + 40 + 30 + 20 + 10 + 0 = 150.$$
$$\sum x_i^2 = 100 + 144 + 196 + 256 + 324 + 400 = 1\,420.$$
$$\sum y_i^2 = 2\,500 + 1\,600 + 900 + 400 + 100 + 0 = 5\,500.$$
$$\sum x_i y_i = 500 + 480 + 420 + 320 + 180 + 0 = 1\,900.$$

3.2. Cálculo de medias, varianzas y covarianza

3.2.1. Medias

$$\bar{x} = \frac{90}{6} = 15 \text{ €}, \qquad \bar{y} = \frac{150}{6} = 25 \text{ (miles de unidades)}.$$

3.2.2. Varianzas

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{1\,420}{6} - 15^2 = 236{,}\overline{6} - 225 = 11{,}\overline{6} = \frac{35}{3}$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum y_i^2}{n} - \bar{y}^2 = \frac{5\,500}{6} - 25^2 = 916{,}\overline{6} - 625 = 291{,}\overline{6} = \frac{875}{3}$$

3.2.3. Covarianza

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum x_i y_i}{n} - \bar{x}\,\bar{y} = \frac{1\,900}{6} - 15 \times 25 = 316{,}\overline{6} - 375 = -58{,}\overline{3} = -\frac{175}{3}$$

Nota pedagógica

La covarianza negativa ($\sigma_{xy} < 0$) confirma la **ley de la demanda**: al subir el precio, la cantidad demandada disminuye. Esto es económicamente coherente.

3.3. Apartado a) — Coeficiente de correlación

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{-\dfrac{175}{3}}{\sqrt{\dfrac{35}{3}} \cdot \sqrt{\dfrac{875}{3}}} = \frac{-\dfrac{175}{3}}{\sqrt{\dfrac{35 \times 875}{9}}} = \frac{-\dfrac{175}{3}}{\dfrac{\sqrt{30\,625}}{3}} = \frac{-175}{\sqrt{30\,625}}$$

Calculamos $\sqrt{30\,625}$:

$$175^2 = 30\,625 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{30\,625} = 175.$$

$$r = \frac{-175}{175} = -1$$

Resultado

$$\boxed{r = -1}$$

El coeficiente de correlación es **exactamente** -1.

Nota pedagógica

$r = -1$ significa **correlación lineal negativa perfecta**: los seis puntos de la tabla se encuentran *exactamente* sobre una recta de pendiente negativa. No hay ninguna dispersión; el modelo lineal explica el 100 % de la variabilidad ($R^2 = 1$).
Esto se produce porque los datos son exactamente lineales: cada aumento de 2 € en el precio corresponde a una disminución de exactamente 10 000 unidades.

3.4. Apartado b) — Recta de regresión de Y sobre X

3.4.1. Pendiente

$$b_{yx} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{-175/3}{35/3} = \frac{-175}{35} = -5$$

3.4.2. Término independiente

$$a_{yx} = \bar{y} - b_{yx}\,\bar{x} = 25 - (-5) \times 15 = 25 + 75 = 100$$

Resultado

$$\boxed{y = 100 - 5x}$$

(Cantidad demandada en miles de unidades, precio x en euros.)

Nota pedagógica

Verificamos con uno de los puntos: para $x = 10$: $y = 100 - 5 \times 10 = 50$. ✓
La pendiente $b = -5$ significa que por cada euro que sube el precio, la cantidad demandada **disminuye en 5.000 unidades** (5 miles). Es la interpretación económica directa.

3.5. Apartado c) — Recta de regresión de X sobre Y

Fundamento teórico

La recta de regresión de X sobre Y minimiza los residuos horizontales (predice X a partir de Y). Sus coeficientes son:

$$b_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}, \qquad a_{xy} = \bar{x} - b_{xy}\,\bar{y}.$$

3.5.1. Pendiente

$$b_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} = \frac{-175/3}{875/3} = \frac{-175}{875} = -\frac{1}{5} = -0{,}2$$

3.5.2. Término independiente

$$a_{xy} = \bar{x} - b_{xy}\,\bar{y} = 15 - (-0{,}2) \times 25 = 15 + 5 = 20$$

Resultado

$$\boxed{x = 20 - 0{,}2\,y}$$

(Precio x en euros, cantidad demandada y en miles de unidades.)

Nota pedagógica

Dado que $r = -1$ (correlación perfecta), ambas rectas de regresión son la **misma recta**. En efecto, despejando y de $x = 20 - 0{,}2y$:

$$x = 20 - 0{,}2y \;\Rightarrow\; 0{,}2y = 20 - x \;\Rightarrow\; y = 100 - 5x.$$

Esto solo ocurre cuando $|r| = 1$. En general, con $|r| < 1$, las dos rectas de regresión son distintas.

3.6. Apartado d) — Nube de puntos y recta de regresión

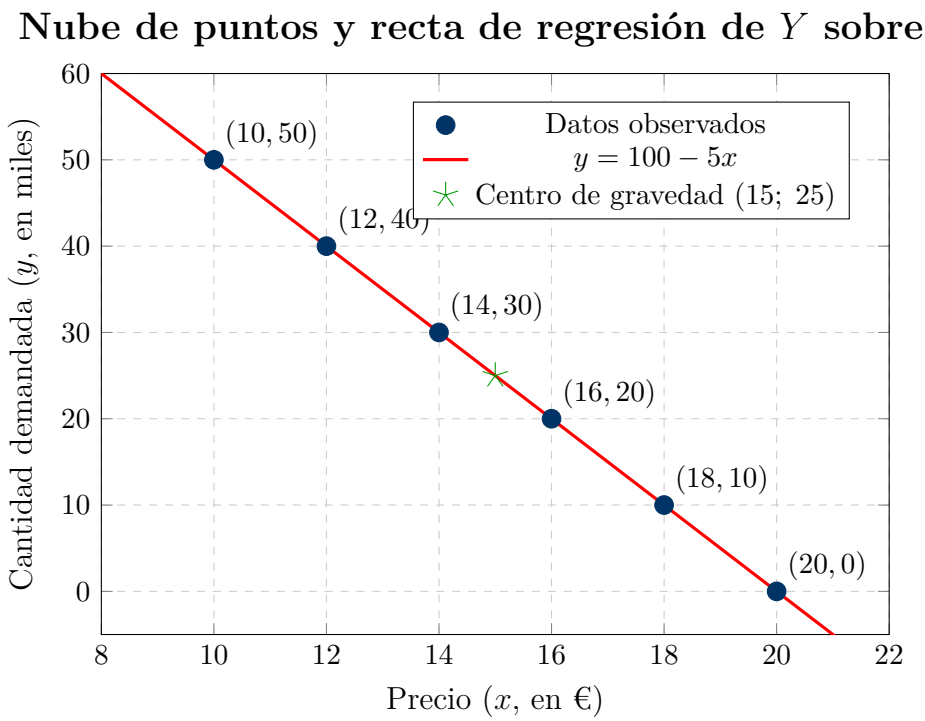


Figura 3.1: Diagrama de dispersión y recta de regresión de la cantidad demandada sobre el precio

Nota pedagógica

Observa en el gráfico que **todos los puntos se encuentran exactamente sobre la recta**. Esto es la evidencia visual de que $r = -1$: correlación lineal negativa perfecta. En problemas reales (con datos empíricos), esto raramente ocurre; aquí los datos han sido construidos para ilustrar el caso ideal.

3.7. Apartado e) — Interpretación de la relación

Resultado

La relación entre el precio y la cantidad demandada es:

- **Negativa**: al aumentar el precio, disminuye la cantidad demandada (ley de la demanda).
- **Perfecta** ($r = -1$): no hay dispersión alguna; todos los datos se ajustan exactamente a la recta.
- **Lineal**: la relación funcional es exactamente $y = 100 - 5x$.

- **Muy intensa**: el precio explica el 100 % de las variaciones en la cantidad demandada ($R^2 = r^2 = 1$).

3.8. Apartado f) — Predicción: cantidad demandada para $x = 15$ €

Utilizamos la recta de regresión de Y sobre X:

$$y = 100 - 5x = 100 - 5 \times 15 = 100 - 75 = 25$$

Resultado

$$\boxed{y(15) = 25 \text{ miles de unidades} = 25\,000 \text{ unidades}}$$

Si el precio se fija en 15 €, la cantidad demandada será de **25.000 unidades**.

Nota pedagógica

$x = 15$ £ está dentro del rango de datos $[10, 20]$, por lo que es interpolación y la predicción es completamente fiable (especialmente siendo $r = -1$).

3.9. Apartado g) — Predicción: precio para $y = 25$ (miles)

Fundamento teórico

Para predecir el precio X a partir de la cantidad demandada Y, debemos usar la **recta de regresión de X sobre Y**: $x = 20 - 0{,}2y$.
No se debe despejar x de la recta $y = 100 - 5x$, porque esa recta minimiza errores en Y, no en X. Sin embargo, en este caso particular ($r = -1$), ambos procedimientos dan el mismo resultado.

La cantidad demandada es 25.000 unidades = 25 miles de unidades, luego $y = 25$.
Usando la recta de regresión de X sobre Y:

$$x = 20 - 0{,}2 \times 25 = 20 - 5 = 15$$

Verificación usando la inversa de $y = 100 - 5x$ (válida porque $r = -1$):

$$25 = 100 - 5x \;\Rightarrow\; 5x = 75 \;\Rightarrow\; x = 15 \text{ €}.$$

Resultado

$$\boxed{x = 15 \text{ €}}$$

Si la cantidad demandada es 25.000 unidades, el precio correspondiente es **15 €**.

Nota pedagógica

Los apartados f) y g) son recíprocos, como era de esperar: la predicción $y = 25$ para $x = 15$ implica simétricamente que $x = 15$ para $y = 25$. Esto solo ocurre porque $r = -1$ (correlación perfecta). Con $|r| < 1$, las dos predicciones no serían simétricas.

Resumen global de resultados

Ejercicio / Apartado	**Resultado**
EJERCICIO 1 — Estadística descriptiva	
Total empleados	$N = 100$
Moda	$Mo = 43$ años
Media	$\bar{x} = 41{,}30$ años
Varianza	$\sigma^2 = 136{,}11$ años^2
Desviación típica	$\sigma \approx 11{,}67$ años
Coef. de variación	$CV \approx 28{,}25\,\%$ (variabilidad moderada-baja)
Mediana	$Me \approx 41{,}33$ años
Cuartil 1	$Q_1 = 32$ años
Cuartil 3	$Q_3 \approx 50{,}27$ años
Rango intercuartílico	$IQR \approx 18{,}27$ años
EJERCICIO 2 — Matemáticas vs. Química	
Media Matemáticas	$\bar{x} = 6{,}5$ puntos
Media Química	$\bar{y} = 6{,}2$ puntos
Desv. típica Matemáticas	$\sigma_x \approx 2{,}06$
Desv. típica Química	$\sigma_y \approx 2{,}44$
Covarianza	$\sigma_{xy} = 4{,}7$
Coef. de correlación	$r \approx 0{,}934$ (correlación positiva muy fuerte)
Recta Y sobre X	$y \approx -0{,}99 + 1{,}106\,x$

Continúa en la página siguiente...

Ejercicio / Apartado	**Resultado**
Centro de gravedad	$G = (6{,}5;\ 6{,}2)$
Predicción $x = 6$	$y \approx 5{,}65$ puntos en Química
EJERCICIO 3 — Precio vs. Cantidad demandada	
Media precio	$\bar{x} = 15$ €
Media cantidad	$\bar{y} = 25$ miles
Varianza precio	$\sigma_x^2 = 35/3 \approx 11{,}67$
Varianza cantidad	$\sigma_y^2 = 875/3 \approx 291{,}67$
Covarianza	$\sigma_{xy} = -175/3 \approx -58{,}33$
Coef. de correlación	$r = -1$ (correlación negativa perfecta)
Recta Y sobre X	$y = 100 - 5x$
Recta X sobre Y	$x = 20 - 0{,}2\,y$
Predicción $x = 15$ €	$y = 25$ miles $= 25\,000$ unidades
Predicción $y = 25$	$x = 15$ €

Apéndice A

Formulario de estadística descriptiva y regresión

A.1 Estadística univariante (datos agrupados)

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{N}, \qquad \sigma^2 = \frac{\sum n_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2, \qquad \sigma = \sqrt{\sigma^2}, \qquad CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}.$$

$$Q_k = L_i + \frac{\frac{kN}{4} - N_{i-1}}{n_i} \cdot a, \quad k = 1, 2, 3.$$

A.2 Estadística bivariante

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}, \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}, \quad \sigma_x^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2, \quad \sigma_y^2 = \frac{\sum y_i^2}{n} - \bar{y}^2.$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum x_i y_i}{n} - \bar{x}\,\bar{y}, \qquad r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}.$$

Rectas de regresión:

$$y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \bar{x}) \quad (\text{de } Y \text{ sobre } X).$$

$$x - \bar{x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y - \bar{y}) \quad (\text{de } X \text{ sobre } Y).$$

Relación entre coeficientes de regresión y correlación:

$$r^2 = b_{yx} \cdot b_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \cdot \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2}.$$

A.3 Interpretación de r

Valor de $\lvert r\rvert$	**Interpretación**
$\lvert r\rvert = 1$	Correlación lineal perfecta
$0{,}9 \leq \lvert r\rvert < 1$	Correlación muy fuerte
$0{,}7 \leq \lvert r\rvert < 0{,}9$	Correlación fuerte
$0{,}5 \leq \lvert r\rvert < 0{,}7$	Correlación moderada
$0{,}3 \leq \lvert r\rvert < 0{,}5$	Correlación débil
$\lvert r\rvert < 0{,}3$	Correlación muy débil o nula

Junta de Castilla y León
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA

EXAMEN DE MATEMÁTICAS.
PROBABILIDAD
1º BACHILLERATO
30/05/2025

ies Tovar Antonio Centro bilingüe

Nº1.- Se consideran los sucesos A y B tales que p(A) = 0,84, p(B) = 0,5 y $p(A \cap B)$ = 0,40. Calcúlese:
a) p(A∪B)
b) ¿Son independientes los sucesos A y B?
c) Calcula la probabilidad de que ocurran A y no B.
d) Calcula la probabilidad de que no ocurra ni A ni B

Nº2.- En una frutería el 60 % de los clientes compran naranjas, el 40 % compran manzanas y el 30 % no compran ni naranjas ni manzanas. Calcula el porcentaje de clientes que compran:

a) Naranjas o manzanas o ambas.
b) Manzanas y naranjas.
c) Naranjas, pero no manzanas.

Nº3.- De los trabajadores que se jubilaron en el último año, 40% pertenecían al sector de educación, 40% al de sanidad y el resto al sector de justicia. Al 80% de los trabajadores en educación que se jubilan, sus compañeros les hacen una fiesta de despedida, también al 60% de los trabajadores de justicia y al 30% de los de sanidad.
a) Calcula la probabilidad de que, a un trabajador de estos sectores, que se jubile, le hicieran una fiesta.
b) Sabemos que a un trabajador jubilado elegido al azar de entre estos sectores, no le hicieron fiesta. Calcúlese la probabilidad de que fuera de sanidad

Nº4.- En un examen de oposición a la Junta de Castilla y León se sabe que los puntos obtenidos se distribuyen según una normal de media 100 puntos y desviación típica de 10 puntos. Calcúlese la probabilidad de que:
a) Un opositor obtenga más de 90 puntos.
b) Si para aprobar es necesario tener más de 120 puntos ¿qué porcentaje de opositores aprueban?

Nº5.- La temperatura media en una ciudad en el mes de marzo, en grados centígrados, sigue una distribución normal de media 15º y desviación típica 2º. Si marzo tiene 31 días, cuántos días se esperan una temperatura superior a 12 grados y menor que 14 grados centígrados

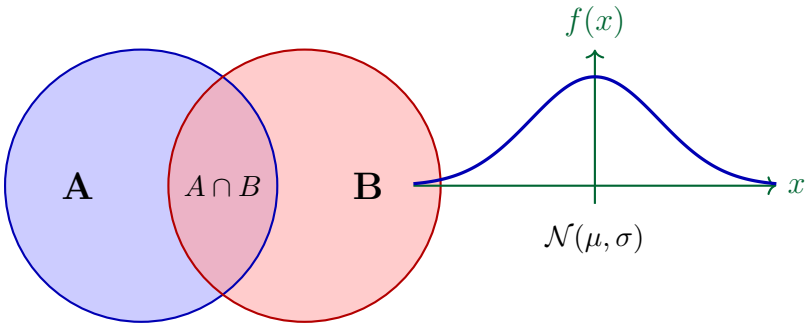
SUERTE JÓVENES

SOLUCIONES COMPLETAS

Examen de Matemáticas

PROBABILIDAD

1º Bachillerato



Centro:	IES Antonio Tovar (Centro Bilingüe)
Institución:	Junta de Castilla y León
Consejería:	Educación y Cultura
Fecha del examen:	30 de mayo de 2025
Nivel:	1º Bachillerato
Materia:	Matemáticas I — Unidad: Probabilidad
Documento elaborado por:	SuperAgent (CREAO)
Rigor:	Universitario / Pedagógico exhaustivo

"La probabilidad es el lenguaje matemático de la incertidumbre. Dominarla es aprender a razonar con precisión en un mundo imperfecto."

Índice general

1. Fundamentos Teóricos de Probabilidad **2**
- 1.1. Espacio muestral y sucesos . . . 2
- 1.2. Operaciones con sucesos y sus probabilidades . . . 2
- 1.3. Independencia de sucesos . . . 3
- 1.4. Probabilidad condicionada . . . 3
- 1.5. Probabilidad total y Teorema de Bayes . . . 3
- 1.6. Distribución Normal . . . 4

2. Ejercicio 1: Operaciones con probabilidades de sucesos **5**
- 2.1. Apartado a): Probabilidad de $A \cup B$ . . . 6
- 2.2. Apartado b): ¿Son independientes A y B? . . . 7
- 2.3. Apartado c): $P(A \cap \overline{B})$ . . . 7
- 2.4. Apartado d): $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ . . . 8

3. Ejercicio 2: Frutería — Probabilidades con conjuntos **10**
- 3.1. Planteamiento y definición de sucesos . . . 10
- 3.2. Apartado a): Porcentaje que compra naranjas o manzanas (o ambas) . . . 11
- 3.3. Apartado b): Porcentaje que compra manzanas *y* naranjas . . . 11
- 3.4. Apartado c): Porcentaje que compra naranjas pero *no* manzanas . . . 12

4. Ejercicio 3: Probabilidad Total y Teorema de Bayes **14**
- 4.1. Definición de sucesos y datos . . . 14
- 4.2. Apartado a): Probabilidad de recibir fiesta — Probabilidad Total . . . 15
- 4.3. Apartado b): Probabilidad de ser de Sanidad dado que no hubo fiesta — Bayes . . . 16

5. Ejercicio 4: Distribución Normal — Oposiciones **18**
- 5.1. Fundamento: tipificación de la normal . . . 18
- 5.2. Apartado a): $P(X > 90)$ . . . 19
- 5.3. Apartado b): $P(X > 120)$ . . . 20

6. Ejercicio 5: Distribución Normal — Temperatura en marzo **22**
- 6.1. Planteamiento . . . 22
- 6.2. Cálculo de $P(12 < X < 14)$ . . . 23
- 6.3. Número esperado de días . . . 24

7. Resumen de Resultados **26**

Capítulo 1

Fundamentos Teóricos de Probabilidad

Este capítulo recoge de forma compacta pero rigurosa todos los conceptos y resultados necesarios para resolver los ejercicios del examen. Se recomienda leerlo antes de abordar las soluciones.

1.1 Espacio muestral y sucesos

Definición: Espacio muestral

El **espacio muestral** Ω es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Cualquier subconjunto $A \subseteq \Omega$ se denomina **suceso**.

Definición: Probabilidad (Axiomas de Kolmogórov)

Una función $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ es una **medida de probabilidad** si verifica:

A1. $P(A) \geq 0$ para todo suceso A.

A2. $P(\Omega) = 1$.

A3. Si A y B son sucesos mutuamente excluyentes ($A \cap B = \emptyset$), entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

1.2 Operaciones con sucesos y sus probabilidades

Teorema de la suma (regla de adición)

Para cualesquiera dos sucesos A y B:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Justificación: Al sumar $P(A) + P(B)$ contamos dos veces la región $A \cap B$, por lo que debemos restarla una vez.

Complementario

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Diferencia de sucesos

$$P(A \setminus B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

1.3 Independencia de sucesos

Definición: Sucesos independientes

Dos sucesos A y B son **estadísticamente independientes** si y solo si:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

Intuitivamente: la ocurrencia de uno no afecta a la probabilidad del otro.

1.4 Probabilidad condicionada

Definición: Probabilidad condicionada

La probabilidad de A dado que B ha ocurrido (con $P(B) > 0$):

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

1.5 Probabilidad total y Teorema de Bayes

Teorema de la Probabilidad Total

Sea $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ una partición del espacio muestral Ω (los H_i son mutuamente excluyentes y exhaustivos). Para cualquier suceso A:

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid H_i) \cdot P(H_i)}$$

Teorema de Bayes

Bajo las mismas condiciones anteriores:

$$P(H_j \mid A) = \frac{P(A \mid H_j) \cdot P(H_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid H_i) \cdot P(H_i)}$$

Este teorema permite *actualizar* probabilidades a la luz de nueva evidencia.

1.6 Distribución Normal

Definición: Distribución Normal

Una variable aleatoria X sigue una distribución **normal** o gaussiana de parámetros μ (media) y σ (desviación típica), y se escribe $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, si su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Tipificación (Estandarización)

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, la variable tipificada es:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

La distribución $\mathcal{N}(0, 1)$ se denomina **normal estándar** y su función de distribución acumulada se denota $\Phi(z)$.

Propiedades de la normal estándar

$$P(Z < -z) = 1 - P(Z < z) = P(Z > z)$$
$$P(Z > z) = 1 - \Phi(z)$$
$$P(a < Z < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Por simetría de la curva respecto de $z = 0$:

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

Capítulo 2

Ejercicio 1: Operaciones con probabilidades de sucesos

Enunciado del Ejercicio 1

Se consideran los sucesos A y B tales que:

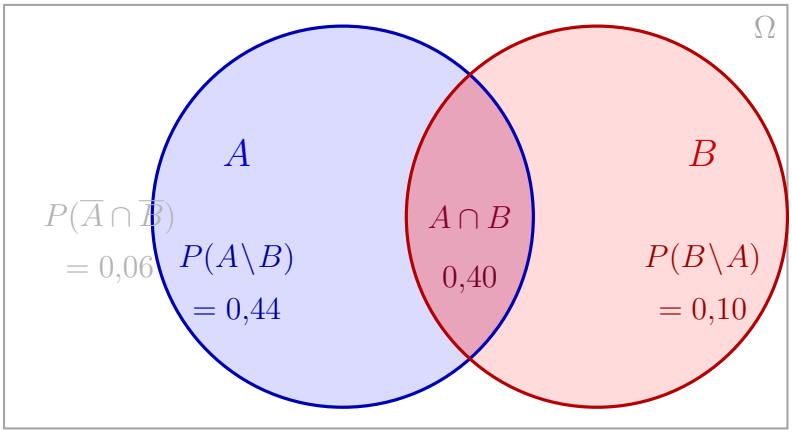
$$P(A) = 0{,}84, \qquad P(B) = 0{,}5, \qquad P(A \cap B) = 0{,}40$$

Calcúlese:

a) $P(A \cup B)$
b) ¿Son independientes los sucesos A y B?
c) La probabilidad de que ocurran A y **no** B.
d) La probabilidad de que no ocurra ni A ni B.

Representación gráfica: Diagrama de Venn

Diagrama de Venn — Ejercicio 1



Lectura del diagrama: El rectángulo representa el espacio muestral Ω con $P(\Omega) = 1$. Los círculos representan los sucesos A y B. La zona morada central es $A \cap B$. Las zonas exclusivas son $A \setminus B$ y $B \setminus A$. Calcularemos cada valor a continuación.

2.1 Apartado a): Probabilidad de $A \cup B$

Teorema utilizado: Regla de la adición

Para cualesquiera dos sucesos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Esta fórmula se deduce de que, al contar los elementos de A y los de B por separado, los elementos de $A \cap B$ quedan contados dos veces, por lo que hay que restarlos una vez.

Sustitución de los datos:

Tenemos los siguientes valores:

$$\begin{aligned} P(A) &= 0{,}84 \\ P(B) &= 0{,}5 \\ P(A \cap B) &= 0{,}40 \end{aligned}$$

Aplicamos directamente la fórmula:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0{,}84 + 0{,}5 - 0{,}40 \\ &= 1{,}34 - 0{,}40 \\ &= 0{,}94 \end{aligned}$$

Resultado

$$P(A \cup B) = \mathbf{0{,}94}$$

Observación didáctica

Nótese que $P(A \cup B) = 0{,}94 < 1$, lo cual es coherente: existe una probabilidad del $6\,\%$ de que no ocurra ninguno de los dos sucesos. Además $P(A \cup B) > P(A)$ y $P(A \cup B) > P(B)$, como debe ser, pues la unión incluye a cada suceso por separado.

Error común a evitar

Un error frecuente es sumar simplemente $P(A) + P(B)$ olvidando restar $P(A \cap B)$. Eso daría $0{,}84 + 0{,}5 = 1{,}34$, que es mayor que 1, lo cual es **imposible** para una probabilidad. Si obtienes un valor mayor que 1 con la suma directa, es señal de que debes restar la intersección.

2.2 Apartado b): ¿Son independientes A y B?

Criterio de independencia

Dos sucesos A y B son **estadísticamente independientes** si y solo si:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Si esta igualdad no se cumple, los sucesos son **dependientes**.

Verificación:

Calculamos el producto $P(A) \cdot P(B)$:

$$P(A) \cdot P(B) = 0{,}84 \times 0{,}5 = 0{,}42$$

Comparamos con el valor dado de la intersección:

$$P(A \cap B) = 0{,}40$$

Comprobamos la igualdad:

$$0{,}40 \stackrel{?}{=} 0{,}42 \quad \longrightarrow \quad \text{FALSO}$$

Puesto que $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, concluimos que:

Resultado

Los sucesos A y B **no son independientes** (son dependientes).
$P(A \cap B) = 0{,}40 \neq 0{,}42 = P(A) \cdot P(B)$

Observación didáctica

La diferencia entre 0,40 y 0,42 es pequeña pero suficiente para afirmar dependencia. En términos intuitivos: saber que ha ocurrido B *sí modifica* la probabilidad de A. Podemos comprobarlo calculando $P(A \mid B)$:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}40}{0{,}5} = 0{,}80 \neq 0{,}84 = P(A)$$

En efecto, $P(A \mid B) = 0{,}80 \neq P(A) = 0{,}84$, confirmando la dependencia.

2.3 Apartado c): $P(A \cap \overline{B})$

Interpretación: Queremos la probabilidad de que ocurra A pero **no** B, es decir, la probabilidad de la región de A que está fuera de B.

Fórmula de la diferencia de sucesos

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Justificación: El suceso A se descompone como unión disjunta:

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$$

Por tanto: $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$, despejando: $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$.

Aplicación numérica:

$$\begin{aligned} P(A \cap \overline{B}) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= 0{,}84 - 0{,}40 \\ &= 0{,}44 \end{aligned}$$

Resultado

$$P(A \cap \overline{B}) = \mathbf{0{,}44}$$

Observación didáctica

Esta región corresponde a los clientes/individuos que pertenecen a A pero no a B. En el diagrama de Venn, es la parte azul exclusiva del círculo A, sin solaparse con B.

2.4 Apartado d): $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

Interpretación: Queremos la probabilidad de que **no** ocurra A **ni** B, es decir, la probabilidad del complementario de la unión.

Leyes de De Morgan

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Por tanto:

$$\boxed{P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)}$$

Aplicación numérica (usando el resultado del apartado a):

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - 0{,}94 \\ &= 0{,}06 \end{aligned}$$

Resultado

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbf{0{,}06}$$

Observación didáctica

Hay un 6 % de probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos. Podemos verificar que los cuatro sucesos elementales del diagrama de Venn suman 1:

$$P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}44 + 0{,}40 + 0{,}10 + 0{,}06 = 1{,}00 \checkmark$$

donde $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 - 0{,}40 = 0{,}10$.

Capítulo 3

Ejercicio 2: Frutería — Probabilidades con conjuntos

Enunciado del Ejercicio 2

En una frutería, el 60 % de los clientes compran naranjas, el 40 % compran manzanas y el 30 % no compran ni naranjas ni manzanas. Calcula el porcentaje de clientes que compran:

a) Naranjas o manzanas (o ambas).
b) Manzanas **y** naranjas.
c) Naranjas, pero **no** manzanas.

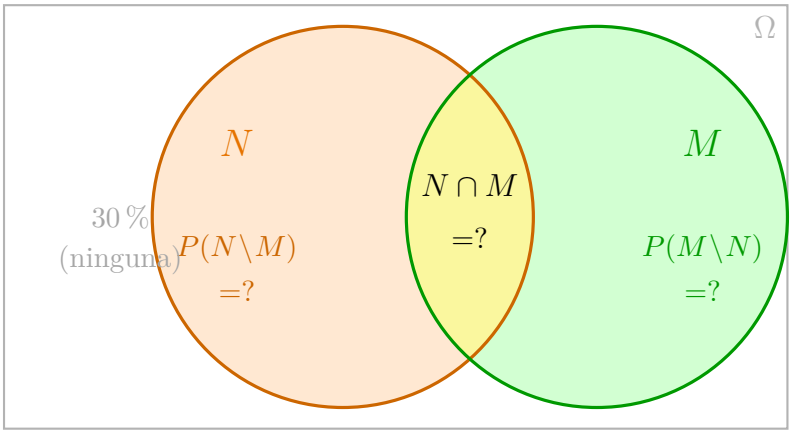
3.1 Planteamiento y definición de sucesos

Definimos los siguientes sucesos:

$$N = \text{“el cliente compra naranjas”} \quad \Rightarrow \quad P(N) = 0{,}60$$
$$M = \text{“el cliente compra manzanas”} \quad \Rightarrow \quad P(M) = 0{,}40$$
$$P(\overline{N} \cap \overline{M}) = 0{,}30 \quad \text{(no compra ninguna de las dos)}$$

Representación gráfica: Diagrama de Venn

Diagrama de Venn — Ejercicio 2



3.2 Apartado a): Porcentaje que compra naranjas o manzanas (o ambas)

Identificación del suceso: "naranjas o manzanas o ambas" $= N \cup M$.

Sabemos que $P(\overline{N} \cap \overline{M}) = 0{,}30$.

Por la Ley de De Morgan:

$$\overline{N} \cap \overline{M} = \overline{N \cup M}$$

Usando la propiedad del complementario:

$$\begin{aligned} P(\overline{N \cup M}) &= 1 - P(N \cup M) \\ 0{,}30 &= 1 - P(N \cup M) \\ P(N \cup M) &= 1 - 0{,}30 \\ P(N \cup M) &= 0{,}70 \end{aligned}$$

Resultado

El **70** % de los clientes compra naranjas o manzanas (o ambas):

$$P(N \cup M) = \mathbf{0{,}70}$$

3.3 Apartado b): Porcentaje que compra manzanas *y* naranjas

Identificación del suceso: "manzanas y naranjas" $= N \cap M$.

Aplicamos la regla de la adición, despejando $P(N \cap M)$:

$$P(N \cup M) = P(N) + P(M) - P(N \cap M)$$

Despejando:

$$\begin{aligned} P(N \cap M) &= P(N) + P(M) - P(N \cup M) \\ &= 0{,}60 + 0{,}40 - 0{,}70 \\ &= 1{,}00 - 0{,}70 \\ &= 0{,}30 \end{aligned}$$

Resultado

El **30** % de los clientes compra tanto naranjas como manzanas:

$$P(N \cap M) = \mathbf{0{,}30}$$

Observación didáctica

Es llamativo que el porcentaje de clientes que no compra ninguna de las dos frutas (30 %) coincida con el que compra las dos (30 %). Esto es consecuencia directa de los datos del problema y **no es una coincidencia errónea**: los números son matemáticamente consistentes.

3.4 Apartado c): Porcentaje que compra naranjas pero *no* manzanas

Identificación del suceso: "naranjas pero no manzanas" $= N \cap \overline{M} = N \setminus M$.

$$\begin{aligned} P(N \cap \overline{M}) &= P(N) - P(N \cap M) \\ &= 0{,}60 - 0{,}30 \\ &= 0{,}30 \end{aligned}$$

Resultado

El **30** % de los clientes compra naranjas pero no manzanas:

$$P(N \cap \overline{M}) = \mathbf{0{,}30}$$

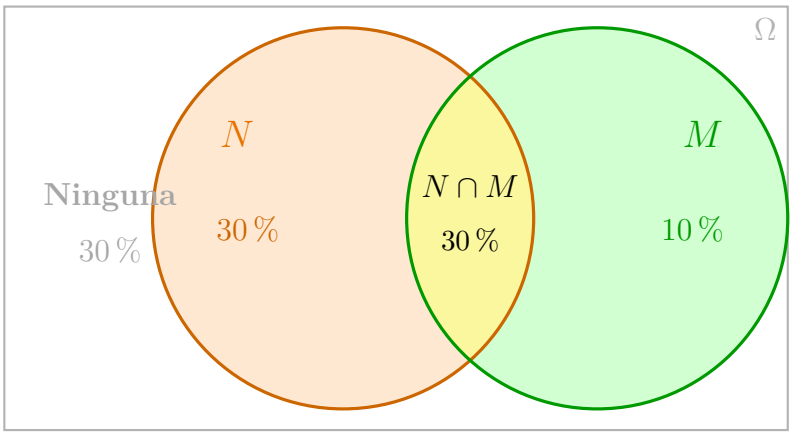
Observación didáctica

Verificación global (los cuatro grupos deben sumar el 100 %):

Grupo	Suceso	Porcentaje
Solo naranjas	$N \cap \overline{M}$	30 %
Solo manzanas	$\overline{N} \cap M$	10 %
Ambas	$N \cap M$	30 %
Ninguna	$\overline{N} \cap \overline{M}$	30 %
Total		**100 %** ✓

Donde $P(\overline{N} \cap M) = P(M) - P(N \cap M) = 0{,}40 - 0{,}30 = 0{,}10$ (10 % solo manzanas).

Diagrama de Venn con valores completos — Ej. 2



Capítulo 4

Ejercicio 3: Probabilidad Total y Teorema de Bayes

Enunciado del Ejercicio 3

De los trabajadores jubilados en el último año: 40 % pertenecían al sector de educación, 40 % al de sanidad y el resto al sector de justicia. Las probabilidades de recibir una fiesta de despedida son:

- Educación: 80 %
- Justicia: 60 %
- Sanidad: 30 %

a) Calcula la probabilidad de que a un trabajador jubilado (de estos sectores) le hicieran una fiesta.

b) Dado que a un trabajador jubilado elegido al azar **no** le hicieron fiesta, calcula la probabilidad de que fuera del sector de sanidad.

4.1 Definición de sucesos y datos

Definimos la **partición** del espacio muestral:

$$E = \text{“pertenece al sector Educación”} \qquad P(E) = 0{,}40$$
$$S = \text{“pertenece al sector Sanidad”} \qquad P(S) = 0{,}40$$
$$J = \text{“pertenece al sector Justicia”} \qquad P(J) = 1 - 0{,}40 - 0{,}40 = 0{,}20$$

Verificación: $P(E) + P(S) + P(J) = 0{,}40 + 0{,}40 + 0{,}20 = 1{,}00$ ✓

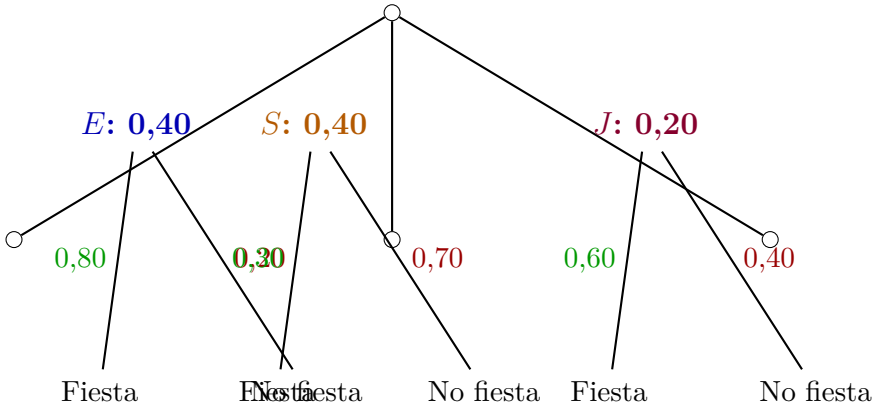
El suceso de interés:

$$F = \text{“le hicieron fiesta de despedida”}$$

Probabilidades condicionadas (datos del problema):

$$P(F \mid E) = 0{,}80$$
$$P(F \mid J) = 0{,}60$$
$$P(F \mid S) = 0{,}30$$

Árbol de probabilidades



Sector	$P(\text{sector})$	$P(F\|\text{sector})$	$P(\overline{F}\|\text{sector})$	$P(\text{sector} \cap F)$	$P(\text{sector} \cap \overline{F})$
Educación (E)	0,40	0,80	0,20	$0{,}40 \times 0{,}80 = 0{,}32$	$0{,}40 \times 0{,}20 = 0{,}08$
Sanidad (S)	0,40	0,30	0,70	$0{,}40 \times 0{,}30 = 0{,}12$	$0{,}40 \times 0{,}70 = 0{,}28$
Justicia (J)	0,20	0,60	0,40	$0{,}20 \times 0{,}60 = 0{,}12$	$0{,}20 \times 0{,}40 = 0{,}08$
Total	1,00				

4.2 Apartado a): Probabilidad de recibir fiesta — Probabilidad Total

Teorema de la Probabilidad Total

Como $\{E, S, J\}$ forma una partición del espacio muestral:

$$P(F) = P(F \mid E) \cdot P(E) + P(F \mid S) \cdot P(S) + P(F \mid J) \cdot P(J)$$

Cálculo paso a paso:

Paso 1: Probabilidad de fiesta viniendo del sector Educación:

$$P(F \cap E) = P(F \mid E) \cdot P(E) = 0{,}80 \times 0{,}40 = 0{,}32$$

Paso 2: Probabilidad de fiesta viniendo del sector Sanidad:

$$P(F \cap S) = P(F \mid S) \cdot P(S) = 0{,}30 \times 0{,}40 = 0{,}12$$

Paso 3: Probabilidad de fiesta viniendo del sector Justicia:

$$P(F \cap J) = P(F \mid J) \cdot P(J) = 0{,}60 \times 0{,}20 = 0{,}12$$

Paso 4: Aplicar la Probabilidad Total:

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F \cap E) + P(F \cap S) + P(F \cap J) \\ &= 0{,}32 + 0{,}12 + 0{,}12 \\ &= 0{,}56 \end{aligned}$$

Resultado

La probabilidad de que a un trabajador jubilado le hicieran fiesta es:

$$P(F) = \mathbf{0{,}56} \quad (56\,\%)$$

Observación didáctica

Por complementariedad: $P(\overline{F}) = 1 - 0{,}56 = 0{,}44$. Podemos verificar: $P(\overline{F}) = 0{,}08 + 0{,}28 + 0{,}08 = 0{,}44$ ✓

4.3 Apartado b): Probabilidad de ser de Sanidad dado que no hubo fiesta — Bayes

Pregunta: Dado que **no** hubo fiesta ($\overline{F}$), ¿cuál es la probabilidad de que el trabajador fuera de Sanidad? Es decir, calculamos $P(S \mid \overline{F})$.

Teorema de Bayes aplicado

$$P(S \mid \overline{F}) = \frac{P(\overline{F} \mid S) \cdot P(S)}{P(\overline{F})}$$

Cálculo de los ingredientes:

Numerador:

$$P(\overline{F} \mid S) \cdot P(S) = (1 - 0{,}30) \times 0{,}40 = 0{,}70 \times 0{,}40 = 0{,}28$$

Denominador: $P(\overline{F}) = 0{,}44$ (calculado en el apartado anterior)

Aplicando Bayes:

$$\begin{aligned} P(S \mid \overline{F}) &= \frac{P(\overline{F} \mid S) \cdot P(S)}{P(\overline{F})} \\ &= \frac{0{,}28}{0{,}44} \\ &= \frac{28}{44} = \frac{7}{11} \\ &\approx 0{,}6364 \end{aligned}$$

Resultado

La probabilidad de que el trabajador sea de Sanidad, dado que no le hicieron fiesta, es:

$$P(S \mid \overline{F}) = \frac{7}{11} \approx \mathbf{0{,}6364} \quad (\approx 63{,}64\,\%)$$

Observación didáctica

Interpretación de Bayes: Antes de saber si hubo fiesta, la probabilidad de ser de Sanidad era $P(S) = 0{,}40 = 40\,\%$. Tras enterarnos de que *no* hubo fiesta, la probabilidad se actualiza a $\approx 63{,}6\,\%$. Esto tiene sentido intuitivo: los trabajadores de Sanidad tienen la tasa de fiesta más baja (30 %), por lo que es más probable que pertenezcan a Sanidad si sabemos que no hubo fiesta.

Verificación de coherencia:

$$P(E \mid \overline{F}) = \frac{0{,}08}{0{,}44} = \frac{2}{11} \approx 0{,}1818$$

$$P(J \mid \overline{F}) = \frac{0{,}08}{0{,}44} = \frac{2}{11} \approx 0{,}1818$$

$$P(S \mid \overline{F}) = \frac{0{,}28}{0{,}44} = \frac{7}{11} \approx 0{,}6364$$

Suma: $\frac{2}{11} + \frac{2}{11} + \frac{7}{11} = \frac{11}{11} = 1$ ✓

Capítulo 5

Ejercicio 4: Distribución Normal — Oposiciones

Enunciado del Ejercicio 4

En un examen de oposición a la Junta de Castilla y León, los puntos obtenidos se distribuyen según una normal de **media** $\mu = 100$ puntos y **desviación típica** $\sigma = 10$ puntos.

$$X \sim \mathcal{N}(100,\, 10)$$

Calcúlese la probabilidad de que:

a) Un opositor obtenga **más de 90** puntos.

b) Si para aprobar se necesitan **más de 120** puntos, ¿qué porcentaje de opositores aprueba?

