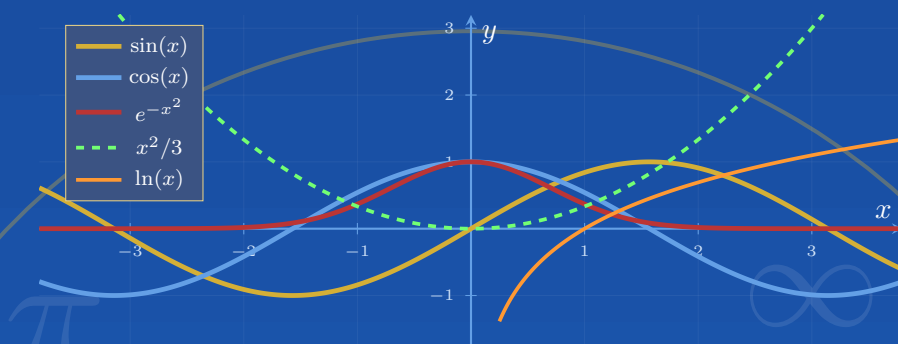


Colección de Problemas · Matemáticas · Nivel Universitario



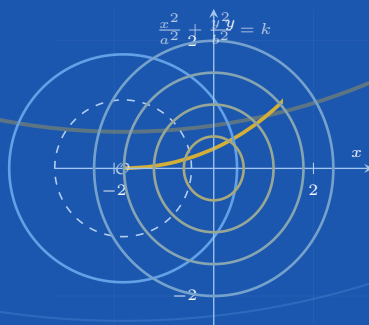
Exámenes de Ladis

Curso 2025–2026

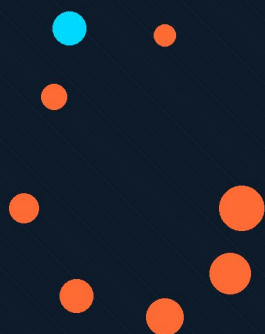
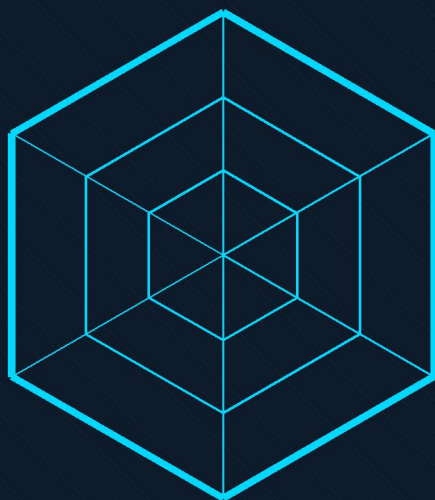
$$e^{i\pi} + 1 = 0 \quad \Bigg| \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad \Bigg| \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

*“Las matemáticas son la reina de las ciencias,
y la aritmética es la reina de las matemáticas.”*

— Carl Friedrich Gauss (1777–1855)



Recopilación de exámenes · Matemáticas · 2025–2026



MATEMÁTICAS

2º ESO



CURSO 2025-2026

"Las matemáticas son el alfabeto

con el cual Dios escribió el universo"

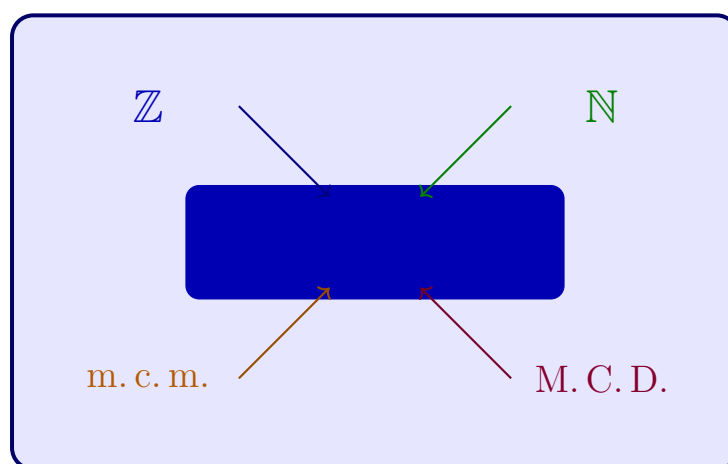
— Galileo Galilei



- Nº1.-** a) Escribe todos los divisores de 54.
b) Escribe los múltiplos de 5 comprendidos entre 45 y 90, estos incluidos.
c) ¿Cuándo un número es divisible entre tres? Pon algún ejemplo.
- Nº2.-** Calcula:
a) mín.c.m. (20, 24, 36)
b) máx.c.d. (48, 72, 84)
- Nº3.-** Resuelve las siguientes operaciones con números enteros:
a) $11 - 7 - 9 + 3 + 7 + 5$
b) $(+7) \cdot (-2) \cdot (+4)$
c) $(-72) : (+6)$
- Nº4.-** Resuelve escribiendo el proceso paso a paso:
a) $(-2) \cdot [(+6) + (+4) - (3 + 7 - 1)]$
b) $(-2) \cdot (+7) - [(-2) + (-8) - (-4)] \cdot (-3)$
- Nº5.-** Una rana corre dando saltos de 30 cm perseguida por un gato que da saltos de 45 cm. ¿Cada cuánta distancia coinciden las huellas del gato y las de la rana?
- Nº6.-** Un restaurante encarga a una frutería: 7 kg de manzanas a 2,15 € el kilo. 6 kg de mandarinas a 2,55 € el kilo. 10 kg de patatas a 0,80 € el kilo. ¿Cuál es el coste total de la fruta?
- Nº7.-** El dependiente de una papelería tiene que organizar en botes 36 bolígrafos rojos, 60 bolígrafos azules y 48 bolígrafos negros. Todos los botes han de ser iguales y con el mayor número de bolígrafos, sin mezclar los colores. ¿Cuántos pondrá en cada bote?

SOLUCIONES COMPLETAS EXAMEN DE MATEMÁTICAS

2.º ESO — Grupo A — Tema 1
Fecha del examen: 28 de septiembre de 2025
IES Antonio Tovar — Centro Bilingüe
Junta de Castilla y León



*Documento elaborado con rigor matemático y enfoque pedagógico
para alumnos de 2.º de Educación Secundaria Obligatoria*

Índice general

Introducción y Guía de Lectura	2
Soluciones del Examen — Tema 1	3
Ejercicio N.º 1	3
Ejercicio N.º 2	7
Ejercicio N.º 3	10
Ejercicio N.º 4	13
Ejercicio N.º 5	15
Ejercicio N.º 6	17
Ejercicio N.º 7	19
Resumen de Resultados	21
Glosario de Términos	22
Nota Pedagógica Final	23

Introducción y Guía de Lectura

Este documento contiene las **soluciones completas y razonadas** del examen de Matemáticas correspondiente al Tema 1 de 2.º de ESO, grupo A, del IES Antonio Tovar (Castilla y León), celebrado el 28 de septiembre de 2025.

El documento está organizado de la siguiente manera:

- Cada ejercicio tiene su propio apartado con **enunciado reproducido, ilustración o diagrama explicativo y solución detallada paso a paso**.
- Se incluyen **definiciones formales** de los conceptos implicados.
- Se señalan los **errores más frecuentes** que cometen los estudiantes.
- Se proporcionan **conclusiones parciales y observaciones didácticas**.

Temas del Examen

- **Divisibilidad:** divisores, múltiplos y criterios de divisibilidad.
- **m.c.m. y M.C.D.:** cálculo mediante descomposición en factores primos.
- **Números enteros:** operaciones básicas (suma, resta, producto, cociente).
- **Expresiones con enteros:** jerarquía de operaciones y uso de paréntesis.
- **Aplicaciones:** problemas contextualizados con m.c.m. y M.C.D.

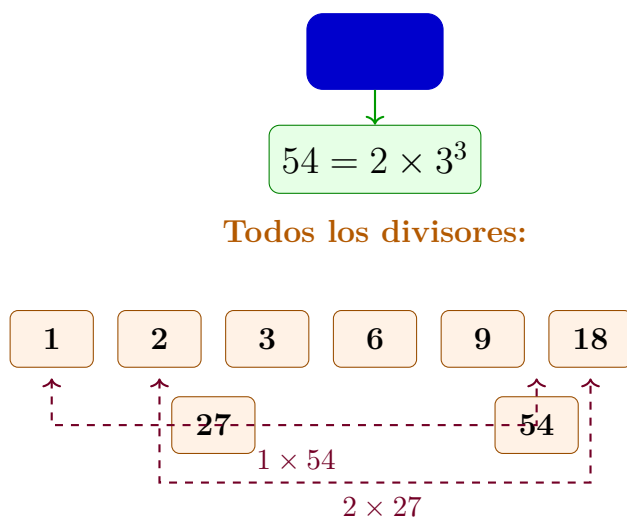
Soluciones del Examen — Tema 1

Ejercicio N.º 1

Enunciado del Ejercicio 1

- a) Escribe todos los divisores de 54.
- b) Escribe los múltiplos de 5 comprendidos entre 45 y 90, estos incluidos.
- c) ¿Cuándo un número es divisible entre tres? Pon algún ejemplo.

Divisores de 54 y su estructura



(Los divisores se presentan en pares cuyo producto es 54)

Definición: Divisor y Múltiplo

Sea $a, b \in \mathbb{N}$ con $b \neq 0$. Se dice que b **divide** a a (notación: $b \mid a$) si existe un número natural k tal que $a = b \cdot k$.

En ese caso:

- b es un **divisor** (o factor) de a .
- a es un **múltiplo** de b .

El conjunto de todos los divisores de a se denota $\text{Div}(a)$.

Apartado a) Divisores de 54

Paso 1: Descomponemos 54 en factores primos mediante el método de la criba sucesiva:

$$\begin{aligned}
 54 \div 2 &= 27 & \Rightarrow & 54 = 2 \times 27 \\
 27 \div 3 &= 9 & \Rightarrow & 54 = 2 \times 3 \times 9 \\
 9 \div 3 &= 3 & \Rightarrow & 54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \\
 3 \div 3 &= 1 & \Rightarrow & 54 = 2^1 \times 3^3
 \end{aligned}$$

En formato de tabla de factorización:

Dividendo	Factor primo
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

Por lo tanto: $54 = 2^1 \times 3^3$

Paso 2: Calculamos el número total de divisores aplicando el teorema de los divisores:

Si $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, entonces el número de divisores de n es:

$$\tau(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1)$$

Para $54 = 2^1 \times 3^3$:

$$\tau(54) = (1 + 1)(3 + 1) = 2 \times 4 = 8 \text{ divisores}$$

Paso 3: Listamos todos los divisores de forma sistemática. Los divisores se obtienen tomando todas las combinaciones posibles de $2^a \cdot 3^b$ donde $0 \leq a \leq 1$ y $0 \leq b \leq 3$:

	$3^0 = 1$	$3^1 = 3$	$3^2 = 9$	$3^3 = 27$
$2^0 = 1$	$1 \times 1 = \mathbf{1}$	$1 \times 3 = \mathbf{3}$	$1 \times 9 = \mathbf{9}$	$1 \times 27 = \mathbf{27}$
$2^1 = 2$	$2 \times 1 = \mathbf{2}$	$2 \times 3 = \mathbf{6}$	$2 \times 9 = \mathbf{18}$	$2 \times 27 = \mathbf{54}$

Paso 4: Verificación cruzada — los divisores están agrupados en pares cuyo producto es 54:

$$\begin{aligned}
 1 \times 54 &= 54 \checkmark \\
 2 \times 27 &= 54 \checkmark \\
 3 \times 18 &= 54 \checkmark \\
 6 \times 9 &= 54 \checkmark
 \end{aligned}$$

Resultado del Apartado a)

Los **8 divisores** de 54 son:

$$\text{Div}(54) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54\}$$

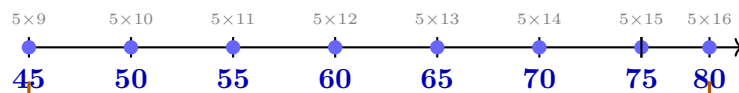
Apartado b) Múltiplos de 5 entre 45 y 90 (incluidos)**Definición: Múltiplo**

Los **múltiplos** de un número natural n son todos los números de la forma $n \cdot k$, con $k \in \mathbb{N}$ (o $k \in \mathbb{Z}$ si se trabaja en los enteros). Los múltiplos de 5 son: 0, 5, 10, 15, 20, 25, ...

Paso 1: Identificamos el primer múltiplo de 5 que sea mayor o igual que 45:

$$45 = 5 \times 9 \quad \Rightarrow \quad 45 \text{ es múltiplo de } 5, \text{ y el enunciado dice "incluido".}$$

Paso 2: Listamos todos los múltiplos de 5 desde 5×9 hasta 5×18 :



Intervalo $[45, 90]$ — solo mostramos hasta 80 por espacio

45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90

Resultado del Apartado b)

Los múltiplos de 5 comprendidos entre 45 y 90, **ambos incluidos**, son:

$$\{45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90\}$$

Son **10 múltiplos** en total (desde 5×9 hasta 5×18).

Apartado c) Criterio de divisibilidad entre 3**Criterio de Divisibilidad entre 3**

Un número natural es divisible entre 3 si y solo si la suma de sus dígitos es divisible entre 3.

Formalmente: dado n con dígitos $d_k d_{k-1} \cdots d_1 d_0$,

$$3 \mid n \iff 3 \mid (d_k + d_{k-1} + \cdots + d_1 + d_0)$$

Justificación del criterio: cualquier número se puede escribir como:

$$n = d_k \cdot 10^k + \cdots + d_1 \cdot 10 + d_0$$

Como $10 \equiv 1 \pmod{3}$, tenemos $10^j \equiv 1^j = 1 \pmod{3}$ para todo $j \geq 0$. Por tanto:

$$n \equiv d_k \cdot 1 + \cdots + d_1 \cdot 1 + d_0 \cdot 1 = d_k + \cdots + d_1 + d_0 \pmod{3}$$

Luego $3 \mid n \iff 3 \mid (d_k + \cdots + d_0)$.

Ejemplos ilustrativos:

Número	Suma de dígitos	¿Div. entre 3?	Verificación
54	$5 + 4 = 9, 3 \mid 9$	Sí	$54 = 3 \times 18$
123	$1 + 2 + 3 = 6, 3 \mid 6$	Sí	$123 = 3 \times 41$
72	$7 + 2 = 9, 3 \mid 9$	Sí	$72 = 3 \times 24$
47	$4 + 7 = 11, 3 \nmid 11$	No	$47 = 3 \times 15 + 2$
100	$1 + 0 + 0 = 1, 3 \nmid 1$	No	$100 = 3 \times 33 + 1$

Error frecuente

Un error común es confundir el criterio del 3 con el del 9. **El criterio del 9** es análogo: un número es divisible entre 9 si la suma de sus dígitos es divisible entre 9. Todo múltiplo de 9 es múltiplo de 3, pero no al revés. Por ejemplo: 12 es divisible entre 3 ($1 + 2 = 3$) pero no entre 9.

Ejercicio N.º 2

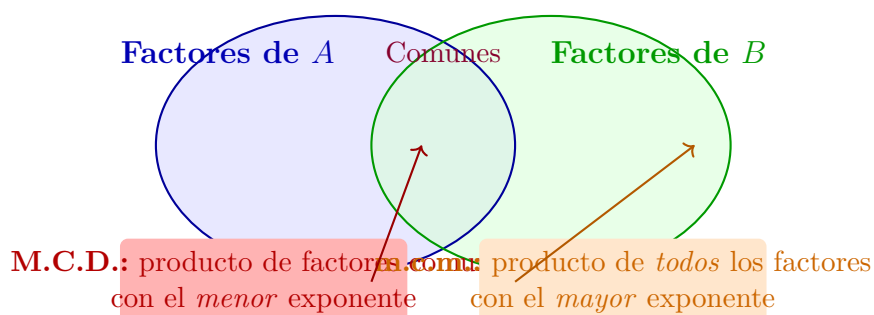
Enunciado del Ejercicio 2

Calcula:

a) m. c. m.(20, 24, 36)

b) M. C. D.(48, 72, 84)

m.c.m. vs M.C.D.: Idea Visual



Definiciones: m.c.m. y M.C.D.

Mínimo Común Múltiplo (m. c. m.): el menor número natural (distinto de cero) que es múltiplo de cada uno de los números dados. Se calcula como el **producto de todos los factores primos que aparecen, tomando en cada uno el mayor exponente**.

Máximo Común Divisor (M. C. D.): el mayor número natural que divide exactamente a todos los números dados. Se calcula como el **producto de los factores primos comunes a todos, tomando en cada uno el menor exponente**.

Apartado a) m.c.m.(20, 24, 36)

Paso 1: Descomponemos cada número en factores primos:

Factorización de 20	
20	2
10	2
5	5
1	

Factorización de 24	
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

Factorización de 36	
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$$20 = 2^2 \times 5^1 \quad 24 = 2^3 \times 3^1 \quad 36 = 2^2 \times 3^2$$

Paso 2: Identificamos todos los factores primos que aparecen y sus exponentes máximos:

Factor primo	En 20	En 24	En 36	Exp. máximo
2	2^2	2^3	2^2	2^3
3	3^0	3^1	3^2	3^2
5	5^1	5^0	5^0	5^1

Paso 3: Calculamos el m.c.m. multiplicando los factores con el mayor exponente:

$$\begin{aligned} \text{m. c. m.}(20, 24, 36) &= 2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 8 \times 9 \times 5 \\ &= 8 \times 9 \times 5 = 72 \times 5 = 360 \end{aligned}$$

Paso 4: Verificación: comprobamos que 360 es múltiplo de cada número:

$$360 \div 20 = 18\checkmark \quad 360 \div 24 = 15\checkmark \quad 360 \div 36 = 10\checkmark$$

Y que no existe ningún múltiplo común menor que 360 (lo cual se garantiza por la propia definición del m.c.m. como mínimo).

Resultado del Apartado a)

$$\text{m. c. m.}(20, 24, 36) = 2^3 \times 3^2 \times 5 = \mathbf{360}$$

Apartado b) M.C.D.(48, 72, 84)

Paso 1: Descomponemos cada número en factores primos:

Factorización de 48		Factorización de 72		Factorización de 84	
48	2	72	2	84	2
24	2	36	2	42	2
12	2	18	2	21	3
6	2	9	3	7	7
3	3	3	3	1	
1		1			

$$48 = 2^4 \times 3^1 \quad 72 = 2^3 \times 3^2 \quad 84 = 2^2 \times 3^1 \times 7^1$$

Paso 2: Identificamos los factores primos **comunes** a los tres números y sus exponentes mínimos:

Factor	En 48	En 72	En 84	¿Común?	Exp. mínimo
2	2^4	2^3	2^2	Sí	2^2
3	3^1	3^2	3^1	Sí	3^1
7	7^0	7^0	7^1	No	—

El factor 7 no es común a los tres, por lo que no entra en el M.C.D.

Paso 3: Calculamos el M.C.D. multiplicando solo los factores comunes con el menor exponente:

$$\text{M. C. D.}(48, 72, 84) = 2^2 \times 3^1 = 4 \times 3 = 12$$

Paso 4: Verificación: comprobamos que 12 divide exactamente a cada número:

$$48 \div 12 = 4\checkmark \quad 72 \div 12 = 6\checkmark \quad 84 \div 12 = 7\checkmark$$

Resultado del Apartado b)

$$\text{M. C. D.}(48, 72, 84) = 2^2 \times 3 = \mathbf{12}$$

Error frecuente

Un error muy habitual es **intercambiar** las reglas del m.c.m. y el M.C.D.:

- Para el **m.c.m.**: se toman *todos* los factores primos con el *mayor* exponente.
- Para el **M.C.D.**: se toman *solo los comunes* con el *menor* exponente.

Otro error frecuente es incluir el factor 7 en el M.C.D. al ser factor de 84, olvidando que debe ser factor de *todos* los números.

Ejercicio N.º 3

Enunciado del Ejercicio 3

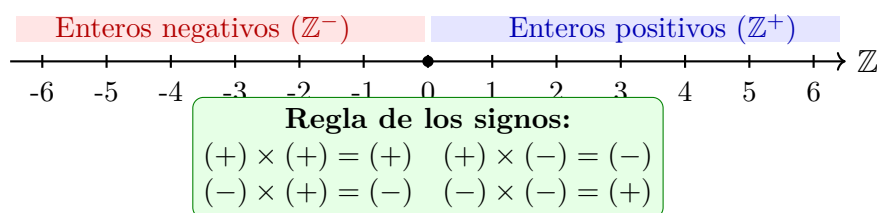
Resuelve las siguientes operaciones con números enteros:

a) $11 - 7 - 9 + 3 + 7 + 5$

b) $(+7) \cdot (-2) \cdot (+4)$

c) $(-72) : (+6)$

Los Números Enteros $\mathbb{Z}$



Reglas de los Números Enteros

Suma y resta: se agrupan positivos y negativos por separado.

Multiplicación y división:

- Signos iguales $\Rightarrow$ resultado positivo: $(+) \cdot (+) = +$ y $(-) \cdot (-) = +$
- Signos distintos $\Rightarrow$ resultado negativo: $(+) \cdot (-) = -$ y $(-) \cdot (+) = -$

Apartado a) $11 - 7 - 9 + 3 + 7 + 5$

Método: agrupamos primero los términos positivos y luego los negativos.

Paso 1: Identificamos los sumandos con su signo:

$$(+11) + (-7) + (-9) + (+3) + (+7) + (+5)$$

Paso 2: Agrupamos los positivos:

$$\text{Positivos: } (+11) + (+3) + (+7) + (+5) = 26$$

Paso 3: Agrupamos los negativos:

$$\text{Negativos: } (-7) + (-9) = -16$$

Paso 4: Sumamos los dos resultados parciales:

$$26 + (-16) = 26 - 16 = 10$$

Justificación: $26 > 16$, luego el resultado es positivo y vale $26 - 16 = 10$.

Resultado del Apartado a)

$$11 - 7 - 9 + 3 + 7 + 5 = 10$$

Apartado b) $(+7) \cdot (-2) \cdot (+4)$

Método: aplicamos la regla de los signos de forma asociativa, de izquierda a derecha.

Paso 1: Calculamos el producto de los dos primeros factores:

$$(+7) \cdot (-2) = -14 \quad (\text{signos distintos} \Rightarrow \text{resultado negativo})$$

Paso 2: Multiplicamos el resultado por el tercer factor:

$$(-14) \cdot (+4) = -56 \quad (\text{signos distintos} \Rightarrow \text{resultado negativo})$$

Verificación por la regla del número de signos negativos: hay **un** factor negativo (-2) ; como el número de negativos es impar, el resultado es negativo. El valor absoluto es $7 \times 2 \times 4 = 56$.

Resultado del Apartado b)

$$(+7) \cdot (-2) \cdot (+4) = -56$$

Apartado c) $(-72) : (+6)$

Método: calculamos el cociente de los valores absolutos y determinamos el signo.

Paso 1: Determinamos el signo del cociente:

$$(-) : (+) = (-) \quad (\text{signos distintos} \Rightarrow \text{resultado negativo})$$

Paso 2: Calculamos el cociente de los valores absolutos:

$$72 : 6 = 12$$

Paso 3: Aplicamos el signo:

$$(-72) : (+6) = -12$$

Paso 4: Verificación (comprobamos que divisor $\times$ cociente = dividendo):

$$(+6) \times (-12) = -72 \checkmark$$

Resultado del Apartado c)

$$(-72) : (+6) = -\mathbf{12}$$

Ejercicio N.º 4

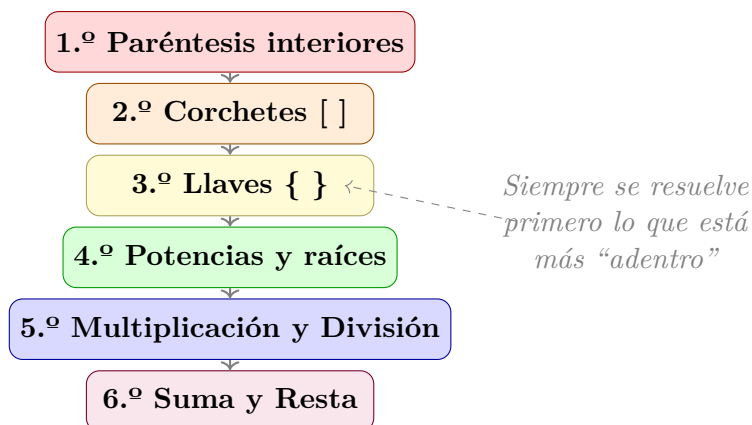
Enunciado del Ejercicio 4

Resuelve escribiendo el proceso paso a paso:

a) $(-2) \cdot [(+6) + (+4) - (3 + 7 - 1)]$

b) $(-2) \cdot (+7) - [(-2) + (-8) - (-4)] \cdot (-3)$

Jerarquía de Operaciones (orden de resolución)

Apartado a) $(-2) \cdot [(+6) + (+4) - (3 + 7 - 1)]$

Estrategia: aplicar la jerarquía de operaciones: primero el paréntesis más interior, luego el corchete, y finalmente la multiplicación exterior.

Paso 1: Resolvemos el paréntesis interior $(3 + 7 - 1)$:

$$3 + 7 - 1 = 10 - 1 = 9$$

La expresión queda:

$$(-2) \cdot [(+6) + (+4) - 9]$$

Paso 2: Resolvemos el interior del corchete $[(+6) + (+4) - 9]$:

$$(+6) + (+4) - 9 = 6 + 4 - 9 = 10 - 9 = 1$$

La expresión queda:

$$(-2) \cdot [1]$$

Paso 3: Realizamos la multiplicación final:

$$(-2) \cdot 1 = -2$$

Resultado del Apartado a)

$$(-2) \cdot [(+6) + (+4) - (3 + 7 - 1)] = (-2) \cdot [6 + 4 - 9] = (-2) \cdot 1 = -2$$

Apartado b) $(-2) \cdot (+7) - [(-2) + (-8) - (-4)] \cdot (-3)$

Estrategia: esta expresión tiene dos términos separados por una resta:

- Término 1: $(-2) \cdot (+7)$
- Término 2: $[(-2) + (-8) - (-4)] \cdot (-3)$

Calculamos cada término por separado y luego hacemos la resta.

Paso 1: Calculamos el **término 1**:

$$(-2) \cdot (+7) = -14 \quad (\text{signos distintos} \Rightarrow \text{negativo})$$

Paso 2: Resolvemos el **interior del corchete** del término 2. Atención especial: $-(-4) = +4$ (cambio de signo al quitar el paréntesis negativo).

$$\begin{aligned} (-2) + (-8) - (-4) &= -2 - 8 + 4 \\ &= \underbrace{(-2 - 8)}_{\text{negativos}} + 4 = -10 + 4 = -6 \end{aligned}$$

Paso 3: Calculamos el **término 2** completo:

$$[-6] \cdot (-3) = +18 \quad (\text{signos iguales} \Rightarrow \text{positivo})$$

Paso 4: Combinamos los dos términos (recordamos que entre ellos hay un signo $-$):

$$\underbrace{(-14)}_{\text{término 1}} - \underbrace{(+18)}_{\text{término 2}} = -14 - 18 = -32$$

Resultado del Apartado b)

$$(-2)(+7) - [(-2) + (-8) - (-4)] \cdot (-3) = -14 - (+18) = -32$$

Error frecuente: el signo de $-(-4)$

Un error muy común es escribir $-(-4) = -4$ en lugar de $-(-4) = +4$. Recuerda que **restar un número negativo equivale a sumar su valor absoluto**:

$$a - (-b) = a + b \quad \text{para todo } b > 0.$$

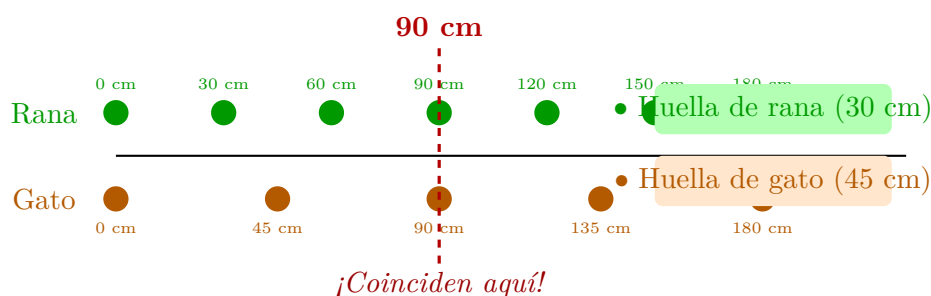
La doble negación siempre produce un positivo.

Ejercicio N.º 5

Enunciado del Ejercicio 5

Una rana corre dando saltos de 30 cm perseguida por un gato que da saltos de 45 cm. ¿Cada cuánta distancia coinciden las huellas del gato y las de la rana?

Huellas de la rana (30 cm) y del gato (45 cm)



Conexión con el m.c.m.

Las huellas coinciden en las posiciones que son **múltiplos de 30** (huellas de la rana) y a la vez **múltiplos de 45** (huellas del gato). El primer punto de coincidencia positivo es el **mínimo común múltiplo** de 30 y 45.

Paso 1: Planteamos el problema: buscamos la menor distancia $d > 0$ tal que:

$$d = 30k = 45m \quad \text{para algunos } k, m \in \mathbb{N}$$

Es decir, $d = \text{m. c. m.}(30, 45)$.

Paso 2: Descomponemos 30 y 45 en factores primos:

30		45	
30	2	45	3
15	3	15	3
5	5	5	5
1		1	

$$30 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1 \quad 45 = 3^2 \times 5^1$$

Paso 3: Calculamos el m.c.m. (todos los factores, con el mayor exponente):

Factor	En 30	En 45	Máx. exponente
2	2^1	2^0	2^1
3	3^1	3^2	3^2
5	5^1	5^1	5^1

$$\text{m. c. m.}(30, 45) = 2^1 \times 3^2 \times 5^1 = 2 \times 9 \times 5 = 90$$

Paso 4: Verificamos con los múltiplos:

Múltiplos de 30: 30, 60, **90**, 120, ...

Múltiplos de 45: 45, **90**, 135, ...

El primero en común es 90. ✓

Resultado del Ejercicio 5

Las huellas del gato y las de la rana coinciden **cada 90 cm.**

En ese punto, la rana habrá dado $90 \div 30 = 3$ saltos y el gato habrá dado $90 \div 45 = 2$ saltos.

Ejercicio N.º 6

Enunciado del Ejercicio 6

Un restaurante encarga a una frutería:

- 7 kg de manzanas a 2,15 € el kilo.
- 6 kg de mandarinas a 2,55 € el kilo.
- 10 kg de patatas a 0,80 € el kilo.

¿Cuál es el coste total de la fruta?

FACTURA — RESTAURANTE			
Producto	Cant.	Precio/kg	Subtotal
Manzanas	7 kg	2,15 €	15,05 €
Mandarinas	6 kg	2,55 €	15,30 €
Patatas	10 kg	0,80 €	8,00 €
TOTAL: 38,35 €			
$7 \times 2,15 + 6 \times 2,55 + 10 \times 0,80 = 38,35 \text{ €}$			

Paso 1: Calculamos el coste de las **manzanas**:

$$7 \text{ kg} \times 2,15 \text{ €/kg} = 7 \times 2,15 = 7 \times 2 + 7 \times 0,15 = 14 + 1,05 = 15,05 \text{ €}$$

Paso 2: Calculamos el coste de las **mandarinas**:

$$6 \text{ kg} \times 2,55 \text{ €/kg} = 6 \times 2,55 = 6 \times 2 + 6 \times 0,55 = 12 + 3,30 = 15,30 \text{ €}$$

Paso 3: Calculamos el coste de las **patatas**:

$$10 \text{ kg} \times 0,80 \text{ €/kg} = 10 \times 0,80 = 8,00 \text{ €}$$

Paso 4: Sumamos los tres subtotales para obtener el **coste total**:

$$15,05 + 15,30 + 8,00$$

Operamos con columnas para evitar errores con los decimales:

$$\begin{array}{r} 15,05 \\ 15,30 \\ + 8,00 \\ \hline 38,35 \end{array}$$

Resultado del Ejercicio 6

El coste total del pedido es:

$$\text{Coste total} = 7 \times 2,15 + 6 \times 2,55 + 10 \times 0,80 = 15,05 + 15,30 + 8,00 = \mathbf{38,35 \text{ €}}$$

Observación sobre el enunciado

El enunciado pregunta por el “coste total de la *fruta*”. Técnicamente, las patatas son un tubérculo (no fruta), pero el contexto del problema indica que se refiere al coste total del pedido completo (manzanas + mandarinas + patatas). La respuesta incluye los tres productos.

Ejercicio N.º 7

Enunciado del Ejercicio 7

El dependiente de una papelería tiene que organizar en botes 36 bolígrafos rojos, 60 bolígrafos azules y 48 bolígrafos negros. Todos los botes han de ser iguales y con el mayor número de bolígrafos, sin mezclar los colores. ¿Cuántos pondrá en cada bote?

Distribución de bolígrafos en botes

$36 \div 12$ $= 3$ botes Rojos	$60 \div 12$ $= 5$ botes Azules	$48 \div 12$ $= 4$ botes Negros

$$\text{M.C.D.}(36, 60, 48) = 12 \text{ bolígrafos/bote}$$

$$\text{Total botes: } 3 + 5 + 4 = 12 \text{ botes}$$

Conexión con el M.C.D.

La condición del problema es:

- Todos los botes con el **mismo número** de bolígrafos.
- **Sin mezclar colores** (cada bote tendrá un único color).
- **El mayor número posible** de bolígrafos por bote.

Esto equivale a buscar el mayor número que divide exactamente a 36, a 60 y a 48 simultáneamente, es decir: el **Máximo Común Divisor** de los tres números.

Paso 1: Descomponemos los tres números en factores primos:

36	60	48
36 2	60 2	48 2
18 2	30 2	24 2
9 3	15 3	12 2
3 3	5 5	6 2
1	1	3 3
		1

$$36 = 2^2 \times 3^2 \quad 60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 \quad 48 = 2^4 \times 3^1$$

Paso 2: Identificamos los factores primos **comunes** a los tres números:

Factor	En 36	En 60	En 48	¿Común?	Exp. mínimo
2	2^2	2^2	2^4	Sí	2^2
3	3^2	3^1	3^1	Sí	3^1
5	5^0	5^1	5^0	No	—

Paso 3: Calculamos el M.C.D.:

$$\text{M. C. D.}(36, 60, 48) = 2^2 \times 3^1 = 4 \times 3 = 12$$

Paso 4: Verificamos que 12 divide exactamente a cada cantidad:

$$36 \div 12 = 3\checkmark \quad 60 \div 12 = 5\checkmark \quad 48 \div 12 = 4\checkmark$$

Paso 5: Calculamos cuántos botes de cada color se necesitan:

$$\text{Botes de rojos: } 36 \div 12 = 3 \text{ botes}$$

$$\text{Botes de azules: } 60 \div 12 = 5 \text{ botes}$$

$$\text{Botes de negros: } 48 \div 12 = 4 \text{ botes}$$

$$\text{Total de botes: } 3 + 5 + 4 = 12 \text{ botes}$$

Resultado del Ejercicio 7

El dependiente pondrá **12 bolígrafos en cada bote**.

Necesitará en total **12 botes**: 3 con rojos, 5 con azules y 4 con negros.

¿Por qué el M.C.D. y no el m.c.m.?

- Se usa el **M.C.D.** cuando queremos *dividir* o *repartir* de forma equitativa con el mayor número posible.
- Se usa el **m.c.m.** cuando buscamos el primer momento en que dos o más procesos *cíclicos* coinciden (como en el problema de la rana y el gato).

La clave está en analizar si el problema pide un *repartidor* (M.C.D.) o una *coincidencia periódica* (m.c.m.).

Resumen de Resultados

Ejercicio	Resultado
1a	$\text{Div}(54) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54\}$
1b	$\{45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90\}$
1c	Un número es divisible entre 3 si la suma de sus dígitos lo es.
2a	$\text{m. c. m.}(20, 24, 36) = 360$
2b	$\text{M. C. D.}(48, 72, 84) = 12$
3a	$11 - 7 - 9 + 3 + 7 + 5 = 10$
3b	$(+7) \cdot (-2) \cdot (+4) = -56$
3c	$(-72) : (+6) = -12$
4a	$(-2) \cdot [(+6) + (+4) - (3 + 7 - 1)] = -2$
4b	$(-2) \cdot (+7) - [(-2) + (-8) - (-4)] \cdot (-3) = -32$
5	Las huellas coinciden cada 90 cm
6	Coste total = 38,35 €
7	12 bolígrafos por bote

Glosario de Términos

Divisor	Número natural b tal que $b \mid a$ (divide exactamente a a sin resto).
Múltiplo	Número de la forma $a \cdot k$ con $k \in \mathbb{N}$; es múltiplo de a .
Factor primo	Número primo que divide exactamente a un número dado. Los números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...
Descomposición en factores primos	Escritura de un número como producto de sus factores primos: $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$.
m.c.m.	<i>Mínimo Común Múltiplo</i> . El menor múltiplo común a un conjunto de números. Se obtiene tomando todos los factores primos con el mayor exponente.
M.C.D.	<i>Máximo Común Divisor</i> . El mayor divisor común a un conjunto de números. Se obtiene tomando solo los factores primos comunes con el menor exponente.
Número entero ($\mathbb{Z}$)	Conjunto de números $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Incluye los naturales, el cero y los negativos.
Regla de los signos	Para productos y cocientes: signos iguales producen (+), signos distintos producen (-).
Jerarquía de operaciones	Orden de prioridad: paréntesis $\rightarrow$ corchetes $\rightarrow$ llaves $\rightarrow$ potencias $\rightarrow$ $\times$ y $\div$ $\rightarrow$ $+$ y $-$.
Criterio de divisibilidad entre 3	Un número es divisible entre 3 si y solo si la suma de sus dígitos es divisible entre 3.

Nota Pedagógica Final

Este examen abarca los conceptos fundamentales del **Tema 1 de Matemáticas de 2.º ESO**: la divisibilidad y los números enteros. Estos temas son la base sobre la que se construyen todos los demás contenidos matemáticos de la educación secundaria.

Recomendaciones de estudio:

1. **Memoriza los criterios de divisibilidad** (2, 3, 5, 9, 10, 11). Son herramientas que aceleran enormemente el cálculo mental.
2. **Practica la descomposición en factores primos** hasta hacerla mecánica, ya que es la llave para calcular m.c.m. y M.C.D.
3. **Para los enteros**, la regla de los signos debe ser automática. Practica con ejercicios de cálculo antes de pasar a expresiones complejas.
4. **En expresiones con paréntesis**, actúa siempre de dentro hacia afuera, nunca saltándote pasos. Cada signo de agrupación tiene su razón de ser.
5. **Ante problemas**, pregúntate primero: *¿Estoy repartiendo?* (M.C.D.) o *¿Estoy buscando cuándo coinciden?* (m.c.m.). Esa distinción es la clave para elegir el método correcto.

Mensaje Final

Las matemáticas no son una colección de trucos memorísticos, sino un sistema de razonamiento lógico. Cada regla tiene una justificación, y cada procedimiento tiene un *por qué*. Entender ese *por qué* es lo que distingue al alumno que memoriza del que comprende, y del que olvida del que aplica correctamente en nuevos contextos.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS - Fracciones y Decimales

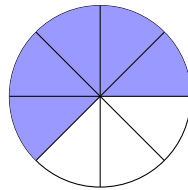
Nombre y Apellidos: _____

Fecha: _____

Curso: 2º ESO

1. Concepto y Representación de Fracciones

- a) Escribe la fracción que representa la parte sombreada en el siguiente gráfico y nombra sus términos.



- b) Representa gráficamente la fracción $\frac{4}{6}$.

2. Fracciones, Decimales y Clasificación

- a) Transforma las fracciones $\frac{7}{2}$ y $\frac{5}{11}$ en números decimales e indica, en cada caso, si el decimal es **exacto** o **periódico**.
- b) Ordena los siguientes números de **menor a mayor**:

$$0,7; \quad \frac{3}{4}; \quad 0,\hat{7}; \quad \frac{2}{3}$$

3. Equivalencia y Fracción Irreducible

- a) Simplifica la fracción $\frac{42}{70}$ hasta obtener su fracción irreducible.
- b) Escribe una fracción equivalente a $\frac{5}{6}$ que tenga como denominador 42.

4. Suma y Resta de Fracciones

- a) Calcula y simplifica el resultado:

$$\frac{5}{3} + \frac{1}{6} - \frac{3}{4}$$

- b) Halla el resultado de la siguiente expresión:

$$2 - \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} \right)$$

5. Multiplicación y División de Fracciones

a) Calcula y simplifica el resultado:

$$\frac{7}{10} \cdot \frac{5}{21} \cdot 4$$

b) Calcula y simplifica el resultado:

$$\left(\frac{8}{5} : \frac{4}{15}\right) : 6$$

6. Operaciones Combinadas con Fracciones

a) Opera y simplifica al máximo:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right)$$

b) Opera y simplifica al máximo:

$$\left(\frac{2}{3} - 1\right) : \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$$

7. Problemas con Fracciones

- a) Laura tenía 120 euros. Se ha gastado $\frac{2}{5}$ de ese dinero en un regalo. ¿Cuánto dinero se ha gastado Laura y cuánto le queda?
- b) Un agricultor siembra $\frac{1}{4}$ de su finca con trigo, y $\frac{2}{5}$ con cebada. Si el resto lo dedica a pasto, ¿qué fracción de la finca se dedica a pasto?

SOLUCIONES COMPLETAS

Examen de Matemáticas
2º ESO

TEMA

Fracciones y Decimales

Temas 2 y 3

Material de estudio con soluciones exhaustivas

Nivel: 2º de Educación Secundaria Obligatoria

Curso académico: 2024–2025

Documento generado con L^AT_EX — Rigor matemático total

Índice general

1	Introducción y Conceptos Previos	2
1.1	Presentación del Examen	2
1.2	Marco Teórico General	2
1.2.1	Definición de Fracción	3
1.2.2	Tipos de Decimales	3
1.2.3	Máximo Común Divisor (MCD)	3
1.2.4	Mínimo Común Múltiplo (MCM)	3
2	Soluciones Detalladas del Examen	5
2.1	Ejercicio 1: Concepto y Representación de Fracciones	5
2.1.1	Apartado a) — Fracción representada en el gráfico	5
2.1.2	Apartado b) — Representación gráfica de $\frac{4}{6}$	7
2.2	Ejercicio 2: Fracciones, Decimales y Clasificación	8
2.2.1	Apartado a) — Conversión a decimales: $\frac{7}{2}$ y $\frac{5}{11}$	8
2.2.2	Apartado b) — Ordenar de menor a mayor	10
2.3	Ejercicio 3: Equivalencia y Fracción Irreducible	11
2.3.1	Apartado a) — Simplificar $\frac{42}{70}$	11
2.3.2	Apartado b) — Fracción equivalente a $\frac{5}{6}$ con denominador 42	13
2.4	Ejercicio 4: Suma y Resta de Fracciones	13
2.4.1	Apartado a) — $\frac{5}{3} + \frac{1}{6} - \frac{3}{4}$	14
2.4.2	Apartado b) — $2 - \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3}\right)$	15
2.5	Ejercicio 5: Multiplicación y División de Fracciones	16
2.5.1	Apartado a) — $\frac{7}{10} \cdot \frac{5}{21} \cdot 4$	16
2.5.2	Apartado b) — $\left(\frac{8}{5} : \frac{4}{15}\right) : 6$	17
2.6	Ejercicio 6: Operaciones Combinadas con Fracciones	19
2.6.1	Apartado a) — $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right)$	19
2.6.2	Apartado b) — $\left(\frac{2}{3} - 1\right) : \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$	20
2.7	Ejercicio 7: Problemas con Fracciones	21
2.7.1	Apartado a) — Problema de Laura y el dinero	21
2.7.2	Apartado b) — Problema del agricultor	23
3	Resumen de Resultados y Tabla de Referencia	25
3.1	Tabla Resumen de Todas las Soluciones	25
3.2	Fórmulas Clave del Tema	26
3.3	Consejos para el Examen	27

Capítulo 1

Introducción y Conceptos Previos

1.1 Presentación del Examen

Este documento contiene las **soluciones completas, detalladas y pedagógicas** del examen de Matemáticas de 2º de ESO correspondiente a los Temas 2 y 3: *Fracciones y Decimales*.

Cada ejercicio se resuelve paso a paso, sin omitir ninguna transformación algebraica, con el objetivo de que el alumno pueda comprender el razonamiento completo detrás de cada resultado. Se incluyen:

- **Enunciado** del ejercicio claramente presentado.
- **Fundamento teórico:** definiciones y propiedades utilizadas.
- **Resolución paso a paso:** cada transformación justificada.
- **Representaciones gráficas** para los ejercicios que lo requieran.
- **Observaciones** sobre errores comunes y consejos pedagógicos.
- **Conclusión** con el resultado final encuadrado.

1.2 Marco Teórico General

Antes de comenzar con las soluciones, recordamos brevemente los conceptos clave que se utilizarán a lo largo del examen.

1.2.1 Definición de Fracción

Definición fundamental

Una **fracción** es una expresión de la forma $\frac{a}{b}$, donde:

- $a \in \mathbb{Z}$ se denomina **numerador**: indica cuántas partes se toman.
- $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ se denomina **denominador**: indica en cuántas partes iguales se divide la unidad.

La condición $b \neq 0$ es *imprescindible*, ya que la división por cero no está definida.

1.2.2 Tipos de Decimales

Clasificación de números decimales

Al realizar la división del numerador entre el denominador de una fracción, obtenemos:

- **Decimal exacto**: la división termina. Ejemplo: $\frac{1}{4} = 0,25$.
- **Decimal periódico puro**: todos los decimales se repiten desde el primer decimal. Ejemplo: $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$.
- **Decimal periódico mixto**: hay una parte no periódica (anteperíodo) y luego empieza el período. Ejemplo: $\frac{1}{6} = 0,1\overline{6}$.

1.2.3 Máximo Común Divisor (MCD)

Definición: MCD

El **Máximo Común Divisor** de dos números enteros a y b , denotado $\text{mcd}(a, b)$, es el mayor número natural que divide a ambos simultáneamente sin dejar resto.

Método de descomposición en factores primos:

1. Descomponer a y b en factores primos.
2. Tomar los factores primos *comunes* con el *menor* exponente.
3. El mcd es el producto de esos factores.

1.2.4 Mínimo Común Múltiplo (MCM)

Definición: MCM

El **Mínimo Común Múltiplo** de dos o más números, denotado mcm , es el menor número natural positivo que es múltiplo de todos ellos simultáneamente.

Método de descomposición en factores primos:

1. Descomponer todos los números en factores primos.
2. Tomar *todos* los factores primos que aparezcan, con el *mayor* exponente.

3. El mcm es el producto de esos factores.

Capítulo 2

Soluciones Detalladas del Examen

2.1 Ejercicio 1: Concepto y Representación de Fracciones

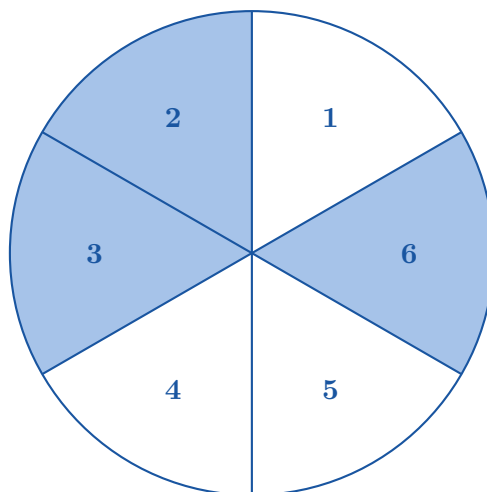
2.1.1 Apartado a) — Fracción representada en el gráfico

Enunciado 1a

Escribe la fracción que representa la parte sombreada en el siguiente gráfico y nombra sus términos.

Representación Gráfica del Enunciado

El gráfico del enunciado muestra un círculo dividido en partes iguales con algunas de ellas sombreadas. Reproducimos y analizamos la figura:



Partes sombreadas



Partes sin sombrear

Solución 1a

Paso 1: Contar las partes totales del círculo.

Observamos que el círculo está dividido en **6 partes iguales**. Este número corresponde al **denominador** de la fracción.

Paso 2: Contar las partes sombreadas.

Del gráfico del enunciado, contamos **3 partes sombreadas**. Este número corresponde al **numerador** de la fracción.

Paso 3: Escribir la fracción.

$$\text{Fracción} = \frac{\text{partes sombreadas}}{\text{partes totales}} = \frac{3}{6}$$

Paso 4: Nombrar los términos.

$$\underline{\underline{3}}$$

→ **Numerador = 3**

$$\underline{\underline{6}}$$

→ **Denominador = 6**

$$\frac{3}{6} : \quad \text{Numerador} = 3, \quad \text{Denominador} = 6$$

Interpretación: La fracción $\frac{3}{6}$ nos indica que de las 6 partes iguales en que se divide la unidad (el círculo), se han tomado 3.

Nota: Esta fracción puede simplificarse: $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, ya que $\text{mcd}(3, 6) = 3$. Sin embargo, el enunciado pide la fracción tal como se observa en el gráfico, por lo que la respuesta correcta es $\frac{3}{6}$.

Error Común

Muchos alumnos confunden numerador y denominador. Recuerda:

- **Denominador** (abajo) → el total de partes en que se divide.
- **Numerador** (arriba) → las partes que se toman.

2.1.2 Apartado b) — Representación gráfica de $\frac{4}{6}$ **Enunciado 1b**

Representa gráficamente la fracción $\frac{4}{6}$.

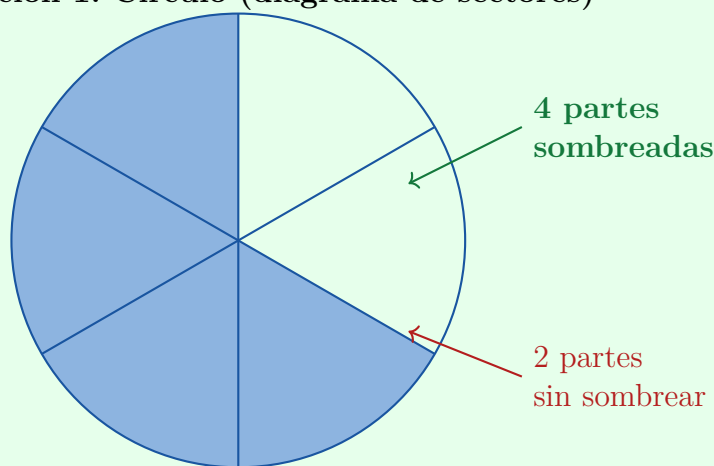
Solución 1b**Paso 1: Interpretar la fracción.**

La fracción $\frac{4}{6}$ nos indica:

- **Denominador = 6**: debemos dividir la unidad en **6 partes iguales**.
- **Numerador = 4**: debemos sombrear **4 de esas 6 partes**.

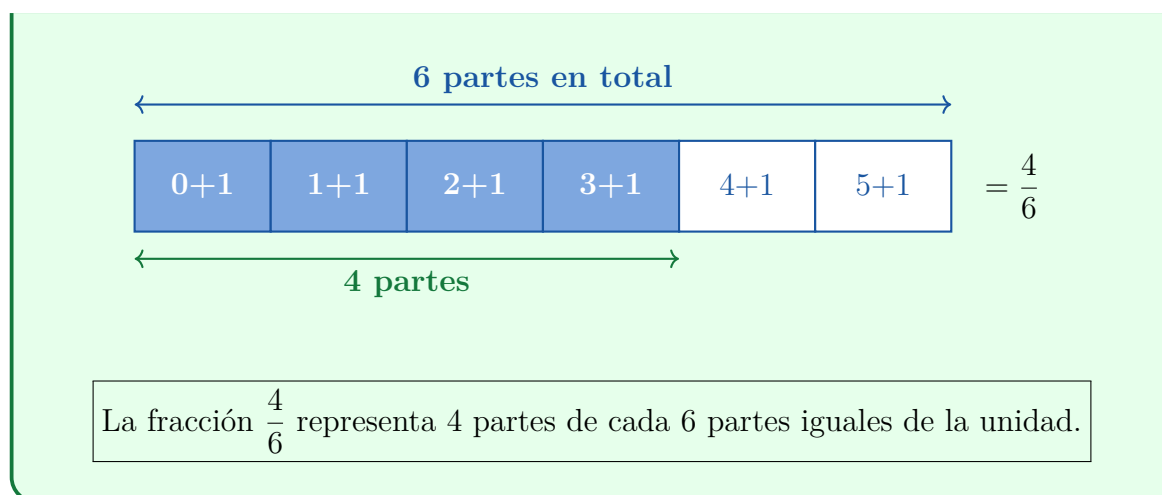
Paso 2: Representación gráfica.

Ofrecemos dos representaciones: mediante un círculo y mediante una barra rectangular.

Representación 1: Círculo (diagrama de sectores)

Fracción $\frac{4}{6}$

Representación 2: Barra rectangular



2.2 Ejercicio 2: Fracciones, Decimales y Clasificación

2.2.1 Apartado a) — Conversión a decimales: $\frac{7}{2}$ y $\frac{5}{11}$

Enunciado 2a

Transforma las fracciones $\frac{7}{2}$ y $\frac{5}{11}$ en números decimales e indica, en cada caso, si el decimal es **exacto** o **periódico**.

Solución 2a

Para transformar una fracción en decimal, realizamos la **división del numerador entre el denominador** con el algoritmo estándar de la división entera con decimales.

— Fracción $\frac{7}{2}$ —

Paso 1: Realizamos la división $7 \div 2$:

$$\begin{array}{r}
 7 \overline{) 2} \\
 \underline{3,5} \\
 10 \div 2 = 5 \text{ (parte decimal)} \\
 10 - 10 = 0 \text{ (resto 0, termina)}
 \end{array}$$

Desarrollo detallado:

$$\begin{aligned}
 7 \div 2 : \quad & 2 \times 3 = 6, \quad 7 - 6 = 1 \quad (\text{cifra entera: } 3) \\
 10 \div 2 : \quad & 2 \times 5 = 10, \quad 10 - 10 = 0 \quad (\text{primera cifra decimal: } 5) \\
 & \text{Resto} = 0 \Rightarrow \text{la división } \mathbf{termina}.
 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\frac{7}{2} = 3,5$$

Clasificación: El decimal 3,5 es un **decimal exacto**, porque la división termina en un número finito de pasos (el resto llega a ser 0).

Criterio teórico: Una fracción en forma irreducible tiene decimal exacto si y solo si su denominador es de la forma $2^a \cdot 5^b$ con $a, b \geq 0$. En nuestro caso, $\frac{7}{2}$ es irreducible y $2 = 2^1$, que es del tipo $2^a \cdot 5^b$. Esto *confirma* que el decimal es exacto.

— **Fracción** $\frac{5}{11}$ —

Paso 1: Realizamos la división $5 \div 11$:

$$5 \div 11 : \quad 11 \times 0 = 0, \quad \text{cifra entera: } 0$$

Tomamos $50 \div 11$:

$$50 \div 11 : \quad 11 \times 4 = 44, \quad 50 - 44 = 6 \quad (\text{primera decimal: } 4)$$

$$60 \div 11 : \quad 11 \times 5 = 55, \quad 60 - 55 = 5 \quad (\text{segunda decimal: } 5)$$

$$50 \div 11 : \quad 11 \times 4 = 44, \quad 50 - 44 = 6 \quad (\text{tercera decimal: } 4)$$

$$60 \div 11 : \quad \text{¡el resto 6 ya apareció antes!} \Rightarrow \text{el ciclo se repite.}$$

Paso 2: Identificamos el período.

El resto 5 aparece en el primer paso decimal, luego el resto 6, luego vuelve a aparecer el resto 5: el ciclo es de longitud 2.

Por tanto:

$$\frac{5}{11} = 0,454545 \dots = 0,\overline{45}$$

La notación $0,\overline{45}$ indica que el bloque 45 se repite indefinidamente.

Clasificación: El decimal $0,\overline{45}$ es un **decimal periódico puro**, porque el período empieza inmediatamente después de la coma y no hay anteperíodo.

Criterio teórico: La fracción $\frac{5}{11}$ es irreducible ($\text{mcd}(5, 11) = 1$) y su denominador 11 no se puede escribir como $2^a \cdot 5^b$, por lo que el decimal es periódico. Al no tener factores 2 ni 5 en el denominador, tampoco hay anteperíodo, siendo el período puro.

Resultado Final

$$\frac{7}{2} = 3,5 \quad (\text{decimal exacto})$$

$$\frac{5}{11} = 0,\overline{45} \quad (\text{decimal periódico puro})$$

2.2.2 Apartado b) — Ordenar de menor a mayor

Enunciado 2b

Ordena los siguientes números de **menor a mayor**:

$$0,7; \quad \frac{3}{4}; \quad 0,\hat{7}; \quad \frac{2}{3}$$

(donde $0,\hat{7} = 0,\overline{7}$)

Solución 2b

Para ordenar números de distinta naturaleza (decimales y fracciones), la estrategia más eficaz es **convertirlos todos a decimales** y comparar.

Paso 1: Convertir cada número a decimal.

Número 1: $0,7$

$0,7$ (ya está en forma decimal: $0,7000\dots$)

Número 2: $\frac{3}{4}$

Realizamos la división $3 \div 4$:

$$30 \div 4 = 7 \text{ (con resto 2)} \Rightarrow \text{primera decimal: } 7$$

$$20 \div 4 = 5 \text{ (con resto 0)} \Rightarrow \text{segunda decimal: } 5$$

Resto = 0 $\Rightarrow$ termina.

$$\frac{3}{4} = 0,75$$

Número 3: $0,\overline{7}$ (periódico puro de período 7)

$$0,\overline{7} = 0,7777\dots$$

Número 4: $\frac{2}{3}$

Realizamos la división $2 \div 3$:

$$20 \div 3 = 6 \text{ (con resto 2)} \Rightarrow \text{primera decimal: } 6$$

$$20 \div 3 = 6 \text{ (con resto 2)} \Rightarrow \text{segunda decimal: } 6$$

El resto 2 se repite $\Rightarrow$ decimal periódico puro.

$$\frac{2}{3} = 0,\overline{6} = 0,6666\dots$$

Paso 2: Comparar los decimales.

Alineamos los valores con suficientes decimales para comparar:

$$\begin{array}{rcl} 0,7 & = & 0,7000\dots \\ \frac{3}{4} & = & 0,7500\dots \\ 0,\overline{7} & = & 0,7777\dots \\ \frac{2}{3} & = & 0,6666\dots \end{array}$$

Comparando cifra a cifra (parte entera = 0 para todos), miramos la primera decimal:

- $\frac{2}{3} = 0,6666\dots \rightarrow$ primera decimal: **6**
- $0,7 = 0,7000\dots \rightarrow$ primera decimal: **7**
- $\frac{3}{4} = 0,7500\dots \rightarrow$ primera decimal: **7**
- $0,\overline{7} = 0,7777\dots \rightarrow$ primera decimal: **7**

Claramente $\frac{2}{3} <$ los otros tres.

Para los tres que empiezan por $0,7\dots$, comparamos la segunda decimal:

- $0,7000\dots \rightarrow$ segunda decimal: **0**
- $0,7500\dots \rightarrow$ segunda decimal: **5**
- $0,7777\dots \rightarrow$ segunda decimal: **7**

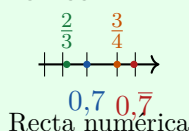
Por tanto:

$$0,7 < \frac{3}{4} < 0,\overline{7}$$

Paso 3: Conclusión: orden de menor a mayor.

$$\frac{2}{3} < 0,7 < \frac{3}{4} < 0,\overline{7}$$

Visualización en la recta numérica:



2.3 Ejercicio 3: Equivalencia y Fracción Irreducible

2.3.1 Apartado a) — Simplificar $\frac{42}{70}$

Enunciado 3a

Simplifica la fracción $\frac{42}{70}$ hasta obtener su fracción irreducible.

Solución 3a

Una fracción $\frac{a}{b}$ está en **forma irreducible** cuando $\text{mcd}(a, b) = 1$, es decir, numerador y denominador no tienen ningún factor común distinto de 1.

El método más sistemático para simplificar es calcular el $\text{mcd}(42, 70)$ mediante la **descomposición en factores primos**.

Paso 1: Descomponer 42 en factores primos.

$$42 = 2 \times 21 = 2 \times 3 \times 7$$

Verificación: $2 \times 3 = 6$; $6 \times 7 = 42$ ✓

Paso 2: Descomponer 70 en factores primos.

$$70 = 2 \times 35 = 2 \times 5 \times 7$$

Verificación: $2 \times 5 = 10$; $10 \times 7 = 70$ ✓

Paso 3: Calcular el MCD.

Tomamos los factores primos *comunes* con el *menor* exponente:

$$42 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 7^1$$

$$70 = 2^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1$$

Factores comunes: 2^1 y 7^1 .

$$\text{mcd}(42, 70) = 2^1 \cdot 7^1 = 2 \times 7 = 14$$

Paso 4: Dividir numerador y denominador por el MCD.

Para simplificar, dividimos ambos términos de la fracción por $\text{mcd}(42, 70) = 14$:

$$\frac{42}{70} = \frac{42 \div 14}{70 \div 14} = \frac{3}{5}$$

Paso 5: Verificar que es irreducible.

Comprobemos que $\text{mcd}(3, 5) = 1$:

- $3 = 3^1$ (primo)
- $5 = 5^1$ (primo)
- No tienen factores comunes $\Rightarrow \text{mcd}(3, 5) = 1$ ✓

Por tanto, $\frac{3}{5}$ es efectivamente la fracción irreducible.

Diagrama del proceso:

$$\frac{42}{70} \xrightarrow[\div 14]{\div \text{mcd}(42, 70)} \frac{3}{5}$$

$$\frac{42}{70} = \frac{3}{5} \quad (\text{fracción irreducible})$$

Método Alternativo

Se puede simplificar *progresivamente* dividiendo por factores comunes sucesivos:

$$\frac{42}{70} \xrightarrow{\div 2} \frac{21}{35} \xrightarrow{\div 7} \frac{3}{5}$$

El resultado es el mismo, pero el método del MCD es más directo y sistemático.

2.3.2 Apartado b) — Fracción equivalente a $\frac{5}{6}$ con denominador 42

Enunciado 3b

Escribe una fracción equivalente a $\frac{5}{6}$ que tenga como denominador 42.

Solución 3b

Dos fracciones son **equivalentes** si representan el mismo valor numérico. Se obtienen multiplicando (o dividiendo) numerador y denominador por el mismo número no nulo.

Paso 1: Determinar el factor de conversión.

Queremos pasar del denominador 6 al denominador 42. Necesitamos hallar el número k tal que:

$$6 \times k = 42$$

Despejamos k :

$$k = \frac{42}{6} = 7$$

Paso 2: Multiplicar numerador y denominador por $k = 7$.

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \times 7}{6 \times 7} = \frac{35}{42}$$

Paso 3: Verificación.

Verificamos que $\frac{35}{42}$ es equivalente a $\frac{5}{6}$ simplificando:

$$\text{mcd}(35, 42) = ?$$

- $35 = 5 \times 7$
- $42 = 2 \times 3 \times 7$
- Factor común: 7

$$\frac{35}{42} = \frac{35 \div 7}{42 \div 7} = \frac{5}{6} \checkmark$$

La simplificación nos devuelve exactamente $\frac{5}{6}$, lo que confirma la equivalencia.

$$\boxed{\frac{5}{6} = \frac{35}{42}}$$

2.4 Ejercicio 4: Suma y Resta de Fracciones

2.4.1 Apartado a) — $\frac{5}{3} + \frac{1}{6} - \frac{3}{4}$

Enunciado 4a

Calcula y simplifica el resultado:

$$\frac{5}{3} + \frac{1}{6} - \frac{3}{4}$$

Solución 4a

Para sumar y restar fracciones con distinto denominador, debemos previamente **reducirlas al mismo denominador (común denominador)**, que elegiremos como el mcm de todos los denominadores. Esto garantiza que trabajamos con fracciones equivalentes.

Paso 1: Identificar los denominadores.

Los denominadores son: 3, 6 y 4.

Paso 2: Calcular el MCM de 3, 6 y 4.

Descomponemos en factores primos:

$$3 = 3^1, \quad 6 = 2^1 \cdot 3^1, \quad 4 = 2^2$$

Tomamos todos los factores con el mayor exponente:

$$\text{mcm}(3, 6, 4) = 2^2 \cdot 3^1 = 4 \times 3 = 12$$

Paso 3: Convertir cada fracción al denominador 12.

$$\frac{5}{3} = \frac{5 \times 4}{3 \times 4} = \frac{20}{12} \quad (12 \div 3 = 4)$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1 \times 2}{6 \times 2} = \frac{2}{12} \quad (12 \div 6 = 2)$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12} \quad (12 \div 4 = 3)$$

Paso 4: Realizar la suma y resta con el denominador común.

$$\frac{5}{3} + \frac{1}{6} - \frac{3}{4} = \frac{20}{12} + \frac{2}{12} - \frac{9}{12} = \frac{20 + 2 - 9}{12} = \frac{13}{12}$$

Paso 5: Simplificar si es posible.

Comprobamos si $\text{mcd}(13, 12) = 1$:

- 13 es primo.
- $12 = 2^2 \cdot 3$
- 13 no es múltiplo de 2 ni de 3, luego $\text{mcd}(13, 12) = 1$.

La fracción $\frac{13}{12}$ ya es **irreducible**.