5.1 Fundamento: tipificación de la normal

Dado que $X \sim \mathcal{N}(100, 10)$, la variable tipificada es:

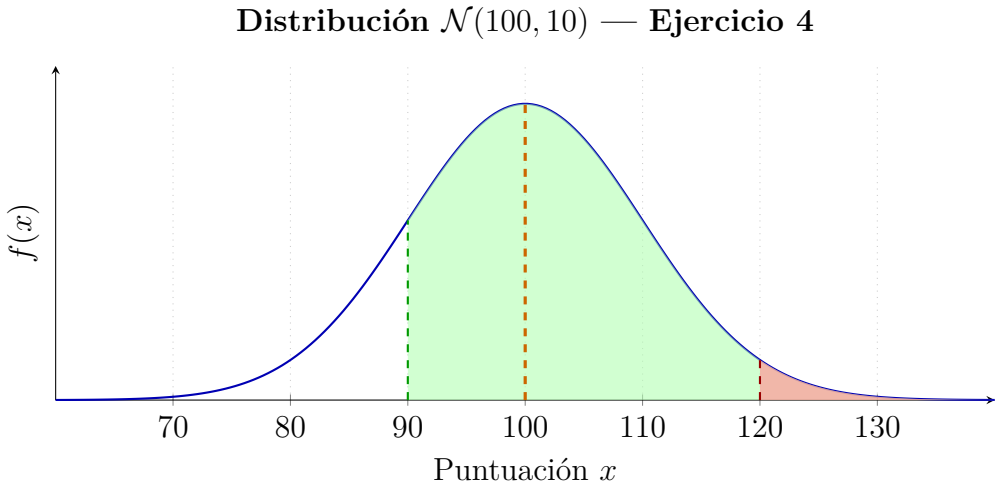
$$Z = \frac{X - 100}{10} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Método: Para calcular $P(X > a)$ o $P(X < a)$, tipificamos a:

$$z_a = \frac{a - \mu}{\sigma} = \frac{a - 100}{10}$$

y usamos la tabla de la normal estándar.

Ilustración: Curva de Gauss $\mathcal{N}(100, 10)$



Lectura del gráfico:

- La zona verde (sombreada desde 90 hacia la derecha) representa $P(X > 90)$.
- La zona roja (sombreada desde 120 hacia la derecha) representa $P(X > 120)$.
- La línea naranja marca la media $\mu = 100$.

5.2 Apartado a): $P(X > 90)$

Paso 1: Tipificación.

Calculamos el valor z correspondiente a $x = 90$:

$$z = \frac{90 - 100}{10} = \frac{-10}{10} = -1$$

Paso 2: Expresión en términos de la normal estándar.

$$P(X > 90) = P\left(Z > \frac{90 - 100}{10}\right) = P(Z > -1)$$

Paso 3: Uso de la simetría de la normal estándar.

Por la simetría de la distribución $\mathcal{N}(0, 1)$ respecto a $z = 0$:

$$P(Z > -1) = P(Z < 1) = \Phi(1)$$

Paso 4: Consulta de la tabla.

De la tabla de la distribución normal estándar:

$$\Phi(1) = P(Z < 1) = 0{,}8413$$

Paso 5: Resultado.

$$P(X > 90) = P(Z > -1) = P(Z < 1) = \Phi(1) = 0{,}8413$$

Resultado

$$P(X > 90) = \mathbf{0{,}8413} \quad (84{,}13\,\%)$$

El 84,13 % de los opositores obtiene más de 90 puntos.

Observación didáctica

Este resultado es coherente con la **Regla 68-95-99,7**: el 68,27 % de los datos cae dentro de $\mu \pm \sigma = [90, 110]$. Por simetría, el 50 % cae a cada lado de la media. El área desde 90 hasta la media (100) es la mitad del 68,27 %, es decir 34,13 %. Sumando el 50 % del lado derecho: 34,13 % + 50 % = 84,13 %. Coincide.

5.3 Apartado b): $P(X > 120)$

Paso 1: Tipificación.

$$z = \frac{120 - 100}{10} = \frac{20}{10} = 2$$

Paso 2: Expresión en términos de la normal estándar.

$$P(X > 120) = P\left(Z > \frac{120 - 100}{10}\right) = P(Z > 2)$$

Paso 3: Uso de la relación complementaria.

$$P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - \Phi(2)$$

Paso 4: Consulta de la tabla.

$$\Phi(2) = P(Z < 2) = 0{,}9772$$

Paso 5: Resultado.

$$P(X > 120) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

Resultado

$$P(X > 120) = \mathbf{0{,}0228} \quad (2{,}28\,\%)$$

Solo el **2,28** % de los opositores aprueba (obtiene más de 120 puntos).

Observación didáctica

La puntuación de corte $x = 120$ está a 2σ por encima de la media. La Regla 95: el 95,45 % de los datos cae en $[\mu - 2\sigma,\ \mu + 2\sigma] = [80, 120]$. El 4,55 % queda fuera, y por simetría, la mitad (2,28 %) queda por encima de 120. Coherente con nuestro resultado.
Este es un listón de aprobado bastante elevado: solo 1 de cada 44 opositores (aprox.)

supera los 120 puntos. En oposiciones reales esto puede ser intencionado para seleccionar solo a los candidatos más preparados.

Capítulo 6

Ejercicio 5: Distribución Normal — Temperatura en marzo

Enunciado del Ejercicio 5

La temperatura media diaria en una ciudad durante el mes de marzo sigue una distribución normal de **media** $\mu = 15\,^{\circ}\text{C}$ y **desviación típica** $\sigma = 2\,^{\circ}\text{C}$.

$$X \sim \mathcal{N}(15,\, 2)$$

Si marzo tiene 31 días, ¿cuántos días se espera que la temperatura sea **superior a** $12\,^{\circ}\text{C}$ **e inferior a** $14\,^{\circ}\text{C}$?

6.1 Planteamiento

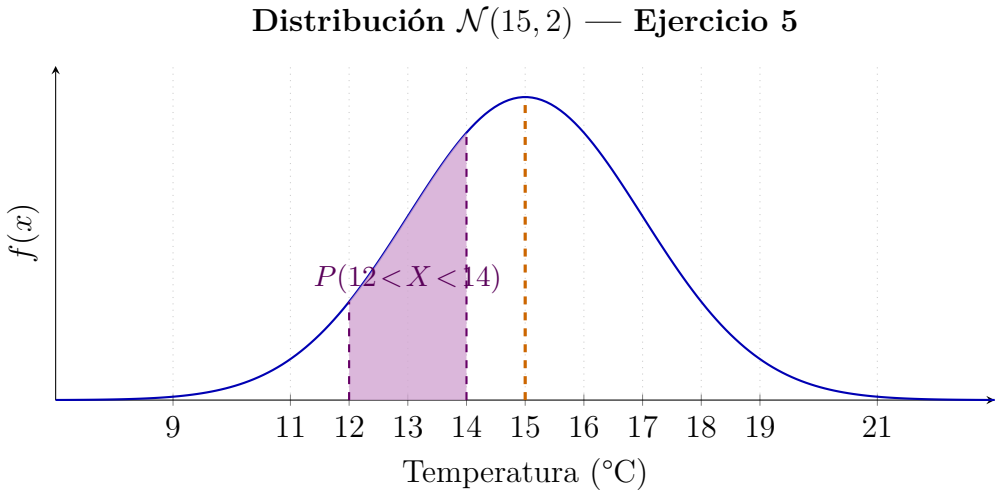
Necesitamos calcular:

$$P(12 < X < 14)$$

y luego multiplicar por el número de días del mes (31) para obtener el número esperado de días con esa temperatura.

Número esperado de días $= P(12 < X < 14) \times 31$

Ilustración: Distribución $\mathcal{N}(15, 2)$ y zona pedida



6.2 Cálculo de $P(12 < X < 14)$

Paso 1: Tipificación de los límites.

Para $x = 12$:

$$z_1 = \frac{12 - 15}{2} = \frac{-3}{2} = -1{,}5$$

Para $x = 14$:

$$z_2 = \frac{14 - 15}{2} = \frac{-1}{2} = -0{,}5$$

Paso 2: Expresión en términos de la normal estándar.

$$\begin{aligned} P(12 < X < 14) &= P\Big(\frac{12 - 15}{2} < Z < \frac{14 - 15}{2}\Big) \\ &= P(-1{,}5 < Z < -0{,}5) \end{aligned}$$

Paso 3: Descomposición usando la función Φ.

$$P(-1{,}5 < Z < -0{,}5) = \Phi(-0{,}5) - \Phi(-1{,}5)$$

Paso 4: Aplicar la simetría $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.

$$\begin{aligned} \Phi(-0{,}5) &= 1 - \Phi(0{,}5) \\ \Phi(-1{,}5) &= 1 - \Phi(1{,}5) \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} P(-1{,}5 < Z < -0{,}5) &= \Phi(-0{,}5) - \Phi(-1{,}5) \\ &= \Big[1 - \Phi(0{,}5)\Big] - \Big[1 - \Phi(1{,}5)\Big] \\ &= 1 - \Phi(0{,}5) - 1 + \Phi(1{,}5) \\ &= \Phi(1{,}5) - \Phi(0{,}5) \end{aligned}$$

Paso 5: Consulta de tablas.

$$\Phi(1{,}5) = 0{,}9332 \qquad \Phi(0{,}5) = 0{,}6915$$

Paso 6: Resultado de la probabilidad.

$$\begin{aligned} P(12 < X < 14) &= \Phi(1{,}5) - \Phi(0{,}5) \\ &= 0{,}9332 - 0{,}6915 \\ &= 0{,}2417 \end{aligned}$$

Resultado

$$P(12 < X < 14) = \mathbf{0{,}2417} \quad (24{,}17\,\%)$$

6.3 Número esperado de días

El número esperado de días en los que la temperatura estará entre 12 y 14 °C se calcula multiplicando la probabilidad por el número total de días de marzo:

$$\text{Días esperados} = P(12 < X < 14) \times 31$$

Sustitución:

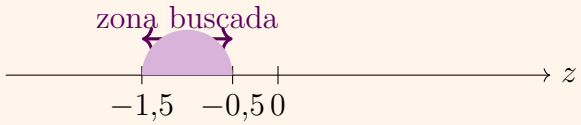
$$\begin{aligned} \text{Días esperados} &= 0{,}2417 \times 31 \\ &= 7{,}4927 \\ &\approx \mathbf{7{,}49} \text{ días} \end{aligned}$$

Resultado

Se espera que durante aproximadamente $\mathbf{7{,}49} \approx \mathbf{7{,}5}$ días del mes de marzo la temperatura sea superior a 12 °C e inferior a 14 °C.
Redondeando al entero más próximo: aproximadamente **7** o **8** días.

Observación didáctica

Interpretación: La probabilidad es de algo menos del 25 %, lo que corresponde a un poco menos de una semana de los 31 días. Esto tiene sentido geométrico: el intervalo $[12, 14]$ está a la izquierda de la media (15°C), entre $1{,}5\sigma$ y $0{,}5\sigma$ por debajo.
Nota sobre el redondeo: En problemas de distribución normal aplicada a días, el enunciado puede pedir redondear al entero más próximo (≈ 7 o 8 días), ya que no puede haber un número fraccionario de días. Sin embargo, el valor 7,49 es el *valor esperado* matemáticamente exacto.
Diagrama de posición de los valores tipificados:



$z_1 = -1{,}5 \leftarrow x = 12; \quad z_2 = -0{,}5 \leftarrow x = 14$

Capítulo 7

Resumen de Resultados

Tabla resumen de todas las soluciones

Ejercicio	Pregunta	Resultado
Ej. 1a	$P(A \cup B)$	0,94
Ej. 1b	¿Independientes?	**No** ($0{,}40 \neq 0{,}42$)
Ej. 1c	$P(A \cap \overline{B})$	0,44
Ej. 1d	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	0,06
Ej. 2a	$P(N \cup M)$	0,70 (70 %)
Ej. 2b	$P(N \cap M)$	0,30 (30 %)
Ej. 2c	$P(N \cap \overline{M})$	0,30 (30 %)
Ej. 3a	$P(F)$ (prob. total)	0,56 (56 %)
Ej. 3b	$P(S \mid \overline{F})$ (Bayes)	$7/11 \approx 0{,}6364$
Ej. 4a	$P(X > 90)$, $X \sim \mathcal{N}(100, 10)$	0,8413 (84,13 %)
Ej. 4b	$P(X > 120)$ (porcentaje aprueba)	0,0228 (2,28 %)
Ej. 5	$P(12 < X < 14)$, $X \sim \mathcal{N}(15, 2)$	0,2417 (24,17 %)
Ej. 5	Días esperados en marzo	$\approx 7{,}49$ **días**

Valores de la tabla normal estándar utilizados

z	$\Phi(z) = P(Z < z)$	z	$\Phi(z) = P(Z < z)$
0,5	0,6915	−0,5	0,3085
1,0	0,8413	−1,0	0,1587
1,5	0,9332	−1,5	0,0668
2,0	0,9772	−2,0	0,0228

Nota final

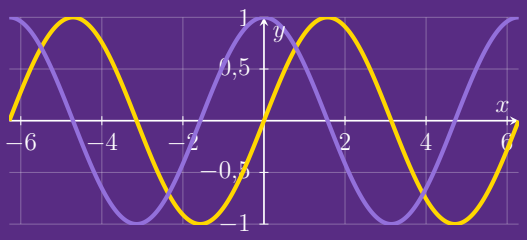
Este documento ha sido elaborado con el máximo rigor matemático y pedagógico. Cada paso algebraico está justificado, cada uso de un teorema está explicitado y se han evitado todos los "saltos mágicos" que confunden al estudiante.
Para un alumno de 1º Bachillerato que estudie estas soluciones detenidamente, debería quedar claro:

- Cómo operar con diagramas de Venn y probabilidades de sucesos.
- La diferencia entre sucesos independientes y dependientes.
- Cuándo y cómo aplicar la Probabilidad Total y el Teorema de Bayes.
- Cómo resolver problemas de distribución normal mediante tipificación.

"El que entiende por qué, nunca olvidará el cómo."

EXÁMENES DE LADIS 2º BACHILLERATO

CURSO 2024-2025

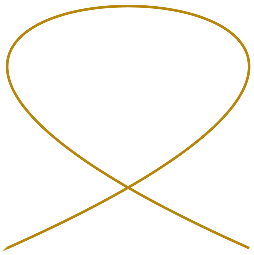


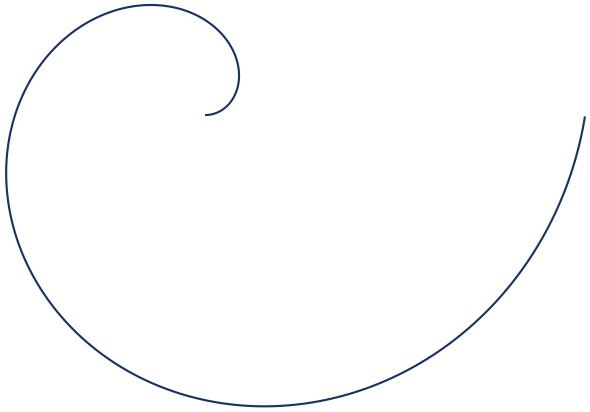
"Reserva tu derecho a pensar, porque incluso pensar de manera errónea es mejor que no pensar en absoluto."

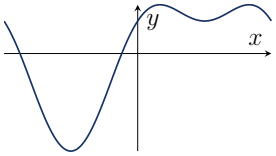
— Hipatia de Alejandría —

(Matemática, astrónoma y filósofa, 355-415 d.C.)

$\pi \quad \infty \quad \Sigma \quad \int \quad \nabla \quad \alpha \quad \omega$







EXÁMENES DE LADIS

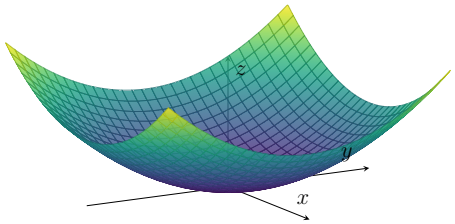
2º BACHILLERATO

CURSO 2024-2025

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

"Las matemáticas son el alfabeto con el cual Dios ha escrito el universo."

— **Galileo Galilei**



Junta de Castilla y León
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA

EXAMEN 2º BACH

MATEMÁTICAS II 30-10-2024

ies Tovar Antonio Centro bilingüe

Nº1.- Calcúlense los siguientes límites:

$a)\ \lim_{x\to\infty} \dfrac{-12x^3+2x^2+5x+1}{-x^2+5+12x^3}$ $\qquad b)\ \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-x}-x$

$c)\ \lim_{x\to 0}(e^x)^{\left(\frac{1}{tgx}\right)}$ $\qquad d)\ \lim_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln(x)}\right)$

Nº2.- Demuestra que la ecuación $e^{-x}+2=x$, tiene al menos una solución real. ¿Es única esa solución? Enuncia los teoremas que has aplicado

Nº3.- Hállense los valores de los parámetros a, b para que la función:

$$f(x)=\begin{cases} 3ax+b & si\ x\le 0 \\ e^{x(ax+b)} & si\ x>0 \end{cases}$$

sea continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

Nº4.- Dada la función $f(x)=\ 2x^3+ax^2+bx+c$.
Calcúlense los valores de los parámetros a, b, c para que pase por el punto (1,0) y tenga dos extremos relativos en x=1 y x=2
calcúlese: el dominio, puntos de corte con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión, intervalos de concavidad y convexidad. Esboza la gráfica de la función

Nº5.- a) Hállense las asíntotas de la función: $f(x)=\dfrac{3x-3}{x^2-2x}$

b) Haz un esbozo de la gráfica de la función f

(Criterios de Evaluación: 1.1, 1.2, 2.1, 2.2, 3.1, 3.2, 4.1, 5.1, 5.2, 6.1, 6.2, 7.1, 8.2, 9.1, 9.2, 9.3)

SUERTE JÓVENES

MATEMÁTICAS II

Examen de Evaluación

2.º Bachillerato — Modalidad Ciencias

Fecha: 30 de octubre de 2024

Centro: IES Tovar — Castilla y León

Contenidos del examen

Ej. 1 Cálculo de límites (cuatro apartados)

Ej. 2 Teorema de Bolzano y unicidad de soluciones

Ej. 3 Continuidad y derivabilidad de funciones por tramos

Ej. 4 Estudio completo de una función polinómica cúbica

Ej. 5 Asíntotas y esbozo gráfico de una función racional

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \quad \nabla f \quad \int_a^b f(x)\,dx \quad f''(x) = 0$$

Soluciones con rigor matemático completo

Material de estudio para 2.º de Bachillerato

Índice general

Introducción y metodología **3**

1. Ejercicio 1: Cálculo de límites **4**
1.1. Marco teórico: álgebra de límites 4
1.2. Apartado a): límite de cociente de polinomios en $+\infty$ 5
1.3. Apartado b): límite de la forma $\infty - \infty$ con raíz 7
1.4. Apartado c): límite de la forma 1^{∞} 8
1.5. Apartado d): límite $\infty - \infty$ mediante fracción común 10

2. Ejercicio 2: Existencia y unicidad de solución real **13**
2.1. Reformulación del problema 13
2.2. Herramientas teóricas 13
2.3. Paso 1: Continuidad de g 13
2.4. Paso 2: Aplicación del Teorema de Bolzano 14
2.5. Paso 3: Unicidad de la solución 14

3. Ejercicio 3: Continuidad y derivabilidad de función por tramos **16**
3.1. Marco teórico 16
3.2. Condición de continuidad en $x = 0$ 17
3.3. Condición de derivabilidad en $x = 0$ 17
3.4. Resolución del sistema 17
3.5. Verificación completa 18

4. Ejercicio 4: Estudio completo de función cúbica **19**
4.1. Paso 1: Determinación de los parámetros 19
4.2. Paso 2: Dominio 20
4.3. Paso 3: Puntos de corte con los ejes 20
4.4. Paso 4: Monotonía — crecimiento y decrecimiento 21
4.5. Paso 5: Extremos relativos 21
4.6. Paso 6: Puntos de inflexión 22
4.7. Paso 7: Concavidad y convexidad 22
4.8. Paso 8: Asíntotas 22
4.9. Paso 9: Esbozo de la gráfica 23

5. Ejercicio 5: Asíntotas y esbozo gráfico de función racional **24**
5.1. Marco teórico: tipos de asíntotas 24
5.2. Factorización previa 25
5.3. Asíntotas verticales 25
5.4. Asíntota horizontal 26

5.5. Asíntota oblicua 26
5.6. Resumen de asíntotas 26
5.7. Datos adicionales para el esbozo 26
5.8. Esbozo de la gráfica 27

Conclusiones y síntesis **29**

Introducción y metodología

Este documento presenta las soluciones completas y razonadas del examen de Matemáticas II de 2.º de Bachillerato correspondiente al 30 de octubre de 2024. Las soluciones han sido redactadas con los siguientes principios pedagógicos:

- **Rigor matemático:** cada paso está justificado formalmente, citando los teoremas y propiedades que lo sustentan.
- **Claridad expositiva:** se explica el *porqué* de cada transformación, no sólo el *cómo*.
- **Sin saltos «mágicos»:** toda igualdad intermedia es obtenida de la anterior mediante una operación elemental explícita.
- **Observaciones y advertencias:** se señalan los errores más frecuentes y se hacen observaciones de profundización.

Los **criterios de evaluación** referenciados en el enunciado son: 1.1, 1.2, 2.1, 2.2, 3.1, 3.2, 4.1, 5.1, 5.2, 6.1, 6.2, 7.1, 8.2, 9.1, 9.2, 9.3.

Capítulo 1

Ejercicio 1: Cálculo de límites

Enunciado

Calcúlense los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{-12x^3+2x^2+5x+1}{-x^2+5+12x^3} \qquad b)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)$$

$$c)\ \lim_{x\to0}(\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}x}} \qquad d)\ \lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$$

1.1. Marco teórico: álgebra de límites

Antes de resolver cada apartado conviene recordar las herramientas principales.

Propiedades de los límites (Álgebra de límites)

Sean f y g funciones tales que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$. Entonces:

1. $\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = L \pm M$
2. $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = L\cdot M$
3. $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ si $M\neq 0$
4. $\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = L^M$ si $L>0$

Indeterminaciones y técnicas de resolución

Las principales indeterminaciones y sus técnicas son:

Forma	Técnica habitual	Alternativa
$\frac{\infty}{\infty}$	Dividir por la potencia mayor	Regla de L'Hôpital
$\infty - \infty$	Conjugada, LCD	L'Hôpital tras fracción común
1^∞	$e^{\lim g \ln f}$	L'Hôpital
$\frac{0}{0}$	Factorizar, L'Hôpital	Series de Taylor

1.2. Apartado a): límite de cociente de polinomios en $+\infty$

Solución

Identificación de la indeterminación.
Al sustituir formalmente $x = +\infty$:

$$\frac{-12(+\infty)^3 + \cdots}{12(+\infty)^3 + \cdots} = \frac{-\infty}{+\infty} \longrightarrow \text{Indeterminación } \frac{\infty}{\infty}.$$

Método elegido: extracción del término dominante.
En el numerador el monomio de mayor grado es $-12x^3$. En el denominador el monomio de mayor grado es $12x^3$. Dividimos numerador y denominador por x^3 (la mayor potencia presente):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-12x^3 + 2x^2 + 5x + 1}{-x^2 + 5 + 12x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{-12x^3 + 2x^2 + 5x + 1}{x^3}}{\dfrac{-x^2 + 5 + 12x^3}{x^3}}$$

Dividimos cada sumando por x^3:

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-12 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}}{-\dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{x^3} + 12}$$

Cuando $x \to +\infty$, todos los términos con x en el denominador tienden a 0:

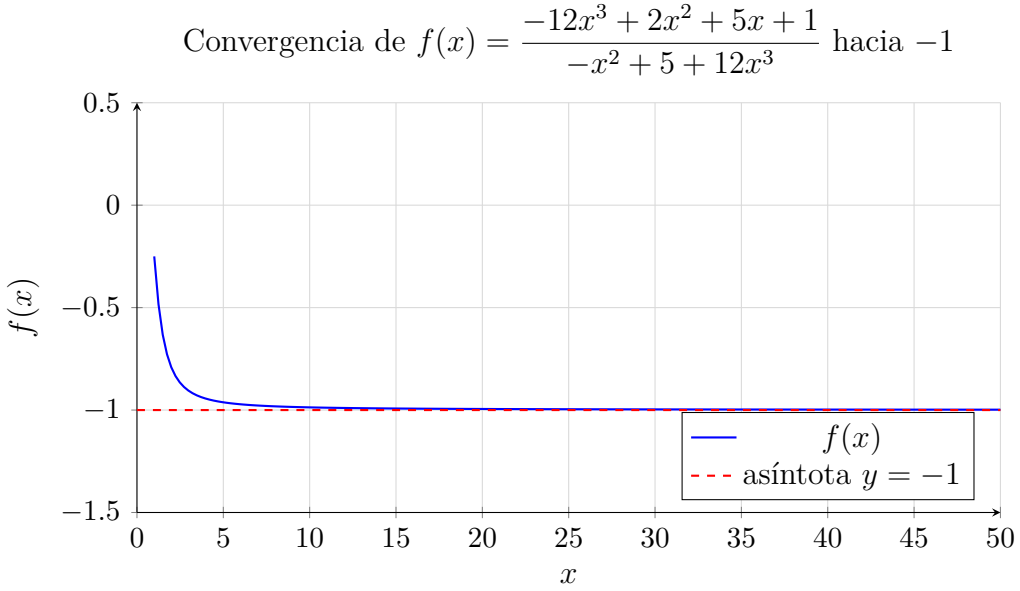
$$\frac{2}{x} \to 0, \quad \frac{5}{x^2} \to 0, \quad \frac{1}{x^3} \to 0, \quad \frac{1}{x} \to 0, \quad \frac{5}{x^3} \to 0.$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-12 + 0 + 0 + 0}{0 + 0 + 12} = \frac{-12}{12} = \boxed{-1}$$

Regla mnemotécnica (cociente de polinomios con $x \to \infty$): el límite depende *únicamente* de los coeficientes de los términos de mayor grado en numerador y denominador; el resultado es la razón entre dichos coeficientes cuando ambos tienen el mismo grado:

$$\frac{-12x^3 + \cdots}{12x^3 + \cdots} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{-12}{12} = -1.$$



Observación

Cuando el grado del numerador **es igual** al grado del denominador, el límite en $\pm\infty$ es el cociente de los coeficientes directores. Cuando el grado del numerador es **mayor**, el límite es $\pm\infty$; cuando es **menor**, el límite es 0.

1.3. Apartado b): límite de la forma $\infty - \infty$ con raíz

Solución

Identificación de la indeterminación.
Al sustituir $x = +\infty$:

$$\sqrt{(+\infty)^2 - (+\infty)} - (+\infty) = +\infty - \infty \longrightarrow \text{Indeterminación } \infty - \infty.$$

Método elegido: multiplicar por el conjugado.
El conjugado de $\sqrt{x^2 - x} - x$ es $\sqrt{x^2 - x} + x$. Multiplicamos y dividimos por este conjugado:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2 - x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - x} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - x} + x\right)}{\sqrt{x^2 - x} + x}$$

Aplicamos la identidad $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$ con $A = \sqrt{x^2 - x}$ y $B = x$:

$$A^2 - B^2 = (x^2 - x) - x^2 = x^2 - x - x^2 = -x.$$

Por tanto:

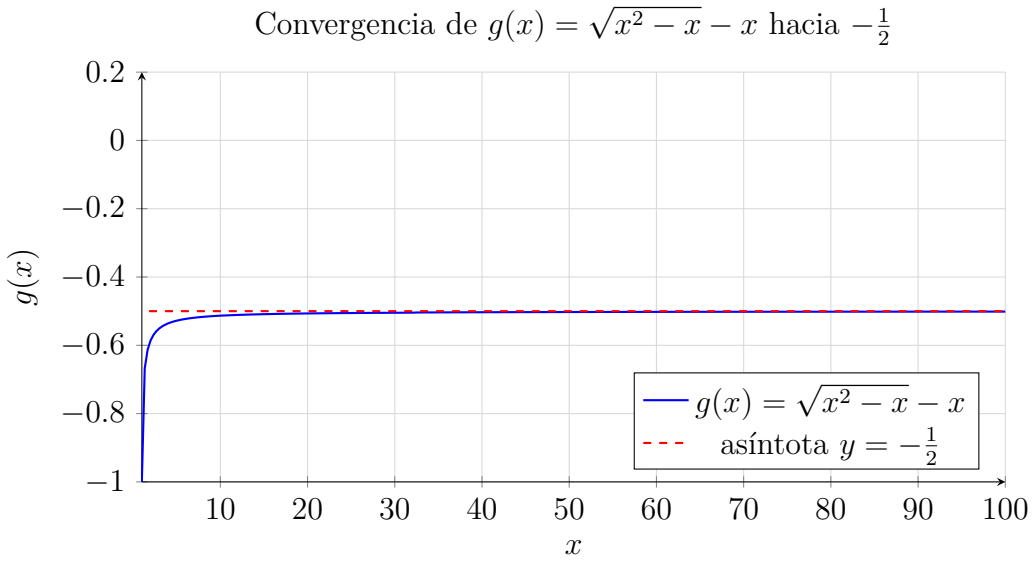
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + x}$$

Ahora dividimos numerador y denominador por x (con $x > 0$, luego $x = \sqrt{x^2}$):

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\frac{\sqrt{x^2-x}}{x}+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{\frac{x^2-x}{x^2}}+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1}$$

Cuando $x \to +\infty$, $\dfrac{1}{x} \to 0$:

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-0}+1} = \frac{-1}{1+1} = \frac{-1}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$



Advertencia / Error común

Un error frecuente es intentar factorizar x antes de aplicar el conjugado y olvidar que $\sqrt{x^2} = |x| = x$ **solo cuando** $x > 0$. Para $x \to -\infty$, $\sqrt{x^2} = -x$ y el resultado cambia de signo. En este problema $x \to +\infty$, así que $\sqrt{x^2} = x$, que es lo que hemos usado.

1.4. Apartado c): límite de la forma 1^∞

Solución

El límite es:

$$L = \lim_{x\to 0} (\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$$

Simplificación previa.
Usamos la propiedad $(\mathrm{e}^x)^{1/\operatorname{tg} x} = \mathrm{e}^{x/\operatorname{tg} x}$, ya que $(\mathrm{e}^x)^k = \mathrm{e}^{xk}$:

$$L = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{x/\operatorname{tg} x}$$

Como la función exponencial es continua, podemos pasar el límite al exponente:

$$L = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x}}$$

Cálculo de $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{tg} x}$.

Recordamos que $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, luego:

$$\frac{x}{\operatorname{tg} x} = \frac{x}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \frac{x\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Usamos el límite fundamental $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, que implica $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$:

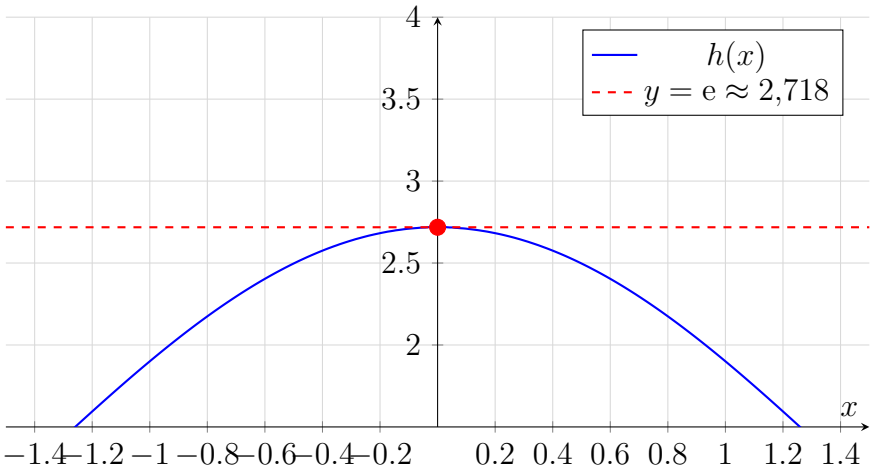
$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \cdot \lim_{x\to 0} \cos x = 1 \cdot \cos(0) = 1 \cdot 1 = 1$$

Resultado:

$$L = \mathrm{e}^1 = \boxed{\mathrm{e}}$$

Verificación de la indeterminación.
Al sustituir $x = 0$: $(\mathrm{e}^0)^{1/\operatorname{tg} 0} = 1^{1/0} = 1^{\infty}$. Efectivamente era una indeterminación del tipo 1^{∞}, que hemos resuelto explotando la estructura e^x de la base.

$h(x) = (\mathrm{e}^x)^{1/\tan x}$ converge a e cuando $x \to 0$



Observación

La técnica general para 1^{∞}: si $\lim f(x) = 1$ y $\lim g(x) = \infty$, entonces $\lim[f(x)]^{g(x)} = \mathrm{e}^{\lim g(x)\cdot[f(x)-1]}$ (equivalente infinitesimal). En este caso la base era exactamente e^x, lo que simplificó enormemente el cálculo.

1.5. Apartado d): límite $\infty - \infty$ mediante fracción común

Solución

Identificación de la indeterminación.
Al sustituir $x = 1$:

$$\frac{1}{1-1} - \frac{1}{\ln 1} = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} \longrightarrow \infty - \infty.$$

Método elegido: reducción a fracción común + L'Hôpital.
Sumamos las dos fracciones con denominador común $[(x-1)\ln x]$:

$$\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x\ln x - (x-1)}{(x-1)\ln x}$$

Verificamos que ahora obtenemos $\frac{0}{0}$ al sustituir $x = 1$:

- Numerador: $1 \cdot \ln 1 - (1-1) = 0 - 0 = 0$. ✓
- Denominador: $(1-1) \cdot \ln 1 = 0 \cdot 0 = 0$. ✓

Aplicamos la **Regla de L'Hôpital**: si $\lim_{x\to a} \frac{f}{g}$ es de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, y las derivadas existen, entonces:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Primera aplicación de L'Hôpital.
Sea $N(x) = x\ln x - (x-1)$ y $D(x) = (x-1)\ln x$.
Calculamos las derivadas:

$$N'(x) = \frac{d}{dx}[x\ln x] - \frac{d}{dx}[x-1] = \left(\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right) - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

$$D'(x) = \frac{d}{dx}[(x-1)\ln x] = \ln x + (x-1)\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$$

Evaluamos en $x = 1$: $N'(1) = \ln 1 = 0$ y $D'(1) = 0 + 1 - 1 = 0$. Seguimos en indeterminación $\frac{0}{0}$. Aplicamos L'Hôpital una segunda vez.
Segunda aplicación de L'Hôpital.

$$N''(x) = \frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}$$

$$D''(x) = \frac{d}{dx}\left[\ln x + 1 - \frac{1}{x}\right] = \frac{1}{x} + 0 + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

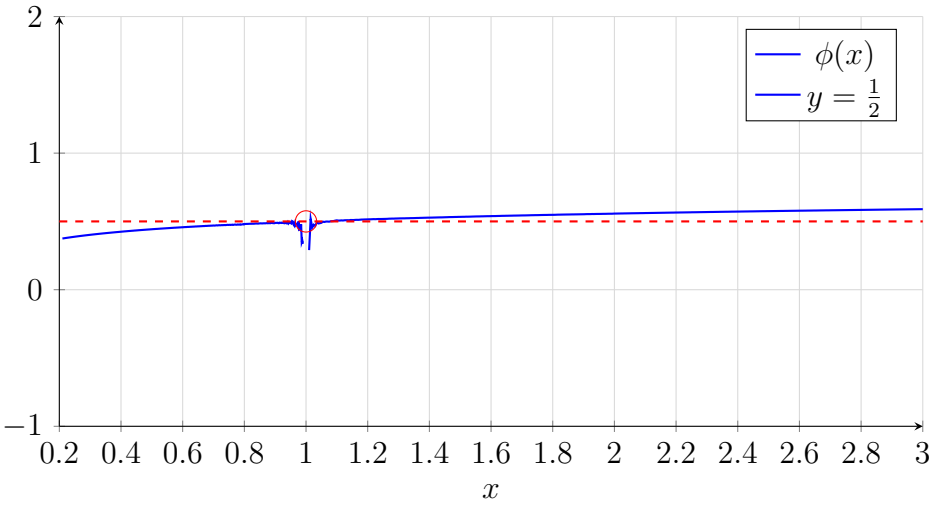
Evaluamos en $x = 1$:

$$N''(1) = \frac{1}{1} = 1, \qquad D''(1) = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2.$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{N(x)}{D(x)} = \lim_{x\to 1}\frac{N'(x)}{D'(x)} = \lim_{x\to 1}\frac{N''(x)}{D''(x)} = \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\phi(x) = \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \text{ converge a } \frac{1}{2} \text{ cuando } x \to 1$$



Advertencia / Error común

La Regla de L'Hôpital **sólo** se puede aplicar cuando la indeterminación es $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Antes de aplicarla hay que *comprobar explícitamente* que se está en uno de estos casos. También es frecuente olvidar derivar tanto numerador como denominador **por separado**, en lugar de derivar el cociente completo mediante la regla del cociente.

Capítulo 2

Ejercicio 2: Existencia y unicidad de solución real

Enunciado

Demuestra que la ecuación $e^{-x} + 2 = x$ tiene al menos una solución real. ¿Es única esa solución? Enuncia los teoremas que has aplicado.

2.1. Reformulación del problema

La ecuación $e^{-x} + 2 = x$ es equivalente a $e^{-x} + 2 - x = 0$. Definimos:

$$g(x) = e^{-x} + 2 - x.$$

Buscamos raíces de g, es decir, valores $c \in \mathbb{R}$ tales que $g(c) = 0$.

2.2. Herramientas teóricas

Teorema de Bolzano (Teorema del Valor Intermedio para ceros)

Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función **continua** en $[a, b]$. Si $g(a)$ y $g(b)$ tienen **signos opuestos**, es decir, $g(a) \cdot g(b) < 0$, entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$.

Teorema de la unicidad (función estrictamente monótona)

Si una función g es **estrictamente monótona** en un intervalo, entonces tiene **a lo sumo** una raíz en dicho intervalo. Si combinamos esto con la existencia (Bolzano), obtenemos que hay **exactamente una** raíz.

2.3. Paso 1: Continuidad de g

$$g(x) = e^{-x} + 2 - x$$

La función e^{-x} es continua en $\mathbb{R}$ (es composición de funciones continuas: $x \mapsto -x$ y $t \mapsto e^t$). La función $2 - x$ es continua (polinómica). La suma de funciones continuas es continua. Por tanto:

$$g \text{ es continua en todo } \mathbb{R}.$$

2.4. Paso 2: Aplicación del Teorema de Bolzano

Necesitamos hallar a, b tales que $g(a) \cdot g(b) < 0$.
Evaluación en $x = 2$:

$$g(2) = e^{-2} + 2 - 2 = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \approx \frac{1}{7{,}389} \approx 0{,}135 > 0.$$

Evaluación en $x = 3$:

$$g(3) = e^{-3} + 2 - 3 = e^{-3} - 1 = \frac{1}{e^3} - 1 \approx \frac{1}{20{,}09} - 1 \approx 0{,}0498 - 1 = -0{,}950 < 0.$$

Hemos obtenido:

$$g(2) \approx 0{,}135 > 0 \quad \text{y} \quad g(3) \approx -0{,}950 < 0.$$

Por tanto, $g(2) \cdot g(3) < 0$, y como g es continua en $[2, 3]$, por el **Teorema de Bolzano** existe al menos un $c \in (2, 3)$ tal que $g(c) = 0$.
Esto prueba que la ecuación $e^{-x} + 2 = x$ tiene **al menos una solución real** $c \in (2, 3)$.

2.5. Paso 3: Unicidad de la solución

Estudiamos la monotonía de g mediante su derivada:

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{-x} + 2 - x\right) = -e^{-x} - 1.$$

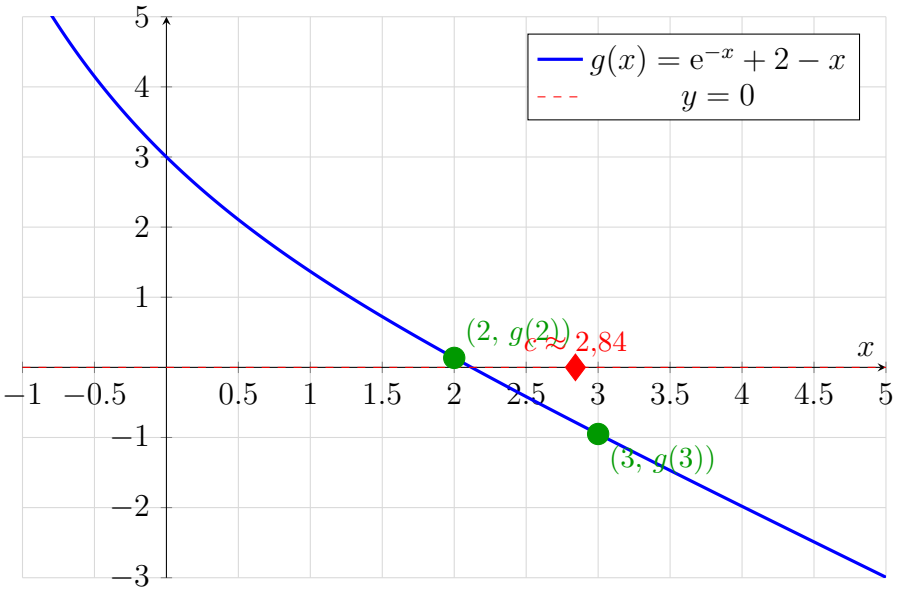
Para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$e^{-x} > 0 \implies -e^{-x} < 0 \implies g'(x) = -e^{-x} - 1 < -1 < 0.$$

Por tanto, $g'(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, lo que implica que g es **estrictamente decreciente** en $\mathbb{R}$.