Paso 6: Expresión como número mixto (opcional, para mayor comprensión).

$$\frac{13}{12} = 1 + \frac{1}{12} = 1\frac{1}{12}$$

$$\frac{5}{3} + \frac{1}{6} - \frac{3}{4} = \frac{13}{12} = 1\frac{1}{12}$$

2.4.2 Apartado b) — $2 - \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3}\right)$

Enunciado 4b

Halla el resultado de la siguiente expresión:

$$2 - \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3}\right)$$

Solución 4b

La presencia de paréntesis nos obliga a aplicar la **jerarquía de operaciones**: primero resolvemos lo que está dentro del paréntesis.

Paso 1: Resolver el paréntesis: $\frac{1}{5} + \frac{2}{3}$.

Calculamos mcm(5, 3):

$$5 = 5^1, \quad 3 = 3^1 \quad \Rightarrow \quad \text{mcm}(5, 3) = 5 \cdot 3 = 15$$

Convertimos al denominador común 15:

$$\frac{1}{5} = \frac{1 \times 3}{5 \times 3} = \frac{3}{15} \quad (15 \div 5 = 3)$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15} \quad (15 \div 3 = 5)$$

Sumamos:

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{3}{15} + \frac{10}{15} = \frac{3+10}{15} = \frac{13}{15}$$

Paso 2: Sustituir en la expresión original.

$$2 - \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3}\right) = 2 - \frac{13}{15}$$

Paso 3: Restar el entero 2 menos la fracción $\frac{13}{15}$.

Transformamos el entero 2 en una fracción con denominador 15:

$$2 = \frac{2 \times 15}{15} = \frac{30}{15}$$

Ahora restamos:

$$2 - \frac{13}{15} = \frac{30}{15} - \frac{13}{15} = \frac{30 - 13}{15} = \frac{17}{15}$$

Paso 4: Simplificar.

$\text{mcd}(17, 15)$:

- 17 es primo.
- $15 = 3 \times 5$
- $17 \neq 3k$ y $17 \neq 5k \Rightarrow \text{mcd}(17, 15) = 1$.

La fracción $\frac{17}{15}$ es irreducible. Como número mixto: $1\frac{2}{15}$.

$$2 - \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3}\right) = \frac{17}{15} = 1\frac{2}{15}$$

2.5 Ejercicio 5: Multiplicación y División de Fracciones

2.5.1 Apartado a) — $\frac{7}{10} \cdot \frac{5}{21} \cdot 4$

Enunciado 5a

Calcula y simplifica el resultado:

$$\frac{7}{10} \cdot \frac{5}{21} \cdot 4$$

Solución 5a

La **multiplicación de fracciones** se realiza multiplicando numeradores entre sí y denominadores entre sí:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

El entero 4 se puede escribir como fracción: $4 = \frac{4}{1}$.

Paso 1: Escribir la expresión completa como producto de fracciones.

$$\frac{7}{10} \cdot \frac{5}{21} \cdot 4 = \frac{7}{10} \cdot \frac{5}{21} \cdot \frac{4}{1}$$

Paso 2: Multiplicar todos los numeradores y todos los denominadores.

$$= \frac{7 \cdot 5 \cdot 4}{10 \cdot 21 \cdot 1} = \frac{140}{210}$$

Paso 3: Simplificar la fracción resultante.

Calculamos $\text{mcd}(140, 210)$ mediante descomposición:

$$140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Factores comunes: $2^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 70$.

$$\text{mcd}(140, 210) = 70$$

$$\frac{140}{210} = \frac{140 \div 70}{210 \div 70} = \frac{2}{3}$$

Método alternativo: simplificación cruzada *antes* de multiplicar.

Este método es más elegante y evita trabajar con números grandes:

$$\frac{7}{10} \cdot \frac{5}{21} \cdot \frac{4}{1} = \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{1}$$

Simplificamos 5 y 10:

$$\frac{1}{10^2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{1}$$

Simplificamos 4 y 2:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4^2}{1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 2}{1 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{2}{3}$$

Mismo resultado con cálculos más sencillos.

$$\boxed{\frac{7}{10} \cdot \frac{5}{21} \cdot 4 = \frac{2}{3}}$$

2.5.2 Apartado b) — $\left(\frac{8}{5} : \frac{4}{15}\right) : 6$

Enunciado 5b

Calcula y simplifica el resultado:

$$\left(\frac{8}{5} : \frac{4}{15}\right) : 6$$

Solución 5b

La **división de fracciones** se realiza multiplicando la primera fracción por la inversa (o recíproca) de la segunda:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Esto se debe a que dividir por un número es equivalente a multiplicar por su inverso.

Paso 1: Resolver el paréntesis: $\frac{8}{5} : \frac{4}{15}$.

Aplicamos la regla de la división (multiplicamos por la inversa):

$$\frac{8}{5} : \frac{4}{15} = \frac{8}{5} \cdot \frac{15}{4} = \frac{8 \cdot 15}{5 \cdot 4} = \frac{120}{20}$$

Simplificamos: $\text{mcd}(120, 20) = 20$:

$$\frac{120}{20} = \frac{120 \div 20}{20 \div 20} = \frac{6}{1} = 6$$

O usando simplificación cruzada:

$$\frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{5} \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{\cancel{4}} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 1} = \frac{6}{1} = 6$$

Espera, seamos más cuidadosos:

$$\frac{8}{5} \cdot \frac{15}{4} : \quad 8 \text{ y } 4 \rightarrow \text{simplificamos por } 4 : \frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{5} \cdot \frac{15}{\cancel{4}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{15}{1}$$

$$5 \text{ y } 15 \rightarrow \text{simplificamos por } 5 : \frac{2}{\cancel{5}} \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{1} = \frac{2 \cdot 3}{1} = 6$$

Por tanto:

$$\frac{8}{5} : \frac{4}{15} = 6$$

Paso 2: Dividir el resultado entre 6.

$$\left(\frac{8}{5} : \frac{4}{15} \right) : 6 = 6 : 6 = 1$$

O equivalentemente:

$$6 : 6 = \frac{6}{1} : \frac{6}{1} = \frac{6}{1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\boxed{\left(\frac{8}{5} : \frac{4}{15} \right) : 6 = 1}$$

Observación importante

No confundas el orden en la división. La división **no es conmutativa**:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} \neq \frac{c}{d} : \frac{a}{b}$$

en general. Al invertir la fracción divisora, debes tener claro cuál es la fracción *dividendo* y cuál la fracción *divisor*.

2.6 Ejercicio 6: Operaciones Combinadas con Fracciones

2.6.1 Apartado a) — $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right)$

Enunciado 6a

Opera y simplifica al máximo:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right)$$

Solución 6a

Esta expresión involucra **operaciones combinadas**, por lo que debemos aplicar estrictamente la jerarquía de operaciones:

1. Primero los **paréntesis**.
2. Luego las **multiplicaciones y divisiones** (de izquierda a derecha).
3. Finalmente las **sumas y restas** (de izquierda a derecha).

Paso 1: Resolver el paréntesis: $1 - \frac{2}{3}$.

Convertimos el entero 1 a fracción con denominador 3:

$$1 = \frac{3}{3}$$

Restamos:

$$1 - \frac{2}{3} = \frac{3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$$

Paso 2: Sustituir en la expresión.

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}$$

Paso 3: Realizar la multiplicación: $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}$.

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 3} = \frac{3}{12}$$

Simplificamos: $\text{mcd}(3, 12) = 3$:

$$\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

O con simplificación cruzada: el 3 del numerador y el 3 del denominador se cancelan:

$$\frac{\cancel{3}}{4} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} = \frac{1}{4}$$

Paso 4: Sustituir y realizar la suma final.

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

Calculamos $\text{mcm}(2, 4) = 4$:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

Sumamos:

$$\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}$$

Paso 5: Comprobar si es irreducible.

$\text{mcd}(3, 4)$: $3 = 3^1$, $4 = 2^2$, sin factores comunes $\Rightarrow \text{mcd}(3, 4) = 1$. ✓

$$\boxed{\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{3}{4}}$$

2.6.2 Apartado b) — $\left(\frac{2}{3} - 1\right) : \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$

Enunciado 6b

Opera y simplifica al máximo:

$$\left(\frac{2}{3} - 1\right) : \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$$

Solución 6b

Aplicamos la jerarquía de operaciones: paréntesis $\rightarrow$ divisiones $\rightarrow$ sumas.

Paso 1: Resolver el paréntesis: $\frac{2}{3} - 1$.

Convertimos el entero 1 a fracción con denominador 3:

$$\frac{2}{3} - 1 = \frac{2}{3} - \frac{3}{3} = \frac{2-3}{3} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$$

Paso 2: Sustituir en la expresión.

$$\left(\frac{2}{3} - 1\right) : \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{3} : \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$$

Paso 3: Realizar la división: $-\frac{1}{3} : \frac{1}{6}$.

Dividir por $\frac{1}{6}$ equivale a multiplicar por $\frac{6}{1}$:

$$-\frac{1}{3} : \frac{1}{6} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{1} = -\frac{1 \cdot 6}{3 \cdot 1} = -\frac{6}{3} = -2$$

Paso 4: Sustituir y realizar la suma final.

$$-2 + \frac{1}{2}$$

Convertimos -2 a fracción con denominador 2:

$$-2 = -\frac{4}{2}$$

Sumamos:

$$-\frac{4}{2} + \frac{1}{2} = \frac{-4 + 1}{2} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$$

Paso 5: Comprobar si es irreducible.

$\text{mcd}(3, 2) = 1 \Rightarrow$ ya es irreducible. ✓

Como número mixto: $-\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}$.

$$\left(\frac{2}{3} - 1\right) : \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}$$

Error Común

Un error muy frecuente es aplicar mal la jerarquía de operaciones y sumar antes de dividir. Recuerda: en la expresión $A : B + C$, primero se hace $A : B$ y *luego* se suma C . **La división tiene prioridad sobre la suma.**

2.7 Ejercicio 7: Problemas con Fracciones

2.7.1 Apartado a) — Problema de Laura y el dinero

Enunciado 7a

Laura tenía 120 euros. Se ha gastado $\frac{2}{5}$ de ese dinero en un regalo. ¿Cuánto dinero se ha gastado Laura y cuánto le queda?

Solución 7a

Este es un problema de **fracción de una cantidad**. Para hallar una fracción de un número, multiplicamos la fracción por dicho número.

Datos:

- Dinero total: 120 euros.
- Fracción gastada: $\frac{2}{5}$ del total.

Paso 1: Calcular el dinero gastado.

$$\text{Dinero gastado} = \frac{2}{5} \times 120 = \frac{2 \times 120}{5} = \frac{240}{5} = 48 \text{ euros}$$

Verificación: $5 \times 48 = 240 = 2 \times 120 \checkmark$

Paso 2: Calcular el dinero restante.

Método 1: Resta directa.

$$\text{Dinero restante} = 120 - 48 = 72 \text{ euros}$$

Método 2: Usando fracciones (más elegante y general).

Si ha gastado $\frac{2}{5}$ del total, le queda la fracción complementaria:

$$1 - \frac{2}{5} = \frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

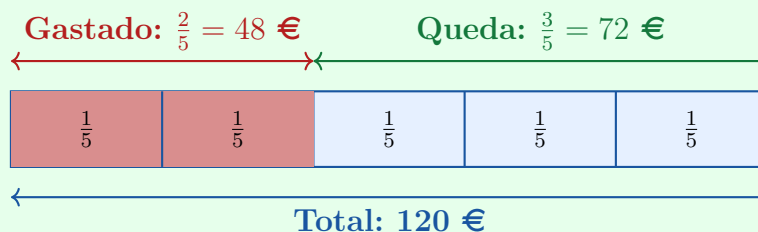
Por tanto, le queda $\frac{3}{5}$ del total:

$$\text{Dinero restante} = \frac{3}{5} \times 120 = \frac{360}{5} = 72 \text{ euros}$$

Paso 3: Verificación del resultado.

$$\text{Gastado} + \text{Restante} = 48 + 72 = 120 \text{ euros} \checkmark$$

Diagrama ilustrativo:

**Resultado Final**

- Dinero gastado: $\frac{2}{5} \times 120 = 48 \text{ euros}$.
- Dinero restante: $120 - 48 = 72 \text{ euros}$.

2.7.2 Apartado b) — Problema del agricultor

Enunciado 7b

Un agricultor siembra $\frac{1}{4}$ de su finca con trigo, y $\frac{2}{5}$ con cebada. Si el resto lo dedica a pasto, ¿qué fracción de la finca se dedica a pasto?

Solución 7b

Datos:

- Fracción dedicada a **trigo**: $\frac{1}{4}$.
- Fracción dedicada a **cebada**: $\frac{2}{5}$.
- Fracción dedicada a **pasto**: el resto (lo que sobra).

La finca completa representa la unidad: 1.

Paso 1: Calcular la fracción total dedicada a cultivos (trigo + cebada).

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{5}$$

Calculamos mcm(4, 5):

$$4 = 2^2, \quad 5 = 5^1 \quad \Rightarrow \quad \text{mcm}(4, 5) = 2^2 \cdot 5 = 20$$

Convertimos al denominador común 20:

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 5}{4 \times 5} = \frac{5}{20} \quad (20 \div 4 = 5)$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 4}{5 \times 4} = \frac{8}{20} \quad (20 \div 5 = 4)$$

Sumamos:

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{5} = \frac{5}{20} + \frac{8}{20} = \frac{5+8}{20} = \frac{13}{20}$$

Paso 2: Calcular la fracción dedicada a pasto.

La fracción de pasto es lo que queda de la finca una vez descontados trigo y cebada:

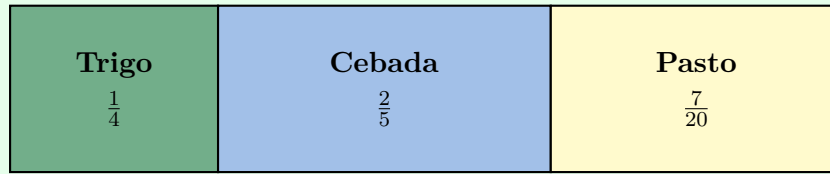
$$\text{Fracción de pasto} = 1 - \frac{13}{20} = \frac{20}{20} - \frac{13}{20} = \frac{7}{20}$$

Paso 3: Verificación.

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{7}{20} = \frac{5}{20} + \frac{8}{20} + \frac{7}{20} = \frac{5+8+7}{20} = \frac{20}{20} = 1 \checkmark$$

La suma de todas las fracciones da exactamente 1 (la finca entera). $\checkmark$

Diagrama de la finca:



 Trigo  Cebada  Pasto

La fracción de la finca dedicada a pasto es $\frac{7}{20}$

Capítulo 3

Resumen de Resultados y Tabla de Referencia

3.1 Tabla Resumen de Todas las Soluciones

Ejercicio	Resultado
Ej. 1a: Fracción del gráfico	$\frac{3}{6}$ (Numerador = 3, Denominador = 6)
Ej. 1b: Representar $\frac{4}{6}$	Círculo y barra divididos en 6 partes, con 4 sombreadas
Ej. 2a: $\frac{7}{2}$ a decimal	3,5 (decimal exacto)
Ej. 2a: $\frac{5}{11}$ a decimal	0,45 (decimal periódico puro)
Ej. 2b: Ordenar de menor a mayor	$\frac{2}{3} < 0,7 < \frac{3}{4} < 0,\bar{7}$
Ej. 3a: Irreducible de $\frac{42}{70}$	$\frac{3}{5}$
Ej. 3b: Equivalente a $\frac{5}{6}$ con denominador 42	$\frac{35}{42}$
Ej. 4a: $\frac{5}{3} + \frac{1}{6} - \frac{3}{4}$	$\frac{13}{12}$
Ej. 4b: $2 - \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3}\right)$	$\frac{17}{15}$
Ej. 5a: $\frac{7}{10} \cdot \frac{5}{21} \cdot 4$	$\frac{2}{3}$
Ej. 5b: $\left(\frac{8}{5} : \frac{4}{15}\right) : 6$	1
Ej. 6a: $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right)$	$\frac{3}{4}$
Ej. 6b: $\left(\frac{2}{3} - 1\right) : \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
Ej. 7a: Laura y el dinero	Gastó 48 €, le quedan 72 €
Ej. 7b: Finca del agricultor	$\frac{7}{20}$ de la finca dedicada a pasto

3.2 Fórmulas Clave del Tema

Resumen de Fórmulas Esenciales

Suma y resta de fracciones:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d} \quad (\text{usando el denominador } b \cdot d)$$

Más eficiente: usar el $\text{mcm}(b, d)$ como denominador común.

Multiplicación de fracciones:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

División de fracciones:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Fracción irreducible:

$$\frac{a}{b} \text{ es irreducible} \iff \text{mcd}(a, b) = 1$$

Fracciones equivalentes:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Fracción de una cantidad:

$$\frac{p}{q} \text{ de } N = \frac{p}{q} \times N = \frac{p \cdot N}{q}$$

3.3 Consejos para el Examen

1. **Simplifica siempre** el resultado final. Verifica con el MCD.
2. **En sumas y restas**, busca el MCM de los denominadores antes de operar.
3. **En divisiones**, invierte la segunda fracción y convierte en multiplicación.
4. **Respeta la jerarquía**: paréntesis $\rightarrow$ productos/divisiones $\rightarrow$ sumas/restas.
5. **Verifica** tus resultados sustituyendo en la expresión original.
6. **En problemas**, dibuja un esquema antes de operar. Comprueba que la suma de todas las fracciones da 1 (la unidad completa).

EXAMEN : Proporcionalidad y Porcentajes (2º A ESO)

1. **Proporcionalidad** ¿Cuánto subirá el nivel del agua en un depósito en 13 minutos, si se sabe que un grifo de caudal constante vierte agua y en 5 minutos el nivel ha subido 20 cm?
A) 32 cm
B) 52 cm
C) 48 cm
D) 80 cm
2. **Proporcionalidad** Cuatro operarios pintan una pared en 5 horas. ¿Cuánto tardarán diez pintores en realizar la misma tarea?
A) 2 horas
B) 12,5 horas
C) 8 horas
D) 20 horas
3. **Proporcionalidad** Doce obreros, trabajando 8 horas diarias, terminan un trabajo en 25 días. ¿Cuánto tardarán en hacer ese mismo trabajo 5 obreros trabajando 10 horas diarias?
A) 60 días
B) 48 días
C) 30 días
D) 80 días
4. **Reparto Proporcional** Tres amigos (Rafael, Arancha e Iván) han recibido 250 euros por repartir propaganda. Rafael repartió 2 paquetes, Arancha 3, e Iván 5. ¿Cuánto dinero le corresponde a Iván?
A) 50 euros
B) 75 euros
C) 125 euros
D) 62,50 euros
5. **Cálculo de Porcentajes** En una clase de 30 alumnos, hoy han faltado 6 a clase. ¿Cuál ha sido el tanto por ciento de ausencias?
A) 20 %
B) 16,67 %
C) 80 %
D) 6 %
6. **Cálculo de Porcentajes** Un hospital tiene 210 camas ocupadas, lo que representa el 84 % de todas las camas disponibles. ¿De cuántas camas dispone dicho hospital?
A) 250 camas
B) 176,4 camas
C) 294 camas
D) 300 camas
7. **Variaciones Porcentuales Encadenadas (Precio Final)** Un móvil de 1.000 euros sufre una rebaja del 30 %, luego un descuento adicional del 20 %, y por último se le aplica un aumento del 21 % de IVA. ¿Cuánto se terminará pagando por el móvil?
A) 585,90 euros

- B) 600,00 euros
- C) 677,60 euros
- D) 710,00 euros

8. **Variaciones Porcentuales Encadenadas (Variación Total)** Considerando las variaciones porcentuales encadenadas (30 % de rebaja, 20 % de descuento adicional, 21 % de aumento de IVA) sobre el precio inicial de un producto, ¿qué porcentaje de variación total se ha aplicado?

- A) 32,24 % de descuento
- B) 32,24 % de aumento
- C) 29 % de descuento
- D) 16,8 % de descuento

Tabla de Respuestas

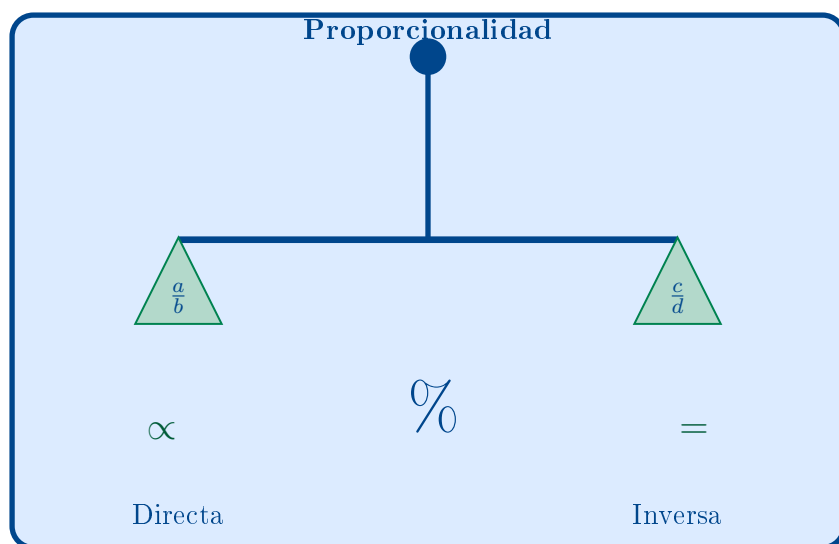
Pregunta	A	B	C	D
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				

Utilice la tabla para marcar sus respuestas.

SOLUCIONES COMPLETAS

Proporcionalidad y Porcentajes

Examen de Matemáticas – 2.º A de la ESO



Elaborado por:

Departamento de Matemáticas

Profesor Especialista en Didáctica de las Matemáticas

Curso académico 2024–2025

Nivel: 2.º A de Educación Secundaria Obligatoria (ESO)

Documento generado con L^AT_EX – Compilable con pdfL^AT_EX

Índice general

1. Fundamentos Teóricos Previos	2
1.1. Proporcionalidad Directa	2
1.2. Proporcionalidad Inversa	2
1.3. Proporcionalidad Compuesta	3
1.4. Reparto Proporcional	3
1.5. Porcentajes	3
1.6. Variaciones Porcentuales Encadenadas	4
2. Soluciones Detalladas de los Ejercicios	5
Ejercicio 1: Proporcionalidad Directa – Nivel del Agua	5
Ejercicio 2: Proporcionalidad Inversa – Pintores y Horas	8
Ejercicio 3: Proporcionalidad Compuesta – Obreros, Horas y Días	10
Ejercicio 4: Reparto Proporcional – Tres Amigos	13
Ejercicio 5: Cálculo de Porcentajes – Ausencias en Clase	16
Ejercicio 6: Cálculo del Total a partir de un Porcentaje – Hospital	18
Ejercicio 7: Variaciones Porcentuales Encadenadas – Precio Final	20
Ejercicio 8: Variación Porcentual Total Encadenada	23
3. Tabla de Respuestas	26
4. Resumen de Fórmulas y Conceptos Fundamentales	28

Capítulo 1

Fundamentos Teóricos Previos

En este capítulo se recogen, de forma estructurada y rigurosa, todos los conceptos matemáticos necesarios para resolver cada uno de los ejercicios del examen. Se recomienda leerlo con detenimiento antes de abordar las soluciones.

1.1. Proporcionalidad Directa

Definición 1.1 (Proporcionalidad directa). Dos magnitudes A y B son **directamente proporcionales** si, al multiplicar (o dividir) los valores de una de ellas por un número $k > 0$, los valores de la otra quedan también multiplicados (o divididos) por el mismo número k . Algebraicamente:

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \dots = k \quad (\text{constante de proporcionalidad}).$$

Propiedad 1.1 (Regla de tres directa). Si $A_1 \longleftrightarrow B_1$ y $A_2 \longleftrightarrow B_2$, con A y B directamente proporcionales, entonces:

$$B_2 = \frac{A_2 \cdot B_1}{A_1}.$$

Identificación: Si al aumentar una magnitud la otra también aumenta (o ambas disminuyen), la proporcionalidad es *directa*.

1.2. Proporcionalidad Inversa

Definición 1.2 (Proporcionalidad inversa). Dos magnitudes A y B son **inversamente proporcionales** si su producto permanece constante:

$$A_1 \cdot B_1 = A_2 \cdot B_2 = k \quad (\text{constante de proporcionalidad}).$$

Propiedad 1.2 (Regla de tres inversa). Si $A_1 \longleftrightarrow B_1$ y $A_2 \longleftrightarrow B_2$, con A y B inversamente proporcionales, entonces:

$$B_2 = \frac{A_1 \cdot B_1}{A_2}.$$

Identificación: Si al aumentar una magnitud la otra disminuye (o viceversa), la proporcionalidad es *inversa*.

1.3. Proporcionalidad Compuesta

Cuando intervienen más de dos magnitudes, se aplica la **regla de tres compuesta**. El método consiste en:

1. Identificar para cada par de magnitudes si la relación es directa o inversa.
2. Construir la igualdad de productos o cocientes correspondiente.
3. Despejar la incógnita.

1.4. Reparto Proporcional

Definición 1.3 (Reparto proporcional directo). Dado un total T que se reparte entre n personas en partes proporcionales a los valores $p_1, p_2, \dots, p_n$, la parte que corresponde a la persona i -ésima es:

$$P_i = T \cdot \frac{p_i}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}.$$

1.5. Porcentajes

Definición 1.4 (Porcentaje). El tanto por ciento de un número A respecto a un total T es:

$$\% = \frac{A}{T} \times 100.$$

Inversamente, el valor que representa un porcentaje $p\%$ de T es:

$$A = T \times \frac{p}{100}.$$

Propiedad 1.3 (Cálculo del total conociendo un porcentaje). Si A es el $p\%$ de T , entonces:

$$T = \frac{A \times 100}{p} = \frac{A}{p/100}.$$

1.6. Variaciones Porcentuales Encadenadas

Definición 1.5 (Factor de variación). Una **rebaja** del $r\%$ equivale a multiplicar por el factor:

$$f_{\text{rebaja}} = 1 - \frac{r}{100}.$$

Un **aumento** del $a\%$ equivale a multiplicar por el factor:

$$f_{\text{aumento}} = 1 + \frac{a}{100}.$$

Propiedad 1.4 (Composición de variaciones). Si se aplican sucesivamente varios factores de variación $f_1, f_2, \dots, f_n$ sobre un precio inicial P_0 , el precio final es:

$$P_{\text{final}} = P_0 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdots f_n.$$

El factor global es $F = f_1 \cdot f_2 \cdots f_n$, y la variación porcentual total es:

$$\Delta \% = (F - 1) \times 100.$$

Si $\Delta \% > 0$, el precio ha *subido*; si $\Delta \% < 0$, ha *bajado*.

Advertencia – Error frecuente

Error muy frecuente: Sumar o restar los porcentajes de forma aritmética. Por ejemplo, un descuento del 30 % seguido de uno del 20 % **no** equivale a un descuento del 50 %, sino a $1 - (0,7 \times 0,8) = 1 - 0,56 = 0,44$, es decir, un descuento del **44 %**.

Capítulo 2

Soluciones Detalladas de los Ejercicios

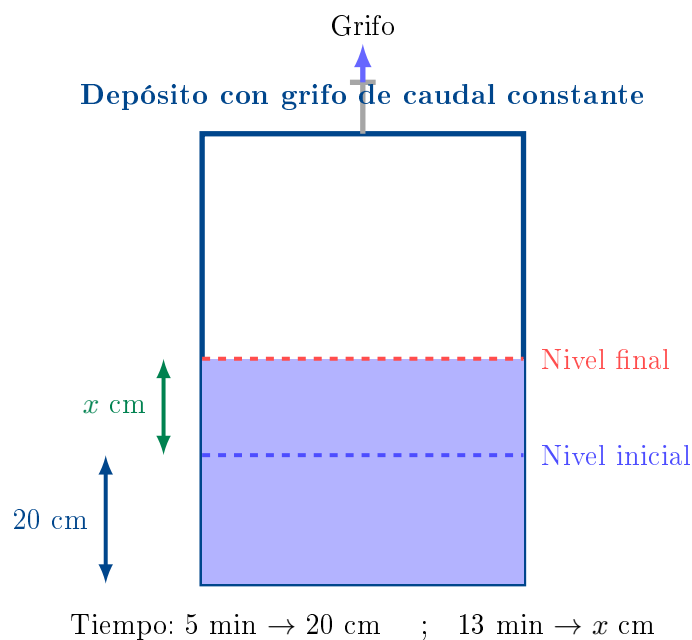
A continuación se desarrolla, con pleno rigor matemático y explicación pedagógica exhaustiva, la solución de cada uno de los ocho ejercicios del examen.

Ejercicio 1 Proporcionalidad Directa: Nivel del Agua

Enunciado

Un grifo de caudal constante vierte agua en un depósito. En 5 minutos el nivel del agua ha subido 20 cm. ¿Cuánto subirá el nivel en 13 minutos?

- A) 32 cm
- B) 52 cm
- C) 48 cm
- D) 80 cm



Análisis del tipo de proporcionalidad

El grifo tiene **caudal constante**: vierte el mismo volumen de agua por unidad de tiempo. Esto implica que la altura del agua en el depósito **crece de forma proporcional al tiempo**. Por tanto, las magnitudes *tiempo transcurrido* y *altura subida* son **directamente proporcionales**.

Concepto Clave

Magnitudes directamente proporcionales: si el tiempo se multiplica por un factor k , la altura también se multiplica por k .

Desarrollo de la Solución

Datos del problema:

$$t_1 = 5 \text{ min} \longleftrightarrow h_1 = 20 \text{ cm}$$

$$t_2 = 13 \text{ min} \longleftrightarrow h_2 = x \text{ cm (incógnita)}$$

Aplicación de la regla de tres directa:

La constante de proporcionalidad es el caudal expresado en cm/min:

$$k = \frac{h_1}{t_1} = \frac{20 \text{ cm}}{5 \text{ min}} = 4 \text{ cm/min.}$$

Por proporcionalidad directa, se cumple:

$$\frac{h_1}{t_1} = \frac{h_2}{t_2} \implies \frac{20}{5} = \frac{x}{13}.$$

Despejando x :

$$x = \frac{20 \times 13}{5} = \frac{260}{5} = \boxed{52 \text{ cm}}.$$

Verificación: $4 \text{ cm/min} \times 13 \text{ min} = 52 \text{ cm}$. ✓

Respuesta Correcta

Opción B) 52 cm.

El nivel del agua subirá 52 cm en 13 minutos.

Observación 2.1. La constante de proporcionalidad $k = 4 \text{ cm/min}$ es el caudal *expresado en términos de altura* (no de volumen). Para un depósito de sección transversal uniforme S (en cm^2), el caudal volumétrico sería $Q = 4S \text{ cm}^3/\text{min}$.

Advertencia – Error frecuente

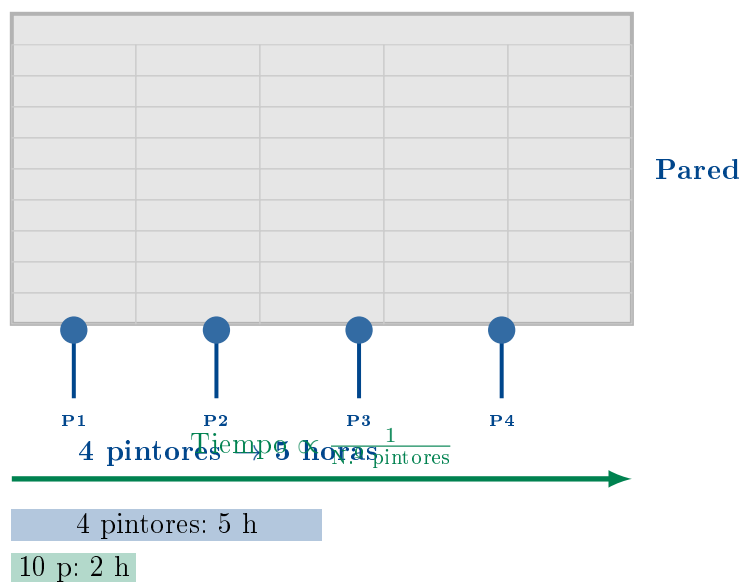
Un error frecuente es confundir proporcionalidad directa con inversa: a mayor tiempo, mayor subida $\Rightarrow$ **directa**. Si el problema preguntase cuántos grifos hacen falta para llenar el depósito en menos tiempo, la relación grifos/tiempo sería **inversa**.

Ejercicio 2 Proporcionalidad Inversa: Pintores y Horas

Enunciado

Cuatro operarios pintan una pared en 5 horas. ¿Cuánto tardarán diez pintores en realizar la misma tarea?

- A) 2 horas
- B) 12,5 horas
- C) 8 horas
- D) 20 horas



Análisis del tipo de proporcionalidad

Cuantos más pintores trabajen, menos tiempo se tardará en pintar la misma pared (suponiendo que cada pintor trabaja a la misma velocidad y que no hay interferencias entre ellos). Las magnitudes *número de pintores* y *tiempo empleado* son **inversamente proporcionales**.

Concepto Clave

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando su **producto** es constante: $\text{pintores} \times \text{horas} = k$. Ese producto representa el *trabajo total* expresado en unidades de *persona-hora*.

Desarrollo de la Solución**Datos del problema:**

$$n_1 = 4 \text{ pintores} \quad \longleftrightarrow \quad t_1 = 5 \text{ horas}$$

$$n_2 = 10 \text{ pintores} \quad \longleftrightarrow \quad t_2 = x \text{ (incógnita)}$$

Cálculo del trabajo total:

El trabajo total (pared completa) equivale a:

$$W = n_1 \times t_1 = 4 \times 5 = 20 \text{ persona-hora.}$$

Esta cantidad es constante: independientemente del número de pintores, la pared requiere siempre 20 persona-hora de trabajo.

Cálculo con 10 pintores:

Como el producto es constante:

$$n_2 \times t_2 = W = 20.$$

Despejando t_2 :

$$t_2 = \frac{W}{n_2} = \frac{20}{10} = \boxed{2 \text{ horas}}.$$

Verificación con regla de tres inversa:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{t_2}{t_1} \implies \frac{4}{10} = \frac{t_2}{5} \implies t_2 = \frac{4 \times 5}{10} = \frac{20}{10} = 2 \text{ horas.} \checkmark$$

Respuesta Correcta**Opción A) 2 horas.**

Diez pintores tardarán 2 horas en pintar la misma pared.

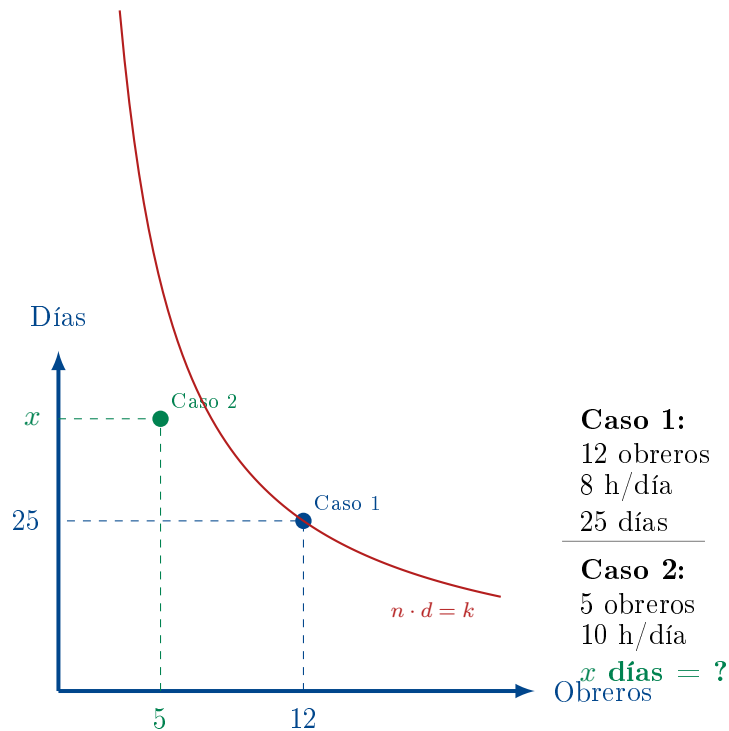
Observación 2.2. La clave está en identificar correctamente el tipo de proporcionalidad: más pintores implica menos tiempo $\Rightarrow$ **inversamente proporcional**. Si hubiese sido directa, 10 pintores tardarían $\frac{10 \times 5}{4} = 12,5$ horas, lo cual es un resultado absurdo (¡más gente tardaría *más*!). Por eso la opción B (12,5 h) es el error clásico de aplicar regla directa cuando corresponde inversa.

Ejercicio 3 Proporcionalidad Compuesta: Obreros, Horas y Días

Enunciado

Doce obreros, trabajando 8 horas diarias, terminan un trabajo en 25 días. ¿Cuánto tardarán en hacer ese mismo trabajo 5 obreros trabajando 10 horas diarias?

- A) 60 días
- B) 48 días
- C) 30 días
- D) 80 días



Análisis del tipo de proporcionalidad

Intervienen **tres magnitudes**: número de obreros (n), horas diarias de trabajo (h), y días necesarios (d). El producto $n \times h \times d$ representa el trabajo total (en persona-hora), que es constante.

- Relación obreros–días: **inversamente proporcional** (más obreros $\Rightarrow$ menos días).

- Relación horas diarias–días: **inversamente proporcional** (más horas/día $\Rightarrow$ menos días).

Concepto Clave

En la proporcionalidad compuesta con relaciones inversas, el trabajo total se conserva:

$$n_1 \cdot h_1 \cdot d_1 = n_2 \cdot h_2 \cdot d_2.$$

Desarrollo de la Solución

Datos del problema:

	Obreros (n)	Horas/día (h)	Días (d)
Situación 1	12	8	25
Situación 2	5	10	x

Cálculo del trabajo total (en persona-hora):

$$W = n_1 \times h_1 \times d_1 = 12 \times 8 \times 25 = 2\,400 \text{ persona-hora.}$$

Planteamiento de la ecuación:

$$n_2 \times h_2 \times d_2 = W \implies 5 \times 10 \times x = 2\,400.$$

Resolución:

$$50x = 2\,400 \implies x = \frac{2\,400}{50} = \boxed{48 \text{ días}}.$$

Verificación:

$$5 \times 10 \times 48 = 2\,400 = 12 \times 8 \times 25. \checkmark$$

Método alternativo – Regla de tres compuesta con factores:

Partimos de $d_1 = 25$ días y aplicamos dos correcciones:

Corrección por obreros (relación inversa): $\frac{12}{5}$.

Corrección por horas (relación inversa): $\frac{8}{10}$.

$$d_2 = 25 \times \frac{12}{5} \times \frac{8}{10} = 25 \times \frac{96}{50} = 25 \times 1,92 = 48 \text{ días.} \checkmark$$

Ambos métodos son equivalentes y conducen al mismo resultado.

Respuesta Correcta**Opción B) 48 días.**

Cinco obreros trabajando 10 horas diarias tardarán 48 días en terminar el mismo trabajo.

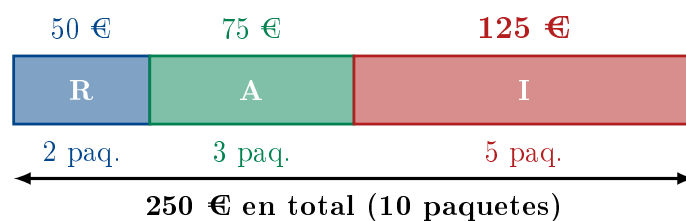
Observación 2.3. El trabajo total en este problema es $W = 2\,400$ persona-hora. Este valor es una *invariante*: independientemente de cómo se organice la mano de obra, la cantidad de trabajo necesaria para completar la obra no cambia.

Ejercicio 4 Reparto Proporcional: Tres Amigos

Enunciado

Tres amigos (Rafael, Arancha e Iván) han recibido 250 euros por repartir propaganda. Rafael repartió 2 paquetes, Arancha 3, e Iván 5. ¿Cuánto dinero le corresponde a Iván?

- A) 50 euros
- B) 75 euros
- C) 125 euros
- D) 62,50 euros



Análisis del tipo de proporcionalidad

El dinero a repartir es proporcional al número de paquetes que repartió cada persona. A mayor número de paquetes repartidos, mayor remuneración. Se aplica un **reparto proporcional directo**.

Concepto Clave

En un reparto proporcional, la parte de cada individuo se calcula como:

$$P_i = T \cdot \frac{p_i}{\sum_j p_j},$$

donde T es el total, p_i es el peso (paquetes repartidos) del individuo i , y $\sum_j p_j$ es la suma de todos los pesos.

Desarrollo de la Solución

Datos del problema:

Persona	Paquetes	Porción del total
Rafael	2	$\frac{2}{10}$
Arancha	3	$\frac{3}{10}$
Iván	5	$\frac{5}{10}$
Total	10	1

Cálculo de la suma de pesos:

$$\Sigma = 2 + 3 + 5 = 10 \text{ paquetes.}$$

Cálculo de la *unidad de reparto*:

Cada paquete tiene un valor económico de:

$$u = \frac{T}{\Sigma} = \frac{250}{10} = 25 \text{ euros/paquete.}$$

Cálculo de las partes individuales:

$$P_{\text{Rafael}} = 2 \times 25 = 50 \text{ euros.}$$

$$P_{\text{Arancha}} = 3 \times 25 = 75 \text{ euros.}$$

$$P_{\text{Iván}} = 5 \times 25 = \boxed{125 \text{ euros.}}$$

Verificación (la suma debe ser 250 €):

$$50 + 75 + 125 = 250 \text{ euros.} \checkmark$$

Método alternativo directo:

$$P_{\text{Iván}} = 250 \times \frac{5}{10} = 250 \times 0,5 = 125 \text{ euros.}$$

Respuesta Correcta

Opción C) 125 euros.

A Iván le corresponden 125 euros.

Observación 2.4. Iván repartió exactamente la mitad de todos los paquetes (5 de 10), por lo que le corresponde exactamente la mitad del dinero total (125 de 250 €). Esta relación de mitad es una comprobación intuitiva muy útil.

Advertencia – Error frecuente

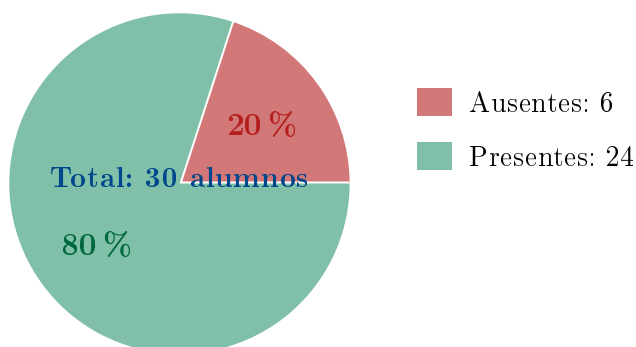
Un error frecuente es dividir el dinero en *tres partes iguales* y luego multiplicar. Eso daría $250/3 \approx 83,33$ € a cada uno, lo que es incorrecto porque no tiene en cuenta el trabajo realizado por cada persona.

Ejercicio 5 Cálculo de Porcentajes: Ausencias en Clase

Enunciado

En una clase de 30 alumnos, hoy han faltado 6 a clase. ¿Cuál ha sido el tanto por ciento de ausencias?

- A) 20 %
- B) 16,67 %
- C) 80 %
- D) 6 %



Planteamiento matemático

Se busca expresar la fracción de alumnos ausentes sobre el total como un porcentaje. La fórmula general del porcentaje es:

$$p \% = \frac{\text{parte}}{\text{total}} \times 100.$$

Desarrollo de la Solución

Datos del problema:

Total de alumnos = 30.

Alumnos ausentes = 6.

Aplicación de la fórmula:

$$p \% = \frac{6}{30} \times 100.$$

Simplificación de la fracción:

$$\frac{6}{30} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

Cálculo del porcentaje:

$$p \% = 0,2 \times 100 = \boxed{20 \%}.$$

Verificación intuitiva: 6 es un quinto de 30 ($30 \div 6 = 5$), y un quinto equivale exactamente al 20 %. ✓

Cálculo del porcentaje de asistencia (complementario):

$$100 \% - 20 \% = 80 \% \text{ de alumnos asistentes.}$$

Comprobación: $30 \times 0,80 = 24$ alumnos presentes, y $24 + 6 = 30$ alumnos totales. ✓

Respuesta Correcta

Opción A) 20 %.

El porcentaje de ausencias es del 20 %.

Observación 2.5. La opción B (16,67 %) correspondería a calcular el porcentaje de manera errónea como $\frac{6}{36} \times 100$ (sumando 6 al total), o bien utilizando otra referencia incorrecta. La opción C (80 %) es el porcentaje de *asistencia*, no de ausencias. La opción D (6 %) confundiría el número absoluto de ausentes con un porcentaje.

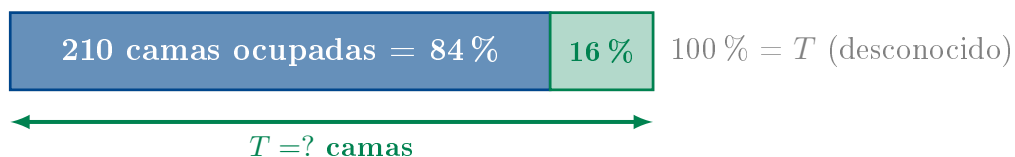
Ejercicio 6 Cálculo del Total a partir de un Porcentaje: Hospital

Enunciado

Un hospital tiene 210 camas ocupadas, lo que representa el 84 % de todas las camas disponibles. ¿De cuántas camas dispone dicho hospital?

- A) 250 camas
- B) 176,4 camas
- C) 294 camas
- D) 300 camas

$$\begin{aligned} 100 \% &\longleftrightarrow T = ? \text{ camas} \\ 84 \% &\longleftrightarrow 210 \text{ camas} \end{aligned}$$



Planteamiento matemático

Conocemos la *parte* (210 camas) y el porcentaje que esa parte representa (84 %). Queremos encontrar el *total* T .

Concepto Clave

Si A representa el p % del total T , entonces:

$$A = T \cdot \frac{p}{100} \implies T = \frac{A \cdot 100}{p} = \frac{A}{p/100}.$$

Desarrollo de la Solución**Datos del problema:**Camas ocupadas: $A = 210$.Porcentaje que representan: $p = 84\%$.Total de camas: $T = \text{incógnita}$.**Planteamiento con regla de tres directa:**

$$84 \longleftrightarrow 210 \quad 100 \longleftrightarrow T.$$

(a mayor porcentaje, más camas $\Rightarrow$ relación directa.)**Resolución:**

$$T = \frac{100 \times 210}{84} = \frac{21\,000}{84}.$$

Simplificamos dividiendo numerador y denominador entre 42:

$$T = \frac{21\,000 \div 42}{84 \div 42} = \frac{500}{2} = \boxed{250 \text{ camas}}.$$

Verificación:

$$84\% \text{ de } 250 = 250 \times \frac{84}{100} = 250 \times 0,84 = 210 \text{ camas.} \checkmark$$

Cálculo de las camas libres:

$$\text{Camas libres} = 250 - 210 = 40 \text{ camas} \quad (= 16\% \text{ de } 250 = 0,16 \times 250 = 40 \checkmark).$$

Respuesta Correcta**Opción A) 250 camas.**

El hospital dispone de 250 camas en total.

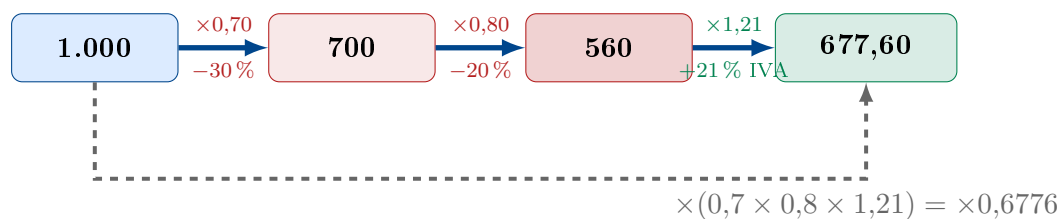
Observación 2.6. La opción B (176,4 camas) correspondería a calcular el 84 % de 210, que es la operación inversa incorrecta: $210 \times 0,84 = 176,4$. Es el error más frecuente en este tipo de problemas, confundir “ A es el $p\%$ de T ” con “ T es el $p\%$ de A ”.

Ejercicio 7 Variaciones Porcentuales Encadenadas: Precio Final del Móvil

Enunciado

Un móvil de 1.000 euros sufre una rebaja del 30 %, luego un descuento adicional del 20 %, y por último se le aplica un aumento del 21 % de IVA. ¿Cuánto se terminará pagando por el móvil?

- A) 585,90 euros
- B) 600,00 euros
- C) 677,60 euros
- D) 710,00 euros



Planteamiento matemático

Las variaciones porcentuales sucesivas se modelan mediante **factores de variación** que se multiplican entre sí.

Concepto Clave

- Una rebaja del r % equivale a multiplicar por $f = 1 - \frac{r}{100}$.
- Un aumento del a % equivale a multiplicar por $f = 1 + \frac{a}{100}$.

Desarrollo de la Solución**Datos del problema:**

$$P_0 = 1\,000 \text{ euros (precio inicial).}$$

$$\text{Variación 1: Rebaja del 30 \% } \implies f_1 = 1 - 0,30 = 0,70.$$

$$\text{Variación 2: Descuento adicional del 20 \% } \implies f_2 = 1 - 0,20 = 0,80.$$

$$\text{Variación 3: IVA del 21 \% } \implies f_3 = 1 + 0,21 = 1,21.$$

Aplicación paso a paso:

Paso 1 – Tras la rebaja del 30 %:

$$P_1 = P_0 \times f_1 = 1\,000 \times 0,70 = 700 \text{ euros.}$$

Paso 2 – Tras el descuento adicional del 20 %:

$$P_2 = P_1 \times f_2 = 700 \times 0,80 = 560 \text{ euros.}$$

Paso 3 – Tras aplicar el IVA del 21 %:

$$P_3 = P_2 \times f_3 = 560 \times 1,21.$$

Calculamos $560 \times 1,21$:

$$560 \times 1 + 560 \times 0,21 = 560 + 560 \times 0,21 = 560 + 117,60 = \boxed{677,60 \text{ euros.}}$$

Método compacto (factor global):

$$P_3 = P_0 \times f_1 \times f_2 \times f_3 = 1\,000 \times 0,70 \times 0,80 \times 1,21.$$

Calculamos el factor global:

$$F = 0,70 \times 0,80 \times 1,21 = 0,56 \times 1,21 = 0,6776.$$

Por tanto:

$$P_3 = 1\,000 \times 0,6776 = \boxed{677,60 \text{ euros.}}$$

Verificación: $1\,000 \times 0,6776 = 677,6 \checkmark$

Respuesta Correcta**Opción C) 677,60 euros.**

El precio final del móvil (con descuentos e IVA) es 677,60 euros.

Advertencia – Error frecuente

Error muy frecuente: Sumar los porcentajes directamente: $-30\% - 20\% + 21\% = -29\%$, lo que daría $1\,000 \times 0,71 = 710$ euros (opción D). Esto es incorrecto porque los porcentajes se aplican sucesivamente sobre bases distintas, no sobre la misma base.

Observación 2.7. El precio de 560 euros (antes del IVA) es el *precio neto*: el que figuraría como precio de venta en un establecimiento si la tarifa ya incluyese los descuentos. El IVA siempre se aplica sobre el precio neto en España.

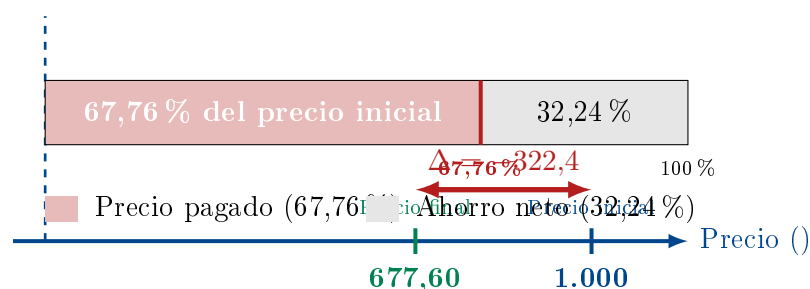
Ejercicio 8 Variación Porcentual Total Encadenada

Enunciado

Considerando las variaciones porcentuales encadenadas (30 % de rebaja, 20 % de descuento adicional, 21 % de aumento de IVA) sobre el precio inicial de un producto, ¿qué porcentaje de variación total se ha aplicado?

- A) 32,24 % de descuento
- B) 32,24 % de aumento
- C) 29 % de descuento
- D) 16,8 % de descuento

Factor $F = 0,6776$



Planteamiento matemático

Ya calculamos en el ejercicio 7 el factor global de variación. Ahora debemos interpretarlo como porcentaje de variación total respecto al precio original.

Concepto Clave

Si el precio final es $P_f = P_0 \cdot F$, entonces el porcentaje de variación total es:

$$\Delta \% = (F - 1) \times 100.$$

Si $\Delta \% < 0$, hay un *descuento* neto; si $\Delta \% > 0$, hay un *encarecimiento* neto.

Desarrollo de la Solución

Recuperamos el factor global del ejercicio 7:

$$F = f_1 \times f_2 \times f_3 = 0,70 \times 0,80 \times 1,21.$$

Cálculo paso a paso del factor global:

$$0,70 \times 0,80 = 0,56.$$

$$0,56 \times 1,21 = ?$$

Desarrollamos $0,56 \times 1,21$ con detalle:

$$\begin{aligned} 0,56 \times 1,21 &= 0,56 \times 1 + 0,56 \times 0,2 + 0,56 \times 0,01 \\ &= 0,56 + 0,112 + 0,0056 \\ &= 0,6776. \end{aligned}$$

Cálculo de la variación porcentual total:

$$\Delta \% = (F - 1) \times 100 = (0,6776 - 1) \times 100 = (-0,3224) \times 100 = -32,24 \%.$$

El signo negativo indica un **descuento** (el precio ha bajado respecto al original).

Interpretación:

$$\Delta \% = -32,24 \% \implies \text{se ha aplicado un descuento neto del } 32,24 \%.$$

Verificación con el precio:

$$1\,000 \times (1 - 0,3224) = 1\,000 \times 0,6776 = 677,60 \text{ euros.} \checkmark$$

¿Por qué no es -29% ?

Si sumásemos directamente los porcentajes: $-30 - 20 + 21 = -29\%$, obtendríamos la opción C. Pero esto es incorrecto porque cada porcentaje se aplica sobre una base diferente. El resultado correcto, $-32,24\%$, difiere porque:

- El 20 % de descuento se aplica sobre los 700 (tras el primer descuento), no sobre 1.000 .
- El 21 % de IVA se aplica sobre los 560 (tras ambos descuentos), no sobre 1.000 .

Respuesta Correcta**Opción A) 32,24 % de descuento.**

La variación porcentual total neta es un descuento del 32,24 % sobre el precio inicial.

Advertencia – Error frecuente

Las variaciones porcentuales encadenadas **nunca se suman aritméticamente**. La composición de los factores $(0,70)(0,80)(1,21) = 0,6776$ indica que el precio final es el 67,76 % del original, lo que equivale a un descuento neto del 32,24 %.

Observación 2.8. Es llamativo que, a pesar de aplicar un IVA del 21 %, el precio final siga siendo inferior al inicial gracias a los dos descuentos previos. Sin los descuentos, el precio con IVA sería $1\,000 \times 1,21 = 1\,210$.

Capítulo 3

Tabla de Respuestas

Pregunt	A	B	C	D
1		✓		
2	✓			
3		✓		
4			✓	
5	✓			
6	✓			
7			✓	
8	✓			

Pregunta	Respuesta correcta y valor
1	B) 52 cm
2	A) 2 horas
3	B) 48 días
4	C) 125 euros
5	A) 20 %
6	A) 250 camas
7	C) 677,60 euros
8	A) 32,24 % de descuento

Capítulo 4

Resumen de Fórmulas y Conceptos Fundamentales

Concepto	Fórmula / Descripción
Prop. directa	$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = k \Rightarrow B_2 = \frac{A_2 \cdot B_1}{A_1}$
Prop. inversa	$A_1 \cdot B_1 = A_2 \cdot B_2 = k \Rightarrow B_2 = \frac{A_1 \cdot B_1}{A_2}$
Prop. compuesta	$n_1 \cdot h_1 \cdot d_1 = n_2 \cdot h_2 \cdot d_2$
Reparto prop.	$P_i = T \cdot \frac{p_i}{\sum_j p_j}$
Porcentaje (parte)	$A = T \cdot \frac{p}{100}$
Porcentaje (total)	$T = \frac{A \cdot 100}{p}$
Tanto por ciento	$p\% = \frac{A}{T} \times 100$
Factor de rebaja $r\%$	$f = 1 - \frac{r}{100}$
Factor de aumento $a\%$	$f = 1 + \frac{a}{100}$
Factor global	$F = f_1 \cdot f_2 \cdots f_n$
Precio final	$P_f = P_0 \cdot F$
Variación total $\%$	$\Delta\% = (F - 1) \times 100$

Regla de Identificación del Tipo de Proporcionalidad

- Si al aumentar una magnitud la otra **también aumenta** $\Rightarrow$ **proporcionalidad DIRECTA**.
- Si al aumentar una magnitud la otra **disminuye** $\Rightarrow$ **proporcionalidad INVERSA**.
- Para proporcionalidad compuesta, analizar cada par de magnitudes por separado.
- Los porcentajes encadenados se operan mediante **productos de factores**, nunca mediante sumas aritméticas.

Problemas de Repaso de Matemáticas (2º ESO)

Ladislao Jáñez Blanco

I. Proporcionalidad y Porcentajes (Problemas 1-25)

1. Tinta de Impresora

- a) Una impresora imprime **350 páginas** en **7 minutos**. ¿Cuántas páginas imprimirá en **12 minutos**?
- b) Si de esas 350 páginas, **42** salieron con errores, ¿cuál fue el porcentaje de páginas con errores?
- c) ¿Cuántos minutos tardaría la impresora en imprimir **1,500 páginas**?

2. Consumo de Gasolina

- a) Un coche consume **6 litros** de gasolina para recorrer **100 km**. ¿Cuántos kilómetros podrá recorrer con **15 litros**?
- b) Si el depósito tiene una capacidad de **50 litros**, ¿qué porcentaje del depósito representa el consumo de 6 litros?
- c) Si el precio de la gasolina sube un **5 %** y antes costaba **1.60 /litro**, ¿cuál es el nuevo precio?

3. Producción de Leche

- a) **5 vacas** producen un total de **80 litros** de leche al día. ¿Cuántos litros producirán **12 vacas** en el mismo día?
- b) Si de los 80 litros se venden **68 litros**, ¿qué porcentaje de la producción se ha vendido?
- c) Si un litro de leche cuesta **0.95** con un impuesto del **4 %** de IVA, ¿cuál es el precio sin IVA?

4. Elaboración de Mermelada

- a) Para hacer mermelada se necesitan **3 kg** de fresas por cada **5 kg** de azúcar. ¿Cuántos kilogramos de fresas se necesitan para **18 kg** de azúcar?
- b) Si en total se hicieron **40 botes** de mermelada y se vendieron el **85 %** de ellos, ¿cuántos botes se vendieron?
- c) Si el precio de venta es de **2.50** por bote y se aplica un descuento del **10 %** por la compra de 5 o más, ¿cuánto costarán **7 botes**?

5. Avance de Obra

- a) En **3 días** se han colocado **120 metros** de valla. ¿Cuántos metros de valla se colocarán en **10 días**?
- b) Si la longitud total de la valla es de **300 metros**, ¿qué porcentaje de la obra queda por realizar después de los 10 días?
- c) Si al coste inicial de la valla de **250** se le añade un **15 %** por transporte, ¿cuál es el coste final?

6. Receta de Tortilla

- a) Una receta de tortilla para **4 personas** requiere **6 huevos**. ¿Cuántos huevos se necesitarán para hacer tortilla para **14 personas**?
- b) Si el coste de los huevos necesarios para 4 personas es de **1.10** , ¿cuál es el coste de los huevos para 14 personas?
- c) Si en una granja se recogen **2,000 huevos** al día, y se rompen el **3 %**, ¿cuántos huevos quedan intactos?

7. Velocidad y Distancia

- a) Un ciclista recorre **48 km** en **2 horas**. ¿Cuánto tardará en recorrer **108 km** a la misma velocidad?
- b) Si la ruta tiene un total de **150 km**, ¿qué porcentaje ha recorrido el ciclista después de 108 km?
- c) Si el ciclista sufre una avería y su velocidad disminuye un **25 %**, ¿cuál será su nueva velocidad en km/h?

8. Capacidad de Riego

- a) Un sistema de riego utiliza **180 litros** de agua para regar una zona durante **30 minutos**. ¿Cuánta agua necesitará para regar durante **45 minutos**?
- b) Si el depósito de agua tiene **500 litros** de capacidad, ¿qué porcentaje de agua queda después de los 45 minutos de riego?
- c) Si el coste de la instalación del sistema de riego fue de **450** y se le aplica un descuento del **8 %**, ¿cuánto se paga finalmente?

9. Consumo de Energía

- a) Una máquina consume **2.4 kWh** de energía en **8 horas** de funcionamiento. ¿Cuánta energía consumirá en **15 horas**?
- b) Si el recibo de la luz para la máquina es de **55** , y se le aplica un recargo del **21 %** de impuestos, ¿cuánto es el coste de la energía sin impuestos?
- c) Para ahorrar, se reduce el consumo en un **12 %** el mes siguiente. Si el consumo inicial era de 120 kWh, ¿cuál es el nuevo consumo?

10. Peso y Volumen

- a) **2.5 metros cúbicos** de grava pesan **4,000 kg**. ¿Cuánto pesarán **7 metros cúbicos** de la misma grava?

- b) Si de esos 4,000 kg se han usado **3,400 kg**, ¿qué porcentaje de la grava se ha utilizado?
- c) Un camión puede cargar hasta **9 toneladas**. ¿Qué porcentaje de la carga máxima representan los 4,000 kg?

11. Pintura de Habitaciones (Inversa)

- a) **3 pintores** tardan **8 horas** en pintar un piso. ¿Cuánto tardarán **4 pintores** en pintar el mismo piso?
- b) Si la hora de trabajo cuesta **25** por pintor, ¿cuál es el coste total de la pintura si trabajan 3 pintores?
- c) Si la pintura tuvo un coste de **150** y se consiguió un descuento del **15 %**, ¿cuál fue el precio original de la pintura?

12. Tiempo de Excavación (Inversa)

- a) **5 excavadoras** pueden completar un trabajo de excavación en **12 días**. ¿Cuántos días tardarán **8 excavadoras** en completar el mismo trabajo?
- b) Si por retrasos, el tiempo de excavación aumenta en un **20 %** con 5 excavadoras, ¿cuántos días tardarían?
- c) Si el coste total del alquiler de las excavadoras es de **8,000** , y 3 de ellas se alquilan por **3,200** , ¿qué porcentaje del coste total es este alquiler?

13. Llenado de Piscinas (Inversa)

- a) **4 mangueras** llenan una piscina en **6 horas**. ¿Cuántas mangueras se necesitarán para llenar la piscina en tan solo **2 horas**?
- b) Si la piscina contiene **30,000 litros** de agua, ¿cuántos litros vierte cada manguera por hora (suponiendo caudal constante y 4 mangueras)?
- c) Si la piscina está al **70 %** de su capacidad, ¿cuántos litros de agua contiene?

14. Velocidad y Viaje (Inversa)

- a) Para un viaje, un tren viaja a **120 km/h** y tarda **5 horas**. ¿A qué velocidad debería viajar para completar el mismo trayecto en **4 horas**?
- b) Si el tren reduce su velocidad en un **10 %**, ¿cuál es el nuevo tiempo de viaje?
- c) Si un billete cuesta **50** y se aplica un recargo del **5 %** por servicio, ¿cuál es el coste final del billete?

15. Distribución de Tareas (Inversa)

- a) **10 obreros** tardan **9 días** en construir un muro. ¿Cuántos obreros harán falta para construir el mismo muro en **6 días**?
- b) Si la paga total por la construcción del muro es de **3,600** , ¿cuánto le corresponde a cada uno de los 10 obreros?
- c) Si el material de construcción sube un **8 %** y antes costaba **1,200** , ¿cuál es el nuevo coste del material?

16. Alimento para Animales (Inversa)

- a) Un saco de pienso dura **15 días** para alimentar a **8 perros**. ¿Cuántos días durará el mismo saco si hay **12 perros**?
- b) Si cada perro come **200 gramos** de pienso al día, ¿cuántos kilogramos contiene el saco?
- c) Si el precio del saco de pienso sube de **40** a **45** , ¿cuál ha sido el porcentaje de aumento?

17. Velocidad de Tipeo (Inversa)

- a) **2 mecanógrafos** tardan **3 horas** en transcribir un informe. ¿Cuánto tiempo tardaría **1 mecanógrafo** en realizar la misma tarea?
- b) Si el informe tiene **45 páginas**, ¿cuántas páginas por hora transcribe cada mecanógrafo?
- c) Si el sueldo total por el informe es de **150** , y uno de ellos recibe el **60 %**, ¿cuánto dinero recibe el otro?

18. Preparación de Pedidos (Inversa)

- a) **6 empleados** preparan un gran pedido en **4 horas**. ¿Cuánto tiempo tardarán **8 empleados** en preparar el mismo pedido?
- b) Si al final del día se han preparado **120 pedidos** y **96** han sido enviados, ¿qué porcentaje de pedidos quedan por enviar?
- c) Si el coste de envío aumenta un **20 %** y antes era de **4.50** , ¿cuál es el nuevo coste de envío?

19. Duración de las Provisiones (Inversa)

- a) Unas provisiones para **20 personas** duran **15 días**. Si se añaden **5 personas** más, ¿cuántos días durarán las provisiones?
- b) Si el coste inicial de las provisiones era de **500** , y se incrementa en un **20 %** debido a la subida de precios, ¿cuál es el nuevo coste?
- c) ¿Qué porcentaje del total de personas representan las 5 personas añadidas?

20. Producción de Juguetes (Inversa)

- a) Una máquina produce un lote de juguetes en **20 minutos**. Si se utilizan **4 máquinas** trabajando a la misma velocidad, ¿cuánto tardarán en producir el mismo lote?
- b) Si el coste de producción del lote es de **800** , y se venden los juguetes por **1,200** , ¿cuál es el porcentaje de beneficio sobre el coste?
- c) Si por un fallo, la producción se reduce en un **5 %**, ¿cuántos juguetes se produjeron si el lote normal es de **1,500 unidades**?

21. Rendimiento de Máquinas (Compuesta)

- a) **5 máquinas**, trabajando **6 horas diarias**, fabrican **400 piezas** en **4 días**. ¿Cuántas piezas fabricarán **8 máquinas** trabajando **5 horas diarias** en **3 días**?
- b) Si el precio de cada pieza es de **2.50** , ¿cuál es el ingreso total por la venta de las 400 piezas?
- c) Si el número de días se reduce en un **25 %** para la segunda producción, ¿cuántos días son?

22. Construcción de Carreteras (Compuesta)

- a) **10 obreros**, trabajando **8 horas diarias**, construyen **200 metros** de carretera en **15 días**. ¿Cuántos días tardarán **15 obreros** trabajando **6 horas diarias** en construir **300 metros** de carretera?
- b) Si el coste total de la mano de obra es de **15,000** , ¿cuánto se paga por cada metro de carretera construido?
- c) Si el tramo de carretera restante es de **400 metros** y representa el **60 %** del total, ¿cuál es la longitud total de la carretera?

23. Transcripción de Documentos (Compuesta)

- a) **4 secretarias**, trabajando **7 horas al día**, transcriben **600 páginas** en **5 días**. ¿Cuántas páginas transcribirán **6 secretarias** trabajando **5 horas al día** en **8 días**?
- b) Si el coste de la transcripción es de **0.15** por página, ¿cuánto costó transcribir las 600 páginas?
- c) Si se ofrece un descuento del **10 %** en el coste total de transcripción, ¿cuál es el precio con el descuento?

24. Consumo de Combustible (Compuesta)

- a) **3 barcos** consumen **900 litros** de combustible en **5 días** navegando **10 horas diarias**. ¿Cuántos litros consumirán **5 barcos** en **4 días** navegando **8 horas diarias**?
- b) Si el precio del litro de combustible es de **0.80** , ¿cuál es el coste total del consumo de 900 litros?
- c) Si el consumo se reduce en un **15 %** gracias a un nuevo motor, ¿cuál es el nuevo consumo de combustible para el mismo periodo de tiempo?

25. Producción Agrícola (Compuesta)

- a) **6 tractores**, trabajando **12 horas diarias**, labran **30 hectáreas** en **4 días**. ¿Cuántas horas diarias tendrán que trabajar **8 tractores** para labrar **50 hectáreas** en **5 días**?
- b) Si el coste por labrar una hectárea es de **75** , ¿cuál es el coste total por labrar las 30 hectáreas?
- c) Si el precio de venta de la cosecha aumenta de **1.20 /kg** a **1.35 /kg**, ¿cuál ha sido el porcentaje de aumento?

II. Números Enteros (Problemas 26-35)

26. Operación Mixta con Paréntesis y Corchetes

- a) Calcula el resultado de: $7 - [(-2) \cdot (5 - 8)] + 10$
- b) Multiplica el resultado anterior por (-3) .
- c) Indica el valor absoluto de $3 - 5 \cdot 2 - 4$.

27. Productos y Cocientes de Varios Factores

- a) Resuelve la siguiente operación: $(-4) \cdot 6 : (-3) \cdot (-2)$
- b) Sustrae el resultado de (-15) .
- c) Calcula la potencia $(-2)^3$.

28. Prioridad de Operaciones con Potencias

- a) Calcula el resultado de: $12 - 4^2 : (-2) + 5$
- b) Multiplica la solución anterior por 10.
- c) Determina el valor de $9 - 3 \cdot (1 - 5)$.

29. Expresión con Doble Paréntesis

- a) Resuelve: $-11 + 2 \cdot [5 - (3 - 9)]$
- b) Divide el resultado obtenido entre (-4) .
- c) Suma a ese resultado la solución de $1 - 2 - 3 + 4$.

30. Uso de las Reglas de Signos

- a) Halla el valor de: $(-7) \cdot (-2) + (-18) : 6 - 5$
- b) Encuentra el número opuesto del resultado.
- c) ¿Cuál es la suma de los divisores positivos de 12?

31. Problema de Descenso y Ascenso

- a) Un submarino está a -80 metros. Si desciende 50 metros y luego asciende 35 metros, ¿a qué profundidad se encuentra?
- b) Si el submarino asciende hasta la superficie (0 metros), ¿cuántos metros subió desde el punto final del apartado (a)?
- c) ¿Cuál es la diferencia de profundidad entre el punto de partida (-80 m) y el punto más bajo alcanzado?

32. Operación Larga con Sumas y Restas

- a) Calcula: $25 - 15 + 8 - 12 - 10 + 3$
- b) Multiplica el resultado por el valor de $(-2)^2$.
- c) Calcula la expresión $2 \cdot (3 - 5) - 4 : (-2)$.

33. Combinación de Raíz y Potencia

- a) Resuelve la expresión: $\sqrt{49} + 3^3 - 5 \cdot 6$
- b) Añade a la solución el valor de $(-1)^9$.
- c) ¿Cuál es el producto de los números enteros comprendidos entre -4 y 3 (ambos excluidos)?

34. Operación con División Exacta y Productos

- a) Resuelve: $9 - 3 \cdot [(-10) : 5 + 4]$
- b) Si el resultado fuera el saldo de una cuenta, y se retira la mitad, ¿cuánto queda?
- c) Calcula el resultado de $(6 - 8)^2 - (-1)$.

35. Simplificación de Signos Agrupados

- a) Halla el valor de: $-(-4) + (-3) - (+5) - (-1)$
 - b) Multiplica el resultado por el opuesto de 10 .
 - c) Resuelve $20 - 5 \cdot (7 - 9)$.
-

III. Fracciones y Decimales (Problemas 36-60)

36. Conversión y Tipo de Decimal

- a) Transforma la fracción $\frac{13}{4}$ en número decimal e indica si es exacto o periódico.
- b) Transforma la fracción $\frac{8}{11}$ en número decimal e indica si es exacto o periódico.
- c) ¿Cuál es la fracción generatriz del número $0,75$?

37. Clasificación de Decimales

- a) Clasifica el número decimal $2,56$ (exacto, periódico puro o mixto).
- b) Clasifica el número decimal $1,2\hat{3}4$.
- c) Escribe la fracción generatriz del número $0.\hat{4}$.

38. Ordenación de Números (Decimales y Fracciones)

- a) Ordena de menor a mayor: $1,2$; $\frac{5}{4}$; $1.\hat{2}$
- b) Ordena de mayor a menor: $\frac{1}{3}$; $0,3$; $0.\hat{3}$
- c) ¿Cuál es la expresión decimal de $\frac{1}{8}$?

39. Fracción Generatriz (Periódico Puro)

- a) Halla la fracción generatriz del número $0.\hat{7}$ (simplificada).
- b) Comprueba que el valor decimal de tu fracción generatriz es el correcto.
- c) Calcula la suma de $\frac{1}{2} + 0,5$.

40. Fracción Generatriz (Periódico Mixto)

- a) Halla la fracción generatriz del número $0,1\widehat{6}$ (simplificada).
- b) ¿Qué tipo de decimal es $\frac{1}{6}$?
- c) Transforma el número 1,25 a fracción irreducible.

41. Simplificación por el Máximo Común Divisor (MCD)

- a) Simplifica la fracción $\frac{90}{126}$ hasta obtener su fracción irreducible.
- b) Halla el MCD de los términos de la fracción original (90 y 126).
- c) Escribe una fracción equivalente a $\frac{5}{7}$ con denominador 49.

42. Reducción por Divisiones Sucesivas

- a) Simplifica $\frac{48}{60}$ hasta su fracción irreducible, mostrando el proceso de divisiones sucesivas.
- b) ¿Cuál es la fracción irreducible de $\frac{18}{45}$?
- c) ¿Qué número entero representa la fracción $\frac{108}{9}$?

43. Equivalencia con Denominador Dado

- a) Escribe una fracción equivalente a $\frac{3}{5}$ que tenga como denominador 40.
- b) Escribe una fracción equivalente a $\frac{7}{6}$ que tenga como numerador 28.
- c) Comprueba si las fracciones $\frac{10}{15}$ y $\frac{8}{12}$ son equivalentes.

44. Fracción de una Cantidad

- a) Calcula $\frac{3}{4}$ de 200.
- b) Si $\frac{2}{5}$ de una clase de alumnos son 12, ¿cuántos alumnos hay en total?
- c) Si de una tarta me como $\frac{1}{3}$ y luego $\frac{1}{6}$, ¿qué fracción de la tarta me queda?

45. Problema de Recorrido con Fracciones

- a) Un ciclista debe recorrer 150 km. Si ha recorrido $\frac{2}{5}$ de la distancia, ¿cuántos kilómetros le faltan?
- b) ¿Qué fracción del recorrido le falta por completar?
- c) Si recorre $\frac{1}{3}$ de lo que le queda, ¿cuántos kilómetros ha recorrido en total hasta ese momento?

46. Suma de Tres Fracciones con Distinto Denominador

- a) Calcula y simplifica el resultado: $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8}$
- b) ¿Cuál es el mínimo común múltiplo (MCM) de los denominadores?
- c) Si al resultado le restas $\frac{1}{8}$, ¿cuál es el nuevo resultado?

47. Resta con Número Entero

- a) Resuelve y simplifica el resultado: $3 - \frac{1}{5} - \frac{2}{3}$
- b) Expresa el número 3 como una fracción con denominador 15.
- c) ¿Cuánto es $\frac{1}{5} + \frac{2}{3}$?

48. Expresión Combinada con Paréntesis

- a) Calcula y simplifica: $\frac{5}{6} - (\frac{1}{3} + \frac{1}{4})$
- b) ¿Cuál es el MCM de los denominadores dentro del paréntesis?
- c) Calcula $\frac{1}{12} -$ Resultado de (a).

49. Suma y Resta de Fracciones Negativas

- a) Resuelve y simplifica: $\frac{1}{2} - \frac{3}{5} + (-\frac{1}{10})$
- b) ¿Cuál es el opuesto de $\frac{3}{5}$?
- c) ¿Es el resultado de la operación un número positivo o negativo?

50. Problema de Compra de Alimentos

- a) Una persona compra $\frac{3}{4}$ kg de manzanas, $\frac{1}{2}$ kg de peras y $\frac{1}{8}$ kg de plátanos. ¿Cuántos kilogramos de fruta compró en total?
- b) Si el precio por kilogramo de manzanas es 2, ¿cuánto costaron las manzanas?
- c) Si lleva un total de 2 kg, ¿cuánto kilogramos de fruta le falta para completar los 2 kg?

51. Multiplicación de Tres Fracciones

- a) Calcula y simplifica: $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{9}{10}$
- b) ¿Cuál es el resultado si la segunda fracción fuera $\frac{4}{5}$ en lugar de $\frac{5}{4}$?
- c) ¿Cuánto es $\frac{3}{5}$ del resultado original?

52. División y Simplificación

- a) Resuelve y simplifica: $\frac{15}{8} : \frac{3}{4}$
- b) ¿Cuánto es el cociente entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$?
- c) Calcula la expresión $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} : 2$.

53. Operación Combinada Básica (Prioridad de Operaciones)

- a) Calcula y simplifica: $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}$
- b) ¿Cuál es el resultado si primero sumas y luego multiplicas? $(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}) \cdot \frac{4}{5}$
- c) Calcula $\frac{3}{5} \cdot 5$.

54. División con Paréntesis y Resta

- a) Resuelve y simplifica: $(\frac{7}{6} - \frac{1}{2}) : \frac{2}{3}$
- b) ¿Cuál es el valor dentro del paréntesis?
- c) ¿Cuánto es $\frac{2}{3}$ del valor del paréntesis?

55. Multiplicación y División Encadenada

- a) Calcula y simplifica: $(\frac{1}{5} \cdot \frac{10}{3}) : 2$
- b) ¿Cuál es la fracción inversa de $\frac{10}{3}$?

- c) Multiplica el resultado final por 6.

56. Operación Combinada con Suma y División

- a) Resuelve: $1 + \frac{1}{4} : (\frac{1}{3} - \frac{1}{6})$
b) ¿Cuál es el valor dentro del paréntesis?
c) ¿Cuánto es $1 : \frac{1}{6}$?

57. Problema de Reparto (División)

- a) ¿Cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ de litro se pueden llenar con 12 litros de agua?
b) Si cada botella cuesta 1,5, ¿cuál es el ingreso total por la venta de las botellas?
c) ¿Cuántos litros sobrarían si las botellas fueran de $\frac{5}{4}$ de litro?

58. Multiplicación y Resta

- a) Calcula: $\frac{5}{6} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$
b) ¿Qué fracción del resultado de la multiplicación es el resultado final?
c) ¿Cuál es el doble de $\frac{1}{12}$?

59. Operación con Potencias Fraccionarias

- a) Calcula y simplifica: $(\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$
b) ¿Cuál es el valor de $(\frac{2}{3})^3$?
c) Calcula la raíz cuadrada de $\frac{16}{25}$.

60. Expresión Final con Todas las Operaciones

- a) Resuelve y simplifica al máximo: $\frac{1}{5} : \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$
b) ¿Qué valor debe tener x para que $\frac{2}{5} \cdot x = 1$?
c) ¿Cuánto es $\frac{1}{2}$ de la mitad de $\frac{1}{4}$?
-

IV. Problemas Aritméticos y M.C.M./M.C.D. (Problemas 61-70)

61. Problema de Coincidencia (M.C.M.)

- a) Tres autobuses urbanos salen de la estación a las **8:00 a.m.** Sus líneas tienen frecuencias de **15 minutos**, **20 minutos** y **30 minutos**. ¿A qué hora volverán a coincidir los tres?
b) ¿Cuántas salidas habrá realizado el autobús de 15 minutos en ese tiempo de espera?
c) Si la tarifa del autobús sube un **5 %** y antes costaba **1.50** , ¿cuál es el nuevo precio?

62. Problema de División Equitativa (M.C.D.)

- a) Un carpintero tiene tres listones de **180 cm, 240 cm y 360 cm**. Quiere cortarlos en trozos iguales de la mayor longitud posible sin que sobre ningún resto. ¿Cuál debe ser la longitud de cada trozo?
- b) ¿Cuántos trozos obtendrá de la madera de 360 cm?
- c) Si el precio de venta del trozo es de **2.50** , ¿cuál es el ingreso total si vende todos los trozos?

63. Problema de Inventario (M.C.D.)

- a) En una tienda tienen **48 camisetas rojas, 60 camisetas azules y 72 camisetas verdes**. Quieren empaquetarlas en cajas iguales, con el mayor número posible de camisetas por caja y sin mezclar colores. ¿Cuántas camisetas debe haber en cada caja?
- b) ¿Cuántas cajas necesitarán en total?
- c) Si se venden el **75 %** de las camisetas rojas, ¿cuántas camisetas rojas quedan?

64. Problema de Compra y Gasto con Decimales

- a) Una familia compra: **3.5 kg** de manzanas a **1.80 /kg**, **2 kg** de naranjas a **1.45 /kg** y **1.5 kg** de patatas a **0.90 /kg**. Calcula el coste total de la compra.
- b) Si pagan con un billete de **20** , ¿cuánto les devuelven?
- c) Si el precio de las patatas sube un **10 %** el próximo mes, ¿cuál será su nuevo precio por kilogramo?

65. Problema de Tiempos de Eventos (M.C.M.)

- a) En una plaza, una fuente se enciende cada **4 horas**, un reloj toca las campanadas cada **6 horas** y un cartel luminoso se ilumina cada **9 horas**. Si coincidieron a medianoche (00:00), ¿a qué hora volverán a coincidir los tres eventos?
- b) ¿Cuántas horas pasarán hasta la siguiente coincidencia?
- c) ¿Cuántas veces se habrá encendido la fuente en ese intervalo de tiempo?

66. Problema de Paquetes de Ladrillos (M.C.D.)

- a) Un albañil dispone de **84 ladrillos grandes, 126 ladrillos medianos y 210 ladrillos pequeños**. Desea hacer paquetes iguales con el máximo número posible de ladrillos sin mezclar. ¿Cuántos ladrillos pondrá en cada paquete?
- b) ¿Cuántos paquetes hará de ladrillos grandes?
- c) Si cada paquete se vende a **3.50** , ¿cuál es el ingreso total por la venta de todos los paquetes de ladrillos medianos?

67. Problema de Tanque de Agua (Fracciones y Restas)

- a) Un tanque de agua está lleno hasta sus $\frac{5}{6}$ partes. Se utiliza $\frac{1}{3}$ de la capacidad total para regar. ¿Qué fracción del tanque queda con agua?
- b) Si la capacidad total del tanque es de **1,200 litros**, ¿cuántos litros de agua quedan?

- c) ¿Cuántos litros de agua se han utilizado para regar?

68. Problema de Gasto de Salario (Fracciones)

- a) Una persona gasta $\frac{1}{5}$ de su salario en comida y $\frac{2}{3}$ de lo que le queda en alquiler.
¿Qué fracción de su salario gasta en alquiler?
- b) ¿Qué fracción del salario le queda al final?
- c) Si su salario es de **1,500** , ¿cuánto dinero le queda?

69. Problema de Recorrido de Viaje (Fracciones y Resta)

- a) Un viajero ha recorrido $\frac{3}{8}$ de un trayecto por la mañana y $\frac{1}{4}$ del trayecto por la tarde. Si el trayecto total es de **240 km**, ¿cuántos kilómetros le faltan por recorrer?
- b) ¿Qué fracción del trayecto le falta por recorrer?
- c) Si recorre $\frac{2}{3}$ de la distancia restante, ¿cuántos kilómetros ha recorrido en total hasta ese momento?

70. Problema de Embalaje de Cajas (División de Fracciones)

- a) Una empresa tiene **450 kg** de un producto. Quieren envasarlo en cajas que contengan $\frac{3}{4}$ de kilogramo cada una. ¿Cuántas cajas podrán llenar?
- b) Si cada caja vacía cuesta **0.25** , ¿cuál es el coste total de las cajas necesarias?
- c) Si el precio de venta de cada caja llena es de **1.50** , ¿cuál es el ingreso total por la venta de todas las cajas?

Soluciones Completas

Problemas de Repaso de Matemáticas

2º ESO

Problemas 1–10

Proporcionalidad y Porcentajes

Resolución exhaustiva con rigor matemático total

Todas las soluciones incluyen:

- Justificación teórica completa
- Desarrollo paso a paso
- Explicaciones pedagógicas
- Ilustraciones representativas
- Observaciones y advertencias

Material de Estudio Avanzado

Autor: Ladislao Jáñez Blanco

Soluciones: SuperAgent – CREA Platform

1 de marzo de 2026

Índice

1. Proporcionalidad y Porcentajes (Problemas 1–10)	2
1.1. Problema 1: Tinta de Impresora	3
1.2. Problema 2: Consumo de Gasolina	7
1.3. Problema 3: Producción de Leche	10
1.4. Problema 4: Elaboración de Mermelada	14
1.5. Problema 5: Avance de Obra	17
1.6. Problema 6: Receta de Tortilla	20
1.7. Problema 7: Velocidad y Distancia	24
1.8. Problema 8: Capacidad de Riego	28
1.9. Problema 9: Consumo de Energía	31
1.10. Problema 10: Peso y Volumen	35
2. Resumen de Conceptos Matemáticos	39
2.1. Proporcionalidad Directa	39
2.2. Porcentajes	39
2.3. Errores Comunes a Evitar	40

1. Proporcionalidad y Porcentajes (Problemas 1–10)

En esta sección trabajaremos con problemas de proporcionalidad directa, inversa y porcentajes. Es fundamental dominar los siguientes conceptos:

Definición 1.1 (Proporción). Una proporción es una igualdad entre dos razones: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, donde $b, d \neq 0$.

Definición 1.2 (Proporcionalidad Directa). Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número, la otra queda multiplicada (o dividida) por el mismo número. Se cumple: $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$.

Definición 1.3 (Porcentaje). Un porcentaje es una fracción con denominador 100. El $x\%$ de una cantidad C se calcula como: $\frac{x}{100} \cdot C$.

1.1. Problema 1: Tinta de Impresora

Enunciado

- Una impresora imprime 350 páginas en 7 minutos. ¿Cuántas páginas imprimirá en 12 minutos?
- Si de esas 350 páginas, 42 salieron con errores, ¿cuál fue el porcentaje de páginas con errores?
- ¿Cuántos minutos tardaría la impresora en imprimir 1,500 páginas?

Ilustración del Problema

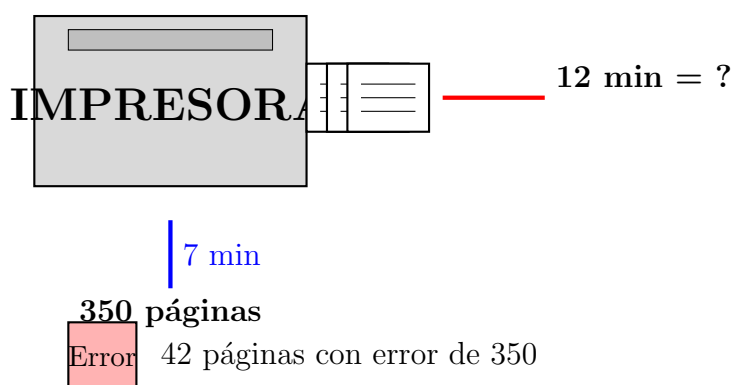


Figura 1: Problema de la impresora: proporcionalidad directa entre tiempo y páginas impresas

Apartado (a): Páginas en 12 minutos

Datos del problema:

- En 7 minutos $\rightarrow$ 350 páginas
- En 12 minutos $\rightarrow x$ páginas (incógnita)

Identificación del tipo de proporcionalidad:

Estamos ante un caso de **proporcionalidad directa**, porque:

- A más tiempo de impresión, más páginas se imprimen.
- La velocidad de impresión es constante.
- Si duplicamos el tiempo, se duplican las páginas.

Solución: Método 1: Regla de tres directa

Planteamos la proporción:

$$\frac{\text{Tiempo}_1}{\text{Páginas}_1} = \frac{\text{Tiempo}_2}{\text{Páginas}_2} \quad (1)$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$\frac{7}{350} = \frac{12}{x} \quad (2)$$

Paso 1: Aplicamos la propiedad fundamental de las proporciones (producto cruzado):

$$7 \cdot x = 350 \cdot 12 \quad (3)$$

Paso 2: Realizamos la multiplicación del lado derecho:

$$7x = 4200 \quad (4)$$

Observación: $350 \times 12 = 350 \times 10 + 350 \times 2 = 3500 + 700 = 4200$

Paso 3: Despejamos x dividiendo ambos lados entre 7:

$$x = \frac{4200}{7} \quad (5)$$

Paso 4: Realizamos la división:

$$x = \frac{4200}{7} \quad (6)$$

$$= 600 \quad (7)$$

Verificación de la división: $600 \times 7 = 4200$

Solución: Método 2: Factor de proporcionalidad (método alternativo)

Paso 1: Calculamos la velocidad de impresión (páginas por minuto):

$$\text{Velocidad} = \frac{350 \text{ páginas}}{7 \text{ minutos}} = 50 \text{ páginas/minuto} \quad (8)$$

Paso 2: Multiplicamos la velocidad por el nuevo tiempo:

$$\text{Páginas en 12 min} = 50 \times 12 = 600 \text{ páginas} \quad (9)$$

Respuesta final: La impresora imprimirá 600 páginas en 12 minutos.

Observación: Ambos métodos son válidos y conducen al mismo resultado. El método del factor de proporcionalidad es más intuitivo cuando se busca la "velocidad." o "tasa" del proceso.

Advertencia: Un error común es confundir proporcionalidad directa con inversa. Aquí, si el tiempo aumenta, las páginas también aumentan, lo que confirma que es directa.

Apartado (b): Porcentaje de páginas con errores

Datos del problema:

- Total de páginas: 350
- Páginas con errores: 42

- Porcentaje de errores: p (incógnita)

Marco teórico:

El porcentaje representa cuántas partes de cada 100". Si queremos saber qué porcentaje representan 42 páginas de un total de 350, debemos plantear:

$$\frac{\text{Parte}}{\text{Total}} = \frac{p}{100} \quad (10)$$

Solución: **Paso 1:** Planteamos la proporción:

$$\frac{42}{350} = \frac{p}{100} \quad (11)$$

Paso 2: Aplicamos producto cruzado:

$$42 \cdot 100 = 350 \cdot p \quad (12)$$

Paso 3: Realizamos la multiplicación:

$$4200 = 350p \quad (13)$$

Paso 4: Despejamos p :

$$p = \frac{4200}{350} \quad (14)$$

Paso 5: Simplificamos la fracción dividiendo numerador y denominador entre 50:

$$p = \frac{4200 \div 50}{350 \div 50} \quad (15)$$

$$= \frac{84}{7} \quad (16)$$

$$= 12 \quad (17)$$

Verificación: $\frac{42}{350} = \frac{12}{100} = 0,12$

Solución: **Método alternativo: Fórmula directa del porcentaje**

$$\text{Porcentaje} = \frac{\text{Parte}}{\text{Total}} \times 100 \quad (18)$$

Sustituyendo:

$$p = \frac{42}{350} \times 100 \quad (19)$$

$$= 0,12 \times 100 \quad (20)$$

$$= 12 \quad (21)$$

Respuesta final: El porcentaje de páginas con errores fue del 12 %.

Observación: *Esto significa que de cada 100 páginas impresas, aproximadamente 12 tienen errores. Es una tasa de error considerable para una impresora.*

Apartado (c): Tiempo para imprimir 1,500 páginas**Datos del problema:**

- En 7 minutos $\rightarrow$ 350 páginas
- En t minutos $\rightarrow$ 1,500 páginas

Solución: **Paso 1:** Planteamos la regla de tres directa:

$$\frac{7}{350} = \frac{t}{1500} \quad (22)$$

Paso 2: Producto cruzado:

$$7 \cdot 1500 = 350 \cdot t \quad (23)$$

Paso 3: Multiplicación:

$$10500 = 350t \quad (24)$$

Observación: $7 \times 1500 = 7 \times 1000 + 7 \times 500 = 7000 + 3500 = 10500$

Paso 4: Despejamos t :

$$t = \frac{10500}{350} \quad (25)$$

Paso 5: Simplificamos dividiendo entre 50:

$$t = \frac{10500 \div 50}{350 \div 50} \quad (26)$$

$$= \frac{210}{7} \quad (27)$$

$$= 30 \quad (28)$$

Verificación: $30 \times 350 = 10500$ y $10500 \div 7 = 1500$

Respuesta final: La impresora tardaría 30 minutos en imprimir 1,500 páginas.

Observación: Podemos verificar este resultado usando la velocidad de impresión: $50 \text{ páginas/min} \times 30 \text{ min} = 1500 \text{ páginas}$

Advertencia: Siempre verifica que tus unidades sean consistentes. Aquí trabajamos con minutos y páginas en todo momento.

1.2. Problema 2: Consumo de Gasolina

Enunciado

- Un coche consume 6 litros de gasolina para recorrer 100 km. ¿Cuántos kilómetros podrá recorrer con 15 litros?
- Si el depósito tiene una capacidad de 50 litros, ¿qué porcentaje del depósito representa el consumo de 6 litros?
- Si el precio de la gasolina sube un 5 % y antes costaba 1.60€/litro, ¿cuál es el nuevo precio?

Ilustración del Problema

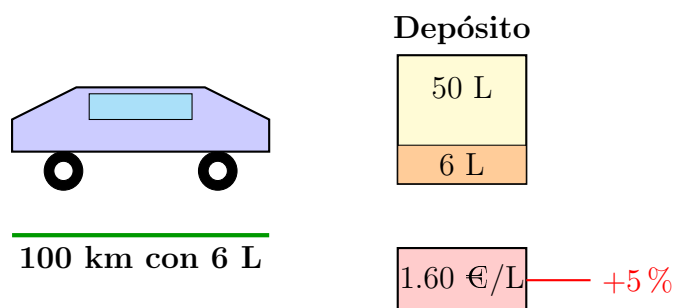


Figura 2: Consumo de gasolina: proporcionalidad directa entre litros y kilómetros

Apartado (a): Kilómetros con 15 litros

Datos del problema:

- Con 6 litros $\rightarrow$ 100 km
- Con 15 litros $\rightarrow x$ km (incógnita)

Tipo de proporcionalidad: Directa (más litros $\Rightarrow$ más kilómetros)

Solución: Paso 1: Planteamos la proporción:

$$\frac{6}{100} = \frac{15}{x} \quad (29)$$

Paso 2: Producto cruzado:

$$6 \cdot x = 100 \cdot 15 \quad (30)$$

Paso 3: Multiplicación:

$$6x = 1500 \quad (31)$$

Paso 4: Despejamos x :

$$x = \frac{1500}{6} = 250 \quad (32)$$

Verificación: $\frac{6}{100} = \frac{15}{250} \Rightarrow \frac{6}{100} = \frac{15}{250} = 0,06$

Solución: Método alternativo: Rendimiento del vehículo

Paso 1: Calculamos el rendimiento (km por litro):

$$\text{Rendimiento} = \frac{100 \text{ km}}{6 \text{ L}} = \frac{50}{3} \text{ km/L} \approx 16,67 \text{ km/L} \quad (33)$$

Paso 2: Multiplicamos por los 15 litros:

$$\text{Distancia} = \frac{50}{3} \times 15 = \frac{750}{3} = 250 \text{ km} \quad (34)$$

Respuesta final: Con 15 litros, el coche podrá recorrer 250 km.

Observación: *El rendimiento del vehículo es constante: aproximadamente 16.67 km/L, lo que es típico de un coche de consumo medio.*

Apartado (b): Porcentaje del depósito

Datos del problema:

- Capacidad total del depósito: 50 litros
- Consumo: 6 litros
- Porcentaje: $p\%$ (incógnita)

Solución: **Paso 1:** Aplicamos la fórmula del porcentaje:

$$p = \frac{\text{Parte}}{\text{Total}} \times 100 = \frac{6}{50} \times 100 \quad (35)$$

Paso 2: Simplificamos la fracción:

$$\frac{6}{50} = \frac{6 \div 2}{50 \div 2} = \frac{3}{25} \quad (36)$$

Paso 3: Convertimos a decimal:

$$\frac{3}{25} = \frac{3 \times 4}{25 \times 4} = \frac{12}{100} = 0,12 \quad (37)$$

Paso 4: Multiplicamos por 100:

$$p = 0,12 \times 100 = 12 \quad (38)$$

Respuesta final: El consumo de 6 litros representa el 12 % del depósito.

Observación: *Esto significa que con un depósito lleno (50 L), el coche podría hacer $\frac{50}{6} \approx 8,33$ viajes de 100 km cada uno, recorriendo aproximadamente 833 km en total.*

Apartado (c): Nuevo precio con aumento del 5 %**Datos del problema:**

- Precio inicial: 1.60 €/litro
- Aumento: 5 %
- Nuevo precio: P_{nuevo} (incógnita)

Marco teórico sobre aumentos porcentuales:

Cuando una cantidad aumenta un $p\%$, el nuevo valor se calcula como:

$$\text{Nuevo valor} = \text{Valor inicial} \times \left(1 + \frac{p}{100}\right) \quad (39)$$

Solución: Método 1: Cálculo directo

Paso 1: Calculamos el aumento en euros:

$$\text{Aumento} = 1,60 \times \frac{5}{100} = 1,60 \times 0,05 \quad (40)$$

Paso 2: Realizamos la multiplicación:

$$\text{Aumento} = \frac{1,60 \times 5}{100} = \frac{8,00}{100} = 0,08 \text{ euros} \quad (41)$$

Paso 3: Sumamos el aumento al precio original:

$$P_{\text{nuevo}} = 1,60 + 0,08 = 1,68 \text{ €/L} \quad (42)$$

Solución: Método 2: Factor multiplicativo

Paso 1: Aplicamos la fórmula del factor multiplicativo:

$$P_{\text{nuevo}} = 1,60 \times \left(1 + \frac{5}{100}\right) = 1,60 \times 1,05 \quad (43)$$

Paso 2: Multiplicamos:

$$P_{\text{nuevo}} = 1,60 \times 1,05 \quad (44)$$

$$= 1,60 \times (1 + 0,05) \quad (45)$$

$$= 1,60 + 1,60 \times 0,05 \quad (46)$$

$$= 1,60 + 0,08 \quad (47)$$

$$= 1,68 \text{ €/L} \quad (48)$$

Respuesta final: El nuevo precio de la gasolina es 1,68 €/litro.

Observación: Un aumento del 5 % significa que por cada euro que costaba antes, ahora cuesta 1.05 euros. El método del factor multiplicativo es más eficiente para cálculos repetidos.

Advertencia: No confundir "aumento del 5 % con "multiplicar por 5". El aumento del 5 % significa multiplicar por 1.05, no por 5.

1.3. Problema 3: Producción de Leche

Enunciado

- 5 vacas producen un total de 80 litros de leche al día. ¿Cuántos litros producirán 12 vacas en el mismo día?
- Si de los 80 litros se venden 68 litros, ¿qué porcentaje de la producción se ha vendido?
- Si un litro de leche cuesta 0.95€ con un impuesto del 4 % de IVA, ¿cuál es el precio sin IVA?

Ilustración del Problema

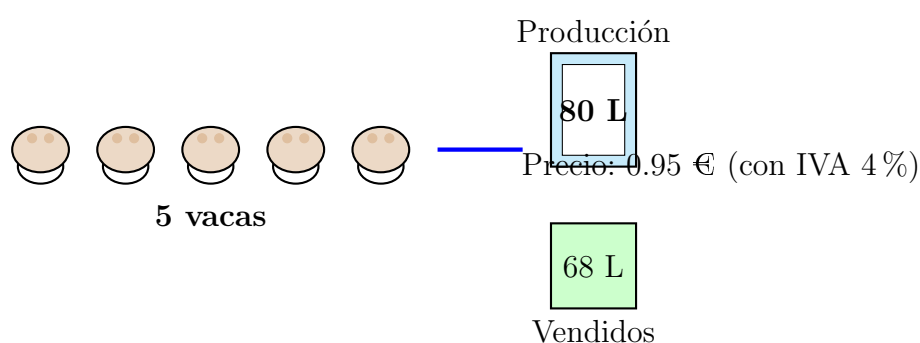


Figura 3: Producción de leche: proporcionalidad directa entre vacas y litros producidos

Apartado (a): Producción de 12 vacas

Datos del problema:

- 5 vacas $\rightarrow$ 80 litros
- 12 vacas $\rightarrow x$ litros (incógnita)

Tipo de proporcionalidad: Directa (más vacas $\Rightarrow$ más litros de leche)

Solución: Paso 1: Planteamos la regla de tres directa:

$$\frac{5 \text{ vacas}}{80 \text{ L}} = \frac{12 \text{ vacas}}{x \text{ L}} \quad (49)$$

Paso 2: Producto cruzado:

$$5 \cdot x = 80 \cdot 12 \quad (50)$$

Paso 3: Multiplicación del lado derecho:

$$5x = 960 \quad (51)$$

Observación: $80 \times 12 = 80 \times 10 + 80 \times 2 = 800 + 160 = 960$

Paso 4: Despejamos x :

$$x = \frac{960}{5} = 192 \text{ litros} \quad (52)$$

Verificación: $5 \times 192 = 960$

Solución: Método alternativo: Producción por vaca

Paso 1: Calculamos la producción por vaca:

$$\text{Producción individual} = \frac{80 \text{ L}}{5 \text{ vacas}} = 16 \text{ L/vaca} \quad (53)$$

Paso 2: Multiplicamos por 12 vacas:

$$\text{Producción total} = 16 \times 12 = 192 \text{ litros} \quad (54)$$

Respuesta final: 12 vacas producirán 192 litros de leche al día.

Observación: *Cada vaca produce 16 litros diarios, lo cual es una producción razonable para ganado lechero.*

Apartado (b): Porcentaje de producción vendida

Datos del problema:

- Producción total: 80 litros
- Cantidad vendida: 68 litros
- Porcentaje vendido: $p\%$ (incógnita)

Solución: Paso 1: Aplicamos la fórmula del porcentaje:

$$p = \frac{\text{Vendido}}{\text{Total}} \times 100 = \frac{68}{80} \times 100 \quad (55)$$

Paso 2: Simplificamos la fracción dividiendo entre 4:

$$\frac{68}{80} = \frac{68 \div 4}{80 \div 4} = \frac{17}{20} \quad (56)$$

Paso 3: Convertimos a decimal:

$$\frac{17}{20} = \frac{17 \times 5}{20 \times 5} = \frac{85}{100} = 0,85 \quad (57)$$

Paso 4: Multiplicamos por 100:

$$p = 0,85 \times 100 = 85 \quad (58)$$

Respuesta final: Se ha vendido el 85% de la producción.

Observación: *Esto significa que quedan sin vender: $80 - 68 = 12$ litros, que representa el 15% de la producción. Se cumple: $85\% + 15\% = 100\%$*

Apartado (c): Precio sin IVA**Datos del problema:**

- Precio con IVA: 0.95€
- IVA aplicado: 4 %
- Precio sin IVA: P_0 (incógnita)

Marco teórico sobre IVA:

El IVA (Impuesto sobre el Valor Añadido) se aplica sobre el precio base. Si el precio base es P_0 y el IVA es del 4 %, entonces:

$$\text{Precio con IVA} = P_0 + P_0 \times 0,04 = P_0 \times (1 + 0,04) = P_0 \times 1,04 \quad (59)$$

Para calcular el precio sin IVA cuando conocemos el precio con IVA:

$$P_0 = \frac{\text{Precio con IVA}}{1 + \frac{\text{IVA}}{100}} \quad (60)$$

Solución: Paso 1: Planteamos la ecuación:

$$P_0 \times 1,04 = 0,95 \quad (61)$$

Paso 2: Despejamos P_0 :

$$P_0 = \frac{0,95}{1,04} \quad (62)$$

Paso 3: Realizamos la división:

$$P_0 = \frac{0,95}{1,04} \quad (63)$$

$$= \frac{95}{104} \quad (64)$$

$$= 0,913461... \quad (65)$$

$$\approx 0,91346 \text{ euros} \quad (66)$$

Paso 4: Redondeamos a dos decimales (céntimos):

$$P_0 \approx 0,91 \text{ euros} \quad (67)$$

Solución: Método alternativo: Cálculo exacto con fracciones

$$P_0 = \frac{0,95}{1,04} = \frac{\frac{95}{100}}{\frac{104}{100}} = \frac{95}{100} \times \frac{100}{104} = \frac{95}{104} \quad (68)$$

$$= \frac{95}{104} \approx 0,9134615... \approx 0,91 \text{ euros} \quad (69)$$

Respuesta final: El precio sin IVA es aproximadamente 0,91 €/litro.

Verificación:

$$0,91 \times 1,04 = 0,9464 \approx 0,95 \quad (70)$$

Observación: El IVA representa: $0,95 - 0,91 = 0,04$ euros por litro. Esto confirma que el 4 % de 0,91 es aproximadamente 0,04 euros.

Advertencia: Cuando calculamos el precio sin IVA, debemos *DIVIDIR* entre $(1 + IVA)$, no restar el porcentaje. Un error común sería calcular $0,95 - 0,04 = 0,91$, pero esto es incorrecto porque el 4 % se aplica sobre el precio base, no sobre el precio final.

1.4. Problema 4: Elaboración de Mermelada

Enunciado

- Para hacer mermelada se necesitan 3 kg de fresas por cada 5 kg de azúcar. ¿Cuántos kilogramos de fresas se necesitan para 18 kg de azúcar?
- Si en total se hicieron 40 botes de mermelada y se vendieron el 85 % de ellos, ¿cuántos botes se vendieron?
- Si el precio de venta es de 2.50€ por bote y se aplica un descuento del 10 % por la compra de 5 o más, ¿cuánto costarán 7 botes?

Ilustración del Problema

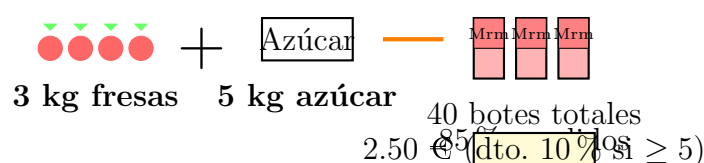


Figura 4: Elaboración de mermelada: proporción entre ingredientes y venta con descuento

Apartado (a): Fresas necesarias para 18 kg de azúcar

Datos del problema:

- Proporción de la receta: 3 kg fresas : 5 kg azúcar
- Azúcar disponible: 18 kg
- Fresas necesarias: x kg (incógnita)

Tipo de proporcionalidad: Directa (más azúcar $\Rightarrow$ más fresas en la misma proporción)

Solución: **Paso 1:** Planteamos la proporción:

$$\frac{3 \text{ kg fresas}}{5 \text{ kg azúcar}} = \frac{x \text{ kg fresas}}{18 \text{ kg azúcar}} \quad (71)$$

Paso 2: Producto cruzado:

$$3 \cdot 18 = 5 \cdot x \quad (72)$$

Paso 3: Multiplicación:

$$54 = 5x \quad (73)$$

Paso 4: Despejamos x :

$$x = \frac{54}{5} = 10,8 \text{ kg} \quad (74)$$

Expresado como fracción mixta:

$$x = 10\frac{4}{5} \text{ kg} \quad (75)$$

Respuesta final: Se necesitan $\boxed{10,8 \text{ kg}}$ de fresas (equivalente a 10 kg y 800 gramos).

Observación: La proporción fresas:azúcar es $3 : 5 = 0,6$. Por tanto, para cualquier cantidad de azúcar, las fresas son el 60 % de esa cantidad. Verificación: $18 \times 0,6 = 10,8$

Apartado (b): Botes vendidos

Datos del problema:

- Total de botes: 40
- Porcentaje vendido: 85 %
- Botes vendidos: n (incógnita)

Solución: Paso 1: Calculamos el 85 % de 40:

$$n = 40 \times \frac{85}{100} \quad (76)$$

Paso 2: Simplificamos:

$$n = 40 \times 0,85 \quad (77)$$

Paso 3: Multiplicación:

$$n = 40 \times 0,85 \quad (78)$$

$$= 40 \times \frac{85}{100} \quad (79)$$

$$= \frac{40 \times 85}{100} \quad (80)$$

$$= \frac{3400}{100} \quad (81)$$

$$= 34 \quad (82)$$

Alternativa de cálculo:

$$n = 40 \times 0,85 \quad (83)$$

$$= 40 \times (0,80 + 0,05) \quad (84)$$

$$= 40 \times 0,80 + 40 \times 0,05 \quad (85)$$

$$= 32 + 2 \quad (86)$$

$$= 34 \quad (87)$$

Respuesta final: Se vendieron $\boxed{34 \text{ botes}}$.

Observación: Quedan sin vender: $40 - 34 = 6$ botes, que representan el 15 % restante. Verificación: $\frac{6}{40} \times 100 = 15 \%$

Apartado (c): Coste de 7 botes con descuento**Datos del problema:**

- Precio por bote: 2.50€
- Cantidad a comprar: 7 botes
- Descuento: 10 % si se compran 5 o más botes
- Precio total: P (incógnita)

Análisis: Como $7 \geq 5$, se aplica el descuento del 10 %.

Solución: Paso 1: Calculamos el precio sin descuento:

$$P_{\text{inicial}} = 7 \times 2,50 = 17,50 \text{ euros} \quad (88)$$

Paso 2: Calculamos el descuento:

$$\text{Descuento} = 17,50 \times \frac{10}{100} = 17,50 \times 0,10 = 1,75 \text{ euros} \quad (89)$$

Paso 3: Restamos el descuento:

$$P = 17,50 - 1,75 = 15,75 \text{ euros} \quad (90)$$

Solución: Método alternativo: Factor multiplicativo

Con un descuento del 10 %, pagamos el 90 % del precio original:

$$P = 17,50 \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) \quad (91)$$

$$= 17,50 \times 0,90 \quad (92)$$

$$= 15,75 \text{ euros} \quad (93)$$

Desarrollo detallado de la multiplicación:

$$17,50 \times 0,90 = 17,50 \times \left(\frac{9}{10}\right) \quad (94)$$

$$= \frac{17,50 \times 9}{10} \quad (95)$$

$$= \frac{157,50}{10} \quad (96)$$

$$= 15,75 \text{ euros} \quad (97)$$

Respuesta final: 7 botes costarán 15,75 euros con el descuento aplicado.

Observación: El ahorro es de 1.75 euros respecto al precio sin descuento. Esto representa exactamente el 10 % de 17.50 euros.

Advertencia: El descuento se aplica sobre el precio total (7 botes), no sobre el precio unitario. Un error común sería calcular: $2,50 \times 0,90 = 2,25$ euros/bote y luego $2,25 \times 7 = 15,75$ euros. Aunque en este caso da el mismo resultado, conceptualmente debemos aplicar el descuento al total.

1.5. Problema 5: Avance de Obra

Enunciado

- En 3 días se han colocado 120 metros de valla. ¿Cuántos metros de valla se colocarán en 10 días?
- Si la longitud total de la valla es de 300 metros, ¿qué porcentaje de la obra queda por realizar después de los 10 días?
- Si al coste inicial de la valla de 250€ se le añade un 15 % por transporte, ¿cuál es el coste final?

Ilustración del Problema

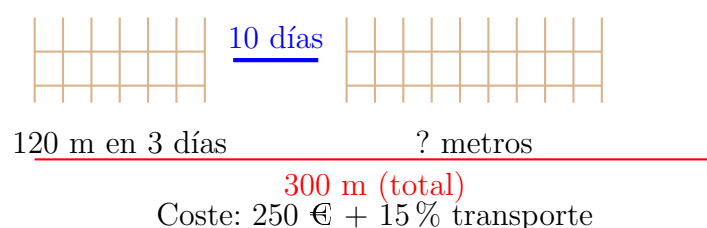


Figura 5: Avance de obra: proporcionalidad directa tiempo-metros de valla

Apartado (a): Metros de valla en 10 días

Datos del problema:

- En 3 días $\rightarrow$ 120 metros
- En 10 días $\rightarrow x$ metros (incógnita)

Hipótesis: El ritmo de trabajo es constante (proporcionalidad directa).

Solución: Paso 1: Planteamos la proporción:

$$\frac{3 \text{ días}}{120 \text{ m}} = \frac{10 \text{ días}}{x \text{ m}} \quad (98)$$

Paso 2: Producto cruzado:

$$3 \cdot x = 120 \cdot 10 \quad (99)$$

Paso 3: Multiplicación:

$$3x = 1200 \quad (100)$$

Paso 4: Despejamos x :

$$x = \frac{1200}{3} = 400 \text{ metros} \quad (101)$$

Solución: Método alternativo: Velocidad de trabajo

Paso 1: Calculamos la velocidad de instalación:

$$v = \frac{120 \text{ m}}{3 \text{ días}} = 40 \text{ m/día} \quad (102)$$

Paso 2: Multiplicamos por 10 días:

$$x = 40 \times 10 = 400 \text{ metros} \quad (103)$$

Respuesta final: En 10 días se colocarán 400 metros de valla.

Observación: El ritmo de trabajo es de 40 metros por día, lo cual es consistente durante todo el periodo.

Apartado (b): Porcentaje de obra restante

Datos del problema:

- Longitud total: 300 metros
- Metros colocados en 10 días: 400 metros
- Porcentaje restante: $p\%$ (incógnita)

Análisis crítico:

Aquí debemos detenernos y analizar la situación. Si en 10 días se colocan 400 metros, pero la valla total solo mide 300 metros, hay una inconsistencia lógica.

Interpretación correcta:

La obra se completará ANTES de los 10 días. Calculemos cuándo se termina:

$$\text{Tiempo para 300 m} = \frac{300 \text{ m}}{40 \text{ m/día}} = 7,5 \text{ días} \quad (104)$$

Por tanto, después de 10 días (que es más que 7.5 días), la obra estará 100 % completada.

Solución: Cálculo del porcentaje restante después de 10 días:

Como la obra se completa en 7.5 días y han transcurrido 10 días:

$$\text{Porcentaje restante} = 0\% \quad (105)$$

Metros que quedan por realizar:

$$\text{Metros restantes} = 300 - 300 = 0 \text{ metros} \quad (106)$$

Respuesta final: Después de 10 días, queda por realizar el 0 % de la obra, ya que se habrá completado en 7.5 días.

Observación: Si el enunciado preguntara por el porcentaje restante después de 3 días (120 metros colocados):

$$p = \frac{300 - 120}{300} \times 100 = \frac{180}{300} \times 100 = 60\% \quad (107)$$

Quedaría el 60 % de la obra por realizar.

Advertencia: Siempre verifica que los datos del problema sean consistentes. En este caso, la tasa de trabajo (40 m/día) hace que la obra se complete antes del plazo considerado (10 días).

Apartado (c): Coste con recargo de transporte**Datos del problema:**

- Coste inicial: 250€
- Recargo por transporte: 15 %
- Coste final: C (incógnita)

Solución: **Paso 1:** Calculamos el recargo:

$$\text{Recargo} = 250 \times \frac{15}{100} = 250 \times 0,15 \quad (108)$$

Paso 2: Realizamos la multiplicación:

$$\text{Recargo} = 250 \times 0,15 \quad (109)$$

$$= 250 \times \frac{15}{100} \quad (110)$$

$$= \frac{250 \times 15}{100} \quad (111)$$

$$= \frac{3750}{100} \quad (112)$$

$$= 37,50 \text{ euros} \quad (113)$$

Paso 3: Sumamos al coste inicial:

$$C = 250 + 37,50 = 287,50 \text{ euros} \quad (114)$$

Solución: **Método alternativo: Factor multiplicativo**

$$C = 250 \times (1 + 0,15) \quad (115)$$

$$= 250 \times 1,15 \quad (116)$$

$$= 287,50 \text{ euros} \quad (117)$$

Desarrollo detallado:

$$250 \times 1,15 = 250 \times \left(1 + \frac{15}{100}\right) \quad (118)$$

$$= 250 + 250 \times \frac{15}{100} \quad (119)$$

$$= 250 + \frac{3750}{100} \quad (120)$$

$$= 250 + 37,50 \quad (121)$$

$$= 287,50 \text{ euros} \quad (122)$$

Respuesta final: El coste final de la valla es 287,50 euros.

Observación: El recargo por transporte (37.50€) representa el 15 % del coste inicial. El coste final es el 115 % del coste inicial.

1.6. Problema 6: Receta de Tortilla

Enunciado

- Una receta de tortilla para 4 personas requiere 6 huevos. ¿Cuántos huevos se necesitarán para hacer tortilla para 14 personas?
- Si el coste de los huevos necesarios para 4 personas es de 1.10€, ¿cuál es el coste de los huevos para 14 personas?
- Si en una granja se recogen 2,000 huevos al día, y se rompen el 3 %, ¿cuántos huevos quedan intactos?

Ilustración del Problema

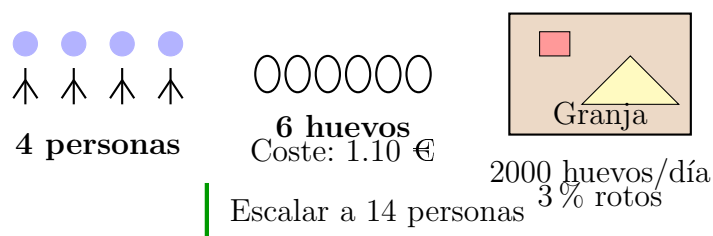


Figura 6: Receta de tortilla: proporcionalidad directa personas-huevos

Apartado (a): Huevos para 14 personas

Datos del problema:

- 4 personas $\rightarrow$ 6 huevos
- 14 personas $\rightarrow x$ huevos (incógnita)

Tipo de proporcionalidad: Directa (más personas $\Rightarrow$ más huevos)

Solución: Paso 1: Planteamos la proporción:

$$\frac{4 \text{ personas}}{6 \text{ huevos}} = \frac{14 \text{ personas}}{x \text{ huevos}} \quad (123)$$

Paso 2: Producto cruzado:

$$4 \cdot x = 6 \cdot 14 \quad (124)$$

Paso 3: Multiplicación:

$$4x = 84 \quad (125)$$

Paso 4: Despejamos x :

$$x = \frac{84}{4} = 21 \text{ huevos} \quad (126)$$

Solución: Método alternativo: Huevos por persona

Paso 1: Calculamos la cantidad de huevos por persona:

$$\frac{6 \text{ huevos}}{4 \text{ personas}} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ huevos/persona} \quad (127)$$

Paso 2: Multiplicamos por 14 personas:

$$x = 1,5 \times 14 = \frac{3}{2} \times 14 = \frac{42}{2} = 21 \text{ huevos} \quad (128)$$

Respuesta final: Se necesitarán 21 huevos para 14 personas.

Observación: La proporción es de 1.5 huevos por persona, lo cual es razonable para una tortilla individual o para compartir.

Apartado (b): Coste de huevos para 14 personas

Datos del problema:

- Coste para 4 personas (6 huevos): 1.10€
- Personas: 14
- Coste para 14 personas: C (incógnita)

Enfoque 1: Proporcionalidad directa por personas

Solución: Paso 1: Planteamos la proporción:

$$\frac{4 \text{ personas}}{1,10 \text{ €}} = \frac{14 \text{ personas}}{C \text{ €}} \quad (129)$$

Paso 2: Producto cruzado:

$$4 \cdot C = 1,10 \cdot 14 \quad (130)$$

Paso 3: Multiplicación:

$$4C = 15,40 \quad (131)$$

Observación: $1,10 \times 14 = 1,10 \times 10 + 1,10 \times 4 = 11,00 + 4,40 = 15,40$

Paso 4: Despejamos C :

$$C = \frac{15,40}{4} = 3,85 \text{ euros} \quad (132)$$

Enfoque 2: Coste por huevo

Solución: Paso 1: Calculamos el coste por huevo:

$$\text{Coste unitario} = \frac{1,10 \text{ €}}{6 \text{ huevos}} = \frac{1,10}{6} \approx 0,1833... \text{ €/huevo} \quad (133)$$

Paso 2: Multiplicamos por 21 huevos (calculados en apartado a):

$$C = \frac{1,10}{6} \times 21 \quad (134)$$

$$= \frac{1,10 \times 21}{6} \quad (135)$$

$$= \frac{23,10}{6} \quad (136)$$

$$= 3,85 \text{ euros} \quad (137)$$

Verificación de la multiplicación:

$$1,10 \times 21 = 1,10 \times 20 + 1,10 \times 1 \quad (138)$$

$$= 22,00 + 1,10 \quad (139)$$

$$= 23,10 \quad (140)$$

División:

$$\frac{23,10}{6} = 3,85 \quad (141)$$

Respuesta final: El coste de los huevos para 14 personas es 3,85 euros.

Observación: El coste unitario por huevo es aproximadamente 0.183€, y necesitamos 21 huevos, lo que nos da: $0,183 \times 21 \approx 3,85$ euros

Apartado (c): Huevos intactos en la granja

Datos del problema:

- Total de huevos recogidos: 2,000
- Porcentaje de huevos rotos: 3 %
- Huevos intactos: n (incógnita)

Razonamiento:

Si el 3 % se rompe, entonces el $100 \% - 3 \% = 97 \%$ queda intacto.

Solución: Método 1: Cálculo del porcentaje restante

Paso 1: Calculamos el 97 % de 2,000:

$$n = 2000 \times \frac{97}{100} = 2000 \times 0,97 \quad (142)$$

Paso 2: Multiplicación:

$$n = 2000 \times 0,97 \quad (143)$$

$$= 2000 \times (1 - 0,03) \quad (144)$$

$$= 2000 - 2000 \times 0,03 \quad (145)$$

$$= 2000 - 60 \quad (146)$$

$$= 1940 \quad (147)$$

Observación: $2000 \times 0,03 = \frac{2000 \times 3}{100} = \frac{6000}{100} = 60$

Solución: Método 2: Resta directa

Paso 1: Calculamos los huevos rotos (3 %):

$$\text{Rotos} = 2000 \times 0,03 = 60 \quad (148)$$

Paso 2: Restamos del total:

$$n = 2000 - 60 = 1940 \text{ huevos} \quad (149)$$

Respuesta final: Quedan 1940 huevos intactos.

Observación: *El 3 % de pérdida (60 huevos de 2000) es una tasa de rotura razonable en operaciones de granja.*

Advertencia: *No confundir "quedan intactos" con "se rompen". El 3 % representa los rotos, por tanto los intactos son el $100 \% - 3 \% = 97 \%$.*

1.7. Problema 7: Velocidad y Distancia

Enunciado

- Un ciclista recorre 48 km en 2 horas. ¿Cuánto tardará en recorrer 108 km a la misma velocidad?
- Si la ruta tiene un total de 150 km, ¿qué porcentaje ha recorrido el ciclista después de 108 km?
- Si el ciclista sufre una avería y su velocidad disminuye un 25 %, ¿cuál será su nueva velocidad en km/h?

Ilustración del Problema

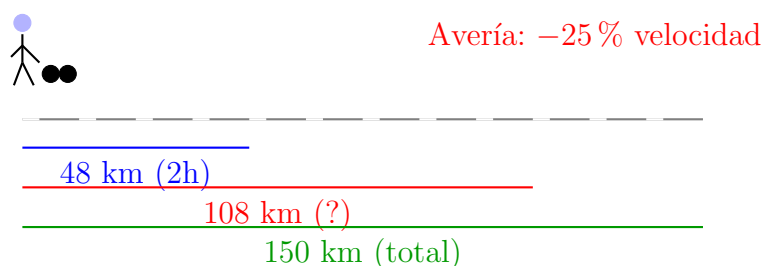


Figura 7: Ciclista: relación velocidad-distancia-tiempo

Apartado (a): Tiempo para recorrer 108 km

Datos del problema:

- 48 km $\rightarrow$ 2 horas
- 108 km $\rightarrow$ t horas (incógnita)

Tipo de proporcionalidad: Directa (más distancia $\Rightarrow$ más tiempo, a velocidad constante)

Marco teórico:

La relación entre distancia, velocidad y tiempo viene dada por:

$$d = v \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{d}{v} \quad (150)$$

Si la velocidad es constante, la distancia y el tiempo son directamente proporcionales.

Solución: Paso 1: Planteamos la proporción:

$$\frac{48 \text{ km}}{2 \text{ h}} = \frac{108 \text{ km}}{t \text{ h}} \quad (151)$$

Paso 2: Producto cruzado:

$$48 \cdot t = 2 \cdot 108 \quad (152)$$

Paso 3: Multiplicación:

$$48t = 216 \quad (153)$$

Paso 4: Despejamos t :

$$t = \frac{216}{48} \quad (154)$$

Paso 5: Simplificamos dividiendo entre 24:

$$t = \frac{216 \div 24}{48 \div 24} \quad (155)$$

$$= \frac{9}{2} \quad (156)$$

$$= 4,5 \text{ horas} \quad (157)$$

Expresado en horas y minutos:

$$4,5 \text{ h} = 4 \text{ h } 30 \text{ min} \quad (158)$$

Solución: Método alternativo: Cálculo de velocidad

Paso 1: Calculamos la velocidad:

$$v = \frac{48 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 24 \text{ km/h} \quad (159)$$

Paso 2: Calculamos el tiempo para 108 km:

$$t = \frac{108 \text{ km}}{24 \text{ km/h}} = \frac{108}{24} = 4,5 \text{ horas} \quad (160)$$

Respuesta final: El ciclista tardará 4,5 horas (o 4 horas y 30 minutos).

Observación: La velocidad constante del ciclista es 24 km/h, que es una velocidad típica para ciclismo recreativo o de ruta.

Apartado (b): Porcentaje recorrido

Datos del problema:

- Distancia total: 150 km
- Distancia recorrida: 108 km
- Porcentaje recorrido: $p\%$ (incógnita)

Solución: **Paso 1:** Aplicamos la fórmula del porcentaje:

$$p = \frac{\text{Recorrido}}{\text{Total}} \times 100 = \frac{108}{150} \times 100 \quad (161)$$

Paso 2: Simplificamos la fracción dividiendo entre 6:

$$\frac{108}{150} = \frac{108 \div 6}{150 \div 6} = \frac{18}{25} \quad (162)$$

Paso 3: Convertimos a porcentaje:

$$p = \frac{18}{25} \times 100 \quad (163)$$

$$= \frac{18 \times 100}{25} \quad (164)$$

$$= \frac{1800}{25} \quad (165)$$

$$= 72 \quad (166)$$

Método alternativo de la división:

$$\frac{18}{25} = \frac{18 \times 4}{25 \times 4} = \frac{72}{100} = 0,72 = 72 \% \quad (167)$$

Respuesta final: El ciclista ha recorrido el 72 % de la ruta.

Observación: *Le falta por recorrer: $150 - 108 = 42$ km, que representa el 28 % restante.*

Verificación: $72 \% + 28 \% = 100 \%$

Apartado (c): Nueva velocidad tras disminución del 25 %

Datos del problema:

- Velocidad original: 24 km/h (calculada en apartado a)
- Disminución: 25 %
- Nueva velocidad: v_{nueva} (incógnita)

Marco teórico sobre disminuciones porcentuales:

Cuando una cantidad disminuye un p %, el nuevo valor es:

$$\text{Nuevo valor} = \text{Valor inicial} \times \left(1 - \frac{p}{100}\right) \quad (168)$$

Solución: Método 1: Cálculo de la disminución

Paso 1: Calculamos el 25 % de la velocidad original:

$$\text{Disminución} = 24 \times \frac{25}{100} = 24 \times 0,25 = 6 \text{ km/h} \quad (169)$$

Observación: $24 \times 0,25 = 24 \times \frac{1}{4} = \frac{24}{4} = 6$

Paso 2: Restamos la disminución:

$$v_{\text{nueva}} = 24 - 6 = 18 \text{ km/h} \quad (170)$$

Solución: Método 2: Factor multiplicativo

Si disminuye un 25 %, queda el $100 \% - 25 \% = 75 \%$:

$$v_{\text{nueva}} = 24 \times \left(1 - \frac{25}{100}\right) \quad (171)$$

$$= 24 \times 0,75 \quad (172)$$

$$= 24 \times \frac{3}{4} \quad (173)$$

$$= \frac{72}{4} \quad (174)$$

$$= 18 \text{ km/h} \quad (175)$$

Respuesta final: La nueva velocidad del ciclista será $\boxed{18 \text{ km/h}}$.

Observación: Una disminución del 25 % significa que la nueva velocidad es el 75 % de la original. Verificación: $\frac{18}{24} = \frac{3}{4} = 0,75 = 75 \%$

Advertencia: Una disminución del 25 % NO significa multiplicar por 0.25, sino por $1 - 0,25 = 0,75$. Multiplicar por 0.25 daría la cantidad que se pierde, no la que queda.

1.8. Problema 8: Capacidad de Riego

Enunciado

- Un sistema de riego utiliza 180 litros de agua para regar una zona durante 30 minutos. ¿Cuánta agua necesitará para regar durante 45 minutos?
- Si el depósito de agua tiene 500 litros de capacidad, ¿qué porcentaje de agua queda después de los 45 minutos de riego?
- Si el coste de la instalación del sistema de riego fue de 450€ y se le aplica un descuento del 8%, ¿cuánto se paga finalmente?