Una función estrictamente decreciente puede anularse **a lo sumo** una vez. Como ya sabemos que se anula al menos una vez (Bolzano), concluimos que g tiene **exactamente una raíz**, es decir, la ecuación $e^{-x} + 2 = x$ tiene **solución única**.

$g(x) = \mathrm{e}^{-x} + 2 - x$ y la recta $y = 0$. Solución única en $(2, 3)$



Resumen de la demostración

1. $g(x) = \mathrm{e}^{-x} + 2 - x$ es **continua** en $\mathbb{R}$ (suma de funciones continuas).
2. $g(2) > 0$ y $g(3) < 0 \Rightarrow$ por el **Teorema de Bolzano** existe $c \in (2, 3)$ con $g(c) = 0$: **existencia**.
3. $g'(x) = -\mathrm{e}^{-x} - 1 < 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \Rightarrow g$ es **estrictamente decreciente** $\Rightarrow$ la raíz es **única**.

Capítulo 3

Ejercicio 3: Continuidad y derivabilidad de función por tramos

Enunciado

Hállense los valores de los parámetros a, b para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3ax + b & \text{si } x \leq 0 \\ \mathrm{e}^{x(ax+b)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

sea continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

3.1. Marco teórico

Continuidad de una función por tramos en un punto

Una función por tramos es continua en el punto de transición $x_0 = 0$ si y sólo si:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0).$$

Derivabilidad en un punto

Una función continua en x_0 es derivable en x_0 si y sólo si los límites laterales de la derivada (o del cociente incremental) coinciden:

$$f'(0^-) = f'(0^+).$$

Además, la derivabilidad implica la continuidad, pero no al revés.

Observación

Las ramas definidas en semirrectas abiertas $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$ son combinaciones de funciones elementales continuas y derivables, por lo que las condiciones sólo hay que imponerlas en $x = 0$.

3.2. Condición de continuidad en $x = 0$

Valor de f en $x = 0$ (rama $x \leq 0$):

$$f(0) = 3a(0) + b = b.$$

Límite por la izquierda ($x \to 0^-$, rama $3ax + b$):

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (3ax + b) = 3a \cdot 0 + b = b.$$

Límite por la derecha ($x \to 0^+$, rama $\mathrm{e}^{x(ax+b)}$):

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{x(ax+b)} = \mathrm{e}^{0\cdot(a\cdot 0+b)} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

Para la continuidad necesitamos:

$$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \implies b = 1 \quad \text{— \textbf{Ecuación (1)}}$$

3.3. Condición de derivabilidad en $x = 0$

Derivada de la rama izquierda ($3ax + b$):

$$f'(x) = 3a \quad \text{(constante para todo } x < 0).$$

Luego el límite por la izquierda de la derivada es:

$$f'(0^-) = 3a.$$

Derivada de la rama derecha ($\mathrm{e}^{x(ax+b)}$):
El exponente es $x(ax + b) = ax^2 + bx$. Derivamos con la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}\mathrm{e}^{ax^2+bx} = \mathrm{e}^{ax^2+bx} \cdot \frac{d}{dx}(ax^2 + bx) = \mathrm{e}^{ax^2+bx} \cdot (2ax + b).$$

Evaluamos en $x = 0$:

$$f'(0^+) = \mathrm{e}^{a\cdot 0+b\cdot 0} \cdot (2a \cdot 0 + b) = \mathrm{e}^0 \cdot b = 1 \cdot b = b.$$

Para la derivabilidad necesitamos:

$$f'(0^-) = f'(0^+) \implies 3a = b \quad \text{— \textbf{Ecuación (2)}}$$

3.4. Resolución del sistema

Del sistema:

$$\begin{cases} b = 1 & \text{(continuidad)} \\ 3a = b & \text{(derivabilidad)} \end{cases}$$

Sustituyendo (1) en (2): $3a = 1 \implies a = \dfrac{1}{3}$.

$$\boxed{a = \frac{1}{3}, \quad b = 1}$$

3.5. Verificación completa

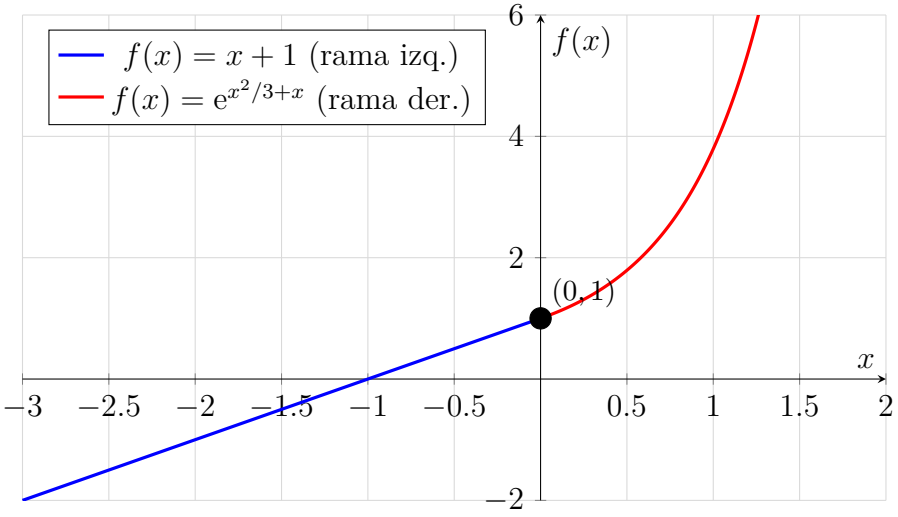
Con $a = \frac{1}{3}$ y $b = 1$, la función es:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \mathrm{e}^{x(\frac{x}{3}+1)} = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{3}+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- $f(0) = 0 + 1 = 1$. ✓
- $\lim_{x \to 0^-} (x + 1) = 1 = f(0)$. ✓
- $\lim_{x \to 0^+} \mathrm{e}^{x^2/3+x} = \mathrm{e}^0 = 1 = f(0)$. ✓
- $f'(0^-) = 1$ (derivada de $x + 1$ es $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$). ✓
- $f'(0^+) = b = 1$. ✓

Todo concuerda. La función es continua y derivable en $x = 0$, y por ser funciones elementales, también lo es en $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$. Por tanto, f es continua y derivable en **todo** $\mathbb{R}$.

$f(x)$ con $a = 1/3$, $b = 1$: continua y derivable en $x = 0$



Capítulo 4

Ejercicio 4: Estudio completo de función cúbica

Enunciado

Dada $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$, calcúlense a, b, c para que pase por $(1, 0)$ y tenga dos extremos relativos en $x = 1$ y $x = 2$. Calcúlese: dominio, cortes con ejes, intervalos de crecimiento/decrecimiento, máximos/mínimos relativos, puntos de inflexión, intervalos de concavidad/convexidad. Esboza la gráfica.

4.1. Paso 1: Determinación de los parámetros

Condición 1: $f(1) = 0$ (pasa por $(1, 0)$).

$$f(1) = 2(1)^3 + a(1)^2 + b(1) + c = 2 + a + b + c = 0 \implies a + b + c = -2 \quad \text{— Ec. (I)}$$

Condición 2 y 3: extremos relativos en $x = 1$ y $x = 2$.
En los extremos relativos, la derivada primera se anula. Calculamos $f'(x)$:

$$f'(x) = 6x^2 + 2ax + b.$$

$f'(1) = 0$:

$$6(1)^2 + 2a(1) + b = 6 + 2a + b = 0 \implies 2a + b = -6 \quad \text{— Ec. (II)}$$

$f'(2) = 0$:

$$6(2)^2 + 2a(2) + b = 24 + 4a + b = 0 \implies 4a + b = -24 \quad \text{— Ec. (III)}$$

Resolución del sistema (II) y (III):
Restamos (II) de (III):

$$(4a + b) - (2a + b) = -24 - (-6) \implies 2a = -18 \implies a = -9.$$

Sustituyendo $a = -9$ en (II):

$$2(-9) + b = -6 \implies -18 + b = -6 \implies b = 12.$$

Sustituyendo $a = -9$, $b = 12$ en (I):

$$-9 + 12 + c = -2 \implies 3 + c = -2 \implies c = -5.$$

$$\boxed{a = -9, \quad b = 12, \quad c = -5}$$

La función queda determinada:

$$\boxed{f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5}$$

Verificación:

- $f(1) = 2 - 9 + 12 - 5 = 0$. ✓
- $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$; $f'(1) = 6 - 18 + 12 = 0$. ✓
- $f'(2) = 24 - 36 + 12 = 0$. ✓

4.2. Paso 2: Dominio

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ es un polinomio de grado 3. Los polinomios son funciones definidas en todo $\mathbb{R}$ (continuas y derivables en $\mathbb{R}$).

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty).$$

4.3. Paso 3: Puntos de corte con los ejes

Corte con el eje OY $(x = 0)$

$$f(0) = 2(0)^3 - 9(0)^2 + 12(0) - 5 = -5.$$

Corte con OY: $(0, -5)$.

Cortes con el eje OX $(f(x) = 0)$

Sabemos que $x = 1$ es raíz (condición del problema). Factorizamos:

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5 = (x - 1) \cdot q(x).$$

División de polinomios (Ruffini con raíz $x = 1$):

	2	−9	12	−5
1		2	−7	5
	2	−7	5	0

Luego $f(x) = (x-1)(2x^2-7x+5)$.
Factorizamos $2x^2-7x+5$ mediante la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{7 \pm 3}{4}.$$

$$x_1 = \frac{7+3}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}, \qquad x_2 = \frac{7-3}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Entonces $2x^2-7x+5 = 2(x-1)(x-5/2)$, y:

$$f(x) = 2(x-1)^2\left(x - \frac{5}{2}\right).$$

Cortes con el eje OX: $x = 1$ (raíz doble, la curva es tangente al eje) y $x = \dfrac{5}{2}$.
Los puntos de corte son: $(1, 0)$ (tangente) y $\left(\dfrac{5}{2}, 0\right)$.

4.4. Paso 4: Monotonía — crecimiento y decrecimiento

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2-3x+2) = 6(x-1)(x-2).$$

Intervalo	$x-1$	$x-2$	$f'(x) = 6(x-1)(x-2)$	Monotonía
$(-\infty, 1)$	$-$	$-$	$+$	Creciente ↗
$(1, 2)$	$+$	$-$	$-$	Decreciente ↘
$(2, +\infty)$	$+$	$+$	$+$	Creciente ↗

4.5. Paso 5: Extremos relativos

En $x = 1$:
f' cambia de $+$ a $-$ en $x = 1 \Rightarrow$ **máximo relativo**.

$$f(1) = 2(1)^3 - 9(1)^2 + 12(1) - 5 = 2 - 9 + 12 - 5 = 0.$$

Máximo relativo en $(1, 0)$ con valor $f(1) = 0$.
En $x = 2$:
f' cambia de $-$ a $+$ en $x = 2 \Rightarrow$ **mínimo relativo**.

$$f(2) = 2(2)^3 - 9(2)^2 + 12(2) - 5 = 16 - 36 + 24 - 5 = -1.$$

Mínimo relativo en $(2, -1)$ con valor $f(2) = -1$.
Verificación mediante la segunda derivada:

$$f''(x) = 12x - 18.$$

$$f''(1) = 12 - 18 = -6 < 0 \Rightarrow \text{máximo relativo.} \quad \checkmark$$

$$f''(2) = 24 - 18 = 6 > 0 \Rightarrow \text{mínimo relativo.} \quad \checkmark$$

4.6. Paso 6: Puntos de inflexión

Los puntos de inflexión son donde $f''(x) = 0$ y f'' cambia de signo.

$$f''(x) = 12x - 18 = 0 \implies x = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}.$$

- Para $x < \frac{3}{2}$: $f''(x) = 12x - 18 < 0 \Rightarrow$ cóncava hacia abajo.
- Para $x > \frac{3}{2}$: $f''(x) = 12x - 18 > 0 \Rightarrow$ cóncava hacia arriba.

Como f'' cambia de signo en $x = \frac{3}{2}$, hay un **punto de inflexión** en:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 9\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 12\left(\frac{3}{2}\right) - 5 = 2\cdot\frac{27}{8} - 9\cdot\frac{9}{4} + 18 - 5 = \frac{27}{4} - \frac{81}{4} + 13 = -\frac{54}{4} + 13 = -\frac{27}{2} + 13 = -\frac{1}{2}.$$

Punto de inflexión: $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

4.7. Paso 7: Concavidad y convexidad

Intervalo	$f''(x) = 12x - 18$	Curvatura
$\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$	< 0	Cóncava $\cap$ (convexa)
$\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$	> 0	Convexidad $\cup$ (cóncava)

Observación

Nota terminológica: En España se suele decir que f es *cóncava* cuando $f'' < 0$ (la parábola abre hacia abajo) y *convexa* cuando $f'' > 0$ (la parábola abre hacia arriba). El punto de inflexión es donde cambia la curvatura.

4.8. Paso 8: Asíntotas

Al ser f un polinomio:

- **No hay asíntotas horizontales** (pues $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$).
- **No hay asíntotas verticales** (es continua en todo $\mathbb{R}$).
- **No hay asíntotas oblicuas reales** con pendiente finita distinta (para polinomios de grado ≥ 2, el cociente $f(x)/x \to \infty$).

4.9. Paso 9: Esbozo de la gráfica

Gráfica completa de $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$

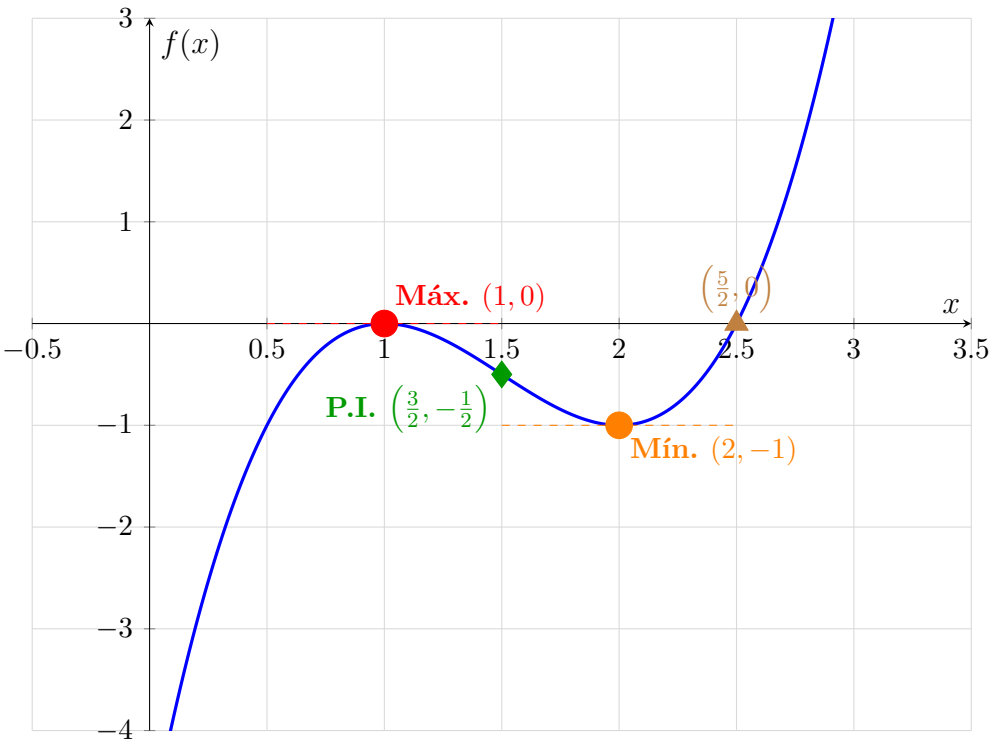


Tabla resumen del estudio de f

Característica	Resultado
Parámetros	$a = -9$, $b = 12$, $c = -5$
Función	$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$
Dominio	$\mathbb{R}$
Corte OY	$(0, -5)$
Cortes OX	$(1, 0)$ (doble, tangente) y $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$
Creciente	$(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$
Decreciente	$(1, 2)$
Máximo relativo	$(1, 0)$ con $f(1) = 0$
Mínimo relativo	$(2, -1)$ con $f(2) = -1$
Punto de inflexión	$\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
Cóncava ($f'' < 0$)	$\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$
Convexa ($f'' > 0$)	$\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$
Asíntotas	Ninguna

Capítulo 5

Ejercicio 5: Asíntotas y esbozo gráfico de función racional

Enunciado

a) Hállense las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{3x - 3}{x^2 - 2x}$$

b) Haz un esbozo de la gráfica de la función f.

5.1. Marco teórico: tipos de asíntotas

Asíntotas verticales

La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de f si $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$. Se buscan en los puntos de discontinuidad esencial (denominador nulo).

Asíntota horizontal

La recta $y = L$ es **asíntota horizontal** de f en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ (resp. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$). Existe sólo cuando el grado del numerador $\leq$ grado del denominador.

Asíntota oblicua

La recta $y = mx + n$ es **asíntota oblicua** si:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad n = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx].$$

Existe cuando el grado del numerador = grado del denominador + 1.

5.2. Factorización previa

Factorizamos numerador y denominador para identificar puntos singulares:

$$f(x) = \frac{3x-3}{x^2-2x} = \frac{3(x-1)}{x(x-2)}.$$

El denominador se anula en $x = 0$ y $x = 2$. El numerador se anula en $x = 1$. Como $x = 1$ no anula el denominador, no es una discontinuidad evitable.

¿Hay discontinuidades evitables?

Se anula el numerador en $x = 1$ y el denominador en $x = 0$ y $x = 2$. Ningún cero del numerador coincide con un cero del denominador, así que **no hay discontinuidades evitables** (no hay factores comunes).

5.3. Asíntotas verticales

Las posibles asíntotas verticales están en $x = 0$ y $x = 2$.

Asíntota vertical en $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3(x-1)}{x(x-2)} = \frac{3(0-1)}{0^+\cdot(0-2)} = \frac{-3}{0^+\cdot(-2)} = \frac{-3}{0^-} = +\infty.$$

Detallamos el signo: cuando $x \to 0^+$, $x > 0$ y $x - 2 < 0$, luego $x(x-2) < 0$ y tiende a 0^-. El numerador $3(x-1) \to 3(-1) = -3 < 0$. El cociente es $\dfrac{-3}{0^-} = +\infty$.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{3(x-1)}{x(x-2)} = \frac{-3}{0^-\cdot(-2)} = \frac{-3}{0^+} = -\infty.$$

Cuando $x \to 0^-$: $x < 0$, $x - 2 < 0$, luego $x(x-2) = (\text{neg})(\text{neg}) > 0 \to 0^+$. El cociente es $\dfrac{-3}{0^+} = -\infty$.

$$\boxed{x = 0 \text{ es asíntota vertical.}} \quad \lim_{x\to 0^-} f = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} f = +\infty.$$

Asíntota vertical en $x = 2$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{3(x-1)}{x(x-2)} = \frac{3(1)}{2\cdot 0^+} = \frac{3}{0^+} = +\infty.$$

Cuando $x \to 2^+$: numerador $\to 3 > 0$; $x \to 2^+ > 0$; $x - 2 \to 0^+$. Producto $x(x-2) \to 0^+$.

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{3(x-1)}{x(x-2)} = \frac{3}{2\cdot 0^-} = \frac{3}{0^-} = -\infty.$$

Cuando $x \to 2^-$: $x - 2 \to 0^-$; producto $x(x-2) \to 0^-$.

$$\boxed{x = 2 \text{ es asíntota vertical.}} \quad \lim_{x\to 2^-} f = -\infty, \quad \lim_{x\to 2^+} f = +\infty.$$

5.4. Asíntota horizontal

El grado del numerador (1) es **menor** que el grado del denominador (2), por lo que existe asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-3}{x^2-2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3/x - 3/x^2}{1-2/x} = \frac{0}{1} = 0.$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-3}{x^2-2x} = 0.$$

$y = 0$ es asíntota horizontal (en ambos infinitos).

5.5. Asíntota oblicua

Dado que el grado del numerador (1) es **menor** que el grado del denominador (2), **no puede haber asíntota oblicua**. La existencia de asíntota oblicua requiere que el grado del numerador sea exactamente uno más que el del denominador. Aquí el caso es el contrario: el denominador tiene grado mayor. **No hay asíntota oblicua.**

5.6. Resumen de asíntotas

Asíntotas de $f(x) = \dfrac{3x-3}{x^2-2x}$

- **Asíntotas verticales:** $x = 0$ y $x = 2$.
- **Asíntota horizontal:** $y = 0$ (eje OX), en $\pm\infty$.
- **Asíntota oblicua:** Ninguna.

5.7. Datos adicionales para el esbozo

Corte con el eje OX

$f(x) = 0 \iff 3(x-1) = 0 \iff x = 1$.
Corte: $(1, 0)$.

Corte con el eje OY

$x = 0$ es asíntota vertical, así que f **no corta** al eje OY.

Comportamiento en los distintos intervalos

f no está definida en $x = 0$ ni en $x = 2$. Los tres intervalos son:

1. $(-\infty, 0)$: $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to 0^-$, y $f(x) \to 0^-$ cuando $x \to -\infty$.

2. $(0, 2)$: $f(x) \to +\infty$ cuando $x \to 0^+$, f pasa por $(1, 0)$, y $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to 2^-$.
3. $(2, +\infty)$: $f(x) \to +\infty$ cuando $x \to 2^+$, y $f(x) \to 0^+$ cuando $x \to +\infty$.

Derivada para estudiar la monotonía (opcional, para el esbozo)

$$f(x) = \frac{3x-3}{x^2-2x}, \quad f'(x) = \frac{3(x^2-2x) - (3x-3)(2x-2)}{(x^2-2x)^2}.$$

Numerador de f':

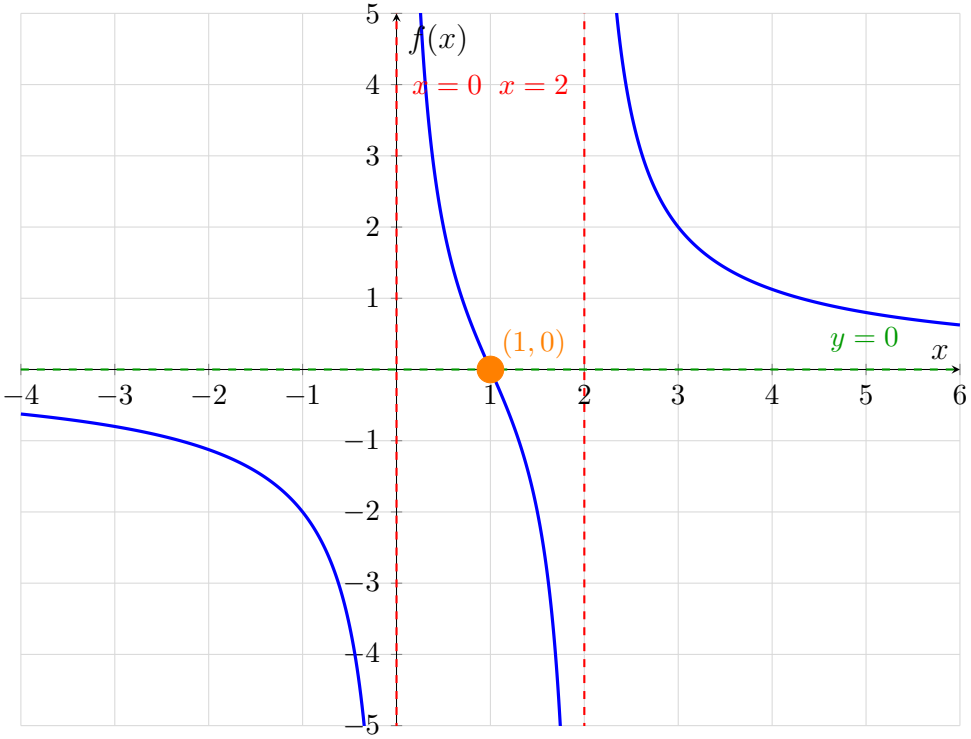
$$3(x^2-2x)-(3x-3)(2x-2) = 3x^2-6x-(6x^2-6x-6x+6) = 3x^2-6x-6x^2+12x-6 = -3x^2+6x-6.$$

$$= -3(x^2-2x+2) = -3\left[(x-1)^2+1\right].$$

Como $(x-1)^2+1 \geq 1 > 0$ para todo x, tenemos $f'(x) < 0$ para todo x en el dominio. La función es **estrictamente decreciente** en cada uno de los tres intervalos.

5.8. Esbozo de la gráfica

Gráfica de $f(x) = \dfrac{3x-3}{x^2-2x} = \dfrac{3(x-1)}{x(x-2)}$



Descripción del esbozo

- **Rama izquierda** $(-\infty, 0)$: la función viene de 0^- (por arriba del eje, tendiendo a 0), cruza negativamente y tiende a $-\infty$ cuando $x \to 0^-$. No tiene ceros en este intervalo (el único cero del numerador es $x = 1$, que está en $(0, 2)$).
- **Rama central** $(0, 2)$: viene de $+\infty$ (al salir de $x = 0$), cruza el eje OX en $x = 1$ y va hacia $-\infty$ cuando $x \to 2^-$.
- **Rama derecha** $(2, +\infty)$: viene de $+\infty$ (al salir de $x = 2$) y tiende a 0^+ cuando $x \to +\infty$.
- La función es **estrictamente decreciente** en cada rama (no tiene máximos ni mínimos).

Conclusiones y síntesis

En este examen se han trabajado las principales herramientas del análisis real de 2.º de Bachillerato:

1. **Límites:** Se han tratado las cuatro indeterminaciones más frecuentes (∞/∞, $\infty - \infty$, 1^∞ y $0/0$) mediante técnicas algebraicas y la Regla de L'Hôpital.
2. **Teorema de Bolzano:** Herramienta fundamental para demostrar existencia de raíces. La unicidad se demuestra con la monotonía estricta (criterio de la derivada).
3. **Continuidad y derivabilidad:** En funciones por tramos hay que imponer la igualdad de límites laterales (continuidad) y la igualdad de derivadas laterales (derivabilidad) en el punto de pegadura.
4. **Estudio completo de funciones:** Combinación de derivadas primera y segunda para determinar monotonía, extremos y curvatura.
5. **Asíntotas:** Las asíntotas describen el comportamiento global de la función y son esenciales para el esbozo de la gráfica.

Fin del documento — Matemáticas II, 2.º Bachillerato

Junta de Castilla y León
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA

EXAMEN 2º BACH CONCENTRACIÓN
MATEMÁTICAS II 18-11 2024

ies Tovar Antonio Centro bilingüe

ELIGE 5 PROBLEMAS

Nº1.- Calcúlense los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-senx}{x\cdot senx} \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{9x}$$

Nº2.- En el mar hay una mancha producida por una erupción submarina. La superficie afectada, en km^2, viene dada por la función $f(t)=\frac{11t+20}{t+2}$, siendo t el tiempo transcurrido desde que empezamos a observarla.

a) ¿Cuál es la superficie afectada inicialmente?
b) Estudia si la mancha crece o decrece con el tiempo.
c) ¿Tiene algún límite la extensión de la mancha?

Nº3.- Un agricultor estima que, si vende el kilogramo de cebollas a x céntimos de euro, entonces su beneficio por kilogramo sería igual a $B(x)=-x^2+100x-2475$

a) ¿Qué niveles de precios suponen beneficios para el agricultor?
b) ¿Cuál es el precio que maximiza el beneficio del agricultor?
c) Si dispone de 50000 kg de cebollas. ¿cuál es el beneficio?

Nº4.- a) Demuéstrese que la ecuación $2x=senx$ tiene una solución en el intervalo $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

b) ¿cuál es la solución? ¿Es única?

Nº5.- Dada la función: $f(x)=ax^3+bx^2-3x+c$

a) Calcúlense los valores de los parámetros a,b,c para que pase por el punto (0,-3) y tenga un extremo relativo en el punto (-1,-1)
b) Dibuja la gráfica de la función f
c) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación f(x)=0 y en qué intervalos están?

Nº6.- Hállense los valores de los parámetros a, b, para que la función:

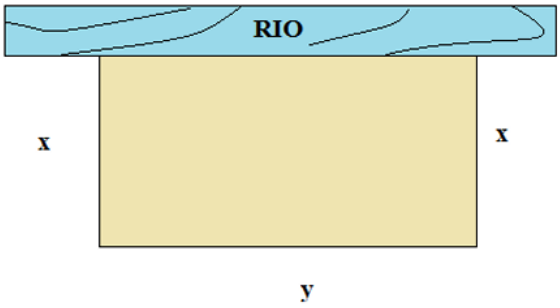
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x-1} & si\ x < 0 \\ x^2 - bx - 1 & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

sea derivable en todo $\mathbb{R}$

Nº7.-Realiza el estudio completo y la gráfica de la función:

$$f(x) = \frac{e^x}{x+1}$$

Nº8.- Un granjero desea vallar un terreno rectangular de pasto adyacente a un río. El pastizal debe tener 180.000 m^2 para producir suficiente forraje para su ganado. ¿Qué dimensiones tendrá el terreno rectangular de forma que utilice la mínima cantidad de valla, si el lado que da al río no necesita ser vallado?



(Criterios de Evaluación: 1.1, 1.2, 2.1, 2.2, 3.1, 3.2, 4.1, 5.1, 5.2, 6.1, 6.2, 7.1, 8.2, 9.1, 9.2, 9.3)

SUERTE JÓVENES

Matemáticas II

2.º Bachillerato

Examen de Concentración – 18 de noviembre de 2024

Soluciones completas, rigurosas y pedagógicas

Elaborado con rigor matemático formal

Curso 2024 – 2025

Nota introductoria

Este documento contiene las soluciones exhaustivas y completamente razonadas de los ocho problemas del **Examen de Concentración de Matemáticas II de 2.º de Bachillerato**, celebrado el 18 de noviembre de 2024 en el I.E.S. Tovar (Castilla y León).

Objetivo pedagógico. El texto está pensado para que un alumno excelente pueda *entender en profundidad* cada paso, sin dar nada por "obvio". Se citan los teoremas empleados, se justifican todas las transformaciones algebraicas y se comentan los errores más frecuentes.

Estructura. Cada problema ocupa un capítulo propio con:

- Enunciado reproducido fielmente.
- Marco teórico necesario.
- Solución paso a paso.
- Ilustración o diagrama aclaratorio.
- Conclusión y observaciones finales.

Índice general

Nota introductoria **1**

1. Problema 1 – Cálculo de límites **4**
Enunciado . . . 4
1.1. Marco teórico . . . 4
1.2. Apartado (a) . . . 5
1.3. Apartado (b) . . . 6
1.4. Ilustración gráfica: comportamiento en el origen . . . 8

2. Problema 2 – La mancha marina **9**
Enunciado . . . 9
2.1. Marco teórico . . . 9
2.2. Apartado (a) – Superficie inicial . . . 10
2.3. Apartado (b) – Crecimiento o decrecimiento . . . 10
2.4. Apartado (c) – Límite de la extensión . . . 10
2.5. Gráfica de la función . . . 11

3. Problema 3 – Beneficio del agricultor **12**
Enunciado . . . 12
3.1. Marco teórico . . . 12
3.2. Apartado (a) – Niveles de precios con beneficio positivo . . . 12
3.3. Apartado (b) – Precio que maximiza el beneficio . . . 13
3.4. Apartado (c) – Beneficio total con 50 000 kg . . . 14
3.5. Gráfica de la función beneficio . . . 14

4. Problema 4 – Ecuación $2x = \operatorname{sen} x$ **15**
Enunciado . . . 15
4.1. Marco teórico . . . 15
4.2. Apartado (a) – Demostración de existencia . . . 15
4.3. Apartado (b) – ¿Cuál es la solución? ¿Es única? . . . 16
4.4. Ilustración geométrica . . . 17

5. Problema 5 – Función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c$ **18**
Enunciado . . . 18
5.1. Marco teórico . . . 18
5.2. Apartado (a) – Determinación de los parámetros . . . 18
5.3. Estudio completo de $f(x) = x^3 - 3x - 3$ . . . 20

5.4. Apartado (b) – Gráfica de f 20
5.5. Apartado (c) – Soluciones de $f(x) = 0$ 21

6. Problema 6 – Función derivable en todo $\mathbb{R}$ 22
Enunciado 22
6.1. Marco teórico 22
6.2. Solución 23
6.3. Gráfica de la función 24

7. Problema 7 – Estudio completo de $f(x) = e^x/(x+1)$ 25
Enunciado 25
7.1. 1. Dominio 25
7.2. 2. Simetrías 25
7.3. 3. Asíntotas 25
7.4. 4. Monotonía y extremos 26
7.5. 5. Curvatura y puntos de inflexión 27
7.6. 6. Valores especiales 27
7.7. 7. Tabla resumen 27
7.8. 8. Gráfica 28

8. Problema 8 – Optimización: terreno rectangular 29
Enunciado 29
8.1. Marco teórico 29
8.2. Solución 29
8.3. Gráfica de la función $L(x)$ 31

Conclusiones generales 33

Capítulo 1

Problema 1 – Cálculo de límites

Enunciado

Calcúlense los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x\cdot\operatorname{sen} x} \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{9x}$$

1.1. Marco teórico

Concepto clave

Límite notable:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$$

Este resultado fundamental se demuestra usando la desigualdad geométrica $\cos x < \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$ para $x \in (0, \pi/2)$ y aplicando el Teorema del Emparedado (Squeeze Theorem).

Concepto clave

Expansión de Taylor de $\operatorname{sen} x$ en $x = 0$:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots$$

Los primeros dos términos serán suficientes para el apartado (a).

Concepto clave

Racionalización: Para expresiones con radicales en el numerador o denominador se multiplica y divide por el *conjugado*, aprovechando la identidad

$$(\sqrt{A}-\sqrt{B})(\sqrt{A}+\sqrt{B}) = A - B.$$

1.2. Apartado (a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \cdot \operatorname{sen} x}$$

Análisis previo: forma indeterminada

Sustituyendo $x = 0$ directamente:

$$\frac{0 - \operatorname{sen}(0)}{0 \cdot \operatorname{sen}(0)} = \frac{0}{0}.$$

Estamos ante la indeterminación $\dfrac{0}{0}$, por lo que no podemos evaluar directamente.

Método elegido: equivalentes infinitesimales + álgebra

Usaremos la expansión de Taylor de $\operatorname{sen} x$ y el límite notable $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ para simplificar el denominador.

Paso 1. Reescribir el denominador.

$$x \cdot \operatorname{sen} x$$

Dividimos numerador y denominador por x^2 (válido para $x \neq 0$):

$$\frac{x - \operatorname{sen} x}{x \cdot \operatorname{sen} x} = \frac{\dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^2}}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}$$

Paso 2. Límite del denominador.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Paso 3. Límite del numerador reescrito.
Necesitamos calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^2}$.
Usamos la serie de Taylor:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5).$$

Por tanto:

$$x - \operatorname{sen} x = x - \left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\right) = \frac{x^3}{6} + O(x^5).$$

Dividiendo por x^2:

$$\frac{x - \operatorname{sen} x}{x^2} = \frac{x^3/6 + O(x^5)}{x^2} = \frac{x}{6} + O(x^3).$$

Al tomar el límite $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^2} = 0.$$

Paso 4. Combinación.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \cdot \operatorname{sen} x} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^2}}{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Resultado

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \cdot \operatorname{sen} x} = \boxed{0}$$

Verificación alternativa: L'Hôpital

Aunque el método de Taylor es más elegante, podemos confirmar usando la regla de L'Hôpital. Necesitamos aplicarla varias veces hasta resolver la indeterminación.

Derivamos numerador y denominador respecto a x:

$$\text{Num}: \quad \frac{d}{dx}(x - \operatorname{sen} x) = 1 - \cos x.$$

$$\text{Den}: \quad \frac{d}{dx}(x \operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x + x \cos x.$$

Evaluando en $x = 0$: numerador $= 1 - 1 = 0$, denominador $= 0 + 0 = 0$. Sigue siendo $0/0$.

Segunda aplicación de L'Hôpital:

$$\text{Num}: \quad \frac{d}{dx}(1 - \cos x) = \operatorname{sen} x.$$

$$\text{Den}: \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x + x \cos x) = \cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x = 2\cos x - x \operatorname{sen} x.$$

Evaluando en $x = 0$: numerador $= 0$, denominador $= 2 \cdot 1 - 0 = 2$.

$$\lim = \frac{0}{2} = 0. \quad \checkmark$$

Advertencia / Error común

Un error frecuente es aplicar L'Hôpital sin comprobar primero que se tiene la forma $0/0$ o ∞/∞. Siempre verificar la indeterminación antes de derivar.

1.3. Apartado (b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{9+x} - \sqrt{9-x}}{9x}$$

Análisis previo: forma indeterminada

En $x = 0$:

$$\frac{\sqrt{9+0}-\sqrt{9-0}}{9\cdot 0} = \frac{3-3}{0} = \frac{0}{0}.$$

Nuevamente indeterminación $0/0$.

Método elegido: racionalización

Paso 1. Multiplicar y dividir por el conjugado del numerador.
El conjugado de $\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}$ es $\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}$.

$$\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{9x}\cdot\frac{\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}}{\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}}$$

Paso 2. Simplificar el numerador usando la diferencia de cuadrados.

$$(\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x})(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}) = (9+x)-(9-x) = 2x.$$

Paso 3. Escribir la expresión simplificada.

$$\frac{2x}{9x\left(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}\right)}$$

Para $x \neq 0$ cancelamos el factor x:

$$= \frac{2}{9\left(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}\right)}.$$

Paso 4. Evaluar el límite.
Ahora la expresión es continua en $x = 0$, por lo que podemos sustituir directamente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2}{9\left(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}\right)} = \frac{2}{9\left(\sqrt{9}+\sqrt{9}\right)} = \frac{2}{9\cdot 6} = \frac{2}{54} = \frac{1}{27}.$$

Resultado

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{9x} = \boxed{\frac{1}{27}}$$

1.4. Ilustración gráfica: comportamiento en el origen

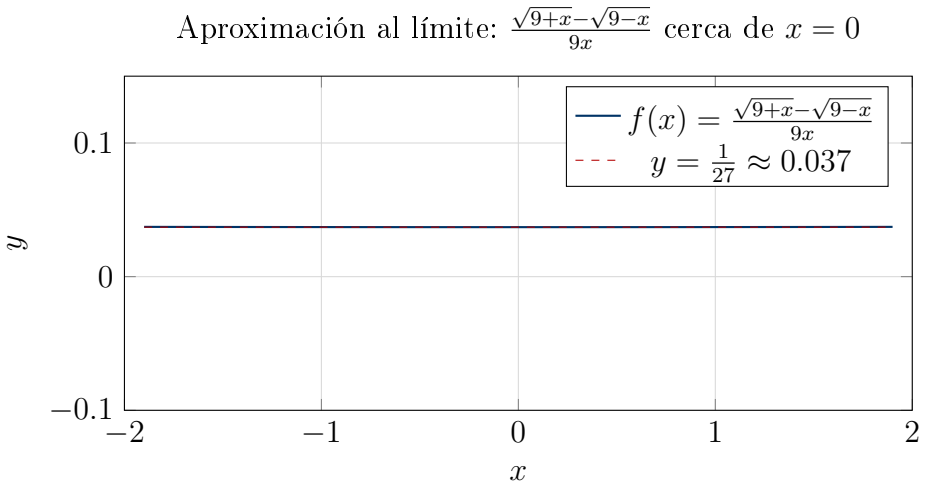


Figura 1.1: La función se aproxima horizontalmente al valor $1/27$ cuando $x \to 0$.

Observación

La racionalización es el método más eficiente para límites con radicales en diferencia. El truco clave es que $(\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B}) = A - B$ elimina los radicales del numerador.

Capítulo 2

Problema 2 – La mancha marina

Enunciado

En el mar hay una mancha producida por una erupción submarina. La superficie afectada, en km^2, viene dada por la función

$$f(t) = \frac{11t + 20}{t + 2}, \quad t \geq 0,$$

siendo t el tiempo transcurrido (en horas, días, etc.) desde que empezamos a observarla.

a) ¿Cuál es la superficie afectada inicialmente?

b) Estudia si la mancha crece o decrece con el tiempo.

c) ¿Tiene algún límite la extensión de la mancha?

2.1. Marco teórico

Concepto clave

Función racional: Cociente de dos polinomios $f(x) = P(x)/Q(x)$ con $Q(x) \neq 0$.

Concepto clave

Derivada del cociente:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Concepto clave

Asíntota horizontal: Si $\lim_{t\to+\infty} f(t) = L$, la recta $y = L$ es asíntota horizontal de f en $+\infty$.

2.2. Apartado (a) – Superficie inicial

La superficie inicial corresponde a $t = 0$ (instante en que comenzamos la observación):

$$f(0) = \frac{11 \cdot 0 + 20}{0 + 2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ km}^2.$$

Resultado

La superficie afectada inicialmente es $\boxed{10 \text{ km}^2}$.

2.3. Apartado (b) – Crecimiento o decrecimiento

Para determinar si f crece o decrece estudiamos el signo de su derivada $f'(t)$.
Paso 1. Calcular $f'(t)$ con la regla del cociente.
Identificamos $u = 11t + 20$ y $v = t + 2$, con $u' = 11$ y $v' = 1$.

$$f'(t) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{11(t+2) - (11t+20) \cdot 1}{(t+2)^2}$$

Paso 2. Simplificar el numerador.

$$11(t+2) - (11t+20) = 11t + 22 - 11t - 20 = 2.$$

Por tanto:

$$f'(t) = \frac{2}{(t+2)^2}.$$

Paso 3. Analizar el signo de $f'(t)$.
Para todo $t \geq 0$:

- El numerador vale $2 > 0$.
- El denominador $(t+2)^2 > 0$ siempre (cuadrado de un número positivo).