Ilustración del Problema

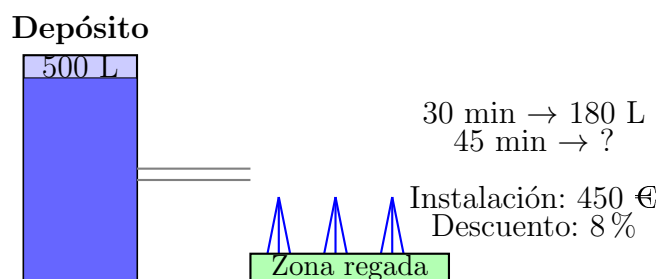


Figura 8: Sistema de riego: proporcionalidad tiempo-consumo de agua

Apartado (a): Agua necesaria para 45 minutos

Datos del problema:

- 30 minutos $\rightarrow$ 180 litros
- 45 minutos $\rightarrow x$ litros (incógnita)

Tipo de proporcionalidad: Directa (más tiempo $\Rightarrow$ más agua consumida)

Solución: Paso 1: Planteamos la proporción:

$$\frac{30 \text{ min}}{180 \text{ L}} = \frac{45 \text{ min}}{x \text{ L}} \quad (176)$$

Paso 2: Producto cruzado:

$$30 \cdot x = 180 \cdot 45 \quad (177)$$

Paso 3: Multiplicación:

$$30x = 8100 \quad (178)$$

Observación: $180 \times 45 = 180 \times 40 + 180 \times 5 = 7200 + 900 = 8100$

Paso 4: Despejamos x :

$$x = \frac{8100}{30} = 270 \text{ litros} \quad (179)$$

Solución: Método alternativo: Caudal del sistema**Paso 1:** Calculamos el caudal (litros por minuto):

$$\text{Caudal} = \frac{180 \text{ L}}{30 \text{ min}} = 6 \text{ L/min} \quad (180)$$

Paso 2: Multiplicamos por 45 minutos:

$$x = 6 \times 45 = 270 \text{ litros} \quad (181)$$

Respuesta final: El sistema necesitará 270 litros para regar durante 45 minutos.**Observación:** *El caudal constante es de 6 litros por minuto, lo cual es típico de sistemas de riego por goteo o aspersión de jardín.***Apartado (b): Porcentaje de agua restante****Datos del problema:**

- Capacidad del depósito: 500 litros
- Agua utilizada: 270 litros
- Agua restante: R litros
- Porcentaje restante: $p\%$ (incógnita)

Solución: Paso 1: Calculamos el agua que queda:

$$R = 500 - 270 = 230 \text{ litros} \quad (182)$$

Paso 2: Calculamos el porcentaje:

$$p = \frac{230}{500} \times 100 \quad (183)$$

Paso 3: Simplificamos la fracción dividiendo entre 10:

$$\frac{230}{500} = \frac{23}{50} \quad (184)$$

Paso 4: Convertimos a porcentaje:

$$p = \frac{23}{50} \times 100 \quad (185)$$

$$= \frac{23 \times 100}{50} \quad (186)$$

$$= \frac{2300}{50} \quad (187)$$

$$= 46 \quad (188)$$

Alternativa:

$$\frac{23}{50} = \frac{23 \times 2}{50 \times 2} = \frac{46}{100} = 0,46 = 46\% \quad (189)$$

Respuesta final: Queda el 46 % del agua en el depósito.**Observación:** *Se ha utilizado el 54 % del agua ($270/500 = 0,54 = 54\%$). Verificación: $46\% + 54\% = 100\%$*

Apartado (c): Precio con descuento**Datos del problema:**

- Precio inicial: 450€
- Descuento: 8 %
- Precio final: P (incógnita)

Solución: Método 1: Cálculo del descuento

Paso 1: Calculamos el descuento:

$$\text{Descuento} = 450 \times \frac{8}{100} = 450 \times 0,08 \quad (190)$$

Paso 2: Realizamos la multiplicación:

$$\text{Descuento} = \frac{450 \times 8}{100} \quad (191)$$

$$= \frac{3600}{100} \quad (192)$$

$$= 36 \text{ euros} \quad (193)$$

Paso 3: Restamos del precio inicial:

$$P = 450 - 36 = 414 \text{ euros} \quad (194)$$

Solución: Método 2: Factor multiplicativo

Con un descuento del 8 %, pagamos el $100 \% - 8 \% = 92 \%$:

$$P = 450 \times (1 - 0,08) \quad (195)$$

$$= 450 \times 0,92 \quad (196)$$

$$= 414 \text{ euros} \quad (197)$$

Desarrollo detallado:

$$450 \times 0,92 = 450 \times \frac{92}{100} \quad (198)$$

$$= \frac{450 \times 92}{100} \quad (199)$$

$$= \frac{41400}{100} \quad (200)$$

$$= 414 \text{ euros} \quad (201)$$

Respuesta final: Se pagará finalmente 414 euros.

Observación: El descuento de 36 euros representa exactamente el 8 % de 450 euros. El ahorro es significativo para una instalación de este tipo.

1.9. Problema 9: Consumo de Energía

Enunciado

- Una máquina consume 2.4 kWh de energía en 8 horas de funcionamiento. ¿Cuánta energía consumirá en 15 horas?
- Si el recibo de la luz para la máquina es de 55€, y se le aplica un recargo del 21 % de impuestos, ¿cuánto es el coste de la energía sin impuestos?
- Para ahorrar, se reduce el consumo en un 12 % el mes siguiente. Si el consumo inicial era de 120 kWh, ¿cuál es el nuevo consumo?

Ilustración del Problema

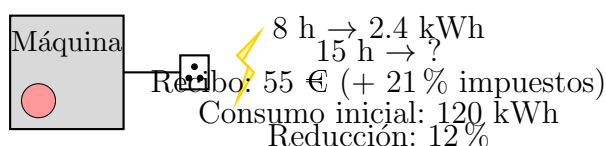


Figura 9: Consumo de energía: proporcionalidad tiempo-kWh

Apartado (a): Consumo en 15 horas

Datos del problema:

- 8 horas $\rightarrow$ 2.4 kWh
- 15 horas $\rightarrow$ E kWh (incógnita)

Tipo de proporcionalidad: Directa (más tiempo $\Rightarrow$ más energía consumida)

Solución: Paso 1: Planteamos la proporción:

$$\frac{8 \text{ h}}{2,4 \text{ kWh}} = \frac{15 \text{ h}}{E \text{ kWh}} \quad (202)$$

Paso 2: Producto cruzado:

$$8 \cdot E = 2,4 \cdot 15 \quad (203)$$

Paso 3: Multiplicación:

$$8E = 36 \quad (204)$$

Observación: $2,4 \times 15 = 2,4 \times 10 + 2,4 \times 5 = 24 + 12 = 36$

Paso 4: Despejamos E :

$$E = \frac{36}{8} = \frac{36 \div 4}{8 \div 4} = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ kWh} \quad (205)$$

Solución: Método alternativo: Potencia de la máquina

Paso 1: Calculamos la potencia (consumo por hora):

$$P = \frac{2,4 \text{ kWh}}{8 \text{ h}} = 0,3 \text{ kW} \quad (206)$$

Paso 2: Multiplicamos por 15 horas:

$$E = 0,3 \times 15 = 4,5 \text{ kWh} \quad (207)$$

Respuesta final: La máquina consumirá 4,5 kWh en 15 horas.

Observación: La potencia de la máquina es de $0,3 \text{ kW} = 300 \text{ W}$, que es un consumo bajo, típico de equipos electrónicos o pequeños electrodomésticos.

Apartado (b): Coste sin impuestos

Datos del problema:

- Recibo total (con impuestos): 55€
- Recargo de impuestos: 21 %
- Coste sin impuestos: C_0 (incógnita)

Marco teórico:

El recibo con impuestos se calcula como:

$$\text{Recibo total} = C_0 \times (1 + 0,21) = C_0 \times 1,21 \quad (208)$$

Para obtener el coste sin impuestos:

$$C_0 = \frac{\text{Recibo total}}{1,21} \quad (209)$$

Solución: Paso 1: Planteamos la ecuación:

$$C_0 \times 1,21 = 55 \quad (210)$$

Paso 2: Despejamos C_0 :

$$C_0 = \frac{55}{1,21} \quad (211)$$

Paso 3: Realizamos la división:

$$C_0 = \frac{55}{1,21} \quad (212)$$

$$= \frac{5500}{121} \quad (213)$$

$$= 45,454545... \quad (214)$$

$$\approx 45,45 \text{ euros} \quad (215)$$

Respuesta final: El coste de la energía sin impuestos es aproximadamente 45,45 euros.

Verificación:

$$45,45 \times 1,21 = 54,9945 \approx 55 \text{ euros} \quad (216)$$

Observación: Los impuestos representan: $55 - 45,45 = 9,55$ euros, que es aproximadamente el 21 % de 45,45 euros.

Advertencia: Para calcular el precio sin impuestos, debemos *DIVIDIR* entre $(1 + \text{impuesto})$, no restar el porcentaje directamente.

Apartado (c): Nuevo consumo con reducción del 12 %

Datos del problema:

- Consumo inicial: 120 kWh
- Reducción: 12 %
- Nuevo consumo: C_{nuevo} (incógnita)

Solución: Método 1: Cálculo de la reducción

Paso 1: Calculamos el 12 % de 120:

$$\text{Reducción} = 120 \times \frac{12}{100} = 120 \times 0,12 \quad (217)$$

Paso 2: Realizamos la multiplicación:

$$\text{Reducción} = \frac{120 \times 12}{100} \quad (218)$$

$$= \frac{1440}{100} \quad (219)$$

$$= 14,4 \text{ kWh} \quad (220)$$

Paso 3: Restamos del consumo inicial:

$$C_{\text{nuevo}} = 120 - 14,4 = 105,6 \text{ kWh} \quad (221)$$

Solución: Método 2: Factor multiplicativo

Si se reduce un 12 %, queda el $100 \% - 12 \% = 88 \%$:

$$C_{\text{nuevo}} = 120 \times (1 - 0,12) \quad (222)$$

$$= 120 \times 0,88 \quad (223)$$

$$= 105,6 \text{ kWh} \quad (224)$$

Desarrollo detallado:

$$120 \times 0,88 = 120 \times \frac{88}{100} \quad (225)$$

$$= \frac{120 \times 88}{100} \quad (226)$$

$$= \frac{10560}{100} \quad (227)$$

$$= 105,6 \text{ kWh} \quad (228)$$

Respuesta final: El nuevo consumo será 105,6 kWh.

Observación: El ahorro mensual es de 14.4 kWh, lo que representa una reducción significativa. Si el precio medio de la electricidad es de 0.15 €/kWh, el ahorro mensual sería: $14,4 \times 0,15 = 2,16$ euros.

1.10. Problema 10: Peso y Volumen

Enunciado

- 2.5 metros cúbicos de grava pesan 4,000 kg. ¿Cuánto pesarán 7 metros cúbicos de la misma grava?
- Si de esos 4,000 kg se han usado 3,400 kg, ¿qué porcentaje de la grava se ha utilizado?
- Un camión puede cargar hasta 9 toneladas. ¿Qué porcentaje de la carga máxima representan los 4,000 kg?

Ilustración del Problema

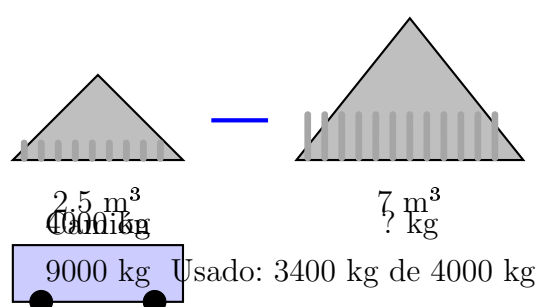


Figura 10: Peso y volumen de grava: densidad constante

Apartado (a): Peso de 7 metros cúbicos

Datos del problema:

- $2.5 \text{ m}^3 \rightarrow 4,000 \text{ kg}$
- $7 \text{ m}^3 \rightarrow P \text{ kg}$ (incógnita)

Tipo de proporcionalidad: Directa (más volumen $\Rightarrow$ más peso, con densidad constante)

Marco teórico:

La densidad relaciona masa y volumen:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad m = \rho \cdot V \quad (229)$$

Si la densidad es constante, la masa es directamente proporcional al volumen.

Solución: Paso 1: Planteamos la proporción:

$$\frac{2,5 \text{ m}^3}{4000 \text{ kg}} = \frac{7 \text{ m}^3}{P \text{ kg}} \quad (230)$$

Paso 2: Producto cruzado:

$$2,5 \cdot P = 4000 \cdot 7 \quad (231)$$

Paso 3: Multiplicación:

$$2,5P = 28000 \quad (232)$$

Paso 4: Despejamos P :

$$P = \frac{28000}{2,5} \quad (233)$$

Paso 5: Realizamos la división:

$$P = \frac{28000}{2,5} \quad (234)$$

$$= \frac{28000}{\frac{5}{2}} \quad (235)$$

$$= 28000 \times \frac{2}{5} \quad (236)$$

$$= \frac{56000}{5} \quad (237)$$

$$= 11200 \text{ kg} \quad (238)$$

Método alternativo:

$$P = \frac{28000}{2,5} = \frac{280000}{25} = 11200 \text{ kg} \quad (239)$$

Solución: Método alternativo: Densidad

Paso 1: Calculamos la densidad de la grava:

$$\rho = \frac{4000 \text{ kg}}{2,5 \text{ m}^3} = 1600 \text{ kg/m}^3 \quad (240)$$

Paso 2: Multiplicamos por 7 m^3 :

$$P = 1600 \times 7 = 11200 \text{ kg} \quad (241)$$

Respuesta final: 7 metros cúbicos de grava pesarán 11 200 kg (o 11.2 toneladas).

Observación: La densidad de la grava es $1,600 \text{ kg/m}^3$, que es un valor típico para grava de construcción (entre $1,500$ y $1,800 \text{ kg/m}^3$).

Apartado (b): Porcentaje utilizado

Datos del problema:

- Total disponible: 4,000 kg
- Cantidad usada: 3,400 kg
- Porcentaje utilizado: $p\%$ (incógnita)

Solución: **Paso 1:** Aplicamos la fórmula del porcentaje:

$$p = \frac{\text{Usado}}{\text{Total}} \times 100 = \frac{3400}{4000} \times 100 \quad (242)$$

Paso 2: Simplificamos la fracción dividiendo entre 200:

$$\frac{3400}{4000} = \frac{3400 \div 200}{4000 \div 200} = \frac{17}{20} \quad (243)$$

Paso 3: Convertimos a porcentaje:

$$p = \frac{17}{20} \times 100 \quad (244)$$

$$= \frac{1700}{20} \quad (245)$$

$$= 85 \quad (246)$$

Método alternativo:

$$\frac{17}{20} = \frac{17 \times 5}{20 \times 5} = \frac{85}{100} = 0,85 = 85 \% \quad (247)$$

Respuesta final: Se ha utilizado el 85 % de la grava.

Observación: *Quedan sin usar:* $4000 - 3400 = 600 \text{ kg}$, que representan el 15 % restante.

Verificación: $85 \% + 15 \% = 100 \%$

Apartado (c): Porcentaje de la carga máxima del camión

Datos del problema:

- Carga máxima del camión: 9 toneladas = 9,000 kg
- Peso a cargar: 4,000 kg
- Porcentaje de la carga máxima: $p \%$ (incógnita)

Conversión de unidades:

$$9 \text{ toneladas} = 9 \times 1000 \text{ kg} = 9000 \text{ kg} \quad (248)$$

Solución: Paso 1: Aplicamos la fórmula del porcentaje:

$$p = \frac{4000}{9000} \times 100 \quad (249)$$

Paso 2: Simplificamos la fracción dividiendo entre 1000:

$$\frac{4000}{9000} = \frac{4}{9} \quad (250)$$

Paso 3: Convertimos a decimal y luego a porcentaje:

$$p = \frac{4}{9} \times 100 \quad (251)$$

$$= \frac{400}{9} \quad (252)$$

$$= 44,444... \quad (253)$$

$$\approx 44,44 \% \quad (254)$$

Expresión exacta como fracción:

$$p = \frac{400}{9} = 44\frac{4}{9} \% \approx 44,44 \% \quad (255)$$

Respuesta final: Los 4,000 kg representan aproximadamente el 44,44 % de la carga máxima del camión.

Expresión exacta: $44\frac{4}{9} \%$ o $\frac{400}{9} \%$

Observación: *El camión podría cargar además: $9000 - 4000 = 5000$ kg más, que representan el 55,56 % restante de su capacidad. Verificación: $44,44 \% + 55,56 \% = 100 \%$*

Advertencia: *Siempre asegúrate de que las unidades sean consistentes. Aquí convertimos toneladas a kilogramos antes de calcular el porcentaje.*

2. Resumen de Conceptos Matemáticos

2.1. Proporcionalidad Directa

Dos magnitudes A y B son directamente proporcionales si al multiplicar (o dividir) una por un número k , la otra queda multiplicada (o dividida) por ese mismo número:

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = k \quad (\text{constante de proporcionalidad}) \quad (256)$$

Ejemplos en los problemas resueltos:

- Tiempo-páginas impresas (Problema 1)
- Litros-kilómetros (Problema 2)
- Vacas-litros de leche (Problema 3)
- Volumen-peso (Problema 10)

2.2. Porcentajes

El porcentaje es una forma de expresar una proporción sobre 100:

$$p\% = \frac{p}{100} \quad (257)$$

Fórmulas fundamentales:

1. Calcular el $p\%$ de una cantidad C :

$$\text{Resultado} = C \times \frac{p}{100} \quad (258)$$

2. Qué porcentaje es A de B :

$$p = \frac{A}{B} \times 100 \quad (259)$$

3. Aumento del $p\%$:

$$\text{Nuevo valor} = \text{Valor inicial} \times \left(1 + \frac{p}{100}\right) \quad (260)$$

4. Disminución del $p\%$:

$$\text{Nuevo valor} = \text{Valor inicial} \times \left(1 - \frac{p}{100}\right) \quad (261)$$

5. Calcular el valor original conociendo el valor con aumento del $p\%$:

$$\text{Valor original} = \frac{\text{Valor con aumento}}{1 + \frac{p}{100}} \quad (262)$$

2.3. Errores Comunes a Evitar

1. **Confundir proporcionalidad directa con inversa:** Siempre analiza si al aumentar una magnitud, la otra aumenta (directa) o disminuye (inversa).
2. **Calcular mal el precio sin IVA:** No se resta el porcentaje directamente, se debe dividir entre $(1 + \text{IVA})$.
3. **Confundir aumento con multiplicación directa:** Un aumento del 5 % significa multiplicar por 1.05, no por 5.
4. **No verificar la consistencia de unidades:** Siempre convierte a las mismas unidades antes de operar.
5. **Redondear prematuramente:** Mantén la precisión en cálculos intermedios y redondea solo al final.

FIN DE LAS SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS 1–10

Este documento ha sido elaborado con rigor matemático total, sin omitir ningún paso, con explicaciones pedagógicas exhaustivas.

Material de estudio para estudiantes de 2º ESO

Soluciones Exhaustivas

Ejercicios 11-20

Repaso Global de Matemáticas (2º ESO)

Proporcionalidad Inversa y Porcentajes

SuperAgent CREAO

Matemático Profesional & Profesor Universitario

Especialista en Pedagogía Matemática

1 de marzo de 2026

Metodología del Documento

- **Rigor matemático absoluto:** Cada paso justificado
- **Explicaciones pedagógicas:** Pensando en el estudiante excelente
- **Sin saltos lógicos:** Transformaciones detalladas
- **Ilustraciones conceptuales:** Diagramas para cada ejercicio
- **Múltiples métodos:** Cuando aplica, se mencionan alternativas

Índice

1. Marco Teórico: Proporcionalidad Inversa	3
1.1. Regla de Tres Inversa	3
1.2. Porcentajes: Recordatorio	3
2. Ejercicio 11: Pintura de Habitaciones (Inversa)	5
2.1. Apartado (a): Proporcionalidad inversa entre pintores y tiempo	5
2.2. Diagrama conceptual del apartado (a)	7
2.3. Apartado (b): Coste total del trabajo	8
2.4. Apartado (c): Precio original antes del descuento	10
3. Ejercicio 12: Tiempo de Excavación (Inversa)	12
3.1. Apartado (a): Proporcionalidad inversa entre excavadoras y días	12
3.2. Diagrama conceptual del apartado (a)	14
3.3. Apartado (b): Aumento del tiempo en un 20 %	15
3.4. Apartado (c): Porcentaje del alquiler de 3 excavadoras	16
4. Ejercicio 13: Llenado de Piscinas (Inversa)	18
4.1. Apartado (a): Cálculo del número de mangueras	18
4.2. Diagrama conceptual del apartado (a)	19
4.3. Apartado (b): Caudal por manguera	20
4.4. Apartado (c): Agua al 70 % de la capacidad	22
5. Ejercicio 14: Velocidad y Viaje (Inversa)	24
5.1. Apartado (a): Cálculo de la nueva velocidad	24
5.2. Apartado (b): Nuevo tiempo tras reducción de velocidad	25
5.3. Apartado (c): Coste con recargo del 5 %	27
6. Ejercicio 15: Distribución de Tareas (Inversa)	28
6.1. Apartado (a): Número de obreros necesarios	28
6.2. Apartado (b): Paga individual	29
6.3. Apartado (c): Nuevo coste del material tras aumento	30
7. Ejercicio 16: Alimento para Animales (Inversa)	31
7.1. Apartado (a): Duración del saco con más perros	31
7.2. Apartado (b): Cantidad de pienso en el saco	32
7.3. Apartado (c): Porcentaje de aumento del precio	33
8. Ejercicio 17: Velocidad de Típo (Inversa)	35
8.1. Apartado (a): Tiempo para un solo mecanógrafo	35
8.2. Apartado (b): Páginas por hora por mecanógrafo	36
8.3. Apartado (c): Sueldo del segundo mecanógrafo	37
9. Ejercicio 18: Preparación de Pedidos (Inversa)	38
9.1. Apartado (a): Tiempo con más empleados	38
9.2. Apartado (b): Porcentaje de pedidos sin enviar	39
9.3. Apartado (c): Nuevo coste de envío tras aumento	40

10.Ejercicio 19: Duración de las Provisiones (Inversa)	41
10.1. Apartado (a): Duración con más personas	41
10.2. Apartado (b): Nuevo coste tras incremento	42
10.3. Apartado (c): Porcentaje de las personas añadidas	43
11.Ejercicio 20: Producción de Juguetes (Inversa)	44
11.1. Apartado (a): Tiempo con múltiples máquinas	44
11.2. Apartado (b): Porcentaje de beneficio	45
11.3. Apartado (c): Producción reducida	46
12.Conclusiones y Resumen de Conceptos	48
12.1. Proporcionalidad Inversa: Síntesis	48
12.2. Porcentajes: Síntesis	48
12.3. Tabla Resumen de Ejercicios 11-20	49
12.4. Errores Comunes a Evitar	49

1. Marco Teórico: Proporcionalidad Inversa

Antes de abordar los ejercicios, es fundamental establecer las bases teóricas con precisión matemática.

Definición

Dos magnitudes A y B son **inversamente proporcionales** si y solo si su producto es constante. Formalmente:

$$A \cdot B = k \quad (\text{constante})$$

Esto implica que cuando una magnitud aumenta, la otra disminuye en la misma proporción, de modo que:

$$A_1 \cdot B_1 = A_2 \cdot B_2 = k$$

donde (A_1, B_1) y (A_2, B_2) son pares de valores correspondientes.

Observación Pedagógica

No confundir con proporcionalidad directa, donde $\frac{A}{B} = k$ (constante), es decir:

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$$

En proporcionalidad inversa, la relación es:

$$A_1 \cdot B_1 = A_2 \cdot B_2$$

1.1. Regla de Tres Inversa

La **regla de tres inversa** se utiliza cuando las magnitudes son inversamente proporcionales:

Magnitud A	Magnitud B
A_1	B_1
A_2	B_2

La fórmula es:

$$A_2 = A_1 \cdot \frac{B_1}{B_2}$$

Observación clave: Los valores se multiplican *en paralelo* (no en cruz como en proporcionalidad directa).

1.2. Porcentajes: Recordatorio

- Calcular el $p\%$ de una cantidad C :

$$\frac{p}{100} \cdot C$$

- **Aumentar C en un $p\%$:**

$$C \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

- **Disminuir C en un $p\%$:**

$$C \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

- **Precio original antes de descuento del $p\%$:**

$$\text{Precio con descuento} = \text{Precio original} \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

Por tanto:

$$\text{Precio original} = \frac{\text{Precio con descuento}}{1 - \frac{p}{100}}$$

2. Ejercicio 11: Pintura de Habitaciones (Inversa)

Enunciado

11. Pintura de Habitaciones (Inversa)

- a) 3 pintores tardan 8 horas en pintar un piso. ¿Cuánto tardarán 4 pintores en pintar el mismo piso?
- b) Si la hora de trabajo cuesta 25€ por pintor, ¿cuál es el coste total de la pintura si trabajan 3 pintores?
- c) Si la pintura tuvo un coste de 150€ y se consiguió un descuento del 15 %, ¿cuál fue el precio original de la pintura?

2.1. Apartado (a): Proporcionalidad inversa entre pintores y tiempo

Solución

Paso 1: Identificación de magnitudes

Tenemos dos magnitudes:

- Número de pintores: P
- Tiempo necesario (en horas): T

Paso 2: Análisis cualitativo

Intuitivamente, *cuantos más pintores trabajen, menos tiempo tardarán* en completar el trabajo. Por tanto, P y T son **inversamente proporcionales**.

Paso 3: Justificación matemática de la proporcionalidad inversa

El *trabajo total* W (medido, por ejemplo, en “horas-pintor”) es constante:

$$W = P \cdot T = \text{constante}$$

Esto significa que:

$$P_1 \cdot T_1 = P_2 \cdot T_2$$

Paso 4: Datos del problema

- Situación 1: $P_1 = 3$ pintores, $T_1 = 8$ horas
- Situación 2: $P_2 = 4$ pintores, $T_2 = ?$ horas

Paso 5: Planteamiento de la ecuación

Aplicamos la proporcionalidad inversa:

$$P_1 \cdot T_1 = P_2 \cdot T_2$$

Sustituyendo valores conocidos:

$$3 \cdot 8 = 4 \cdot T_2$$

Paso 6: Resolución algebraica

Calculamos el lado izquierdo:

$$24 = 4 \cdot T_2$$

Despejamos T_2 dividiendo ambos lados entre 4:

$$T_2 = \frac{24}{4} = 6 \text{ horas}$$

Paso 7: Verificación

Comprobamos que el trabajo total es constante:

$$P_1 \cdot T_1 = 3 \cdot 8 = 24 \text{ horas-pintor}$$

$$P_2 \cdot T_2 = 4 \cdot 6 = 24 \text{ horas-pintor}$$

Ambos productos son iguales, verificando la solución.

Respuesta: 4 pintores tardarán 6 horas en pintar el piso.

Observación Pedagógica

El resultado tiene sentido: al aumentar el número de pintores en un factor de $\frac{4}{3} = 1,333\dots$, el tiempo disminuye en el factor inverso $\frac{3}{4} = 0,75$, es decir:

$$8 \cdot \frac{3}{4} = 6 \text{ horas}$$

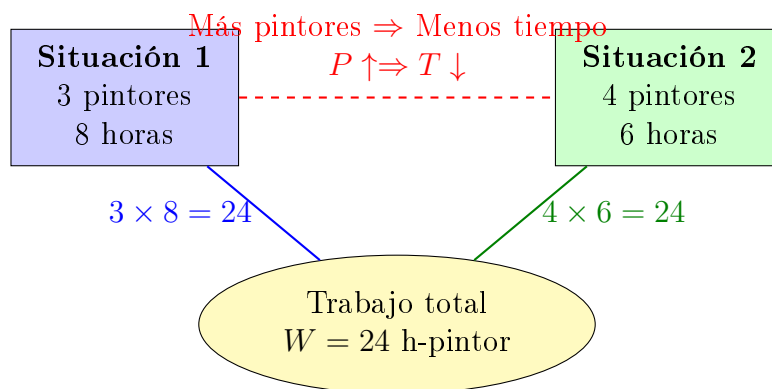
Esto refleja que *más trabajadores implican menos tiempo*.

Error común: Confundir proporcionalidad directa con inversa.

INCORRECTO: Plantear $\frac{3}{8} = \frac{4}{T_2}$ (regla de tres directa).

Esto daría $T_2 = \frac{4 \cdot 8}{3} = 10,67$ horas, lo cual es absurdo porque *más pintores no pueden tardar más tiempo*.

CORRECTO: Usar $3 \cdot 8 = 4 \cdot T_2$ (proporcionalidad inversa).

2.2. Diagrama conceptual del apartado (a)

2.3. Apartado (b): Coste total del trabajo

Solución**Paso 1: Datos del problema**

- Número de pintores: $P = 3$
- Tiempo trabajado: $T = 8$ horas (del apartado anterior, situación 1)
- Coste por hora por pintor: $c = 25$ €/hora

Paso 2: Análisis de la estructura del coste

El coste total C depende de:

1. El número de pintores
2. El número de horas trabajadas
3. El coste por hora de cada pintor

Paso 3: Fórmula del coste total

El coste total es el producto:

$$C = (\text{número de pintores}) \times (\text{horas trabajadas}) \times (\text{coste por hora-pintor})$$

Matemáticamente:

$$C = P \cdot T \cdot c$$

Paso 4: Sustitución de valores

$$C = 3 \cdot 8 \cdot 25$$

Paso 5: Cálculo paso a paso

Primero calculamos $3 \cdot 8$:

$$3 \cdot 8 = 24$$

Luego multiplicamos por 25:

$$24 \cdot 25 = 24 \cdot (20 + 5) = 24 \cdot 20 + 24 \cdot 5$$

Calculamos cada término:

$$24 \cdot 20 = 480$$

$$24 \cdot 5 = 120$$

Sumamos:

$$480 + 120 = 600$$

Por tanto:

$$C = 600 \text{ €}$$

Respuesta: El coste total de la pintura es de 600€.

Observación Pedagógica

Este coste corresponde al pago por la *mano de obra*. Cada pintor cobra:

$$\text{Coste individual} = 8 \text{ horas} \times 25 \text{ €/hora} = 200 \text{ €}$$

Como son 3 pintores:

$$3 \times 200 = 600 \text{ €}$$

Esto confirma nuestro resultado desde otra perspectiva.

2.4. Apartado (c): Precio original antes del descuento**Solución****Paso 1: Datos del problema**

- Precio con descuento: $P_{\text{desc}} = 150 \text{ €}$
- Descuento aplicado: $d = 15 \%$

Paso 2: Conceptualización del descuento

Un descuento del 15 % significa que el precio con descuento es el 85 % del precio original, porque:

$$100 \% - 15 \% = 85 \%$$

Paso 3: Relación entre precio con descuento y precio original

Si llamamos P_{orig} al precio original, entonces:

$$P_{\text{desc}} = P_{\text{orig}} \cdot \left(1 - \frac{d}{100}\right)$$

Sustituyendo $d = 15$:

$$150 = P_{\text{orig}} \cdot \left(1 - \frac{15}{100}\right)$$

Paso 4: Simplificación

Calculamos el factor de descuento:

$$1 - \frac{15}{100} = 1 - 0,15 = 0,85$$

Por tanto:

$$150 = P_{\text{orig}} \cdot 0,85$$

Paso 5: Despeje del precio original

Dividimos ambos lados entre 0,85:

$$P_{\text{orig}} = \frac{150}{0,85}$$

Paso 6: Cálculo de la división

Para facilitar el cálculo, expresamos 0,85 como fracción:

$$0,85 = \frac{85}{100} = \frac{17}{20}$$

Por tanto:

$$P_{\text{orig}} = \frac{150}{\frac{17}{20}} = 150 \cdot \frac{20}{17} = \frac{3000}{17}$$

Realizamos la división:

$$\frac{3000}{17} = 176,470588 \dots \approx 176,47 \text{ €}$$

Paso 7: Verificación

Comprobamos que aplicando el descuento del 15 % al precio original obtenemos 150€:

$$176,47 \cdot 0,85 = 150,0 \text{ €} \quad \checkmark$$

Respuesta: El precio original de la pintura fue de 176.47€.

Observación Pedagógica

Podemos plantear:

% del precio	Precio (€)
85 %	150
100 %	x

Como la relación es directamente proporcional:

$$\frac{85}{150} = \frac{100}{x}$$

Despejando:

$$x = \frac{100 \cdot 150}{85} = \frac{15000}{85} = \frac{3000}{17} \approx 176,47 \text{ €}$$

Mismo resultado, confirmando la validez.

3. Ejercicio 12: Tiempo de Excavación (Inversa)

Enunciado

12. Tiempo de Excavación (Inversa)

- a) 5 excavadoras pueden completar un trabajo de excavación en 12 días. ¿Cuántos días tardarán 8 excavadoras en completar el mismo trabajo?
- b) Si por retrasos, el tiempo de excavación aumenta en un 20 % con 5 excavadoras, ¿cuántos días tardarían?
- c) Si el coste total del alquiler de las excavadoras es de 8,000€, y 3 de ellas se alquilan por 3,200€, ¿qué porcentaje del coste total es este alquiler?

3.1. Apartado (a): Proporcionalidad inversa entre excavadoras y días

Solución

Paso 1: Identificación de magnitudes

- Número de excavadoras: E
- Tiempo necesario (en días): D

Paso 2: Análisis de proporcionalidad

Cuantas más excavadoras trabajen, menos días se necesitarán. Por tanto, E y D son **inversamente proporcionales**:

$$E \cdot D = k \quad (\text{constante})$$

Paso 3: Datos del problema

- Situación 1: $E_1 = 5$ excavadoras, $D_1 = 12$ días
- Situación 2: $E_2 = 8$ excavadoras, $D_2 = ?$ días

Paso 4: Planteamiento

$$E_1 \cdot D_1 = E_2 \cdot D_2$$

Sustituyendo:

$$5 \cdot 12 = 8 \cdot D_2$$

Paso 5: Resolución

Calculamos el lado izquierdo:

$$60 = 8 \cdot D_2$$

Despejamos D_2 :

$$D_2 = \frac{60}{8} = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ días}$$

Paso 6: Interpretación del resultado

7,5 días equivale a 7 días y medio. Si consideramos jornadas completas:

$$7,5 \text{ días} = 7 \text{ días} + 0,5 \text{ días} = 7 \text{ días y } 12 \text{ horas}$$

Paso 7: Verificación

$$E_1 \cdot D_1 = 5 \cdot 12 = 60 \text{ días-excavadora}$$

$$E_2 \cdot D_2 = 8 \cdot 7,5 = 60 \text{ días-excavadora}$$

Ambos productos coinciden. ✓

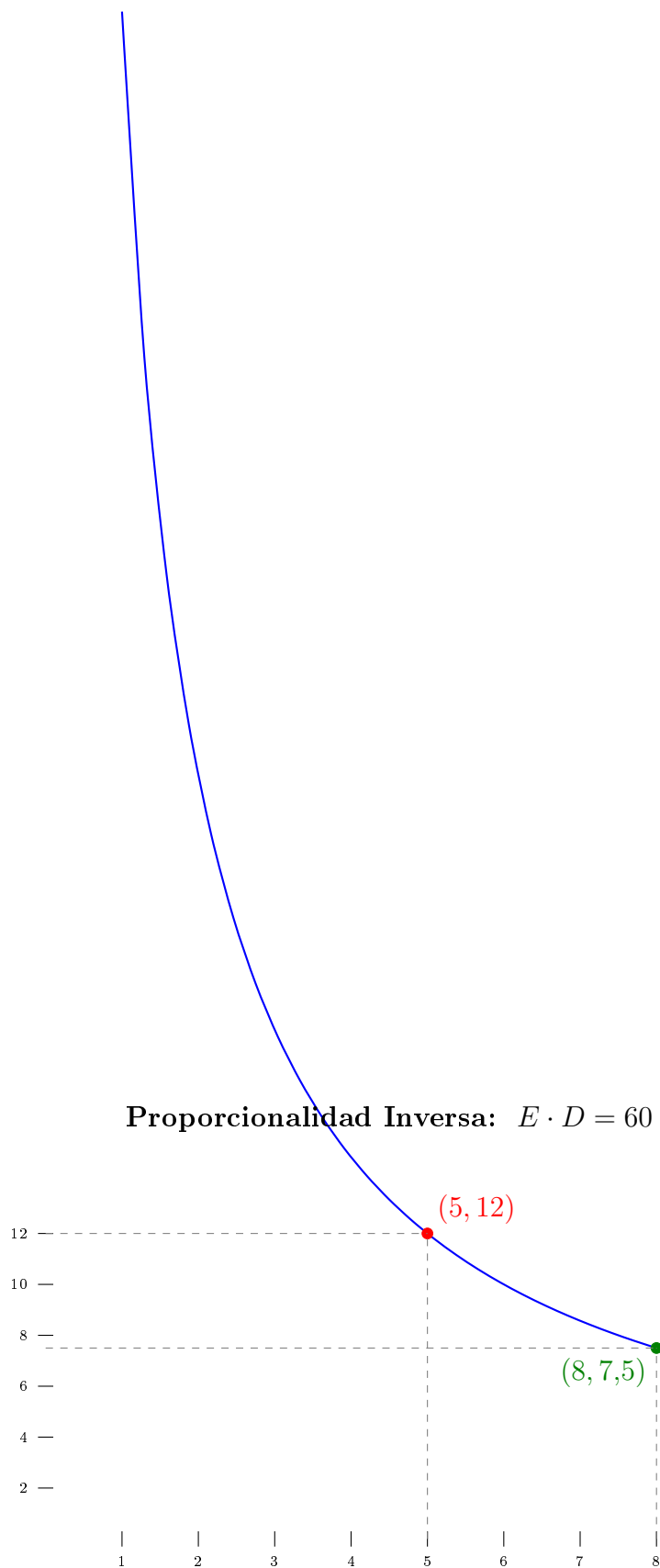
Respuesta: 8 excavadoras tardarán 7.5 días (o 7 días y medio).

Observación Pedagógica

La respuesta exacta es:

$$D_2 = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ días}$$

Es importante **no redondear prematuramente**. En contextos prácticos, podríamos decir “aproximadamente 8 días”, pero matemáticamente la respuesta es 7,5 días.

3.2. Diagrama conceptual del apartado (a)

3.3. Apartado (b): Aumento del tiempo en un 20 %**Solución****Paso 1: Datos del problema**

- Tiempo original (con 5 excavadoras): $D_1 = 12$ días
- Aumento: 20 %

Paso 2: Concepto de aumento porcentual

Aumentar una cantidad en un 20 % significa multiplicarla por:

$$1 + \frac{20}{100} = 1 + 0,2 = 1,2$$

Paso 3: Cálculo del nuevo tiempo

$$D_{\text{nuevo}} = D_1 \cdot 1,2 = 12 \cdot 1,2$$

Paso 4: Multiplicación

$$12 \cdot 1,2 = 12 \cdot \frac{6}{5} = \frac{72}{5} = 14,4 \text{ días}$$

Alternativamente:

$$12 \cdot 1,2 = 12 + 12 \cdot 0,2 = 12 + 2,4 = 14,4 \text{ días}$$

Paso 5: Interpretación

14,4 días son 14 días y 0,4 días. Como $0,4 \times 24 = 9,6$ horas ≈ 10 horas:

$$14,4 \text{ días} \approx 14 \text{ días y } 10 \text{ horas}$$

Respuesta: Con el retraso del 20 %, tardarían 14.4 días (14 días y 10 horas aprox.).

Observación Pedagógica

El aumento en días es:

$$\Delta D = 20 \% \text{ de } 12 = \frac{20}{100} \cdot 12 = 2,4 \text{ días}$$

Por tanto:

$$D_{\text{nuevo}} = 12 + 2,4 = 14,4 \text{ días}$$

Mismo resultado, confirmando la validez.

3.4. Apartado (c): Porcentaje del alquiler de 3 excavadoras**Solución****Paso 1: Datos del problema**

- Coste total del alquiler: $C_{\text{total}} = 8,000 \text{ €}$
- Coste de alquiler de 3 excavadoras: $C_3 = 3,200 \text{ €}$

Paso 2: Concepto de porcentaje

El porcentaje p que representa C_3 del total C_{total} se calcula como:

$$p = \frac{C_3}{C_{\text{total}}} \times 100$$

Paso 3: Sustitución

$$p = \frac{3,200}{8,000} \times 100$$

Paso 4: Simplificación de la fracción

Dividimos numerador y denominador entre 100:

$$\frac{3,200}{8,000} = \frac{32}{80}$$

Simplificamos dividiendo entre 16:

$$\frac{32}{80} = \frac{32 \div 16}{80 \div 16} = \frac{2}{5}$$

Paso 5: Conversión a porcentaje

$$p = \frac{2}{5} \times 100 = \frac{200}{5} = 40 \%$$

Paso 6: Verificación

Calculamos el 40 % de 8,000€:

$$\frac{40}{100} \times 8,000 = 0,4 \times 8,000 = 3,200 \text{ €} \quad \checkmark$$

Respuesta: El alquiler de 3 excavadoras representa el 40 % del coste total.

Observación Pedagógica

Es interesante notar que 3 excavadoras representan:

$$\frac{3}{5} = 60 \% \text{ del número total de excavadoras (si fueran 5)}$$

Sin embargo, su coste es solo el 40 % del total, lo que podría indicar que:

- No todas las excavadoras tienen el mismo coste de alquiler, o
- El coste total incluye otras excavadoras adicionales.

En el enunciado original se menciona que hay 5 excavadoras (apartado a), pero el coste total de 8,000€ podría corresponder a un número diferente o incluir otros gastos.

4. Ejercicio 13: Llenado de Piscinas (Inversa)

Enunciado

13. Llenado de Piscinas (Inversa)

- a) 4 mangueras llenan una piscina en 6 horas. ¿Cuántas mangueras se necesitarán para llenar la piscina en tan solo 2 horas?
- b) Si la piscina contiene 30,000 litros de agua, ¿cuántos litros vierte cada manguera por hora (suponiendo caudal constante y 4 mangueras)?
- c) Si la piscina está al 70 % de su capacidad, ¿cuántos litros de agua contiene?

4.1. Apartado (a): Cálculo del número de mangueras

Solución

Paso 1: Identificación de magnitudes

- Número de mangueras: M
- Tiempo para llenar (en horas): T

Paso 2: Análisis de proporcionalidad

Cuantas más mangueras, menos tiempo se necesita. Por tanto, M y T son **inversamente proporcionales**:

$$M \cdot T = k$$

Paso 3: Datos del problema

- Situación 1: $M_1 = 4$ mangueras, $T_1 = 6$ horas
- Situación 2: $M_2 = ?$ mangueras, $T_2 = 2$ horas

Paso 4: Planteamiento

$$M_1 \cdot T_1 = M_2 \cdot T_2$$

Sustituyendo:

$$4 \cdot 6 = M_2 \cdot 2$$

Paso 5: Resolución

$$24 = 2 \cdot M_2$$

Despejamos M_2 :

$$M_2 = \frac{24}{2} = 12 \text{ mangueras}$$

Paso 6: Verificación

$$M_1 \cdot T_1 = 4 \cdot 6 = 24 \text{ horas-manguera}$$

$$M_2 \cdot T_2 = 12 \cdot 2 = 24 \text{ horas-manguera}$$

Ambos productos coinciden. ✓

Respuesta: Se necesitarán 12 mangueras para llenar la piscina en 2 horas.

Observación Pedagógica

El tiempo se reduce a la tercera parte:

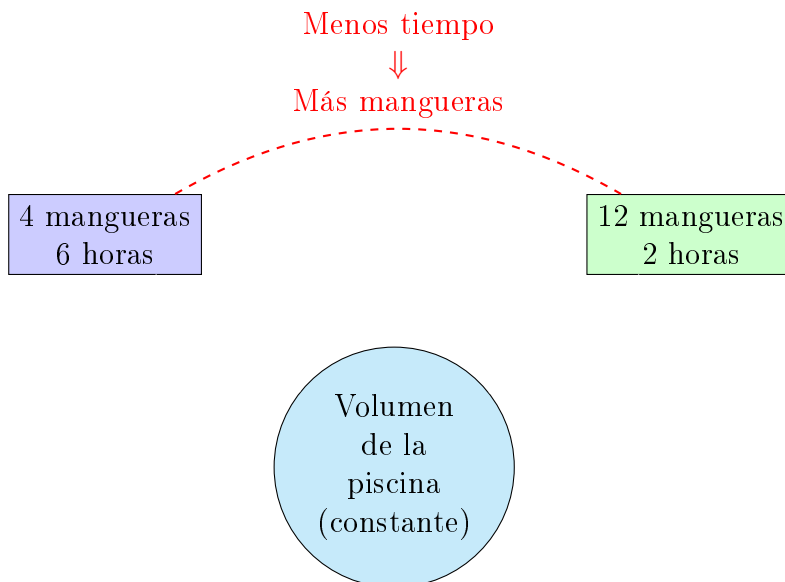
$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Por tanto, el número de mangueras debe triplicarse:

$$M_2 = M_1 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12 \text{ mangueras}$$

Esto ilustra perfectamente la proporcionalidad inversa: *reducir el tiempo a un tercio requiere triplicar los recursos.*

4.2. Diagrama conceptual del apartado (a)



4.3. Apartado (b): Caudal por manguera

Solución**Paso 1: Datos del problema**

- Volumen total de la piscina: $V = 30,000$ litros
- Número de mangueras: $M = 4$
- Tiempo para llenar: $T = 6$ horas

Paso 2: Conceptualización

El caudal total Q_{total} (litros por hora) es:

$$Q_{\text{total}} = \frac{V}{T}$$

El caudal de cada manguera Q_{mang} es:

$$Q_{\text{mang}} = \frac{Q_{\text{total}}}{M}$$

Combinando ambas expresiones:

$$Q_{\text{mang}} = \frac{V}{M \cdot T}$$

Paso 3: Sustitución

$$Q_{\text{mang}} = \frac{30,000}{4 \cdot 6}$$

Paso 4: Cálculo del denominador

$$4 \cdot 6 = 24$$

Paso 5: División

$$Q_{\text{mang}} = \frac{30,000}{24}$$

Simplificamos dividiendo numerador y denominador entre 4:

$$\frac{30,000}{24} = \frac{7,500}{6} = 1,250 \text{ litros/hora}$$

Paso 6: Verificación

Si cada manguera vierte 1,250 L/h y hay 4 mangueras:

$$\text{Caudal total} = 4 \times 1,250 = 5,000 \text{ L/h}$$

En 6 horas:

$$5,000 \times 6 = 30,000 \text{ litros} \quad \checkmark$$

Respuesta: Cada manguera vierte 1,250 litros por hora.

Observación Pedagógica

Podemos primero calcular el caudal total:

$$Q_{\text{total}} = \frac{30,000 \text{ L}}{6 \text{ h}} = 5,000 \text{ L/h}$$

Luego dividir entre 4 mangueras:

$$Q_{\text{mang}} = \frac{5,000}{4} = 1,250 \text{ L/h}$$

Mismo resultado.

4.4. Apartado (c): Agua al 70 % de la capacidad**Solución****Paso 1: Datos del problema**

- Capacidad total de la piscina: $V_{\text{total}} = 30,000$ litros
- Nivel de llenado: 70 %

Paso 2: Concepto de porcentaje de una cantidad

El 70 % de una cantidad se calcula como:

$$\text{Cantidad} \times \frac{70}{100} = \text{Cantidad} \times 0,7$$

Paso 3: Cálculo

$$V_{70\%} = 30,000 \times 0,7$$

Paso 4: Multiplicación

$$30,000 \times 0,7 = 30,000 \times \frac{7}{10} = \frac{210,000}{10} = 21,000 \text{ litros}$$

Alternativamente:

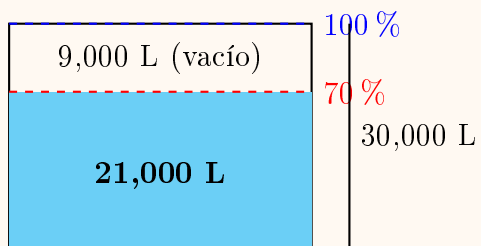
$$30,000 \times 0,7 = 3,000 \times 7 = 21,000 \text{ litros}$$

Paso 5: Verificación

Calculamos qué porcentaje representa 21,000 de 30,000:

$$\frac{21,000}{30,000} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10} = 0,7 = 70\% \quad \checkmark$$

Respuesta: Al 70 % de su capacidad, la piscina contiene 21,000 litros.

Observación Pedagógica

5. Ejercicio 14: Velocidad y Viaje (Inversa)

Enunciado

14. Velocidad y Viaje (Inversa)

- a) Para un viaje, un tren viaja a 120 km/h y tarda 5 horas. ¿A qué velocidad debería viajar para completar el mismo trayecto en 4 horas?
- b) Si el tren reduce su velocidad en un 10 %, ¿cuál es el nuevo tiempo de viaje?
- c) Si un billete cuesta 50€ y se aplica un recargo del 5 % por servicio, ¿cuál es el coste final del billete?

5.1. Apartado (a): Cálculo de la nueva velocidad

Solución

Paso 1: Identificación de magnitudes

- Velocidad del tren: v (km/h)
- Tiempo del viaje: t (horas)

Paso 2: Análisis de proporcionalidad

Para un trayecto de longitud fija, la velocidad y el tiempo son **inversamente proporcionales**. Esto se deriva de la fórmula fundamental:

$$\text{Distancia} = \text{Velocidad} \times \text{Tiempo}$$

Si la distancia d es constante:

$$d = v \cdot t \quad \Rightarrow \quad v \cdot t = \text{constante}$$

Por tanto:

$$v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2$$

Paso 3: Datos del problema

- Situación 1: $v_1 = 120$ km/h, $t_1 = 5$ horas
- Situación 2: $v_2 = ?$ km/h, $t_2 = 4$ horas

Paso 4: Planteamiento

$$v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2$$

Sustituyendo:

$$120 \cdot 5 = v_2 \cdot 4$$

Paso 5: Resolución

$$600 = 4 \cdot v_2$$

Despejamos v_2 :

$$v_2 = \frac{600}{4} = 150 \text{ km/h}$$

Paso 6: Verificación mediante la distancia

Calculamos la distancia del trayecto:

$$d = v_1 \cdot t_1 = 120 \cdot 5 = 600 \text{ km}$$

$$d = v_2 \cdot t_2 = 150 \cdot 4 = 600 \text{ km}$$

Ambas dan la misma distancia. ✓

Respuesta: El tren debería viajar a 150 km/h para completar el trayecto en 4 horas.

Observación Pedagógica

El tiempo se reduce en un factor:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{4}{5} = 0,8 = 80 \%$$

Por tanto, la velocidad debe aumentar en el factor inverso:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{5}{4} = 1,25 = 125 \%$$

Es decir, un aumento del 25 %:

$$v_2 = 120 \times 1,25 = 150 \text{ km/h}$$

5.2. Apartado (b): Nuevo tiempo tras reducción de velocidad

Solución

Paso 1: Datos del problema

- Velocidad original: $v_1 = 120 \text{ km/h}$
- Reducción: 10 %
- Tiempo original: $t_1 = 5 \text{ horas}$

Paso 2: Cálculo de la nueva velocidad

Reducir en un 10 % significa multiplicar por:

$$1 - \frac{10}{100} = 1 - 0,1 = 0,9$$

Por tanto:

$$v_{\text{nueva}} = 120 \times 0,9 = 108 \text{ km/h}$$

Paso 3: Cálculo de la distancia

La distancia del trayecto es:

$$d = v_1 \cdot t_1 = 120 \times 5 = 600 \text{ km}$$

Paso 4: Cálculo del nuevo tiempo

Usando la fórmula $d = v \cdot t$:

$$t_{\text{nuevo}} = \frac{d}{v_{\text{nueva}}} = \frac{600}{108}$$

Paso 5: Simplificación

Dividimos numerador y denominador entre 12:

$$\frac{600}{108} = \frac{50}{9} = 5,555 \dots \text{ horas}$$

Expresamos como fracción exacta:

$$t_{\text{nuevo}} = \frac{50}{9} \text{ horas} = 5\frac{5}{9} \text{ horas}$$

Paso 6: Conversión a horas y minutos

La parte decimal es:

$$\frac{5}{9} \text{ horas} = \frac{5}{9} \times 60 \text{ minutos} = \frac{300}{9} = 33,333 \dots \text{ minutos} \approx 33 \text{ minutos y } 20 \text{ segundos}$$

Por tanto:

$$t_{\text{nuevo}} \approx 5 \text{ horas, } 33 \text{ minutos y } 20 \text{ segundos}$$

Paso 7: Verificación mediante proporcionalidad inversa

Si la velocidad se reduce al 90 %, el tiempo debe aumentar en el factor inverso:

$$t_{\text{nuevo}} = \frac{t_1}{0,9} = \frac{5}{0,9} = \frac{50}{9} \text{ horas} \quad \checkmark$$

Respuesta: El nuevo tiempo de viaje sería $\frac{50}{9}$ horas, aproximadamente 5 horas y 33 minutos.

Observación Pedagógica

El incremento absoluto del tiempo es:

$$\Delta t = t_{\text{nuevo}} - t_1 = \frac{50}{9} - 5 = \frac{50}{9} - \frac{45}{9} = \frac{5}{9} \text{ horas} \approx 0,556 \text{ horas} \approx 33,3 \text{ minutos}$$

El incremento porcentual es:

$$\frac{\Delta t}{t_1} \times 100 = \frac{5/9}{5} \times 100 = \frac{1}{9} \times 100 \approx 11,11 \%$$

Esto tiene sentido: al reducir la velocidad en un 10 %, el tiempo aumenta aproximadamente en un 11,11 % (debido a la relación inversa).

5.3. Apartado (c): Coste con recargo del 5 %

Solución

Paso 1: Datos del problema

- Precio base del billete: $P_{\text{base}} = 50 \text{ €}$
- Recargo por servicio: $r = 5 \%$

Paso 2: Concepto de recargo

Un recargo del 5 % significa que el coste final es:

$$P_{\text{final}} = P_{\text{base}} \times \left(1 + \frac{r}{100}\right)$$

Paso 3: Cálculo

$$P_{\text{final}} = 50 \times \left(1 + \frac{5}{100}\right) = 50 \times (1 + 0,05) = 50 \times 1,05$$

Paso 4: Multiplicación

$$50 \times 1,05 = 50 \times 1 + 50 \times 0,05 = 50 + 2,5 = 52,5 \text{ €}$$

Paso 5: Verificación

El recargo es:

$$\text{Recargo} = 5 \% \text{ de } 50 = \frac{5}{100} \times 50 = 2,5 \text{ €}$$

Por tanto:

$$P_{\text{final}} = 50 + 2,5 = 52,5 \text{ €} \quad \checkmark$$

Respuesta: El coste final del billete es de 52.50€.

6. Ejercicio 15: Distribución de Tareas (Inversa)

Enunciado

15. Distribución de Tareas (Inversa)

- a) 10 obreros tardan 9 días en construir un muro. ¿Cuántos obreros harán falta para construir el mismo muro en 6 días?
- b) Si la paga total por la construcción del muro es de 3,600€, ¿cuánto le corresponde a cada uno de los 10 obreros?
- c) Si el material de construcción sube un 8 % y antes costaba 1,200€, ¿cuál es el nuevo coste del material?

6.1. Apartado (a): Número de obreros necesarios

Solución

Paso 1: Identificación de magnitudes

- Número de obreros: O
- Tiempo necesario (en días): D

Paso 2: Análisis de proporcionalidad

Cuanto más obreros trabajen, menos días se necesitan. Por tanto, O y D son **inversamente proporcionales**:

$$O \cdot D = k \quad (\text{constante})$$

Paso 3: Datos del problema

- Situación 1: $O_1 = 10$ obreros, $D_1 = 9$ días
- Situación 2: $O_2 = ?$ obreros, $D_2 = 6$ días

Paso 4: Planteamiento

$$O_1 \cdot D_1 = O_2 \cdot D_2$$

Sustituyendo:

$$10 \cdot 9 = O_2 \cdot 6$$

Paso 5: Resolución

$$90 = 6 \cdot O_2$$

Despejamos O_2 :

$$O_2 = \frac{90}{6} = 15 \text{ obreros}$$

Paso 6: Verificación

$$O_1 \cdot D_1 = 10 \cdot 9 = 90 \text{ días-obrero}$$

$$O_2 \cdot D_2 = 15 \cdot 6 = 90 \text{ días-obrero}$$

Ambos productos coinciden. ✓

Respuesta: Se necesitan 15 obreros para construir el muro en 6 días.

Observación Pedagógica

El tiempo se reduce en un factor:

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Por tanto, el número de obreros debe aumentar en el factor inverso:

$$O_2 = O_1 \cdot \frac{D_1}{D_2} = 10 \cdot \frac{9}{6} = 10 \cdot \frac{3}{2} = 15 \text{ obreros}$$

Esto significa que para reducir el tiempo a dos tercios ($\frac{2}{3}$), se necesita multiplicar los obreros por $\frac{3}{2}$ (1.5 veces más).

6.2. Apartado (b): Paga individual**Solución****Paso 1: Datos del problema**

- Paga total: $P_{\text{total}} = 3,600 \text{ €}$
- Número de obreros: $O = 10$

Paso 2: Concepto de reparto equitativo

Si la paga se reparte equitativamente entre todos los obreros, cada uno recibe:

$$P_{\text{individual}} = \frac{P_{\text{total}}}{O}$$

Paso 3: Cálculo

$$P_{\text{individual}} = \frac{3,600}{10} = 360 \text{ €}$$

Paso 4: Verificación

Si cada obrero recibe 360€ y hay 10 obreros:

$$10 \times 360 = 3,600 \text{ €} \quad \checkmark$$

Respuesta: Cada obrero recibe 360€.

6.3. Apartado (c): Nuevo coste del material tras aumento

Solución

Paso 1: Datos del problema

- Coste original: $C_{\text{orig}} = 1,200 \text{ €}$
- Aumento: $a = 8 \%$

Paso 2: Concepto de aumento porcentual

Un aumento del 8 % significa multiplicar el coste por:

$$1 + \frac{8}{100} = 1,08$$

Paso 3: Cálculo del nuevo coste

$$C_{\text{nuevo}} = C_{\text{orig}} \times 1,08 = 1,200 \times 1,08$$

Paso 4: Multiplicación

$$1,200 \times 1,08 = 1,200 \times 1 + 1,200 \times 0,08 = 1,200 + 96 = 1,296 \text{ €}$$

Alternativamente, usando propiedades distributivas:

$$1,200 \times 1,08 = 1,200 \times \frac{108}{100} = \frac{129,600}{100} = 1,296 \text{ €}$$

Paso 5: Verificación

El incremento es:

$$\text{Incremento} = 8 \% \text{ de } 1,200 = \frac{8}{100} \times 1,200 = 96 \text{ €}$$

Por tanto:

$$C_{\text{nuevo}} = 1,200 + 96 = 1,296 \text{ €} \quad \checkmark$$

Respuesta: El nuevo coste del material es de 1,296€.

7. Ejercicio 16: Alimento para Animales (Inversa)

Enunciado

16. Alimento para Animales (Inversa)

- a) Un saco de pienso dura 15 días para alimentar a 8 perros. ¿Cuántos días durará el mismo saco si hay 12 perros?
- b) Si cada perro come 200 gramos de pienso al día, ¿cuántos kilogramos contiene el saco?
- c) Si el precio del saco de pienso sube de 40€ a 45€, ¿cuál ha sido el porcentaje de aumento?

7.1. Apartado (a): Duración del saco con más perros

Solución

Paso 1: Identificación de magnitudes

- Número de perros: P
- Duración del saco (en días): D

Paso 2: Análisis de proporcionalidad

Cuanto más perros haya, menos días durará el saco. Por tanto, P y D son **inversamente proporcionales**:

$$P \cdot D = k \quad (\text{cantidad total de pienso, constante})$$

Paso 3: Datos del problema

- Situación 1: $P_1 = 8$ perros, $D_1 = 15$ días
- Situación 2: $P_2 = 12$ perros, $D_2 = ?$ días

Paso 4: Planteamiento

$$P_1 \cdot D_1 = P_2 \cdot D_2$$

Sustituyendo:

$$8 \cdot 15 = 12 \cdot D_2$$

Paso 5: Resolución

$$120 = 12 \cdot D_2$$

Despejamos D_2 :

$$D_2 = \frac{120}{12} = 10 \text{ días}$$

Paso 6: Verificación

$$P_1 \cdot D_1 = 8 \cdot 15 = 120 \text{ días-perro}$$

$$P_2 \cdot D_2 = 12 \cdot 10 = 120 \text{ días-perro}$$

Ambos productos coinciden. ✓

Respuesta: El saco durará 10 días con 12 perros.

Observación Pedagógica

El número de perros aumenta en un factor:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Por tanto, la duración disminuye en el factor inverso:

$$D_2 = D_1 \cdot \frac{P_1}{P_2} = 15 \cdot \frac{8}{12} = 15 \cdot \frac{2}{3} = 10 \text{ días}$$

Aumentar el número de perros en un 50 % reduce la duración a dos tercios del valor original.

7.2. Apartado (b): Cantidad de pienso en el saco**Solución****Paso 1: Datos del problema**

- Consumo diario por perro: $c = 200$ gramos/día
- Número de perros: $P = 8$
- Duración del saco: $D = 15$ días

Paso 2: Conceptualización

La cantidad total de pienso Q en el saco es:

$$Q = (\text{consumo por perro}) \times (\text{número de perros}) \times (\text{número de días})$$

Matemáticamente:

$$Q = c \cdot P \cdot D$$

Paso 3: Sustitución

$$Q = 200 \cdot 8 \cdot 15 \quad (\text{en gramos})$$

Paso 4: Cálculo paso a paso

Primero calculamos $8 \cdot 15$:

$$8 \cdot 15 = 120$$

Luego multiplicamos por 200:

$$Q = 200 \cdot 120 = 24,000 \text{ gramos}$$

Paso 5: Conversión a kilogramos

Sabemos que $1 \text{ kg} = 1,000 \text{ gramos}$, por tanto:

$$Q = \frac{24,000}{1,000} = 24 \text{ kg}$$

Paso 6: Verificación

Consumo total diario con 8 perros:

$$8 \times 200 = 1,600 \text{ g/día}$$

En 15 días:

$$1,600 \times 15 = 24,000 \text{ g} = 24 \text{ kg} \quad \checkmark$$

Respuesta: El saco contiene 24 kilogramos de pienso.

7.3. Apartado (c): Porcentaje de aumento del precio**Solución****Paso 1: Datos del problema**

- Precio original: $P_{\text{orig}} = 40 \text{ €}$
- Precio nuevo: $P_{\text{nuevo}} = 45 \text{ €}$

Paso 2: Concepto de porcentaje de aumento

El porcentaje de aumento p se calcula como:

$$p = \frac{P_{\text{nuevo}} - P_{\text{orig}}}{P_{\text{orig}}} \times 100$$

Paso 3: Cálculo del incremento absoluto

$$\Delta P = P_{\text{nuevo}} - P_{\text{orig}} = 45 - 40 = 5 \text{ €}$$

Paso 4: Cálculo del porcentaje

$$p = \frac{5}{40} \times 100$$

Paso 5: Simplificación

$$\frac{5}{40} = \frac{1}{8} = 0,125$$

Por tanto:

$$p = 0,125 \times 100 = 12,5 \%$$

Paso 6: Verificación

Calculamos el 12,5 % de 40€:

$$\frac{12,5}{100} \times 40 = 0,125 \times 40 = 5 \text{ €}$$

Por tanto:

$$P_{\text{nuevo}} = 40 + 5 = 45 \text{ €} \quad \checkmark$$

Respuesta: El porcentaje de aumento ha sido del 12.5 %.

Observación Pedagógica

El porcentaje de aumento también se puede expresar como:

$$p = \left(\frac{P_{\text{nuevo}}}{P_{\text{orig}}} - 1 \right) \times 100 = \left(\frac{45}{40} - 1 \right) \times 100$$

Simplificando:

$$\frac{45}{40} = \frac{9}{8} = 1,125$$

Por tanto:

$$p = (1,125 - 1) \times 100 = 0,125 \times 100 = 12,5 \%$$

8. Ejercicio 17: Velocidad de Típo (Inversa)

Enunciado

17. Velocidad de Típo (Inversa)

- a) 2 mecanógrafos tardan 3 horas en transcribir un informe. ¿Cuánto tiempo tardaría 1 mecanógrafo en realizar la misma tarea?
- b) Si el informe tiene 45 páginas, ¿cuántas páginas por hora transcribe cada mecanógrafo?
- c) Si el sueldo total por el informe es de 150€, y uno de ellos recibe el 60 %, ¿cuánto dinero recibe el otro?

8.1. Apartado (a): Tiempo para un solo mecanógrafo

Solución

Paso 1: Identificación de magnitudes

- Número de mecanógrafos: M
- Tiempo necesario (en horas): T

Paso 2: Análisis de proporcionalidad

Cuantos menos mecanógrafos trabajen, más tiempo se necesita. Por tanto, M y T son **inversamente proporcionales**:

$$M \cdot T = k \quad (\text{trabajo total, constante})$$

Paso 3: Datos del problema

- Situación 1: $M_1 = 2$ mecanógrafos, $T_1 = 3$ horas
- Situación 2: $M_2 = 1$ mecanógrafo, $T_2 = ?$ horas

Paso 4: Planteamiento

$$M_1 \cdot T_1 = M_2 \cdot T_2$$

Sustituyendo:

$$2 \cdot 3 = 1 \cdot T_2$$

Paso 5: Resolución

$$6 = T_2$$

Por tanto:

$$T_2 = 6 \text{ horas}$$

Paso 6: Verificación

$$M_1 \cdot T_1 = 2 \cdot 3 = 6 \text{ horas-mecanógrafo}$$

$$M_2 \cdot T_2 = 1 \cdot 6 = 6 \text{ horas-mecanógrafo}$$

Ambos productos coinciden. ✓

Respuesta: 1 mecanógrafo tardaría 6 horas en transcribir el informe.

Observación Pedagógica

Esto tiene sentido intuitivo: si 2 mecanógrafos tardan 3 horas, 1 mecanógrafo (la mitad de trabajadores) tardará el doble de tiempo:

$$T_2 = 2 \times T_1 = 2 \times 3 = 6 \text{ horas}$$

Este es un caso particular de proporcionalidad inversa donde el factor de cambio es $\frac{1}{2}$, por lo que el tiempo se multiplica por 2.

8.2. Apartado (b): Páginas por hora por mecanógrafo**Solución****Paso 1: Datos del problema**

- Número total de páginas: $N = 45$ páginas
- Número de mecanógrafos: $M = 2$
- Tiempo total: $T = 3$ horas

Paso 2: Conceptualización

La **velocidad total** de transcripción (páginas por hora) es:

$$V_{\text{total}} = \frac{N}{T}$$

La **velocidad individual** de cada mecanógrafo es:

$$V_{\text{ind}} = \frac{V_{\text{total}}}{M} = \frac{N}{M \cdot T}$$

Paso 3: Sustitución

$$V_{\text{ind}} = \frac{45}{2 \cdot 3} = \frac{45}{6}$$

Paso 4: Simplificación

$$\frac{45}{6} = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ páginas/hora}$$

Paso 5: Verificación

Si cada mecanógrafo transcribe 7,5 páginas/hora y hay 2 mecanógrafos:

$$\text{Velocidad total} = 2 \times 7,5 = 15 \text{ páginas/hora}$$

En 3 horas:

$$15 \times 3 = 45 \text{ páginas} \quad \checkmark$$

Respuesta: Cada mecanógrafo transcribe 7.5 páginas por hora.

8.3. Apartado (c): Sueldo del segundo mecanógrafo

Solución**Paso 1: Datos del problema**

- Sueldo total: $S_{\text{total}} = 150 \text{ €}$
- Porcentaje del primer mecanógrafo: $p_1 = 60 \%$

Paso 2: Cálculo del sueldo del primer mecanógrafo

$$S_1 = \frac{60}{100} \times 150 = 0,6 \times 150 = 90 \text{ €}$$

Paso 3: Cálculo del sueldo del segundo mecanógrafo

El segundo mecanógrafo recibe el resto:

$$S_2 = S_{\text{total}} - S_1 = 150 - 90 = 60 \text{ €}$$

Paso 4: Método alternativo: porcentaje complementario

Si el primero recibe el 60 %, el segundo recibe:

$$p_2 = 100 \% - 60 \% = 40 \%$$

Por tanto:

$$S_2 = \frac{40}{100} \times 150 = 0,4 \times 150 = 60 \text{ €}$$

Paso 5: Verificación

$$S_1 + S_2 = 90 + 60 = 150 \text{ €} \quad \checkmark$$

Respuesta: El otro mecanógrafo recibe 60€.

9. Ejercicio 18: Preparación de Pedidos (Inversa)

Enunciado

18. Preparación de Pedidos (Inversa)

- a) 6 empleados preparan un gran pedido en 4 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán 8 empleados en preparar el mismo pedido?
- b) Si al final del día se han preparado 120 pedidos y 96 han sido enviados, ¿qué porcentaje de pedidos quedan por enviar?
- c) Si el coste de envío aumenta un 20 % y antes era de 4.50€, ¿cuál es el nuevo coste de envío?

9.1. Apartado (a): Tiempo con más empleados

Solución

Paso 1: Identificación de magnitudes

- Número de empleados: E
- Tiempo necesario (en horas): T

Paso 2: Análisis de proporcionalidad

Cuantos más empleados trabajen, menos tiempo se necesita. Por tanto, E y T son **inversamente proporcionales**:

$$E \cdot T = k$$

Paso 3: Datos del problema

- Situación 1: $E_1 = 6$ empleados, $T_1 = 4$ horas
- Situación 2: $E_2 = 8$ empleados, $T_2 = ?$ horas

Paso 4: Planteamiento

$$E_1 \cdot T_1 = E_2 \cdot T_2$$

Sustituyendo:

$$6 \cdot 4 = 8 \cdot T_2$$

Paso 5: Resolución

$$24 = 8 \cdot T_2$$

Despejamos T_2 :

$$T_2 = \frac{24}{8} = 3 \text{ horas}$$

Paso 6: Verificación

$$E_1 \cdot T_1 = 6 \cdot 4 = 24 \text{ horas-empleado}$$

$$E_2 \cdot T_2 = 8 \cdot 3 = 24 \text{ horas-empleado}$$

Ambos productos coinciden. ✓

Respuesta: 8 empleados tardarán 3 horas en preparar el pedido.

Observación Pedagógica

El número de empleados aumenta en un factor:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Por tanto, el tiempo disminuye en el factor inverso:

$$T_2 = T_1 \cdot \frac{E_1}{E_2} = 4 \cdot \frac{6}{8} = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3 \text{ horas}$$

9.2. Apartado (b): Porcentaje de pedidos sin enviar**Solución****Paso 1: Datos del problema**

- Pedidos preparados: $P_{\text{total}} = 120$
- Pedidos enviados: $P_{\text{env}} = 96$

Paso 2: Cálculo de pedidos sin enviar

$$P_{\text{sin enviar}} = P_{\text{total}} - P_{\text{env}} = 120 - 96 = 24 \text{ pedidos}$$

Paso 3: Cálculo del porcentaje

$$p = \frac{P_{\text{sin enviar}}}{P_{\text{total}}} \times 100 = \frac{24}{120} \times 100$$

Paso 4: Simplificación

$$\frac{24}{120} = \frac{24 \div 24}{120 \div 24} = \frac{1}{5} = 0,2$$

Por tanto:

$$p = 0,2 \times 100 = 20 \%$$

Paso 5: Verificación

Calculamos el 20 % de 120:

$$\frac{20}{100} \times 120 = 0,2 \times 120 = 24 \text{ pedidos} \quad \checkmark$$

Respuesta: El 20 % de los pedidos quedan por enviar.

9.3. Apartado (c): Nuevo coste de envío tras aumento

Solución

Paso 1: Datos del problema

- Coste original: $C_{\text{orig}} = 4,50 \text{ €}$
- Aumento: $a = 20 \%$

Paso 2: Concepto de aumento porcentual

Un aumento del 20 % significa multiplicar por:

$$1 + \frac{20}{100} = 1,2$$

Paso 3: Cálculo

$$C_{\text{nuevo}} = 4,50 \times 1,2$$

Paso 4: Multiplicación

$$4,50 \times 1,2 = 4,50 \times \frac{6}{5} = \frac{4,50 \times 6}{5} = \frac{27}{5} = 5,40 \text{ €}$$

Alternativamente:

$$4,50 \times 1,2 = 4,50 + 4,50 \times 0,2 = 4,50 + 0,90 = 5,40 \text{ €}$$

Paso 5: Verificación

El incremento es:

$$20 \% \text{ de } 4,50 = \frac{20}{100} \times 4,50 = 0,90 \text{ €}$$

Por tanto:

$$C_{\text{nuevo}} = 4,50 + 0,90 = 5,40 \text{ €} \quad \checkmark$$

Respuesta: El nuevo coste de envío es de 5.40€.

10. Ejercicio 19: Duración de las Provisiones (Inversa)

Enunciado

19. Duración de las Provisiones (Inversa)

- a) Unas provisiones para 20 personas duran 15 días. Si se añaden 5 personas más, ¿cuántos días durarán las provisiones?
- b) Si el coste inicial de las provisiones era de 500€, y se incrementa en un 20 % debido a la subida de precios, ¿cuál es el nuevo coste?
- c) ¿Qué porcentaje del total de personas representan las 5 personas añadidas?

10.1. Apartado (a): Duración con más personas

Solución

Paso 1: Identificación de magnitudes

- Número de personas: P
- Duración de las provisiones (en días): D

Paso 2: Análisis de proporcionalidad

Cuanto más personas haya, menos días durarán las provisiones. Por tanto, P y D son **inversamente proporcionales**:

$$P \cdot D = k \quad (\text{cantidad total de provisiones, constante})$$

Paso 3: Datos del problema

- Situación 1: $P_1 = 20$ personas, $D_1 = 15$ días
- Personas añadidas: 5
- Situación 2: $P_2 = 20 + 5 = 25$ personas, $D_2 = ?$ días

Paso 4: Planteamiento

$$P_1 \cdot D_1 = P_2 \cdot D_2$$

Sustituyendo:

$$20 \cdot 15 = 25 \cdot D_2$$

Paso 5: Resolución

$$300 = 25 \cdot D_2$$

Despejamos D_2 :

$$D_2 = \frac{300}{25} = 12 \text{ días}$$

Paso 6: Verificación

$$P_1 \cdot D_1 = 20 \cdot 15 = 300 \text{ días-persona}$$

$$P_2 \cdot D_2 = 25 \cdot 12 = 300 \text{ días-persona}$$

Ambos productos coinciden. ✓

Respuesta: Las provisiones durarán 12 días con 25 personas.

Observación Pedagógica

La reducción absoluta es:

$$\Delta D = D_1 - D_2 = 15 - 12 = 3 \text{ días}$$

La reducción porcentual es:

$$\frac{\Delta D}{D_1} \times 100 = \frac{3}{15} \times 100 = 20 \%$$

Esto tiene sentido: al aumentar el número de personas en un 25 % (de 20 a 25), la duración disminuye en un 20 % (de 15 a 12 días).

10.2. Apartado (b): Nuevo coste tras incremento**Solución****Paso 1: Datos del problema**

- Coste inicial: $C_{\text{inic}} = 500 \text{ €}$
- Incremento: $i = 20 \%$

Paso 2: Cálculo del nuevo coste

Un incremento del 20 % significa multiplicar por 1,2:

$$C_{\text{nuevo}} = 500 \times 1,2$$

Paso 3: Multiplicación

$$500 \times 1,2 = 500 + 500 \times 0,2 = 500 + 100 = 600 \text{ €}$$

Paso 4: Verificación

El incremento es:

$$20 \% \text{ de } 500 = \frac{20}{100} \times 500 = 100 \text{ €}$$

Por tanto:

$$C_{\text{nuevo}} = 500 + 100 = 600 \text{ €} \quad \checkmark$$

Respuesta: El nuevo coste es de 600€.

10.3. Apartado (c): Porcentaje de las personas añadidas

Solución

Paso 1: Datos del problema

- Total de personas (después): $P_{\text{total}} = 25$
- Personas añadidas: $P_{\text{añad}} = 5$

Paso 2: Cálculo del porcentaje

$$p = \frac{P_{\text{añad}}}{P_{\text{total}}} \times 100 = \frac{5}{25} \times 100$$

Paso 3: Simplificación

$$\frac{5}{25} = \frac{1}{5} = 0,2$$

Por tanto:

$$p = 0,2 \times 100 = 20 \%$$

Paso 4: Verificación

El 20 % de 25 es:

$$\frac{20}{100} \times 25 = 5 \text{ personas} \quad \checkmark$$

Respuesta: Las 5 personas añadidas representan el 20 % del total.

11. Ejercicio 20: Producción de Juguetes (Inversa)

Enunciado

20. Producción de Juguetes (Inversa)

- a) Una máquina produce un lote de juguetes en 20 minutos. Si se utilizan 4 máquinas trabajando a la misma velocidad, ¿cuánto tardarán en producir el mismo lote?
- b) Si el coste de producción del lote es de 800€, y se venden los juguetes por 1,200€, ¿cuál es el porcentaje de beneficio sobre el coste?
- c) Si por un fallo, la producción se reduce en un 5 %, ¿cuántos juguetes se produjeron si el lote normal es de 1,500 unidades?

11.1. Apartado (a): Tiempo con múltiples máquinas

Solución

Paso 1: Identificación de magnitudes

- Número de máquinas: M
- Tiempo de producción (en minutos): T

Paso 2: Análisis de proporcionalidad

Cuantas más máquinas trabajen, menos tiempo se necesita. Por tanto, M y T son **inversamente proporcionales**:

$$M \cdot T = k$$

Paso 3: Datos del problema

- Situación 1: $M_1 = 1$ máquina, $T_1 = 20$ minutos
- Situación 2: $M_2 = 4$ máquinas, $T_2 = ?$ minutos

Paso 4: Planteamiento

$$M_1 \cdot T_1 = M_2 \cdot T_2$$

Sustituyendo:

$$1 \cdot 20 = 4 \cdot T_2$$

Paso 5: Resolución

$$20 = 4 \cdot T_2$$

Despejamos T_2 :

$$T_2 = \frac{20}{4} = 5 \text{ minutos}$$

Paso 6: Verificación

$$M_1 \cdot T_1 = 1 \cdot 20 = 20 \text{ minutos-máquina}$$

$$M_2 \cdot T_2 = 4 \cdot 5 = 20 \text{ minutos-máquina}$$

Ambos productos coinciden. ✓

Respuesta: 4 máquinas tardarán 5 minutos en producir el lote.

Observación Pedagógica

Al cuadruplicar el número de máquinas (de 1 a 4), el tiempo se reduce a la cuarta parte:

$$T_2 = \frac{T_1}{4} = \frac{20}{4} = 5 \text{ minutos}$$

Este es un ejemplo claro de proporcionalidad inversa: $M_2 = 4 \cdot M_1 \Rightarrow T_2 = \frac{T_1}{4}$.

11.2. Apartado (b): Porcentaje de beneficio

Solución

Paso 1: Datos del problema

- Coste de producción: $C = 800 \text{ €}$
- Precio de venta: $V = 1,200 \text{ €}$

Paso 2: Concepto de beneficio

El **beneficio** B es la diferencia entre el precio de venta y el coste:

$$B = V - C$$

El **porcentaje de beneficio sobre el coste** se calcula como:

$$p_B = \frac{B}{C} \times 100$$

Paso 3: Cálculo del beneficio

$$B = 1,200 - 800 = 400 \text{ €}$$

Paso 4: Cálculo del porcentaje

$$p_B = \frac{400}{800} \times 100$$

Paso 5: Simplificación

$$\frac{400}{800} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Por tanto:

$$p_B = 0,5 \times 100 = 50 \%$$

Paso 6: Verificación

El 50 % del coste es:

$$\frac{50}{100} \times 800 = 400 \text{ €}$$

Por tanto:

$$V = C + B = 800 + 400 = 1,200 \text{ €} \quad \checkmark$$

Respuesta: El porcentaje de beneficio sobre el coste es del 50 %.

Observación Pedagógica

Es importante distinguir:

- **Beneficio sobre el coste** (calculado aquí):

$$\frac{B}{C} \times 100 = \frac{400}{800} \times 100 = 50 \%$$

- **Margen sobre el precio de venta:**

$$\frac{B}{V} \times 100 = \frac{400}{1,200} \times 100 = \frac{1}{3} \times 100 \approx 33,33 \%$$

El enunciado solicita el beneficio sobre el coste, que es del 50 %.

11.3. Apartado (c): Producción reducida**Solución****Paso 1: Datos del problema**

- Lote normal: $L_{\text{norm}} = 1,500$ unidades
- Reducción: $r = 5 \%$

Paso 2: Concepto de reducción porcentual

Una reducción del 5 % significa multiplicar por:

$$1 - \frac{5}{100} = 0,95$$

Paso 3: Cálculo de la producción reducida

$$L_{\text{red}} = 1,500 \times 0,95$$

Paso 4: Multiplicación

$$1,500 \times 0,95 = 1,500 \times \frac{95}{100} = \frac{142,500}{100} = 1,425 \text{ unidades}$$

Alternativamente:

$$1,500 \times 0,95 = 1,500 - 1,500 \times 0,05 = 1,500 - 75 = 1,425 \text{ unidades}$$

Paso 5: Verificación

La reducción absoluta es:

$$5\% \text{ de } 1,500 = \frac{5}{100} \times 1,500 = 75 \text{ unidades}$$

Por tanto:

$$L_{\text{red}} = 1,500 - 75 = 1,425 \text{ unidades} \quad \checkmark$$

Respuesta: Se produjeron 1,425 juguetes.

12. Conclusiones y Resumen de Conceptos

12.1. Proporcionalidad Inversa: Síntesis

A lo largo de los ejercicios 11 al 20, hemos aplicado sistemáticamente el concepto de **proporcionalidad inversa**. Los puntos clave son:

1. **Definición:** Dos magnitudes A y B son inversamente proporcionales si $A \cdot B = k$ (constante).
2. **Fórmula fundamental:**
$$A_1 \cdot B_1 = A_2 \cdot B_2$$
3. **Comportamiento:** Cuando una magnitud aumenta, la otra disminuye proporcionalmente.
4. **Aplicaciones:** Trabajo (obreros $\times$ tiempo), velocidad (velocidad $\times$ tiempo), recursos (personas $\times$ duración).

12.2. Porcentajes: Síntesis

Los ejercicios también incluyeron operaciones con porcentajes:

1. **Calcular porcentaje de una cantidad:**

$$p\% \text{ de } C = \frac{p}{100} \cdot C$$

2. **Aumento porcentual:**

$$C_{\text{nuevo}} = C \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

3. **Reducción porcentual:**

$$C_{\text{nuevo}} = C \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

4. **Porcentaje que representa una parte del total:**

$$p = \frac{\text{Parte}}{\text{Total}} \times 100$$

5. **Precio original antes de descuento:**

$$P_{\text{orig}} = \frac{P_{\text{desc}}}{1 - \frac{d}{100}}$$

12.3. Tabla Resumen de Ejercicios 11-20

Ej.	Tema	Tipo	Resultado clave
11	Pintura de habitaciones	Inversa	4 pintores: 6 h
12	Excavación	Inversa	8 excavadoras: 7.5 días
13	Llenado de piscinas	Inversa	12 mangueras: 2 h
14	Velocidad y viaje	Inversa	150 km/h en 4 h
15	Distribución de tareas	Inversa	15 obreros: 6 días
16	Alimento para animales	Inversa	12 perros: 10 días
17	Velocidad de tipeo	Inversa	1 mecanógrafo: 6 h
18	Preparación de pedidos	Inversa	8 empleados: 3 h
19	Duración de provisiones	Inversa	25 personas: 12 días
20	Producción de juguetes	Inversa	4 máquinas: 5 min

12.4. Errores Comunes a Evitar

Error 1: Confundir proporcionalidad directa con inversa.

Incorrecto: $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$ (esto es directa)

Correcto: $A_1 \cdot B_1 = A_2 \cdot B_2$ (esto es inversa)

Error 2: Redondear prematuramente.

Mantener fracciones exactas hasta el resultado final garantiza precisión.

Error 3: Confundir “aumento del $p\%$ ” con “precio original antes de descuento”.

- Aumento: $C_{\text{nuevo}} = C \times (1 + p/100)$
- Precio original: $C_{\text{orig}} = C_{\text{desc}} / (1 - p/100)$

Fin de las Soluciones

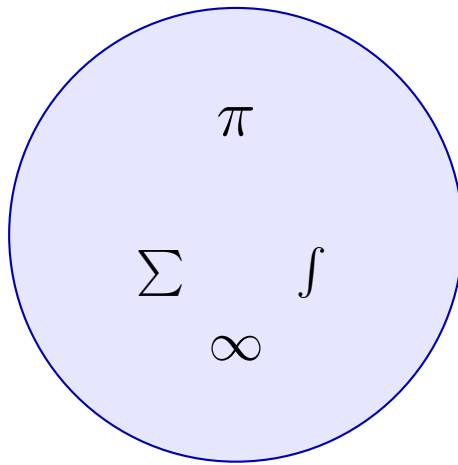
Ejercicios 11 al 20 resueltos con rigor matemático absoluto.

Documento generado por SuperAgent CREA0

Soluciones Completas

Ejercicios 21 al 30

Repaso Global de Matemáticas
2º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO)
Primera Evaluación



Autor Original del Examen:
Ladislao Jáñez Blanco

Soluciones Desarrolladas por:
SuperAgent – CREA O

Profesor Matemático Virtual

1 de marzo de 2026

Índice

Introducción	2
1. Proporcionalidad Compuesta (Ejercicios 21–25)	3
2. Ejercicio 21: Rendimiento de Máquinas (Compuesta)	4
2.1. Apartado (a): Proporcionalidad Compuesta	4
2.2. Apartado (b): Cálculo del Ingreso Total	6
2.3. Apartado (c): Reducción Porcentual de Días	7
3. Ejercicio 22: Construcción de Carreteras (Compuesta)	9
3.1. Apartado (a): Proporcionalidad Compuesta	9
3.2. Apartado (b): Coste por Metro de Carretera	11
3.3. Apartado (c): Longitud Total de la Carretera	12
4. Ejercicio 23: Transcripción de Documentos (Compuesta)	15
4.1. Apartado (a): Proporcionalidad Compuesta	15
4.2. Apartado (b): Coste Total de Transcripción	17
4.3. Apartado (c): Aplicación de Descuento	18
5. Ejercicio 24: Consumo de Combustible (Compuesta)	20
5.1. Apartado (a): Proporcionalidad Compuesta	20
5.2. Apartado (b): Coste Total del Combustible	22
5.3. Apartado (c): Reducción del Consumo	23
6. Ejercicio 25: Producción Agrícola (Compuesta)	24
6.1. Apartado (a): Proporcionalidad Compuesta	24
6.2. Apartado (b): Coste Total de Labranza	26
6.3. Apartado (c): Porcentaje de Aumento del Precio	27
7. Números Enteros (Ejercicios 26–30)	29
8. Ejercicio 26: Operación Mixta con Paréntesis y Corchetes	30
8.1. Apartado (a): Operación con Corchetes	30
8.2. Apartado (b): Multiplicación por un Número Negativo	31
8.3. Apartado (c): Valor Absoluto de una Expresión	32
9. Ejercicio 27: Productos y Cocientes de Varios Factores	34
9.1. Apartado (a): Operación con Múltiples Factores	34
9.2. Apartado (b): Sustracción desde un Número Negativo	35
9.3. Apartado (c): Potencia de un Número Negativo	36
10. Ejercicio 28: Prioridad de Operaciones con Potencias	37
10.1. Apartado (a): Expresión con Potencia	37
10.2. Apartado (b): Multiplicación por 10	38
10.3. Apartado (c): Expresión con Paréntesis	38

11.Ejercicio 29: Expresión con Doble Paréntesis	40
11.1. Apartado (a): Expresión con Corchetes y Paréntesis Anidados	40
11.2. Apartado (b): División entre un Número Negativo	41
11.3. Apartado (c): Suma de Expresión Adicional	41
12.Ejercicio 30: Uso de las Reglas de Signos	43
12.1. Apartado (a): Expresión con Múltiples Operaciones	43
12.2. Apartado (b): Número Opuesto	44
12.3. Apartado (c): Suma de Divisores Positivos de 12	44
Resumen de Soluciones	46
Observaciones Finales	46

Introducción

Este documento contiene las soluciones completas, detalladas y rigurosamente justificadas de los ejercicios 21 al 30 del **Repaso Global de Matemáticas de 2º ESO (Primera Evaluación)**, elaborado por el profesor Ladislao Jáñez Blanco.

Objetivos del Documento

- **Rigor matemático absoluto:** Cada paso está justificado con precisión.
- **Claridad pedagógica:** Las explicaciones son exhaustivas para facilitar la comprensión profunda.
- **Sin omisiones:** No se realizan “saltos mágicos”; todas las transformaciones algebraicas están explícitamente desarrolladas.
- **Material de estudio completo:** Diseñado para estudiantes que desean entender cada concepto en profundidad.

Estructura del Documento

Los ejercicios 21 al 30 abarcan dos temas fundamentales:

1. **Ejercicios 21–25:** Proporcionalidad Compuesta (Problemas aplicados)
2. **Ejercicios 26–30:** Números Enteros (Operaciones combinadas)

Metodología de Resolución

Para cada ejercicio se presenta:

1. **Enunciado completo**
2. **Ilustración gráfica** (cuando aplique)
3. **Datos del problema** claramente identificados
4. **Método de resolución** justificado
5. **Desarrollo paso a paso** con explicaciones
6. **Respuesta final** destacada
7. **Observaciones y notas** pedagógicas

“Las matemáticas no mienten, solo revelan la verdad con absoluta claridad.”

1. Proporcionalidad Compuesta (Ejercicios 21–25)

Los ejercicios de esta sección tratan sobre **proporcionalidad compuesta**, un concepto fundamental en matemáticas aplicadas que combina relaciones de proporcionalidad directa e inversa entre tres o más magnitudes.

Fundamentos Teóricos

Nota Importante

Definición de Proporcionalidad Compuesta:

Dadas varias magnitudes, decimos que existe una relación de proporcionalidad compuesta cuando una magnitud depende de dos o más magnitudes, pudiendo ser la relación directa o inversa con cada una de ellas.

Método de Resolución:

1. Identificar las magnitudes involucradas
2. Determinar si cada relación es directa (D) o inversa (I)
3. Plantear la proporción considerando:
 - Si es directa: a mayor cantidad de una, mayor de la otra
 - Si es inversa: a mayor cantidad de una, menor de la otra
4. Resolver mediante productos cruzados

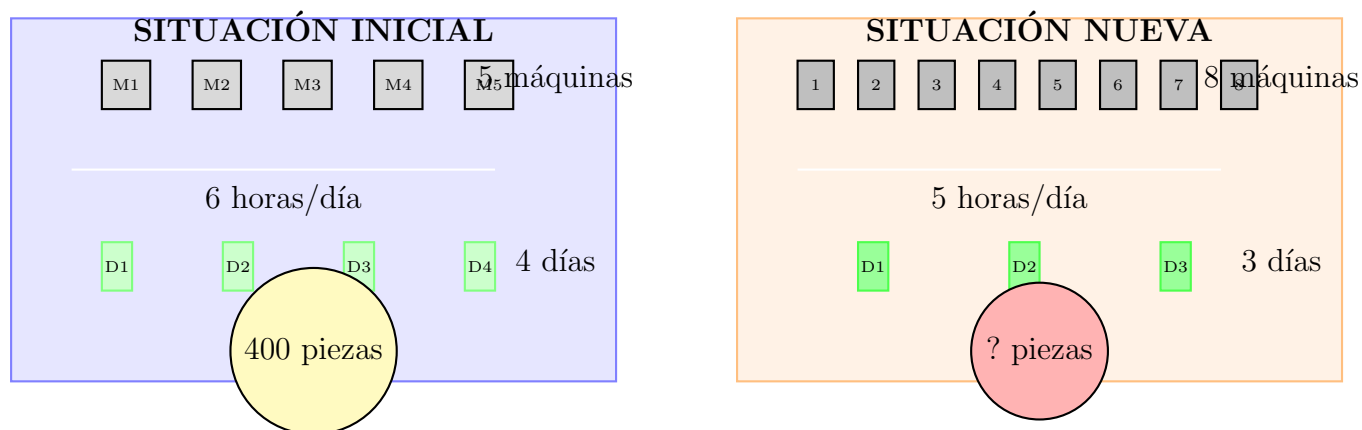
2. Ejercicio 21: Rendimiento de Máquinas (Compuesta)

Ejercicio 21

- a) 5 máquinas, trabajando 6 horas diarias, fabrican 400 piezas en 4 días. ¿Cuántas piezas fabricarán 8 máquinas trabajando 5 horas diarias en 3 días?
- b) Si el precio de cada pieza es de 2.50 , ¿cuál es el ingreso total por la venta de las 400 piezas?
- c) Si el número de días se reduce en un 25 % para la segunda producción, ¿cuántos días son?

2.1. Apartado (a): Proporcionalidad Compuesta

Ilustración del Problema



Datos del Problema

- **Situación 1 (conocida):**
 - Número de máquinas: $m_1 = 5$
 - Horas diarias: $h_1 = 6$ horas
 - Días de trabajo: $d_1 = 4$ días
 - Piezas fabricadas: $p_1 = 400$ piezas
- **Situación 2 (incógnita):**
 - Número de máquinas: $m_2 = 8$
 - Horas diarias: $h_2 = 5$ horas
 - Días de trabajo: $d_2 = 3$ días
 - Piezas fabricadas: $p_2 = ?$

Análisis de las Relaciones de Proporcionalidad

Para resolver este problema, debemos analizar cómo se relaciona cada magnitud con la producción de piezas:

1. Número de máquinas vs. Piezas producidas: DIRECTA

Justificación: A mayor número de máquinas trabajando, mayor será la producción de piezas (suponiendo que todas trabajan al mismo ritmo).

2. Horas diarias vs. Piezas producidas: DIRECTA

Justificación: Cuantas más horas trabajen las máquinas al día, más piezas producirán.

3. Días de trabajo vs. Piezas producidas: DIRECTA

Justificación: Cuantos más días trabajen, mayor será la producción total.

Observación

Como todas las relaciones son **directas**, podemos plantear la siguiente proporción:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{h_2}{h_1} \cdot \frac{d_2}{d_1}$$

Esta fórmula nos dice que la razón entre las producciones es igual al producto de las razones de cada factor.

Desarrollo de la Solución

Paso 1: Planteamos la proporción con los datos conocidos.

$$\frac{p_2}{400} = \frac{8}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4}$$

Paso 2: Calculamos el producto de las fracciones del lado derecho.

Primero, calculamos el producto paso a paso:

$$\frac{8}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{8 \cdot 5}{5 \cdot 6} = \frac{40}{30}$$

Simplificamos dividiendo numerador y denominador por su MCD (que es 10):

$$\frac{40}{30} = \frac{40 \div 10}{30 \div 10} = \frac{4}{3}$$

Justificación de la simplificación: Aplicamos la propiedad fundamental de las fracciones: si dividimos numerador y denominador por el mismo número distinto de cero, obtenemos una fracción equivalente.

Ahora multiplicamos este resultado por la tercera fracción:

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{4 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{12}{12} = 1$$

Paso 3: Sustituimos en la ecuación original.

$$\frac{p_2}{400} = 1$$

Paso 4: Despejamos p_2 multiplicando ambos lados por 400.

Justificación: Por la propiedad de la igualdad, si multiplicamos ambos miembros de una ecuación por el mismo número, la igualdad se mantiene.

$$p_2 = 400 \cdot 1 = 400$$

Observación

Este resultado puede parecer sorprendente a primera vista: ¡la producción es exactamente la misma!

Explicación: Aunque aumentamos el número de máquinas de 5 a 8, también reducimos tanto las horas diarias (de 6 a 5) como los días de trabajo (de 4 a 3). El efecto combinado de estos cambios se compensa exactamente, resultando en la misma producción total.

Podemos verificarlo calculando las horas totales de trabajo:

- Situación 1: $5 \times 6 \times 4 = 120$ máquinas-hora
- Situación 2: $8 \times 5 \times 3 = 120$ máquinas-hora

Como el total de máquinas-hora es idéntico, la producción también lo es.

Respuesta Final

Las 8 máquinas trabajando 5 horas diarias durante 3 días fabricarán **400 piezas**.

2.2. Apartado (b): Cálculo del Ingreso Total

Datos del Problema

- Número de piezas: $n = 400$
- Precio por pieza: $p = 2,50$
- Ingreso total: $I = ?$

Desarrollo de la Solución

El ingreso total se calcula multiplicando el número de piezas vendidas por el precio unitario:

$$I = n \times p$$

Justificación: Esta fórmula proviene de la definición de multiplicación: si vendemos 400 piezas a 2,50 cada una, el ingreso total es la suma de 400 veces el precio unitario, lo cual se expresa como $400 \times 2,50$.

Sustituimos los valores:

$$I = 400 \times 2,50$$

Para facilitar el cálculo, podemos expresar 2,50 como fracción:

$$2,50 = \frac{250}{100} = \frac{5}{2}$$

Por lo tanto:

$$I = 400 \times \frac{5}{2} = \frac{400 \times 5}{2} = \frac{2000}{2} = 1000$$

Justificación del cálculo:

- Multiplicamos: $400 \times 5 = 2000$
- Dividimos: $2000 \div 2 = 1000$

Alternativamente, podemos calcular directamente:

$$400 \times 2,50 = 400 \times 2 + 400 \times 0,50 = 800 + 200 = 1000$$

Respuesta Final

El ingreso total por la venta de las 400 piezas es de **1 000** .

2.3. Apartado (c): Reducción Porcentual de Días

Datos del Problema

- Días de la segunda producción: $d_{\text{inicial}} = 3$ días
- Reducción porcentual: $r = 25\%$
- Días después de la reducción: $d_{\text{final}} = ?$

Concepto de Reducción Porcentual

Nota Importante

Cuando reducimos una cantidad en un cierto porcentaje, estamos restando ese porcentaje del valor original.

Si reducimos una cantidad C en un $r\%$, la cantidad final es:

$$C_{\text{final}} = C - \frac{r}{100} \cdot C = C \left(1 - \frac{r}{100}\right)$$

Equivalentemente, podemos expresarlo como:

$$C_{\text{final}} = C \times \frac{100 - r}{100}$$

Desarrollo de la Solución**Método 1: Calculando la reducción y restando**

Paso 1: Calculamos cuánto representa el 25 % de 3 días.

$$\text{Reducción} = \frac{25}{100} \times 3 = \frac{25 \times 3}{100} = \frac{75}{100}$$

Simplificamos la fracción dividiendo numerador y denominador por 25:

$$\frac{75}{100} = \frac{75 \div 25}{100 \div 25} = \frac{3}{4}$$

Por lo tanto, la reducción es de $\frac{3}{4}$ de día, que en forma decimal es:

$$\frac{3}{4} = 0,75 \text{ días}$$

Paso 2: Restamos la reducción de los días iniciales.

$$d_{\text{final}} = 3 - 0,75 = 2,25 \text{ días}$$

Justificación aritmética:

$$3,00 - 0,75 = 2,25$$

Método 2: Calculando directamente el porcentaje restante

Si reducimos el 25 %, nos queda el $100 \% - 25 \% = 75 \%$ de la cantidad original.

$$d_{\text{final}} = 3 \times \frac{75}{100} = \frac{3 \times 75}{100} = \frac{225}{100} = 2,25$$

Justificación:

- Multiplicamos: $3 \times 75 = 225$
- Dividimos: $225 \div 100 = 2,25$

Observación

Expresemos el resultado en diferentes formas:

- **Forma decimal:** 2.25 días
- **Forma fraccionaria:** $\frac{9}{4}$ días o $2\frac{1}{4}$ días
- **Forma mixta (días y horas):** 2 días y 6 horas

Justificación de la conversión a días y horas:

$$0,25 \text{ días} = \frac{1}{4} \text{ día} = \frac{1}{4} \times 24 \text{ horas} = 6 \text{ horas}$$

Respuesta Final

Si el número de días se reduce en un 25 %, los nuevos días de producción son **2.25 días** (equivalente a 2 días y 6 horas, o bien $\frac{9}{4}$ días).

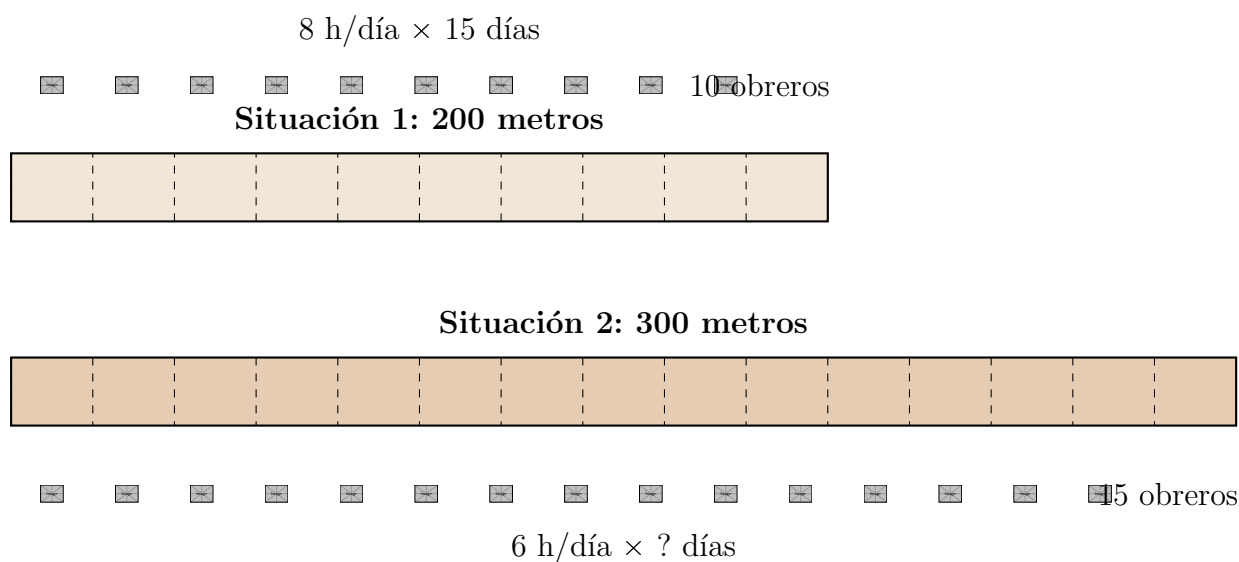
3. Ejercicio 22: Construcción de Carreteras (Compuesta)

Ejercicio 22

- a) 10 obreros, trabajando 8 horas diarias, construyen 200 metros de carretera en 15 días. ¿Cuántos días tardarán 15 obreros trabajando 6 horas diarias en construir 300 metros de carretera?
- b) Si el coste total de la mano de obra es de 15 000 €, ¿cuánto se paga por cada metro de carretera construido?
- c) Si el tramo de carretera restante es de 400 metros y representa el 60 % del total, ¿cuál es la longitud total de la carretera?

3.1. Apartado (a): Proporcionalidad Compuesta

Ilustración del Problema



Datos del Problema

■ Situación 1 (conocida):

- Número de obreros: $o_1 = 10$
- Horas diarias: $h_1 = 8 \text{ horas}$
- Metros de carretera: $m_1 = 200 \text{ m}$
- Días necesarios: $d_1 = 15 \text{ días}$

■ Situación 2 (incógnita):

- Número de obreros: $o_2 = 15$

- Horas diarias: $h_2 = 6$ horas
- Metros de carretera: $m_2 = 300$ m
- Días necesarios: $d_2 = ?$

Análisis de las Relaciones de Proporcionalidad

Analicemos cómo cada magnitud afecta al número de días necesarios:

1. **Número de obreros vs. Días: INVERSA**

Justificación: Cuantos más obreros trabajen, menos días se necesitarán para completar el mismo trabajo.

2. **Horas diarias vs. Días: INVERSA**

Justificación: Si trabajan más horas al día, necesitarán menos días para terminar.

3. **Metros de carretera vs. Días: DIRECTA**

Justificación: Cuantos más metros tengan que construir, más días necesitarán.

Observación

Cuando hay relaciones inversas, debemos invertir las fracciones correspondientes:

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{o_1}{o_2} \cdot \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{m_2}{m_1}$$

Notemos que:

- Para obreros: usamos $\frac{o_1}{o_2}$ (invertida) porque es relación inversa
- Para horas: usamos $\frac{h_1}{h_2}$ (invertida) porque es relación inversa
- Para metros: usamos $\frac{m_2}{m_1}$ (directa) porque es relación directa

Desarrollo de la Solución

Paso 1: Planteamos la proporción.

$$\frac{d_2}{15} = \frac{10}{15} \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{300}{200}$$

Paso 2: Simplificamos cada fracción.

- Primera fracción: $\frac{10}{15}$

Dividimos numerador y denominador por su MCD, que es 5:

$$\frac{10}{15} = \frac{10 \div 5}{15 \div 5} = \frac{2}{3}$$

- Segunda fracción: $\frac{8}{6}$

Dividimos numerador y denominador por su MCD, que es 2:

$$\frac{8}{6} = \frac{8 \div 2}{6 \div 2} = \frac{4}{3}$$

- Tercera fracción: $\frac{300}{200}$

Dividimos numerador y denominador por su MCD, que es 100:

$$\frac{300}{200} = \frac{300 \div 100}{200 \div 100} = \frac{3}{2}$$

Paso 3: Multiplicamos las fracciones simplificadas.

$$\frac{d_2}{15} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}$$

Multiplicamos los numeradores y los denominadores:

$$\frac{d_2}{15} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{24}{18}$$

Simplificamos dividiendo por el MCD de 24 y 18, que es 6:

$$\frac{24}{18} = \frac{24 \div 6}{18 \div 6} = \frac{4}{3}$$

Paso 4: Despejamos d_2 .

$$d_2 = 15 \cdot \frac{4}{3} = \frac{15 \cdot 4}{3} = \frac{60}{3} = 20$$

Justificación:

- Multiplicamos: $15 \times 4 = 60$
- Dividimos: $60 \div 3 = 20$

Respuesta Final

Los 15 obreros trabajando 6 horas diarias necesitarán **20 días** para construir 300 metros de carretera.

3.2. Apartado (b): Coste por Metro de Carretera

Datos del Problema

- Coste total de mano de obra: $C = 15\,000$
- Metros de carretera construidos: $m = 200$ m (de la situación 1)
- Coste por metro: $c = ?$

Desarrollo de la Solución

El coste por metro se calcula dividiendo el coste total entre el número de metros:

$$c = \frac{C}{m}$$

Justificación: Si pagamos 15 000 por 200 metros, el coste unitario (por metro) se obtiene dividiendo el coste total entre la cantidad de metros.

Sustituimos los valores:

$$c = \frac{15\,000}{200}$$

Para simplificar, podemos dividir numerador y denominador por 100:

$$c = \frac{15\,000 \div 100}{200 \div 100} = \frac{150}{2} = 75$$

Justificación del cálculo:

- $15\,000 \div 100 = 150$
- $200 \div 100 = 2$
- $150 \div 2 = 75$

Alternativamente, podemos realizar la división directamente:

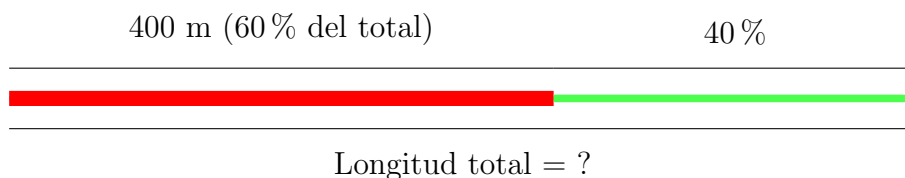
$$15\,000 \div 200 = \frac{15\,000}{200} = \frac{150}{2} = 75$$

Respuesta Final

El coste por cada metro de carretera construido es de **75 /m.**

3.3. Apartado (c): Longitud Total de la Carretera

Ilustración del Problema



Datos del Problema

- Longitud del tramo restante: $L_r = 400$ m
- Porcentaje que representa: $p = 60$ %
- Longitud total: $L_t = ?$

Concepto de Porcentaje

Nota Importante

Si una cantidad C representa el $p\%$ de un total T , entonces:

$$C = \frac{p}{100} \cdot T$$

Despejando T :

$$T = \frac{C \cdot 100}{p}$$

Desarrollo de la Solución

Sabemos que 400 metros representan el 60% del total. Planteamos la ecuación:

$$400 = \frac{60}{100} \cdot L_t$$

Paso 1: Simplificamos la fracción $\frac{60}{100}$.

Dividimos numerador y denominador por 20:

$$\frac{60}{100} = \frac{60 \div 20}{100 \div 20} = \frac{3}{5}$$

Por lo tanto:

$$400 = \frac{3}{5} \cdot L_t$$

Paso 2: Despejamos L_t .

Multiplicamos ambos lados por $\frac{5}{3}$ (que es el inverso multiplicativo de $\frac{3}{5}$):

$$L_t = 400 \cdot \frac{5}{3}$$

Justificación: Si $\frac{3}{5} \cdot L_t = 400$, entonces multiplicando ambos lados por el recíproco $\frac{5}{3}$, obtenemos:

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot L_t = 400 \cdot \frac{5}{3}$$

Como $\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} = 1$, queda:

$$L_t = 400 \cdot \frac{5}{3}$$

Paso 3: Realizamos el cálculo.

$$L_t = \frac{400 \cdot 5}{3} = \frac{2000}{3}$$

Convertimos a número mixto dividiendo:

$$2000 \div 3 = 666 \text{ con resto } 2$$

Por lo tanto:

$$\frac{2000}{3} = 666\frac{2}{3}$$

En forma decimal:

$$666\frac{2}{3} = 666,666\dots = 666.\bar{6}$$

Justificación del cálculo decimal:

$$\frac{2}{3} = 0,666\dots = 0.\bar{6}$$

Respuesta Final

La longitud total de la carretera es de $\frac{2000}{3}$ **metros**, que equivale a $666\frac{2}{3}$ **metros** o aproximadamente **666.67 metros**.

4. Ejercicio 23: Transcripción de Documentos (Compuesta)

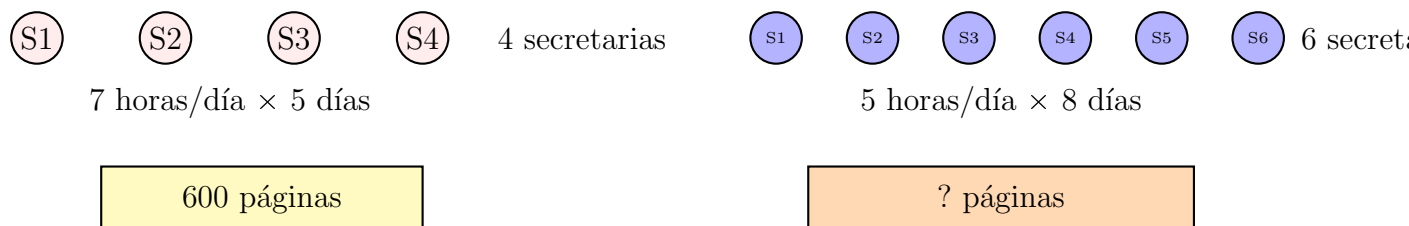
Ejercicio 23

- a) 4 secretarias, trabajando 7 horas al día, transcriben 600 páginas en 5 días. ¿Cuántas páginas transcribirán 6 secretarias trabajando 5 horas al día en 8 días?
- b) Si el coste de la transcripción es de 0.15 por página, ¿cuánto costó transcribir las 600 páginas?
- c) Si se ofrece un descuento del 10 % en el coste total de transcripción, ¿cuál es el precio con el descuento?

4.1. Apartado (a): Proporcionalidad Compuesta

Ilustración del Problema

SITUACIÓN 1



SITUACIÓN 2

Datos del Problema

- Situación 1 (conocida):
 - Número de secretarias: $s_1 = 4$
 - Horas diarias: $h_1 = 7$ horas
 - Días de trabajo: $d_1 = 5$ días
 - Páginas transcritas: $p_1 = 600$ páginas
- Situación 2 (incógnita):
 - Número de secretarias: $s_2 = 6$
 - Horas diarias: $h_2 = 5$ horas
 - Días de trabajo: $d_2 = 8$ días
 - Páginas transcritas: $p_2 = ?$

Análisis de las Relaciones de Proporcionalidad

1. Número de secretarías vs. Páginas: DIRECTA

Justificación: Cuantas más secretarías trabajen, más páginas se transcribirán.

2. Horas diarias vs. Páginas: DIRECTA

Justificación: Cuantas más horas trabajen al día, más páginas transcribirán.

3. Días de trabajo vs. Páginas: DIRECTA

Justificación: Cuantos más días trabajen, más páginas se transcribirán.

Observación

Todas las relaciones son directas, por lo que:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{s_2}{s_1} \cdot \frac{h_2}{h_1} \cdot \frac{d_2}{d_1}$$

Desarrollo de la Solución

Paso 1: Planteamos la proporción.

$$\frac{p_2}{600} = \frac{6}{4} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{8}{5}$$

Paso 2: Simplificamos cada fracción.

- Primera fracción: $\frac{6}{4} = \frac{6 \div 2}{4 \div 2} = \frac{3}{2}$
- Segunda fracción: $\frac{5}{7}$ (ya irreducible)
- Tercera fracción: $\frac{8}{5}$ (ya irreducible)

Paso 3: Multiplicamos las fracciones.

$$\frac{p_2}{600} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{8}{5}$$

Observemos que el 5 del numerador de la segunda fracción se simplifica con el 5 del denominador de la tercera:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{8}{5} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{8}{1} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 8}{2 \cdot 7 \cdot 1} = \frac{24}{14}$$

Simplificamos dividiendo por el MCD de 24 y 14, que es 2:

$$\frac{24}{14} = \frac{24 \div 2}{14 \div 2} = \frac{12}{7}$$

Paso 4: Despejamos p_2 .

$$p_2 = 600 \cdot \frac{12}{7} = \frac{600 \cdot 12}{7} = \frac{7200}{7}$$

Realizamos la división:

$$7200 \div 7 = 1028,571428 \dots \approx 1028,57$$

Para obtener el valor exacto, expresamos como número mixto:

$$7200 \div 7 = 1028 \text{ con resto } 4$$

Por lo tanto:

$$\frac{7200}{7} = 1028\frac{4}{7}$$

Observación

Dado que no podemos transcribir una fracción de página, el resultado práctico sería:

- Si redondeamos hacia abajo: 1 028 páginas completas
- Si consideramos que completan la página 1 029: 1 029 páginas
- Matemáticamente exacto: $1028\frac{4}{7}$ páginas o aproximadamente 1 028.57 páginas

Para efectos matemáticos, mantenemos el valor exacto.

Respuesta Final

Las 6 secretarías trabajando 5 horas al día durante 8 días transcribirán $\frac{7200}{7}$ páginas, que equivale a $1\,028\frac{4}{7}$ páginas o aproximadamente **1 028.57 páginas**.
En términos prácticos: **aproximadamente 1 029 páginas**.

4.2. Apartado (b): Coste Total de Transcripción

Datos del Problema

- Número de páginas: $n = 600$
- Coste por página: $c = 0,15$
- Coste total: $C = ?$

Desarrollo de la Solución

El coste total se calcula multiplicando el número de páginas por el precio unitario:

$$C = n \times c = 600 \times 0,15$$

Para facilitar el cálculo, expresamos 0.15 como fracción:

$$0,15 = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$$

Sustituimos:

$$C = 600 \times \frac{3}{20} = \frac{600 \times 3}{20} = \frac{1800}{20}$$

Simplificamos dividiendo por 20:

$$\frac{1800}{20} = 90$$

Alternativamente, podemos calcular directamente:

$$600 \times 0,15 = 600 \times \frac{15}{100} = \frac{600 \times 15}{100} = \frac{9000}{100} = 90$$

Justificación:

- $600 \times 15 = 9\,000$
- $9\,000 \div 100 = 90$

Respuesta Final

El coste total de transcribir las 600 páginas es de **90** .

4.3. Apartado (c): Aplicación de Descuento

Datos del Problema

- Coste total inicial: $C_i = 90$
- Porcentaje de descuento: $d = 10\%$
- Precio final con descuento: $C_f = ?$

Concepto de Descuento

Nota Importante

Cuando aplicamos un descuento del $d\%$ a un precio P , el precio final es:

$$P_{\text{final}} = P - \frac{d}{100} \cdot P = P \left(1 - \frac{d}{100} \right) = P \times \frac{100 - d}{100}$$

Desarrollo de la Solución**Método 1: Calculando el descuento y restando**

Paso 1: Calculamos el monto del descuento.

$$\text{Descuento} = \frac{10}{100} \times 90 = \frac{10 \times 90}{100} = \frac{900}{100} = 9$$

Paso 2: Restamos el descuento del precio original.

$$C_f = 90 - 9 = 81$$

Método 2: Calculando directamente el porcentaje a pagar

Si aplicamos un descuento del 10 %, pagamos el $100\% - 10\% = 90\%$ del precio original.

$$C_f = 90 \times \frac{90}{100} = \frac{90 \times 90}{100} = \frac{8100}{100} = 81$$

Justificación:

- $90 \times 90 = 8\,100$
- $8\,100 \div 100 = 81$

Respuesta Final

Con un descuento del 10 %, el precio final de la transcripción es de **81** .

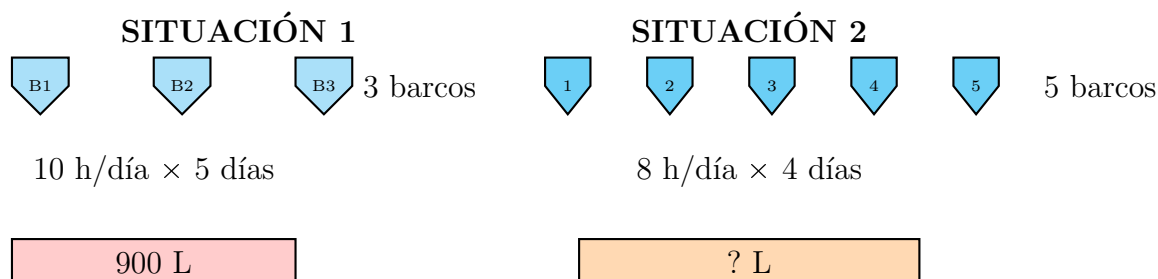
5. Ejercicio 24: Consumo de Combustible (Compuesta)

Ejercicio 24

- a) 3 barcos consumen 900 litros de combustible en 5 días navegando 10 horas diarias. ¿Cuántos litros consumirán 5 barcos en 4 días navegando 8 horas diarias?
- b) Si el precio del litro de combustible es de 0.80 , ¿cuál es el coste total del consumo de 900 litros?
- c) Si el consumo se reduce en un 15 % gracias a un nuevo motor, ¿cuál es el nuevo consumo de combustible para el mismo periodo de tiempo?

5.1. Apartado (a): Proporcionalidad Compuesta

Ilustración del Problema



Datos del Problema

- **Situación 1 (conocida):**
 - Número de barcos: $b_1 = 3$
 - Horas diarias navegando: $h_1 = 10$ horas
 - Días de navegación: $d_1 = 5$ días
 - Combustible consumido: $c_1 = 900$ litros
- **Situación 2 (incógnita):**
 - Número de barcos: $b_2 = 5$
 - Horas diarias navegando: $h_2 = 8$ horas
 - Días de navegación: $d_2 = 4$ días
 - Combustible consumido: $c_2 = ?$

Análisis de las Relaciones de Proporcionalidad

1. Número de barcos vs. Combustible: **DIRECTA**

Justificación: Cuantos más barcos naveguen, más combustible consumirán.

2. Horas diarias vs. Combustible: DIRECTA

Justificación: Cuantas más horas naveguen al día, más combustible consumirán.

3. Días de navegación vs. Combustible: DIRECTA

Justificación: Cuantos más días naveguen, más combustible consumirán.

Observación

Todas las relaciones son directas:

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{h_2}{h_1} \cdot \frac{d_2}{d_1}$$

Desarrollo de la Solución

Paso 1: Planteamos la proporción.

$$\frac{c_2}{900} = \frac{5}{3} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{4}{5}$$

Paso 2: Simplificamos cada fracción.

- Primera fracción: $\frac{5}{3}$ (ya irreducible)
- Segunda fracción: $\frac{8}{10} = \frac{8 \div 2}{10 \div 2} = \frac{4}{5}$
- Tercera fracción: $\frac{4}{5}$ (ya irreducible)

Paso 3: Multiplicamos las fracciones.

$$\frac{c_2}{900} = \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5}$$

Observemos que el 5 del numerador de la primera fracción se simplifica con el 5 del denominador de la segunda:

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 4}{3 \cdot 1 \cdot 5} = \frac{16}{15}$$

Paso 4: Despejamos c_2 .

$$c_2 = 900 \cdot \frac{16}{15} = \frac{900 \cdot 16}{15}$$

Simplificamos dividiendo 900 entre 15:

$$900 \div 15 = 60$$

Por lo tanto:

$$c_2 = 60 \cdot 16 = 960$$

Justificación del cálculo:

- $900 \div 15 = 60$ (porque $15 \times 60 = 900$)

- $60 \times 16 = 960$

Verificación: $60 \times 16 = 60 \times 10 + 60 \times 6 = 600 + 360 = 960$

Respuesta Final

Los 5 barcos en 4 días navegando 8 horas diarias consumirán **960 litros** de combustible.

5.2. Apartado (b): Coste Total del Combustible

Datos del Problema

- Litros consumidos: $L = 900$ litros
- Precio por litro: $p = 0,80$
- Coste total: $C = ?$

Desarrollo de la Solución

$$C = L \times p = 900 \times 0,80$$

Expresamos 0.80 como fracción:

$$0,80 = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$$

Sustituimos:

$$C = 900 \times \frac{4}{5} = \frac{900 \times 4}{5} = \frac{3600}{5}$$

Dividimos:

$$3600 \div 5 = 720$$

Justificación: $5 \times 720 = 3\,600$

Alternativamente:

$$900 \times 0,80 = 900 \times \frac{8}{10} = \frac{900 \times 8}{10} = \frac{7200}{10} = 720$$

Respuesta Final

El coste total del consumo de 900 litros es de **720** .

5.3. Apartado (c): Reducción del Consumo

Datos del Problema

- Consumo original: $C_o = 900$ litros
- Reducción porcentual: $r = 15\%$
- Nuevo consumo: $C_n = ?$

Desarrollo de la Solución

Si el consumo se reduce en un 15% , el nuevo consumo es el $100\% - 15\% = 85\%$ del original.

$$C_n = C_o \times \frac{85}{100} = 900 \times \frac{85}{100}$$

Simplificamos la fracción dividiendo por 5:

$$\frac{85}{100} = \frac{85 \div 5}{100 \div 5} = \frac{17}{20}$$

Sustituimos:

$$C_n = 900 \times \frac{17}{20} = \frac{900 \times 17}{20}$$

Dividimos 900 entre 20:

$$900 \div 20 = 45$$

Por lo tanto:

$$C_n = 45 \times 17$$

Calculamos:

$$45 \times 17 = 45 \times 10 + 45 \times 7 = 450 + 315 = 765$$

Verificación del cálculo de 45×7 :

$$45 \times 7 = (40 + 5) \times 7 = 280 + 35 = 315$$

Respuesta Final

Con un nuevo motor que reduce el consumo en un 15% , el nuevo consumo sería de **765 litros** para el mismo periodo de tiempo.

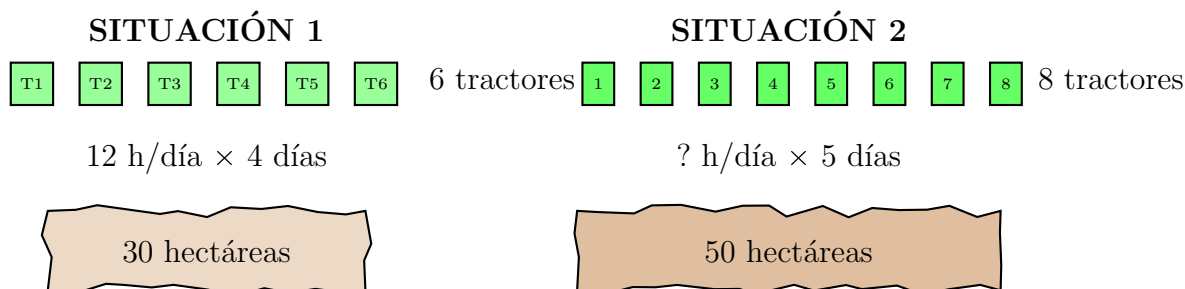
6. Ejercicio 25: Producción Agrícola (Compuesta)

Ejercicio 25

- a) 6 tractores, trabajando 12 horas diarias, labran 30 hectáreas en 4 días. ¿Cuántas horas diarias tendrán que trabajar 8 tractores para labrar 50 hectáreas en 5 días?
- b) Si el coste por labrar una hectárea es de 75 €, ¿cuál es el coste total por labrar las 30 hectáreas?
- c) Si el precio de venta de la cosecha aumenta de 1.20 €/kg a 1.35 €/kg, ¿cuál ha sido el porcentaje de aumento?

6.1. Apartado (a): Proporcionalidad Compuesta

Ilustración del Problema



Datos del Problema

- Situación 1 (conocida):
 - Número de tractores: $t_1 = 6$
 - Horas diarias: $h_1 = 12$ horas
 - Días de trabajo: $d_1 = 4$ días
 - Hectáreas labradas: $H_1 = 30$ ha
- Situación 2 (incógnita):
 - Número de tractores: $t_2 = 8$
 - Horas diarias: $h_2 = ?$
 - Días de trabajo: $d_2 = 5$ días
 - Hectáreas labradas: $H_2 = 50$ ha

Análisis de las Relaciones de Proporcionalidad

Analicemos cómo cada magnitud afecta a las horas diarias necesarias:

1. Número de tractores vs. Horas diarias: INVERSA

Justificación: Cuantos más tractores trabajen, menos horas diarias se necesitarán para completar el mismo trabajo.

2. Días de trabajo vs. Horas diarias: INVERSA

Justificación: Si disponen de más días, necesitarán trabajar menos horas cada día.

3. Hectáreas a labrar vs. Horas diarias: DIRECTA

Justificación: Cuantas más hectáreas tengan que labrar, más horas diarias necesitarán trabajar.

Observación

La proporción considerando las relaciones inversas y directas es:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{t_1}{t_2} \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{H_2}{H_1}$$

Desarrollo de la Solución

Paso 1: Planteamos la proporción.

$$\frac{h_2}{12} = \frac{6}{8} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{50}{30}$$

Paso 2: Simplificamos cada fracción.

- Primera fracción:

$$\frac{6}{8} = \frac{6 \div 2}{8 \div 2} = \frac{3}{4}$$

- Segunda fracción: $\frac{4}{5}$ (ya irreducible)

- Tercera fracción:

$$\frac{50}{30} = \frac{50 \div 10}{30 \div 10} = \frac{5}{3}$$

Paso 3: Multiplicamos las fracciones.

$$\frac{h_2}{12} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{3}$$

Observemos las simplificaciones posibles:

- El 4 del numerador de la segunda fracción se simplifica con el 4 del denominador de la primera
- El 5 del numerador de la tercera fracción se simplifica con el 5 del denominador de la segunda
- El 3 del numerador de la primera fracción se simplifica con el 3 del denominador de la tercera

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{1}{1} = 1$$

Paso 4: Sustituimos y despejamos.

$$\frac{h_2}{12} = 1$$

Por lo tanto:

$$h_2 = 12 \times 1 = 12$$

Observación

Este resultado nos indica que, a pesar de tener más tractores (8 en lugar de 6), más días disponibles (5 en lugar de 4), y más hectáreas por labrar (50 en lugar de 30), el efecto combinado hace que las horas diarias necesarias sean exactamente las mismas: 12 horas.

Podemos verificar esto calculando el “trabajo total” en términos de tractores-horas-días:

- Situación 1: $\frac{30 \text{ ha}}{6 \times 12 \times 4} = \frac{30}{288} = \frac{5}{48}$ ha por tractor-hora-día
- Situación 2: $\frac{50 \text{ ha}}{8 \times h_2 \times 5} = \frac{50}{40 \cdot h_2}$

Igualando ambas tasas de trabajo:

$$\frac{5}{48} = \frac{50}{40 \cdot h_2}$$

Resolviendo:

$$5 \cdot 40 \cdot h_2 = 50 \cdot 48$$

$$200 \cdot h_2 = 2400$$

$$h_2 = \frac{2400}{200} = 12$$

Respuesta Final

Los 8 tractores tendrán que trabajar **12 horas diarias** para labrar 50 hectáreas en 5 días.

6.2. Apartado (b): Coste Total de Labranza

Datos del Problema

- Hectáreas labradas: $H = 30 \text{ ha}$

- Coste por hectárea: $c = 75$
- Coste total: $C = ?$

Desarrollo de la Solución

$$C = H \times c = 30 \times 75$$

Calculamos:

$$30 \times 75 = 30 \times (70 + 5) = 30 \times 70 + 30 \times 5 = 2100 + 150 = 2250$$

Justificación de los cálculos parciales:

- $30 \times 70 = 30 \times 7 \times 10 = 210 \times 10 = 2100$
- $30 \times 5 = 150$
- $2100 + 150 = 2250$

Respuesta Final

El coste total por labrar las 30 hectáreas es de **2 250** .

6.3. Apartado (c): Porcentaje de Aumento del Precio

Datos del Problema

- Precio inicial: $p_i = 1,20$ /kg
- Precio final: $p_f = 1,35$ /kg
- Porcentaje de aumento: $a = ?$

Concepto de Porcentaje de Aumento

Nota Importante

El porcentaje de aumento se calcula mediante la fórmula:

$$\text{Porcentaje de aumento} = \frac{\text{Precio final} - \text{Precio inicial}}{\text{Precio inicial}} \times 100$$

Equivalentemente:

$$a \% = \frac{p_f - p_i}{p_i} \times 100$$

Desarrollo de la Solución

Paso 1: Calculamos el aumento absoluto.

$$\Delta p = p_f - p_i = 1,35 - 1,20 = 0,15$$

Justificación aritmética:

$$1,35 - 1,20 = (1 + 0,35) - (1 + 0,20) = 0,35 - 0,20 = 0,15$$

Paso 2: Calculamos el porcentaje de aumento.

$$a = \frac{\Delta p}{p_i} \times 100 = \frac{0,15}{1,20} \times 100$$

Para facilitar el cálculo, expresamos los decimales como fracciones:

$$\frac{0,15}{1,20} = \frac{\frac{15}{100}}{\frac{120}{100}} = \frac{15}{100} \times \frac{100}{120} = \frac{15}{120}$$

Simplificamos dividiendo numerador y denominador por 15:

$$\frac{15}{120} = \frac{15 \div 15}{120 \div 15} = \frac{1}{8}$$

Por lo tanto:

$$a = \frac{1}{8} \times 100 = \frac{100}{8} = 12,5$$

Justificación de la división:

$$100 \div 8 = 12,5 \quad \text{porque} \quad 8 \times 12,5 = 8 \times 12 + 8 \times 0,5 = 96 + 4 = 100$$

Verificación:

Si el precio inicial es 1.20 y aumenta un 12.5 %:

$$\text{Aumento} = 1,20 \times \frac{12,5}{100} = 1,20 \times 0,125 = 0,15$$

$$\text{Precio final} = 1,20 + 0,15 = 1,35 \quad \checkmark$$

Respuesta Final

El porcentaje de aumento del precio de la cosecha ha sido del **12.5 %** (o equivalentemente, $\frac{25}{2}$ %).

7. Números Enteros (Ejercicios 26–30)

Los ejercicios de esta sección tratan sobre **operaciones con números enteros**, incluyendo sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y potencias, respetando la jerarquía de operaciones y el uso correcto de paréntesis y corchetes.