Por lo tanto $f'(t) > 0$ para todo $t \geq 0$.

Resultado

La mancha **crece** con el tiempo, ya que $f'(t) = \dfrac{2}{(t+2)^2} > 0$ para todo $t \geq 0$.
No obstante, el crecimiento es *cada vez más lento*: a medida que t aumenta, $f'(t) \to 0$, lo que indica una *desaceleración* del crecimiento.

2.4. Apartado (c) – Límite de la extensión

Calculamos el límite de $f(t)$ cuando $t \to +\infty$:

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{11t + 20}{t + 2}.$$

Paso 1. Dividir numerador y denominador por t (el término de mayor grado).

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{11t+20}{t+2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{11+\dfrac{20}{t}}{1+\dfrac{2}{t}}.$$

Paso 2. Evaluar.

Cuando $t \to +\infty$, los términos $\dfrac{20}{t} \to 0$ y $\dfrac{2}{t} \to 0$.

$$= \frac{11+0}{1+0} = 11.$$

Resultado

La extensión de la mancha tiene como límite superior $\boxed{11 \text{ km}^2}$. La recta $y = 11$ es una **asíntota horizontal**. Biológica y físicamente, esto significa que la mancha no puede crecer indefinidamente: hay un techo natural de 11 km^2.

2.5. Gráfica de la función

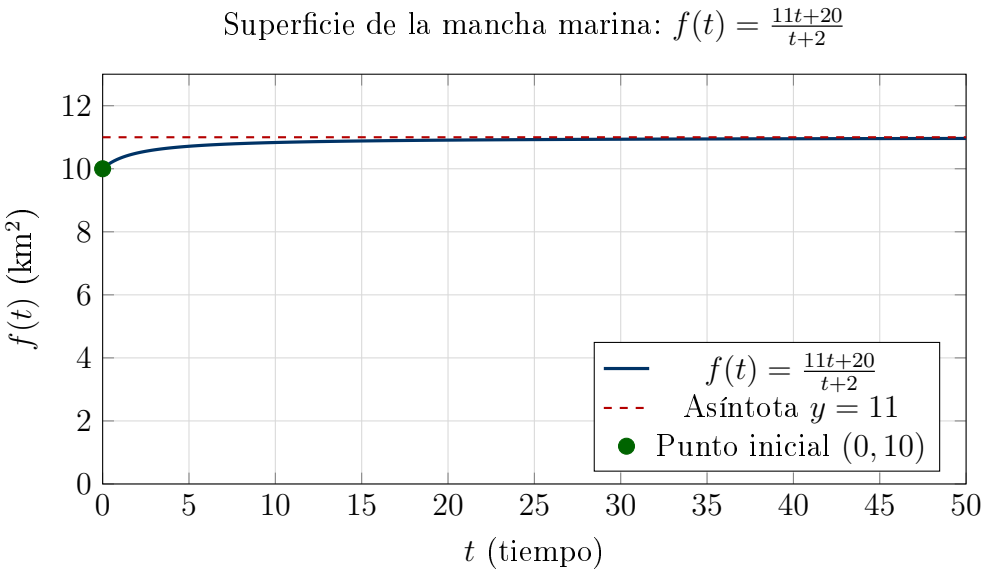


Figura 2.1: La mancha crece desde 10 km^2 acercándose asintóticamente a 11 km^2.

Observación

La diferencia entre el valor inicial (10 km^2) y el límite (11 km^2) es de solo 1 km^2. Esto ilustra que la superficie crece muy poco a lo largo del tiempo, y la mayor parte del crecimiento ocurre en las primeras horas/días.

Capítulo 3

Problema 3 – Beneficio del agricultor

Enunciado

Un agricultor estima que, si vende el kilogramo de cebollas a x céntimos de euro, su beneficio por kilogramo viene dado por:

$$B(x) = -x^2 + 100x - 2475.$$

a) ¿Qué niveles de precios suponen beneficios para el agricultor?

b) ¿Cuál es el precio que maximiza el beneficio?

c) Si dispone de 50 000 kg de cebollas, ¿cuál es el beneficio total?

3.1. Marco teórico

Concepto clave

Función cuadrática: $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$.

- Si $a < 0$, la parábola es cóncava hacia abajo y tiene un **máximo** en $x^* = -\dfrac{b}{2a}$.
- Las raíces se obtienen con la fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

3.2. Apartado (a) – Niveles de precios con beneficio positivo

El agricultor tiene beneficio cuando $B(x) > 0$:

$$-x^2 + 100x - 2475 > 0.$$

Paso 1. Encontrar las raíces de $B(x) = 0$.

$$-x^2 + 100x - 2475 = 0 \iff x^2 - 100x + 2475 = 0 \quad \text{(multiplicamos por } -1\text{)}.$$

Aplicamos la fórmula cuadrática con $a = 1$, $b = -100$, $c = 2475$:

$$x = \frac{100 \pm \sqrt{100^2 - 4 \cdot 2475}}{2} = \frac{100 \pm \sqrt{10000 - 9900}}{2} = \frac{100 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{100 \pm 10}{2}.$$

$$x_1 = \frac{100 - 10}{2} = 45, \qquad x_2 = \frac{100 + 10}{2} = 55.$$

Paso 2. Determinar el signo de $B(x)$.

Como el coeficiente de x^2 en $B(x)$ es $-1 < 0$, la parábola abre hacia abajo. Por tanto $B(x) > 0$ entre las dos raíces:

$$B(x) > 0 \iff 45 < x < 55.$$

Resultado

El agricultor obtiene beneficio positivo por kilogramo cuando el precio está entre $\boxed{45}$ y $\boxed{55}$ céntimos por kilogramo:

$$x \in (45, 55) \text{ céntimos/kg}.$$

3.3. Apartado (b) – Precio que maximiza el beneficio

La función $B(x) = -x^2 + 100x - 2475$ es una parábola cóncava ($a = -1 < 0$), cuyo vértice corresponde al máximo.

Método 1: Vértice de la parábola.

$$x^* = -\frac{b}{2a} = -\frac{100}{2 \cdot (-1)} = -\frac{100}{-2} = 50.$$

Método 2: Derivada (equivalente).

$$B'(x) = -2x + 100.$$

$$B'(x) = 0 \;\Rightarrow\; -2x + 100 = 0 \;\Rightarrow\; x = 50.$$

Como $B''(x) = -2 < 0$, confirmamos que $x = 50$ es un máximo.

Valor máximo del beneficio por kg:

$$B(50) = -(50)^2 + 100 \cdot 50 - 2475 = -2500 + 5000 - 2475 = 25 \text{ céntimos/kg}.$$

Resultado

El precio óptimo es $\boxed{50}$ céntimos/kg, que proporciona un beneficio máximo de $\boxed{25}$ céntimos por kilogramo.

3.4. Apartado (c) – Beneficio total con 50 000 kg

El beneficio por kilogramo al precio óptimo es 25 céntimos. Con 50 000 kg:

$$B_{\text{total}} = 50\,000 \times 25 \text{ céntimos} = 1\,250\,000 \text{ céntimos} = \frac{1\,250\,000}{100} \text{ euros} = 12\,500 \text{ euros}.$$

Resultado

El beneficio total óptimo es $\boxed{12\,500 \text{ euros}}$.

3.5. Gráfica de la función beneficio

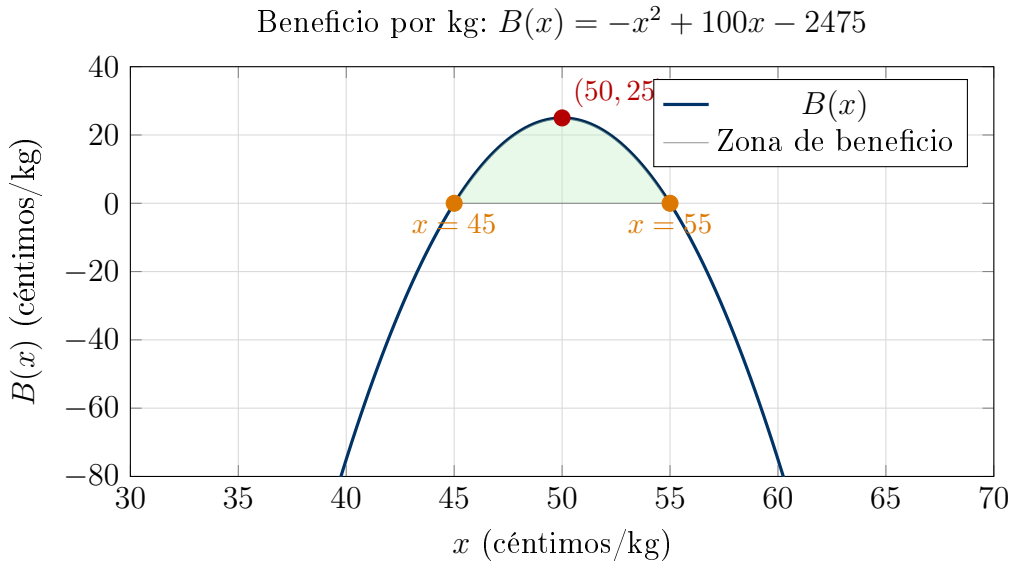


Figura 3.1: Parábola del beneficio. La zona sombreada indica precios con beneficio positivo $(45, 55)$.

Capítulo 4

Problema 4 – Ecuación $2x = \operatorname{sen} x$

Enunciado

a) Demuéstrese que la ecuación $2x = \operatorname{sen} x$ tiene una solución en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) ¿Cuál es la solución? ¿Es única?

4.1. Marco teórico

Teorema 4.1 (Bolzano, 1817). *Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$. Si $g(a)$ y $g(b)$ tienen signos opuestos, es decir $g(a) \cdot g(b) < 0$, entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$.*

Observación

El Teorema de Bolzano es un caso particular del Teorema del Valor Intermedio (TVI). Garantiza la *existencia* de la raíz pero no su *unicidad*. Para unicidad se necesitan argumentos adicionales (monotonía, derivada).

4.2. Apartado (a) – Demostración de existencia

Paso 1. Reformulación.
La ecuación $2x = \operatorname{sen} x$ es equivalente a

$$g(x) := \operatorname{sen} x - 2x = 0.$$

Paso 2. Continuidad de g.
La función $g(x) = \operatorname{sen} x - 2x$ es diferencia de funciones continuas en $\mathbb{R}$ (la función seno es continua y los polinomios son continuos), por tanto g es continua en todo $\mathbb{R}$ y en particular en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Paso 3. Evaluación en los extremos.

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 + \pi \approx -1 + 3.14159 \approx 2.14 > 0.$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2 \cdot \frac{\pi}{2} = 1 - \pi \approx 1 - 3.14159 \approx -2.14 < 0.$$

Paso 4. Aplicación de Bolzano.

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot g\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx (2.14) \cdot (-2.14) < 0.$$

Los signos son opuestos y g es continua en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Por el **Teorema de Bolzano**, existe al menos un $c \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $g(c) = 0$, lo que equivale a $\operatorname{sen} c = 2c$. □

Resultado

Queda demostrada la existencia de al menos una solución de $2x = \operatorname{sen} x$ en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

4.3. Apartado (b) – ¿Cuál es la solución? ¿Es única?

Identificación de la solución.
Por inspección, $x = 0$ es solución:

$$2 \cdot 0 = 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(0) = 0.$$

Por tanto $x = \boxed{0}$ es una solución.

Unicidad: análisis de $g'(x)$.
Estudiamos la monotonía de $g(x) = \operatorname{sen} x - 2x$:

$$g'(x) = \cos x - 2.$$

Dado que $\cos x \leq 1$ para todo x, tenemos:

$$g'(x) = \cos x - 2 \leq 1 - 2 = -1 < 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Por tanto g es **estrictamente decreciente** en todo $\mathbb{R}$. Una función estrictamente monótona puede cortar al eje horizontal en como mucho un punto. Puesto que ya hemos encontrado que $g(0) = 0$, concluimos que $x = 0$ es la **única** solución de la ecuación en $\mathbb{R}$ (y en particular en el intervalo dado).

Resultado

La única solución de $2x = \operatorname{sen} x$ es $\boxed{x = 0}$.
Es única porque $g(x) = \operatorname{sen} x - 2x$ es estrictamente decreciente ($g'(x) < 0$ en todo $\mathbb{R}$), lo que impide que tenga más de un cero.

4.4. Ilustración geométrica

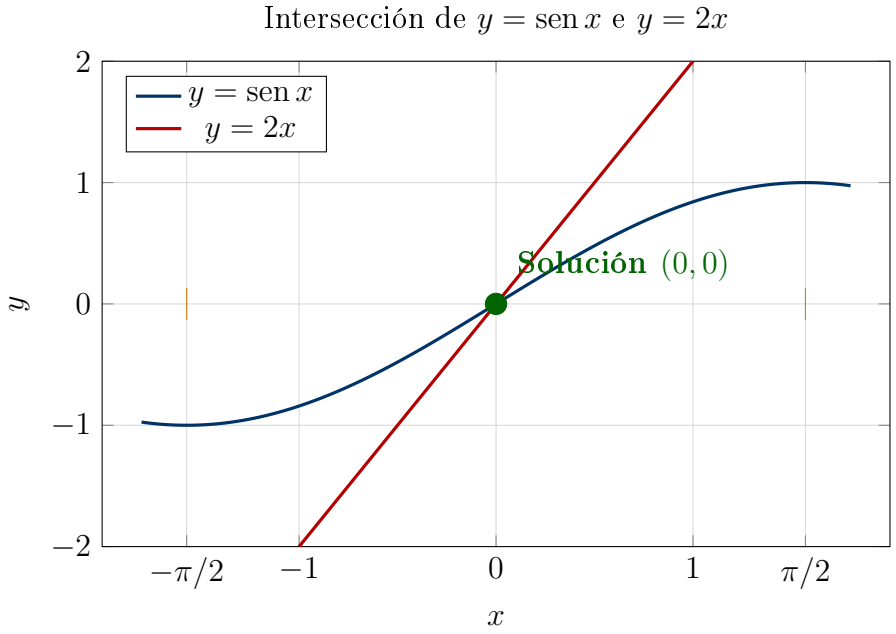


Figura 4.1: Las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ e $y = 2x$ se cortan únicamente en $x = 0$, pues la recta $y = 2x$ es más "empinada" que la curva seno.

Capítulo 5

Problema 5 – Función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c$

Enunciado

Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c$:

a) Calcúlense los parámetros a, b, c para que pase por $(0, -3)$ y tenga un extremo relativo en $(-1, -1)$.

b) Dibuja la gráfica de f.

c) ¿Cuántas soluciones tiene $f(x) = 0$ y en qué intervalos están?

5.1. Marco teórico

Concepto clave

Condición de paso por un punto: Si f pasa por (x_0, y_0), entonces $f(x_0) = y_0$.

Concepto clave

Condición de extremo relativo: Si x_0 es un extremo relativo de f, entonces $f'(x_0) = 0$ (condición necesaria, si f es diferenciable).

Advertencia / Error común

La condición $f'(x_0) = 0$ es *necesaria* pero no suficiente para que x_0 sea extremo. Para garantizarlo hay que comprobar además que $f''(x_0) \neq 0$ (criterio de la segunda derivada) o estudiar el cambio de signo de f'.

5.2. Apartado (a) – Determinación de los parámetros

Dato 1: El punto $(0, -3)$ pertenece a f.

$$f(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + c = c = -3.$$

$$\boxed{c = -3}.$$

Dato 2: Extremo relativo en $(-1, -1)$ implica $f(-1) = -1$.

$$f(-1) = a(-1)^3 + b(-1)^2 - 3(-1) + c = -a + b + 3 + c = -1.$$

Sustituyendo $c = -3$:

$$-a + b + 3 - 3 = -1 \;\Rightarrow\; -a + b = -1. \quad (I)$$

Dato 3: Extremo relativo en $x = -1$ implica $f'(-1) = 0$.
Calculamos $f'(x)$:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 3.$$

$$f'(-1) = 3a(-1)^2 + 2b(-1) - 3 = 3a - 2b - 3 = 0. \quad (II)$$

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -a + b = -1 & (I) \\ 3a - 2b = 3 & (II) \end{cases}$$

De (I): $b = a - 1$.
Sustituyendo en (II):

$$3a - 2(a - 1) = 3 \;\Rightarrow\; 3a - 2a + 2 = 3 \;\Rightarrow\; a = 1.$$

Entonces $b = 1 - 1 = 0$.
Verificación:

- $f(-1) = -1 + 0 + 3 - 3 = -1$. ✓
- $f'(-1) = 3(1)(1) + 2(0)(-1) - 3 = 3 - 3 = 0$. ✓
- $f(0) = -3$. ✓

Resultado

$$\boxed{a = 1, \quad b = 0, \quad c = -3}$$

La función queda determinada como:

$$f(x) = x^3 - 3x - 3.$$

5.3. Estudio completo de $f(x) = x^3 - 3x - 3$

Derivadas:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1).$$

$$f''(x) = 6x.$$

Puntos críticos ($f'(x) = 0$):

$$3(x-1)(x+1) = 0 \;\Rightarrow\; x = -1 \;\text{ o }\; x = 1.$$

Clasificación:

- $f''(-1) = 6(-1) = -6 < 0 \Rightarrow$ **máximo relativo** en $x = -1$. Valor: $f(-1) = -1 - 3(-1) - 3 = -1 + 3 - 3 = -1$.
- $f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow$ **mínimo relativo** en $x = 1$. Valor: $f(1) = 1 - 3 - 3 = -5$.

Tabla de variación:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	**Máx.** -1	$\searrow$	**Mín.** -5	$\nearrow$

5.4. Apartado (b) – Gráfica de f

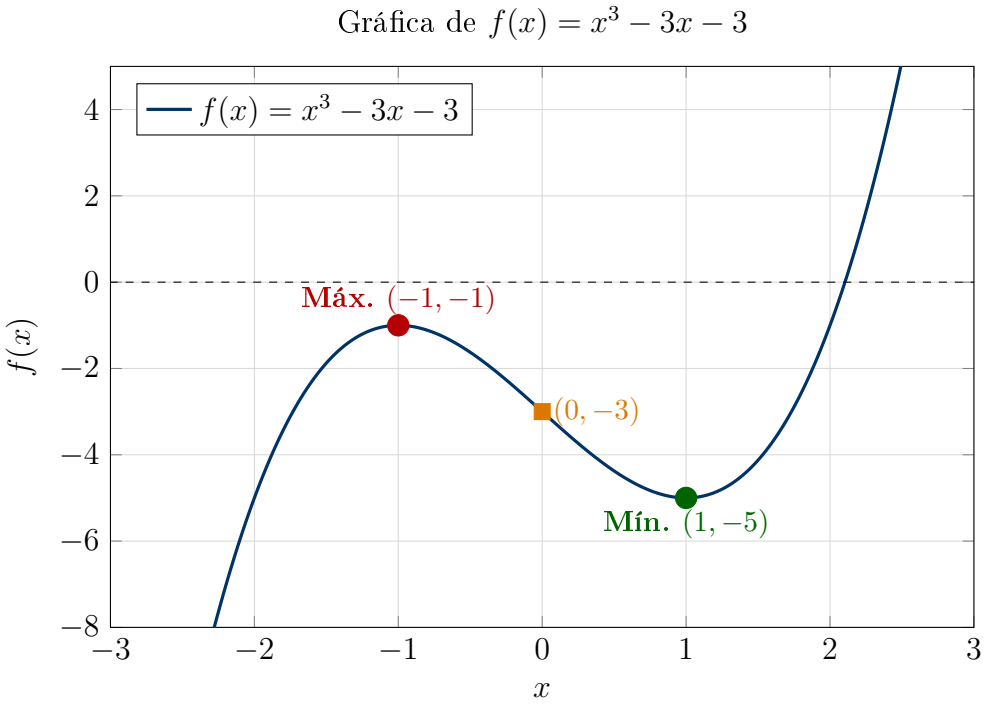


Figura 5.1: La cúbica $f(x) = x^3 - 3x - 3$ con su máximo en $(-1, -1)$ y mínimo en $(1, -5)$.

5.5. Apartado (c) – Soluciones de $f(x) = 0$

Buscamos cuántos ceros tiene $f(x) = x^3 - 3x - 3$.
Análisis cualitativo.

- $f \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$ y $f \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$ (cúbica con coeficiente positivo).
- Máximo relativo: $f(-1) = -1 < 0$.
- Mínimo relativo: $f(1) = -5 < 0$.

Como **ambos extremos relativos tienen valor negativo**, la función sube desde $-\infty$, alcanza el máximo $-1 < 0$, baja hasta $-5 < 0$ y luego sube a $+\infty$. Esto implica que la curva solo cruza el eje x una vez, en la rama creciente final.
Localización del cero.
Evaluamos en algunos puntos:

$$f(2) = 8 - 6 - 3 = -1 < 0.$$

$$f(3) = 27 - 9 - 3 = 15 > 0.$$

Por el Teorema de Bolzano aplicado a $[2, 3]$: $f(2) < 0$ y $f(3) > 0 \Rightarrow$ existe una raíz en $(2, 3)$.
Afinar: bisección.
$f(2.5) = 15.625 - 7.5 - 3 = 5.125 > 0 \Rightarrow$ raíz en $(2, 2.5)$.
$f(2.1) = 9.261 - 6.3 - 3 = -0.039 < 0 \Rightarrow$ raíz en $(2.1, 2.5)$.
La raíz está muy cerca de $x \approx 2.10$.

Resultado

La ecuación $f(x) = 0$ tiene **exactamente una solución real**, localizada en el intervalo $\boxed{(2, 3)}$ (más precisamente, cerca de $x \approx 2.1$).
Esto se debe a que los dos extremos relativos son negativos, por lo que la función solo cruza el eje x en la zona de crecimiento final.

Capítulo 6

Problema 6 – Función derivable en todo $\mathbb{R}$

Enunciado

Hállense los valores de los parámetros a, b para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - bx - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

sea derivable en todo $\mathbb{R}$.

6.1. Marco teórico

Concepto clave

Derivabilidad implica continuidad: Si f es derivable en x_0, entonces f es continua en x_0.

Concepto clave

Derivabilidad en un punto: f es derivable en x_0 si y solo si existe el límite

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

lo cual es equivalente (para funciones a trozos) a que los límites laterales de la derivada coincidan:

$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x).$$

Advertencia / Error común

Para una función definida a trozos, la derivabilidad en el punto de empalme requiere **dos** condiciones simultáneas:

1. Continuidad en el empalme.
2. Igualdad de las derivadas laterales.

No es suficiente con solo una de ellas.

6.2. Solución

La única zona problemática es $x = 0$ (punto de empalme). Para $x < 0$, la función $a/(x-1)$ es derivable (racional con denominador no nulo para $x < 0$, pues $x - 1 < -1$). Para $x > 0$, el polinomio $x^2 - bx - 1$ es derivable.

Condición 1: Continuidad en $x = 0$

Límite por la izquierda:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{a}{x-1} = \frac{a}{0-1} = -a.$$

Valor de f en $x = 0$ (rama derecha, pues $0 \geq 0$):

$$f(0) = 0^2 - b \cdot 0 - 1 = -1.$$

Para que f sea continua en $x = 0$:

$$-a = -1 \;\Rightarrow\; \boxed{a = 1}.$$

Condición 2: Igualdad de derivadas en $x = 0$

Derivada de la rama izquierda:

$$f'(x) = \left(\frac{a}{x-1}\right)' = \frac{-a}{(x-1)^2}.$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \frac{-a}{(0-1)^2} = \frac{-1}{1} = -1.$$

(Usando $a = 1$.)

Derivada de la rama derecha:

$$f'(x) = 2x - b.$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 2 \cdot 0 - b = -b.$$

Para que la derivada sea continua en $x = 0$ (condición de derivabilidad):

$$-b = -1 \;\Rightarrow\; \boxed{b = 1}.$$

Verificación

Con $a = 1$ y $b = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- $f(0^-) = -1$, $f(0) = -1$. Continua. ✓
- $f'(0^-) = -1$, $f'(0^+) = -1$. Derivable. ✓

Resultado

$$\boxed{a = 1, \quad b = 1.}$$

6.3. Gráfica de la función

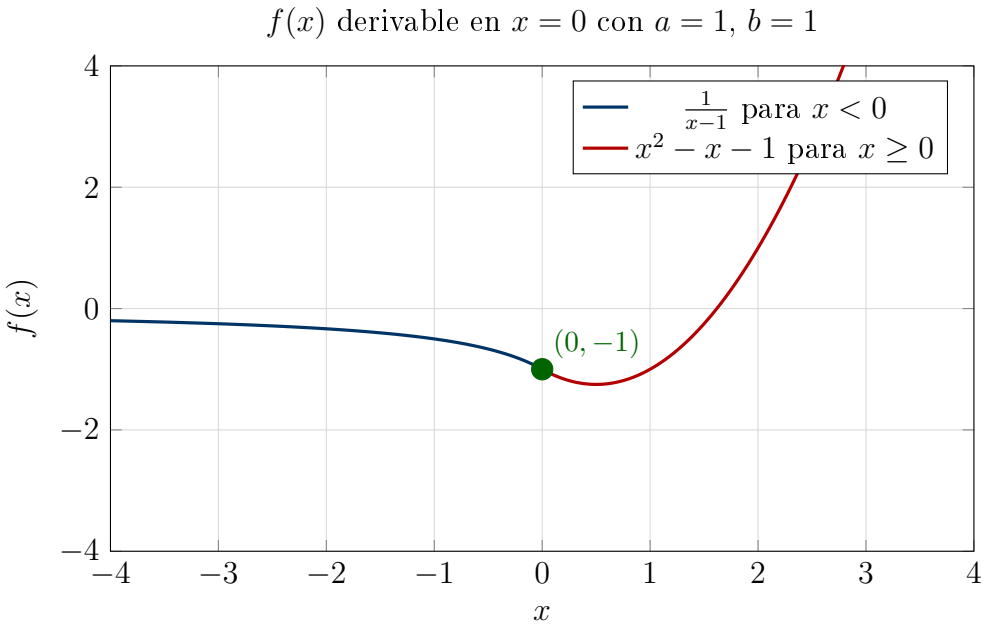


Figura 6.1: Función a trozos derivable en $x = 0$: las dos ramas se unen suavemente.

Capítulo 7

Problema 7 – Estudio completo de $f(x) = e^x/(x+1)$

Enunciado

Realiza el estudio completo y la gráfica de la función:

$$f(x) = \frac{e^x}{x+1}.$$

7.1. 1. Dominio

f es el cociente de e^x (definida en $\mathbb{R}$) y $(x+1)$ (anulada en $x=-1$). Por tanto:

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty).$$

7.2. 2. Simetrías

Paridad:

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{-x+1}.$$

Esto no coincide ni con $f(x)$ ni con $-f(x)$ en general, por lo que f no es par ni impar. **No tiene simetría**.

7.3. 3. Asíntotas

3.1 Asíntota vertical

La única candidata es $x=-1$.

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{e^x}{x+1}: \quad e^{-1} > 0,\ (x+1) \to 0^+ \ \Rightarrow\ +\infty.$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{e^x}{x+1}: \quad e^{-1} > 0,\ (x+1) \to 0^- \ \Rightarrow\ -\infty.$$

La recta $x=-1$ es asíntota vertical.

3.2 Asíntota horizontal

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x+1}=+\infty \quad \text{(crece más rápido que cualquier polinomio).}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x+1}: \quad e^x\to 0,\ (x+1)\to-\infty \ \Rightarrow\ \frac{0}{-\infty}=0.$$

La recta $y=0$ es asíntota horizontal en $-\infty$.

3.3 Asíntota oblicua en $+\infty$

Como el límite en $+\infty$ es $+\infty$, comprobamos si hay asíntota oblicua:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x(x+1)}=+\infty.$$

No hay asíntota oblicua en $+\infty$ (la función crece más rápido que cualquier recta).

7.4. 4. Monotonía y extremos

Derivada (regla del cociente):

$$f'(x)=\frac{e^x(x+1)-e^x\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{e^x(x+1-1)}{(x+1)^2}=\frac{x\,e^x}{(x+1)^2}.$$

Signo de $f'(x)$:

- $e^x>0$ siempre.
- $(x+1)^2>0$ para $x\neq -1$.
- El signo de $f'(x)$ depende únicamente de x.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$\operatorname{sgn}(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	n.d.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	mín.	$\nearrow$

Mínimo relativo en $x=0$:

$$f(0)=\frac{e^0}{0+1}=1.$$

Resultado

Mínimo relativo (y absoluto en la rama derecha): $(0,1)$. No hay máximo relativo.

7.5. 5. Curvatura y puntos de inflexión

Segunda derivada:

$$f'(x) = \frac{x\,e^x}{(x+1)^2}.$$

Aplicamos la regla del cociente a f':

$$f''(x) = \frac{[e^x + x\,e^x](x+1)^2 - x\,e^x \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}.$$

Simplificamos:

$$= \frac{e^x(1+x)(x+1)^2 - 2x\,e^x(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{e^x(x+1)\,[(1+x)(x+1) - 2x]}{(x+1)^4}.$$

$$= \frac{e^x\,[(x+1)^2 - 2x]}{(x+1)^3} = \frac{e^x(x^2+2x+1-2x)}{(x+1)^3} = \frac{e^x(x^2+1)}{(x+1)^3}.$$

Signo de $f''(x)$:

- $e^x > 0$ y $x^2 + 1 > 0$ siempre.
- El signo depende de $(x+1)^3$:
  - Si $x > -1$: $(x+1)^3 > 0 \Rightarrow f'' > 0$ (cóncava hacia arriba).
  - Si $x < -1$: $(x+1)^3 < 0 \Rightarrow f'' < 0$ (cóncava hacia abajo).

No hay puntos de inflexión en el dominio (el cambio de concavidad ocurre en $x = -1$, que no pertenece al dominio).

7.6. 6. Valores especiales

- $f(0) = 1$ (corte con el eje y).
- La función nunca vale cero: $e^x \neq 0$, por lo que no hay cortes con el eje x.

7.7. 7. Tabla resumen

Característica	Resultado
Dominio	$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$
A. vertical	$x = -1$
A. horizontal	$y = 0$ (en $-\infty$)
A. oblicua	No existe
Mínimo relativo	$(0, 1)$
Máximo relativo	No existe
Creciente	$(0, +\infty)$
Decreciente	$(-\infty, -1)$ y $(-1, 0)$
Cóncava $\cup$	$x > -1$
Cóncava $\cap$	$x < -1$
Puntos inflexión	No (el cambio está en $x = -1 \notin$ Dom)

7.8. 8. Gráfica

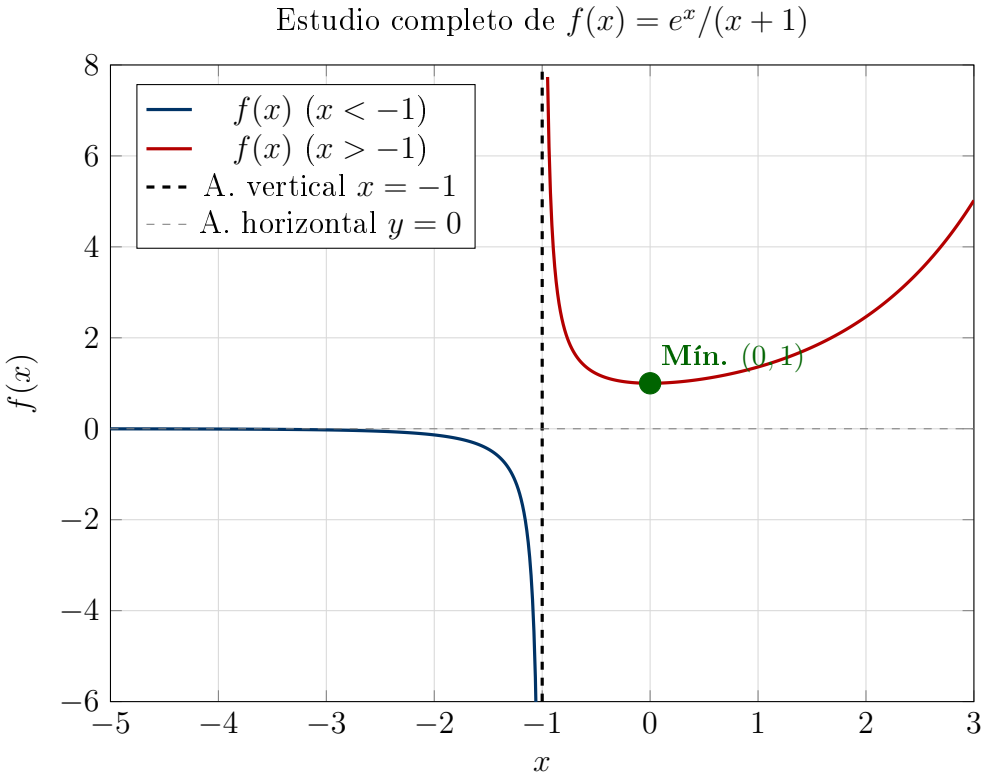


Figura 7.1: Gráfica completa de $f(x) = e^x/(x+1)$: asíntota vertical en $x = -1$, asíntota horizontal $y = 0$ y mínimo en $(0, 1)$.

Capítulo 8

Problema 8 – Optimización: terreno rectangular

Enunciado

Un granjero desea vallar un terreno rectangular de pasto adyacente a un río. El pastizal debe tener 180 000 m^2. El lado que da al río no necesita valla. ¿Qué dimensiones minimizan la cantidad de valla empleada?

8.1. Marco teórico

Concepto clave

Problema de optimización:

1. Identificar la función objetivo (a minimizar o maximizar).
2. Identificar las restricciones (relaciones entre variables).
3. Expresar la función objetivo en una sola variable.
4. Calcular derivada, igualar a cero y clasificar el punto crítico.

8.2. Solución

Definición de variables

- x: longitud de cada uno de los lados *perpendiculares* al río (dos lados).
- y: longitud del lado *paralelo* al río (el que no necesita valla).

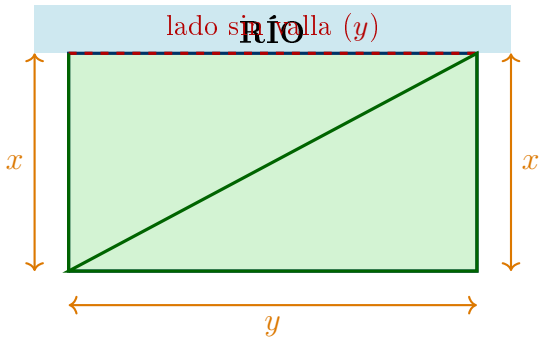


Figura 8.1: Esquema del terreno: dos lados de longitud x y el lado inferior y forman la valla (3 lados). El lado superior (junto al río) no se valla.

Función objetivo

La longitud total de valla (3 lados: 2 de longitud x y 1 de longitud y):

$$L = 2x + y. \quad \text{(Minimizar)}$$

Restricción

El área del rectángulo debe ser $180\,000$ m^2:

$$x \cdot y = 180\,000.$$

Expresión en una variable

De la restricción despejamos y:

$$y = \frac{180\,000}{x}.$$

Sustituimos en L:

$$L(x) = 2x + \frac{180\,000}{x}, \quad x > 0.$$

Minimización

Paso 1. Derivar.

$$L'(x) = 2 - \frac{180\,000}{x^2}.$$

Paso 2. Igualar a cero.

$$2 - \frac{180\,000}{x^2} = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{180\,000}{2} = 90\,000 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{90\,000} = 300 \text{ m}.$$

(Tomamos la raíz positiva porque $x > 0$.)

Paso 3. Verificar que es mínimo.

$$L''(x) = \frac{2 \cdot 180\,000}{x^3} = \frac{360\,000}{x^3}.$$

Para $x = 300$: $L''(300) = \dfrac{360\,000}{300^3} = \dfrac{360\,000}{27\,000\,000} > 0$.
Como $L'' > 0$, el punto $x = 300$ es un **mínimo**. ✓

Paso 4. Calcular y.

$$y = \frac{180\,000}{300} = 600 \text{ m}.$$

Paso 5. Longitud mínima de valla.

$$L_{\text{mín}} = 2(300) + 600 = 600 + 600 = 1\,200 \text{ m}.$$

Resultado

Las dimensiones óptimas son:

$$\boxed{x = 300 \text{ m}, \quad y = 600 \text{ m}.}$$

La longitud mínima de valla necesaria es $\boxed{1\,200 \text{ m}}$.
Nótese que el lado paralelo al río ($y = 600$ m) es exactamente el doble de cada lado perpendicular ($x = 300$ m). Este resultado es general para este tipo de problema: la solución óptima siempre satisface $y = 2x$.

8.3. Gráfica de la función $L(x)$

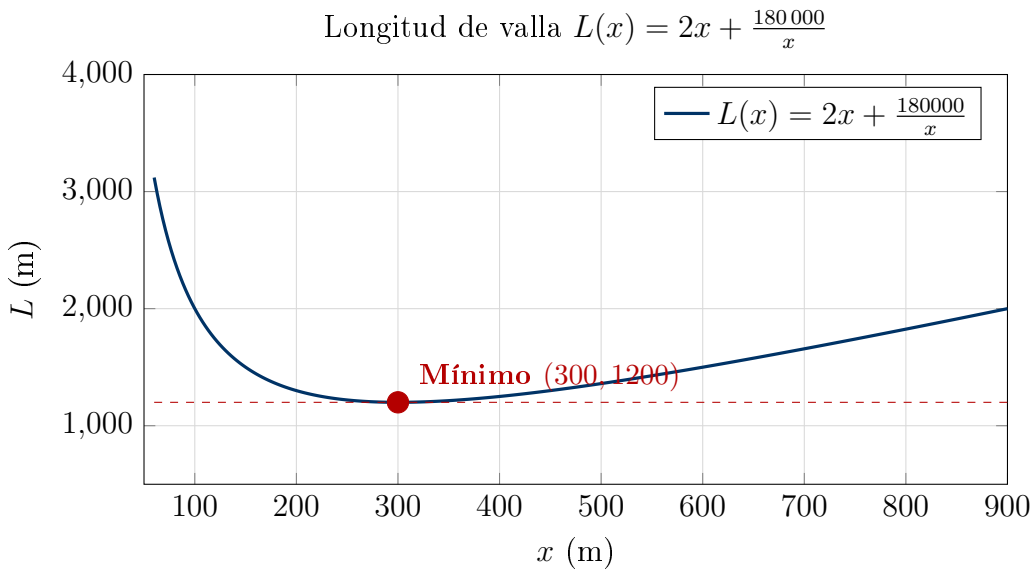


Figura 8.2: La longitud de valla tiene un mínimo absoluto en $x = 300$ m con $L = 1\,200$ m.

Observación

Regla general del vallado: En un rectángulo con un lado libre (adyacente a un obstáculo natural), la solución óptima que minimiza el perímetro vallado para una área fija siempre cumple $y = 2x$, es decir, el lado libre es el doble de los lados perpendiculares. Esto se puede demostrar de forma general.

Conclusiones generales

Este examen cubre los grandes bloques de Matemáticas II de 2.º de Bachillerato:

1. **Límites** (Problema 1): indeterminaciones 0/0 resueltas con equivalentes infinitesimales, series de Taylor y racionalización.
2. **Análisis de funciones reales** (Problemas 2, 5, 7): derivación, monotonía, extremos, asíntotas y representación gráfica.
3. **Aplicación a economía** (Problema 3): optimización de una función cuadrática y análisis de beneficios.
4. **Teorema de Bolzano** (Problema 4): existencia y unicidad de ceros de funciones continuas.
5. **Parámetros en funciones** (Problemas 5 y 6): determinación de constantes mediante condiciones algebraicas y de derivabilidad.
6. **Optimización geométrica** (Problema 8): minimización de longitud con restricción de área.

Resultado

Resumen de resultados:

Prob.	**Resultado clave**	**Método**
1a	$\lim = 0$	Taylor / L'Hôpital
1b	$\lim = \frac{1}{27}$	Racionalización
2a	$f(0) = 10$ km^2	Evaluación directa
2b	Crece ($f' > 0$)	Derivada
2c	Límite 11 km^2	Asíntota horizontal
3a	$x \in (45, 55)$ c/kg	Parábola
3b	$x = 50$ c/kg	Vértice / derivada
3c	12 500 €	Multiplicación
4a	Existe raíz	Bolzano
4b	$x = 0$ única	Monot. de g'
5a	$a = 1, b = 0, c = -3$	Sistema lineal
5c	1 raíz en $(2, 3)$	Bolzano + análisis
6	$a = 1, b = 1$	Continuidad + derivada
7	A.v.: $x = -1$; mín.: $(0, 1)$	Estudio completo
8	$x = 300$ m, $y = 600$ m	Optimización

Junta de Castilla y León
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA

EXAMEN 2º BACH

MATEMÁTICAS II 16-01-2025

ies Tovar Antonio Centro bilingüe

Nº1.- Calcúlense los siguientes integrales:

$$a)\int x\cdot e^{3x}dx \qquad b)\int \frac{x-2}{x^4}dx$$

$$c)\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx \qquad d)\int cosx\cdot tgx\,dx$$

Nº2.- Dada la integral:

$$\int \frac{cosx}{sen^3x}dx$$

a) Calcúlese dicha integral haciendo el cambio de variable: $t = senx$

b) Calcúlese dicha integral haciendo el cambio de variable: $t = \tan x$

c) ¿Se obtiene el mismo resultado? Justifica la respuesta.