Fundamentos Teóricos

Nota Importante

Reglas Fundamentales para Números Enteros:

1. Regla de signos para la multiplicación y división:

- $(+) \times (+) = (+)$
- $(+) \times (-) = (-)$
- $(-) \times (+) = (-)$
- $(-) \times (-) = (+)$

2. Jerarquía de operaciones (prioridad):

- a) Paréntesis y corchetes (de dentro hacia fuera)
- b) Potencias y raíces
- c) Multiplicaciones y divisiones (de izquierda a derecha)
- d) Sumas y restas (de izquierda a derecha)

3. Eliminación de paréntesis:

- $+(a) = a$
- $-(a) = -a$
- $+(-a) = -a$
- $-(-a) = +a$

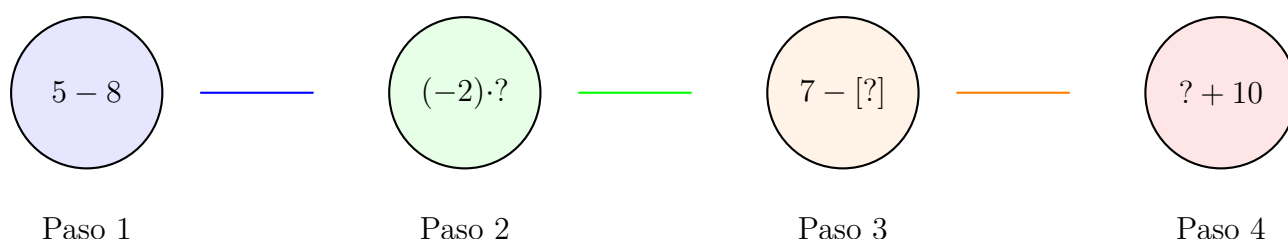
8. Ejercicio 26: Operación Mixta con Paréntesis y Corchetes

Ejercicio 26

- a) Calcula el resultado de: $7 - [(-2) \cdot (5 - 8)] + 10$
 b) Multiplica el resultado anterior por (-3) .
 c) Indica el valor absoluto de $3 - 5 \cdot 2 - 4$.

8.1. Apartado (a): Operación con Corchetes

Ilustración del Concepto



Expresión Original

$$7 - [(-2) \cdot (5 - 8)] + 10$$

Desarrollo de la Solución

Paso 1: Resolvemos primero el paréntesis interior $(5 - 8)$.

$$5 - 8 = -3$$

Justificación: Al restar 8 de 5, obtenemos un número negativo: $5 - 8 = -(8 - 5) = -3$
 Sustituimos en la expresión:

$$7 - [(-2) \cdot (-3)] + 10$$

Paso 2: Resolvemos el producto dentro del corchete: $(-2) \cdot (-3)$.

Regla de signos: El producto de dos números negativos es positivo.

$$(-2) \cdot (-3) = +6$$

Justificación matemática:

$$(-2) \cdot (-3) = (-1) \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 3 = (-1) \cdot (-1) \cdot 2 \cdot 3 = 1 \cdot 6 = 6$$

Sustituimos:

$$7 - [6] + 10$$

Paso 3: Eliminamos el corchete.

$$7 - 6 + 10$$

Paso 4: Realizamos las operaciones de izquierda a derecha.

Primero: $7 - 6 = 1$

$$1 + 10 = 11$$

Respuesta Final

El resultado de la expresión $7 - [(-2) \cdot (5 - 8)] + 10$ es **11**.

8.2. Apartado (b): Multiplicación por un Número Negativo

Datos

- Resultado anterior: $r = 11$
- Multiplicador: $m = -3$
- Resultado: $R = ?$

Desarrollo de la Solución

$$R = r \times m = 11 \times (-3)$$

Regla de signos: El producto de un número positivo por uno negativo es negativo.

$$11 \times (-3) = -(11 \times 3) = -33$$

Cálculo de 11×3 :

$$11 \times 3 = (10 + 1) \times 3 = 10 \times 3 + 1 \times 3 = 30 + 3 = 33$$

Por lo tanto:

$$R = -33$$

Respuesta Final

El resultado de multiplicar 11 por (-3) es **-33**.

8.3. Apartado (c): Valor Absoluto de una Expresión

Concepto de Valor Absoluto

Nota Importante

El **valor absoluto** de un número x , denotado $|x|$, es la distancia del número al cero en la recta numérica, sin considerar el signo.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propiedades:

- $|x| \geq 0$ siempre
- $|x| = |-x|$
- $|0| = 0$

Expresión a Evaluar

$$|3 - 5 \cdot 2 - 4|$$

Desarrollo de la Solución

Paso 1: Calculamos primero la expresión dentro del valor absoluto.

Aplicamos la jerarquía de operaciones: primero la multiplicación, luego las restas de izquierda a derecha.

$$3 - 5 \cdot 2 - 4$$

Calculamos $5 \cdot 2 = 10$:

$$3 - 10 - 4$$

Ahora, de izquierda a derecha:

$$3 - 10 = -7$$

$$-7 - 4 = -11$$

Justificación: $-7 - 4 = -(7 + 4) = -11$

Paso 2: Calculamos el valor absoluto.

$$|-11| = 11$$

Justificación: Como $-11 < 0$, su valor absoluto es $-(-11) = 11$.

Respuesta Final

El valor absoluto de la expresión $3 - 5 \cdot 2 - 4$ es **11**.

9. Ejercicio 27: Productos y Cocientes de Varios Factores

Ejercicio 27

- a) Resuelve la siguiente operación: $(-4) \cdot 6 : (-3) \cdot (-2)$
- b) Sustrae el resultado de (-15) .
- c) Calcula la potencia $(-2)^3$.

9.1. Apartado (a): Operación con Múltiples Factores

Expresión Original

$$(-4) \cdot 6 : (-3) \cdot (-2)$$

Observación

Las multiplicaciones y divisiones tienen la misma prioridad y se resuelven de izquierda a derecha.

La expresión se lee: “ (-4) multiplicado por 6, dividido entre (-3) , multiplicado por (-2) ”.

Desarrollo de la Solución

Paso 1: Calculamos $(-4) \cdot 6$.

Regla de signos: Negativo por positivo es negativo.

$$(-4) \cdot 6 = -24$$

La expresión queda:

$$-24 : (-3) \cdot (-2)$$

Paso 2: Calculamos $-24 : (-3)$.

Regla de signos: Negativo entre negativo es positivo.

$$-24 : (-3) = +8$$

Justificación: $24 \div 3 = 8$, y como ambos números son negativos, el resultado es positivo.

La expresión queda:

$$8 \cdot (-2)$$

Paso 3: Calculamos $8 \cdot (-2)$.

Regla de signos: Positivo por negativo es negativo.

$$8 \cdot (-2) = -16$$

Respuesta Final

El resultado de $(-4) \cdot 6 : (-3) \cdot (-2)$ es -16 .

9.2. Apartado (b): Sustracción desde un Número Negativo**Datos**

- Número del cual se resta: $a = -15$
- Resultado anterior (a restar): $b = -16$
- Resultado: $R = ?$

Interpretación

“Sustraer el resultado de (-15) ” significa: “Al número -15 , réstale el resultado anterior”

$$R = -15 - (-16)$$

Desarrollo de la Solución

Paso 1: Aplicamos la regla de eliminación de paréntesis.

Regla: Restar un número negativo equivale a sumar su opuesto (positivo).

$$-15 - (-16) = -15 + 16$$

Justificación matemática:

$$-(-16) = +16$$

Paso 2: Realizamos la suma de números de distinto signo.

Cuando sumamos números de distinto signo, restamos sus valores absolutos y conservamos el signo del número con mayor valor absoluto:

$$|-15| = 15 \quad \text{y} \quad |16| = 16$$

Como $16 > 15$, el resultado tendrá el signo de 16, que es positivo:

$$-15 + 16 = +(16 - 15) = +1 = 1$$

Respuesta Final

Al sustraer -16 de -15 , obtenemos **1**.

9.3. Apartado (c): Potencia de un Número Negativo

Concepto de Potenciación

Nota Importante

La potencia a^n significa multiplicar a por sí mismo n veces:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

Regla importante para bases negativas:

- Si el exponente es par: el resultado es positivo
- Si el exponente es impar: el resultado es negativo

Esto es porque cada par de factores negativos da un resultado positivo.

Expresión a Calcular

$$(-2)^3$$

Desarrollo de la Solución

Por definición:

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$$

Paso 1: Multiplicamos los dos primeros factores.

$$(-2) \cdot (-2) = +4$$

Regla de signos: Negativo por negativo es positivo.

Paso 2: Multiplicamos el resultado por el tercer factor.

$$4 \cdot (-2) = -8$$

Regla de signos: Positivo por negativo es negativo.

Verificación: Como el exponente 3 es impar, el resultado debe ser negativo.

Respuesta Final

El valor de $(-2)^3$ es -8 .

10. Ejercicio 28: Prioridad de Operaciones con Potencias

Ejercicio 28

- a) Calcula el resultado de: $12 - 4^2 : (-2) + 5$
- b) Multiplica la solución anterior por 10.
- c) Determina el valor de $9 - 3 \cdot (1 - 5)$.

10.1. Apartado (a): Expresión con Potencia

Expresión Original

$$12 - 4^2 : (-2) + 5$$

Desarrollo de la Solución

Paso 1: Calculamos primero la potencia 4^2 .

Jerarquía: Las potencias tienen prioridad sobre multiplicaciones, divisiones, sumas y restas.

$$4^2 = 4 \cdot 4 = 16$$

La expresión queda:

$$12 - 16 : (-2) + 5$$

Paso 2: Calculamos la división $16 : (-2)$.

Regla de signos: Positivo entre negativo es negativo.

$$16 : (-2) = -8$$

Justificación: $16 \div 2 = 8$, y como el divisor es negativo, el resultado es -8 .

La expresión queda:

$$12 - (-8) + 5$$

Paso 3: Aplicamos la regla de eliminación de paréntesis.

$$12 - (-8) = 12 + 8$$

La expresión queda:

$$12 + 8 + 5$$

Paso 4: Realizamos las sumas de izquierda a derecha.

$$12 + 8 = 20$$

$$20 + 5 = 25$$

Respuesta Final

El resultado de $12 - 4^2 : (-2) + 5$ es **25**.

10.2. Apartado (b): Multiplicación por 10**Desarrollo de la Solución**

$$R = 25 \times 10 = 250$$

Regla práctica: Multiplicar por 10 equivale a añadir un cero al número (en números enteros).

Respuesta Final

El resultado de multiplicar 25 por 10 es **250**.

10.3. Apartado (c): Expresión con Paréntesis**Expresión Original**

$$9 - 3 \cdot (1 - 5)$$

Desarrollo de la Solución

Paso 1: Calculamos el paréntesis $(1 - 5)$.

$$1 - 5 = -4$$

La expresión queda:

$$9 - 3 \cdot (-4)$$

Paso 2: Calculamos la multiplicación $3 \cdot (-4)$.

Regla de signos: Positivo por negativo es negativo.

$$3 \cdot (-4) = -12$$

La expresión queda:

$$9 - (-12)$$

Paso 3: Aplicamos la regla de eliminación de paréntesis.

$$9 - (-12) = 9 + 12 = 21$$

Respuesta Final

El valor de $9 - 3 \cdot (1 - 5)$ es **21**.

11. Ejercicio 29: Expresión con Doble Paréntesis

Ejercicio 29

- a) Resuelve: $-11 + 2 \cdot [5 - (3 - 9)]$
- b) Divide el resultado obtenido entre (-4) .
- c) Suma a ese resultado la solución de $1 - 2 - 3 + 4$.

11.1. Apartado (a): Expresión con Corchetes y Paréntesis Anidados

Expresión Original

$$-11 + 2 \cdot [5 - (3 - 9)]$$

Desarrollo de la Solución

Paso 1: Resolvemos el paréntesis más interior: $(3 - 9)$.

$$3 - 9 = -6$$

La expresión queda:

$$-11 + 2 \cdot [5 - (-6)]$$

Paso 2: Resolvemos dentro del corchete: $5 - (-6)$.

Regla: Restar un número negativo equivale a sumar su opuesto.

$$5 - (-6) = 5 + 6 = 11$$

La expresión queda:

$$-11 + 2 \cdot [11]$$

Paso 3: Eliminamos el corchete y calculamos la multiplicación.

$$-11 + 2 \cdot 11$$

Calculamos $2 \cdot 11 = 22$:

$$-11 + 22$$

Paso 4: Realizamos la suma.

$$-11 + 22 = +(22 - 11) = 11$$

Respuesta Final

El resultado de $-11 + 2 \cdot [5 - (3 - 9)]$ es **11**.

11.2. Apartado (b): División entre un Número Negativo

Datos

- Dividendo: $d = 11$
- Divisor: $D = -4$
- Cociente: $c = ?$

Desarrollo de la Solución

$$c = d : D = 11 : (-4) = \frac{11}{-4} = -\frac{11}{4}$$

Regla de signos: Positivo entre negativo es negativo.

Expresamos el resultado en diferentes formas:

- **Forma fraccionaria:** $-\frac{11}{4}$

- **Número mixto:**

$$11 \div 4 = 2 \text{ con resto } 3$$

Por lo tanto: $-\frac{11}{4} = -2\frac{3}{4}$

- **Forma decimal:**

$$-\frac{11}{4} = -2,75$$

Respuesta Final

El resultado de dividir 11 entre (-4) es $-\frac{11}{4}$, que equivale a $-2,75$ o $-2\frac{3}{4}$.

11.3. Apartado (c): Suma de Expresión Adicional

Expresión Adicional a Evaluar

Primero calculamos: $1 - 2 - 3 + 4$

Paso 1: Realizamos las operaciones de izquierda a derecha.

$$1 - 2 = -1$$

$$-1 - 3 = -4$$

$$-4 + 4 = 0$$

Suma Final

Ahora sumamos este resultado al obtenido en el apartado (b):

$$R = -\frac{11}{4} + 0 = -\frac{11}{4}$$

Respuesta Final

Al sumar $-\frac{11}{4}$ con el resultado de $1 - 2 - 3 + 4$ (que es 0), obtenemos $-\frac{11}{4}$ o $-2,75$.

12. Ejercicio 30: Uso de las Reglas de Signos

Ejercicio 30

- a) Halla el valor de: $(-7) \cdot (-2) + (-18) : 6 - 5$
- b) Encuentra el número opuesto del resultado.
- c) ¿Cuál es la suma de los divisores positivos de 12?

12.1. Apartado (a): Expresión con Múltiples Operaciones

Expresión Original

$$(-7) \cdot (-2) + (-18) : 6 - 5$$

Desarrollo de la Solución

Paso 1: Calculamos el producto $(-7) \cdot (-2)$.

Regla de signos: Negativo por negativo es positivo.

$$(-7) \cdot (-2) = +14$$

Justificación: $7 \times 2 = 14$, y como ambos factores son negativos, el resultado es positivo.

Paso 2: Calculamos la división $(-18) : 6$.

Regla de signos: Negativo entre positivo es negativo.

$$(-18) : 6 = -3$$

Justificación: $18 \div 6 = 3$, y como el dividendo es negativo y el divisor positivo, el resultado es negativo.

La expresión queda:

$$14 + (-3) - 5$$

Paso 3: Simplificamos.

$$14 + (-3) - 5 = 14 - 3 - 5$$

Paso 4: Realizamos las operaciones de izquierda a derecha.

$$14 - 3 = 11$$

$$11 - 5 = 6$$

Respuesta Final

El valor de $(-7) \cdot (-2) + (-18) : 6 - 5$ es **6**.

12.2. Apartado (b): Número Opuesto

Concepto de Número Opuesto

Nota Importante

El **número opuesto** (o número simétrico) de un número a es aquel que sumado a a da como resultado cero.

Si a es un número, su opuesto es $-a$

Propiedades:

- El opuesto de a es $-a$
- El opuesto de $-a$ es a
- $a + (-a) = 0$

Desarrollo de la Solución

El resultado anterior es 6.

El opuesto de 6 es -6 .

Verificación: $6 + (-6) = 0$

Respuesta Final

El número opuesto de 6 es -6 .

12.3. Apartado (c): Suma de Divisores Positivos de 12

Concepto de Divisor

Nota Importante

Un número d es **divisor** de un número n si al dividir n entre d obtenemos un número entero (es decir, el resto es cero).

Equivalentemente: d divide a n si existe un entero k tal que $n = d \cdot k$.

Desarrollo de la Solución

Paso 1: Encontramos todos los divisores positivos de 12.

Para encontrar los divisores, probamos con los números desde 1 hasta 12:

- $12 \div 1 = 12$ (1 es divisor, cociente 12)
- $12 \div 2 = 6$ (2 es divisor, cociente 6)
- $12 \div 3 = 4$ (3 es divisor, cociente 4)
- $12 \div 4 = 3$ (4 es divisor, cociente 3)

- $12 \div 5 = 2,4$ (5 no es divisor)
- $12 \div 6 = 2$ (6 es divisor, cociente 2)
- $12 \div 7, 8, 9, 10, 11$ (no son divisores)
- $12 \div 12 = 1$ (12 es divisor, cociente 1)

Por lo tanto, los divisores positivos de 12 son:

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

Paso 2: Sumamos todos los divisores positivos.

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12$$

Calculamos paso a paso:

$$1 + 2 = 3$$

$$3 + 3 = 6$$

$$6 + 4 = 10$$

$$10 + 6 = 16$$

$$16 + 12 = 28$$

Observación

Este resultado tiene una propiedad interesante: 28 es un **número perfecto**, ya que es igual a la suma de sus divisores propios (excluyendo el propio número):

$$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$$

Sin embargo, en nuestro caso, estamos sumando los divisores de 12, no de 28.

Respuesta Final

La suma de todos los divisores positivos de 12 es **28**.

Resumen de Soluciones

A continuación se presenta una tabla resumen con todas las respuestas finales de los ejercicios 21 al 30:

Ej.	Apartado	Respuesta Final
3*21	a) Piezas fabricadas	400 piezas
	b) Ingreso total	1 000
	c) Días reducidos 25 %	2.25 días
3*22	a) Días necesarios	20 días
	b) Coste por metro	75 /m
	c) Longitud total	$666\frac{2}{3}$ m
3*23	a) Páginas transcritas	$1028\frac{4}{7} \approx 1029$ págs
	b) Coste 600 páginas	90
	c) Precio con descuento 10 %	81
3*24	a) Litros consumidos	960 litros
	b) Coste total	720
	c) Consumo reducido 15 %	765 litros
3*25	a) Horas diarias	12 horas
	b) Coste total	2 250
	c) Aumento porcentual	12.5 %
3*26	a) Expresión con corchetes	11
	b) Multiplicado por -3	-33
	c) Valor absoluto	11
3*27	a) Productos y cocientes	-16
	b) Sustracción desde -15	1
	c) $(-2)^3$	-8
3*28	a) Expresión con potencia	25
	b) Multiplicado por 10	250
	c) Expresión con paréntesis	21
3*29	a) Doble paréntesis	11
	b) Dividido entre -4	$-2,75$
	c) Suma adicional	$-2,75$
3*30	a) Reglas de signos	6
	b) Opuesto	-6
	c) Suma divisores de 12	28

Observaciones Finales

Sobre la Proporcionalidad Compuesta (Ejercicios 21–25)

Los problemas de proporcionalidad compuesta requieren un análisis cuidadoso de las relaciones entre magnitudes:

- **Relaciones directas:** Cuando ambas magnitudes aumentan o disminuyen juntas
- **Relaciones inversas:** Cuando una magnitud aumenta mientras la otra disminuye

Es fundamental identificar correctamente cada tipo de relación antes de plantear la proporción.

Sobre Números Enteros (Ejercicios 26–30)

Los puntos clave para operar con números enteros son:

1. Dominar las reglas de signos para multiplicación y división
2. Respetar estrictamente la jerarquía de operaciones
3. Resolver paréntesis de dentro hacia fuera
4. Aplicar correctamente las reglas de eliminación de paréntesis

Errores Comunes a Evitar

- No confundir relaciones directas con inversas en proporcionalidad compuesta
- No olvidar que $(-a)^2 \neq -(a^2)$ cuando hay paréntesis
- No realizar operaciones sin respetar la jerarquía correcta
- No simplificar signos incorrectamente: $-(-a) = +a$

Fin del Documento

Documento elaborado con rigor matemático y precisión pedagógica

SuperAgent – CREA
1 de marzo de 2026

Soluciones Detalladas

Problemas de Repaso de Matemáticas

Ejercicios 31 a 40

2º de Educación Secundaria Obligatoria

Redactado por: SuperAgent (CREAO)

Profesor Universitario de Matemáticas

1 de marzo de 2026

«Las matemáticas no mienten, lo que hay son muchos matemáticos mentirosos.»

— Henry David Thoreau

Índice

Introducción	3
1. Ejercicio 31: Problema de Descenso y Ascenso	4
1.1. Representación visual del problema	6
1.2. Apartado a): Cálculo de la profundidad final	7
1.3. Apartado b): Ascenso hasta la superficie	8
1.4. Apartado c): Diferencia de profundidad	9
2. Ejercicio 32: Operación Larga con Sumas y Restas	11
2.1. Representación visual del problema	11
2.2. Apartado a): Operaciones con sumas y restas	11
2.3. Apartado b): Multiplicación con potencia	13
2.4. Apartado c): Expresión con prioridad de operaciones	14
3. Ejercicio 33: Combinación de Raíz y Potencia	16
3.1. Representación visual del problema	16
3.2. Apartado a): Raíz, potencia y producto	16
3.3. Apartado b): Potencia de base negativa con exponente impar	18
3.4. Apartado c): Producto de números enteros consecutivos	20
4. Ejercicio 34: Operación con División Exacta y Productos	22
4.1. Representación visual del problema	22
4.2. Apartado a): Expresión con corchetes y jerarquía	22
4.3. Apartado b): Problema de contexto financiero	24
4.4. Apartado c): Potencia de una diferencia	26
5. Ejercicio 35: Simplificación de Signos Agrupados	27
5.1. Representación visual del problema	27
5.2. Apartado a): Simplificación de signos	27
5.3. Apartado b): Opuesto de un número	29
5.4. Apartado c): Producto con paréntesis	30
6. Ejercicio 36: Conversión y Tipo de Decimal	31
6.1. Representación visual del problema	31
6.2. Apartado a): Conversión de $\frac{13}{4}$ a decimal	31
6.3. Apartado b): Conversión de $\frac{8}{11}$ a decimal	33
6.4. Apartado c): Fracción generatriz de 0,75	34
7. Ejercicio 37: Clasificación de Decimales	36
7.1. Representación visual del problema	36
7.2. Apartado a): Clasificación de 2,56	36
7.3. Apartado b): Clasificación de $1, \overline{234}$	37
7.4. Apartado c): Fracción generatriz de $0, \overline{4}$	38

8. Ejercicio 38: Ordenación de Números (Decimales y Fracciones)	41
8.1. Representación visual del problema	41
8.2. Apartado a): Ordenación ascendente	41
8.3. Apartado b): Ordenación descendente	43
8.4. Apartado c): Conversión de $\frac{1}{8}$ a decimal	45
9. Ejercicio 39: Fracción Generatriz (Periódico Puro)	48
9.1. Representación visual del problema	48
9.2. Apartado a): Fracción generatriz de $0,\overline{7}$	48
9.3. Apartado b): Verificación mediante división	50
9.4. Apartado c): Suma de fracción y decimal	51
10. Ejercicio 40: Fracción Generatriz (Periódico Mixto)	53
10.1. Representación visual del problema	53
10.2. Apartado a): Fracción generatriz de $0,1\overline{6}$	53
10.3. Apartado b): Tipo de decimal de $\frac{1}{6}$	56
10.4. Apartado c): Conversión de 1,25 a fracción irreducible	57
Conclusiones Finales	60

Introducción

Este documento contiene las **soluciones completamente detalladas** de los ejercicios 31 a 40 del examen de repaso de Matemáticas de 2º ESO, correspondientes a las secciones:

- **Números Enteros** (Ejercicios 31-35)
- **Fracciones y Decimales** (Ejercicios 36-40)

Metodología de resolución

Cada ejercicio se resuelve siguiendo estos principios:

1. **Rigor matemático total:** Todas las operaciones están justificadas mediante propiedades algebraicas, teoremas o definiciones.
2. **Sin saltos lógicos:** Cada transformación algebraica se explica paso a paso.
3. **Pedagogía exhaustiva:** Las explicaciones están diseñadas para que un estudiante comprenda no solo el «cómo», sino también el «por qué».
4. **Representación visual:** Cada ejercicio incluye diagramas ilustrativos.

Notación utilizada

- $\mathbb{Z}$ denota el conjunto de los números enteros
- $\mathbb{N}$ denota el conjunto de los números naturales
- $\mathbb{Q}$ denota el conjunto de los números racionales
- $\mathbb{R}$ denota el conjunto de los números reales
- $|a|$ denota el valor absoluto de a
- $\text{MCD}(a, b)$ denota el máximo común divisor de a y b
- $\text{MCM}(a, b)$ denota el mínimo común múltiplo de a y b

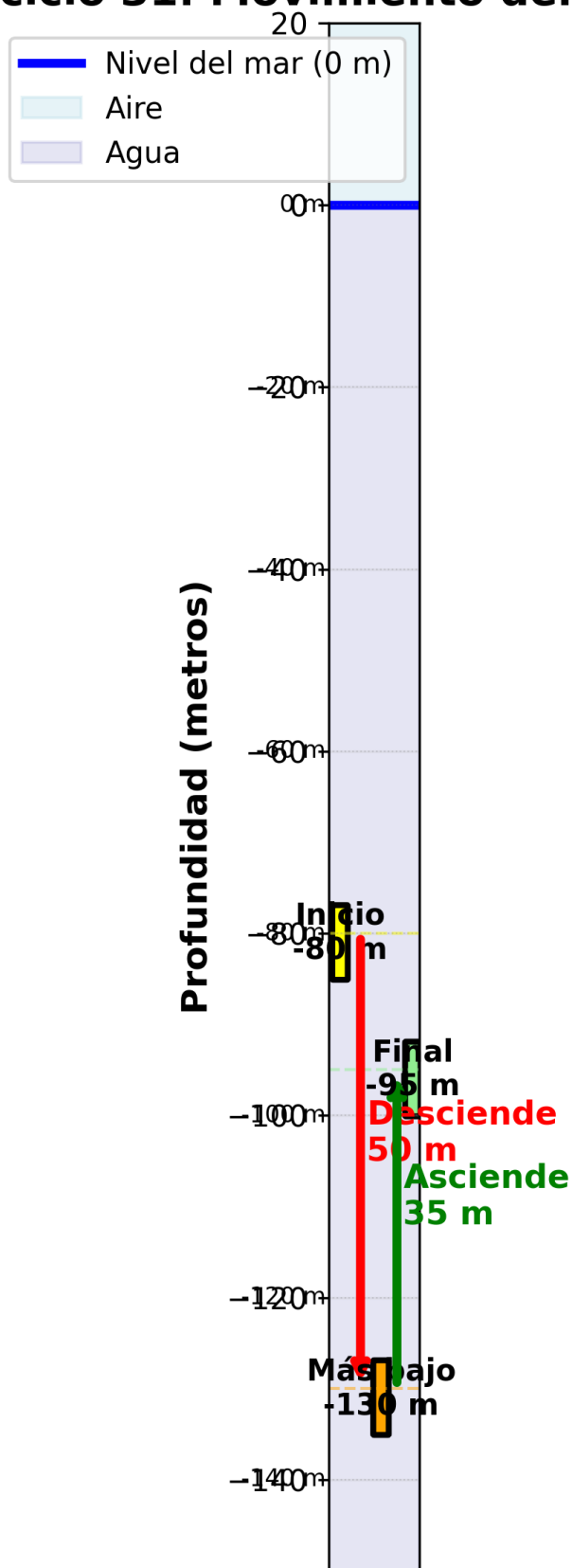
1. Ejercicio 31: Problema de Descenso y Ascenso

Enunciado del Ejercicio 31

Un submarino está a -80 metros. Si desciende 50 metros y luego asciende 35 metros:

- a) ¿A qué profundidad se encuentra?
- b) Si el submarino asciende hasta la superficie (0 metros), ¿cuántos metros subió desde el punto final del apartado (a)?
- c) ¿Cuál es la diferencia de profundidad entre el punto de partida (-80 m) y el punto más bajo alcanzado?

1.1. Representación visual del problema

Ejercicio 31: Movimiento del Submarino**Trayectoria del submarino**

1.2. Apartado a): Cálculo de la profundidad final

Solución

Datos del problema:

- Posición inicial del submarino: $P_0 = -80$ metros (negativo porque está bajo el nivel del mar)
- Primer movimiento: desciende 50 metros
- Segundo movimiento: asciende 35 metros

Conceptos fundamentales:

En problemas de desplazamiento vertical, utilizamos el convenio de signos:

- **Valores negativos:** representan posiciones por debajo del nivel de referencia (superficie del mar = 0)
- **Descender:** implica alejarse del nivel de referencia, es decir, restar o sumar un número negativo
- **Ascender:** implica acercarse al nivel de referencia, es decir, sumar o restar un número negativo

Resolución paso a paso:

Paso 1: Calcular la posición después del descenso.

El submarino parte de -80 metros y desciende 50 metros. Descender significa moverse en dirección negativa (más profundo), por lo tanto:

$$\begin{aligned}P_1 &= P_0 + (-50) \\ &= -80 + (-50)\end{aligned}$$

Aplicamos la *regla de la suma de números enteros del mismo signo*:

$$a + (-b) = -(|a| + |b|) \quad \text{si } a < 0$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}P_1 &= -80 - 50 \\ &= -(80 + 50) \\ &= -130 \text{ metros}\end{aligned}$$

Interpretación: Después de descender, el submarino se encuentra a 130 metros de profundidad.

Paso 2: Calcular la posición después del ascenso.

Desde la posición $P_1 = -130$ metros, el submarino asciende 35 metros. Ascender significa moverse en dirección positiva (menos profundo), por lo tanto:

$$\begin{aligned}P_{\text{final}} &= P_1 + 35 \\ &= -130 + 35\end{aligned}$$

Aplicamos la *regla de la suma de números enteros de distinto signo*:

$$-a + b = -(a - b) \quad \text{si } a > b$$

En nuestro caso, $130 > 35$, entonces:

$$\begin{aligned}P_{\text{final}} &= -(130 - 35) \\ &= -95 \text{ metros}\end{aligned}$$

Respuesta: El submarino se encuentra a una profundidad de -95 metros o bien, expresado de forma más natural, a 95 metros de profundidad.

Observación

Es importante distinguir entre:

- **Profundidad** (valor absoluto, siempre positivo): 95 metros
- **Posición** (valor con signo): -95 metros

En contextos físicos, la profundidad se suele expresar como un valor positivo, pero matemáticamente usamos números negativos para representar posiciones bajo el nivel de referencia.

1.3. Apartado b): Ascenso hasta la superficie

Solución

Datos del problema:

- Posición inicial (del apartado a): $P_{\text{final}} = -95$ metros
- Posición final deseada: superficie = 0 metros

Conceptos fundamentales:

El **desplazamiento** entre dos posiciones se calcula mediante la diferencia:

$$\Delta P = P_{\text{final}} - P_{\text{inicial}}$$

Resolución paso a paso:

El submarino debe ascender desde -95 metros hasta 0 metros. El desplazamiento es:

$$\begin{aligned}\Delta P &= 0 - (-95) \\ &= 0 + 95 \\ &= 95 \text{ metros}\end{aligned}$$

Justificación de la operación $0 - (-95)$:

Restamos la posición inicial de la final. Como la posición inicial es negativa, restar un número negativo equivale a sumar su valor absoluto:

$$a - (-b) = a + b$$

Respuesta: El submarino subió 95 metros desde el punto final del apartado (a) hasta la superficie.

Advertencia - Error Común

Error común: Algunos estudiantes calculan $|-95| = 95$ directamente sin justificar. Aunque el resultado sea correcto, matemáticamente es más riguroso usar la resta de posiciones $0 - (-95) = 95$.

1.4. Apartado c): Diferencia de profundidad

Solución

Datos del problema:

- Punto de partida: $P_0 = -80$ metros
- Punto más bajo alcanzado: $P_{\min} = -130$ metros (calculado en el apartado a)

Conceptos fundamentales:

La **diferencia de profundidad** mide cuánto más profundo está un punto respecto a otro. Matemáticamente:

$$\text{Diferencia} = |P_{\min}| - |P_0|$$

O bien, si queremos usar las posiciones con signo:

$$\text{Diferencia} = P_0 - P_{\min}$$

Resolución paso a paso:

Método 1: Usando valores absolutos

$$\begin{aligned}\text{Diferencia} &= |-130| - |-80| \\ &= 130 - 80 \\ &= 50 \text{ metros}\end{aligned}$$

Método 2: Usando posiciones con signo

$$\begin{aligned}\text{Diferencia} &= P_0 - P_{\min} \\ &= -80 - (-130) \\ &= -80 + 130 \\ &= 130 - 80 \\ &= 50 \text{ metros}\end{aligned}$$

Justificación del Método 2:

Al calcular $-80 - (-130)$, aplicamos la regla:

$$a - (-b) = a + b$$

Luego, como tenemos $-80 + 130$, que es una suma de números de distinto signo, aplicamos:

$$-a + b = b - a \quad \text{si } b > a$$

Respuesta: La diferencia de profundidad entre el punto de partida y el punto más bajo alcanzado es de 50 metros.

Observación

Interpretación física: El submarino descendió 50 metros adicionales desde su posición inicial (-80 m) hasta alcanzar su punto más profundo (-130 m). Este valor coincide exactamente con el descenso inicial mencionado en el enunciado, lo cual es coherente.

2. Ejercicio 32: Operación Larga con Sumas y Restas

Enunciado del Ejercicio 32

- Calcula: $25 - 15 + 8 - 12 - 10 + 3$
- Multiplica el resultado por el valor de $(-2)^2$
- Calcula la expresión $2 \cdot (3 - 5) - 4 : (-2)$

2.1. Representación visual del problema

Ejercicio 32: Operaciones con Números Enteros

a) Operación: $25 - 15 + 8 - 12 - 10 + 3$

Positivos: $25 + 8 + 3 = 36$

Negativos: $15 + 12 + 10 = 37$

Resultado: $36 - 37 = -1$

b) Multiplicar por $(-2)^2$

$(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$

$(-1) \times 4 = -4$

Resultado: -4

c) Expresión: $2 \times (3 - 5) - 4 : (-2)$

① Paréntesis: $3 - 5 = -2$

② Multiplicación: $2 \times (-2) = -4$

③ División: $4 : (-2) = -2$

④ Resta: $(-4) - (-2) = -4 + 2 = -2$

Resultado: -2

Reglas de signos:

$(+) \times (+) = (+)$ $(-) \times (-) = (+)$

$(+) \times (-) = (-)$ $(-) \times (+) = (-)$

Jerarquía:

1º Paréntesis 2º Potencias

3º $\times$ y $:$ 4º $+$ y $-$

2.2. Apartado a): Operaciones con sumas y restas

Solución

Expresión a resolver:

$$25 - 15 + 8 - 12 - 10 + 3$$

Conceptos fundamentales:

Cuando tenemos una cadena de sumas y restas, podemos proceder de **dos formas equivalentes**:

- Método secuencial:** Resolver de izquierda a derecha respetando el orden de las operaciones
- Método por agrupación:** Agrupar términos positivos y negativos por separado

Método 1: Resolución secuencial (izquierda a derecha)

$$\begin{aligned}
& 25 - 15 + 8 - 12 - 10 + 3 \\
&= 10 + 8 - 12 - 10 + 3 \quad (\text{calculamos } 25 - 15 = 10) \\
&= 18 - 12 - 10 + 3 \quad (\text{calculamos } 10 + 8 = 18) \\
&= 6 - 10 + 3 \quad (\text{calculamos } 18 - 12 = 6) \\
&= -4 + 3 \quad (\text{calculamos } 6 - 10 = -4) \\
&= -1 \quad (\text{calculamos } -4 + 3 = -1)
\end{aligned}$$

Método 2: Resolución por agrupación (más eficiente)

Reescribimos la expresión separando términos positivos y negativos:

$$\begin{aligned}
& 25 - 15 + 8 - 12 - 10 + 3 \\
&= 25 + 8 + 3 - 15 - 12 - 10 \quad (\text{propiedad conmutativa}) \\
&= (25 + 8 + 3) - (15 + 12 + 10) \quad (\text{agrupamos}) \\
&= 36 - 37 \\
&= -1
\end{aligned}$$

Justificación del Método 2:

Aplicamos la *propiedad conmutativa de la suma*:

$$a + b = b + a$$

Y la *propiedad asociativa*:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Estas propiedades nos permiten reordenar y agrupar términos para facilitar el cálculo.

Verificación de $36 - 37 = -1$:

Como $37 > 36$, la resta resulta negativa:

$$\begin{aligned}
36 - 37 &= -(37 - 36) \\
&= -1
\end{aligned}$$

Respuesta: El resultado de la operación es $\boxed{-1}$.

Observación

El método por agrupación es más eficiente y reduce la posibilidad de errores en cálculos largos. Además, permite visualizar rápidamente si el resultado será positivo o negativo comparando las sumas de términos positivos y negativos.

2.3. Apartado b): Multiplicación con potencia

Solución

Datos del problema:

- Resultado del apartado (a): -1
- Expresión a calcular: $(-2)^2$

Paso 1: Calcular $(-2)^2$

Definición de potencia:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

En nuestro caso:

$$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2)$$

Regla de los signos en el producto:

$$(-a) \cdot (-b) = +(a \cdot b)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} (-2)^2 &= (-2) \cdot (-2) \\ &= +(2 \cdot 2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

Paso 2: Multiplicar el resultado del apartado (a) por $(-2)^2$

$$\text{Resultado} = (-1) \cdot 4$$

Regla de los signos:

$$(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$$

Aplicando esta regla:

$$\begin{aligned} (-1) \cdot 4 &= -(1 \cdot 4) \\ &= -4 \end{aligned}$$

Respuesta: El resultado de multiplicar -1 por $(-2)^2$ es $\boxed{-4}$.

Advertencia - Error Común

Error común: Confundir $(-2)^2$ con -2^2 .

- $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$ (el signo negativo está dentro del paréntesis, se eleva a 2)

- $-2^2 = -(2 \cdot 2) = -4$ (solo el 2 se eleva a la potencia, el signo negativo queda fuera)

La presencia del paréntesis es crucial.

2.4. Apartado c): Expresión con prioridad de operaciones

Solución

Expresión a resolver:

$$2 \cdot (3 - 5) - 4 : (-2)$$

Conceptos fundamentales: Jerarquía de operaciones

Las operaciones deben realizarse en el siguiente orden:

1. Paréntesis y corchetes
2. Potencias y raíces
3. Multiplicaciones y divisiones (de izquierda a derecha)
4. Sumas y restas (de izquierda a derecha)

Resolución paso a paso:

Paso 1: Resolver el paréntesis $(3 - 5)$

$$\begin{aligned} 3 - 5 &= -(5 - 3) \\ &= -2 \end{aligned}$$

La expresión queda:

$$2 \cdot (-2) - 4 : (-2)$$

Paso 2: Resolver las multiplicaciones y divisiones (de izquierda a derecha)

Primer término: $2 \cdot (-2)$

$$\begin{aligned} 2 \cdot (-2) &= -(2 \cdot 2) \\ &= -4 \end{aligned}$$

Segundo término: $4 : (-2)$

En la división de números enteros con signos distintos:

$$\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} 4 : (-2) &= -\frac{4}{2} \\ &= -2 \end{aligned}$$

Paso 3: Resolver la resta final

Sustituimos los valores calculados:

$$\begin{aligned}2 \cdot (-2) - 4 : (-2) &= (-4) - (-2) \\&= -4 + 2 \\&= -2\end{aligned}$$

Justificación de $(-4) - (-2) = -4 + 2$:

Aplicamos la regla:

$$a - (-b) = a + b$$

Luego, $-4 + 2$ es una suma de números de distinto signo:

$$-a + b = -(a - b) \quad \text{si } a > b$$

Como $4 > 2$:

$$\begin{aligned}-4 + 2 &= -(4 - 2) \\&= -2\end{aligned}$$

Respuesta: El resultado de la expresión es $\boxed{-2}$.

Observación

Verificación de la jerarquía: Es fundamental respetar el orden de las operaciones. Si hubiéramos calculado de izquierda a derecha sin considerar la prioridad, obtendríamos un resultado incorrecto.

Cálculo incorrecto (SIN respetar jerarquía):

$$2 \cdot 3 = 6 \quad \Rightarrow \quad 6 - 5 = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 - 4 = -3 \quad \Rightarrow \quad -3 : (-2) = 1,5$$

Esto demuestra la importancia de la jerarquía de operaciones.

3. Ejercicio 33: Combinación de Raíz y Potencia

Enunciado del Ejercicio 33

- a) Resuelve la expresión: $\sqrt{49} + 3^3 - 5 \cdot 6$
- b) Añade a la solución el valor de $(-1)^9$
- c) ¿Cuál es el producto de los números enteros comprendidos entre -4 y 3 (ambos excluidos)?

3.1. Representación visual del problema

Ejercicio 33: Raíz, Potencia y Producto

a) $\sqrt{49} + 3^3 - 5 \times 6$

$3^3 = 27$ $\sqrt{49} = 7$ $5 \times 6 = 30$

$7 + 27 - 30 = 34 - 30 = 4$

Resultado: 4

b) Añadir $(-1)^9$

$(-1)^9 = -1$ (exponente impar $\rightarrow$ resultado negativo)

$4 + (-1) = 3$

Resultado: 3

c) Producto de enteros entre -4 y 3 (excluidos)

Números: $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

$(-3) \times (-2) \times (-1) \times 0 \times 1 \times 2$

Cualquier número $\times 0 = 0$

Resultado: 0

Potencias con base negativa:
 $(-a)^n$ con n par $\rightarrow$ positivo
 $(-a)^n$ con n impar $\rightarrow$ negativo

Elemento absorbente:
 $a \times 0 = 0$
(para todo número a)

3.2. Apartado a): Raíz, potencia y producto

Solución

Expresión a resolver:

$$\sqrt{49} + 3^3 - 5 \cdot 6$$

Paso 1: Calcular $\sqrt{49}$

Definición de raíz cuadrada:

La raíz cuadrada de un número a es el número b tal que $b^2 = a$. Formalmente:

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a \quad \text{con } b \geq 0$$

En nuestro caso, buscamos b tal que $b^2 = 49$:

$$7^2 = 7 \cdot 7 = 49$$

Por lo tanto:

$$\sqrt{49} = 7$$

Paso 2: Calcular 3^3

Definición de potencia cúbica:

$$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3$$

Calculamos paso a paso:

$$\begin{aligned} 3^3 &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \\ &= 9 \cdot 3 \quad (\text{primero } 3 \cdot 3 = 9) \\ &= 27 \end{aligned}$$

Paso 3: Calcular $5 \cdot 6$

$$5 \cdot 6 = 30$$

Paso 4: Sustituir y resolver la expresión completa

Sustituimos los valores calculados en la expresión original:

$$\sqrt{49} + 3^3 - 5 \cdot 6 = 7 + 27 - 30$$

Aplicamos la jerarquía: las raíces, potencias y multiplicaciones ya están resueltas, ahora operamos con sumas y restas de izquierda a derecha:

$$\begin{aligned} 7 + 27 - 30 &= 34 - 30 \quad (\text{primero } 7 + 27 = 34) \\ &= 4 \end{aligned}$$

Respuesta: El resultado de la expresión es $\boxed{4}$.

Observación

Orden de operaciones: En esta expresión, todas las operaciones prioritarias (raíz, potencia, multiplicación) se resuelven primero antes de proceder con la suma y resta final. Este es un ejemplo clásico de aplicación de la jerarquía de operaciones.

3.3. Apartado b): Potencia de base negativa con exponente impar

Solución**Datos del problema:**

- Resultado del apartado (a): 4
- Valor a añadir: $(-1)^9$

Paso 1: Calcular $(-1)^9$ **Propiedad de potencias con base negativa:**

Para cualquier número negativo $-a$ y exponente natural n :

$$(-a)^n = \begin{cases} a^n & \text{si } n \text{ es par} \\ -a^n & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

En nuestro caso, $a = 1$ y $n = 9$ (impar), por lo tanto:

$$(-1)^9 = -1^9 = -1$$

Justificación detallada:

Expandimos la potencia:

$$(-1)^9 = \underbrace{(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)}_{9 \text{ factores}}$$

Aplicamos la regla de los signos paso a paso:

$$\begin{aligned} (-1) \cdot (-1) &= 1 && (\text{producto de 2 negativos}) \\ 1 \cdot (-1) &= -1 && (\text{producto de positivo y negativo}) \\ (-1) \cdot (-1) &= 1 \\ 1 \cdot (-1) &= -1 \\ (-1) \cdot (-1) &= 1 \\ 1 \cdot (-1) &= -1 \\ (-1) \cdot (-1) &= 1 \\ 1 \cdot (-1) &= -1 \end{aligned}$$

Patrón observado: Como tenemos un número impar de factores negativos, el resultado final es negativo.

Por lo tanto:

$$(-1)^9 = -1$$

Paso 2: Sumar al resultado del apartado (a)

$$\begin{aligned} 4 + (-1) &= 4 - 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Respuesta: Al añadir $(-1)^9$ al resultado anterior, obtenemos 3.

Observación**Regla mnemotécnica:**

- $(-1)^{\text{par}} = 1$
- $(-1)^{\text{impar}} = -1$

Esta regla es consecuencia directa de la multiplicación de signos.

3.4. Apartado c): Producto de números enteros consecutivos**Solución**

Enunciado: Calcular el producto de los números enteros comprendidos entre -4 y 3 (ambos excluidos).

Paso 1: Identificar los números

Los números enteros comprendidos **estrictamente** entre -4 y 3 son:

$$\{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$$

Justificación: El término «comprendidos entre -4 y 3 (ambos excluidos)» significa que debemos considerar todos los enteros n tales que:

$$-4 < n < 3$$

Por lo tanto:

- Excluimos -4 y 3
- Incluimos: $-3, -2, -1, 0, 1, 2$

Paso 2: Calcular el producto

$$\text{Producto} = (-3) \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 0 \cdot 1 \cdot 2$$

Propiedad fundamental del cero en la multiplicación:

Para cualquier número a :

$$a \cdot 0 = 0$$

Por lo tanto, si en un producto aparece el factor 0 , todo el producto es 0 :

$$(-3) \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 0 \cdot 1 \cdot 2 = 0$$

Respuesta: El producto de los números enteros comprendidos entre -4 y 3 (ambos excluidos) es $\boxed{0}$.

Observación

Elemento absorbente: El número 0 es el *elemento absorbente* de la multiplicación, es decir, cualquier número multiplicado por 0 da como resultado 0. Esta propiedad es consecuencia del axioma:

$$0 \cdot a = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

En este ejercicio, no es necesario calcular el producto de los demás factores, ya que la presencia del 0 determina inmediatamente que el resultado es 0.

Advertencia - Error Común

Error común: Algunos estudiantes intentan calcular el producto sin darse cuenta de que hay un 0 en la lista. Esto lleva a cálculos innecesarios. Siempre debemos verificar si hay un 0 antes de realizar multiplicaciones largas.

4. Ejercicio 34: Operación con División Exacta y Productos

Enunciado del Ejercicio 34

- a) Resuelve: $9 - 3 \cdot [(-10) : 5 + 4]$
- b) Si el resultado fuera el saldo de una cuenta, y se retira la mitad, ¿cuánto queda?
- c) Calcula el resultado de $(6 - 8)^2 - (-1)$

4.1. Representación visual del problema

Ejercicio 34: División Exacta y Productos

a) $9 - 3 \times [(-10) : 5 + 4]$

- ① Dentro del corchete: $(-10) : 5 = -2$
- ② Sumar: $-2 + 4 = 2$
- ③ Multiplicar: $3 \times 2 = 6$
- ④ Restar: $9 - 6 = 3$

Resultado: 3

b) Saldo de cuenta: 3 € → Retiramos la mitad

Retiro: $3 : 2 = 1,5$ €

Saldo restante: $3 - 1,5 = 1,5$ €

Resultado: 1,5 € (o 3/2 €)

c) $(6 - 8)^2 - (-1)$

- ① Paréntesis: $6 - 8 = -2$
- ② Potencia: $(-2)^2 = 4$
- ③ Resta: $4 - (-1) = 4 + 1 = 5$

Resultado: 5

⚠ **CUIDADO:** $(-2)^2 = 4$ pero $-2^2 = -4$

Los paréntesis cambian el resultado

$a - (-b) = a + b$ (restar un negativo = sumar)

4.2. Apartado a): Expresión con corchetes y jerarquía

Solución

Expresión a resolver:

$$9 - 3 \cdot [(-10) : 5 + 4]$$

Jerarquía de operaciones:

1. Paréntesis y corchetes (de dentro hacia fuera)
2. Potencias y raíces
3. Multiplicaciones y divisiones

4. Sumas y restas

Paso 1: Resolver el interior de los corchetes

Dentro de los corchetes tenemos:

$$(-10) : 5 + 4$$

Subpaso 1a: Calcular la división $(-10) : 5$

Regla de los signos en la división:

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} (-10) : 5 &= -\frac{10}{5} \\ &= -2 \end{aligned}$$

Subpaso 1b: Resolver la suma

Sustituimos el valor calculado:

$$\begin{aligned} (-10) : 5 + 4 &= -2 + 4 \\ &= 4 - 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

La expresión queda:

$$9 - 3 \cdot [2]$$

Paso 2: Resolver la multiplicación $3 \cdot 2$

$$3 \cdot 2 = 6$$

La expresión queda:

$$9 - 6$$

Paso 3: Resolver la resta final

$$9 - 6 = 3$$

Respuesta: El resultado de la expresión es $\boxed{3}$.

Observación

Importancia de los corchetes: Los corchetes indican que toda la expresión interior debe resolverse antes de multiplicar por 3. Sin los corchetes, la jerarquía sería diferente y obtendríamos un resultado incorrecto.

Comparación (sin corchetes):

$$9 - 3 \cdot (-10) : 5 + 4 = 9 - (-30) : 5 + 4 = 9 - (-6) + 4 = 9 + 6 + 4 = 19 \quad (\text{incorrecto})$$

4.3. Apartado b): Problema de contexto financiero

Solución**Datos del problema:**

- Saldo inicial de la cuenta: 3 euros (resultado del apartado a)
- Operación: se retira la mitad

Interpretación matemática:

Retirar «la mitad» significa dividir el saldo entre 2:

$$\text{Saldo después del retiro} = \text{Saldo inicial} - \frac{\text{Saldo inicial}}{2}$$

Método 1: Resta directa

$$\begin{aligned}\text{Saldo final} &= 3 - \frac{3}{2} \\ &= 3 - 1,5 \\ &= 1,5 \text{ euros}\end{aligned}$$

Método 2: Fracción del saldo inicial

Si retiramos la mitad, nos queda la otra mitad:

$$\begin{aligned}\text{Saldo final} &= \frac{1}{2} \cdot 3 \\ &= \frac{3}{2} \\ &= 1,5 \text{ euros}\end{aligned}$$

Justificación matemática del Método 2:

Si retiramos $\frac{1}{2}$ del saldo, el saldo restante es:

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto:

$$\text{Saldo final} = \frac{1}{2} \cdot \text{Saldo inicial}$$

Respuesta: Si se retira la mitad del saldo de 3 euros, quedan 1,5 euros o bien

$\frac{3}{2}$ euros.

Observación

Ambos métodos son equivalentes y dan el mismo resultado. El Método 2 es más directo cuando se habla de «retirar una fracción» de una cantidad.

4.4. Apartado c): Potencia de una diferencia

Solución

Expresión a resolver:

$$(6 - 8)^2 - (-1)$$

Paso 1: Resolver el paréntesis $(6 - 8)$

$$\begin{aligned} 6 - 8 &= -(8 - 6) \\ &= -2 \end{aligned}$$

La expresión queda:

$$(-2)^2 - (-1)$$

Paso 2: Calcular la potencia $(-2)^2$

$$\begin{aligned} (-2)^2 &= (-2) \cdot (-2) \\ &= 4 \quad (\text{producto de dos números negativos}) \end{aligned}$$

La expresión queda:

$$4 - (-1)$$

Paso 3: Resolver la resta con número negativo

Regla algebraica:

$$a - (-b) = a + b$$

Aplicando esta regla:

$$\begin{aligned} 4 - (-1) &= 4 + 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Respuesta: El resultado de la expresión es $\boxed{5}$.

Advertencia - Error Común

Error común: Confundir $(6 - 8)^2$ con $6 - 8^2$.

- $(6 - 8)^2 = (-2)^2 = 4$ (primero resolvemos el paréntesis, luego elevamos)
- $6 - 8^2 = 6 - 64 = -58$ (primero elevamos 8 al cuadrado, luego restamos)

La presencia del paréntesis indica que toda la diferencia debe elevarse al cuadrado.

5. Ejercicio 35: Simplificación de Signos Agrupados

Enunciado del Ejercicio 35

- Halla el valor de: $-(-4) + (-3) - (+5) - (-1)$
- Multiplica el resultado por el opuesto de 10
- Resuelve $20 - 5 \cdot (7 - 9)$

5.1. Representación visual del problema

Ejercicio 35: Simplificación de Signos Agrupados

a) $-(-4) + (-3) - (+5) - (-1)$

$-(-4) = +4$ $+(-3) = -3$
 $-(+5) = -5$ $-(-1) = +1$

Expresión simplificada: $4 - 3 - 5 + 1$
 Positivos: $4 + 1 = 5$ Negativos: $3 + 5 = 8$
Resultado: $5 - 8 = -3$

b) Multiplicar por el opuesto de 10

Opuesto de 10 = -10
 $(-3) \times (-10) = 30$
Resultado: 30

c) $20 - 5 \times (7 - 9)$

① Paréntesis: $7 - 9 = -2$
 ② Multiplicación: $5 \times (-2) = -10$
 ③ Resta: $20 - (-10) = 20 + 10 = 30$
Resultado: 30

Reglas de simplificación de signos:

$+(-a) = -a$ $-(-a) = +a$ $-(+a) = -a$
 (Menos por menos da más)

5.2. Apartado a): Simplificación de signos

Solución

Expresión a resolver:

$$-(-4) + (-3) - (+5) - (-1)$$

Reglas de simplificación de signos:

- $-(-a) = +a$ (menos por menos da más)
- $+(-a) = -a$ (más por menos da menos)
- $-(+a) = -a$ (menos por más da menos)

4. $+(+a) = +a$ (más por más da más)

Paso 1: Simplificar cada término

Primer término: $-(-4)$

$$-(-4) = +4$$

Segundo término: $+(-3)$

$$+(-3) = -3$$

Tercer término: $-(+5)$

$$-(+5) = -5$$

Cuarto término: $-(-1)$

$$-(-1) = +1$$

Paso 2: Reescribir la expresión simplificada

$$\begin{aligned} -(-4) + (-3) - (+5) - (-1) &= 4 + (-3) + (-5) + 1 \\ &= 4 - 3 - 5 + 1 \end{aligned}$$

Paso 3: Resolver la operación

Método por agrupación:

Agrupamos términos positivos y negativos:

$$\begin{aligned} 4 - 3 - 5 + 1 &= (4 + 1) - (3 + 5) \\ &= 5 - 8 \\ &= -3 \end{aligned}$$

Método secuencial:

$$\begin{aligned} 4 - 3 - 5 + 1 &= 1 - 5 + 1 \quad (\text{calculamos } 4 - 3 = 1) \\ &= -4 + 1 \quad (\text{calculamos } 1 - 5 = -4) \\ &= -3 \quad (\text{calculamos } -4 + 1 = -3) \end{aligned}$$

Respuesta: El valor de la expresión es $\boxed{-3}$.

Observación

Justificación algebraica de las reglas de signos:

Las reglas de simplificación de signos se derivan de la definición del *opuesto* de un número:

- El opuesto de a es $-a$, tal que $a + (-a) = 0$
- El opuesto del opuesto es el número original: $-(-a) = a$

Estas propiedades son axiomas del conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$.

5.3. Apartado b): Opuesto de un número

Solución

Datos del problema:

- Resultado del apartado (a): -3
- Se debe multiplicar por: el opuesto de 10

Paso 1: Determinar el opuesto de 10**Definición de opuesto:**

El opuesto de un número a es el número $-a$ que cumple:

$$a + (-a) = 0$$

Por lo tanto, el opuesto de 10 es:

$$-10$$

Verificación:

$$10 + (-10) = 0 \quad \checkmark$$

Paso 2: Multiplicar el resultado del apartado (a) por el opuesto de 10

$$\text{Resultado} = (-3) \cdot (-10)$$

Regla de los signos en el producto:

$$(-a) \cdot (-b) = +(a \cdot b)$$

Aplicando esta regla:

$$\begin{aligned} (-3) \cdot (-10) &= +(3 \cdot 10) \\ &= 30 \end{aligned}$$

Respuesta: Al multiplicar -3 por el opuesto de 10, obtenemos $\boxed{30}$.

Observación

Propiedades del opuesto:

- El opuesto de a se denota como $-a$
- El opuesto de $-a$ es a : $-(-a) = a$
- El producto de un número por su opuesto es siempre negativo (salvo que sea cero): $a \cdot (-a) = -a^2 \leq 0$
- El producto de dos opuestos es positivo: $(-a) \cdot (-b) = ab$

5.4. Apartado c): Producto con paréntesis**Solución****Expresión a resolver:**

$$20 - 5 \cdot (7 - 9)$$

Paso 1: Resolver el paréntesis $(7 - 9)$

$$\begin{aligned} 7 - 9 &= -(9 - 7) \\ &= -2 \end{aligned}$$

La expresión queda:

$$20 - 5 \cdot (-2)$$

Paso 2: Resolver la multiplicación $5 \cdot (-2)$ **Regla de los signos:**

$$a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} 5 \cdot (-2) &= -(5 \cdot 2) \\ &= -10 \end{aligned}$$

La expresión queda:

$$20 - (-10)$$

Paso 3: Resolver la resta con número negativo

$$\begin{aligned} 20 - (-10) &= 20 + 10 \\ &= 30 \end{aligned}$$

Respuesta: El resultado de la expresión es 30.**Advertencia - Error Común****Error común:** Algunos estudiantes olvidan el signo negativo al multiplicar:**Incorrecto:**

$$20 - 5 \cdot (7 - 9) = 20 - 5 \cdot (-2) = 20 - 10 = 10 \quad (\text{ERROR})$$

El error está en no aplicar correctamente la regla de los signos: $5 \cdot (-2) = -10$, no $+10$.**Correcto:**

$$20 - 5 \cdot (7 - 9) = 20 - 5 \cdot (-2) = 20 - (-10) = 20 + 10 = 30$$

6. Ejercicio 36: Conversión y Tipo de Decimal

Enunciado del Ejercicio 36

- Transforma la fracción $\frac{13}{4}$ en número decimal e indica si es exacto o periódico
- Transforma la fracción $\frac{8}{11}$ en número decimal e indica si es exacto o periódico
- ¿Cuál es la fracción generatriz del número 0,75?

6.1. Representación visual del problema

Ejercicio 36: Conversión Fracción ↔ Decimal

a) $13/4 \rightarrow$ decimal

$$13 \div 4 = 3,25$$

Tipo: EXACTO

$$4 = 2^2 \text{ (solo factor 2)}$$

b) $8/11 \rightarrow$ decimal

$$8 \div 11 = 0,727272\dots$$

Tipo: PERIÓDICO PURO

$$= 0,7\overline{2} \text{ (período: 72)}$$

c) $0,75 \rightarrow$ fracción irreducible

① Escribir como fracción: $0,75 = 75/100$

② Factorizar: $75 = 3 \times 5^2$ $100 = 2^2 \times 5^2$

③ MCD(75, 100) = $5^2 = 25$

④ Simplificar: $75 \div 25 / 100 \div 25 = 3/4$

Resultado: $3/4$

Criterio de clasificación de decimales

PERIÓDICO PURO

Denominador:
sin 2 ni $5^m \times 5^n$

Ejemplo: Ejemplo:
 $1/3 = 0,3\overline{3}$ / $1/4 = 0,25$

PERIÓDICO MIXTO

Denominador:
 $2^m \times 5^n \times k$

Ejemplo:
 $1/6 = 0,1\overline{6}$

6.2. Apartado a): Conversión de $\frac{13}{4}$ a decimal

Solución

Fracción a convertir: $\frac{13}{4}$

Definición:

Para convertir una fracción a decimal, dividimos el numerador entre el denominador:

$$\frac{a}{b} = a : b$$

Método: División larga

Calculamos $13 : 4$:

$$\begin{array}{r}
 3,25 \\
 \text{-----} \\
 4 \mid 13,00 \\
 \underline{-12} \\
 10 \\
 \underline{-8} \\
 20 \\
 \underline{-20} \\
 0
 \end{array}$$

Desarrollo detallado:

$$13 : 4 = 3 \quad (\text{cociente entero})$$

$$13 - 12 = 1 \quad (\text{resto})$$

$$\text{Bajamos un cero: } 10 : 4 = 2 \quad (\text{primera cifra decimal})$$

$$10 - 8 = 2$$

$$\text{Bajamos otro cero: } 20 : 4 = 5 \quad (\text{segunda cifra decimal})$$

$$20 - 20 = 0 \quad (\text{resto final} = 0)$$

Por lo tanto:

$$\frac{13}{4} = 3,25$$

Clasificación del decimal:

Como la división termina (el resto es 0), se trata de un **decimal exacto**.

Criterio matemático:

Una fracción irreducible $\frac{a}{b}$ genera un decimal exacto si y solo si el denominador b se puede factorizar únicamente con los factores primos 2 y/o 5.

Verificación para $\frac{13}{4}$:

$$4 = 2^2$$

Como 4 solo tiene el factor primo 2, la fracción genera un decimal exacto.

Respuesta:

$$\boxed{\frac{13}{4} = 3,25 \quad (\text{decimal exacto})}$$

Observación

Teorema de la conversión a decimal:

Sea $\frac{a}{b}$ una fracción irreducible. Entonces:

- Si $b = 2^m \cdot 5^n$ (con $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), la fracción genera un decimal exacto
- Si b tiene factores primos distintos de 2 y 5, la fracción genera un decimal periódico

Este teorema es fundamental para clasificar decimales sin necesidad de realizar la división.

6.3. Apartado b): Conversión de $\frac{8}{11}$ a decimal

Solución

Fracción a convertir: $\frac{8}{11}$

Método: División larga

Calculamos $8 : 11$:

```

      0,727272...
      -----
11 | 8,000000
    -0
    ---
     80
    -77
    ---
     30
    -22
    ---
     80  <-- Se repite el resto
    -77
    ---
     30  <-- Se repite el resto
    -22
    ---
     8   <-- Volvemos al resto inicial
  
```

Desarrollo detallado:

```

                        8 : 11 = 0   (cociente entero, ya que 8 < 11)
Bajamos un cero:  80 : 11 = 7   resto 3
                  80 - 77 = 3
Bajamos un cero:  30 : 11 = 2   resto 8
                  30 - 22 = 8
Bajamos un cero:  80 : 11 = 7   resto 3   (se repite)
  
```

Observamos que los restos se repiten cíclicamente: $8 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 3 \rightarrow \dots$

Por lo tanto, las cifras decimales también se repiten: $72, 72, 72, \dots$

Notación de decimal periódico:

$$\frac{8}{11} = 0, \overline{72} = 0,727272\dots$$

El arco sobre «72» indica que ese bloque se repite indefinidamente.

Clasificación del decimal:

Como las cifras decimales se repiten desde el principio (no hay parte no periódica), se trata de un **decimal periódico puro**.

Verificación del criterio matemático:

El denominador es 11, que es un número primo distinto de 2 y 5. Por lo tanto, la fracción debe generar un decimal periódico.

Respuesta:

$$\frac{8}{11} = 0, \overline{72} \quad (\text{decimal periódico puro})$$

Observación

Longitud del período:

Para una fracción irreducible $\frac{a}{b}$ donde b no es divisible por 2 ni por 5, la longitud del período es menor o igual a $b - 1$.

En nuestro caso, $b = 11$, por lo que la longitud del período es como máximo $11 - 1 = 10$. En realidad, el período es «72», que tiene longitud 2.

6.4. Apartado c): Fracción generatriz de 0,75

Solución

Número decimal: 0,75

Definición de fracción generatriz:

La fracción generatriz de un decimal es la fracción irreducible que, al dividir numerador entre denominador, genera ese decimal.

Método para decimales exactos:

Para un decimal exacto con n cifras decimales, la fracción generatriz se obtiene mediante:

$$\frac{\text{número sin coma}}{10^n}$$

Aplicación:

El número 0,75 tiene 2 cifras decimales ($n = 2$). El número sin coma es 75. Por lo tanto:

$$0,75 = \frac{75}{100}$$

Simplificación:

Debemos simplificar la fracción hasta su forma irreducible. Para ello, calculamos el MCD de 75 y 100:

Factorización en primos:

$$\begin{aligned}75 &= 3 \cdot 25 = 3 \cdot 5^2 \\100 &= 4 \cdot 25 = 2^2 \cdot 5^2\end{aligned}$$

MCD (Máximo Común Divisor):

Los factores comunes son: $5^2 = 25$

Por lo tanto:

$$\text{MCD}(75, 100) = 25$$

Simplificación:

$$\begin{aligned}\frac{75}{100} &= \frac{75 : 25}{100 : 25} \\&= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Verificación:

Comprobamos que $\frac{3}{4} = 0,75$:

$$3 : 4 = 0,75 \quad \checkmark$$

Respuesta: La fracción generatriz de 0,75 es $\boxed{\frac{3}{4}}$.