Nº3.- De la función $f(x)$ se sabe que $f(1) = \frac{1}{2}$ y que su derivada es la función: $f'(x) = x\cdot lnx$ Encontrar la expresión de $f(x)$

Nº4.- a) Calcúlese el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones:

$$f(x) = x^2 + 2 \text{ y } g(x) = x + 2$$

b) Calcúlese el área del recinto limitado por la función $f(x) = \ln(x)$ entre $x = 1$ y $x = e$

Nº5.- Calcúlense las siguientes integrales definidas:

$$a)\int_0^{ln2} e^{2x}dx \qquad b)\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{4+4x^2}dx$$

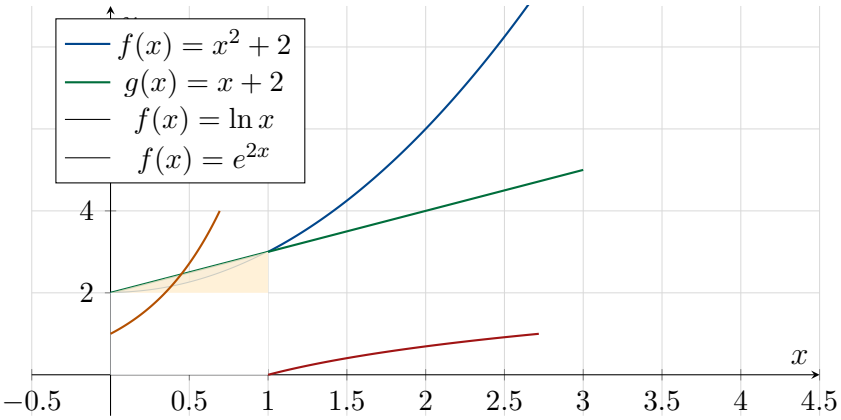
$$c)\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-x^2}\right)dx \qquad d)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot cosx\,dx$$

(Criterios de Evaluación: 1.1, 1.2, 3.1, 3.2, 4.1, 5.2, 6.2, 7.1, 8.2, 9.1, 9.2, 9.3)

SUERTE JÓVENES

SOLUCIONES COMPLETAS EXAMEN DE INTEGRALES

2.º Bachillerato — Matemáticas II



Fecha del examen: 16 de enero de 2025

Nivel: 2.º Bachillerato — Opción A

Asignatura: Matemáticas II

Contenido: Cálculo Integral — Técnicas y Aplicaciones

"El cálculo es la ciencia más poderosa de los cambios"

— Leibniz

Este documento contiene la resolución exhaustiva, paso a paso, de todos los ejercicios del examen. Cada paso está justificado matemáticamente. Generado con rigor académico para uso didáctico.

Índice general

Introducción y Formulario de Referencia **3**

1. Ejercicio N.º 1: Cálculo de Integrales Indefinidas **5**

Ejercicio N.º 1 — Integrales Indefinidas **5**

1.1. Apartado a) $\int x \cdot e^{3x}\,dx$ 5

1.2. Apartado b) $\int \frac{x-2}{x^4}\,dx$ 8

1.3. Apartado c) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ 10

1.4. Apartado d) $\int \cos x \cdot \operatorname{tg} x\,dx$ 12

2. Ejercicio N.º 2: Integral con Cambios de Variable **13**

Ejercicio N.º 2 — Cambios de Variable **13**

2.1. Apartado a) Cambio de variable $t = \operatorname{sen} x$ 13

2.2. Apartado b) Cambio de variable $t = \tan x$ 14

2.3. Apartado c) ¿Son iguales los resultados? Justificación 15

3. Ejercicio N.º 3: Determinación de $f(x)$ a partir de su derivada **17**

Ejercicio N.º 3 — Reconstruir f(x) desde f'(x) **17**

4. Ejercicio N.º 4: Áreas entre Curvas **20**

Ejercicio N.º 4 — Áreas entre Curvas **20**

4.1. Apartado a) Área entre $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = x + 2$ 20

4.2. Apartado b) Área bajo $f(x) = \ln x$ entre $x = 1$ y $x = e$ 22

5. Ejercicio N.º 5: Integrales Definidas **24**

Ejercicio N.º 5 — Integrales Definidas **24**

5.1. Apartado a) $\int_0^{\ln 2} e^{2x}\,dx$ 24

5.2. Apartado b) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{4+4x^2}\,dx$ 25

5.3. Apartado c) $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{1-x^2}\,dx$ 26

5.4. Apartado d) $\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx$ 28

Resumen de Resultados **30**

Introducción y Formulario de Referencia

Conceptos fundamentales de la integral

Antes de resolver los ejercicios, recordemos las definiciones y fórmulas esenciales que se utilizarán a lo largo de todo el documento.

La integral indefinida

Definición: Primitiva e Integral Indefinida

Una función $F(x)$ se denomina **primitiva** (o antiderivada) de $f(x)$ en un intervalo I si:

$$F'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in I$$

La **integral indefinida** de $f(x)$ es el conjunto de todas sus primitivas:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

donde C es la constante de integración.

Integrales inmediatas fundamentales

Función	Integral
$\int x^n\,dx$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C, \quad n\neq -1$
$\int \dfrac{1}{x}\,dx$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\int e^x\,dx$	$e^x + C$
$\int e^{ax}\,dx$	$\dfrac{e^{ax}}{a}+C$
$\int \operatorname{sen} x\,dx$	$-\cos x + C$
$\int \cos x\,dx$	$\operatorname{sen} x + C$
$\int \operatorname{tg} x\,dx$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx$	$\operatorname{arc\,tg} x + C$
$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$\operatorname{arc\,sen} x + C$
$\int \dfrac{1}{a^2+x^2}\,dx$	$\dfrac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{x}{a}\right)+C$
$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx$	$\ln\lvert f(x)\rvert + C$
$\int \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\,dx$	$\sqrt{f(x)}+C$

Técnicas de integración

1. **Integración por partes:**

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

   Regla mnemotécnica **LIATE** para elegir u: Logarítmica, Inversa trigonométrica, Algebraica (polinomios), Trigonométrica, Exponencial.

2. **Cambio de variable (sustitución):** Si $x=\varphi(t)$, entonces $dx=\varphi'(t)\,dt$ y:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

3. **Descomposición en fracciones simples:** Para integrales de funciones racionales.

4. **Identidades trigonométricas:**

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$$

Capítulo 1

Ejercicio N.º 1: Cálculo de Integrales Indefinidas

Ejercicio N.º 1 — Enunciado

Calcúlense los siguientes integrales:

$$a)\ \int x \cdot e^{3x}\,dx \qquad b)\ \int \frac{x-2}{x^4}\,dx \qquad c)\ \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \qquad d)\ \int \cos x \cdot \operatorname{tg} x\,dx$$

1.1 Apartado a) $\int x \cdot e^{3x}\,dx$

Análisis previo — Identificación del método

El integrando es el **producto de una función algebraica** (x, un polinomio de grado 1) por una **función exponencial** (e^{3x}). La técnica adecuada es la **integración por partes**, ya que ninguna de las dos funciones es la derivada de la otra.

Recordatorio: Integración por partes

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$$

Elección según la regla LIATE: Se elige como u la función que sea más fácil de derivar y que se "simplifique" al derivar. Se elige como dv la parte que sea más fácil de integrar.

Solución

Elección de las partes:
Aplicamos la regla **LIATE**: x es algebraica (polinomial) y e^{3x} es exponencial. Escogemos:

$$u = x \qquad \Rightarrow \qquad du = dx$$

$$dv = e^{3x}\,dx \qquad \Rightarrow \qquad v = \int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3}$$

Justificación del cálculo de v:
Para integrar e^{3x}, aplicamos la fórmula $\int e^{ax}\,dx = \dfrac{e^{ax}}{a} + C$ con $a = 3$:

$$v = \int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3}$$

Aplicación de la fórmula de integración por partes:

$$\int x \cdot e^{3x}\,dx = u \cdot v - \int v\,du = x \cdot \frac{e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3}\,dx$$

Simplificación y cálculo de la nueva integral:

$$= \frac{x\,e^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx$$

La nueva integral $\int e^{3x}\,dx$ ya es inmediata:

$$\int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3}$$

Por lo tanto:

$$= \frac{x\,e^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{e^{3x}}{3} = \frac{x\,e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9}$$

Factor común:
Podemos sacar factor común $\dfrac{e^{3x}}{9}$:

$$= \frac{e^{3x}}{9}(3x - 1)$$

Resultado final

$$\boxed{\int x \cdot e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{9}(3x-1) + C}$$

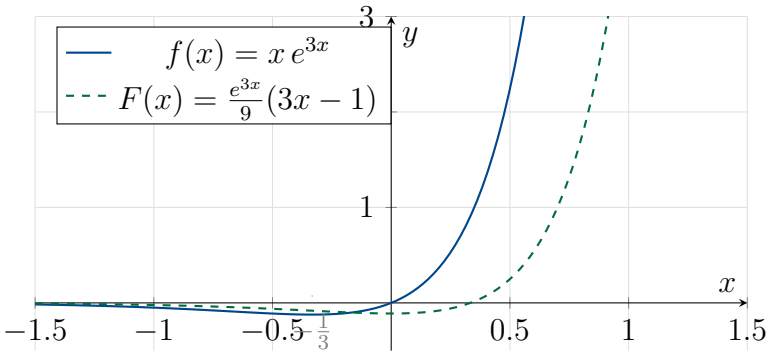
Advertencia — Error frecuente

Un error muy frecuente es olvidar que al derivar e^{3x} aparece el factor 3 por la regla de la cadena. Esto hace que $\int e^{3x}\,dx = \dfrac{e^{3x}}{3}$, **no** e^{3x}. Otro error es confundir qué es u y qué es dv: si tomásemos $u = e^{3x}$ y $dv = x\,dx$, obtendríamos $v = x^2/2$ y la integral resultante $\int \frac{x^2}{2} \cdot 3e^{3x}\,dx$ sería más complicada que la original.

Verificación: Derivemos el resultado para comprobar:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{e^{3x}}{9}(3x-1)+C\right] = \frac{3e^{3x}}{9}(3x-1)+\frac{e^{3x}}{9}\cdot 3 = e^{3x}\cdot\frac{3x-1}{3}+\frac{e^{3x}}{3} = e^{3x}\left(\frac{3x-1+1}{3}\right) = x\,e^{3x}\checkmark$$

Integrando $x\,e^{3x}$ y su primitiva $\frac{e^{3x}}{9}(3x-1)$



Observación geométrica: El cero de $f(x) = x\,e^{3x}$ está en $x = 0$. La primitiva $F(x)$ tiene un mínimo en $x = -1/3$ (donde $F'(x) = f(x) = 0$).

1.2 Apartado b) $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^4}\,dx$

Análisis previo — Identificación del método

El integrando es una **función racional**. Antes de aplicar técnicas complejas, conviene **separar la fracción** y convertir cada término en una potencia de x, lo que nos permite aplicar la regla de integración de potencias directamente.

Solución

Paso 1: Separación de la fracción en dos términos.

$$\frac{x-2}{x^4} = \frac{x}{x^4} - \frac{2}{x^4} = x^{1-4} - 2x^{-4} = x^{-3} - 2x^{-4}$$

Paso 2: Integración de cada potencia por separado.

Aplicamos la fórmula $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ para $n \neq -1$:

$$\int \left(x^{-3} - 2x^{-4}\right)\,dx = \int x^{-3}\,dx - 2\int x^{-4}\,dx$$

Primera integral:

$$\int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2}$$

Segunda integral:

$$2\int x^{-4}\,dx = 2 \cdot \frac{x^{-4+1}}{-4+1} = 2 \cdot \frac{x^{-3}}{-3} = -\frac{2}{3x^3}$$

Paso 3: Resultado final (recordando cambiar el signo de la segunda parte).

$$\int \left(x^{-3} - 2x^{-4}\right)\,dx = -\frac{1}{2x^2} - \left(-\frac{2}{3x^3}\right) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3x^3}$$

Resultado final

$$\boxed{\int \frac{x-2}{x^4}\,dx = -\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3x^3} + C}$$

Advertencia — Error frecuente

El error más frecuente aquí es aplicar la fórmula de la potencia con el exponente incorrecto, olvidando restar 1: $\int x^{-3}\,dx \neq \dfrac{x^{-3}}{-3}$. El exponente aumenta en 1: $-3+1 = -2$.

Otro error es dividir la fracción incorrectamente: $\dfrac{x-2}{x^4} \neq \dfrac{x}{x^4-2}$.

Verificación derivando el resultado:

$$\frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{2x^2}+\frac{2}{3x^3}+C\right]=-\frac{1}{2}\cdot(-2)x^{-3}+\frac{2}{3}\cdot(-3)x^{-4}=x^{-3}-2x^{-4}=\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^4}=\frac{x-2}{x^4}\checkmark$$

1.3 Apartado c) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

Análisis previo — Identificación del método

El integrando tiene la forma $\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ si $f(x)=1+x^2$, ya que $f'(x)=2x$. Por tanto, es una **integral por cambio de variable** o equivalentemente una **integral inmediata** del tipo $\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

Vamos a resolverlo mediante **cambio de variable** para ser rigurosos.

Solución

Método: Cambio de variable.

Sea $t=1+x^2$.

Derivando respecto a x:

$$\frac{dt}{dx}=2x \quad\Rightarrow\quad dt=2x\,dx \quad\Rightarrow\quad x\,dx=\frac{dt}{2}$$

Sustitución en la integral:

Sustituimos $1+x^2=t$ y $x\,dx=\dfrac{dt}{2}$:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\int \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int t^{-1/2}\,dt$$

Integración de la potencia:

$$\frac{1}{2}\int t^{-1/2}\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-1/2+1}}{-1/2+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{1/2}}{1/2}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t}=\sqrt{t}$$

Deshacemos el cambio de variable (reemplazamos $t=1+x^2$):

$$\sqrt{t}=\sqrt{1+x^2}$$

Resultado final

$$\boxed{\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\sqrt{1+x^2}+C}$$

Observación

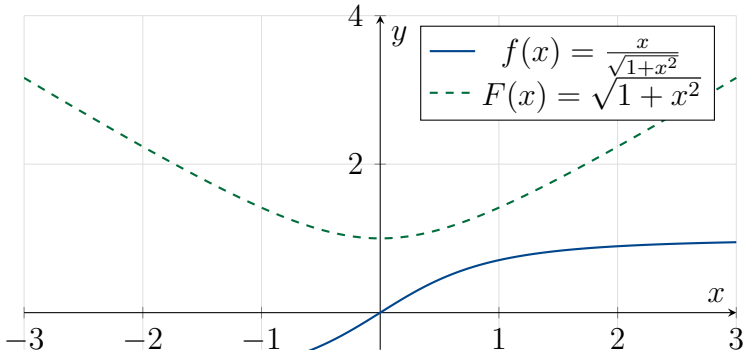
Podíamos haberlo visto directamente como integral inmediata: si $F(x)=\sqrt{f(x)}$, entonces $F'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$. Aquí $f(x)=1+x^2$, $f'(x)=2x$, y el integrando es

exactamente $\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Por eso, la primitiva es $\sqrt{1+x^2}$.

Verificación:

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt{1+x^2}+C\right] = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\checkmark$$

Integrando $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ y su primitiva $\sqrt{1+x^2}$



1.4 Apartado d) $\int \cos x \cdot \operatorname{tg} x \, dx$

Análisis previo — Identificación del método

Aunque el integrando puede parecer complejo, el truco es **simplificar usando la definición de la tangente** antes de integrar.

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Solución

Paso 1: Simplificación del integrando.

$$\cos x \cdot \operatorname{tg} x = \cos x \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{sen} x$$

(siempre que $\cos x \neq 0$, es decir, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$)

Paso 2: La integral se reduce a una integral inmediata.

$$\int \cos x \cdot \operatorname{tg} x \, dx = \int \operatorname{sen} x \, dx$$

Paso 3: Integración inmediata.

Aplicamos la fórmula $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$:

$$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$$

Resultado final

$$\boxed{\int \cos x \cdot \operatorname{tg} x \, dx = -\cos x + C}$$

Advertencia — Error frecuente

El error más frecuente es intentar aplicar integración por partes directamente sin simplificar. La simplificación previa transforma un problema aparentemente difícil en una integral elemental.

Verificación:

$$\frac{d}{dx}[-\cos x + C] = \operatorname{sen} x = \cos x \cdot \operatorname{tg} x \checkmark$$

Capítulo 2

Ejercicio N.º 2: Integral con Cambios de Variable

Ejercicio N.º 2 — Enunciado

Dada la integral:

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\, dx$$

a) Calcúlese dicha integral haciendo el cambio de variable $t = \operatorname{sen} x$.

b) Calcúlese dicha integral haciendo el cambio de variable $t = \tan x$.

c) ¿Se obtiene el mismo resultado? Justifica la respuesta.

2.1 Apartado a) Cambio de variable $t = \operatorname{sen} x$

Solución

Definición del cambio:

Sea $t = \operatorname{sen} x$.

Derivando respecto a x:

$$\frac{dt}{dx} = \cos x \quad \Rightarrow \quad dt = \cos x\, dx$$

Sustitución en la integral:

Observamos que el numerador $\cos x\, dx = dt$ y el denominador $\operatorname{sen}^3 x = t^3$:

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\, dx = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3}\, dt$$

Integración de la potencia:

Aplicamos $\int t^n\, dt = \dfrac{t^{n+1}}{n+1} + C$ con $n = -3$:

$$\int t^{-3}\, dt = \frac{t^{-3+1}}{-3+1} = \frac{t^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2t^2}$$

Deshacemos el cambio de variable (sustituimos $t = \operatorname{sen} x$):

$$-\frac{1}{2t^2} = -\frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{1}{2}\csc^2 x$$

Resultado final

$$\boxed{\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx \overset{t=\operatorname{sen} x}{=} -\frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x} + C_1}$$

2.2 Apartado b) Cambio de variable $t = \tan x$

Solución

Definición del cambio:
Sea $t = \tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.
Derivando respecto a x:

$$\frac{dt}{dx} = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + t^2$$

Por tanto:

$$dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad dx = \cos^2 x\,dt$$

Expresión del integrando en términos de t:
Necesitamos expresar $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ en función de $t = \tan x$.
De la identidad trigonométrica $1 + \tan^2 x = \sec^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

De $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$:

$$\operatorname{sen} x = \tan x \cdot \cos x = t \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

Por lo tanto:

$$\operatorname{sen}^3 x = \frac{t^3}{(1+t^2)^{3/2}}$$

Y el diferencial:

$$\cos x\,dx = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \cos^2 x\,dt = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{dt}{(1+t^2)^{3/2}}$$

Sustitución:

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx = \int \frac{1}{\operatorname{sen}^3 x} \cdot \cos x\,dx = \int \frac{(1+t^2)^{3/2}}{t^3} \cdot \frac{dt}{(1+t^2)^{3/2}} = \int \frac{dt}{t^3}$$

Obtenemos la misma integral en t:

$$\int t^{-3}\,dt = -\frac{1}{2t^2} + C$$

Deshacemos el cambio $t = \tan x$:

$$-\frac{1}{2\tan^2 x} + C = -\frac{\cos^2 x}{2\,\mathrm{sen}^2 x} + C$$

Resultado final

$$\boxed{\int \frac{\cos x}{\mathrm{sen}^3 x}\,dx \overset{t=\tan x}{=} -\frac{\cos^2 x}{2\,\mathrm{sen}^2 x} + C_2}$$

2.3 Apartado c) ¿Son iguales los resultados? Justificación

Solución

A primera vista, los dos resultados parecen distintos:

- **Método a):** $-\dfrac{1}{2\,\mathrm{sen}^2 x} + C_1$
- **Método b):** $-\dfrac{\cos^2 x}{2\,\mathrm{sen}^2 x} + C_2$

Demostración de que difieren en una constante:
Calculemos la diferencia entre ambas expresiones:

$$\left(-\frac{1}{2\,\mathrm{sen}^2 x}\right) - \left(-\frac{\cos^2 x}{2\,\mathrm{sen}^2 x}\right) = -\frac{1}{2\,\mathrm{sen}^2 x} + \frac{\cos^2 x}{2\,\mathrm{sen}^2 x} = \frac{\cos^2 x - 1}{2\,\mathrm{sen}^2 x}$$

Usando la identidad pitagórica $\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x - 1 = -\mathrm{sen}^2 x$:

$$= \frac{-\mathrm{sen}^2 x}{2\,\mathrm{sen}^2 x} = -\frac{1}{2}$$

Conclusión: La diferencia entre ambas primitivas es la constante $-\dfrac{1}{2}$, es decir:

$$-\frac{1}{2\,\mathrm{sen}^2 x} = -\frac{\cos^2 x}{2\,\mathrm{sen}^2 x} + \frac{1}{2}$$

Si tomamos $C_1 = C_2 + \dfrac{1}{2}$, ambos resultados son **la misma familia de primitivas**. Esto es correcto, ya que la integral indefinida está determinada salvo una constante aditiva, y dos primitivas de la misma función **siempre difieren en una constante**.

Conclusión del Ejercicio 2

Sí, se obtiene el mismo resultado. Ambos métodos producen primitivas de $\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}$, que difieren únicamente en una constante ($-\dfrac{1}{2}$). Este fenómeno es **completamente normal** en integración: distintas técnicas pueden dar expresiones formalmente diferentes que, sin embargo, representan la misma familia de funciones.

Capítulo 3

Ejercicio N.º 3: Determinación de $f(x)$ a partir de su derivada

Ejercicio N.º 3 — Enunciado

De la función $f(x)$ se sabe que $f(1) = \dfrac{1}{2}$ y que su derivada es:

$$f'(x) = x \cdot \ln x$$

Encontrar la expresión de $f(x)$.

Solución

Planteamiento:
Si $f'(x) = x \ln x$, entonces $f(x)$ es una primitiva de $x \ln x$:

$$f(x) = \int x \ln x \, dx$$

La condición $f(1) = \dfrac{1}{2}$ nos permitirá determinar la constante de integración C.

Cálculo de la integral mediante integración por partes:
El integrando es producto de una función **logarítmica** $(\ln x)$ y una **algebraica** (x). Según la regla LIATE, tomamos el logaritmo como u:

$$u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x}\,dx$$

$$dv = x\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$$

Aplicamos la fórmula $\int u\,dv = uv - \int v\,du$:

$$\int x \ln x \, dx = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x}{2}\,dx$$

La nueva integral es inmediata:

$$\int \frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{4}$$

Por tanto:

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

Determinación de la constante C:
Imponemos la condición inicial $f(1) = \frac{1}{2}$:

$$f(1) = \frac{1^2 \cdot \ln 1}{2} - \frac{1^2}{4} + C = \frac{1 \cdot 0}{2} - \frac{1}{4} + C = -\frac{1}{4} + C$$

Igualamos a $\frac{1}{2}$:

$$-\frac{1}{4} + C = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Expresión final de $f(x)$:

$$f(x) = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{4}$$

Resultado final

$$\boxed{f(x) = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{4}}$$

Verificación:
Derivamos para comprobar que $f'(x) = x \ln x$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{x^2 \ln x}{2}\right] - \frac{d}{dx}\left[\frac{x^2}{4}\right]$$

Para el primer término, producto de x^2 y $\ln x$:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2 \ln x}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}(2x \ln x + x) = x \ln x + \frac{x}{2}$$

Para el segundo término:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2}{4}\right] = \frac{2x}{4} = \frac{x}{2}$$

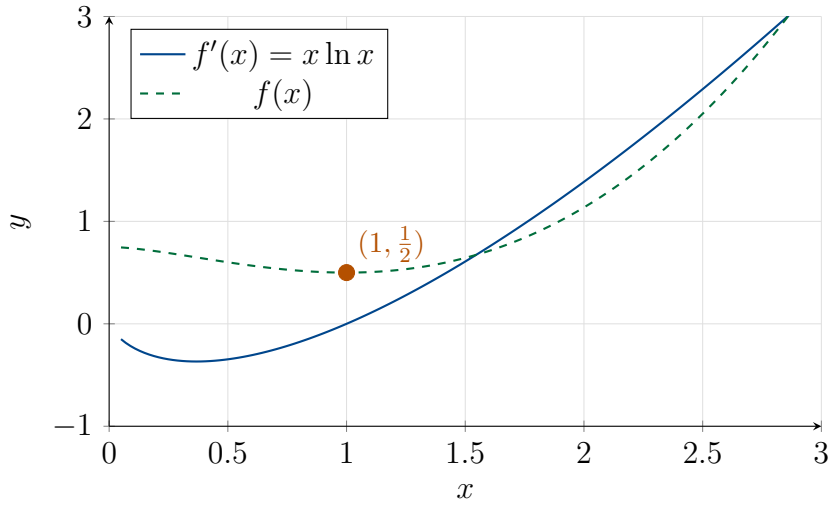
Restando:

$$f'(x) = x \ln x + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = x \ln x \checkmark$$

Comprobamos la condición inicial:

$$f(1) = \frac{1 \cdot \ln 1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 0 - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \checkmark$$

$f'(x) = x \ln x$ y $f(x) = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{4}$



Capítulo 4

Ejercicio N.º 4: Áreas entre Curvas

Ejercicio N.º 4 — Enunciado

a) Calcúlese el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones:

$$f(x) = x^2 + 2 \quad \text{y} \quad g(x) = x + 2$$

b) Calcúlese el área del recinto limitado por la función $f(x) = \ln(x)$ entre $x = 1$ y $x = e$.

4.1 Apartado a) Área entre $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = x + 2$

Paso 1: Encontrar los puntos de intersección

Igualamos $f(x) = g(x)$:

$$x^2 + 2 = x + 2$$
$$x^2 - x = 0$$
$$x(x - 1) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = 1$$

Los puntos de intersección son $(0, g(0)) = (0, 2)$ y $(1, g(1)) = (1, 3)$.

Paso 2: Determinar cuál función es mayor en el intervalo

Para $x \in (0, 1)$, tomemos por ejemplo $x = 0{,}5$:

$$f(0{,}5) = 0{,}25 + 2 = 2{,}25 \qquad g(0{,}5) = 0{,}5 + 2 = 2{,}5$$

Como $g(0{,}5) > f(0{,}5)$, la función superior en $[0, 1]$ es $g(x) = x + 2$.

Paso 3: Fórmula del área

$$A = \int_0^1 [g(x) - f(x)]\,dx = \int_0^1 [(x+2) - (x^2+2)]\,dx = \int_0^1 (x - x^2)\,dx$$

Solución

Cálculo de la integral:

$$\int_0^1 (x - x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

Evaluación en los límites:

En $x = 1$:

$$\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

En $x = 0$:

$$\frac{0}{2} - \frac{0}{3} = 0$$

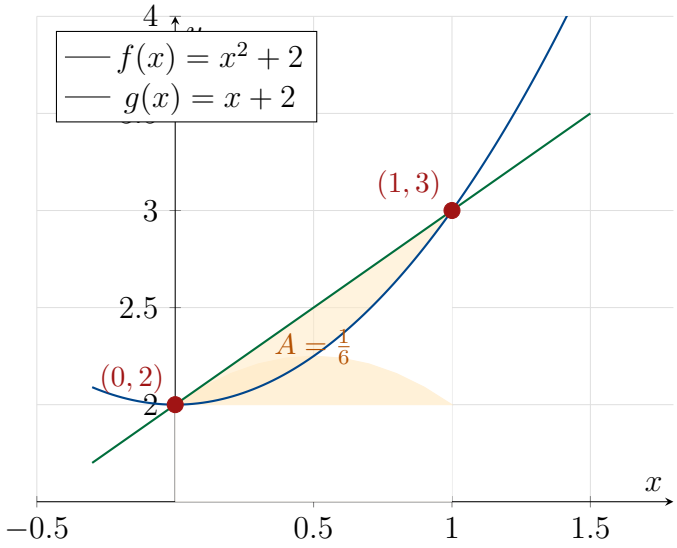
Área:

$$A = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$$

Resultado final

$$\boxed{A = \frac{1}{6} \text{ unidades cuadradas}}$$

Área entre $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = x + 2$



4.2 Apartado b) Área bajo $f(x) = \ln x$ entre $x = 1$ y $x = e$

Análisis previo

Debemos calcular el área del recinto comprendido entre $f(x) = \ln x$, el eje OX $(y = 0)$ y las rectas verticales $x = 1$ y $x = e$.

Verificamos el signo de $\ln x$ en $[1, e]$:

- En $x = 1$: $\ln 1 = 0$
- En $x = e$: $\ln e = 1 > 0$
- Para $x \in (1, e)$: $\ln x > 0$

Por tanto, $\ln x \geq 0$ en todo $[1, e]$ y el área es:

$$A = \int_1^e \ln x \, dx$$

Cálculo de $\int \ln x \, dx$ — Integración por partes

Esta integral es un caso clásico de integración por partes. Tomamos:

$$u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x$$

Aplicamos la fórmula:

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C$$

Solución

Evaluación de la integral definida:

$$A = \int_1^e \ln x \, dx = \Big[x \ln x - x \Big]_1^e$$

En $x = e$:

$$e \cdot \ln e - e = e \cdot 1 - e = e - e = 0$$

En $x = 1$:

$$1 \cdot \ln 1 - 1 = 0 - 1 = -1$$

Área:

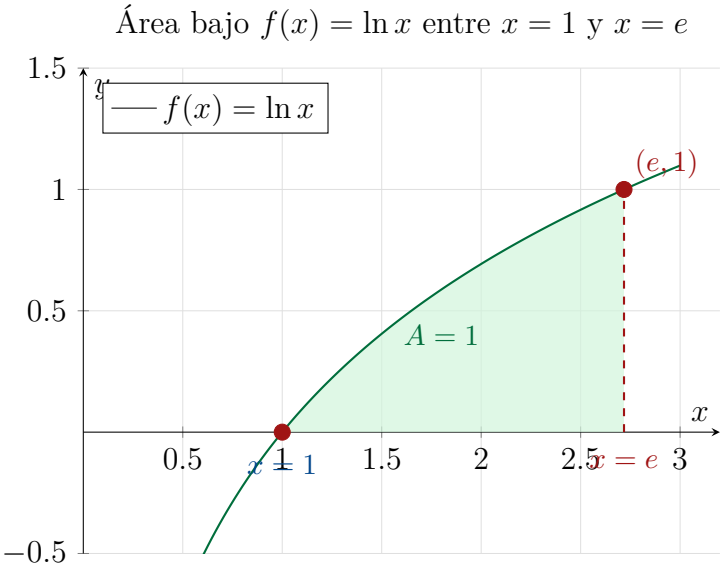
$$A = 0 - (-1) = 1$$

Resultado final

$$\boxed{A = 1 \text{ unidad cuadrada}}$$

Observación

Es un resultado elegante: el área bajo la curva $\ln x$ entre $x = 1$ y $x = e$ es exactamente 1. Esto puede interpretarse como que el rectángulo de base $e - 1$ y altura media $\bar{y} = \dfrac{1}{e-1}$ tiene la misma área.



Capítulo 5

Ejercicio N.º 5: Integrales Definidas

Ejercicio N.º 5 — Enunciado

Calcúlense las siguientes integrales definidas:

$$a)\ \int_0^{\ln 2} e^{2x}\,dx \qquad b)\ \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{4+4x^2}\,dx$$

$$c)\ \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{1-x^2}\,dx \qquad d)\ \int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$$

Teorema Fundamental del Cálculo (Regla de Barrow)

Si F es una primitiva de f continua en $[a,b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b$$

5.1 Apartado a) $\int_0^{\ln 2} e^{2x}\,dx$

Solución

Cálculo de la primitiva:

Aplicamos $\int e^{ax}\,dx = \dfrac{e^{ax}}{a} + C$ con $a = 2$:

$$F(x) = \frac{e^{2x}}{2}$$

Aplicación de la Regla de Barrow:

$$\int_0^{\ln 2} e^{2x}\,dx = \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^{\ln 2}$$

En $x = \ln 2$:

$$\frac{e^{2\ln 2}}{2} = \frac{e^{\ln 4}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

(hemos usado que $e^{2\ln 2} = e^{\ln(2^2)} = e^{\ln 4} = 4$)
En $x = 0$:

$$\frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$$

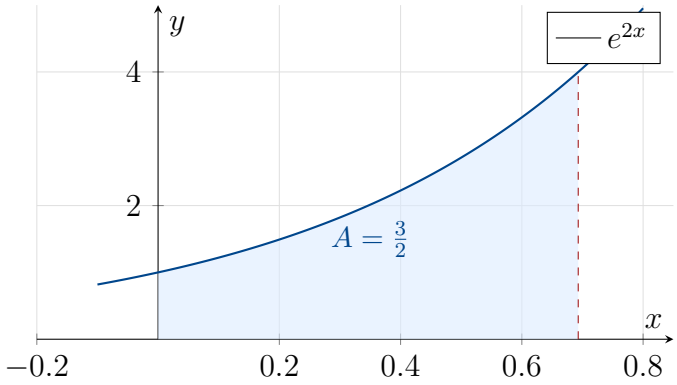
Resultado:

$$\int_0^{\ln 2} e^{2x}\,dx = 2 - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Resultado final

$$\boxed{\int_0^{\ln 2} e^{2x}\,dx = \frac{3}{2}}$$

Área de $\int_0^{\ln 2} e^{2x}\,dx = \frac{3}{2}$



5.2 Apartado b) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{4+4x^2}\,dx$

Solución

Simplificación del integrando:
Sacamos factor común en el denominador:

$$\frac{1}{4+4x^2} = \frac{1}{4(1+x^2)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

Aplicamos la fórmula: $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} x + C$

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{4+4x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{4}\Big[\operatorname{arc\,tg} x\Big]_0^{\sqrt{3}}$$

Evaluación:
En $x = \sqrt{3}$:

$$\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

(ya que $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$)
En $x = 0$:

$$\operatorname{arc\,tg}(0) = 0$$

Resultado:

$$\frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{3} - 0\right] = \frac{\pi}{12}$$

Resultado final

$$\boxed{\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{4+4x^2}\,dx = \frac{\pi}{12}}$$

Observación

Valores clave del arco tangente que conviene memorizar:

$$\operatorname{arc\,tg}(0) = 0, \quad \operatorname{arc\,tg}(1) = \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}, \quad \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

Advertencia — Error frecuente

Una variante de este tipo de integral utiliza la fórmula más general:

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Aquí $4 + 4x^2 = 4(1 + x^2)$, por lo que conviene sacar el 4 antes de aplicar ninguna fórmula.

5.3 Apartado c) $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{1-x^2}\,dx$

Análisis previo — Descomposición en fracciones parciales

El integrando $\frac{1}{1-x^2}$ tiene el denominador $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$, que se factoriza. Aplicamos **descomposición en fracciones simples**.

Solución

Paso 1: Descomposición en fracciones parciales.

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}$$

Multiplicamos ambos lados por $(1 - x)(1 + x)$:

$$1 = A(1+x) + B(1-x)$$

Para encontrar A: hacemos $x = 1$:

$$1 = A(1+1) + B(0) = 2A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}$$

Para encontrar B: hacemos $x = -1$:

$$1 = A(0) + B(1-(-1)) = 2B \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{2}$$

Por tanto:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$$

Paso 2: Primitiva de cada fracción.

$$\int \frac{1}{1+x}\,dx = \ln|1+x|$$

$$\int \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln|1-x|$$

(El signo negativo viene de que la derivada de $1-x$ es -1.)

Paso 3: Primitiva de la función completa.

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\Big(-\ln|1-x| + \ln|1+x|\Big) + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

Paso 4: Evaluación de la integral definida en $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{1-x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right]_{-1/2}^{1/2}$$

En $x = \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\right| = \frac{1}{2}\ln 3$$

En $x = -\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\right| = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\ln 3$$

Resultado:

$$\frac{1}{2}\ln 3 - \left(-\frac{1}{2}\ln 3\right) = \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{2}\ln 3 = \ln 3$$

Resultado final

$$\boxed{\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{1-x^2}\,dx = \ln 3}$$

Observación

Nótese que el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ está completamente contenido en $(-1, 1)$, donde $1 - x^2 > 0$ y la función es continua. Los puntos problemáticos ($x = \pm 1$) están fuera del intervalo de integración.
También se puede usar la fórmula directa:

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C \quad \text{(o bien: } \operatorname{artanh}(x) + C\text{)}$$

5.4 Apartado d) $\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx$

Análisis previo

El integrando es un **producto de función algebraica** (x) por **función trigonométrica** $(\cos x)$. Aplicamos **integración por partes**.

Solución

Elección de las partes (regla LIATE — algebraica antes que trigonométrica):

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$
$$dv = \cos x \, dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x$$

Aplicación de la fórmula de integración por partes:

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx = \Big[x \operatorname{sen} x \Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx$$

Evaluación de $\Big[x \operatorname{sen} x \Big]_0^{\pi/2}$:

En $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2}$$

En $x = 0$:

$$0 \cdot \operatorname{sen}(0) = 0 \cdot 0 = 0$$

Luego:

$$\Big[x \operatorname{sen} x \Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Cálculo de $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx$:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx = \Big[-\cos x \Big]_0^{\pi/2} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos 0) = -0 + 1 = 1$$

Resultado final:

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx = \frac{\pi}{2} - 1$$

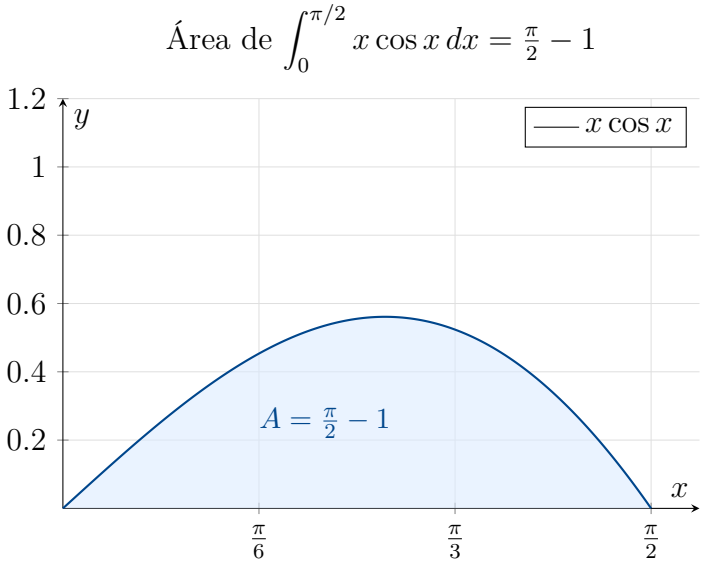
Resultado final

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0{,}5708}$$

Advertencia — Error frecuente

Un error habitual es olvidar el signo al integrar $\operatorname{sen} x$: la primitiva de $\operatorname{sen} x$ es $-\cos x$, **no** $\cos x$.

Verificación dimensional: $x\cos x$ en $[0, \pi/2]$ toma valores entre 0 y ≈ 0, con máximo intermedio. El área debería ser un número positivo pequeño. $\dfrac{\pi}{2} - 1 \approx 0{,}57 > 0$ ✓.



Resumen de Resultados

Tabla Resumen — Todos los resultados del examen

Ejercicio	Integral	Resultado
1a	$\int x\, e^{3x}\, dx$	$\frac{e^{3x}}{9}(3x-1)+C$
1b	$\int \frac{x-2}{x^4}\, dx$	$-\frac{1}{2x^2}+\frac{2}{3x^3}+C$
1c	$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$	$\sqrt{1+x^2}+C$
1d	$\int \cos x \cdot \operatorname{tg} x\, dx$	$-\cos x + C$
2a	$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\, dx$, $t=\operatorname{sen} x$	$-\frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x}+C$
2b	$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\, dx$, $t=\operatorname{tg} x$	$-\frac{\cos^2 x}{2\operatorname{sen}^2 x}+C$
3	$f'(x)=x\ln x$, $f(1)=\frac{1}{2}$	$f(x)=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}+\frac{3}{4}$
4a	Área entre x^2+2 y $x+2$	$\frac{1}{6}$ u.c.
4b	Área bajo $\ln x$, $x\in[1,e]$	1 u.c.
5a	$\int_0^{\ln 2} e^{2x}\, dx$	$\frac{3}{2}$
5b	$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{4+4x^2}\, dx$	$\frac{\pi}{12}$
5c	$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{1-x^2}\, dx$	$\ln 3$
5d	$\int_0^{\pi/2} x\cos x\, dx$	$\frac{\pi}{2}-1$

Técnicas utilizadas en este examen

1. **Integración por partes** (Ejs. 1a, 3, 5d y cálculo de $\int \ln x \, dx$)
2. **Descomposición algebraica** (Ej. 1b, 1d, 5b)
3. **Cambio de variable / sustitución** (Ejs. 1c, 2a, 2b)
4. **Integrales inmediatas** (todas)
5. **Fracciones parciales** (Ej. 5c)
6. **Regla de Barrow** (Ej. 5 completo)
7. **Cálculo de áreas** (Ej. 4a y 4b)

Junta de Castilla y León
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA

MATEMÁTICAS. ÁLGEBRA

5 -03-2025 EXAMEN 2º BACH C/D

Nº1.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & k \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Estúdiese su rango en función de los valores del parámetro k
b) Para k = 2 ¿la matriz A tiene inversa? En caso afirmativo, calcúlese la matriz inversa
c) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Resuélvase la siguiente ecuación matricial:

$$A \cdot X + B = C$$

Nº2.- Calcúlense los siguientes determinantes:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \qquad b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad c) \begin{vmatrix} 2x+1 & x & 1 \\ 3x+2 & x & 2 \\ 4x+3 & x & 3 \end{vmatrix}$$

Nº3.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rl} x + y + az & = 4 \\ 2x + y & = 3 \\ 2x + 2y + 2z & = 6 \end{array}\right\}$$

a) Clasifica el sistema en función de los valores del parámetro a
b) Resuelve el sistema para a= 2

Nº4.- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el método de Gauss

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = -1 \\ 6x + 2y + 4z = 2 \end{array}\right\}$$

SUERTE JÓVENES

MATEMÁTICAS

ÁLGEBRA LINEAL

2º Bachillerato C/D

Resolución exhaustiva con rigor matemático

Cada paso justificado · Notación formal · Material de estudio

Fecha del examen: 5 de marzo de 2025
Centro: IES Tovar
Comunidad: Junta de Castilla y León

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

$$\det(\mathbf{A}) = \Sigma_{j=1}^{n}\, a_{ij} \cdot C_{ij}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \mathrm{Adj}(\mathbf{A})^{T}$$

Teorema de Rouché-Frobenius · Método de Gauss

Documento generado por **SuperAgent – CREAO Platform**
Soluciones preparadas con rigor universitario para alumnos de bachillerato

Índice general

Prefacio **2**

1. Ejercicio Nº 1 – Matrices **3**
1.1. Marco teórico previo 3
1.2. Apartado a) – Rango de $\mathbf{A}$ en función de k 4
1.3. Apartado b) – Inversa de $\mathbf{A}$ para $k = 2$ 5
1.4. Apartado c) – Ecuación matricial $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$ 7

2. Ejercicio Nº 2 – Determinantes **10**
2.1. Marco teórico – Definición y propiedades del determinante 10
2.2. Apartado a) – Determinante de orden 2 11
2.3. Apartado b) – Determinante de orden 3 (Regla de Sarrus) 11
2.4. Apartado c) – Determinante con parámetro x 12

3. Ejercicio Nº 3 – Clasificación de sistemas lineales **15**
3.1. Marco teórico – Teorema de Rouché-Frobenius 15
3.2. Apartado a) – Clasificación según a 15
3.3. Apartado b) – Resolución para $a = 2$ 17

4. Ejercicio Nº 4 – Método de Gauss **20**
4.1. Marco teórico – Método de Gauss (Eliminación Gaussiana) 20
4.2. Resolución por eliminación gaussiana 20

Apéndice – Resumen de fórmulas y teoremas clave **24**

Prefacio

Este documento contiene la resolución **completamente detallada** de todos los ejercicios del examen de *Matemáticas – Álgebra Lineal* correspondiente a **2º de Bachillerato (grupos C/D)**, celebrado el 5 de marzo de 2025 en el IES Tovar (Junta de Castilla y León).