Observación**Método alternativo - Lectura del decimal:**

El decimal 0,75 se lee como «setenta y cinco centésimas», lo que nos da directamente la fracción:

$$0,75 = \frac{75}{100}$$

Luego simplificamos dividiendo numerador y denominador por 25.

Advertencia - Error Común

Error común: No simplificar la fracción.

Algunos estudiantes dan como respuesta $\frac{75}{100}$, que aunque es correcta, no está en su forma irreducible. La fracción generatriz debe estar siempre **simplificada al máximo**.

7. Ejercicio 37: Clasificación de Decimales

Enunciado del Ejercicio 37

- Clasifica el número decimal 2,56 (exacto, periódico puro o mixto)
- Clasifica el número decimal $1,2\overline{34}$
- Escribe la fracción generatriz del número $0,\overline{4}$

7.1. Representación visual del problema

Ejercicio 37: Clasificación de Decimales y Fracción Generatriz

a) Clasificar: 2,56

2,56 tiene dos cifras decimales (5 y 6)

No hay repetición → DECIMAL EXACTO

Fracción: $2,56 = 256/100 = 64/25$

b) Clasificar: 1,234 (= 1,234343434...)

Anteperíodo: 2 Período: 34

Hay parte NO periódica + parte periódica

→ DECIMAL PERIÓDICO MIXTO

c) Fracción generatriz de $0,\overline{4}$

Método algebraico:

- ① $x = 0,\overline{4} = 0,444...$
- ② $10x = 4,444... = 4,\overline{4}$
- ③ $10x - x = 4,\overline{4} - 0,\overline{4} \rightarrow 9x = 4$
- ④ $x = 4/9$

Resultado: $4/9$ (ya irreducible)

Fórmula para períodos puros:

$0,ab\overline{c} = abc / (10^n - 1)$ donde n = longitud del período

Ejemplos:

$0,1\overline{2} = 12/99 = 4/33$ $0,7 = 7/9$ $0,142857 = 142857/999999 = 1/7$

7.2. Apartado a): Clasificación de 2,56

Solución

Número decimal: 2,56

Tipos de números decimales:

- Decimal exacto (o finito):** Tiene un número finito de cifras decimales
- Decimal periódico puro:** Las cifras decimales se repiten desde el principio (inmediatamente después de la coma)

3. **Decimal periódico mixto:** Tiene una parte no periódica seguida de una parte que se repite

Análisis del número 2,56:

El número 2,56 tiene:

- Parte entera: 2
- Parte decimal: 56 (dos cifras: 5 y 6)

Como la parte decimal tiene un número finito de cifras (no hay repetición infinita), se trata de un **decimal exacto**.

Representación formal:

$$2,56 = 2 + \frac{56}{100} = \frac{256}{100} = \frac{64}{25}$$

Respuesta: El número 2,56 es un decimal exacto.

Observación

Criterio de identificación rápida:

Si al escribir un número decimal no necesitamos usar notación con arco ($\overline{}$) o puntos suspensivos (...), entonces es un decimal exacto.

7.3. Apartado b): Clasificación de $1,2\overline{34}$

Solución

Número decimal: $1,2\overline{34} = 1,234343434\dots$

Análisis de la estructura:

El número tiene:

- Parte entera: 1
- Parte decimal no periódica (anteperíodo): 2
- Parte decimal periódica (período): 34

Descomposición:

$$1,2\overline{34} = 1 + 0,2 + 0,0\overline{34}$$

Donde:

- 0,2 es la parte no periódica
- $0,0\overline{34}$ es la parte periódica

Clasificación:

Como hay una parte decimal que NO se repite (el 2) seguida de una parte que SÍ se repite (el 34), se trata de un **decimal periódico mixto**.

Terminología:

- **Anteperíodo:** 2
- **Período:** 34

Respuesta: El número $1,2\overline{34}$ es un decimal periódico mixto.

Observación

Diferencia entre periódico puro y mixto:

- **Periódico puro:** $0,\overline{34} = 0,343434\dots$ (la repetición empieza inmediatamente después de la coma)
- **Periódico mixto:** $0,2\overline{34} = 0,234343434\dots$ (hay cifras no periódicas antes de la repetición)

La presencia del anteperíodo es lo que distingue un decimal periódico mixto de uno puro.

7.4. Apartado c): Fracción generatriz de $0,\overline{4}$

Solución

Número decimal: $0,\overline{4} = 0,444444\dots$

Método algebraico para períodos puros:

Paso 1: Llamamos x al número decimal periódico puro.

$$x = 0,\overline{4}$$

Paso 2: Multiplicamos por 10^n , donde n es la longitud del período.

En nuestro caso, el período «4» tiene longitud 1, por lo que multiplicamos por $10^1 = 10$:

$$10x = 4,\overline{4}$$

Justificación:

$$\begin{aligned} 10x &= 10 \cdot 0,\overline{4} \\ &= 10 \cdot 0,444444\dots \\ &= 4,444444\dots \\ &= 4,\overline{4} \end{aligned}$$

Paso 3: Restamos la ecuación original de la multiplicada.

$$\begin{array}{r}
 10x = 4,\overline{4} \\
 - \quad x = 0,\overline{4} \\
 \hline
 9x = 4
 \end{array}$$

Justificación de la resta:

$$\begin{array}{r}
 10x - x = 4,\overline{4} - 0,\overline{4} \\
 9x = 4,444\dots - 0,444\dots \\
 9x = 4
 \end{array}$$

La parte periódica se cancela en la resta.

Paso 4: Despejamos x .

$$x = \frac{4}{9}$$

Verificación:

Comprobamos que $\frac{4}{9} = 0,\overline{4}$ mediante división:

$$\begin{array}{r}
 0,444\dots \\
 \text{-----} \\
 9 \mid 4,000 \\
 -0 \\
 \text{---} \\
 40 \\
 -36 \\
 \text{---} \\
 40 \quad \leftarrow \text{Se repite} \\
 -36 \\
 \text{---} \\
 4 \quad \leftarrow \text{Volvemos al dividendo inicial}
 \end{array}$$

Comprobación de que la fracción es irreducible:

$$\text{MCD}(4, 9) = 1 \quad (4 \text{ y } 9 \text{ son coprimos})$$

Por lo tanto, $\frac{4}{9}$ ya está en su forma irreducible.

Respuesta: La fracción generatriz de $0,\overline{4}$ es $\boxed{\frac{4}{9}}$.

Observación

Fórmula general para períodos puros:

Si tenemos un decimal periódico puro $0,\overline{a_1a_2\dots a_n}$, la fracción generatriz es:

$$0,\overline{a_1a_2\dots a_n} = \frac{a_1a_2\dots a_n}{10^n - 1}$$

Donde $a_1a_2\dots a_n$ es el número formado por las cifras del período.

Aplicación a nuestro caso:

$$0,\overline{4} = \frac{4}{10^1 - 1} = \frac{4}{9}$$

Esta fórmula es una consecuencia directa del método algebraico que hemos usado.

8. Ejercicio 38: Ordenación de Números (Decimales y Fracciones)

Enunciado del Ejercicio 38

- a) Ordena de menor a mayor: $1,2$; $\frac{5}{4}$; $1,\bar{2}$
- b) Ordena de mayor a menor: $\frac{1}{3}$; $0,3$; $0,\bar{3}$
- c) ¿Cuál es la expresión decimal de $\frac{1}{8}$?

8.1. Representación visual del problema

Ejercicio 38: Ordenación de Números Racionales

a) Ordena de menor a mayor: $1,2$; $\frac{5}{4}$; $1,\bar{2}$

Convertir todo a decimal:

$$\frac{5}{4} = 1,250000... \quad 1,2 = 1,200000...$$

$$1,\bar{2} = 1,222222...$$



Orden: $1,2 < 1,\bar{2} < \frac{5}{4}$

b) Ordena de mayor a menor: $\frac{1}{3}$; $0,3$; $0,\bar{3}$

Convertir todo a decimal:

$$0,3 = 0,300000... \quad \frac{1}{3} = 0,333333...$$

$$0,\bar{3} = 0,333333...$$

¡ $\frac{1}{3} = 0,3$! (son el mismo número)

Orden: $0,\bar{3} = \frac{1}{3} > 0,3$

c) Expresión decimal de $\frac{1}{8}$

$$1 \div 8 = 0,125$$

$$8 = 2^3 \rightarrow \text{decimal exacto}$$

Resultado: $0,125$

8.2. Apartado a): Ordenación ascendente

Solución

Números a ordenar: $1,2$; $\frac{5}{4}$; $1,\bar{2}$

Para ordenar números de distinto tipo (decimales y fracciones), el método más eficaz es **convertir todos a la misma forma**, preferiblemente decimal.

Paso 1: Convertir todos los números a forma decimal

Número 1: $1,2$ (ya está en forma decimal)

Número 2: $\frac{5}{4}$

Dividimos $5 : 4$:

$$\begin{array}{r}
 1,25 \\
 \text{-----} \\
 4 \mid 5,00 \\
 -4 \\
 \text{----} \\
 10 \\
 -8 \\
 \text{----} \\
 20 \\
 -20 \\
 \text{----} \\
 0
 \end{array}$$

Por lo tanto:

$$\frac{5}{4} = 1,25$$

Número 3: $1,\bar{2} = 1,2222\dots$

Este es un decimal periódico puro. Para compararlo con precisión, es útil conocer su valor con varias cifras decimales:

$$1,\bar{2} = 1,222222\dots$$

Paso 2: Comparar los valores decimales

Tenemos:

$$1,2 = 1,200000\dots$$

$$\frac{5}{4} = 1,250000\dots$$

$$1,\bar{2} = 1,222222\dots$$

Para comparar, observamos las cifras decimales de izquierda a derecha:

- **Parte entera:** Los tres números tienen parte entera = 1
- **Primera cifra decimal:**
 - $1,2 \rightarrow$ primera cifra decimal = 2
 - $1,25 \rightarrow$ primera cifra decimal = 2
 - $1,\bar{2} \rightarrow$ primera cifra decimal = 2
- **Segunda cifra decimal:**
 - $1,2 = 1,20 \rightarrow$ segunda cifra decimal = 0
 - $1,25 \rightarrow$ segunda cifra decimal = 5

- $1, \bar{2} = 1,22 \rightarrow$ segunda cifra decimal = 2

Ordenación:

Como $0 < 2 < 5$, el orden de menor a mayor es:

$$1,2 < 1, \bar{2} < 1,25$$

Es decir:

$$1,2 < 1, \bar{2} < \frac{5}{4}$$

Respuesta: De menor a mayor: $1,2; 1, \bar{2}; \frac{5}{4}$.

Observación**Visualización en la recta numérica:**

Los tres números están muy próximos entre sí, todos en el intervalo $[1,2; 1,25]$:

- $1,2 = 1,200$
- $1, \bar{2} \approx 1,222$
- $\frac{5}{4} = 1,250$

La diferencia entre ellos es:

$$1, \bar{2} - 1,2 = 0,0\bar{2} = \frac{1}{45} \approx 0,022$$

$$\frac{5}{4} - 1, \bar{2} = 1,25 - 1, \bar{2} = 0,02\bar{7} \approx 0,028$$

8.3. Apartado b): Ordenación descendente**Solución**

Números a ordenar: $\frac{1}{3}; 0,3; 0, \bar{3}$

Paso 1: Convertir todos los números a forma decimal

Número 1: $\frac{1}{3}$

Dividimos $1 : 3$:

$$\begin{array}{r}
 0,333\dots \\
 \hline
 3 \mid 1,000 \\
 \underline{-0} \\
 10 \\
 \underline{-9} \\
 10
 \end{array}$$

```

10
-9
---
1 <-- Se repite

```

Por lo tanto:

$$\frac{1}{3} = 0, \overline{3} = 0,333333\dots$$

Número 2: $0,3$ (ya está en forma decimal)

Número 3: $0, \overline{3} = 0,333333\dots$

Paso 2: Análisis

Observamos que:

$$\frac{1}{3} = 0, \overline{3}$$

Es decir, el primer y tercer número son **iguales**.

Paso 3: Comparar los valores decimales

Tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &= 0,333333\dots \\ 0,3 &= 0,300000\dots \\ 0, \overline{3} &= 0,333333\dots\end{aligned}$$

Comparando la primera cifra decimal:

- $0,3 \rightarrow$ primera cifra = 3, segunda = 0
- $0, \overline{3} \rightarrow$ primera cifra = 3, segunda = 3, tercera = 3, ...

Como $0, \overline{3}$ tiene todas las cifras decimales iguales a 3, mientras que $0,3$ tiene solo la primera igual a 3 y el resto iguales a 0:

$$0,3 < 0, \overline{3}$$

Ordenación de mayor a menor:

$$0, \overline{3} = \frac{1}{3} > 0,3$$

Por lo tanto:

$$0, \overline{3} > \frac{1}{3} > 0,3 \quad (\text{INCORRECTO, ya que } \frac{1}{3} = 0, \overline{3})$$

Corrección:

$$\frac{1}{3} = 0, \overline{3} > 0,3$$

Respuesta: De mayor a menor: $0, \overline{3}; \frac{1}{3}; 0,3$ o bien, reconociendo la igualdad:

$$\frac{1}{3} = 0, \overline{3} > 0,3.$$

Observación**Confusión común:**

Es importante distinguir entre:

- $0,3 = 0,300000\dots = \frac{3}{10}$ (decimal exacto)
- $0,\bar{3} = 0,333333\dots = \frac{1}{3}$ (decimal periódico puro)

Aunque visualmente parecen similares, son números diferentes:

$$0,\bar{3} - 0,3 = \frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{10 - 9}{30} = \frac{1}{30} \approx 0,0333\dots$$

8.4. Apartado c): Conversión de $\frac{1}{8}$ a decimal**Solución**

Fracción a convertir: $\frac{1}{8}$

Método: División larga

Calculamos $1 : 8$:

$$\begin{array}{r}
 0,125 \\
 \text{-----} \\
 8 \mid 1,000 \\
 -0 \\
 \text{---} \\
 10 \\
 -8 \\
 \text{---} \\
 20 \\
 -16 \\
 \text{---} \\
 40 \\
 -40 \\
 \text{---} \\
 0
 \end{array}$$

Desarrollo detallado:

$$\begin{array}{l} 1 : 8 = 0 \quad (\text{cociente entero, ya que } 1 < 8) \\ \text{Bajamos un cero: } 10 : 8 = 1 \quad \text{resto } 2 \\ 10 - 8 = 2 \\ \text{Bajamos un cero: } 20 : 8 = 2 \quad \text{resto } 4 \\ 20 - 16 = 4 \\ \text{Bajamos un cero: } 40 : 8 = 5 \quad \text{resto } 0 \\ 40 - 40 = 0 \end{array}$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{8} = 0,125$$

Verificación mediante factorización del denominador:

$$8 = 2^3$$

Como el denominador solo tiene el factor primo 2 (sin factores primos distintos de 2 y 5), la fracción genera un **decimal exacto**, lo cual confirma nuestro resultado.

Verificación inversa:

Convertimos 0,125 a fracción:

$$\begin{aligned} 0,125 &= \frac{125}{1000} \\ &= \frac{125 : 125}{1000 : 125} \\ &= \frac{1}{8} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Respuesta: La expresión decimal de $\frac{1}{8}$ es 0,125.

Observación

Potencias de 2 en el denominador:

Las fracciones con denominadores que son potencias de 2 siempre generan decimales exactos:

$$\frac{1}{2} = 0,5$$

$$\frac{1}{4} = 0,25$$

$$\frac{1}{8} = 0,125$$

$$\frac{1}{16} = 0,0625$$

$$\frac{1}{32} = 0,03125$$

Cada potencia de 2 adicional en el denominador añade una cifra decimal más.

9. Ejercicio 39: Fracción Generatriz (Periódico Puro)

Enunciado del Ejercicio 39

- Halla la fracción generatriz del número $0,\overline{7}$ (simplificada)
- Comprueba que el valor decimal de tu fracción generatriz es el correcto
- Calcula la suma de $\frac{1}{2} + 0,5$

9.1. Representación visual del problema

Ejercicio 39: Fracción Generatriz de Periódico Puro

a) Fracción generatriz de $0,\overline{7}$ (simplificada)

Método algebraico:

- ① Sea $x = 0,\overline{7} = 0,777\dots$
- ② Multiplicar por 10: $10x = 7,777\dots = 7,\overline{7}$
- ③ Restar: $10x - x = 7,\overline{7} - 0,\overline{7}$
 $9x = 7$
- ④ $x = \frac{7}{9}$

Resultado: $\frac{7}{9}$

Verificación:

$\text{MCD}(7, 9) = 1$
(7 primo, $9 = 3^2$)
→ Ya irreducible ✓

b) Comprobar que $\frac{7}{9} = 0,\overline{7}$

División: $7 \div 9$

$7 \div 9 = 0$ resto 7
 $70 \div 9 = 7$ resto 7
 $70 \div 9 = 7$ resto 7 ...

← El resto se repite

Comprobado: $\frac{7}{9} = 0,777\dots = 0,\overline{7}$ ✓

c) Calcular: $\frac{1}{2} + 0,5$

$\frac{1}{2} = 0,5$ (son equivalentes)

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Resultado: 1

9.2. Apartado a): Fracción generatriz de $0,\overline{7}$

Solución

Número decimal: $0,\overline{7} = 0,777777\dots$

Método algebraico:

Paso 1: Sea x el número decimal periódico puro.

$$x = 0,\overline{7}$$

Paso 2: Multiplicamos por 10^n , donde n es la longitud del período.

El período «7» tiene longitud 1, por lo que multiplicamos por $10^1 = 10$:

$$10x = 7,\bar{7}$$

Desarrollo:

$$\begin{aligned} 10x &= 10 \cdot 0,\bar{7} \\ &= 10 \cdot 0,777777 \dots \\ &= 7,777777 \dots \\ &= 7,\bar{7} \end{aligned}$$

Paso 3: Restamos la ecuación original de la multiplicada.

$$\begin{array}{r} 10x = 7,\bar{7} \\ - \quad x = 0,\bar{7} \\ \hline 9x = 7 \end{array}$$

Justificación de la resta:

$$\begin{aligned} 10x - x &= 7,\bar{7} - 0,\bar{7} \\ 9x &= 7,777 \dots - 0,777 \dots \\ 9x &= 7 \end{aligned}$$

La parte periódica se cancela en la resta, quedando solo la parte entera.

Paso 4: Despejamos x .

$$x = \frac{7}{9}$$

Comprobación de que la fracción es irreducible:

Para que la fracción esté simplificada, debemos verificar que el MCD del numerador y denominador es 1.

$$\text{MCD}(7, 9) = ?$$

Factorizamos:

$$\begin{aligned} 7 &= 7 \quad (\text{número primo}) \\ 9 &= 3^2 \end{aligned}$$

Como 7 y 9 no comparten factores primos, son coprimos:

$$\text{MCD}(7, 9) = 1$$

Por lo tanto, $\frac{7}{9}$ ya está en su forma irreducible.

Respuesta: La fracción generatriz de $0,\bar{7}$ es $\boxed{\frac{7}{9}}$.

Observación**Patrón general:**

Para cualquier decimal periódico puro con un solo dígito repetido:

$$0,\overline{a} = \frac{a}{9}$$

Ejemplos:

$$0,\overline{1} = \frac{1}{9}$$

$$0,\overline{2} = \frac{2}{9}$$

$$0,\overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

⋮

$$0,\overline{8} = \frac{8}{9}$$

$$0,\overline{9} = \frac{9}{9} = 1 \quad (\text{caso especial})$$

9.3. Apartado b): Verificación mediante división**Solución**

Fracción a verificar: $\frac{7}{9}$

Debemos comprobar que: $\frac{7}{9} = 0,\overline{7}$

Método: División larga de $7 : 9$

```

      0,777...
      -----
9 | 7,000
   -0
   ---
    70
   -63
   ---
    70  <-- Se repite el resto
   -63
   ---
    70  <-- Volvemos al mismo resto
   -63
   ---
    7   <-- Volvemos al dividendo inicial
  
```

Desarrollo detallado:

$$\begin{array}{l}
 7 : 9 = 0 \quad (\text{cociente entero, ya que } 7 < 9) \\
 \text{Bajamos un cero: } 70 : 9 = 7 \quad \text{resto } 7 \\
 70 - 63 = 7 \\
 \text{Bajamos un cero: } 70 : 9 = 7 \quad \text{resto } 7 \quad (\text{se repite}) \\
 70 - 63 = 7
 \end{array}$$

Observación clave:

El resto se repite cíclicamente: $7 \rightarrow 70 \rightarrow 7 \rightarrow 70 \rightarrow \dots$

Por lo tanto, el cociente también se repite: la cifra 7 aparece indefinidamente en la parte decimal.

Conclusión:

$$\frac{7}{9} = 0,777777\dots = 0,\overline{7} \quad \checkmark$$

Respuesta: La verificación confirma que $\frac{7}{9} = 0,\overline{7}$. Comprobación correcta.

Observación**Criterio de aparición de períodos:**

En una división, la parte periódica aparece cuando los restos empiezan a repetirse. Como solo hay un número finito de restos posibles (de 0 a $b - 1$ para una división entre b), eventualmente debe aparecer un resto repetido, lo que garantiza la periodicidad.

En nuestro caso, dividimos entre 9, por lo que los restos posibles son $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. El resto 7 se repite inmediatamente, generando un período de longitud 1.

9.4. Apartado c): Suma de fracción y decimal**Solución**

Expresión a calcular: $\frac{1}{2} + 0,5$

Método 1: Convertir todo a decimales

$$\frac{1}{2} = 0,5 \quad (\text{división: } 1 : 2 = 0,5)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} + 0,5 &= 0,5 + 0,5 \\
 &= 1,0 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Método 2: Convertir todo a fracciones

$$0,5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + 0,5 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1+1}{2} \\ &= \frac{2}{2} \\ &= 1\end{aligned}$$

Justificación de la suma de fracciones con igual denominador:

Para fracciones con el mismo denominador:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

Esta propiedad se deriva de la definición de fracción:

$$\frac{a}{c} = a \cdot \frac{1}{c}$$

Por lo tanto:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = a \cdot \frac{1}{c} + b \cdot \frac{1}{c} = (a+b) \cdot \frac{1}{c} = \frac{a+b}{c}$$

Respuesta: $\frac{1}{2} + 0,5 = \boxed{1}$.

Observación

Equivalencia:

Este ejercicio demuestra que $\frac{1}{2}$ y $0,5$ son **representaciones equivalentes** del mismo número racional. La suma de un número consigo mismo siempre da como resultado el doble:

$$a + a = 2a$$

En nuestro caso:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

10. Ejercicio 40: Fracción Generatriz (Periódico Mixto)

Enunciado del Ejercicio 40

- Halla la fracción generatriz del número $0,1\overline{6}$ (simplificada)
- ¿Qué tipo de decimal es $\frac{1}{6}$?
- Transforma el número $1,25$ a fracción irreducible

10.1. Representación visual del problema

Ejercicio 40: Fracción Generatriz de Periódico Mixto

a) Fracción generatriz de $0,1\overline{6}$ (= $0,1666\dots$)

Anteperíodo: 1 Período: 6

Método algebraico:

- ① Sea $x = 0,1\overline{6}$
 - ② Multiplicar por 10^1 : $10x = 1,6$
 - ③ Multiplicar por 10^2 : $100x = 16,6$
 - ④ Restar: $100x - 10x = 16,6 - 1,6$
- $$90x = 15 \rightarrow x = 15/90$$

Simplificar:

$$\begin{aligned} 15 &= 3 \times 5 \\ 90 &= 2 \times 3^2 \times 5 \\ \text{MCD} &= 15 \\ 15/90 &= 1/6 \end{aligned}$$

Resultado: 1/6

b) ¿Qué tipo de decimal es $1/6$?

$$1 \div 6 = 0,1666\dots = 0,1\overline{6}$$

$$\text{Denominador: } 6 = 2 \times 3$$

→ PERIÓDICO MIXTO

c) $1,25 \rightarrow$ fracción irreducible

$$1,25 = 125/100 \rightarrow \text{simplificar } \div 25$$

$$= 5/4$$

Resultado: 5/4 (fracción impropia)

10.2. Apartado a): Fracción generatriz de $0,1\overline{6}$

Solución

Número decimal: $0,1\overline{6} = 0,166666\dots$

Este es un **decimal periódico mixto** con:

- Anteperíodo: 1 (longitud = 1)
- Período: 6 (longitud = 1)

Método algebraico para periódicos mixtos:**Paso 1:** Sea x el número decimal periódico mixto.

$$x = 0,1\overline{6}$$

Paso 2: Multiplicamos por 10^m , donde m es la longitud del anteperíodo.El anteperíodo «1» tiene longitud 1, por lo que multiplicamos por $10^1 = 10$:

$$10x = 1,\overline{6}$$

Desarrollo:

$$\begin{aligned} 10x &= 10 \cdot 0,1\overline{6} \\ &= 10 \cdot 0,1666666\dots \\ &= 1,666666\dots \\ &= 1,\overline{6} \end{aligned}$$

Paso 3: Multiplicamos por 10^n adicional, donde n es la longitud del período.El período «6» tiene longitud 1, por lo que multiplicamos $10x$ por $10^1 = 10$:

$$100x = 16,\overline{6}$$

Desarrollo:

$$\begin{aligned} 100x &= 10 \cdot (10x) \\ &= 10 \cdot 1,\overline{6} \\ &= 10 \cdot 1,666666\dots \\ &= 16,666666\dots \\ &= 16,\overline{6} \end{aligned}$$

Paso 4: Restamos las ecuaciones $100x$ y $10x$.

$$\begin{array}{r} 100x = 16,\overline{6} \\ - \quad 10x = 1,\overline{6} \\ \hline 90x = 15 \end{array}$$

Justificación de la resta:

$$\begin{aligned} 100x - 10x &= 16,\overline{6} - 1,\overline{6} \\ 90x &= 16,666\dots - 1,666\dots \\ 90x &= 15 \end{aligned}$$

La parte periódica se cancela, quedando solo la diferencia de las partes no periódicas.

Paso 5: Despejamos x .

$$x = \frac{15}{90}$$

Paso 6: Simplificamos la fracción.

Calculamos el MCD de 15 y 90:

Factorización en primos:

$$15 = 3 \cdot 5$$

$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

MCD:

Los factores comunes son: $3 \cdot 5 = 15$

Por lo tanto:

$$\text{MCD}(15, 90) = 15$$

Simplificación:

$$\begin{aligned} \frac{15}{90} &= \frac{15 : 15}{90 : 15} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Comprobación de que la fracción es irreducible:

$$\text{MCD}(1, 6) = 1 \quad \checkmark$$

Respuesta: La fracción generatriz de $0,1\overline{6}$ es $\boxed{\frac{1}{6}}$.

Observación

Fórmula general para períodos mixtos:

Si tenemos un decimal periódico mixto $0, a_1 a_2 \dots a_m \overline{b_1 b_2 \dots b_n}$, la fracción generatriz es:

$$\frac{a_1 a_2 \dots a_m b_1 b_2 \dots b_n - a_1 a_2 \dots a_m}{10^{m+n} - 10^m}$$

Donde:

- $a_1 a_2 \dots a_m$ es el anteperíodo
- $b_1 b_2 \dots b_n$ es el período

Aplicación a nuestro caso:

Anteperíodo: 1, Período: 6

$$0,1\overline{6} = \frac{16 - 1}{100 - 10} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$$

10.3. Apartado b): Tipo de decimal de $\frac{1}{6}$

Solución

Fracción: $\frac{1}{6}$

Método 1: Conversión a decimal mediante división

Calculamos $1 : 6$:

$$\begin{array}{r}
 0,1666\dots \\
 \hline
 6 \mid 1,0000 \\
 \underline{-0} \\
 10 \\
 \underline{-6} \\
 40 \\
 \underline{-36} \\
 40 \quad \leftarrow \text{Se repite el resto} \\
 \underline{-36} \\
 4 \quad \leftarrow \text{Volvemos al resto anterior}
 \end{array}$$

Desarrollo detallado:

$$\begin{aligned}
 1 : 6 &= 0 \quad (\text{cociente entero, ya que } 1 < 6) \\
 \text{Bajamos un cero: } 10 : 6 &= 1 \quad \text{resto } 4 \\
 10 - 6 &= 4 \\
 \text{Bajamos un cero: } 40 : 6 &= 6 \quad \text{resto } 4 \\
 40 - 36 &= 4 \quad (\text{el resto se repite})
 \end{aligned}$$

El resto 4 se repite indefinidamente, generando la cifra 6 en cada iteración.

Por lo tanto:

$$\frac{1}{6} = 0,166666\dots = 0,1\overline{6}$$

Análisis de la estructura:

- Parte no periódica (anteperíodo): 1
- Parte periódica (período): 6

Como hay una parte no periódica seguida de una parte periódica, se trata de un **decimal periódico mixto**.

Método 2: Análisis mediante factorización del denominador

Teorema:

Una fracción irreducible $\frac{a}{b}$ genera:

- **Decimal exacto** si $b = 2^m \cdot 5^n$
- **Decimal periódico puro** si b no es divisible por 2 ni por 5
- **Decimal periódico mixto** si $b = 2^m \cdot 5^n \cdot k$, donde $k > 1$ y k no es divisible por 2 ni por 5

Factorización de 6:

$$6 = 2 \cdot 3$$

El denominador tiene el factor 2 (que genera parte exacta) y el factor 3 (que genera parte periódica). Por lo tanto, la fracción genera un **decimal periódico mixto**.

Respuesta: $\frac{1}{6}$ es un decimal periódico mixto: $\frac{1}{6} = 0,1\bar{6}$.

Observación

Coherencia con el apartado (a):

En el apartado (a) calculamos la fracción generatriz de $0,1\bar{6}$ y obtuvimos $\frac{1}{6}$.

En este apartado, convertimos $\frac{1}{6}$ a decimal y obtuvimos $0,1\bar{6}$.

Esto confirma la **bidireccionalidad** de la conversión entre fracciones y decimales periódicos mixtos.

10.4. Apartado c): Conversión de 1,25 a fracción irreducible

Solución

Número decimal: 1,25

Método para decimales exactos:

Para un decimal exacto con n cifras decimales, la fracción generatriz se obtiene mediante:

$$\frac{\text{número sin coma}}{10^n}$$

Aplicación:

El número 1,25 tiene 2 cifras decimales ($n = 2$). El número sin coma es 125. Por lo tanto:

$$1,25 = \frac{125}{100}$$

Simplificación:

Calculamos el MCD de 125 y 100:

Factorización en primos:

$$\begin{aligned} 125 &= 5^3 \\ 100 &= 2^2 \cdot 5^2 \end{aligned}$$

MCD:

Los factores comunes son: $5^2 = 25$

Por lo tanto:

$$\text{MCD}(125, 100) = 25$$

Simplificación:

$$\begin{aligned}\frac{125}{100} &= \frac{125 : 25}{100 : 25} \\ &= \frac{5}{4}\end{aligned}$$

Comprobación de que la fracción es irreducible:

$$\begin{aligned}5 &= 5 \quad (\text{primo}) \\ 4 &= 2^2\end{aligned}$$

Como 5 y 4 no comparten factores primos:

$$\text{MCD}(5, 4) = 1 \quad \checkmark$$

Verificación:

Comprobamos que $\frac{5}{4} = 1,25$ mediante división:

$$\begin{array}{r} 1,25 \\ 4 \overline{) 5,00} \\ \underline{-4} \\ 10 \\ \underline{-8} \\ 20 \\ \underline{-20} \\ 0 \end{array}$$

Por lo tanto: $\frac{5}{4} = 1,25 \quad \checkmark$

Respuesta: La fracción irreducible de 1,25 es $\boxed{\frac{5}{4}}$.

Observación

Fracciones impropias:

La fracción $\frac{5}{4}$ es una **fracción impropia** (numerador mayor que denominador), que representa un número mixto:

$$\frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{4}$$

Ambas formas son correctas:

- **Fracción impropia:** $\frac{5}{4}$ (más conveniente para operaciones algebraicas)
- **Número mixto:** $1\frac{1}{4}$ (más intuitivo para interpretación)

Conclusiones Finales

En este documento hemos resuelto de forma exhaustiva y rigurosa los ejercicios 31 a 40 del examen de repaso de Matemáticas de 2º ESO.

Conceptos fundamentales trabajados

Números Enteros (Ejercicios 31-35):

- Operaciones con números negativos
- Reglas de los signos en suma, resta, multiplicación y división
- Jerarquía de operaciones
- Potencias con base negativa
- Simplificación de signos agrupados

Fracciones y Decimales (Ejercicios 36-40):

- Conversión de fracciones a decimales
- Clasificación de decimales (exactos, periódicos puros, periódicos mixtos)
- Fracción generatriz de decimales periódicos
- Simplificación de fracciones
- Ordenación de números racionales

Métodos matemáticos empleados

1. **Método algebraico** para fracciones generatrices de decimales periódicos
2. **División larga** para conversiones fracción-decimal
3. **Factorización en números primos** para simplificación de fracciones
4. **Aplicación sistemática de jerarquía de operaciones**
5. **Verificaciones mediante operaciones inversas**

Recomendaciones para el estudio

- Practicar las reglas de los signos hasta dominarlas completamente
- Memorizar las fórmulas para fracciones generatrices
- Siempre simplificar las fracciones a su forma irreducible
- Verificar los resultados mediante operaciones inversas

- Prestar especial atención a la jerarquía de operaciones

Fin del documento

Elaborado con rigor matemático y enfoque pedagógico

Resolución Completa

Problemas de Repaso de Matemáticas

2º de ESO

Basado en el trabajo de:

Ladislao Jáñez Blanco

Soluciones detalladas con rigor matemático

Incluye ejercicios 41-50 en PDF separado

2 de marzo de 2026

Índice general

Introducción	2
1. Proporcionalidad y Porcentajes	3
1.1. Fundamentos Teóricos	3
2. Números Enteros	4
2.1. Estructura Algebraica	4
3. Fracciones y Decimales	5
3.1. El Cuerpo de los Números Racionales	5
3.2. Ejercicios 41-50: Resolución Detallada	5
3.2.1. Ejercicio 41: Simplificación por el Máximo Común Divisor (MCD) .	5
3.2.2. Ejercicio 42: Reducción por Divisiones Sucesivas	7
3.2.3. Ejercicio 43: Equivalencia con Denominador Dado	8
3.2.4. Ejercicio 44: Fracción de una Cantidad	9
3.2.5. Ejercicio 45: Problema de Recorrido con Fracciones	10
3.2.6. Ejercicio 46: Suma de Tres Fracciones con Distinto Denominador . .	11
3.2.7. Ejercicio 47: Resta con Número Entero	12
3.2.8. Ejercicio 48: Expresión Combinada con Paréntesis	13
3.2.9. Ejercicio 49: Suma y Resta de Fracciones Negativas	14
3.2.10. Ejercicio 50: Problema de Compra de Alimentos	15

Introducción

Este documento presenta la resolución completa y detallada de los problemas de repaso de matemáticas para 2º de ESO, originalmente elaborados por Ladislao Jáñez Blanco.

Cada ejercicio se resuelve con:

- **Rigor matemático total:** Cada paso está justificado con las propiedades y teoremas correspondientes.
- **Claridad pedagógica:** Las explicaciones están orientadas a que el alumno comprenda no solo el “cómo” sino el “por qué”.
- **Múltiples métodos:** Cuando es posible, se presentan diferentes aproximaciones y se justifica la elección.
- **Advertencias:** Se señalan errores comunes y se explican cómo evitarlos.

La estructura sigue la división original del material:

1. Proporcionalidad y Porcentajes (Problemas 1-25)
2. Números Enteros (Problemas 26-35)
3. Fracciones y Decimales (Problemas 36-60)
4. Problemas Aritméticos y M.C.M./M.C.D. (Problemas 61-70)

Capítulo 1

Proporcionalidad y Porcentajes

1.1 Fundamentos Teóricos

Antes de abordar los ejercicios, recordemos los conceptos fundamentales:

Definición 1.1.1 (Magnitudes proporcionales). Dos magnitudes A y B son *directamente proporcionales* si existe una constante $k \neq 0$ tal que $A = k \cdot B$. Esto significa que si A se multiplica por un factor, B se multiplica por el mismo factor.

Son *inversamente proporcionales* si existe una constante $k \neq 0$ tal que $A \cdot B = k$, o equivalentemente, $A = \frac{k}{B}$. Aquí, si A se multiplica por un factor, B se divide por ese mismo factor.

Definición 1.1.2 (Porcentaje). Un porcentaje es una razón con denominador 100. Se denota $x\% = \frac{x}{100}$.

Teorema 1.1.1 (Regla de tres simple). Para resolver problemas de proporcionalidad, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, entonces $x = \frac{b \cdot c}{a}$.

Capítulo 2

Números Enteros

2.1 Estructura Algebraica

Definición 2.1.1 (Anillo de los enteros). El conjunto $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ con las operaciones de suma y producto forma un anillo conmutativo con unidad. Esto significa que:

- $(\mathbb{Z}, +)$ es grupo abeliano
- El producto es asociativo, conmutativo, con elemento neutro 1
- Se cumple la propiedad distributiva: $a(b + c) = ab + ac$

Capítulo 3

Fracciones y Decimales

3.1 El Cuerpo de los Números Racionales

Definición 3.1.1 (Cuerpo $\mathbb{Q}$). El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$ con las operaciones:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

forma un cuerpo, es decir, todo elemento no nulo tiene inverso multiplicativo.

3.2 Ejercicios 41-50: Resolución Detallada

3.2.1 Ejercicio 41: Simplificación por el Máximo Común Divisor (MCD)

Enunciado:

- a) Simplifica la fracción $\frac{90}{126}$ hasta obtener su fracción irreducible.
- b) Halla el MCD de los términos de la fracción original (90 y 126).
- c) Escribe una fracción equivalente a $\frac{5}{7}$ con denominador 49.

Solución

Apartado a) Simplificación de $\frac{90}{126}$

Método empleado

Para simplificar una fracción hasta su forma irreducible, debemos dividir numerador y denominador por su máximo común divisor (MCD). Esto garantiza que la fracción resultante no pueda simplificarse más, es decir, que numerador y denominador sean primos entre sí ($\text{mcd}(a, b) = 1$).

Paso 1: Descomposición en factores primos

Descomponemos 90 en factores primos:

$$\begin{aligned} 90 &= 2 \cdot 45 \\ &= 2 \cdot 9 \cdot 5 \\ &= 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \end{aligned}$$

Por lo tanto: $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

Descomponemos 126 en factores primos:

$$\begin{aligned} 126 &= 2 \cdot 63 \\ &= 2 \cdot 9 \cdot 7 \\ &= 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \end{aligned}$$

Por lo tanto: $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$

Paso 2: Cálculo del MCD

El MCD se obtiene tomando los factores comunes con el menor exponente:

$$\text{mcd}(90, 126) = 2^1 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$$

Paso 3: Simplificación

$$\frac{90}{126} = \frac{90 \div 18}{126 \div 18} = \frac{5}{7}$$

Verificación: Comprobamos que $\text{mcd}(5, 7) = 1$, por lo que $\frac{5}{7}$ es efectivamente irreducible.

Observación 3.2.1. La fracción $\frac{5}{7}$ es única en el sentido de que cualquier otra fracción equivalente a $\frac{90}{126}$ se puede escribir como $\frac{5k}{7k}$ para algún entero $k \neq 0$.

Apartado b) Cálculo del MCD

Ya hemos calculado el MCD en el apartado anterior, pero presentemos un método alternativo: el **algoritmo de Euclides**.

Método empleado

Dados dos enteros positivos a y b con $a > b$, se define la sucesión:

$$\begin{aligned} r_0 &= a \\ r_1 &= b \\ r_{i+1} &= r_{i-1} \text{ mód } r_i \quad (\text{resto de la división}) \end{aligned}$$

El último resto no nulo es el MCD.

Aplicación:

$$\begin{aligned} 126 &= 1 \cdot 90 + 36 \\ 90 &= 2 \cdot 36 + 18 \\ 36 &= 2 \cdot 18 + 0 \end{aligned}$$

El último resto no nulo es 18, por tanto $\text{mcd}(90, 126) = 18$.

Apartado c) Fracción equivalente a $\frac{5}{7}$ con denominador 49

Buscamos $\frac{x}{49}$ tal que $\frac{x}{49} = \frac{5}{7}$.

Por la propiedad fundamental de las fracciones equivalentes:

$$\frac{5}{7} = \frac{5 \cdot k}{7 \cdot k}$$

Queremos que $7 \cdot k = 49$, por tanto $k = 7$.

Entonces:

$$\frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 7}{7 \cdot 7} = \frac{35}{49}$$

Advertencia 3.2.1. Un error común es pensar que para obtener una fracción equivalente basta con sumar o restar la misma cantidad a numerador y denominador. Esto es **falso**. La operación válida es multiplicar o dividir ambos términos por el mismo número no nulo.

3.2.2 Ejercicio 42: Reducción por Divisiones Sucesivas

Enunciado:

- a) Simplifica $\frac{48}{60}$ hasta su fracción irreducible, mostrando el proceso de divisiones sucesivas.
- b) ¿Cuál es la fracción irreducible de $\frac{18}{45}$?
- c) ¿Qué número entero representa la fracción $\frac{108}{9}$?

Solución

Apartado a) Simplificación de $\frac{48}{60}$ por divisiones sucesivas

Método empleado

El método de divisiones sucesivas consiste en ir dividiendo numerador y denominador por divisores comunes (no necesariamente primos) hasta que no haya más divisores comunes. Es menos eficiente que usar el MCD directamente, pero más ilustrativo del proceso.

Paso 1: Observamos que 48 y 60 son pares, así que dividimos entre 2:

$$\frac{48}{60} = \frac{48 \div 2}{60 \div 2} = \frac{24}{30}$$

Paso 2: 24 y 30 siguen siendo pares, dividimos entre 2:

$$\frac{24}{30} = \frac{24 \div 2}{30 \div 2} = \frac{12}{15}$$

Paso 3: 12 y 15 son divisibles entre 3 (pues $1 + 2 = 3$ y $1 + 5 = 6$ son múltiplos de

3):

$$\frac{12}{15} = \frac{12 \div 3}{15 \div 3} = \frac{4}{5}$$

Paso 4: Verificamos que $\text{mcd}(4, 5) = 1$, por lo que hemos terminado.

Resultado: $\frac{48}{60} = \frac{4}{5}$

Nota 3.2.1. Podríamos haber llegado directamente dividiendo entre 12 (el MCD), pero el método de divisiones sucesivas es útil cuando no se conoce el MCD de memoria.

Apartado b) Simplificación de $\frac{18}{45}$

Descomponemos en factores primos:

$$18 = 2 \cdot 3^2$$

$$45 = 3^2 \cdot 5$$

El MCD es $3^2 = 9$.

Por tanto:

$$\frac{18}{45} = \frac{18 \div 9}{45 \div 9} = \frac{2}{5}$$

Apartado c) Valor de $\frac{108}{9}$

Realizamos la división:

$$\frac{108}{9} = 108 \div 9 = 12$$

Observación 3.2.2. Cuando el numerador es múltiplo del denominador, la fracción representa un número entero. En este caso, $\frac{108}{9} = 12 \in \mathbb{Z}$.

3.2.3 Ejercicio 43: Equivalencia con Denominador Dado

Enunciado:

- Escribe una fracción equivalente a $\frac{3}{5}$ que tenga como denominador 40.
- Escribe una fracción equivalente a $\frac{7}{6}$ que tenga como numerador 28.
- Comprueba si las fracciones $\frac{10}{15}$ y $\frac{8}{12}$ son equivalentes.

Solución

Apartado a) Fracción equivalente a $\frac{3}{5}$ con denominador 40

Buscamos $\frac{x}{40} = \frac{3}{5}$.

El denominador debe pasar de 5 a 40, es decir, multiplicarse por $k = \frac{40}{5} = 8$.

Por tanto, el numerador también debe multiplicarse por 8:

$$x = 3 \cdot 8 = 24$$

La fracción buscada es $\frac{24}{40}$.

Verificación: $\frac{24}{40} = \frac{24 \div 8}{40 \div 8} = \frac{3}{5}$

Apartado b) Fracción equivalente a $\frac{7}{6}$ con numerador 28

Buscamos $\frac{28}{y} = \frac{7}{6}$.

El numerador debe pasar de 7 a 28, es decir, multiplicarse por $k = \frac{28}{7} = 4$.
Por tanto, el denominador también debe multiplicarse por 4:

$$y = 6 \cdot 4 = 24$$

La fracción buscada es $\frac{28}{24}$, que simplificada es $\frac{7}{6}$ (como era de esperar).

Apartado c) Comprobación de equivalencia entre $\frac{10}{15}$ y $\frac{8}{12}$

Método empleado

Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes si y solo si $a \cdot d = b \cdot c$ (producto cruzado).

Calculamos:

$$10 \cdot 12 = 120$$

$$15 \cdot 8 = 120$$

Como $120 = 120$, las fracciones son equivalentes.

Verificación por simplificación:

$$\frac{10}{15} = \frac{2}{3}, \quad \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Ambas se simplifican a $\frac{2}{3}$, confirmando que son equivalentes.

3.2.4 Ejercicio 44: Fracción de una Cantidad

Enunciado:

- Calcula $\frac{3}{4}$ de 200.
- Si $\frac{2}{5}$ de una clase de alumnos son 12, ¿cuántos alumnos hay en total?
- Si de una tarta me como $\frac{1}{3}$ y luego $\frac{1}{6}$, ¿qué fracción de la tarta me queda?

Solución

Apartado a) Cálculo de $\frac{3}{4}$ de 200

Definición 3.2.1. La expresión “ $\frac{a}{b}$ de C ” significa multiplicar la fracción por la cantidad: $\frac{a}{b} \cdot C = \frac{a \cdot C}{b}$.

Por tanto:

$$\frac{3}{4} \cdot 200 = \frac{3 \cdot 200}{4} = \frac{600}{4} = 150$$

Interpretación: $\frac{3}{4}$ de 200 es 150.

Apartado b) Hallar el total conocida una parte

Si $\frac{2}{5}$ del total son 12 alumnos, y llamamos x al total:

$$\frac{2}{5} \cdot x = 12$$

Despejamos x multiplicando ambos lados por $\frac{5}{2}$ (el inverso de $\frac{2}{5}$):

$$x = 12 \cdot \frac{5}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

Hay 30 alumnos en total.

Verificación: $\frac{2}{5} \cdot 30 = \frac{60}{5} = 12$

Apartado c) Fracción restante de tarta

Paso 1: Calculamos la fracción total comida:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

Para sumar, necesitamos denominador común. El mínimo común múltiplo de 3 y 6 es 6:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Paso 2: Calculamos lo que queda. La tarta completa es 1 (o $\frac{2}{2}$):

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Queda $\frac{1}{2}$ de la tarta.

Observación 3.2.3. Notemos que $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$, lo que tiene sentido: primero nos comemos un tercio (equivalente a $\frac{2}{6}$) y luego la mitad de eso ($\frac{1}{6}$), en total la mitad de la tarta.

3.2.5 Ejercicio 45: Problema de Recorrido con Fracciones

Enunciado:

- a) Un ciclista debe recorrer 150 km. Si ha recorrido $\frac{2}{5}$ de la distancia, ¿cuántos kilómetros le faltan?
- b) ¿Qué fracción del recorrido le falta por completar?
- c) Si recorre $\frac{1}{3}$ de lo que le queda, ¿cuántos kilómetros ha recorrido en total hasta ese momento?

Solución

Datos: Distancia total $D = 150$ km.

Apartado a) Kilómetros que faltan

Método 1: Calcular lo recorrido y restar del total.

Recorrido: $\frac{2}{5} \cdot 150 = \frac{300}{5} = 60$ km.

Faltan: $150 - 60 = 90$ km.

Método 2: Calcular directamente la fracción restante.

Si ha recorrido $\frac{2}{5}$, falta $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.

Faltan: $\frac{3}{5} \cdot 150 = \frac{450}{5} = 90$ km.

Apartado b) Fracción que falta

Como calculamos antes:

$$1 - \frac{2}{5} = \frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

Le falta $\frac{3}{5}$ del recorrido.

Apartado c) Kilómetros totales recorridos tras nueva etapa

Le faltaban 90 km. Recorre $\frac{1}{3}$ de esos 90 km:

$$\frac{1}{3} \cdot 90 = 30 \text{ km}$$

Total recorrido: $60 + 30 = 90$ km.

Alternativa fraccionaria:

$$\text{Total recorrido} = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

Como fracción del total: $\frac{3}{5} \cdot 150 = 90$ km.

Nota 3.2.2. El resultado es coherente: ha recorrido $\frac{3}{5}$ del trayecto, que es más de la mitad pero menos de las tres cuartas partes.

3.2.6 Ejercicio 46: Suma de Tres Fracciones con Distinto Denominador

Enunciado:

- Calcula y simplifica el resultado: $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8}$
- ¿Cuál es el mínimo común múltiplo (MCM) de los denominadores?
- Si al resultado le restas $\frac{1}{8}$, ¿cuál es el nuevo resultado?

Solución

Apartado a) Suma de fracciones

Recuerda

Para sumar fracciones con distinto denominador:

1. Hallar el mínimo común múltiplo (MCM) de los denominadores.
2. Convertir cada fracción a equivalente con el MCM como denominador.
3. Sumar los numeradores, manteniendo el denominador común.
4. Simplificar si es posible.

Denominadores: 2, 4, 8.

Como $8 = 2^3$, $4 = 2^2$, $2 = 2^1$, tenemos:

$$\text{mcm}(2, 4, 8) = 2^3 = 8$$

Convertimos cada fracción:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4} = \frac{4}{8} \\ \frac{3}{4} &= \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8} \\ \frac{5}{8} &= \frac{5}{8} \quad (\text{ya tiene denominador } 8)\end{aligned}$$

Sumamos:

$$\frac{4}{8} + \frac{6}{8} + \frac{5}{8} = \frac{4 + 6 + 5}{8} = \frac{15}{8}$$

La fracción $\frac{15}{8}$ es irreducible pues $\text{mcd}(15, 8) = 1$.

Como número mixto: $\frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$.

Apartado b) El MCM

Ya calculado: $\text{mcm}(2, 4, 8) = 8$.

Apartado c) Resta de $\frac{1}{8}$

$$\frac{15}{8} - \frac{1}{8} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$$

O como número mixto: $1\frac{3}{4}$.

3.2.7 Ejercicio 47: Resta con Número Entero

Enunciado:

- a) Resuelve y simplifica el resultado: $3 - \frac{1}{5} - \frac{2}{3}$
- b) Expresa el número 3 como una fracción con denominador 15.
- c) ¿Cuánto es $\frac{1}{5} + \frac{2}{3}$?

Resolución completa con rigor matemático

Solución**Apartado a) Operación $3 - \frac{1}{5} - \frac{2}{3}$**

Convertimos 3 a fracción con denominador común. El $\text{mcm}(1, 5, 3) = 15$.

$$\begin{aligned} 3 &= \frac{3}{1} = \frac{45}{15} \\ \frac{1}{5} &= \frac{3}{15} \\ \frac{2}{3} &= \frac{10}{15} \end{aligned}$$

Operamos:

$$\frac{45}{15} - \frac{3}{15} - \frac{10}{15} = \frac{45 - 3 - 10}{15} = \frac{32}{15}$$

Resultado irreducible: $\frac{32}{15} = 2\frac{2}{15}$.

Apartado b) 3 con denominador 15

$$3 = \frac{3 \cdot 15}{15} = \frac{45}{15}$$

Apartado c) Suma $\frac{1}{5} + \frac{2}{3}$

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{3}{15} + \frac{10}{15} = \frac{13}{15}$$

Observación 3.2.4. Notemos que $3 - \frac{13}{15} = \frac{45}{15} - \frac{13}{15} = \frac{32}{15}$, que coincide con el resultado del apartado a), como debe ser.

3.2.8 Ejercicio 48: Expresión Combinada con Paréntesis

Enunciado:

- a) Calcula y simplifica: $\frac{5}{6} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$
- b) ¿Cuál es el MCM de los denominadores dentro del paréntesis?
- c) Calcula $\frac{1}{12}$ – Resultado de (a).

Solución**Apartado a) Operación con paréntesis**

Paso 1: Resolvemos el paréntesis primero (jerarquía de operaciones).

Dentro del paréntesis: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

$\text{mcm}(3, 4) = 12$:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$$

Paso 2: Restamos del primer término:

$$\frac{5}{6} - \frac{7}{12}$$

$\text{mcm}(6, 12) = 12$:

$$\frac{10}{12} - \frac{7}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Apartado b) MCM dentro del paréntesis

Denominadores en el paréntesis: 3 y 4.

$$\text{mcm}(3, 4) = 12$$

Apartado c) Operación final

Calculamos $\frac{1}{12} - \frac{1}{4}$:

$$\frac{1}{12} - \frac{3}{12} = -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6}$$

Advertencia 3.2.2. El orden de las operaciones es crucial. Si hubiéramos hecho $\frac{5}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ (sin paréntesis), el resultado sería diferente: $\frac{10-4+3}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

3.2.9 Ejercicio 49: Suma y Resta de Fracciones Negativas

Enunciado:

- Resuelve y simplifica: $\frac{1}{2} - \frac{3}{5} + \left(-\frac{1}{10}\right)$
- ¿Cuál es el opuesto de $\frac{3}{5}$?
- ¿Es el resultado de la operación un número positivo o negativo?

Solución

Apartado a) Operación con fracciones negativas

Primero, simplificamos la notación:

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{5} + \left(-\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{5} - \frac{1}{10}$$

Buscamos $\text{mcm}(2, 5, 10) = 10$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= \frac{5}{10} \\ \frac{3}{5} &= \frac{6}{10} \\ \frac{1}{10} &= \frac{1}{10}\end{aligned}$$

Operamos:

$$\frac{5}{10} - \frac{6}{10} - \frac{1}{10} = \frac{5-6-1}{10} = \frac{-2}{10} = -\frac{1}{5}$$

Apartado b) Opuesto de $\frac{3}{5}$

El opuesto (o inverso aditivo) de un número a es $-a$, tal que $a + (-a) = 0$.

El opuesto de $\frac{3}{5}$ es $-\frac{3}{5}$.

Apartado c) Signo del resultado

El resultado es $-\frac{1}{5}$, que es **negativo**.

Esto tiene sentido porque restamos $\frac{3}{5} = 0,6$ y $\frac{1}{10} = 0,1$ de $\frac{1}{2} = 0,5$, es decir:
 $0,5 - 0,6 - 0,1 = -0,2 < 0$.

3.2.10 Ejercicio 50: Problema de Compra de Alimentos

Enunciado:

- Una persona compra $\frac{3}{4}$ kg de manzanas, $\frac{1}{2}$ kg de peras y $\frac{1}{8}$ kg de plátanos. ¿Cuántos kilogramos de fruta compró en total?
- Si el precio por kilogramo de manzanas es 2€, ¿cuánto costaron las manzanas?
- Si lleva un total de 2 kg, ¿cuántos kilogramos de fruta le falta para completar los 2 kg?

Solución

Apartado a) Peso total de fruta

Sumamos las cantidades:

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$$

mcm(4, 2, 8) = 8:

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} &= \frac{6}{8} \\ \frac{1}{2} &= \frac{4}{8} \\ \frac{1}{8} &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

Total:

$$\frac{6}{8} + \frac{4}{8} + \frac{1}{8} = \frac{11}{8} = 1\frac{3}{8} \text{ kg}$$

Apartado b) Costo de las manzanas

Precio: 2€/kg

Cantidad: $\frac{3}{4}$ kg

Costo:

$$2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1,50\text{€}$$

Apartado c) Cantidad que falta para 2 kg

Tiene $\frac{11}{8}$ kg, quiere 2 kg = $\frac{16}{8}$ kg.

Falta:

$$\frac{16}{8} - \frac{11}{8} = \frac{5}{8} \text{ kg}$$

Observación 3.2.5. El resultado $\frac{5}{8}$ kg = 0.625 kg = 625 gramos, que es una cantidad razonable.

Soluciones Detalladas

Ejercicios 51 al 60

Repaso Global de Matemáticas - 2º ESO

Sección III: Fracciones y Decimales

Resuelto por: SuperAgent (CREAO)

Profesor Virtual de Matemáticas

Basado en el examen de Ladislao Jáñez Blanco

1 de marzo de 2026

Características de este documento:

- Resolución completa de los ejercicios 51 al 60
- Rigor matemático absoluto con cada paso justificado
- Explicaciones pedagógicas exhaustivas
- Diagramas ilustrativos para cada ejercicio
- Índice navegable con hipervínculos
- Observaciones sobre errores comunes
- Fundamentos teóricos cuando son necesarios

Índice

1. Ejercicio 51: Multiplicación de Tres Fracciones	3
2. Ejercicio 52: División y Simplificación	9
3. Ejercicio 53: Operación Combinada Básica (Prioridad de Operaciones)	15
4. Ejercicio 54: División con Paréntesis y Resta	21
5. Ejercicio 55: Multiplicación y División Encadenada	24
6. Ejercicio 56: Operación Combinada con Suma y División	27
7. Ejercicio 57: Problema de Reparto (División)	29
8. Ejercicio 58: Multiplicación y Resta	32
9. Ejercicio 59: Operación con Potencias Fraccionarias	34
10. Ejercicio 60: Expresión Final con Todas las Operaciones	36

1. Ejercicio 51: Multiplicación de Tres Fracciones

Ejercicio 51

Enunciado:

- a) Calcula y simplifica: $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{9}{10}$
- b) ¿Cuál es el resultado si la segunda fracción fuera $\frac{4}{5}$ en lugar de $\frac{5}{4}$?
- c) ¿Cuánto es $\frac{3}{5}$ del resultado original?

Metodología y Fundamento Teórico

Fundamentos Teóricos:

La multiplicación de fracciones es una operación fundamental en aritmética que se basa en el siguiente principio:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad (1)$$

donde $a, c \in \mathbb{Z}$ (numeradores) y $b, d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (denominadores).

Propiedades relevantes:

- **Conmutativa:** $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$
- **Asociativa:** $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$
- **Elemento neutro:** $\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$ (donde $1 = \frac{b}{b}$)
- **Simplificación cruzada:** Antes de multiplicar, podemos simplificar numeradores con denominadores para facilitar el cálculo.

Método recomendado:

1. Identificar factores comunes entre numeradores y denominadores
2. Simplificar antes de multiplicar (simplificación cruzada)
3. Multiplicar numeradores entre sí
4. Multiplicar denominadores entre sí
5. Verificar si el resultado se puede simplificar más

Apartado a) Cálculo de $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{9}{10}$

Solución

Paso 1: Escritura formal de la operación

Queremos calcular:

$$P = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{9}{10} \quad (2)$$

Paso 2: Análisis de factores para simplificación cruzada

Antes de multiplicar, analizamos los factores:

$$\begin{array}{l} \text{Numeradores: } 2, \quad 5, \quad 9 \\ \text{Denominadores: } 3, \quad 4, \quad 10 \end{array}$$

Descomponemos en factores primos:

$$\begin{array}{l} 2 = 2 \\ 5 = 5 \\ 9 = 3^2 \\ 3 = 3 \\ 4 = 2^2 \\ 10 = 2 \cdot 5 \end{array}$$

Paso 3: Simplificación cruzada

Identificamos factores comunes entre numeradores y denominadores:

- El numerador 2 y el denominador $4 = 2^2$ comparten el factor 2:

$$\frac{2}{4} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2} \cdot 2} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

- El numerador 5 y el denominador $10 = 2 \cdot 5$ comparten el factor 5:

$$\frac{5}{10} = \frac{\cancel{5}}{2 \cdot \cancel{5}} = \frac{1}{2} \quad (4)$$

- El numerador $9 = 3^2$ y el denominador 3 comparten el factor 3:

$$\frac{9}{3} = \frac{3 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3}} = \frac{3}{1} = 3 \quad (5)$$

Por tanto, la expresión simplificada es:

$$P = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 2} \quad (6)$$

Paso 4: Multiplicación de fracciones simplificadas

$$P = \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{3}{4} \quad (7)$$

Paso 5: Verificación mediante multiplicación directa

Verificamos multiplicando directamente sin simplificación previa:

$$P = \frac{2 \cdot 5 \cdot 9}{3 \cdot 4 \cdot 10} \quad (8)$$

$$= \frac{90}{120} \quad (9)$$

Ahora simplificamos $\frac{90}{120}$ hallando el $\text{mcd}(90, 120)$:

$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\text{mcd}(90, 120) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

Por tanto:

$$\frac{90}{120} = \frac{90 \div 30}{120 \div 30} = \frac{3}{4} \quad (10)$$

Conclusión:

Respuesta Final

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{9}{10} = \frac{3}{4}$$

Representación Visual de la Multiplicación de Fracciones

$$\frac{2}{3}$$

$$\frac{5}{4} > 1$$

$$\frac{9}{10}$$

Simplificamos:

2 con 4

5 con 10

9 con 3

$$\frac{3}{4}$$

Resultado**Apartado b) Variación: Segunda fracción como $\frac{4}{5}$** **Solución****Planteamiento:**

Ahora calculamos:

$$P' = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{10} \quad (11)$$

Paso 1: Análisis de factores

$$\begin{array}{l} \text{Numeradores: } 2, \quad 4 = 2^2, \quad 9 = 3^2 \\ \text{Denominadores: } 3, \quad 5, \quad 10 = 2 \cdot 5 \end{array}$$

Paso 2: Simplificación cruzada

- El numerador 2 y el denominador $10 = 2 \cdot 5$ comparten el factor 2:

$$\frac{2}{10} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2} \cdot 5} = \frac{1}{5}$$

- El numerador $4 = 2^2$ ya no puede simplificarse con ningún denominador restante
- El numerador $9 = 3^2$ y el denominador 3 comparten el factor 3:

$$\frac{9}{3} = \frac{3 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3}} = 3$$

Reorganizamos:

$$P' = \frac{1 \cdot 4 \cdot 3}{5 \cdot 5 \cdot 1} = \frac{12}{25} \quad (12)$$

Paso 3: Verificación

Multiplicamos directamente:

$$P' = \frac{2 \cdot 4 \cdot 9}{3 \cdot 5 \cdot 10} \quad (13)$$

$$= \frac{72}{150} \quad (14)$$

Simplificamos hallando $\text{mcd}(72, 150)$:

$$\begin{aligned} 72 &= 2^3 \cdot 3^2 \\ 150 &= 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \\ \text{mcd}(72, 150) &= 2 \cdot 3 = 6 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\frac{72}{150} = \frac{72 \div 6}{150 \div 6} = \frac{12}{25} \quad (15)$$

Conclusión:

Respuesta Final

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{10} = \frac{12}{25}$$

Observación Importante**Comparación de resultados:**

Es interesante observar que al cambiar $\frac{5}{4}$ (fracción impropia, mayor que 1) por $\frac{4}{5}$ (fracción propia, menor que 1), el resultado cambia significativamente:

- Con $\frac{5}{4}$: Resultado = $\frac{3}{4} = 0.75$
- Con $\frac{4}{5}$: Resultado = $\frac{12}{25} = 0.48$

Esto ilustra un principio fundamental: **multiplicar por una fracción mayor que 1 aumenta el resultado, mientras que multiplicar por una fracción menor que 1 lo disminuye.**

Matemáticamente:

$$\frac{5}{4} = 1.25 > 1 \Rightarrow \text{factor de aumento} \quad (16)$$

$$\frac{4}{5} = 0.8 < 1 \Rightarrow \text{factor de reducción} \quad (17)$$

Apartado c) Calcular $\frac{3}{5}$ del resultado original

Solución**Planteamiento:**

Debemos calcular $\frac{3}{5}$ de $\frac{3}{4}$ (resultado del apartado a).

En lenguaje matemático, "calcular una fracción de otra cantidad" se expresa como una multiplicación:

$$\frac{3}{5} \text{ de } \frac{3}{4} = \frac{3}{5} \times \frac{3}{4} \quad (18)$$

Paso 1: Multiplicación de fracciones

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{9}{20} \quad (19)$$

Paso 2: Verificación de irreducibilidad

Para confirmar que $\frac{9}{20}$ está en su forma irreducible, calculamos $\text{mcd}(9, 20)$:

$$9 = 3^2$$

$$20 = 2^2 \cdot 5$$

$$\text{mcd}(9, 20) = 1 \quad (\text{no comparten factores primos})$$

Como $\text{mcd}(9, 20) = 1$, la fracción $\frac{9}{20}$ ya está completamente simplificada.

Paso 3: Conversión a decimal (opcional)

Para una mejor comprensión:

$$\frac{9}{20} = \frac{9 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{45}{100} = 0.45 \quad (20)$$

Conclusión:

Respuesta Final

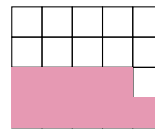
$$\frac{3}{5} \text{ de } \frac{3}{4} = \frac{9}{20} = 0.45$$

Visualización: $\frac{3}{5}$ de $\frac{3}{4}$

$$\frac{3}{4} = \text{[Barra dividida en 4 partes, 3 partes azules y 1 parte blanca]}$$

Resultado:
 $\frac{9}{20}$

Tomamos
 $\frac{3}{5}$ de
cada parte:



9 de 20 partes

2. Ejercicio 52: División y Simplificación

Ejercicio 52

Enunciado:

- a) Resuelve y simplifica: $\frac{15}{8} : \frac{3}{4}$
- b) ¿Cuánto es el cociente entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$?
- c) Calcula la expresión $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} : 2$

Metodología y Fundamento Teórico

Fundamentos Teóricos de la División de Fracciones:

La división de fracciones se define mediante la multiplicación por el inverso (o recíproco) del divisor:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \quad (21)$$

donde $\frac{d}{c}$ es el **inverso multiplicativo** de $\frac{c}{d}$.