Objetivos pedagógicos de este documento:

- Proporcionar un modelo de resolución rigurosa para que el alumno comprenda *el porqué* de cada paso, no solo el resultado.
- Mostrar las definiciones y teoremas que sustentan cada técnica algebraica.
- Señalar los errores más frecuentes que cometen los alumnos en examen.
- Fomentar la autonomía del estudiante ofreciendo explicaciones completas que permitan trabajar sin necesidad de acudir a otra fuente.

Temas del examen:

1. Matrices: rango, existencia de inversa, cálculo de la inversa y ecuaciones matriciales.
2. Determinantes de orden 2 y 3 (incluida la dependencia de un parámetro).
3. Clasificación de sistemas lineales mediante el Teorema de Rouché-Frobenius.
4. Resolución de sistemas por el Método de Gauss (eliminación gaussiana).

Observación importante

Todos los resultados de este documento han sido verificados algebraicamente. Cuando existan varias vías de resolución, se indica el método elegido y su justificación.

Capítulo 1

Ejercicio Nº 1 – Matrices

Enunciado completo

Dada la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & k \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Estúdiese su rango en función de los valores del parámetro k.

b) Para $k = 2$, ¿tiene inversa la matriz $\mathbf{A}$? En caso afirmativo, calcúlese $\mathbf{A}^{-1}$.

c) Dadas las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Resuélvase la ecuación matricial $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$.

1.1 Marco teórico previo

Definición 1.1 (Rango de una matriz)**.** El **rango** de una matriz $\mathbf{A}$, denotado $\text{rango}(\mathbf{A})$, es el orden del mayor menor (subdeterminante) no nulo que puede extraerse de ella. Equivalentemente, es la dimensión del espacio columna (o del espacio fila) de $\mathbf{A}$.

Definición 1.2 (Matriz invertible)**.** Una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ de orden n es **invertible** (o **regular**) si y solo si $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. En ese caso, su inversa viene dada por

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \left(\text{Adj}(\mathbf{A})\right)^{T},$$

donde $\text{Adj}(\mathbf{A})$ es la *matriz adjunta* (transpuesta de la matriz de cofactores).

Teorema 1.1 (Criterio de rango mediante determinantes)**.** Para una matriz $\mathbf{A}$ de orden 3×3:

- $\text{rango}(\mathbf{A}) = 3 \iff \det(\mathbf{A}) \neq 0$.

- $\text{rango}(\mathbf{A}) = 2 \iff \det(\mathbf{A}) = 0$ y algún menor de orden 2 es no nulo.
- $\text{rango}(\mathbf{A}) = 1 \iff$ todos los menores de orden 2 son cero pero alguna entrada es no nula.
- $\text{rango}(\mathbf{A}) = 0 \iff \mathbf{A} = \mathbf{0}$.

1.2 Apartado a) – Rango de A en función de k

Solución

Paso 1: Cálculo del determinante de A

Calculamos $\det(\mathbf{A})$ desarrollando por la primera fila mediante la regla de Sarrus o por la definición cofactorial. Elegimos **desarrollo por la primera fila**, pues el elemento $a_{13} = 0$ simplifica el cálculo.

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & k \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & k \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & k \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Calculamos cada menor de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 0 & k \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot 3 - k \cdot (-1) = k$$

$$\begin{vmatrix} 4 & k \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - k \cdot 2 = 12 - 2k$$

Sustituyendo:

$$\det(\mathbf{A}) = 2 \cdot k - 1 \cdot (12 - 2k) + 0 = 2k - 12 + 2k = \boxed{4k - 12}$$

Paso 2: Análisis por casos

Caso 1: $k \neq 3$

Si $k \neq 3$, entonces $4k - 12 = 4(k - 3) \neq 0$, luego

$$\det(\mathbf{A}) \neq 0 \implies \boxed{\text{rango}(\mathbf{A}) = 3}$$

La matriz ocupa todo $\mathbb{R}^3$; sus columnas (o filas) son linealmente independientes.
Caso 2: $k = 3$

Cuando $k = 3$:

$$\det(\mathbf{A}) = 4(3) - 12 = 0$$

Por tanto $\text{rango}(\mathbf{A}) < 3$. Necesitamos comprobar si algún menor de orden 2 es no nulo.

La matriz particular es:

$$\mathbf{A}\Big|_{k=3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Tomamos el menor de orden 2 de la esquina superior izquierda:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 1 \cdot 4 = -4 \neq 0$$

Como este menor de orden 2 **no es cero**, concluimos:

$$\boxed{\text{rango}(\mathbf{A})\Big|_{k=3} = 2}$$

Resumen

Condición	$\det(\mathbf{A})$	$\text{rango}(\mathbf{A})$
$k \neq 3$	$4k - 12 \neq 0$	3
$k = 3$	0	2

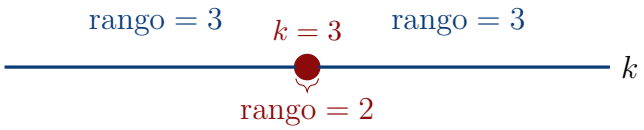


Figura 1.1: Rango de $\mathbf{A}$ según el valor del parámetro k. Para $k = 3$ el rango cae a 2 porque el determinante se anula; para cualquier otro valor real de k el rango es 3.

Observación importante

La condición $\det(\mathbf{A}) = 0$ es equivalente a que las filas (o columnas) de $\mathbf{A}$ sean *linealmente dependientes*. Para $k = 3$, puede comprobarse directamente que $F_3 = F_1 + \frac{1}{2}F_2$ — en realidad no hay esa dependencia tan simple, pero la anulación del determinante garantiza la dependencia lineal.

1.3 Apartado b) – Inversa de A para $k = 2$

Solución

Paso 1: Verificación de invertibilidad

Con $k = 2$:

$$\det(\mathbf{A})\Big|_{k=2} = 4(2) - 12 = 8 - 12 = -4 \neq 0$$

Conclusión: La matriz $\mathbf{A}$ con $k = 2$ sí es invertible.

La matriz concreta es:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \det(\mathbf{A}) = -4$$

Paso 2: Cálculo de la matriz de cofactores

La matriz de cofactores $\mathbf{C} = (C_{ij})$ se obtiene calculando el cofactor $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, donde M_{ij} es el menor complementario de la entrada a_{ij}.

Fila 1:

$$C_{11} = (+1)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 2$$

$$C_{12} = (-1)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(12 - 4) = -8$$

$$C_{13} = (+1)\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 0 = -4$$

Fila 2:

$$C_{21} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(3 - 0) = -3$$

$$C_{22} = (+1)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6$$

$$C_{23} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 - 2) = 4$$

Fila 3:

$$C_{31} = (+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2$$

$$C_{32} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - 0) = -4$$

$$C_{33} = (+1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4$$

Paso 3: Matriz adjunta (transpuesta de cofactores)

$$\mathrm{Adj}(\mathbf{A}) = \mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -8 & 6 & -4 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Paso 4: Matriz inversa

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\,\mathrm{Adj}(\mathbf{A})^T = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -8 & 6 & -4 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Verificación: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$

Comprobamos con la primera columna de $\mathbf{A}^{-1}$, es decir, resolvemos $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-\frac{1}{2}) + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 4 \cdot (-\frac{1}{2}) + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-\frac{1}{2}) + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2 + 0 \\ -2 + 0 + 2 \\ -1 - 2 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

Error frecuente – ¡Atención!

Un error clásico: confundir la *adjunta* con la *transpuesta de la adjunta*. Recuerda: $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\big(\text{cof}(\mathbf{A})\big)^T$. La transpuesta se aplica **después** de calcular los cofactores.

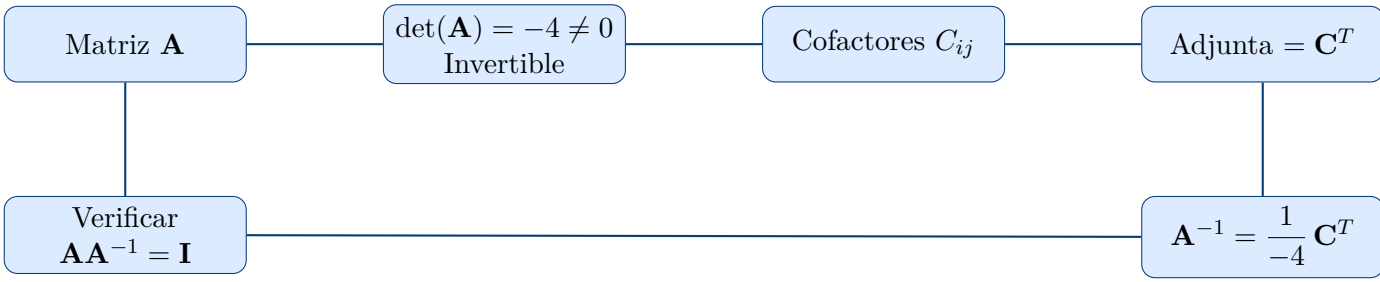


Figura 1.2: Diagrama del proceso de cálculo de la matriz inversa por el método de la adjunta.

1.4 Apartado c) – Ecuación matricial $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$

Solución

Paso 1: Despeje de X

Partimos de la ecuación matricial:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

Restamos $\mathbf{B}$ en ambos miembros:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{C} - \mathbf{B}$$

Como $\det(\mathbf{A}) = -4 \neq 0$ (calculado en el apartado b), la matriz $\mathbf{A}$ es invertible. Multiplicamos a la **izquierda** por $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{B}) \implies \mathbf{I} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{B}) \implies \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{B})$$

Paso 2: Cálculo de $\mathbf{C} - \mathbf{B}$

$$\mathbf{C}-\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 & 6-2 & 1-3 \\ 0-0 & -1-(-1) & 4-2 \\ 3-1 & 0-0 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Paso 3: Producto $\mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{B})$

Usamos $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{-4} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -8 & 6 & -4 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

Calculamos primero el producto de la matriz de cofactores transpuesta por $(\mathbf{C} - \mathbf{B})$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -8 & 6 & -4 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos entrada a entrada:

Fila 1:

$$\begin{aligned} (1,1): &\quad 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 4 + 0 + 4 = 8 \\ (1,2): &\quad 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 8 + 0 + 0 = 8 \\ (1,3): &\quad 2 \cdot (-2) + (-3) \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = -4 - 6 - 2 = -12 \end{aligned}$$

Fila 2:

$$\begin{aligned} (2,1): &\quad (-8) \cdot 2 + 6 \cdot 0 + (-4) \cdot 2 = -16 + 0 - 8 = -24 \\ (2,2): &\quad (-8) \cdot 4 + 6 \cdot 0 + (-4) \cdot 0 = -32 + 0 + 0 = -32 \\ (2,3): &\quad (-8) \cdot (-2) + 6 \cdot 2 + (-4) \cdot (-1) = 16 + 12 + 4 = 32 \end{aligned}$$

Fila 3:

$$\begin{aligned} (3,1): &\quad (-4) \cdot 2 + 4 \cdot 0 + (-4) \cdot 2 = -8 + 0 - 8 = -16 \\ (3,2): &\quad (-4) \cdot 4 + 4 \cdot 0 + (-4) \cdot 0 = -16 + 0 + 0 = -16 \\ (3,3): &\quad (-4) \cdot (-2) + 4 \cdot 2 + (-4) \cdot (-1) = 8 + 8 + 4 = 20 \end{aligned}$$

El producto intermedio es:

$$\begin{pmatrix} 8 & 8 & -12 \\ -24 & -32 & 32 \\ -16 & -16 & 20 \end{pmatrix}$$

Dividiendo por -4:

$$\mathbf{X} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 8 & 8 & -12 \\ -24 & -32 & 32 \\ -16 & -16 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 6 & 8 & -8 \\ 4 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 6 & 8 & -8 \\ 4 & 4 & -5 \end{pmatrix}}$$

Paso 4: Verificación

Comprobamos que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$. Calculamos $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 6 & 8 & -8 \\ 4 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Fila 1: $(2 \cdot (-2) + 1 \cdot 6 + 0 \cdot 4,\ 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4,\ 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-8) + 0 \cdot (-5))$
$= (4 + 6 + 0,\ -4 + 8 + 0,\ 6 - 8 + 0) = (2, 4, -2)$
Fila 2: $(4 \cdot (-2) + 0 \cdot 6 + 2 \cdot 4,\ 4 \cdot (-2) + 0 \cdot 8 + 2 \cdot 4,\ 4 \cdot 3 + 0 \cdot (-8) + 2 \cdot (-5))$
$= (-8 + 0 + 8,\ -8 + 0 + 8,\ 12 + 0 - 10) = (0, 0, 2)$
Fila 3: $(2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 6 + 3 \cdot 4,\ 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 8 + 3 \cdot 4,\ 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-8) + 3 \cdot (-5))$
$= (-4 - 6 + 12,\ -4 - 8 + 12,\ 6 + 8 - 15) = (2, 0, -1)$
Entonces:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Y:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{C}\checkmark$$

Error frecuente – ¡Atención!

En ecuaciones matriciales $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{D}$, es crucial multiplicar por $\mathbf{A}^{-1}$ **a la izquierda**: $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{D}$. Si la ecuación fuera $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{D}$, la solución sería $\mathbf{X} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{A}^{-1}$ (multiplicación a la **derecha**). En álgebra matricial, **el orden importa** porque el producto matricial no es conmutativo en general.

Capítulo 2

Ejercicio Nº 2 – Determinantes

Enunciado

Calcúlense los siguientes determinantes:

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad c)\ \begin{vmatrix} 2x+1 & x & 1 \\ 3x+2 & x & 2 \\ 4x+3 & x & 3 \end{vmatrix}$$

2.1 Marco teórico – Definición y propiedades del determinante

Definición 2.1 (Determinante de orden 2)**.** El determinante de una matriz 2×2 es:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Definición 2.2 (Determinante de orden 3 – Desarrollo por una fila)**.** El determinante de orden 3 puede calcularse desarrollando por la fila i:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

donde M_{ij} es el menor complementario (determinante de la submatriz 2×2 obtenida al suprimir la fila i y la columna j).

Propiedad 2.1 (Propiedades del determinante)**.** Las siguientes propiedades son fundamentales:

(i) Si una fila (o columna) es combinación lineal de las demás, el determinante es cero.

(ii) Se puede sumar a una fila un múltiplo de otra sin cambiar el determinante.

(iii) Si dos filas son proporcionales, el determinante es cero.

(iv) El determinante es *multilineal*: lineal en cada fila por separado.

2.2 Apartado a) – Determinante de orden 2

Solución

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - (-2) \cdot (-1) = 3 - 2 = \boxed{1}$$

Justificación: Aplicamos directamente la fórmula $ad - bc$ con $a = 1$, $b = -2$, $c = -1$, $d = 3$.
Observa que $(-2) \cdot (-1) = +2$ (producto de dos negativos), de ahí $3 - 2 = 1$.

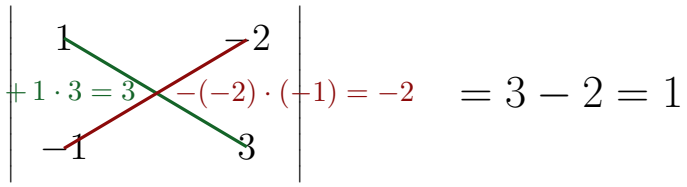


Figura 2.1: Cálculo del determinante 2×2 por la regla de la diagonal: se restan los productos de las diagonales.

2.3 Apartado b) – Determinante de orden 3 (Regla de Sarrus)

Solución

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Elegimos **desarrollar por la primera fila** (tiene un cero que facilita).

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Calculamos los menores:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - (-3) \cdot 1 = 2 + 3 = 5$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot 2 - (-3) \cdot 4 = 0 + 12 = 12 \quad \text{(no importa, factor es 0)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 - 1 \cdot 4 = -4$$

Sustituyendo:

$$\Delta = 1 \cdot (+1) \cdot 5 + 0 + 2 \cdot (+1) \cdot (-4) = 5 + 0 - 8 = \boxed{-3}$$

Verificación por la Regla de Sarrus:
Añadimos las dos primeras columnas a la derecha:

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 4 & 1 \end{array}$$

Productos de las diagonales **descendentes** (positivos):

$$1 \cdot 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) \cdot 4 + 2 \cdot 0 \cdot 1 = 2 + 0 + 0 = 2$$

Productos de las diagonales **ascendentes** (negativos):

$$4 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 0 = 8 + (-3) + 0 = 5$$

$$\Delta = 2 - 5 = \boxed{-3} \checkmark$$

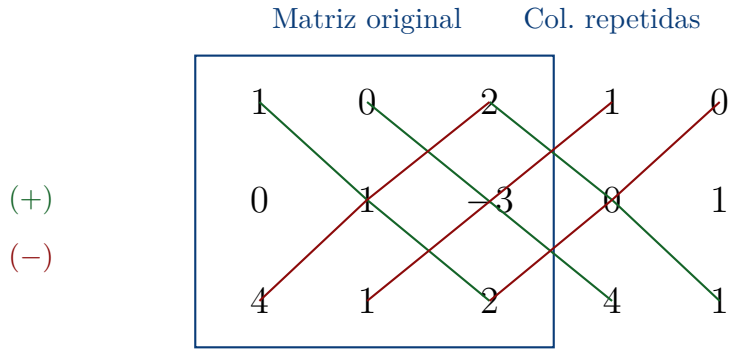


Figura 2.2: Regla de Sarrus para el determinante 3×3. Las diagonales verdes se suman; las rojas se restan.

2.4 Apartado c) – Determinante con parámetro x

Solución

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2x+1 & x & 1 \\ 3x+2 & x & 2 \\ 4x+3 & x & 3 \end{vmatrix}$$

Estrategia: Operaciones elementales sobre columnas

Usamos la **propiedad de multilinealidad por columnas**: podemos restar múltiplos de una columna a otra sin alterar el valor del determinante.

Operación: $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$ (restamos la segunda columna a la primera).

$$C_1 - C_2 \Rightarrow \text{nueva col. 1: } \begin{pmatrix}(2x+1)-x\\(3x+2)-x\\(4x+3)-x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+1\\2x+2\\3x+3\end{pmatrix}$$

Observamos que la columna resultante tiene factor común:

$$\begin{pmatrix}x+1\\2x+2\\3x+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+1\\2(x+1)\\3(x+1)\end{pmatrix} = (x+1)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

El determinante queda:

$$\Delta = \begin{vmatrix}x+1 & x & 1\\2x+2 & x & 2\\3x+3 & x & 3\end{vmatrix}$$

Sacamos el factor $(x+1)$ de la primera columna y el factor x de la segunda:

$$\Delta = (x+1)\cdot x \cdot \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 1 & 2\\3 & 1 & 3\end{vmatrix}$$

Calculamos el determinante 3×3:

$$D_0 = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 1 & 2\\3 & 1 & 3\end{vmatrix}$$

Desarrollamos por la segunda columna (tiene todos unos, simplicidad):

$$D_0 = -1\cdot\begin{vmatrix}2 & 2\\3 & 3\end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\3 & 3\end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{vmatrix}$$

$$= -1\cdot(6-6) + 1\cdot(3-3) - 1\cdot(2-2) = 0+0-0 = 0$$

Interpretación: El determinante $D_0 = 0$ porque en la matriz $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 1 & 2\\3 & 1 & 3\end{pmatrix}$, la columna 3 es igual a la columna 1. Dos columnas iguales $\Rightarrow$ determinante nulo. Por tanto:

$$\Delta = (x+1)\cdot x \cdot 0 = \boxed{0}$$

Interpretación geométrica: El determinante vale 0 para *todo* valor de $x \in \mathbb{R}$. Esto significa que las tres filas de la matriz original son siempre **linealmente dependientes** independientemente del valor de x.

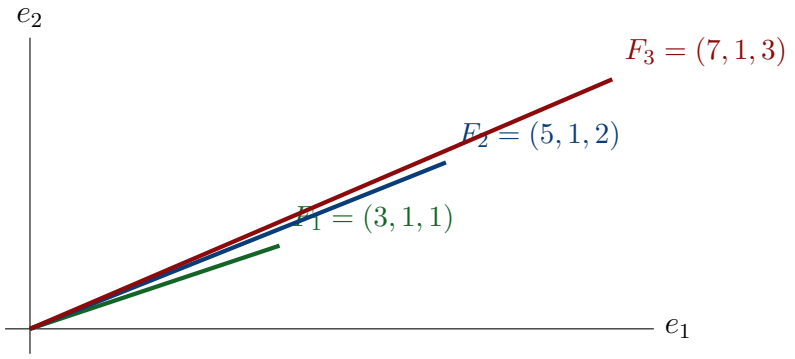
Verificación alternativa (operaciones de fila):
Aplicamos $F_2 \leftarrow F_2 - F_1$ y $F_3 \leftarrow F_3 - F_1$:

$$\begin{vmatrix}2x+1 & x & 1\\3x+2 & x & 2\\4x+3 & x & 3\end{vmatrix} \xrightarrow{F_2-F_1,\ F_3-F_1} \begin{vmatrix}2x+1 & x & 1\\x+1 & 0 & 1\\2x+2 & 0 & 2\end{vmatrix}$$

La última columna tiene $C_3: (1,1,2)$ y la segunda fila tiene $F_2 = (x+1,0,1)$, la tercera $F_3 = (2x+2,0,2) = 2(x+1,0,1) = 2F_2$.
Como $F_3 = 2F_2$, dos filas son proporcionales, luego el determinante es $\boxed{0}$. ✓

Observación importante

Este determinante es nulo para **cualquier** valor de x. Eso ocurre porque la dependencia lineal entre las filas es *estructural*: la fila i tiene la forma $(ix+i, x, i) = (i(x+1), x, i)$. La relación $F_3 = F_2 + F_1 - \text{cte}$ no es inmediata, pero las operaciones elementales la revelan de forma inequívoca.



Las tres filas son **linealmente dependientes**
$\Rightarrow$ Determinante $= 0$ para todo x

Figura 2.3: Para $x = 1$, las filas son $(3, 1, 1)$, $(5, 1, 2)$ y $(7, 1, 3)$ (proyección en el plano e_1-e_2). Son linealmente dependientes ($F_3 = F_1 + F_2 -$ corrección), lo que implica determinante nulo.

Capítulo 3

Ejercicio Nº 3 – Clasificación de sistemas lineales

Enunciado

Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x + y + az &= 4 \\ 2x + y &= 3 \\ 2x + 2y + 2z &= 6 \end{aligned}\right\}$$

a) Clasifica el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelve el sistema para $a = 2$.

3.1 Marco teórico – Teorema de Rouché-Frobenius

Teorema 3.1 (Rouché-Frobenius)**.** Sea un sistema lineal $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con n incógnitas. Sea $\mathbf{A}^*$ la matriz ampliada $(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b})$. Entonces:

- El sistema es **incompatible** (sin solución) si y solo si $\text{rango}(\mathbf{A}) \neq \text{rango}(\mathbf{A}^*)$.
- El sistema es **compatible determinado** (solución única) si y solo si $\text{rango}(\mathbf{A}) = \text{rango}(\mathbf{A}^*) = n$.
- El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones) si y solo si $\text{rango}(\mathbf{A}) = \text{rango}(\mathbf{A}^*) = r < n$, con $n - r$ parámetros libres.

3.2 Apartado a) – Clasificación según a

Solución

Paso 1: Matrices del sistema

La **matriz de coeficientes** y la **matriz ampliada** son:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

Paso 2: Relación entre las ecuaciones

Observación clave: la tercera ecuación es $2x + 2y + 2z = 6$, que simplificando dividiendo entre 2 da $x + y + z = 3$.
La primera ecuación es $x + y + az = 4$.
Restando: $(a - 1)z = 1$, lo que anticipa que el valor $a = 1$ será crítico.
Procedemos formalmente calculando $\det(\mathbf{A})$.

Paso 3: Determinante de A

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Desarrollamos por la primera fila:

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + a \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (2 - 0) - 1 \cdot (4 - 0) + a \cdot (4 - 2) = 2 - 4 + 2a = 2a - 2 = 2(a - 1)$$

Caso 1: $a \neq 1$

$\det(\mathbf{A}) = 2(a - 1) \neq 0$, luego $\text{rango}(\mathbf{A}) = 3 = n$.
Por Rouché-Frobenius, el sistema es **compatible determinado** (solución única).

Caso 2: $a = 1$

$\det(\mathbf{A}) = 0$, luego $\text{rango}(\mathbf{A}) \leq 2$.
Debemos calcular $\text{rango}(\mathbf{A})$ y $\text{rango}(\mathbf{A}^*)$ con $a = 1$:

$$\mathbf{A}\Big|_{a=1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^*\Big|_{a=1} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

Comprobamos el menor de orden 2 de $\mathbf{A}$: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$, luego $\text{rango}(\mathbf{A}) = 2$.
Ahora buscamos $\text{rango}(\mathbf{A}^*)$. Calculamos el determinante de la submatriz ampliada tomando las primeras 3 filas y columnas 1,2,4:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

Desarrollamos por la primera fila:

$$= 1 \cdot (6-6) - 1 \cdot (12-6) + 4 \cdot (4-2) = 0 - 6 + 8 = 2 \neq 0$$

Como este determinante de orden 3 de la ampliada es no nulo, $\text{rango}(\mathbf{A}^*) = 3 > \text{rango}(\mathbf{A}) = 2$.
Por Rouché-Frobenius, el sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumen de la clasificación

Valor de a	$\text{rango}(\mathbf{A})$	$\text{rango}(\mathbf{A}^*)$	Clasificación
$a \neq 1$	3	3	Compatible determinado (solución única)
$a = 1$	2	3	Incompatible (sin solución)

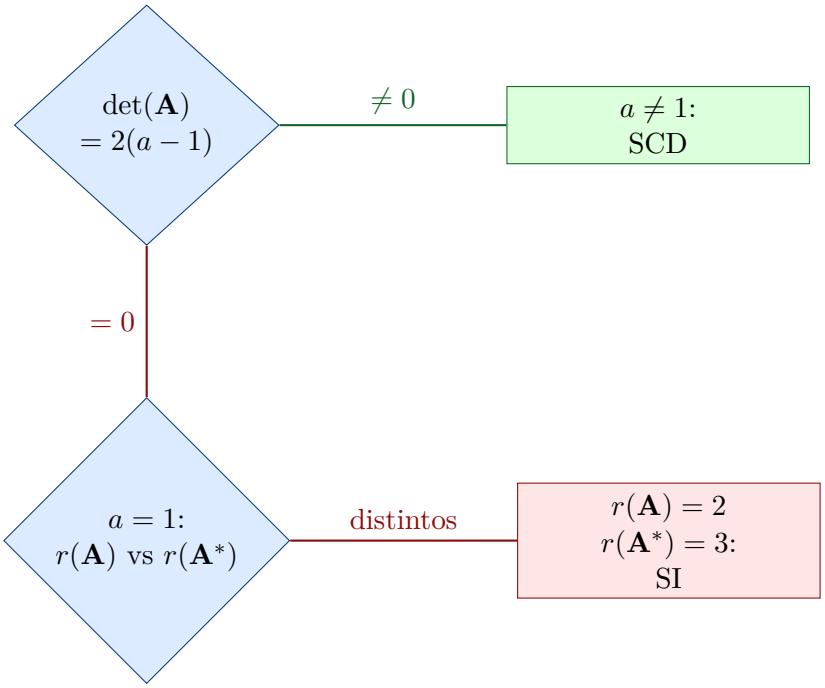


Figura 3.1: Árbol de decisión para la clasificación del sistema según el Teorema de Rouché-Frobenius.

3.3 Apartado b) – Resolución para $a = 2$

Solución

Con $a = 2$, el sistema es:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ 2x + y = 3 \\ 2x + 2y + 2z = 6 \end{cases}$$

Como $a = 2 \neq 1$, el sistema es **compatible determinado**: tiene solución única.

Podemos resolverlo por el método de Cramer o por Gauss. Elegimos **Cramer** (pues el sistema es 3×3 determinado y tenemos el determinante ya calculado).

Determinante principal

Con $a = 2$: $\det(\mathbf{A}) = 2(2-1) = 2$.

Regla de Cramer

$$x = \frac{\det(\mathbf{A}_x)}{\det(\mathbf{A})}, \quad y = \frac{\det(\mathbf{A}_y)}{\det(\mathbf{A})}, \quad z = \frac{\det(\mathbf{A}_z)}{\det(\mathbf{A})}$$

donde $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$, $\mathbf{A}_z$ son las matrices obtenidas sustituyendo la columna correspondiente por el vector de términos independientes $\mathbf{b} = (4, 3, 6)^T$.

Cálculo de $\det(\mathbf{A}_x)$**:** (sustituimos columna 1)

$$\det(\mathbf{A}_x) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Desarrollo por la primera fila:

$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 4(2) - 1(6) + 2(0) = 8 - 6 + 0 = 2$$

$$x = \frac{2}{2} = 1$$

Cálculo de $\det(\mathbf{A}_y)$**:** (sustituimos columna 2)

$$\det(\mathbf{A}_y) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

Desarrollo por la primera fila:

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 1(6-0) - 4(4-0) + 2(12-6) = 6 - 16 + 12 = 2$$

$$y = \frac{2}{2} = 1$$

Cálculo de $\det(\mathbf{A}_z)$**:** (sustituimos columna 3)

$$\det(\mathbf{A}_z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

Desarrollo por la primera fila:

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1(6-6) - 1(12-6) + 4(4-2) = 0 - 6 + 8 = 2$$

$$z = \frac{2}{2} = 1$$

Solución

$$\boxed{x = 1, \quad y = 1, \quad z = 1}$$

Verificación en las tres ecuaciones

$$\begin{aligned} E_1: &\quad 1 + 1 + 2 \cdot 1 = 4 \checkmark \\ E_2: &\quad 2 \cdot 1 + 1 = 3 \checkmark \\ E_3: &\quad 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 6 \checkmark \end{aligned}$$

Observación importante

Nótese que la tercera ecuación $2x + 2y + 2z = 6$ es *exactamente* el doble de $x + y + z = 3$. Cuando $a = 2$, la primera ecuación es $x + y + 2z = 4$, que *no* es múltiplo de $x + y + z = 3$. Si $a = 1$, la primera ecuación sería $x + y + z = 4$, pero la tercera simplificada da $x + y + z = 3$: una contradicción, de ahí la incompatibilidad.

Capítulo 4

Ejercicio Nº 4 – Método de Gauss

Enunciado

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el método de Gauss:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = -1 \\ 6x + 2y + 4z = 2 \end{cases}$$

4.1 Marco teórico – Método de Gauss (Eliminación Gaussiana)

Definición 4.1 (Método de Gauss)**.** El **método de eliminación gaussiana** (o método de Gauss) consiste en transformar la matriz ampliada del sistema en una forma **escalonada** mediante operaciones elementales de fila, que no alteran el conjunto de soluciones:

- Intercambiar dos filas: $F_i \leftrightarrow F_j$.
- Multiplicar una fila por un escalar no nulo: $F_i \leftarrow \lambda F_i$.
- Sumar a una fila un múltiplo de otra: $F_i \leftarrow F_i + \lambda F_j$.

4.2 Resolución por eliminación gaussiana

Solución

Paso 1: Matriz ampliada inicial

$$\mathbf{A}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 6 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Paso 2: Eliminación de la primera columna (pivote = 1)

Operación $F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1$:

$$F_2 : (2 - 2 \cdot 1,\ -1 - 2 \cdot 2,\ 3 - 2 \cdot (-1),\ -1 - 2 \cdot 2) = (0,\ -5,\ 5,\ -5)$$

Operación $F_3 \leftarrow F_3 - 6F_1$:

$$F_3 : (6 - 6 \cdot 1,\ 2 - 6 \cdot 2,\ 4 - 6 \cdot (-1),\ 2 - 6 \cdot 2) = (0,\ -10,\ 10,\ -10)$$

Resultado:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -10 & 10 & -10 \end{array}\right)$$

Paso 3: Simplificación de filas 2 y 3

Dividimos F_2 entre -5 y F_3 entre -10:
$F_2 \leftarrow \dfrac{F_2}{-5}$: $(0,\ 1,\ -1,\ 1)$
$F_3 \leftarrow \dfrac{F_3}{-10}$: $(0,\ 1,\ -1,\ 1)$
Resultado:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Paso 4: Eliminación de la segunda columna (pivote = 1)

Operación $F_3 \leftarrow F_3 - F_2$:

$$F_3 : (0 - 0,\ 1 - 1,\ -1 - (-1),\ 1 - 1) = (0,\ 0,\ 0,\ 0)$$

Resultado (forma escalonada):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Paso 5: Análisis del rango

La forma escalonada tiene 2 filas no nulas, por lo que:

$$\text{rango}(\mathbf{A}) = \text{rango}(\mathbf{A}^*) = 2 < 3 = n$$

El sistema tiene $3 - 2 = 1$ **grado de libertad**: es un sistema **compatible indeterminado** con infinitas soluciones (una familia uniparamétrica).

Paso 6: Expresión de la solución

El sistema escalonado equivalente es:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 & \cdots (I) \\ \quad y - z = 1 & \cdots (II) \end{cases}$$

Tomamos $z = \lambda \in \mathbb{R}$ como parámetro libre.

De (II):

$$y = 1 + z = 1 + \lambda$$

De (I):

$$x = 2 - 2y + z = 2 - 2(1+\lambda) + \lambda = 2 - 2 - 2\lambda + \lambda = -\lambda$$

Solución general

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

O en forma explícita:

$$x = -\lambda, \quad y = 1 + \lambda, \quad z = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Paso 7: Verificación

Sustituimos en las tres ecuaciones originales:

$$\begin{aligned} E_1: &\quad (-\lambda) + 2(1+\lambda) - \lambda = -\lambda + 2 + 2\lambda - \lambda = 2 \checkmark \\ E_2: &\quad 2(-\lambda) - (1+\lambda) + 3\lambda = -2\lambda - 1 - \lambda + 3\lambda = -1 \checkmark \\ E_3: &\quad 6(-\lambda) + 2(1+\lambda) + 4\lambda = -6\lambda + 2 + 2\lambda + 4\lambda = 2 \checkmark \end{aligned}$$

Las tres ecuaciones se satisfacen para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$. ✓

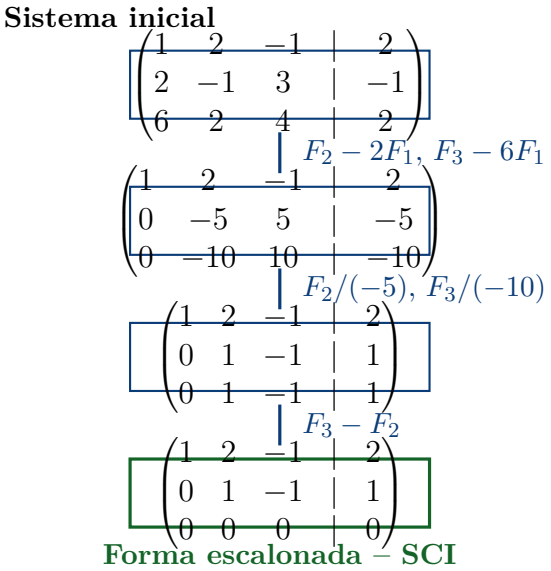


Figura 4.1: Proceso de eliminación gaussiana. Cada flecha indica la operación elemental de fila aplicada. La forma escalonada final revela que el sistema tiene infinitas soluciones (la tercera fila es la fila nula).

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

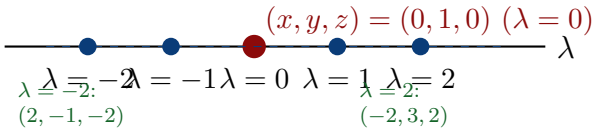


Figura 4.2: La solución general del sistema es una **familia uniparamétrica** (recta en $\mathbb{R}^3$). El punto base es $(0, 1, 0)$ y el vector director es $(-1, 1, 1)$. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ se obtiene una solución diferente.

Observación importante

El método de Gauss es el más versátil: funciona para sistemas compatibles determinados, compatibles indeterminados e incompatibles. La forma escalonada revela el rango sin necesidad de calcular determinantes explícitamente. En este ejercicio, la aparición de una fila de ceros en la ampliada (con el término independiente también cero) indica una ecuación redundante, y por eso hay un parámetro libre.

Error frecuente – ¡Atención!

Si al escalonar apareciera una fila de la forma $(0\ 0\ 0 \mid c)$ con $c \neq 0$, el sistema sería **incompatible** (equivaldría a $0 = c$, contradicción). En este ejercicio, el término independiente de la fila nula también es cero, por lo tanto el sistema **sí tiene soluciones**.

Apéndice – Resumen de fórmulas y teoremas clave

Rango de una matriz

$\text{rango}(\mathbf{A}) = r \iff$ el mayor menor no nulo de $\mathbf{A}$ tiene orden r.

Matriz inversa (método de la adjunta)

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\Big[\text{cof}(\mathbf{A})\Big]^T, \quad C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Rouché-Frobenius

$r(\mathbf{A}) \neq r(\mathbf{A}^*)$	Incompatible
$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^*) = n$	Compatible Determinado
$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^*) = r < n$	Compatible Indeterminado ($n - r$ parámetros)

Ecuación matricial $\mathbf{AX} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$

$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{C} - \mathbf{B})$ (si $\mathbf{A}$ es invertible)

Determinantes – Propiedades fundamentales

(1) Dos filas (columnas) iguales $\Rightarrow \det = 0$.

(2) Fila nula $\Rightarrow \det = 0$.

(3) $\det(\lambda\mathbf{A}) = \lambda^n \det(\mathbf{A})$ (para $n \times n$).

(4) $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$.

(5) $\det(\mathbf{A}^{-1}) = 1/\det(\mathbf{A})$.

(6) $\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$.

Junta de Castilla y León
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA

EXAMEN DE MATEMÁTICAS
2º BACH 26-MARZO- 2025
GEOMETRÍA

ies Tovar Antonio Centro bilingüe

Nº1.- Dado el plano $\pi \equiv -x + y + 2z = 0$ y el punto P(-1,1,2)

a) Calcúlese la ecuación de la recta r perpendicular a π y que pase por el punto P
b) Calcúlese el punto M de corte de la recta r y el plano π
c) Calcúlese el plano π' paralelo a π por el punto P
d) Calcúlese la distancia del plano π al plano π'
e) Calcúlese el punto Q simétrico de P respecto del plano π

Nº2.- Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y + 3z - 4 = 0 \end{cases}$

a) Estúdiese la posición relativa de estas dos rectas
b) Calcúlese el punto de corte de r y s
c) Calcúlese el plano π que contiene a las rectas r y s
d) Calcúlese la recta t paralela a r y que pase por punto Q (1,1,0)
e) Calcúlese la distancia de la recta t al plano π
f) Estúdiese la posición relativa de s y t y la distancia entre ellas

Nº3.- Dadas la recta $r \equiv \begin{cases} \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{k} = \frac{z-4}{-1} \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x + y + z = 5$

a) Estúdiese la posición relativa de la recta y el plano, en función del valor del parámetro k
b) Para k= 1, calcula el punto de corte de r y π.
c) Para k = 0, calcúlese la distancia entre la recta r y el plano π.
d) Para k = 0, calcúlese la ecuación de la recta simétrica de la recta r respecto al plano π

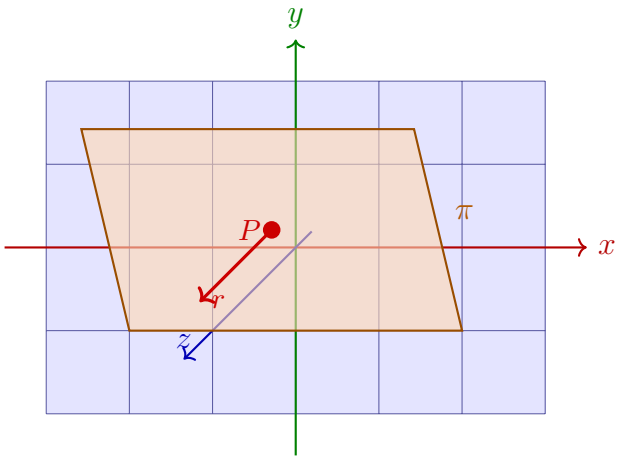
SUERTE JÓVENES

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO

Examen de Matemáticas

2º Bachillerato

26 de marzo de 2025



Soluciones Completas y Comentadas

Con rigor matemático, desarrollo paso a paso
y representaciones geométricas

Asignatura:	Matemáticas II (2º Bachillerato)
Bloque:	Geometría analítica en el espacio
Nivel:	Selectividad (EBAU)
Centro:	IES Tovar (Junta de Castilla y León)

Índice general

Introducción y conceptos previos **2**

1. Ejercicio 1: Plano, recta perpendicular y punto simétrico **4**
1.1. Apartado a): Recta r perpendicular a π por P 4
1.2. Apartado b): Punto de corte $M = r \cap \pi$ 6
1.3. Apartado c): Plano π' paralelo a π por P 6
1.4. Apartado d): Distancia entre los planos π y π' 7
1.5. Apartado e): Punto simétrico Q de P respecto a π 8

2. Ejercicio 2: Posición relativa de rectas, plano y distancias **10**
2.1. Datos previos: vectores directores y puntos de las rectas 10
2.2. Apartado a): Posición relativa de r y s 11
2.3. Apartado b): Punto de corte de r y s 12
2.4. Apartado c): Plano π que contiene a r y a s 13
2.5. Apartado d): Recta t paralela a r por $Q(1, 1, 0)$ 14
2.6. Apartado e): Distancia de la recta t al plano π 14
2.7. Apartado f): Posición relativa de s y t, y distancia 15

3. Ejercicio 3: Recta y plano — posición relativa, distancia y simétrica **17**
3.1. Datos de la recta y el plano 18
3.2. Apartado a): Posición relativa en función de k 18
3.3. Apartado b): Punto de corte para $k = 1$ 19
3.4. Apartado c): Distancia de r a π para $k = 0$ 20
3.5. Apartado d): Recta simétrica de r respecto a π para $k = 0$ 20

Resumen de resultados **24**

Introducción y conceptos previos

Este documento contiene las soluciones completamente desarrolladas de todos los ejercicios del examen de Geometría de 2º de Bachillerato correspondiente al 26 de marzo de 2025.

Cada ejercicio se resuelve con **máximo rigor matemático**, justificando absolutamente todos los pasos algebraicos y geométricos, e incluyendo representaciones visuales que faciliten la comprensión intuitiva.

Recordatorio de definiciones y teoremas fundamentales

Definición: Vector normal a un plano

El **vector normal n** $= (a, b, c)$ a un plano $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ es perpendicular a cualquier vector contenido en dicho plano.

Definición: Recta perpendicular a un plano

Una recta r es **perpendicular** a un plano π si y solo si el vector director de r es paralelo (proporcional) al vector normal de π.

Teorema: Distancia de un punto a un plano

La distancia del punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ al plano $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ es:

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Teorema: Distancia entre planos paralelos

Si $\pi_1 \equiv ax + by + cz + d_1 = 0$ y $\pi_2 \equiv ax + by + cz + d_2 = 0$ son paralelos,

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Teorema: Punto simétrico de P respecto a π

Sea M la proyección ortogonal de P sobre π. El simétrico Q de P respecto a π cumple $M = \frac{P+Q}{2}$, es decir, $Q = 2M - P$.

Teorema: Posición relativa de dos rectas en $\mathbb{R}^3$

Dos rectas con vectores directores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ y puntos A, B respectivamente:

- Son **paralelas** si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ y $A, B, A + \mathbf{u}$ son colineales.
- **Coinciden** si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{AB} \parallel \mathbf{u}$.
- Se **cortan** si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{AB} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$.
- Son **alabeadas** si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{AB} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \neq 0$.

Capítulo 1

Ejercicio 1: Plano, recta perpendicular y punto simétrico

Enunciado — Ejercicio 1

Dado el plano $\pi \equiv -x + y + 2z = 0$ y el punto $P(-1, 1, 2)$:

a) Calcúlese la ecuación de la recta r perpendicular a π que pase por el punto P.

b) Calcúlese el punto M de corte de la recta r y el plano π.

c) Calcúlese el plano π' paralelo a π por el punto P.

d) Calcúlese la distancia del plano π al plano π'.

e) Calcúlese el punto Q simétrico de P respecto del plano π.

1.1 Apartado a): Recta r perpendicular a π por P

Solución — apartado a)

Idea geométrica. Una recta es perpendicular a un plano si y solo si su vector director coincide (es proporcional) con el vector normal del plano.

Paso 1. Identificar el vector normal de π.
El plano es $\pi \equiv -x + y + 2z = 0$, es decir, $(-1)x + (1)y + (2)z + 0 = 0$.
Los coeficientes de x, y y z forman el vector normal:

$$\mathbf{n} = (-1,\ 1,\ 2).$$

Paso 2. Construir la recta r.
La recta r pasa por el punto $P(-1, 1, 2)$ y tiene como vector director $\mathbf{d} = \mathbf{n} = (-1, 1, 2)$.

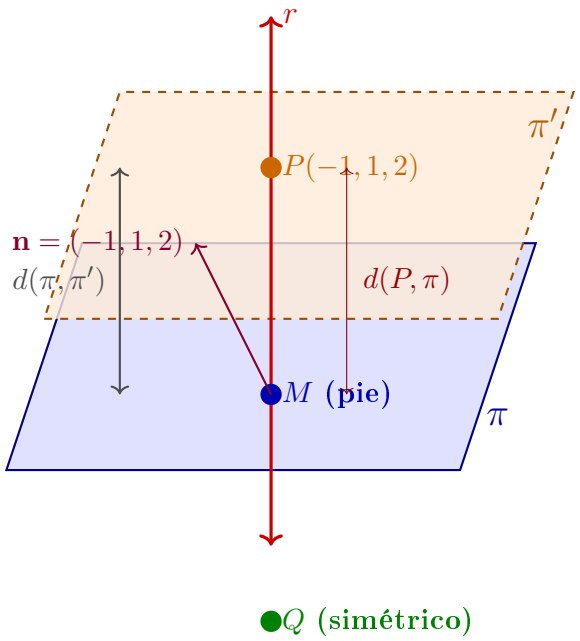


Figura 1.1: Plano π, plano paralelo π' por P, recta perpendicular r, pie de la perpendicular M, y punto simétrico Q.

Ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 + (-1)t = -1 - t \\ y = 1 + 1 \cdot t = 1 + t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Ecuaciones continuas (simétricas):

$$\boxed{r \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}}$$

Nota:

Podríamos tomar como vector director cualquier múltiplo de $\mathbf{n}$, por ejemplo $(1, -1, -2)$. La recta sería idéntica pero con el parámetro t recorrido en sentido contrario. Por claridad, usamos directamente $\mathbf{n} = (-1, 1, 2)$.

1.2 Apartado b): Punto de corte $M = r \cap \pi$

Solución — apartado b)

Idea. Sustituimos las ecuaciones paramétricas de r en la ecuación del plano π y despejamos el parámetro t.

Paso 1. Sustituir en $\pi \equiv -x + y + 2z = 0$.

$$-(-1-t) + (1+t) + 2(2+2t) = 0.$$

Paso 2. Simplificar.

$$(1+t) + (1+t) + (4+4t) = 0$$

$$1 + t + 1 + t + 4 + 4t = 0$$

$$6 + 6t = 0$$

$$t = -1.$$

Paso 3. Obtener el punto M.
Sustituimos $t = -1$ en las paramétricas de r:

$$x = -1 - (-1) = -1 + 1 = 0,$$

$$y = 1 + (-1) = 0,$$

$$z = 2 + 2(-1) = 2 - 2 = 0.$$

$$\boxed{M = (0,\ 0,\ 0)}$$

Verificación. Comprobamos que $M \in \pi$: $-0 + 0 + 2 \cdot 0 = 0$ ✓.
Comprobamos que $M \in r$: $\dfrac{0+1}{-1} = \dfrac{0-1}{1} = \dfrac{0-2}{2} \Rightarrow -1 = -1 = -1$ ✓.

Nota:

El origen $O = (0, 0, 0)$ pertenece al plano π (pues el término independiente es cero), lo que es geométricamente coherente.

1.3 Apartado c): Plano π' paralelo a π por P

Solución — apartado c)

Idea. Dos planos son paralelos si y solo si tienen el mismo vector normal (o un múltiplo de él). Así, π' tendrá la misma ecuación que π salvo el término independiente.

Paso 1. Plantear la ecuación.

Como π' tiene el mismo vector normal que π, su ecuación es de la forma:

$$-x + y + 2z + d = 0,$$

donde d es la constante que debemos determinar.
Paso 2. Imponer que $P(-1, 1, 2) \in \pi'$.

$$-(-1) + 1 + 2(2) + d = 0$$

$$1 + 1 + 4 + d = 0$$

$$6 + d = 0 \;\Rightarrow\; d = -6.$$

Paso 3. Escribir π'.

$$\boxed{\pi' \equiv -x + y + 2z - 6 = 0}$$

Verificación. $P(-1, 1, 2) \in \pi'$: $-(-1) + 1 + 2(2) - 6 = 1 + 1 + 4 - 6 = 0$ ✓.

¡Advertencia!

Un error frecuente es buscar π' imponiendo solo que tenga la misma normal, olvidando verificar que el punto P realmente pertenece a π'.

1.4 Apartado d): Distancia entre los planos π y π'

Solución — apartado d)

Método elegido. Usaremos la fórmula de distancia entre planos paralelos. También podría calcularse como la distancia de cualquier punto de π' al plano π; elegimos el primero por elegancia.

Los dos planos en forma general:

$$\pi \equiv -x + y + 2z + 0 = 0 \qquad (d_1 = 0),$$
$$\pi' \equiv -x + y + 2z - 6 = 0 \qquad (d_2 = -6).$$

Aplicar la fórmula:

$$d(\pi, \pi') = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|0 - (-6)|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{6\sqrt{6}}{6} = \sqrt{6}.$$

$$\boxed{d(\pi, \pi') = \sqrt{6} \approx 2{,}449}$$

Verificación alternativa. La distancia de $P(-1, 1, 2)$ al plano $\pi \equiv -x + y + 2z = 0$ es:

$$d(P, \pi) = \frac{|-(-1) + 1 + 2(2)|}{\sqrt{6}} = \frac{|1 + 1 + 4|}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}\ \checkmark.$$

Esto es consistente: la distancia de P (que pertenece a π') al plano π es precisamente la distancia entre los dos planos paralelos.

1.5 Apartado e): Punto simétrico Q de P respecto a π

Solución — apartado e)

Idea. El punto M calculado en el apartado b) es la proyección ortogonal de P sobre π (pie de la perpendicular). El simétrico Q de P respecto a π satisface que M es el punto medio de PQ:

$$M = \frac{P + Q}{2} \implies Q = 2M - P.$$

Paso 1. Datos.

$$P = (-1, 1, 2), \qquad M = (0, 0, 0).$$

Paso 2. Calcular Q.

$$Q = 2M - P = 2(0, 0, 0) - (-1, 1, 2) = (0, 0, 0) - (-1, 1, 2) = (1, -1, -2).$$

$$\boxed{Q = (1,\ -1,\ -2)}$$

Verificaciones:

1. M es el punto medio de PQ: $\dfrac{(-1+1)}{2}, \dfrac{(1-1)}{2}, \dfrac{(2-2)}{2} = (0, 0, 0) = M\ \checkmark$.

2. $d(P,\pi) = d(Q,\pi)$: $d(Q,\pi) = \dfrac{|-1-1-4|}{\sqrt{6}} = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$ ✓.

3. $Q \notin \pi$: $-1-1-4 = -6 \neq 0$ ✓ (está al otro lado).

Conclusión:

El simétrico del punto $P(-1,1,2)$ respecto del plano $\pi \equiv -x+y+2z=0$ es $Q=(1,-1,-2)$, y la distancia de cada punto al plano es $\sqrt{6}$.

Capítulo 2

Ejercicio 2: Posición relativa de rectas, plano y distancias

Enunciado — Ejercicio 2

Dadas las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -2 + 3t \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y + 3z - 4 = 0 \end{cases}$$

a) Estúdiese la posición relativa de estas dos rectas.

b) Calcúlese el punto de corte de r y s.

c) Calcúlese el plano π que contiene a las rectas r y s.

d) Calcúlese la recta t paralela a r que pase por el punto $Q(1, 1, 0)$.

e) Calcúlese la distancia de la recta t al plano π.

f) Estúdiese la posición relativa de s y t y la distancia entre ellas.

2.1 Datos previos: vectores directores y puntos de las rectas

Recta r

De las ecuaciones paramétricas de r:

$$\mathbf{u}_r = (2,\ -1,\ 3), \qquad A_r = (-1,\ 2,\ -2).$$

Recta s — conversión a paramétrica

La recta s está dada como intersección de dos planos:

$$\alpha_1 : x + y + z = 3, \qquad \alpha_2 : 2x - y + 3z = 4.$$

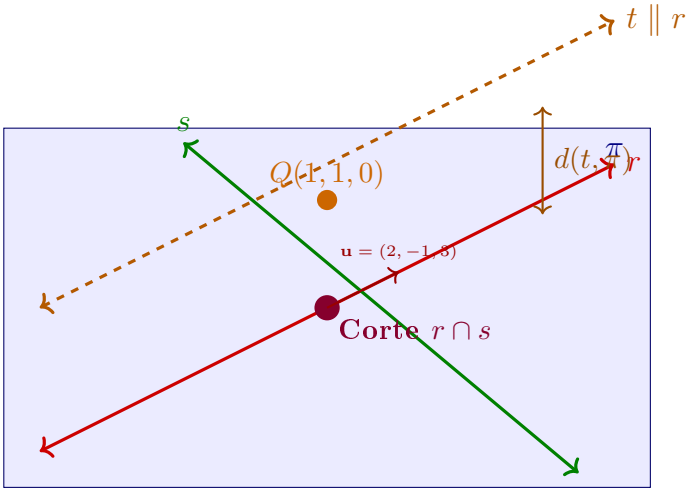


Figura 2.1: Las rectas r y s contenidas en el plano π; la recta t, paralela a r, está fuera del plano a distancia constante.

Vector director de s: es el producto vectorial de las normales de α_1 y α_2:

$$\mathbf{n}_1 = (1,1,1), \qquad \mathbf{n}_2 = (2,-1,3).$$

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(1\cdot 3 - 1\cdot(-1)) - \mathbf{j}(1\cdot 3 - 1\cdot 2) + \mathbf{k}(1\cdot(-1) - 1\cdot 2)$$
$$= \mathbf{i}(3+1) - \mathbf{j}(3-2) + \mathbf{k}(-1-2) = (4,\ -1,\ -3).$$

Un punto de s: ponemos $z = 0$ en el sistema $\{\alpha_1, \alpha_2\}$:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{suma}} 3x = 7 \ \Rightarrow\ x = \frac{7}{3}, \quad y = 3 - \frac{7}{3} = \frac{2}{3}.$$

Punto de s: $A_s = \left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$.

Las **ecuaciones paramétricas de** s son:

$$s \equiv \begin{cases} x = \frac{7}{3} + 4\lambda \\ y = \frac{2}{3} - \lambda \\ z = -3\lambda \end{cases}$$

2.2 Apartado a): Posición relativa de r y s

Solución — apartado a)

Paso 1. ¿Son paralelas? Comprobamos si $\mathbf{u}_r \parallel \mathbf{u}_s$:

$$\mathbf{u}_r = (2,-1,3), \qquad \mathbf{u}_s = (4,-1,-3).$$

Para ser paralelos necesitaríamos que existiese λ tal que $(2,-1,3) =$

$\lambda(4,-1,-3)$. De la primera componente: $\lambda = 1/2$. De la segunda: $-1 = \lambda\cdot(-1) \Rightarrow \lambda = 1$. Contradicción:

$$\mathbf{u}_r \nparallel \mathbf{u}_s \;\Rightarrow\; \text{no son paralelas.}$$

Paso 2. ¿Se cortan o son alabeadas?
Usamos el criterio del rango de la matriz extendida. Formamos el vector $\mathbf{AB} = A_s - A_r$:

$$\mathbf{AB} = \left(\frac{7}{3}-(-1),\ \frac{2}{3}-2,\ 0-(-2)\right) = \left(\frac{10}{3},\ -\frac{4}{3},\ 2\right).$$

Calculamos el producto mixto (triple escalar) $[\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_s, \mathbf{AB}]$:

$$[\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_s, \mathbf{AB}] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & -3 \\ \frac{10}{3} & -\frac{4}{3} & 2 \end{vmatrix}$$

Desarrollamos por la primera fila:

$$= 2\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -\frac{4}{3} & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ \frac{10}{3} & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ \frac{10}{3} & -\frac{4}{3} \end{vmatrix}$$

$$= 2\big((-1)(2)-(-3)\left(-\tfrac{4}{3}\right)\big) + \big(4\cdot 2-(-3)\cdot\tfrac{10}{3}\big) + 3\big(4\cdot\left(-\tfrac{4}{3}\right)-(-1)\cdot\tfrac{10}{3}\big)$$

$$= 2(-2-4) + (8+10) + 3\big(-\tfrac{16}{3}+\tfrac{10}{3}\big)$$

$$= 2(-6) + 18 + 3\big(-\tfrac{6}{3}\big) = -12+18+3(-2) = -12+18-6 = 0.$$

Como el producto mixto es 0, las rectas son **coplanarias**. Al no ser paralelas, son **secantes** (se cortan en un punto).

r y s son rectas secantes (se cortan en un punto).

2.3 Apartado b): Punto de corte de r y s

Solución — apartado b)

Método. Igualamos las ecuaciones paramétricas de r y s e imponemos la igualdad de coordenadas.

$$\begin{cases} -1+2t = \dfrac{7}{3}+4\lambda \\ 2-t = \dfrac{2}{3}-\lambda \\ -2+3t = -3\lambda \end{cases}$$

De la tercera ecuación: $\lambda = \dfrac{2-3t}{3}$.

Sustituimos en la segunda:

$$2 - t = \frac{2}{3} - \frac{2 - 3t}{3} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{3t}{3} = t.$$

$$2 - t = t \;\Rightarrow\; 2 = 2t \;\Rightarrow\; t = 1.$$

Con $t = 1$**:** $\lambda = \dfrac{2-3}{3} = \dfrac{-1}{3}$.
Verificamos con la primera ecuación:

$$-1 + 2(1) = 1, \qquad \frac{7}{3} + 4\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{3} - \frac{4}{3} = 1. \checkmark$$

Punto de corte (con $t = 1$ en r):

$$x = -1 + 2(1) = 1, \quad y = 2 - 1 = 1, \quad z = -2 + 3(1) = 1.$$

$$\boxed{r \cap s = (1,\ 1,\ 1)}$$

Verificación: comprobamos que $(1, 1, 1)$ satisface α_1 y α_2:

- α_1: $1 + 1 + 1 = 3$ ✓.
- α_2: $2(1) - 1 + 3(1) = 2 - 1 + 3 = 4$ ✓.

2.4 Apartado c): Plano π que contiene a r y a s

Solución — apartado c)

Idea. Como r y s son secantes, determinan un único plano. El vector normal de ese plano es perpendicular a los directores de ambas rectas, es decir:

$$\mathbf{n} = \mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_s.$$

Paso 1. Producto vectorial.

$$\mathbf{n} = \mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_s = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}((-1)(-3) - 3(-1)) - \mathbf{j}(2(-3) - 3 \cdot 4) + \mathbf{k}(2(-1) - (-1)4)$$
$$= \mathbf{i}(3 + 3) - \mathbf{j}(-6 - 12) + \mathbf{k}(-2 + 4) = (6,\ 18,\ 2).$$

Podemos simplificar dividiendo por 2:

$$\mathbf{n} = (3,\ 9,\ 1).$$

Paso 2. Ecuación del plano.
Usamos el punto de corte $C = (1, 1, 1)$ (que pertenece a ambas rectas, por tanto al plano):

$$3(x - 1) + 9(y - 1) + 1(z - 1) = 0$$

$$3x - 3 + 9y - 9 + z - 1 = 0$$
$$3x + 9y + z - 13 = 0.$$

$$\boxed{\pi \equiv 3x + 9y + z - 13 = 0}$$

Verificaciones:

- $C = (1, 1, 1)$: $3 + 9 + 1 - 13 = 0$ ✓.
- $A_r = (-1, 2, -2)$: $3(-1) + 9(2) + (-2) - 13 = -3 + 18 - 2 - 13 = 0$ ✓.
- $A_s = (7/3, 2/3, 0)$: $3(7/3) + 9(2/3) + 0 - 13 = 7 + 6 - 13 = 0$ ✓.

2.5 Apartado d): Recta t paralela a r por $Q(1, 1, 0)$

Solución — apartado d)

Idea. Una recta paralela a r comparte su vector director $\mathbf{u}_r = (2, -1, 3)$. Solo cambia el punto de paso.

Ecuaciones paramétricas de t:

$$t \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\mu \\ y = 1 - \mu \\ z = 0 + 3\mu = 3\mu \end{cases} \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$

Ecuaciones simétricas:

$$\boxed{t \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{3}}$$

Nota:

Las rectas r y t son distintas (no coinciden) porque $Q = (1, 1, 0)$ no pertenece a r: sustituyendo en r, de $x = 1$ obtenemos $t = 1$, pero $y = 2-1 = 1$ ✓ y $z = -2 + 3 = -1 \neq 0$. Como $z \neq 0$, $Q \notin r$.

2.6 Apartado e): Distancia de la recta t al plano π

Solución — apartado e)

Paso 1. ¿Es t paralela a π?
Para que $t \parallel \pi$ necesitamos que $\mathbf{u}_t \perp \mathbf{n}_\pi$:

$$\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{n}_\pi = (2, -1, 3) \cdot (3, 9, 1) = 6 - 9 + 3 = 0.$$ ✓

La recta t es efectivamente paralela al plano π.
Paso 2. Verificar que $t \not\subset \pi$.

El punto $Q = (1, 1, 0)$ pertenece a t. ¿Está en π?

$$3(1) + 9(1) + 0 - 13 = 3 + 9 - 13 = -1 \neq 0.$$

Por tanto $Q \notin \pi$, luego $t \not\subset \pi$. La recta t es paralela y exterior al plano.
Paso 3. La distancia de t a π es la distancia de Q a π.

$$d(t, \pi) = d(Q, \pi) = \frac{|3(1) + 9(1) + 0 - 13|}{\sqrt{3^2 + 9^2 + 1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{9 + 81 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{91}}.$$

Racionalizando:

$$\boxed{d(t, \pi) = \frac{1}{\sqrt{91}} = \frac{\sqrt{91}}{91} \approx 0{,}105}$$

2.7 Apartado f): Posición relativa de s y t, y distancia

Solución — apartado f)

Datos:

$$\mathbf{u}_s = (4, -1, -3), \qquad A_s = \left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, 0\right),$$

$$\mathbf{u}_t = (2, -1, 3), \qquad Q = (1, 1, 0).$$

Paso 1. ¿Son paralelas? ¿Existe k tal que $(4, -1, -3) = k(2, -1, 3)$? De la primera componente: $k = 2$. De la segunda: $-1 = k(-1) \Rightarrow k = 1$. Contradicción $\Rightarrow$ **no son paralelas**.
Paso 2. Producto vectorial $\mathbf{u}_s \times \mathbf{u}_t$:

$$\mathbf{u}_s \times \mathbf{u}_t = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}((-1)(3) - (-3)(-1)) - \mathbf{j}((4)(3) - (-3)(2)) + \mathbf{k}((4)(-1) - (-1)(2))$$

$$= \mathbf{i}(-3 - 3) - \mathbf{j}(12 + 6) + \mathbf{k}(-4 + 2) = (-6, -18, -2).$$

Paso 3. Producto mixto para decidir si se cortan o son alabeadas:
Vector $\mathbf{A_sQ} = Q - A_s = \left(1 - \frac{7}{3}, 1 - \frac{2}{3}, 0\right) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$.

$$[\mathbf{u}_s, \mathbf{u}_t, \mathbf{A_sQ}] = \mathbf{A_sQ} \cdot (\mathbf{u}_s \times \mathbf{u}_t) = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{6}{1}, \frac{1}{3}\right) \cdot (-6, -18, -2)$$

Cuidado: usamos $\mathbf{A_sQ} \cdot (\mathbf{u}_s \times \mathbf{u}_t)$:

$$= \left(-\frac{4}{3}\right)(-6) + \left(\frac{1}{3}\right)(-18) + (0)(-2) = 8 - 6 + 0 = 2 \neq 0.$$

El producto mixto es $\neq 0$, por tanto las rectas s y t son **alabeadas** (no se cortan, no son paralelas).

$$\boxed{s \text{ y } t \text{ son rectas alabeadas.}}$$

Distancia entre rectas alabeadas. La fórmula es:

$$d(s,t) = \frac{|\mathbf{A_sQ} \cdot (\mathbf{u}_s \times \mathbf{u}_t)|}{|\mathbf{u}_s \times \mathbf{u}_t|}.$$

Numerador: $|\mathbf{A_sQ} \cdot (\mathbf{u}_s \times \mathbf{u}_t)| = |2| = 2$.
Denominador:

$$|\mathbf{u}_s \times \mathbf{u}_t| = |(-6,-18,-2)| = \sqrt{36+324+4} = \sqrt{364} = 2\sqrt{91}.$$

$$d(s,t) = \frac{2}{2\sqrt{91}} = \frac{1}{\sqrt{91}} = \frac{\sqrt{91}}{91} \approx 0{,}105.$$

$$\boxed{d(s,t) = \frac{1}{\sqrt{91}} = \frac{\sqrt{91}}{91} \approx 0{,}105}$$

Nota:

Observamos que $d(t,\pi) = d(s,t) = \dfrac{1}{\sqrt{91}}$. Esto es coherente: como $s \subset \pi$ y $t \parallel \pi$, la distancia de t a cualquier recta contenida en π que sea alabeada con t es exactamente $d(t,\pi)$.

Capítulo 3

Ejercicio 3: Recta y plano — posición relativa, distancia y simétrica

Enunciado — Ejercicio 3

Dadas la recta:

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{k} = \frac{z-4}{-1}$$

y el plano $\pi \equiv x + y + z = 5$:

a) Estúdiese la posición relativa de la recta y el plano en función del valor del parámetro k.

b) Para $k = 1$, calcúlese el punto de corte de r y π.

c) Para $k = 0$, calcúlese la distancia entre r y π.

d) Para $k = 0$, calcúlese la recta simétrica de r respecto al plano π.

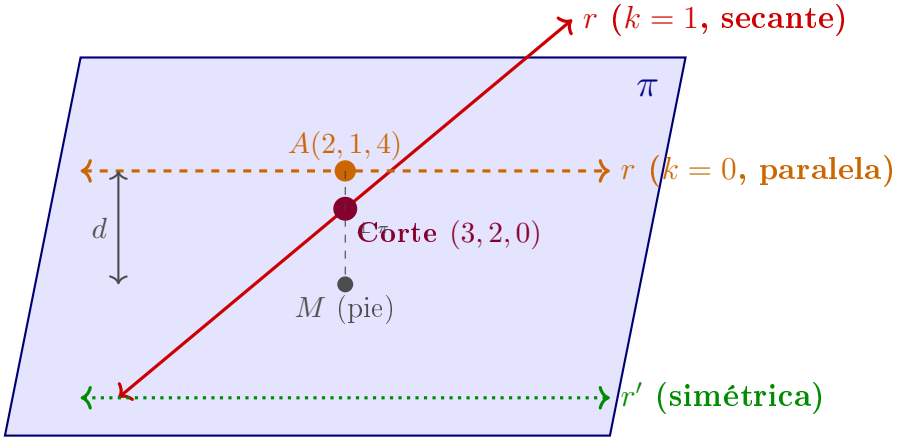


Figura 3.1: Los tres casos de la posición relativa de r y π. Con $k = 1$, la recta es secante. Con $k = 0$ (o $k = -2$), la recta es paralela al plano. La recta r' es la simétrica de r ($k = 0$) respecto de π.

3.1 Datos de la recta y el plano

La recta r en forma paramétrica es:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + kt \\ z = 4 - t \end{cases}$$

Vector director: $\mathbf{u} = (1, k, -1)$.
Punto de r: $A = (2, 1, 4)$.
El plano: $\pi \equiv x + y + z - 5 = 0$, con vector normal $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$.

3.2 Apartado a): Posición relativa en función de k

Solución — apartado a)

La posición relativa de una recta y un plano depende de si el vector director es perpendicular al normal del plano (condición de paralelismo) o no.

Condición de paralelismo/contenida:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \iff (1, k, -1) \cdot (1, 1, 1) = 1 + k - 1 = k = 0.$$

Caso I: $k \neq 0$ — **la recta y el plano son secantes.**
Como $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, la recta no es paralela al plano; se cruzan en exactamente un punto.
Caso II: $k = 0$**.**
El vector director $\mathbf{u} = (1, 0, -1)$ es perpendicular a $\mathbf{n}$, por lo que $r \parallel \pi$ o $r \subset \pi$.
Distinguimos:
¿Pertenece el punto $A = (2, 1, 4)$ a π?

$$2 + 1 + 4 = 7 \neq 5.$$

Por tanto $A \notin \pi$, luego la recta es **paralela y exterior** al plano.

Condición	Posición relativa
$k \neq 0$	Recta secante al plano (se cortan en un punto)
$k = 0$	Recta paralela al plano (exterior)

Nota:

No existe ningún valor de k para el que la recta esté contenida en el plano, pues el punto $A = (2, 1, 4)$ no pertenece nunca a π ($2 + 1 + 4 = 7 \neq 5$), independientemente de k.

$$\boxed{k = 0 \Rightarrow r \parallel \pi; \quad k \neq 0 \Rightarrow r \cap \pi = \{\text{punto}\}.}$$

3.3 Apartado b): Punto de corte para $k = 1$

Solución — apartado b)

Con $k = 1$, las ecuaciones paramétricas de r son:

$$x = 2 + t, \quad y = 1 + t, \quad z = 4 - t.$$

Sustituimos en $\pi \equiv x + y + z = 5$:

$$(2 + t) + (1 + t) + (4 - t) = 5.$$

$$7 + t = 5 \;\Rightarrow\; t = -2.$$

Punto de corte:

$$x = 2 + (-2) = 0, \quad y = 1 + (-2) = -1, \quad z = 4 - (-2) = 6.$$

$$\boxed{r \cap \pi = (0,\ -1,\ 6) \quad (\text{para } k = 1)}$$

Verificación: $0 + (-1) + 6 = 5$ ✓.

3.4 Apartado c): Distancia de r a π para $k = 0$

Solución — apartado c)

Con $k = 0$, la recta es paralela al plano. La distancia entre una recta paralela a un plano y dicho plano es la distancia de cualquier punto de la recta al plano. Tomamos el punto $A = (2, 1, 4) \in r$:

$$d(r, \pi) = d(A, \pi) = \frac{|2 + 1 + 4 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\boxed{d(r, \pi) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}155 \quad (\text{para } k = 0)}$$

3.5 Apartado d): Recta simétrica de r respecto a π para $k = 0$

Solución — apartado d)

Con $k = 0$, la recta r tiene ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 \\ z = 4 - t \end{cases} \qquad \mathbf{u}_r = (1, 0, -1).$$

Método. Para encontrar la recta simétrica de r respecto a π:

1. Tomamos dos puntos de r.
2. Calculamos los simétricos de esos dos puntos respecto a π.
3. La recta que pasa por los dos simétricos es la recta simétrica.

Paso 1. Tomar dos puntos de r.
Con $t = 0$: $A = (2, 1, 4)$.
Con $t = 1$: $B = (3, 1, 3)$.

Paso 2. Encontrar el simétrico de A respecto a π.

2a. Recta perpendicular a π por A:

$$\ell_A \equiv \begin{cases} x = 2 + s \\ y = 1 + s \\ z = 4 + s \end{cases} \qquad (\text{director } \mathbf{n} = (1, 1, 1)).$$

2b. Pie de la perpendicular $M_A = \ell_A \cap \pi$:

$$(2 + s) + (1 + s) + (4 + s) = 5 \;\Rightarrow\; 7 + 3s = 5 \;\Rightarrow\; s = -\frac{2}{3}.$$

$$M_A = \left(2 - \frac{2}{3},\ 1 - \frac{2}{3},\ 4 - \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{4}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{10}{3}\right).$$

2c. Simétrico $A' = 2M_A - A$:

$$A' = 2\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{10}{3}\right) - (2, 1, 4) = \left(\frac{8}{3} - 2,\ \frac{2}{3} - 1,\ \frac{20}{3} - 4\right) = \left(\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{8}{3}\right).$$

Paso 3. Encontrar el simétrico de B respecto a π.

3a. Recta perpendicular a π por B:

$$\ell_B \equiv \begin{cases} x = 3 + s \\ y = 1 + s \\ z = 3 + s \end{cases}$$

3b. Pie $M_B = \ell_B \cap \pi$:

$$(3 + s) + (1 + s) + (3 + s) = 5 \;\Rightarrow\; 7 + 3s = 5 \;\Rightarrow\; s = -\frac{2}{3}.$$

$$M_B = \left(\frac{7}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{7}{3}\right).$$

3c. Simétrico $B' = 2M_B - B$:

$$B' = 2\left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right) - (3, 1, 3) = \left(\frac{14}{3} - 3,\ \frac{2}{3} - 1,\ \frac{14}{3} - 3\right) = \left(\frac{5}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{5}{3}\right).$$

Paso 4. Recta simétrica r'.

Pasa por $A' = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$ con vector director:

$$\mathbf{u}_{r'} = B' - A' = \left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3},\ -\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right),\ \frac{5}{3} - \frac{8}{3}\right) = (1,\ 0,\ -1).$$

Nota:

El vector director de la recta simétrica es el mismo que el de r, pues la reflexión respecto a un plano conserva la dirección paralela al plano. El vector $(1, 0, -1)$ satisface $(1, 0, -1) \cdot (1, 1, 1) = 0$, por lo que es paralelo a π: geométricamente consistente.

Ecuaciones paramétricas de r':

$$r' \equiv \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} + \mu \\ y = -\dfrac{1}{3} \\ z = \dfrac{8}{3} - \mu \end{cases}$$

Ecuaciones simétricas:

$$\boxed{r' \equiv \frac{x - \frac{2}{3}}{1} = \frac{z - \frac{8}{3}}{-1}, \quad y = -\frac{1}{3}}$$

O multiplicando por 3 para evitar fracciones en el punto:

$$r' \equiv \frac{3x - 2}{3} = \frac{3z - 8}{-3}, \quad y = -\frac{1}{3}.$$

Verificaciones finales:

1. A' y B' están a distancia $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ de π (al otro lado de π que A y B):

$$d(A', \pi) = \frac{\left|\frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - 5\right|}{\sqrt{3}} = \frac{\left|\frac{9}{3} - 5\right|}{\sqrt{3}} = \frac{|-2|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \checkmark.$$

2. A' y B' están al lado opuesto que A y B respecto a π: A da $7 > 5$ (plano vale 5); A' da $3 < 5$ ✓.

3. $d(r', \pi) = d(A', \pi) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} = d(r, \pi)$ ✓.

Conclusión:

La recta simétrica de r (con $k = 0$) respecto al plano $\pi \equiv x+y+z = 5$ tiene vector director $(1, 0, -1)$ (el mismo que r, pues la componente paralela al plano no cambia al reflejar) y pasa por el punto $A' = \left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{8}{3}\right)$.

Resumen de resultados

Ej.	**Apartado**	**Resultado**
1a	Recta $r \perp \pi$ por P	$\dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{2}$
1b	Corte $r \cap \pi$	$M = (0,0,0)$
1c	Plano π' paralelo a π por P	$-x + y + 2z - 6 = 0$
1d	$d(\pi, \pi')$	$\sqrt{6} \approx 2{,}449$
1e	Simétrico Q de P resp. π	$Q = (1, -1, -2)$
2a	Posición r, s	Secantes (se cortan)
2b	Corte $r \cap s$	$(1, 1, 1)$
2c	Plano $\pi \supset r, s$	$3x + 9y + z - 13 = 0$
2d	Recta $t \parallel r$ por Q	$\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{3}$
2e	$d(t, \pi)$	$\dfrac{\sqrt{91}}{91} \approx 0{,}105$
2f	Posición s, t y distancia	Alabeadas; $d = \dfrac{\sqrt{91}}{91}$
3a	Posición r, π vs. k	$k = 0 \Rightarrow$ paralelas; $k \neq 0 \Rightarrow$ secantes
3b	Corte $r \cap \pi$ $(k = 1)$	$(0, -1, 6)$
3c	$d(r, \pi)$ $(k = 0)$	$\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}155$
3d	Recta simétrica $(k = 0)$	$\dfrac{x - 2/3}{1} = \dfrac{z - 8/3}{-1}$, $y = -\dfrac{1}{3}$

EXAMEN DE MATEMÁTICAS
2º BACH MAYO 2025
ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

Nº1.- En una empresa dedicada a la fabricación de teléfonos móviles, tres máquinas A, B y C, finalizan el proceso de producción con la colocación de las carcasas. La máquina A gestiona el 55% de la producción total de la fábrica; la máquina B, el 30%; la C, el 15%. El 1% de los móviles que han pasado por la máquina A tienen algún defecto en su carcasa. En el caso de la máquina B, se trata del 2%. En la C, es del 4%.

a) Calcular la probabilidad de que escogido un móvil al azar, éste no tenga defectos en su carcasa.

b) Calcular la probabilidad de que un móvil tenga la carcasa defectuosa y proceda de la máquina C.

c) Se escoge al azar un móvil con deficiencias en su carcasa. ¿Qué máquina tiene la menor probabilidad de haber colocado esa pieza?

Nº2.- Se consideran los sucesos A y B tales que P(A) = 0,84, P(B) = 0,5 y $P(\bar{A}/\bar{B})$ = 0,12. Entonces:

a) ¿Son independientes los sucesos A y B?

b) Calcula la probabilidad de que ocurran A y B

c) Calcula la probabilidad de que ocurran A y no B.

Nº3.- En unos grandes almacenes, el 60 % de las compras de un determinado mes se pagaron con tarjeta de crédito. De ellas, el 10 % fueron posteriormente devueltas. Además, se sabe que entre las compras devueltas de las realizadas ese mes, un 50 % habían sido pagadas con tarjeta. Elegida una compra de ese mes al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se haya pagado con tarjeta y posteriormente se haya devuelto?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que se haya devuelto posteriormente?

c) ¿Qué porcentaje de compras se compran al contado y no son devueltas posteriormente?

Nº4.- El peso medio según la OMS de un niño de 5 años sigue una distribución normal de media 18,5 kg y desviación típica 2,25 kg. Si se elige un niño al azar, Halla el porcentaje de niños

a) cuyo peso es superior a 23 kg.

b) cuyo peso está entre 14 y 23 kg

Nº5. El tiempo que un alumno puede estar concentrado y escuchar al profesor en una clase de Matemáticas se modela como una distribución normal de media 15 minutos y desviación típica 5 minutos.

a) Calcúlese la probabilidad de que un alumno esté concentrado más de 20 minutos.

b) Halla la probabilidad de que un alumno esté concentrado menos de 10 minutos.

c) Si la probabilidad de que un alumno esté concentrado más de un determinado número de minutos es 0,75. Halla cuántos minutos está concentrado

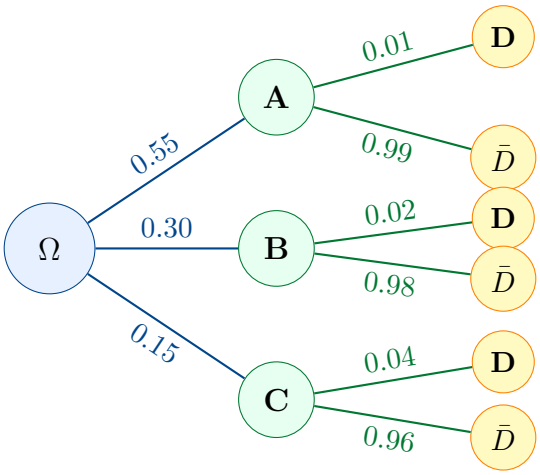
SUERTE JÓVENES

STADÍSTICA Y PROBABILIDA

Examen de Matemáticas

2º Bachillerato — Mayo 2025

IES Antonio Tovar — Junta de Castilla y León



Contenidos del examen:

Nº1	Probabilidad total y Teorema de Bayes
Nº2	Independencia de sucesos y probabilidad condicional
Nº3	Probabilidad condicionada y Teorema de la probabilidad total
Nº4	Distribución Normal — Cálculo de percentiles
Nº5	Distribución Normal — Cálculo inverso

Soluciones completas y razonadas

Con fundamentos teóricos, diagramas y comentarios pedagógicos

Curso 2024–2025

Índice general

1. Fundamentos Teóricos Previos **2**
1.1. Conceptos fundamentales de probabilidad 2
1.2. Distribución Normal 3

2. Examen: Estadística y Probabilidad — Mayo 2025 **5**
2.1. Ejercicio 1 — Fabricación de teléfonos móviles (Bayes) 5
2.2. Ejercicio 2 — Independencia y probabilidad condicional 10
2.3. Ejercicio 3 — Grandes almacenes (Probabilidad condicionada) 13
2.4. Ejercicio 4 — Peso de niños (Distribución Normal) 16
2.5. Ejercicio 5 — Concentración en clase (Normal inversa) 19

3. Resumen de Resultados y Conclusiones **24**

Capítulo 1

Fundamentos Teóricos Previos

En este capítulo se recogen los fundamentos teóricos imprescindibles para resolver todos los ejercicios del examen. El alumno debe dominarlos antes de intentar la resolución de los problemas.

1.1 Conceptos fundamentales de probabilidad

Fundamento teórico

Definición (Probabilidad clásica de Laplace): Dado un espacio muestral finito Ω con sucesos igualmente probables, la probabilidad de un suceso $A \subseteq \Omega$ es:

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables a } A}{\text{casos posibles totales}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Fundamento teórico

Axiomas de Kolmogorov: Toda función de probabilidad P sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ satisface:

1. $P(A) \geq 0$ para todo suceso A.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Si A y B son mutuamente excluyentes ($A \cap B = \emptyset$), entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Fundamento teórico

Probabilidad condicionada: La probabilidad de que ocurra el suceso A sabiendo que ha ocurrido el suceso B (con $P(B) > 0$) es:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

De esta definición se deduce directamente la **regla del producto**:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B) = P(B \mid A) \cdot P(A)$$

Fundamento teórico

Independencia de sucesos: Dos sucesos A y B son **independientes** si y sólo si:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Equivalentemente, A y B son independientes si y sólo si $P(A \mid B) = P(A)$, o bien $P(B \mid A) = P(B)$.

Fundamento teórico

Teorema de la Probabilidad Total: Sea $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ una partición del espacio muestral Ω (es decir, los B_i son mutuamente excluyentes y su unión es Ω, con $P(B_i) > 0$ para todo i). Entonces para cualquier suceso A:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)$$

Fundamento teórico

Teorema de Bayes: Bajo las mismas condiciones del teorema anterior, la probabilidad *a posteriori* de B_k dado que ha ocurrido A es:

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \mid B_k) \cdot P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)}$$

Este teorema permite "invertir" la causalidad: pasar de las probabilidades condicionadas $P(A \mid B_i)$ (que conocemos) a las probabilidades $P(B_k \mid A)$ (que buscamos).

1.2 Distribución Normal

Fundamento teórico

Definición: Una variable aleatoria continua X sigue una distribución **Normal** o **Gaussiana** de parámetros μ (media) y σ (desviación típica), notado $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, si su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Fundamento teórico

Tipificación o estandarización: Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces la variable:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

sigue una distribución $\mathcal{N}(0, 1)$, llamada **Normal estándar**. De este modo:

$$P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

donde Φ denota la función de distribución acumulada de la Normal estándar, cuyos valores se obtienen de las tablas estadísticas.

Fundamento teórico

Propiedades de la función Φ:

- $\Phi(0) = 0{,}5$ (por simetría).
- $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ (simetría respecto al origen).
- $P(Z > z) = 1 - \Phi(z)$.
- $P(a \leq Z \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Capítulo 2

Examen: Estadística y Probabilidad — Mayo 2025

2.1 Ejercicio Nº1: Fabricación de teléfonos móviles

Probabilidad total y Teorema de Bayes

Enunciado

En una empresa dedicada a la fabricación de teléfonos móviles, tres máquinas A, B y C finalizan el proceso de producción con la colocación de las carcasas. La máquina A gestiona el 55 % de la producción total de la fábrica; la máquina B, el 30 %; la C, el 15 %. El 1 % de los móviles que han pasado por la máquina A tienen algún defecto en su carcasa. En el caso de la máquina B, se trata del 2 %. En la C, es del 4 %.

a) Calcular la probabilidad de que escogido un móvil al azar, éste **no tenga defectos** en su carcasa.

b) Calcular la probabilidad de que un móvil tenga la carcasa **defectuosa y proceda de la máquina C**.

c) Se escoge al azar un móvil con deficiencias en su carcasa. ¿Qué máquina tiene la **menor probabilidad** de haber colocado esa pieza?

Diagrama de árbol del problema

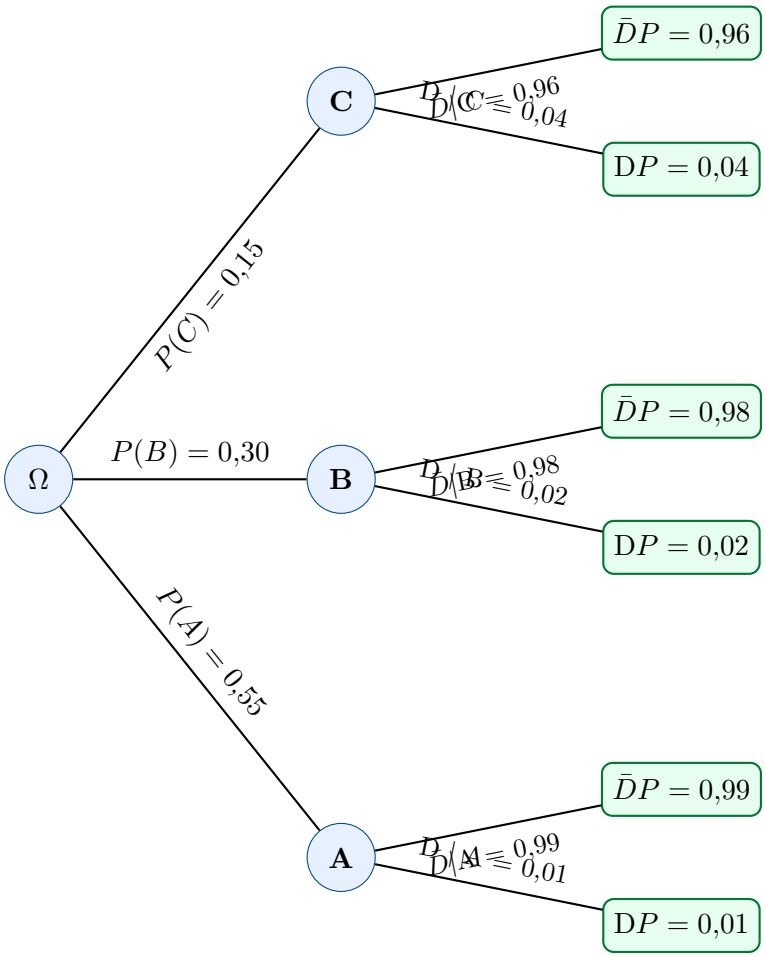


Figura 2.1: Diagrama de árbol del Ejercicio 1. Los nodos intermedios representan las máquinas (causas) y las hojas representan el resultado (defectuoso D o correcto $\bar{D}$).

Identificación de sucesos y datos

Definimos formalmente los sucesos:

- A = "el móvil ha sido producido por la máquina A"
- B = "el móvil ha sido producido por la máquina B"
- C = "el móvil ha sido producido por la máquina C"
- D = "el móvil tiene defecto en la carcasa"
- $\bar{D}$ = "el móvil no tiene defecto en la carcasa"

Los sucesos A, B y C forman una **partición** del espacio muestral Ω, ya que son mutuamente excluyentes y exhaustivos:

$$A \cup B \cup C = \Omega, \qquad A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$$

Datos del problema (probabilidades *a priori* y condicionales):

$$P(A) = 0{,}55 \qquad P(B) = 0{,}30 \qquad P(C) = 0{,}15$$

$$P(D \mid A) = 0{,}01 \qquad P(D \mid B) = 0{,}02 \qquad P(D \mid C) = 0{,}04$$

Verificación de la partición: $P(A) + P(B) + P(C) = 0{,}55 + 0{,}30 + 0{,}15 = 1{,}00$ ✓

Apartado a) Probabilidad de que un móvil no tenga defecto

Solución

Método utilizado: Teorema de la Probabilidad Total.
Buscamos $P(\bar{D})$. Como D y $\bar{D}$ son complementarios, tenemos:

$$P(\bar{D}) = 1 - P(D)$$

Por tanto, calculemos primero $P(D)$ aplicando el **Teorema de la Probabilidad Total**:

$$P(D) = P(D \mid A) \cdot P(A) + P(D \mid B) \cdot P(B) + P(D \mid C) \cdot P(C)$$

Sustituyendo los valores:

$$P(D) = (0{,}01)(0{,}55) + (0{,}02)(0{,}30) + (0{,}04)(0{,}15)$$

Calculamos cada sumando por separado:

$$P(D \mid A) \cdot P(A) = 0{,}01 \times 0{,}55 = 0{,}0055$$
$$P(D \mid B) \cdot P(B) = 0{,}02 \times 0{,}30 = 0{,}0060$$
$$P(D \mid C) \cdot P(C) = 0{,}04 \times 0{,}15 = 0{,}0060$$

Sumando:

$$P(D) = 0{,}0055 + 0{,}0060 + 0{,}0060 = 0{,}0175$$

Por tanto:

$$\boxed{P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0{,}0175 = 0{,}9825}$$

Interpretación: El 98,25 % de los móviles fabricados no tienen ningún defecto en su carcasa.

Observación importante

El Teorema de la Probabilidad Total es la herramienta adecuada cuando conocemos las probabilidades condicionadas $P(D \mid A_i)$ y queremos calcular la probabilidad "global" de D sin conocer de qué máquina proviene el móvil. Este teorema "descompone" el suceso D según todas las posibles causas (máquinas A, B y C).

Error frecuente — ¡Atención!

Un error frecuente es calcular $P(D)$ como la media aritmética de los porcentajes de defecto: $\frac{0{,}01+0{,}02+0{,}04}{3} \approx 0{,}0233$. Esto es **incorrecto** porque las tres máquinas no producen el mismo porcentaje total. Hay que ponderar cada tasa de defecto con la proporción de producción de cada máquina.

Apartado b) Probabilidad de que el móvil sea defectuoso y proceda de la máquina C

Solución

Buscamos $P(D \cap C)$, es decir, la probabilidad de que un móvil elegido al azar *simultáneamente* sea defectuoso *y* haya pasado por la máquina C.
Aplicamos directamente la **regla del producto** (que es consecuencia directa de la definición de probabilidad condicional):

$$P(D \cap C) = P(D \mid C) \cdot P(C)$$

Sustituyendo:

$$P(D \cap C) = 0{,}04 \times 0{,}15 = 0{,}006$$

$$\boxed{P(D \cap C) = 0{,}006}$$

Interpretación: El 0,6 % de todos los móviles fabricados están defectuosos y han pasado por la máquina C.

Observación importante

Este valor corresponde al producto del "camino" en el árbol de probabilidad: desde la raíz hasta la hoja "C → D". En efecto, siguiendo el árbol (Figura 2.1):

$$P(C) \times P(D \mid C) = 0{,}15 \times 0{,}04 = 0{,}006$$

Apartado c) ¿Qué máquina tiene menor probabilidad de haber producido un móvil defectuoso?

Solución

Método utilizado: Teorema de Bayes.
Sabemos que el móvil tiene defecto (suceso D ha ocurrido). Buscamos las probabilidades *a posteriori*:

$$P(A \mid D), \quad P(B \mid D), \quad P(C \mid D)$$

Aplicamos el **Teorema de Bayes** para cada máquina. El denominador es $P(D) = 0{,}0175$ (calculado en el apartado a).

Para la máquina A:

$$P(A \mid D) = \frac{P(D \mid A) \cdot P(A)}{P(D)} = \frac{0{,}01 \times 0{,}55}{0{,}0175} = \frac{0{,}0055}{0{,}0175}$$

$$P(A \mid D) = \frac{0{,}0055}{0{,}0175} = \frac{55}{175} = \frac{11}{35} \approx 0{,}3143$$

Para la máquina B:

$$P(B \mid D) = \frac{P(D \mid B) \cdot P(B)}{P(D)} = \frac{0{,}02 \times 0{,}30}{0{,}0175} = \frac{0{,}0060}{0{,}0175}$$

$$P(B \mid D) = \frac{0{,}006}{0{,}0175} = \frac{60}{175} = \frac{12}{35} \approx 0{,}3429$$

Para la máquina C:

$$P(C \mid D) = \frac{P(D \mid C) \cdot P(C)}{P(D)} = \frac{0{,}04 \times 0{,}15}{0{,}0175} = \frac{0{,}0060}{0{,}0175}$$

$$P(C \mid D) = \frac{0{,}006}{0{,}0175} = \frac{60}{175} = \frac{12}{35} \approx 0{,}3429$$

Verificación: La suma de las probabilidades *a posteriori* debe ser 1:

$$P(A \mid D) + P(B \mid D) + P(C \mid D) = \frac{11}{35} + \frac{12}{35} + \frac{12}{35} = \frac{35}{35} = 1 \checkmark$$

Tabla resumen:

Máquina	$P(M_i)$	$P(D \mid M_i)$	$P(D \cap M_i)$	$P(M_i \mid D)$
A	0,55	0,01	0,0055	$11/35 \approx 0{,}3143$
B	0,30	0,02	0,0060	$12/35 \approx 0{,}3429$
C	0,15	0,04	0,0060	$12/35 \approx 0{,}3429$
Total	1,00		0,0175	1,0000

La máquina A tiene la menor probabilidad: $P(A \mid D) \approx 0{,}3143$

Interpretación: Dado que el móvil está defectuoso, hay un 31,43 % de probabilidad de que venga de la máquina A, y un 34,29 % de que venga de B o de C respectivamente. Por tanto, la **máquina A** es la que tiene *menor* probabilidad de ser la responsable del defecto.

Observación importante

¿Por qué la máquina A tiene menor probabilidad a posteriori a pesar de fabricar más? Aunque A produce el 55 % de los móviles, su tasa de defecto es muy baja (1 %). En cambio, C sólo produce el 15 % pero con una tasa de defecto del 4 %. Estas dos informaciones se "compensan" de forma que B y C resultan igualmente sospechosas, y A es la menos probable. Esto ilustra perfectamente la utilidad del Teorema de Bayes: actualizar creencias previas con evidencia nueva.

2.2 Ejercicio Nº2: Independencia de sucesos y probabilidad condicional

Enunciado

Se consideran los sucesos A y B tales que $P(A) = 0{,}84$, $P(B) = 0{,}5$ y $P(\bar{A}/\bar{B}) = 0{,}12$.

a) ¿Son independientes los sucesos A y B?

b) Calcula la probabilidad de que ocurran A y B.

c) Calcula la probabilidad de que ocurran A y no B.

Diagrama de Venn del problema

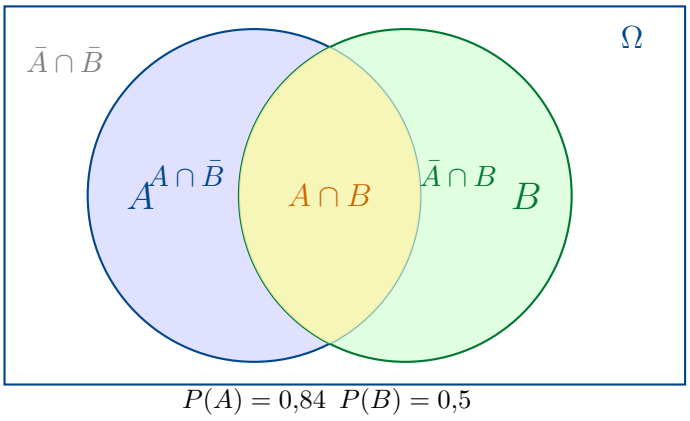


Figura 2.2: Diagrama de Venn para los sucesos A y B del Ejercicio 2.

Extracción de información del dato $P(\bar{A}/\bar{B}) = 0{,}12$

Solución

El dato $P(\bar{A}/\bar{B}) = 0{,}12$ significa: *dado que B no ha ocurrido, la probabilidad de que tampoco ocurra A es 0,12.*
Por la definición de probabilidad condicional:

$$P(\bar{A}\,|\,\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = 0{,}12$$

Calculamos $P(\bar{B})$:

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$$

Despejamos $P(\bar{A} \cap \bar{B})$:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}\,|\,\bar{B}) \cdot P(\bar{B}) = 0{,}12 \times 0{,}5 = 0{,}06$$

Ahora, usando las leyes de Morgan y complementariedad:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

Por tanto:

$$1 - P(A \cup B) = 0{,}06 \implies P(A \cup B) = 0{,}94$$

Aplicamos la fórmula de la unión:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0{,}94 = 0{,}84 + 0{,}5 - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 0{,}84 + 0{,}5 - 0{,}94 = 1{,}34 - 0{,}94 = 0{,}40$$

Apartado a) ¿Son independientes A y B?

Solución

Dos sucesos son independientes si y sólo si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
Comprobamos:

$$P(A) \cdot P(B) = 0{,}84 \times 0{,}5 = 0{,}42$$

Hemos calculado:

$$P(A \cap B) = 0{,}40$$

Como $P(A \cap B) = 0{,}40 \neq 0{,}42 = P(A) \cdot P(B)$, los sucesos **no son independientes**.

$$\boxed{A \text{ y } B \textbf{ NO son independientes}}$$

Observación importante

La diferencia entre 0,40 y 0,42 es pequeña (sólo 0,02), pero matemáticamente suficiente para afirmar la dependencia. Los sucesos A y B presentan una ligera **correlación negativa**: ocurren juntos con menor frecuencia de la que cabría esperar si fueran independientes.

Apartado b) Probabilidad de que ocurran A y B

Solución

Ya calculamos este valor en el análisis previo de los datos:

$$\boxed{P(A \cap B) = 0{,}40}$$

Resumen del proceso de cálculo:

1. $P(\bar{B}) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$
2. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}12 \times 0{,}5 = 0{,}06$
3. $P(A \cup B) = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$
4. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}84 + 0{,}5 - 0{,}94 = 0{,}40$

Interpretación: La probabilidad de que ocurran simultáneamente ambos sucesos A y B es del 40 %.

Apartado c) Probabilidad de que ocurran A y no B

Solución

Buscamos $P(A \cap \bar{B})$.
El suceso A puede descomponerse en dos partes disjuntas:

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$$

y como estos dos sucesos son mutuamente excluyentes:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

Despejamos $P(A \cap \bar{B})$:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}84 - 0{,}40 = 0{,}44$$

$$\boxed{P(A \cap \bar{B}) = 0{,}44}$$

Interpretación: La probabilidad de que ocurra A pero no B es del 44 %.

Observación importante

Verificación de coherencia: Las cuatro regiones del diagrama de Venn deben sumar 1:

$$\begin{aligned} P(A\cap B)+P(A\cap\bar{B})+P(\bar{A}\cap B)+P(\bar{A}\cap\bar{B}) &= 1\\ 0{,}40+0{,}44+P(\bar{A}\cap B)+0{,}06 &= 1\\ P(\bar{A}\cap B) &= 1-0{,}40-0{,}44-0{,}06=0{,}10 \end{aligned}$$

Comprobación: $P(B)=P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B)=0{,}40+0{,}10=0{,}50$ ✓

2.3 Ejercicio Nº3: Grandes almacenes

Probabilidad condicionada y Teorema de la Probabilidad Total

Enunciado

En unos grandes almacenes, el 60 % de las compras de un determinado mes se pagaron con tarjeta de crédito. De ellas, el 10 % fueron posteriormente devueltas. Además, se sabe que entre las compras devueltas de las realizadas ese mes, un 50 % habían sido pagadas con tarjeta. Elegida una compra de ese mes al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se haya pagado con tarjeta y posteriormente se haya devuelto?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que se haya devuelto posteriormente?

c) ¿Qué porcentaje de compras se compran al contado y no son devueltas posteriormente?

Diagrama de árbol del problema

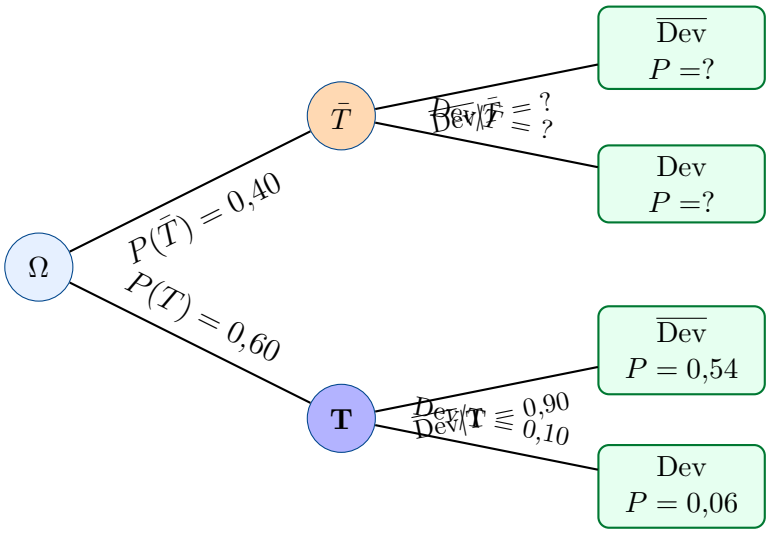


Figura 2.3: Diagrama de árbol del Ejercicio 3. T = pago con tarjeta, $\bar{T}$ = pago al contado, Dev = devuelta.

Identificación de sucesos y datos

- T = "la compra se pagó con tarjeta de crédito"
- $\bar{T}$ = "la compra se pagó al contado"
- Dev = "la compra fue devuelta"
- $\overline{\text{Dev}}$ = "la compra no fue devuelta"

Datos:

$$P(T) = 0{,}60 \quad \Rightarrow \quad P(\bar{T}) = 0{,}40$$

$$P(\text{Dev} \mid T) = 0{,}10 \quad \text{(el 10 \% de las compras con tarjeta son devueltas)}$$

$$P(T \mid \text{Dev}) = 0{,}50 \quad \text{(el 50 \% de las compras devueltas fueron pagadas con tarjeta)}$$

Apartado a) Probabilidad de pago con tarjeta y devolución

Solución

Buscamos $P(T \cap \text{Dev})$.
Aplicamos la regla del producto:

$$P(T \cap \text{Dev}) = P(\text{Dev} \mid T) \cdot P(T) = 0{,}10 \times 0{,}60 = 0{,}06$$

$$\boxed{P(T \cap \text{Dev}) = 0{,}06}$$

Interpretación: El 6 \% de todas las compras del mes fueron pagadas con tarjeta y posteriormente devueltas.

Apartado b) Probabilidad de que una compra sea devuelta

Solución

Buscamos $P(\text{Dev})$.
Usamos el dato $P(T\,|\,\text{Dev}) = 0{,}50$ junto con el resultado del apartado a):
Por la definición de probabilidad condicional:

$$P(T\,|\,\text{Dev}) = \frac{P(T \cap \text{Dev})}{P(\text{Dev})}$$

Despejamos $P(\text{Dev})$:

$$P(\text{Dev}) = \frac{P(T \cap \text{Dev})}{P(T\,|\,\text{Dev})} = \frac{0{,}06}{0{,}50} = 0{,}12$$

$$\boxed{P(\text{Dev}) = 0{,}12}$$

Interpretación: El 12 % de todas las compras del mes fueron posteriormente devueltas.

Observación importante

Este resultado nos permite ahora completar el árbol del problema:

$$P(\bar{T} \cap \text{Dev}) = P(\text{Dev}) - P(T \cap \text{Dev}) = 0{,}12 - 0{,}06 = 0{,}06$$

$$P\left(\text{Dev}\,\middle|\,\bar{T}\right) = \frac{P(\bar{T} \cap \text{Dev})}{P(\bar{T})} = \frac{0{,}06}{0{,}40} = 0{,}15$$

Es decir, el 15 % de las compras al contado también son devueltas (mayor porcentaje que las de tarjeta, que es el 10 %).

Apartado c) Porcentaje de compras al contado no devueltas

Solución

Buscamos $P(\bar{T} \cap \overline{\text{Dev}})$.
Descomponemos el suceso $\bar{T}$:

$$\bar{T} = (\bar{T} \cap \text{Dev}) \cup (\bar{T} \cap \overline{\text{Dev}})$$

Como los dos sucesos son disjuntos:

$$P(\bar{T}) = P(\bar{T} \cap \text{Dev}) + P(\bar{T} \cap \overline{\text{Dev}})$$

Hemos calculado:

$$P(\bar{T} \cap \text{Dev}) = P(\text{Dev}) - P(T \cap \text{Dev}) = 0{,}12 - 0{,}06 = 0{,}06$$

Por tanto:

$$P(\bar{T} \cap \overline{\text{Dev}}) = P(\bar{T}) - P(\bar{T} \cap \text{Dev}) = 0{,}40 - 0{,}06 = 0{,}34$$

$$\boxed{P(\bar{T} \cap \overline{\text{Dev}}) = 0{,}34 \implies \mathbf{34\,\%}}$$

Interpretación: El 34 % de las compras del mes se realizaron al contado y no fueron devueltas.

Observación importante

Tabla de contingencia completa:

	Devuelta	**No devuelta**	**Total**
Tarjeta (T)	0,06	0,54	0,60
Contado ($\bar{T}$)	0,06	0,34	0,40
Total	0,12	0,88	1,00

Puede verificarse que todos los datos son coherentes con los del enunciado.

2.4 Ejercicio Nº4: Peso de niños de 5 años

Distribución Normal

Enunciado

El peso medio según la OMS de un niño de 5 años sigue una distribución normal de media 18,5 kg y desviación típica 2,25 kg. Si se elige un niño al azar, halla el porcentaje de niños:

a) cuyo peso es superior a 23 kg.

b) cuyo peso está entre 14 y 23 kg.

Identificación del modelo

Sea X = "peso de un niño de 5 años (en kg)". Según el enunciado:

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \text{con} \quad \mu = 18{,}5 \text{ kg}, \quad \sigma = 2{,}25 \text{ kg}$$

Para calcular probabilidades, tipificamos:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 18{,}5}{2{,}25} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Representación gráfica de la distribución

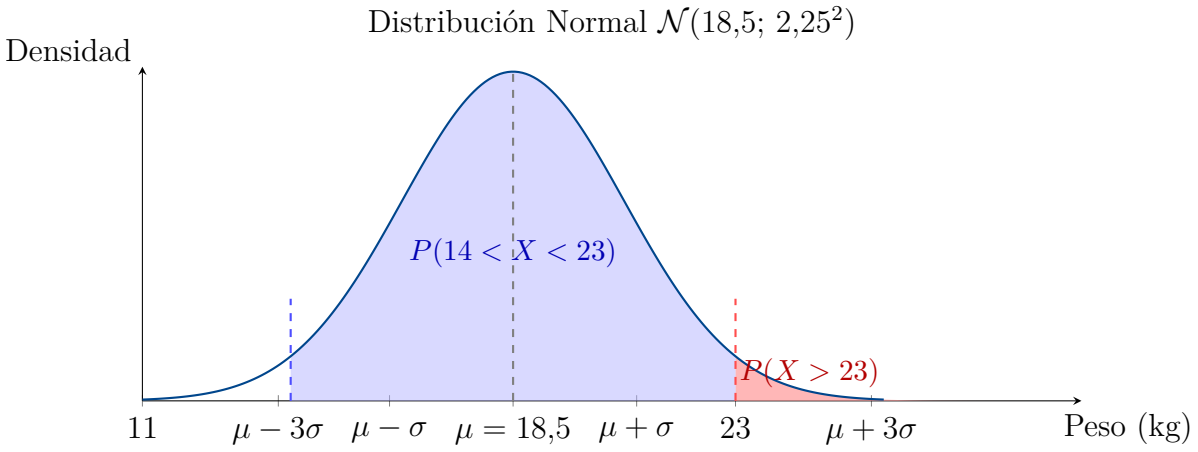


Figura 2.4: Distribución Normal del peso de niños de 5 años. En rojo: zona $X > 23$ kg (apartado a). En azul: zona $14 < X < 23$ kg (apartado b).

Apartado a) Porcentaje de niños con peso superior a 23 kg

Solución

Buscamos $P(X > 23)$.

Paso 1: Tipificamos el valor $x = 23$:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{23 - 18{,}5}{2{,}25} = \frac{4{,}5}{2{,}25} = 2$$

Paso 2: Expresamos la probabilidad en términos de la Normal estándar:

$$P(X > 23) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - \Phi(2)$$

Paso 3: Consultamos la tabla de la Normal estándar:

$$\Phi(2) = P(Z \leq 2) = 0{,}9772$$

Paso 4: Calculamos:

$$P(X > 23) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

$$\boxed{P(X > 23) = 0{,}0228 \implies \textbf{2,28 \% de los niños}}$$

Interpretación: Aproximadamente el 2,28 % de los niños de 5 años tienen un peso superior a 23 kg, lo que corresponde a valores situados a más de 2 desviaciones típicas por encima de la media.

Observación importante

El valor $z = 2$ es uno de los valores más utilizados en estadística. La regla empírica 68-95-99,7 nos dice que aproximadamente el 95 % de los datos de una normal caen dentro de $\pm 2\sigma$ de la media, por lo que el 5 % está fuera, repartido simétricamente: 2,5 % por encima y 2,5 % por debajo. El valor exacto de 2,28 % es ligeramente inferior al 2,5 % de la regla aproximada.

Apartado b) Porcentaje de niños con peso entre 14 y 23 kg

Solución

Buscamos $P(14 < X < 23)$.

Paso 1: Tipificamos ambos extremos del intervalo.

Para $x_1 = 14$:

$$z_1 = \frac{14 - 18{,}5}{2{,}25} = \frac{-4{,}5}{2{,}25} = -2$$

Para $x_2 = 23$:

$$z_2 = \frac{23 - 18{,}5}{2{,}25} = \frac{4{,}5}{2{,}25} = 2$$

Paso 2: Expresamos la probabilidad:

$$P(14 < X < 23) = P(-2 < Z < 2) = \Phi(2) - \Phi(-2)$$

Paso 3: Usamos la propiedad de simetría de la Normal estándar:

$$\Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

Paso 4: Calculamos:

$$P(14 < X < 23) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 0{,}9772 - 0{,}0228 = 0{,}9544$$

$$\boxed{P(14 < X < 23) = 0{,}9544 \implies \textbf{95,44 \% de los niños}}$$

Interpretación: El 95,44 % de los niños de 5 años tienen un peso comprendido entre 14 y 23 kg. Este resultado es coherente con la regla empírica de la distribución normal: el intervalo $[\mu - 2\sigma,\ \mu + 2\sigma]$ contiene aproximadamente el 95 % de los datos. Comprobación:

$$\mu - 2\sigma = 18{,}5 - 2 \times 2{,}25 = 18{,}5 - 4{,}5 = 14 \checkmark$$

$$\mu + 2\sigma = 18{,}5 + 2 \times 2{,}25 = 18{,}5 + 4{,}5 = 23 \checkmark$$

El intervalo $[14, 23]$ coincide exactamente con $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$.

Observación importante

Relación entre los apartados a) y b): Se puede verificar fácilmente:

$$P(X < 14) + P(14 \leq X \leq 23) + P(X > 23) = 0{,}0228 + 0{,}9544 + 0{,}0228 = 1{,}0000 \checkmark$$

Por simetría de la normal, $P(X < 14) = P(X > 23)$, ya que 14 y 23 son equidistantes de la media ($18{,}5 - 14 = 23 - 18{,}5 = 4{,}5$).

2.5 Ejercicio Nº5: Tiempo de concentración

Distribución Normal — Cálculo inverso

Enunciado

El tiempo que un alumno puede estar concentrado y escuchar al profesor en una clase de Matemáticas se modela como una distribución normal de media 15 minutos y desviación típica 5 minutos.

a) Calcúlese la probabilidad de que un alumno esté concentrado más de 20 minutos.

b) Halla la probabilidad de que un alumno esté concentrado menos de 10 minutos.

c) Si la probabilidad de que un alumno esté concentrado más de un determinado número de minutos es 0,75. Halla cuántos minutos está concentrado.

Identificación del modelo

Sea X = "tiempo de concentración de un alumno (en minutos)". Según el enunciado:

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \text{con} \quad \mu = 15 \text{ min}, \quad \sigma = 5 \text{ min}$$

Variable tipificada:

$$Z = \frac{X - 15}{5} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Representación gráfica

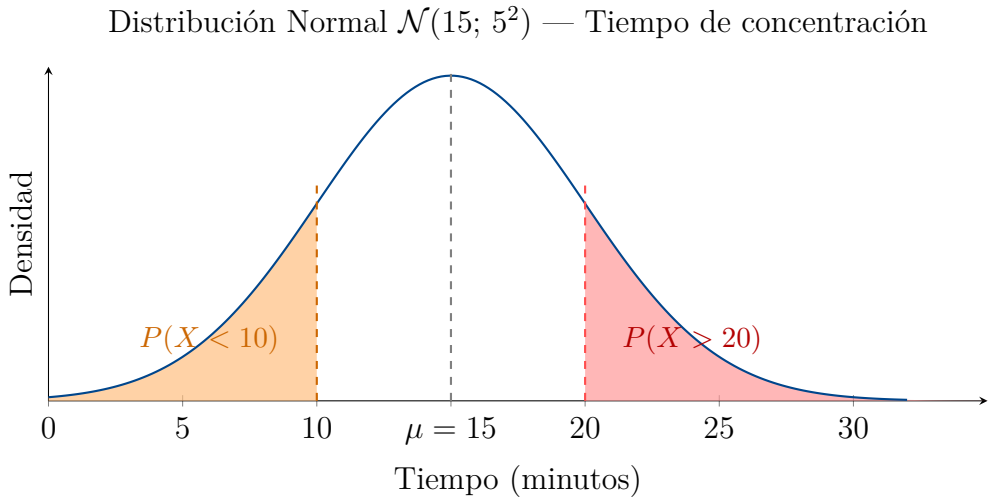


Figura 2.5: Distribución Normal $\mathcal{N}(15, 5^2)$ del tiempo de concentración. En rojo: zona $X > 20$ (apartado a). En naranja: zona $X < 10$ (apartado b).

Apartado a) Probabilidad de concentración superior a 20 minutos

Solución

Buscamos $P(X > 20)$.

Paso 1: Tipificamos $x = 20$:

$$z = \frac{20 - 15}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Paso 2: Expresamos la probabilidad:

$$P(X > 20) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - \Phi(1)$$

Paso 3: Tabla de la Normal estándar:

$$\Phi(1) = 0{,}8413$$

Paso 4: Calculamos:

$$P(X > 20) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$$

$$\boxed{P(X > 20) = 0{,}1587}$$

Interpretación: Hay un 15,87 % de probabilidad de que un alumno esté concentrado más de 20 minutos en clase de Matemáticas.

Apartado b) Probabilidad de concentración inferior a 10 minutos

Solución

Buscamos $P(X < 10)$.
Paso 1: Tipificamos $x = 10$:

$$z = \frac{10 - 15}{5} = \frac{-5}{5} = -1$$

Paso 2: Expresamos la probabilidad:

$$P(X < 10) = P(Z < -1) = \Phi(-1)$$

Paso 3: Aplicamos la propiedad de simetría de la Normal estándar:

$$\Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$$

$$\boxed{P(X < 10) = 0{,}1587}$$

Interpretación: Hay un 15,87 % de probabilidad de que un alumno se concentre menos de 10 minutos.
Observación de simetría: $P(X > 20) = P(X < 10) = 0{,}1587$. Esto se debe a que 10 y 20 son equidistantes de la media:

$$15 - 10 = 5 = 20 - 15$$

Por la simetría de la distribución normal respecto a su media, las colas simétricas tienen la misma probabilidad.

Apartado c) Cálculo inverso: encontrar el tiempo dado la probabilidad

Solución

Planteamiento: Buscamos el valor t tal que $P(X > t) = 0{,}75$.
Paso 1: Reescribimos la condición:

$$P(X > t) = 0{,}75 \implies P(X \leq t) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$$

Paso 2: Tipificamos:

$$P\left(Z \leq \frac{t - 15}{5}\right) = 0{,}25$$

Paso 3: Buscamos el valor z_0 tal que $\Phi(z_0) = 0{,}25$.
Como $\Phi(z_0) = 0{,}25 < 0{,}5$, el valor z_0 es **negativo**. Usamos la simetría:

$$\Phi(z_0) = 0{,}25 \implies \Phi(-z_0) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$$

Buscamos en la tabla el valor z^* tal que $\Phi(z^*) = 0{,}75$:

$$\Phi(0{,}67) \approx 0{,}7486 \quad \text{y} \quad \Phi(0{,}68) \approx 0{,}7517$$

Interpolamos linealmente para mayor precisión:

$$z^* \approx 0{,}67 + \frac{0{,}75 - 0{,}7486}{0{,}7517 - 0{,}7486} \times 0{,}01 = 0{,}67 + \frac{0{,}0014}{0{,}0031} \times 0{,}01 \approx 0{,}674$$

Por tanto:

$$z_0 = -z^* \approx -0{,}674$$

Paso 4: Deshacemos la tipificación para encontrar t:

$$z_0 = \frac{t - 15}{5} \implies t = \mu + z_0 \cdot \sigma = 15 + (-0{,}674) \times 5$$

$$t = 15 - 3{,}37 = 11{,}63 \text{ minutos}$$

$$\boxed{t \approx 11{,}63 \text{ minutos}}$$

Comprobación: $P(X > 11{,}63) = P(Z > -0{,}674) = 1 - \Phi(-0{,}674) = \Phi(0{,}674) \approx 0{,}75$ ✓

Interpretación: Si la probabilidad de que un alumno esté concentrado más de t minutos es 0,75 (es decir, el 75 % de los alumnos se concentra durante más de t minutos), entonces $t \approx 11{,}63$ minutos.

Nótese que $t < \mu = 15$, lo cual es coherente: si queremos que el 75 % de los alumnos supere ese tiempo, el umbral debe estar por debajo de la media (pues sólo el 50 % supera la media).

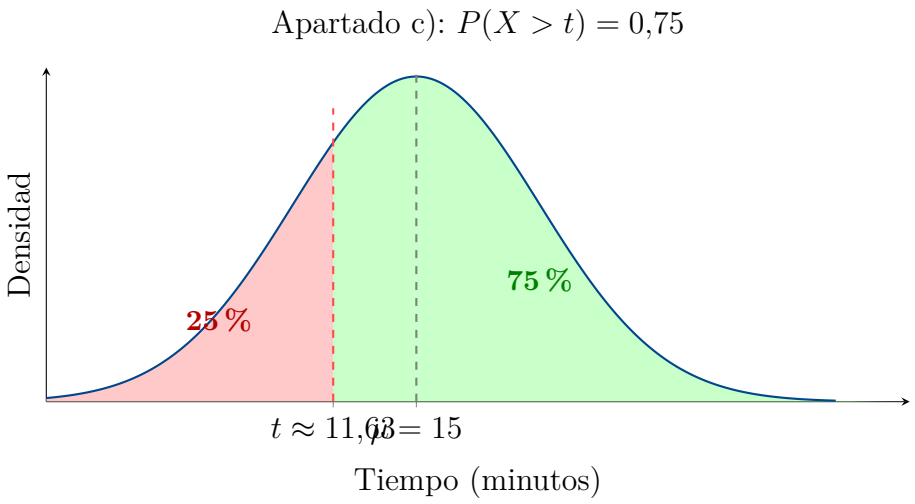


Figura 2.6: Cálculo inverso: el valor $t \approx 11{,}63$ min divide la distribución en 25 % (cola izquierda) y 75 % (cola derecha).

Error frecuente — ¡Atención!

En el problema inverso, el error más frecuente es buscar directamente en la tabla el valor $\Phi(z) = 0{,}75$ olvidando que $P(X > t)$ se convierte en $P(Z \leq z) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$ al pasar al complementario. Si se busca directamente $\Phi(z) = 0{,}75$, se obtiene $z \approx 0{,}674$ (positivo), lo que daría $t = 15 + 0{,}674 \times 5 = 18{,}37$ minutos. Pero $P(X > 18{,}37) \approx 0{,}25 \neq 0{,}75$. El signo del valor tipificado es crucial.

Capítulo 3

Resumen de Resultados y Conclusiones

Ejercicio	Herramienta	Resultados principales
Nº1a	Prob. Total	$P(\bar{D}) = 0{,}9825 = 98{,}25\,\%$
Nº1b	Regla del producto	$P(D \cap C) = 0{,}006 = 0{,}6\,\%$
Nº1c	Teorema de Bayes	Máquina A: menor prob. ($\approx 31{,}43\,\%$)
Nº2a	Independencia	A y B **NO** son independientes
Nº2b	Prob. condicional	$P(A \cap B) = 0{,}40$
Nº2c	Complementariedad	$P(A \cap \bar{B}) = 0{,}44$
Nº3a	Regla del producto	$P(T \cap \text{Dev}) = 0{,}06 = 6\,\%$
Nº3b	Prob. condicionada	$P(\text{Dev}) = 0{,}12 = 12\,\%$
Nº3c	Complementariedad	$P(\bar{T} \cap \overline{\text{Dev}}) = 0{,}34 = 34\,\%$
Nº4a	Normal: $z = 2$	$P(X > 23) = 0{,}0228 = 2{,}28\,\%$
Nº4b	Normal: $z = \pm 2$	$P(14 < X < 23) = 0{,}9544 = 95{,}44\,\%$
Nº5a	Normal: $z = 1$	$P(X > 20) = 0{,}1587 = 15{,}87\,\%$
Nº5b	Normal: $z = -1$	$P(X < 10) = 0{,}1587 = 15{,}87\,\%$
Nº5c	Normal inversa	$t \approx 11{,}63$ minutos

Tabla de valores de la Normal estándar utilizados

z	$\Phi(z) = P(Z \leq z)$	Utilizada en
1,00	0,8413	Ejercicio 5a y 5b
2,00	0,9772	Ejercicios 4a y 4b
0,674	$\approx 0{,}7500$	Ejercicio 5c (cálculo inverso)

Herramientas matemáticas empleadas

1. **Teorema de la Probabilidad Total**: Para calcular $P(D)$ ponderando todas las "causas" posibles.
2. **Teorema de Bayes**: Para invertir la causalidad y calcular probabilidades *a posteriori*.
3. **Probabilidad condicional** $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$: Fundamental en los ejercicios 2 y 3.
4. **Tipificación de la Normal**: Reducción a $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ y uso de tablas.
5. **Simetría de la Normal estándar**: $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$, usada en todos los ejercicios normales.
6. **Normal inversa**: Partir de una probabilidad y despejar el valor de la variable.