Definición formal: Sea $\frac{c}{d} \neq 0$. El inverso multiplicativo (o recíproco) de $\frac{c}{d}$ es la fracción $\frac{d}{c}$ tal que:

$$\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c} = \frac{c \cdot d}{d \cdot c} = \frac{cd}{cd} = 1 \quad (22)$$

Justificación del método:

¿Por qué dividir entre una fracción equivale a multiplicar por su inversa?

Partimos de la definición de división: $a : b = c$ si y solo si $a = b \cdot c$.

Aplicando esto a fracciones:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = x \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot x \quad (23)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} \quad (24)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \quad (25)$$

Regla nemotécnica:

"Dividir es multiplicar por el inverso: se invierte la segunda y se multiplica"

Apartado a) División $\frac{15}{8} : \frac{3}{4}$

Solución

Paso 1: Aplicación de la definición de división

$$\frac{15}{8} : \frac{3}{4} = \frac{15}{8} \cdot \frac{4}{3} \quad (26)$$

El divisor $\frac{3}{4}$ se invierte a $\frac{4}{3}$ y la operación se convierte en una multiplicación.

Paso 2: Simplificación cruzada antes de multiplicar

Identificamos factores comunes:

$$\begin{aligned} \text{Numeradores: } 15 &= 3 \cdot 5, & 4 &= 2^2 \\ \text{Denominadores: } 8 &= 2^3, & 3 & \end{aligned}$$

Simplificaciones:

- El numerador $15 = 3 \cdot 5$ y el denominador 3 comparten el factor 3:

$$\frac{15}{3} = \frac{\cancel{3} \cdot 5}{\cancel{3}} = \frac{5}{1} = 5$$

- El numerador $4 = 2^2$ y el denominador $8 = 2^3$ comparten el factor 2^2 :

$$\frac{4}{8} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{4} \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

Por tanto:

$$\frac{15}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{5}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5 \cdot 1}{1 \cdot 2} = \frac{5}{2} \quad (27)$$

Paso 3: Verificación mediante multiplicación directa

Sin simplificación previa:

$$\frac{15}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{15 \cdot 4}{8 \cdot 3} \quad (28)$$

$$= \frac{60}{24} \quad (29)$$

Simplificamos hallando $\text{mcd}(60, 24)$:

$$\begin{aligned} 60 &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 24 &= 2^3 \cdot 3 \\ \text{mcd}(60, 24) &= 2^2 \cdot 3 = 12 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\frac{60}{24} = \frac{60 \div 12}{24 \div 12} = \frac{5}{2} \quad (30)$$

Paso 4: Expresión como número mixto (opcional)

La fracción impropia $\frac{5}{2}$ puede expresarse como número mixto:

$$\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} = 2.5 \quad (31)$$

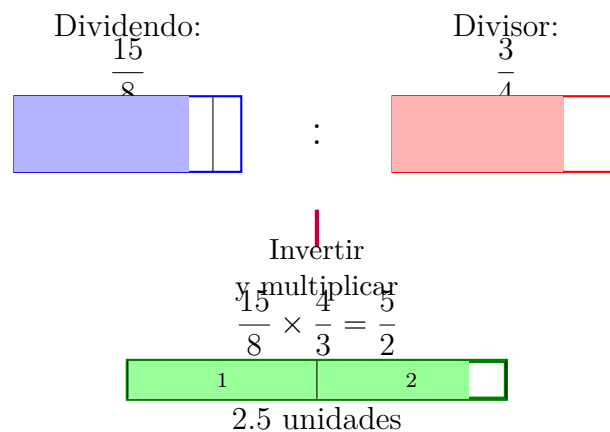
Interpretación: El resultado indica que $\frac{15}{8}$ contiene a $\frac{3}{4}$ exactamente 2.5 veces.

Conclusión:

Respuesta Final

$$\frac{15}{8} : \frac{3}{4} = \frac{5}{2} = 2.5$$

Visualización de la División de Fracciones



Apartado b) Cociente entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$

Solución

Planteamiento:

Calculamos:

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} \quad (32)$$

Paso 1: Aplicación de la regla de división

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{1} = \frac{1}{2} \cdot 4 \quad (33)$$

Paso 2: Cálculo del producto

$$\frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2 \quad (34)$$

Paso 3: Interpretación del resultado

El resultado 2 significa que $\frac{1}{2}$ contiene exactamente 2 veces a $\frac{1}{4}$.

Esto es lógico porque:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad (35)$$

Razonamiento alternativo:

Podemos pensar en términos de "¿cuántos cuartos hay en un medio?"

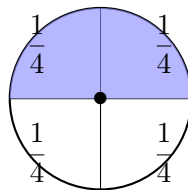
- Un medio = $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ (expresando con denominador 4)
- Un cuarto = $\frac{1}{4}$
- Por tanto: $\frac{2}{4} : \frac{1}{4} = 2$

Conclusión:

Respuesta Final

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2$$

^{$\frac{1}{2}$ contiene}
Visualización: ¿Cuántos cuartos hay en un medio?
_{2 cuartos}



$$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2$$

Apartado c) Expresión $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} : 2$

Solución

Planteamiento:

Debemos calcular:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} : 2 \quad (36)$$

¡ATENCIÓN! Este ejercicio requiere aplicar correctamente la **jerarquía de operaciones**.

Metodología y Fundamento Teórico**Jerarquía de Operaciones (Orden de prioridad):**

1. Paréntesis y corchetes
2. Potencias y raíces
3. Multiplicaciones y divisiones (de izquierda a derecha)
4. Sumas y restas (de izquierda a derecha)

Por tanto, en la expresión $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} : 2$, **primero** debemos resolver la división $\frac{1}{2} : 2$ y **después** sumar.

Paso 1: Resolver la división $\frac{1}{2} : 2$

Recordamos que dividir entre un número entero equivale a dividir entre la fracción $\frac{n}{1}$:

$$\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{2} : \frac{2}{1} \quad (37)$$

Aplicamos la regla de división:

$$\frac{1}{2} : \frac{2}{1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4} \quad (38)$$

Paso 2: Sustituir en la expresión original

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \quad (39)$$

Paso 3: Sumar fracciones con distinto denominador

Para sumar $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, necesitamos un denominador común.

El mcm(2, 4) = 4 (ya que 4 es múltiplo de 2).

Expresamos ambas fracciones con denominador 4:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4} \quad (40)$$

Por tanto:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4} \quad (41)$$

Paso 4: Verificación de la irreducibilidad

mcd(3, 4) = 1 (3 es primo y no divide a 4), por lo que $\frac{3}{4}$ ya está en su forma irreducible.

Conclusión:**Respuesta Final**

$$\boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} : 2 = \frac{3}{4}}$$

Observación Importante**Error Común:**

Un error frecuente es operar de izquierda a derecha sin respetar la jerarquía:

$$\text{INCORRECTO: } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} : 2 \neq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) : 2 \quad (42)$$

Si calculamos $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) : 2$:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) : 2 = 1 : 2 \quad (43)$$

$$= \frac{1}{2} \quad (\text{resultado INCORRECTO}) \quad (44)$$

Regla mnemotécnica: "Primero multiplicaciones y divisiones, después sumas y restas"

3. Ejercicio 53: Operación Combinada Básica (Prioridad de Operaciones)

Ejercicio 53

Enunciado:

a) Calcula y simplifica: $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}$

b) ¿Cuál es el resultado si primero sumas y luego multiplicas? $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{4}{5}$

c) Calcula $\frac{3}{5} \cdot 5$

Apartado a) Cálculo con jerarquía: $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}$

Solución

Paso 1: Identificación del orden correcto

Según la jerarquía de operaciones, la multiplicación tiene prioridad sobre la suma. Por tanto:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}\right) \quad (45)$$

Paso 2: Resolver la multiplicación $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}$

Aplicamos simplificación cruzada:

- Numeradores: 1, 4 = 2^2
- Denominadores: 2, 5
- El numerador 4 y el denominador 2 comparten el factor 2:

$$\frac{4}{2} = \frac{\cancel{2} \cdot 2}{\cancel{2}} = 2$$

Por tanto:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 5} = \frac{2}{5} \quad (46)$$

Verificación directa:

$$\frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 5} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \quad (47)$$

Paso 3: Sustituir y sumar

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} \quad (48)$$

Para sumar, necesitamos denominador común. Calculamos $\text{mcm}(3, 5)$:

$$3 = 3$$

$$5 = 5$$

$$\text{mcm}(3, 5) = 3 \cdot 5 = 15 \quad (\text{son coprimos})$$

Convertimos a denominador 15:

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{5}{15} \quad (49)$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15} \quad (50)$$

Paso 4: Suma de fracciones con igual denominador

$$\frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{5+6}{15} = \frac{11}{15} \quad (51)$$

Paso 5: Verificación de irreducibilidad

Como 11 es primo y no divide a 15, tenemos $\text{mcd}(11, 15) = 1$, por lo que $\frac{11}{15}$ ya está simplificada.

Conclusión:

Respuesta Final

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{11}{15}$$

Orden de Operaciones: Primero Multiplicación, Después Suma

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}$$

Primero:
multiplicamos

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5}$$

Después:
sumamos

$$\frac{11}{15}$$



11 de 15 partes

Apartado b) Cambio de orden: $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{4}{5}$

Solución**Planteamiento:**

Ahora los paréntesis fuerzan a sumar primero:

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{4}{5} \quad (52)$$

Paso 1: Resolver el paréntesis (suma de fracciones)

Calculamos $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$ con $\text{mcm}(3, 2) = 6$:

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6} \quad (53)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6} \quad (54)$$

Por tanto:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6} \quad (55)$$

Paso 2: Multiplicar el resultado por $\frac{4}{5}$

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \quad (56)$$

Simplificación cruzada:

- El numerador 5 y el denominador 5 se cancelan:

$$\frac{5}{5} = 1$$

Quedando:

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{1} = \frac{4}{6} \quad (57)$$

Paso 3: Simplificar el resultado

Calculamos $\text{mcd}(4, 6)$:

$$4 = 2^2$$

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$\text{mcd}(4, 6) = 2$$

Por tanto:

$$\frac{4}{6} = \frac{4 \div 2}{6 \div 2} = \frac{2}{3} \quad (58)$$

Conclusión:

Respuesta Final

$$\boxed{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{3}}$$

Observación Importante**Comparación de resultados:**

Es fundamental observar que el orden de las operaciones cambia completamente el resultado:

Expresión	Resultado	Decimal
$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}$	$\frac{11}{15}$	$0.7\bar{3}$
$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$0.\bar{6}$

Lección importante: Los paréntesis modifican la jerarquía natural de las operaciones y, por tanto, el resultado final. Este es un concepto fundamental en álgebra y aritmética.

Apartado c) Multiplicación $\frac{3}{5} \cdot 5$ **Solución****Planteamiento:**

Calculamos:

$$\frac{3}{5} \cdot 5 \quad (59)$$

Paso 1: Expresar el entero como fracción

$$5 = \frac{5}{1} \quad (60)$$

Por tanto:

$$\frac{3}{5} \cdot 5 = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{1} \quad (61)$$

Paso 2: Simplificación cruzada

El numerador 5 y el denominador 5 se cancelan:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{1} = \frac{3}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{1} = \frac{3}{1} = 3 \quad (62)$$

Paso 3: Verificación

Multiplicación directa:

$$\frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 1} = \frac{15}{5} = 3 \quad (63)$$

Interpretación geométrica:

Multiplicar $\frac{3}{5}$ por 5 significa tomar 5 veces la cantidad $\frac{3}{5}$:

$$\frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{3+3+3+3+3}{5} = \frac{15}{5} = 3 \quad (64)$$

Propiedad general:

Este resultado ilustra la propiedad:

$$\frac{a}{b} \cdot b = a \quad \text{para todo } b \neq 0 \quad (65)$$

En otras palabras: *multiplicar una fracción por su denominador devuelve el numerador.*

Conclusión:

Respuesta Final

$$\frac{3}{5} \cdot 5 = 3$$

4. Ejercicio 54: División con Paréntesis y Resta

Ejercicio 54

Enunciado:

- a) Resuelve y simplifica: $\left(\frac{7}{6} - \frac{1}{2}\right) : \frac{2}{3}$
- b) ¿Cuál es el valor dentro del paréntesis?
- c) ¿Cuánto es $\frac{2}{3}$ del valor del paréntesis?

Apartado a) Operación completa $\left(\frac{7}{6} - \frac{1}{2}\right) : \frac{2}{3}$

Solución

Paso 1: Resolver el paréntesis (resta de fracciones)

Debemos calcular:

$$\frac{7}{6} - \frac{1}{2} \quad (66)$$

Para restar fracciones con distinto denominador, necesitamos el mcm(6, 2):

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$2 = 2$$

$$\text{mcm}(6, 2) = 2 \cdot 3 = 6$$

El denominador común es 6. Convertimos ambas fracciones:

$$\frac{7}{6} = \frac{7}{6} \quad (\text{ya tiene denominador } 6) \quad (67)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6} \quad (68)$$

Restamos:

$$\frac{7}{6} - \frac{3}{6} = \frac{7-3}{6} = \frac{4}{6} \quad (69)$$

Simplificamos $\frac{4}{6}$ hallando $\text{mcd}(4, 6) = 2$:

$$\frac{4}{6} = \frac{4 \div 2}{6 \div 2} = \frac{2}{3} \quad (70)$$

Paso 2: División del resultado entre $\frac{2}{3}$

Ahora calculamos:

$$\frac{2}{3} : \frac{2}{3} \quad (71)$$

Aplicamos la regla de división (multiplicar por el inverso):

$$\frac{2}{3} : \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \quad (72)$$

Simplificación cruzada:

- El numerador 2 y el denominador 2 se cancelan
- El numerador 3 y el denominador 3 se cancelan

Por tanto:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} = \frac{1}{1} = 1 \quad (73)$$

Observación importante:

Este resultado ilustra la propiedad fundamental:

$$\frac{a}{b} : \frac{a}{b} = 1 \quad \text{para todo } \frac{a}{b} \neq 0 \quad (74)$$

Es decir: *cualquier número dividido entre sí mismo es 1.*

Conclusión:

Respuesta Final

$$\left(\frac{7}{6} - \frac{1}{2}\right) : \frac{2}{3} = 1$$

Resolución Paso a Paso

$$\left(\frac{7}{6} - \frac{1}{2}\right) : \frac{2}{3}$$

Paso 1: Paréntesis

$$\frac{7}{6} - \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Paso 2: División

$$\frac{2}{3} : \frac{2}{3} = 1$$

$$\boxed{\text{Resultado} = 1}$$

Apartado b) Valor dentro del paréntesis

Solución

Del Paso 1 del apartado anterior, ya calculamos:

$$\frac{7}{6} - \frac{1}{2} = \frac{7}{6} - \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad (75)$$

Conclusión:

Respuesta Final

$$\text{Valor del paréntesis: } \frac{2}{3}$$

Apartado c) Calcular $\frac{2}{3}$ del valor del paréntesis

Solución**Planteamiento:**

Debemos calcular $\frac{2}{3}$ de $\frac{2}{3}$, lo cual se expresa como:

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \quad (76)$$

Paso 1: Multiplicación de fracciones

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9} \quad (77)$$

Paso 2: Verificación de irreducibilidad

Calculamos $\text{mcd}(4, 9)$:

$$4 = 2^2$$

$$9 = 3^2$$

$$\text{mcd}(4, 9) = 1 \quad (\text{no comparten factores primos})$$

Por tanto, $\frac{4}{9}$ ya está en su forma irreducible.

Observación:

Esta operación ilustra el concepto de **eleva al cuadrado**:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9} \quad (78)$$

Conclusión:

Respuesta Final

$$\frac{2}{3} \text{ de } \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

5. Ejercicio 55: Multiplicación y División Encadenada

Ejercicio 55

Enunciado:

- a) Calcula y simplifica: $\left(\frac{1}{5} \cdot \frac{10}{3}\right) : 2$
- b) ¿Cuál es la fracción inversa de $\frac{10}{3}$?
- c) Multiplica el resultado final por 6

Apartado a) Operación $\left(\frac{1}{5} \cdot \frac{10}{3}\right) : 2$

Solución

Paso 1: Resolver el paréntesis (multiplicación)

Calculamos:

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{10}{3} \quad (79)$$

Aplicamos simplificación cruzada:

- Numerador 10 = 2 · 5 y denominador 5 comparten el factor 5:

$$\frac{10}{5} = \frac{2 \cdot \cancel{5}}{\cancel{5}} = 2$$

Por tanto:

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{10}{3} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} = \frac{2}{3} \quad (80)$$

Verificación:

$$\frac{1 \cdot 10}{5 \cdot 3} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \quad (81)$$

Paso 2: División entre 2

Ahora dividimos el resultado entre 2:

$$\frac{2}{3} : 2 = \frac{2}{3} : \frac{2}{1} \quad (82)$$

Aplicamos la regla de división:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \quad (83)$$

Simplificación cruzada:

- El numerador 2 y el denominador 2 se cancelan

Por tanto:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{1}{3} \quad (84)$$

Conclusión:

Respuesta Final

$$\left(\frac{1}{5} \cdot \frac{10}{3}\right) : 2 = \frac{1}{3}$$

Apartado b) Fracción inversa de $\frac{10}{3}$

Solución

Definición de fracción inversa (o recíproca):

La fracción inversa de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$, tal que:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = \frac{ab}{ab} = 1 \quad (85)$$

Cálculo:

La fracción inversa de $\frac{10}{3}$ se obtiene intercambiando numerador y denominador:

$$\text{Inversa de } \frac{10}{3} = \frac{3}{10} \quad (86)$$

Verificación:

Comprobamos que el producto es 1:

$$\frac{10}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{10 \cdot 3}{3 \cdot 10} = \frac{30}{30} = 1 \quad \checkmark \quad (87)$$

Conclusión:

Respuesta Final

$$\text{La fracción inversa de } \frac{10}{3} \text{ es } \frac{3}{10}$$

Apartado c) Multiplicar resultado por 6**Solución****Planteamiento:**

Del apartado a), obtuvimos $\frac{1}{3}$. Ahora multiplicamos por 6:

$$\frac{1}{3} \cdot 6 \quad (88)$$

Paso 1: Expresar 6 como fracción

$$6 = \frac{6}{1} \quad (89)$$

Por tanto:

$$\frac{1}{3} \cdot 6 = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{1} \quad (90)$$

Paso 2: Simplificación cruzada

El numerador $6 = 2 \cdot 3$ y el denominador 3 comparten el factor 3:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{1} = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{2 \cdot \cancel{3}}{1} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 1} = 2 \quad (91)$$

Verificación:

$$\frac{1 \cdot 6}{3 \cdot 1} = \frac{6}{3} = 2 \quad (92)$$

Conclusión:**Respuesta Final**

$$\frac{1}{3} \cdot 6 = 2$$

6. Ejercicio 56: Operación Combinada con Suma y División

Ejercicio 56

Enunciado:

- a) Resuelve: $1 + \frac{1}{4} : \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)$
- b) ¿Cuál es el valor dentro del paréntesis?
- c) ¿Cuánto es $1 : \frac{1}{6}$?

Apartado a) Operación completa

Solución

Paso 1: Resolver el paréntesis (resta)

Calculamos:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \quad (93)$$

El mcm(3, 6) = 6. Convertimos:

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6} \quad (94)$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{6} \quad (95)$$

Restamos:

$$\frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2-1}{6} = \frac{1}{6} \quad (96)$$

Paso 2: División $\frac{1}{4} : \frac{1}{6}$

Por jerarquía de operaciones, resolvemos la división antes que la suma:

$$\frac{1}{4} : \frac{1}{6} = \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{1} = \frac{6}{4} \quad (97)$$

Simplificamos $\frac{6}{4}$ con mcd(6, 4) = 2:

$$\frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad (98)$$

Paso 3: Suma final

$$1 + \frac{3}{2} \quad (99)$$

Expresamos 1 como fracción con denominador 2:

$$1 = \frac{2}{2} \quad (100)$$

Sumamos:

$$\frac{2}{2} + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \quad (101)$$

Conclusión:

Respuesta Final

$$1 + \frac{1}{4} : \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) = \frac{5}{2} = 2.5$$

Apartado b) Valor del paréntesis

Solución

Del Paso 1 anterior:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \quad (102)$$

Respuesta Final

$$\text{Valor del paréntesis: } \frac{1}{6}$$

Apartado c) División $1 : \frac{1}{6}$

Solución

$$1 : \frac{1}{6} = \frac{1}{1} \cdot \frac{6}{1} = 6 \quad (103)$$

Interpretación: "¿Cuántos sextos hay en un entero?" La respuesta es 6.

Respuesta Final

$$1 : \frac{1}{6} = 6$$

7. Ejercicio 57: Problema de Reparto (División)

Ejercicio 57

Enunciado:

- a) ¿Cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ de litro se pueden llenar con 12 litros de agua?
- b) Si cada botella cuesta 1,5€, ¿cuál es el ingreso total por la venta de las botellas?
- c) ¿Cuántos litros sobrarían si las botellas fueran de $\frac{5}{4}$ de litro?

Apartado a) Número de botellas

Solución

Planteamiento del problema:

Tenemos 12 litros de agua y queremos saber cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ litro podemos llenar.

Matemáticamente, esto se expresa como una división:

$$\text{Número de botellas} = \frac{\text{Total de litros}}{\text{Capacidad por botella}} = 12 : \frac{3}{4} \quad (104)$$

Paso 1: División

$$12 : \frac{3}{4} = \frac{12}{1} \cdot \frac{4}{3} \quad (105)$$

Simplificación cruzada (12 y 3 comparten el factor 3):

$$\frac{12}{1} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4 \cdot \cancel{3}}{1} \cdot \frac{4}{\cancel{3}} = \frac{4 \cdot 4}{1} = 16 \quad (106)$$

Verificación:

$$\frac{12 \cdot 4}{1 \cdot 3} = \frac{48}{3} = 16 \quad (107)$$

Comprobación:

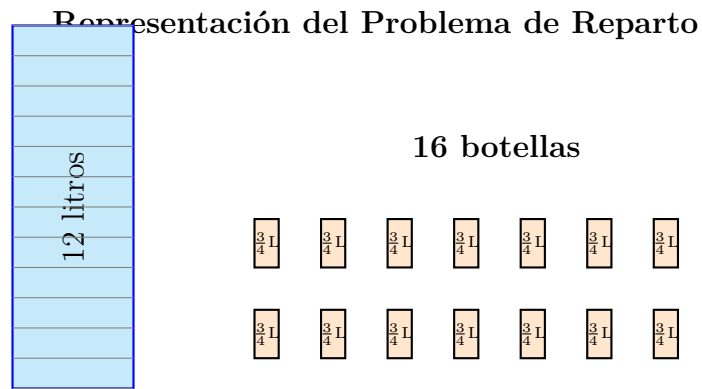
Si llenamos 16 botellas de $\frac{3}{4}$ litro:

$$16 \times \frac{3}{4} = \frac{16 \cdot 3}{4} = \frac{48}{4} = 12 \text{ litros} \quad \checkmark \quad (108)$$

Conclusión:

Respuesta Final

Se pueden llenar 16 botellas



Apartado b) Ingreso total

Solución

Datos:

- Número de botellas: 16
- Precio por botella: 1,5€

Cálculo del ingreso total:

$$\text{Ingreso total} = 16 \times 1,5 = 24 \text{ euros} \quad (109)$$

Desglose:

$$16 \times 1,5 = 16 \times \frac{15}{10} \quad (110)$$

$$= \frac{16 \times 15}{10} \quad (111)$$

$$= \frac{240}{10} \quad (112)$$

$$= 24 \quad (113)$$

Conclusión:

Respuesta Final

Ingreso total: 24 euros

Apartado c) Litros sobrantes con botellas de $\frac{5}{4}$ litro

Solución

Planteamiento:

Ahora las botellas son de $\frac{5}{4}$ litros. Calculamos cuántas botellas completas podemos llenar:

$$\text{Número de botellas} = 12 : \frac{5}{4} \quad (114)$$

Paso 1: División

$$12 : \frac{5}{4} = 12 \cdot \frac{4}{5} = \frac{48}{5} \quad (115)$$

Como $\frac{48}{5} = 9,6$, podemos llenar completamente **9 botellas** (tomamos la parte entera).

Paso 2: Cálculo del agua utilizada

$$\text{Agua utilizada} = 9 \times \frac{5}{4} = \frac{45}{4} = 11,25 \text{ litros} \quad (116)$$

Paso 3: Cálculo del sobrante

$$\text{Sobrante} = 12 - 11,25 = 0,75 \text{ litros} \quad (117)$$

Expresado como fracción:

$$0,75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} \text{ litros} \quad (118)$$

Verificación:

$$9 \times \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = \frac{45 + 3}{4} = \frac{48}{4} = 12 \text{ litros} \quad \checkmark \quad (119)$$

Conclusión:

Respuesta Final

Sobrarían $\frac{3}{4}$ litros (0,75 litros)

8. Ejercicio 58: Multiplicación y Resta

Ejercicio 58

Enunciado:

- a) Calcula: $\frac{5}{6} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$
- b) ¿Qué fracción del resultado de la multiplicación es el resultado final?
- c) ¿Cuál es el doble de $\frac{1}{12}$?

Apartado a) Operación $\frac{5}{6} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$

Solución

Paso 1: Jerarquía de operaciones

Según la jerarquía, primero multiplicamos:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{2}{12} \quad (120)$$

Simplificamos $\frac{2}{12}$ con $\text{mcd}(2, 12) = 2$:

$$\frac{2}{12} = \frac{1}{6} \quad (121)$$

Paso 2: Resta

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} \quad (122)$$

Simplificamos con $\text{mcd}(4, 6) = 2$:

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad (123)$$

Conclusión:

Respuesta Final

$$\boxed{\frac{5}{6} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{3}}$$

Apartado b) Fracción del resultado de la multiplicación**Solución****Planteamiento:**

El resultado de la multiplicación es $\frac{1}{6}$ y el resultado final es $\frac{2}{3}$.

Queremos hallar x tal que:

$$x \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \quad (124)$$

Despejando:

$$x = \frac{2}{3} : \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{12}{3} = 4 \quad (125)$$

Interpretación: El resultado final $(\frac{2}{3})$ es 4 veces el resultado de la multiplicación $(\frac{1}{6})$.

Conclusión:**Respuesta Final**

El resultado final es 4 veces el resultado de la multiplicación

Apartado c) Doble de $\frac{1}{12}$ **Solución**

$$2 \times \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \quad (126)$$

Respuesta Final

El doble de $\frac{1}{12}$ es $\frac{1}{6}$

9. Ejercicio 59: Operación con Potencias Fraccionarias

Ejercicio 59

Enunciado:

- a) Calcula y simplifica: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$
- b) ¿Cuál es el valor de $\left(\frac{2}{3}\right)^3$?
- c) Calcula la raíz cuadrada de $\frac{16}{25}$

Metodología y Fundamento Teórico

Potencias de Fracciones:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (127)$$

Raíces de Fracciones:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (128)$$

Apartado a) Cálculo de $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

Solución

Paso 1: Calcular la potencia

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4} \quad (129)$$

Paso 2: Suma

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad (130)$$

Conclusión:

Respuesta Final

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 1}$$

Apartado b) Valor de $\left(\frac{2}{3}\right)^3$

Solución

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27} \quad (131)$$

Respuesta Final

$$\boxed{\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}}$$

Apartado c) Raíz cuadrada de $\frac{16}{25}$

Solución

$$\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5} \quad (132)$$

Verificación:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \quad \checkmark \quad (133)$$

Respuesta Final

$$\boxed{\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}}$$

10. Ejercicio 60: Expresión Final con Todas las Operaciones

Ejercicio 60

Enunciado:

- a) Resuelve y simplifica al máximo: $\frac{1}{5} : \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$
- b) ¿Qué valor debe tener x para que $\frac{2}{5} \cdot x = 1$?
- c) ¿Cuánto es $\frac{1}{2}$ de la mitad de $\frac{1}{4}$?

Apartado a) Operación completa

Solución

Paso 1: Resolver la división (primera operación por jerarquía)

$$\frac{1}{5} : \frac{2}{3} = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{10} \quad (134)$$

Paso 2: Sustituir y operar de izquierda a derecha

$$\frac{3}{10} - \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \quad (135)$$

Para operar, necesitamos denominador común. El mcm(10, 2) = 10.

$$\frac{3}{10} = \frac{3}{10} \quad (136)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} \quad (137)$$

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{10} \quad (138)$$

Paso 3: Operaciones

$$\frac{3}{10} - \frac{5}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3 - 5 + 1}{10} \quad (139)$$

$$= \frac{-1}{10} \quad (140)$$

$$= -\frac{1}{10} \quad (141)$$

Conclusión:

Respuesta Final

$$\frac{1}{5} : \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = -\frac{1}{10}$$

Apartado b) Ecuación $\frac{2}{5} \cdot x = 1$

Solución

Planteamiento:

Debemos resolver:

$$\frac{2}{5} \cdot x = 1 \quad (142)$$

Paso 1: Despejar x

Dividimos ambos lados entre $\frac{2}{5}$:

$$x = 1 : \frac{2}{5} = 1 \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{2} \quad (143)$$

Paso 2: Verificación

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{10}{10} = 1 \quad \checkmark \quad (144)$$

Observación: $x = \frac{5}{2}$ es precisamente el **inverso multiplicativo** de $\frac{2}{5}$.

Conclusión:

Respuesta Final

$$x = \frac{5}{2}$$

Apartado c) $\frac{1}{2}$ de la mitad de $\frac{1}{4}$

Solución

Paso 1: Calcular la mitad de $\frac{1}{4}$

$$\text{Mitad de } \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \quad (145)$$

Paso 2: Calcular $\frac{1}{2}$ del resultado

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{16} \quad (146)$$

Conclusión:

Respuesta Final

$$\frac{1}{2} \text{ de la mitad de } \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

Resumen General de los Ejercicios 51-60

Tabla Resumen de Resultados

Ejercicio	Operación Principal	Resultado
51a	$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{9}{10}$	$\frac{3}{4}$
51b	$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{10}$	$\frac{12}{25}$
51c	$\frac{3}{5}$ de $\frac{3}{4}$	$\frac{9}{20}$
52a	$\frac{15}{8} : \frac{3}{4}$	$\frac{5}{2}$
52b	$\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$	2
52c	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} : 2$	$\frac{3}{4}$
53a	$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}$	$\frac{11}{15}$
53b	$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$
53c	$\frac{3}{5} \cdot 5$	3
54a	$\left(\frac{7}{6} - \frac{1}{2}\right) : \frac{2}{3}$	1
54b	Valor del paréntesis	$\frac{2}{3}$
54c	$\frac{2}{3}$ de $\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$
55a	$\left(\frac{1}{5} \cdot \frac{10}{3}\right) : 2$	$\frac{1}{3}$
55b	Inversa de $\frac{10}{3}$	$\frac{3}{10}$
55c	$\frac{1}{3} \cdot 6$	2
56a	$1 + \frac{1}{4} : \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)$	$\frac{5}{2}$
56b	Valor del paréntesis	$\frac{1}{6}$
56c	$1 : \frac{1}{6}$	6
57a	Botellas de $\frac{3}{4}$ L con 12L	16
57b	Ingreso total a 1,5€/botella	24£
57c	Sobrante con botellas de $\frac{5}{4}$ L	$\frac{3}{4}$ L
58a	$\frac{5}{6} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$
58b	Relación de resultados	4 veces
58c	Doble de $\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
59a	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$	1
59b	$\left(\frac{2}{3}\right)^3$	$\frac{8}{27}$
59c	$\sqrt[3]{16}$	$\frac{4}{5}$
60a	$\frac{1}{5} : \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$
60b	$\frac{2}{-} \cdot x = 1$	$x = -\frac{5}{2}$

Conceptos Clave y Recordatorios

Reglas Fundamentales de Fracciones

1. Multiplicación de Fracciones

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad (147)$$

Multiplicar numeradores entre sí y denominadores entre sí.

2. División de Fracciones

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \quad (148)$$

Invertir la segunda fracción y multiplicar.

3. Suma/Resta de Fracciones

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c} \quad (149)$$

Con igual denominador: operar numeradores.

Con distinto denominador: buscar denominador común (MCM).

4. Jerarquía de Operaciones

1. Paréntesis
2. Potencias y raíces
3. Multiplicaciones y divisiones (izquierda a derecha)
4. Sumas y restas (izquierda a derecha)

5. Simplificación

Dividir numerador y denominador por su MCD.

6. Fracción Inversa

$$\text{Inversa de } \frac{a}{b} = \frac{b}{a} \quad \text{tal que } \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1 \quad (150)$$

Documento generado con rigor matemático

Soluciones detalladas de los ejercicios 51 al 60

Nivel: 2º ESO - Fracciones y Decimales

SuperAgent - CREA O

1 de marzo de 2026

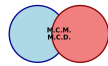
Soluciones Detalladas

Ejercicios 61 al 70

Problemas Aritméticos y M.C.M./M.C.D.

Matemáticas 2º ESO

Ejercicios 61-70



$$\frac{3}{8}$$

75%

Matemáticas 2º ESO

Repaso Global - Primera Evaluación

Profesor: Ladislao Jáñez Blanco

Resolución Completa con Rigor Matemático

1 de marzo de 2026

Índice

1. Introducción	2
1.1. Estructura del Documento	2
1.2. Conceptos Fundamentales	2
2. Ejercicio 61: Problema de Coincidencia (M.C.M.)	3
2.1. Apartado (a): Hora de coincidencia	3
2.2. Apartado (b): Salidas del autobús de 15 minutos	5
2.3. Apartado (c): Aumento porcentual del precio	7
3. Ejercicio 62: Problema de División Equitativa (M.C.D.)	9
3.1. Apartado (a): Longitud de cada trozo	9
3.2. Apartado (b): Número de trozos del listón de 360 cm	11
3.3. Apartado (c): Ingreso total por la venta	12
4. Ejercicio 63: Problema de Inventario (M.C.D.)	14
4.1. Apartado (a): Camisetas por caja	14
4.2. Apartado (b): Número total de cajas	16
4.3. Apartado (c): Camisetas rojas restantes	16
5. Ejercicio 64: Problema de Compra y Gasto con Decimales	18
5.1. Apartado (a): Coste total de la compra	18
5.2. Apartado (b): Cambio devuelto	20
5.3. Apartado (c): Nuevo precio de las patatas	21
6. Ejercicio 65: Problema de Tiempos de Eventos (M.C.M.)	22
6.1. Apartado (a): Hora de coincidencia	22
6.2. Apartado (b): Horas hasta la coincidencia	24
6.3. Apartado (c): Veces que se enciende la fuente	24
7. Ejercicio 66: Problema de Paquetes de Ladrillos (M.C.D.)	26
7.1. Apartado (a): Ladrillos por paquete	26
7.2. Apartado (b): Paquetes de ladrillos grandes	28
7.3. Apartado (c): Ingreso por ladrillos medianos	28
8. Ejercicio 67: Problema de Tanque de Agua (Fracciones y Restas)	29
8.1. Apartado (a): Fracción restante	29
8.2. Apartado (b): Litros de agua restantes	31
8.3. Apartado (c): Litros utilizados para regar	31
9. Ejercicio 68: Problema de Gasto de Salario (Fracciones)	33
9.1. Apartado (a): Fracción gastada en alquiler	33
9.2. Apartado (b): Fracción que le queda	34
9.3. Apartado (c): Dinero restante en euros	35
10. Ejercicio 69: Problema de Recorrido de Viaje (Fracciones y Resta)	37
10.1. Apartado (a): Kilómetros restantes	37
10.2. Apartado (b): Fracción restante	39
10.3. Apartado (c): Total recorrido hasta ese momento	39

11.Ejercicio 70: Problema de Embalaje de Cajas (División de Fracciones)	41
11.1. Apartado (a): Número de cajas	41
11.2. Apartado (b): Coste total de las cajas	43
11.3. Apartado (c): Ingreso total por la venta	43
12.Resumen de Resultados	45
13.Conclusiones Pedagógicas	45
13.1. Conceptos clave trabajados	45
13.2. Errores comunes a evitar	46

1. Introducción

Este documento contiene las soluciones completas y detalladas de los ejercicios 61 al 70 del Repaso Global de Matemáticas de 2º de ESO. Todos los ejercicios pertenecen a la sección **IV. Problemas Aritméticos y M.C.M./M.C.D.**

1.1. Estructura del Documento

Cada ejercicio se presenta con:

- **Enunciado completo** del problema
- **Ilustración gráfica** que facilita la comprensión
- **Definiciones y teoremas** necesarios
- **Solución paso a paso** con justificación de cada transformación
- **Verificación** del resultado cuando sea apropiado
- **Observaciones pedagógicas** y advertencias sobre errores comunes

1.2. Conceptos Fundamentales

Antes de abordar los ejercicios, recordemos los conceptos clave:

Definición

Máximo Común Divisor (M.C.D.): Dados dos o más números enteros, el M.C.D. es el mayor número natural que divide exactamente a todos ellos.

Definición

Mínimo Común Múltiplo (M.C.M.): Dados dos o más números enteros, el M.C.M. es el menor número natural (distinto de cero) que es múltiplo de todos ellos.

Observación

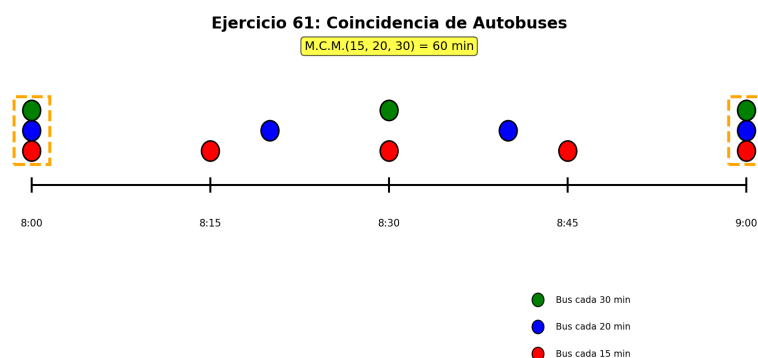
Criterio de selección:

- Usamos el **M.C.M.** cuando buscamos coincidencias o eventos que se repiten periódicamente.
- Usamos el **M.C.D.** cuando queremos dividir cantidades en partes iguales maximizando el tamaño de cada parte.

2. Ejercicio 61: Problema de Coincidencia (M.C.M.)

Ejercicio 61

- a) Tres autobuses urbanos salen de la estación a las 8:00 a.m. Sus líneas tienen frecuencias de 15 minutos, 20 minutos y 30 minutos. ¿A qué hora volverán a coincidir los tres?
- b) ¿Cuántas salidas habrá realizado el autobús de 15 minutos en ese tiempo de espera?
- c) Si la tarifa del autobús sube un 5 % y antes costaba 1.50€, ¿cuál es el nuevo precio?



2.1. Apartado (a): Hora de coincidencia

Solución

Paso 1: Identificación del problema

Este es un problema típico de **coincidencia de eventos periódicos**. Cuando varios eventos se repiten con diferentes frecuencias y coinciden en un momento inicial, volverán a coincidir en el **mínimo común múltiplo** de sus períodos.

Justificación teórica: Si un evento A ocurre cada a unidades de tiempo y un evento B ocurre cada b unidades de tiempo, ambos eventos coincidirán cuando haya transcurrido un tiempo que sea múltiplo común de a y b . La primera coincidencia ocurre en $mcm(a, b)$.

Paso 2: Datos del problema

Frecuencia autobús 1: $f_1 = 15$ minutos

Frecuencia autobús 2: $f_2 = 20$ minutos

Frecuencia autobús 3: $f_3 = 30$ minutos

Paso 3: Cálculo del M.C.M.(15, 20, 30)

Utilizaremos el método de **descomposición en factores primos**, que es el más riguroso.

Descomposición en factores primos:

Para 15:

$$15 = 3 \times 5$$
$$15 = 3^1 \times 5^1$$

Para 20:

$$20 = 4 \times 5 = 2^2 \times 5$$
$$20 = 2^2 \times 5^1$$

Para 30:

$$30 = 2 \times 15 = 2 \times 3 \times 5$$
$$30 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1$$

Paso 4: Aplicación de la fórmula del M.C.M.

Definición

El M.C.M. se calcula tomando todos los factores primos que aparecen en las descomposiciones, elevados a la **mayor potencia** con la que aparecen.

Factores primos presentes: 2, 3, 5

Máximas potencias:

$$\begin{array}{lll} \text{Factor 2:} & \text{máx}(0, 2, 1) = 2 & \Rightarrow 2^2 \\ \text{Factor 3:} & \text{máx}(1, 0, 1) = 1 & \Rightarrow 3^1 \\ \text{Factor 5:} & \text{máx}(1, 1, 1) = 1 & \Rightarrow 5^1 \end{array}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \text{mcm}(15, 20, 30) &= 2^2 \times 3^1 \times 5^1 \\ &= 4 \times 3 \times 5 \\ &= 12 \times 5 \\ &= 60 \text{ minutos} \end{aligned}$$

Paso 5: Conversión a horas y minutos

60 minutos = 1 hora

Paso 6: Cálculo de la hora de coincidencia

Hora inicial: 8:00 a.m. Tiempo transcurrido: 60 minutos = 1 hora

$$\begin{aligned} \text{Hora de coincidencia} &= 8 : 00 + 1 : 00 \\ &= 9 : 00 \text{ a.m.} \end{aligned}$$

Verificación:

Comprobemos que a las 9:00 a.m. los tres autobuses han salido un número entero de veces:

$$\begin{array}{lcl} \text{Autobús 1 (cada 15 min):} & \frac{60}{15} = 4 \text{ salidas} & \checkmark \\ \text{Autobús 2 (cada 20 min):} & \frac{60}{20} = 3 \text{ salidas} & \checkmark \\ \text{Autobús 3 (cada 30 min):} & \frac{60}{30} = 2 \text{ salidas} & \checkmark \end{array}$$

Todos los resultados son números enteros, lo que confirma que a las 9:00 a.m. es efectivamente cuando vuelven a coincidir.

Respuesta apartado (a)

Los tres autobuses volverán a coincidir a las **9:00 a.m.**

2.2. Apartado (b): Salidas del autobús de 15 minutos

Solución**Paso 1: Planteamiento**

Ya sabemos del apartado anterior que el tiempo transcurrido hasta la coincidencia es de 60 minutos.

Queremos calcular cuántas salidas habrá realizado el autobús que sale cada 15 minutos.

Paso 2: Fórmula

El número de salidas se calcula dividiendo el tiempo total transcurrido entre el período de cada salida:

$$\text{Número de salidas} = \frac{\text{Tiempo transcurrido}}{\text{Período}} \quad (1)$$

Paso 3: Sustitución de valores

$$\begin{aligned} \text{Número de salidas} &= \frac{60 \text{ minutos}}{15 \text{ minutos}} \\ &= \frac{60}{15} \\ &= 4 \text{ salidas} \end{aligned}$$

Paso 4: Interpretación

Estas 4 salidas incluyen:

- Salida 1: a las 8:00 (salida inicial)
- Salida 2: a las 8:15
- Salida 3: a las 8:30
- Salida 4: a las 8:45
- Coincidencia: a las 9:00 (siguiente salida)

Observación

Es importante distinguir entre el número de salidas **realizadas** y el número de salidas **totales incluyendo la coincidencia**. En este caso, hasta el momento de la coincidencia (sin incluir la salida de las 9:00), se han realizado 4 salidas desde las 8:00.

Respuesta apartado (b)

El autobús de 15 minutos habrá realizado **4 salidas** en ese tiempo de espera.

2.3. Apartado (c): Aumento porcentual del precio

Solución

Paso 1: Definición de incremento porcentual

Definición

Un **incremento del $p\%$** sobre una cantidad inicial C_0 se calcula como:

$$C_{\text{final}} = C_0 + \frac{p}{100} \times C_0 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right) \quad (2)$$

Paso 2: Datos del problema

Precio inicial: $C_0 = 1,50 \text{ €}$

Incremento porcentual: $p = 5 \%$

Paso 3: Método 1 - Cálculo directo del incremento

Calculamos primero el incremento absoluto:

$$\begin{aligned} \text{Incremento} &= \frac{5}{100} \times 1,50 \text{ €} \\ &= 0,05 \times 1,50 \text{ €} \\ &= 0,075 \text{ €} \end{aligned}$$

Ahora sumamos el incremento al precio inicial:

$$\begin{aligned} \text{Precio final} &= 1,50 \text{ €} + 0,075 \text{ €} \\ &= 1,575 \text{ €} \end{aligned}$$

Paso 4: Método 2 - Usando el factor multiplicativo

$$\begin{aligned} \text{Precio final} &= 1,50 \times \left(1 + \frac{5}{100}\right) \\ &= 1,50 \times (1 + 0,05) \\ &= 1,50 \times 1,05 \\ &= 1,575 \text{ €} \end{aligned}$$

Paso 5: Redondeo

En contextos monetarios, típicamente redondeamos a dos decimales (céntimos):

$$\text{Precio final} = 1,58 \text{ €} \quad (\text{redondeando a céntimos}) \quad (3)$$

O podemos mantener la precisión exacta: $1,575 \text{ €}$

Observación

Sobre el redondeo: En la práctica comercial, los precios se redondean generalmente al céntimo más cercano. Sin embargo, matemáticamente, el resultado exacto es 1,575 €. Ambas respuestas son aceptables dependiendo del contexto.

Respuesta apartado (c)

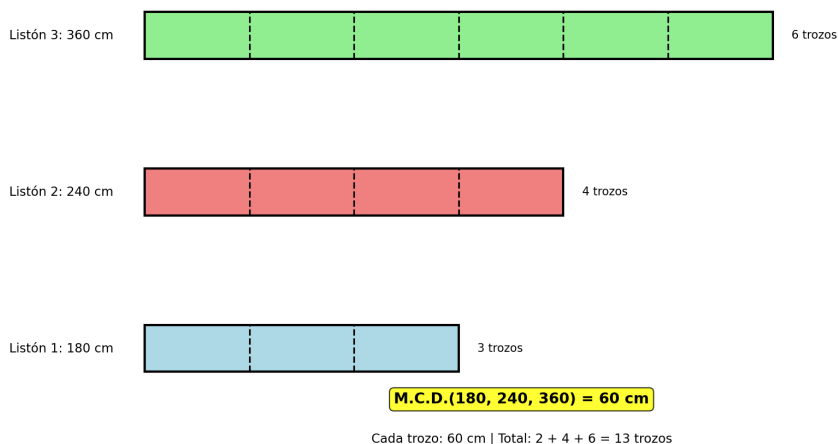
El nuevo precio del autobús es **1.575 €** (o **1.58 €** redondeado).

3. Ejercicio 62: Problema de División Equitativa (M.C.D.)

Ejercicio 62

- a) Un carpintero tiene tres listones de 180 cm, 240 cm y 360 cm. Quiere cortarlos en trozos iguales de la mayor longitud posible sin que sobre ningún resto. ¿Cuál debe ser la longitud de cada trozo?
- b) ¿Cuántos trozos obtendrá de la madera de 360 cm?
- c) Si el precio de venta del trozo es de 2.50€, ¿cuál es el ingreso total si vende todos los trozos?

Ejercicio 62: División de Listones



3.1. Apartado (a): Longitud de cada trozo

Solución

Paso 1: Identificación del problema

Este es un problema típico de **división en partes iguales maximizando el tamaño**. La clave está en las palabras:

- “trozos iguales” $\Rightarrow$ la longitud debe dividir exactamente a todos los listones
- “de la mayor longitud posible” $\Rightarrow$ busquemos el **máximo** de los divisores comunes
- “sin que sobre ningún resto” $\Rightarrow$ división exacta

Por lo tanto, necesitamos calcular el **M.C.D.(180, 240, 360)**.

Paso 2: Cálculo del M.C.D. mediante descomposición en factores primos

Descomposición de 180:

$$\begin{aligned}180 &= 2 \times 90 \\&= 2 \times 2 \times 45 \\&= 2 \times 2 \times 9 \times 5 \\&= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \\&= 2^2 \times 3^2 \times 5^1\end{aligned}$$

Descomposición de 240:

$$\begin{aligned}240 &= 2 \times 120 \\&= 2 \times 2 \times 60 \\&= 2 \times 2 \times 2 \times 30 \\&= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 15 \\&= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \\&= 2^4 \times 3^1 \times 5^1\end{aligned}$$

Descomposición de 360:

$$\begin{aligned}360 &= 2 \times 180 \\&= 2 \times (2^2 \times 3^2 \times 5) \\&= 2^3 \times 3^2 \times 5^1\end{aligned}$$

Paso 3: Aplicación de la fórmula del M.C.D.

Definición

El M.C.D. se calcula tomando todos los factores primos **comunes** a todas las descomposiciones, elevados a la **menor potencia** con la que aparecen.

Resumen de factorización:

$$\begin{aligned}180 &= 2^2 \times 3^2 \times 5^1 \\240 &= 2^4 \times 3^1 \times 5^1 \\360 &= 2^3 \times 3^2 \times 5^1\end{aligned}$$

Factores primos comunes: 2, 3, 5

Mínimas potencias:

$$\begin{aligned}\text{Factor 2: } \min(2, 4, 3) &= 2 \Rightarrow 2^2 \\ \text{Factor 3: } \min(2, 1, 2) &= 1 \Rightarrow 3^1 \\ \text{Factor 5: } \min(1, 1, 1) &= 1 \Rightarrow 5^1\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\text{mcd}(180, 240, 360) &= 2^2 \times 3^1 \times 5^1 \\&= 4 \times 3 \times 5 \\&= 12 \times 5 \\&= 60 \text{ cm}\end{aligned}$$

Paso 4: Verificación

Comprobemos que 60 divide exactamente a cada listón:

$$\frac{180}{60} = 3 \quad \checkmark \quad (\text{número entero})$$

$$\frac{240}{60} = 4 \quad \checkmark \quad (\text{número entero})$$

$$\frac{360}{60} = 6 \quad \checkmark \quad (\text{número entero})$$

Además, verificamos que no existe ningún divisor mayor. Si probamos con 120 (el doble de 60):

$$\frac{180}{120} = 1,5 \quad (\text{no es entero, no sirve})$$

Por lo tanto, 60 cm es efectivamente el máximo divisor común.

Respuesta apartado (a)

La longitud de cada trozo debe ser **60 cm**.

3.2. Apartado (b): Número de trozos del listón de 360 cm**Solución****Paso 1: Planteamiento**

Del apartado anterior sabemos que cada trozo mide 60 cm.

El listón a cortar mide 360 cm.

El número de trozos se obtiene dividiendo la longitud total entre la longitud de cada trozo:

$$\text{Número de trozos} = \frac{\text{Longitud total}}{\text{Longitud de cada trozo}} \quad (4)$$

Paso 2: Cálculo

$$\begin{aligned} \text{Número de trozos} &= \frac{360 \text{ cm}}{60 \text{ cm}} \\ &= \frac{360}{60} \\ &= 6 \text{ trozos} \end{aligned}$$

Paso 3: Verificación

Comprobamos que efectivamente la suma de todos los trozos da la longitud total:

$$6 \times 60 = 360 \text{ cm} \quad \checkmark \quad (5)$$

Respuesta apartado (b)

Del listón de 360 cm se obtendrán **6 trozos**.

3.3. Apartado (c): Ingreso total por la venta

Solución**Paso 1: Cálculo del número total de trozos**

Primero debemos calcular cuántos trozos se obtienen en total de los tres listones.

Del listón de 180 cm:

$$\frac{180}{60} = 3 \text{ trozos} \quad (6)$$

Del listón de 240 cm:

$$\frac{240}{60} = 4 \text{ trozos} \quad (7)$$

Del listón de 360 cm (ya calculado en el apartado b):

$$\frac{360}{60} = 6 \text{ trozos} \quad (8)$$

Total de trozos:

$$\begin{aligned} \text{Total} &= 3 + 4 + 6 \\ &= 13 \text{ trozos} \end{aligned}$$

Paso 2: Cálculo del ingreso total

Datos:

$$\text{Precio por trozo: } p = 2,50 \text{ €}$$

$$\text{Número de trozos: } n = 13$$

El ingreso total es:

$$\text{Ingreso total} = \text{Precio unitario} \times \text{Número de trozos} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \text{Ingreso total} &= 2,50 \text{ €/trozo} \times 13 \text{ trozos} \\ &= (2,50 \times 13) \text{ €} \\ &= 32,50 \text{ €} \end{aligned}$$

Paso 3: Desglose del cálculo (método alternativo)

Podemos verificar calculando el ingreso por cada listón:

$$\text{Ingreso listón 180 cm: } 3 \times 2,50 = 7,50 \text{ €}$$

$$\text{Ingreso listón 240 cm: } 4 \times 2,50 = 10,00 \text{ €}$$

$$\text{Ingreso listón 360 cm: } 6 \times 2,50 = 15,00 \text{ €}$$

$$\text{Ingreso total: } 7,50 + 10,00 + 15,00 = 32,50 \text{ €} \quad \checkmark$$

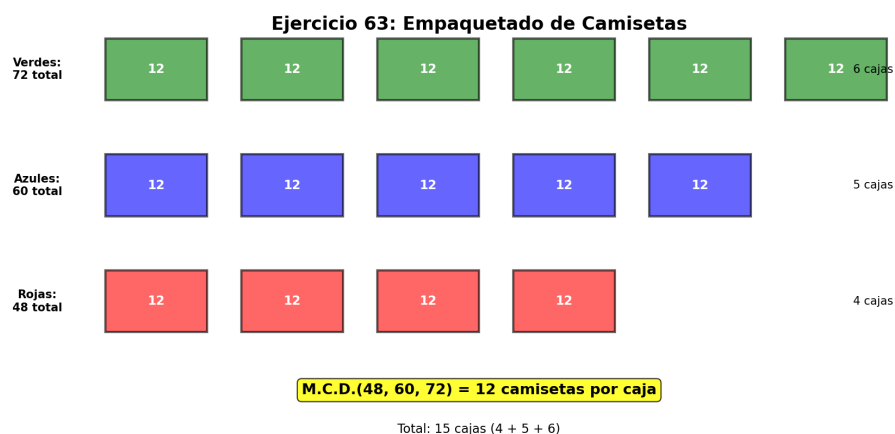
Respuesta apartado (c)

El ingreso total por la venta de todos los trozos es **32.50 €**.

4. Ejercicio 63: Problema de Inventario (M.C.D.)

Ejercicio 63

- a) En una tienda tienen 48 camisetas rojas, 60 camisetas azules y 72 camisetas verdes. Quieren empaquetarlas en cajas iguales, con el mayor número posible de camisetas por caja y sin mezclar colores. ¿Cuántas camisetas debe haber en cada caja?
- b) ¿Cuántas cajas necesitarán en total?
- c) Si se venden el 75 % de las camisetas rojas, ¿cuántas camisetas rojas quedan?



4.1. Apartado (a): Camisetas por caja

Solución

Paso 1: Análisis del problema

Palabras clave:

- “cajas iguales” $\Rightarrow$ el mismo número de camisetas en cada caja
- “mayor número posible” $\Rightarrow$ buscamos el **máximo**
- “sin mezclar colores” $\Rightarrow$ el número debe dividir a 48, 60 y 72 exactamente

Necesitamos calcular: **M.C.D.(48, 60, 72)**

Paso 2: Descomposición en factores primos

Factorización de 48:

$$\begin{aligned}
 48 &= 2 \times 24 \\
 &= 2 \times 2 \times 12 \\
 &= 2 \times 2 \times 2 \times 6 \\
 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \\
 &= 2^4 \times 3^1
 \end{aligned}$$

Factorización de 60:

$$\begin{aligned}60 &= 2 \times 30 \\&= 2 \times 2 \times 15 \\&= 2 \times 2 \times 3 \times 5 \\&= 2^2 \times 3^1 \times 5^1\end{aligned}$$

Factorización de 72:

$$\begin{aligned}72 &= 2 \times 36 \\&= 2 \times 2 \times 18 \\&= 2 \times 2 \times 2 \times 9 \\&= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \\&= 2^3 \times 3^2\end{aligned}$$

Paso 3: Cálculo del M.C.D.

Resumen:

$$\begin{aligned}48 &= 2^4 \times 3^1 \\60 &= 2^2 \times 3^1 \times 5^1 \\72 &= 2^3 \times 3^2\end{aligned}$$

Factores comunes: 2 y 3 (el 5 no aparece en todos)

Mínimas potencias:

$$\begin{aligned}\text{Factor 2: } \min(4, 2, 3) &= 2 \Rightarrow 2^2 \\ \text{Factor 3: } \min(1, 1, 2) &= 1 \Rightarrow 3^1\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\text{mcd}(48, 60, 72) &= 2^2 \times 3^1 \\&= 4 \times 3 \\&= 12 \text{ camisetas}\end{aligned}$$

Paso 4: Verificación

$$\begin{aligned}\frac{48}{12} &= 4 \quad \checkmark \\ \frac{60}{12} &= 5 \quad \checkmark \\ \frac{72}{12} &= 6 \quad \checkmark\end{aligned}$$

Todos son divisiones exactas.

Respuesta apartado (a)

Cada caja debe contener **12 camisetas**.

4.2. Apartado (b): Número total de cajas**Solución****Paso 1: Cálculo por color**

Cajas de camisetas rojas:

$$\frac{48}{12} = 4 \text{ cajas} \quad (10)$$

Cajas de camisetas azules:

$$\frac{60}{12} = 5 \text{ cajas} \quad (11)$$

Cajas de camisetas verdes:

$$\frac{72}{12} = 6 \text{ cajas} \quad (12)$$

Paso 2: Total de cajas

$$\begin{aligned} \text{Total} &= 4 + 5 + 6 \\ &= 15 \text{ cajas} \end{aligned}$$

Verificación:

Total de camisetas: $48 + 60 + 72 = 180$ camisetas

Si cada caja tiene 12 camisetas: $15 \times 12 = 180$ camisetas ✓

Respuesta apartado (b)

Necesitarán **15 cajas** en total.

4.3. Apartado (c): Camisetas rojas restantes**Solución****Paso 1: Datos**

Camisetas rojas iniciales: 48

Porcentaje vendido: 75 %

Paso 2: Cálculo de camisetas vendidas

El 75 % de 48:

$$\begin{aligned} \text{Vendidas} &= \frac{75}{100} \times 48 \\ &= 0,75 \times 48 \\ &= 36 \text{ camisetas} \end{aligned}$$

Paso 3: Cálculo de camisetas restantes

$$\begin{aligned}\text{Restantes} &= \text{Total} - \text{Vendidas} \\ &= 48 - 36 \\ &= 12 \text{ camisetas}\end{aligned}$$

Método alternativo:

Si se vende el 75 %, queda el 25 %:

$$\begin{aligned}\text{Restantes} &= \frac{25}{100} \times 48 \\ &= 0,25 \times 48 \\ &= 12 \text{ camisetas} \quad \checkmark\end{aligned}$$

Observación

Nótese que quedan exactamente 12 camisetas rojas, que es precisamente el número de camisetas por caja calculado en el apartado (a). Esto significa que queda exactamente 1 caja de camisetas rojas.

Respuesta apartado (c)

Quedan **12 camisetas rojas**.

5. Ejercicio 64: Problema de Compra y Gasto con Decimales

Ejercicio 64

- a) Una familia compra: 3.5 kg de manzanas a 1.80€/kg, 2 kg de naranjas a 1.45€/kg y 1.5 kg de patatas a 0.90€/kg. Calcula el coste total de la compra.
 b) Si pagan con un billete de 20€, ¿cuánto les devuelven?
 c) Si el precio de las patatas sube un 10 % el próximo mes, ¿cuál será su nuevo precio por kilogramo?

Ejercicio 64: Compra en el Mercado

	Manzanas 3.5 kg × 1.8€/kg	= 6.30€
	Naranjas 2.0 kg × 1.45€/kg	= 2.90€
	Patatas 1.5 kg × 0.9€/kg	= 1.35€
TOTAL:		10.55€
Paga: 20.00€ → Cambio: 9.45€		

5.1. Apartado (a): Coste total de la compra

Solución

Paso 1: Identificación de datos

Producto	Cantidad (kg)	Precio (€/kg)
Manzanas	3.5	1.80
Naranjas	2	1.45
Patatas	1.5	0.90

Paso 2: Fórmula del coste

Para cada producto:

$$\text{Coste} = \text{Cantidad} \times \text{Precio unitario} \quad (13)$$

Paso 3: Cálculo del coste de manzanas

$$\begin{aligned} \text{Coste manzanas} &= 3,5 \text{ kg} \times 1,80 \text{ €/kg} \\ &= 3,5 \times 1,80 \text{ €} \end{aligned}$$

Desarrollamos la multiplicación:

$$\begin{aligned} 3,5 \times 1,80 &= \frac{35}{10} \times \frac{180}{100} \\ &= \frac{35 \times 180}{10 \times 100} \\ &= \frac{6300}{1000} \\ &= 6,30 \text{ €} \end{aligned}$$

O directamente:

$$\begin{aligned} 3,5 \times 1,80 &= 3,5 \times 1,8 \\ &= (3 + 0,5) \times 1,8 \\ &= 3 \times 1,8 + 0,5 \times 1,8 \\ &= 5,4 + 0,9 \\ &= 6,30 \text{ €} \end{aligned}$$

Paso 4: Cálculo del coste de naranjas

$$\begin{aligned} \text{Coste naranjas} &= 2 \text{ kg} \times 1,45 \text{ €/kg} \\ &= 2 \times 1,45 \text{ €} \\ &= 2,90 \text{ €} \end{aligned}$$

Paso 5: Cálculo del coste de patatas

$$\begin{aligned} \text{Coste patatas} &= 1,5 \text{ kg} \times 0,90 \text{ €/kg} \\ &= 1,5 \times 0,90 \text{ €} \end{aligned}$$

Desarrollamos:

$$\begin{aligned} 1,5 \times 0,90 &= \frac{15}{10} \times \frac{90}{100} \\ &= \frac{15 \times 90}{1000} \\ &= \frac{1350}{1000} \\ &= 1,35 \text{ €} \end{aligned}$$

Paso 6: Coste total

$$\begin{aligned} \text{Coste total} &= \text{Coste manzanas} + \text{Coste naranjas} + \text{Coste patatas} \\ &= 6,30 + 2,90 + 1,35 \\ &= 9,20 + 1,35 \\ &= 10,55 \text{ €} \end{aligned}$$

Verificación paso a paso de la suma:

6,30	
+ 2,90	
height	9,20
+ 1,35	
height	10,55 €

Respuesta apartado (a)

El coste total de la compra es **10.55 €**.

5.2. Apartado (b): Cambio devuelto**Solución****Paso 1: Datos**

Importe pagado:	20,00 €
Coste de la compra:	10,55 €

Paso 2: Cálculo del cambio

$$\begin{aligned}
 \text{Cambio} &= \text{Importe pagado} - \text{Coste de la compra} \\
 &= 20,00 - 10,55 \\
 &= 9,45 \text{ €}
 \end{aligned}$$

Verificación de la resta:

Método de la resta por columnas:

20,00	
– 10,55	
height	9,45

Comprobación sumando: $10,55 + 9,45 = 20,00$ ✓

Respuesta apartado (b)

Les devuelven **9.45 €**.

5.3. Apartado (c): Nuevo precio de las patatas**Solución****Paso 1: Datos**

Precio actual de patatas: $p_0 = 0,90 \text{ €/kg}$

Incremento: 10 %

Paso 2: Cálculo del incremento

$$\begin{aligned}\text{Incremento} &= \frac{10}{100} \times 0,90 \\ &= 0,10 \times 0,90 \\ &= 0,09 \text{ €/kg}\end{aligned}$$

Paso 3: Nuevo precio

$$\begin{aligned}\text{Nuevo precio} &= \text{Precio actual} + \text{Incremento} \\ &= 0,90 + 0,09 \\ &= 0,99 \text{ €/kg}\end{aligned}$$

Método alternativo con factor multiplicativo:

$$\begin{aligned}\text{Nuevo precio} &= 0,90 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) \\ &= 0,90 \times 1,10 \\ &= 0,99 \text{ €/kg} \quad \checkmark\end{aligned}$$

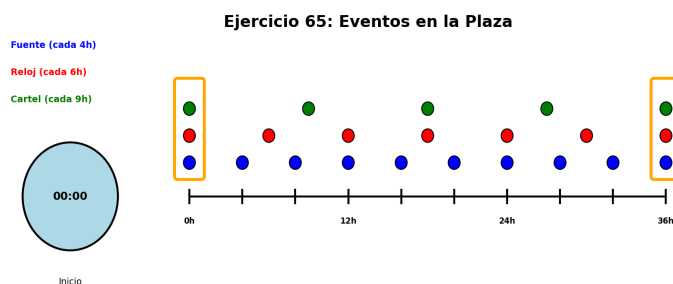
Respuesta apartado (c)

El nuevo precio de las patatas será **0.99 €/kg**.

6. Ejercicio 65: Problema de Tiempos de Eventos (M.C.M.)

Ejercicio 65

- a) En una plaza, una fuente se enciende cada 4 horas, un reloj toca las campanadas cada 6 horas y un cartel luminoso se ilumina cada 9 horas. Si coincidieron a medianoche (00:00), ¿a qué hora volverán a coincidir los tres eventos?
- b) ¿Cuántas horas pasarán hasta la siguiente coincidencia?
- c) ¿Cuántas veces se habrá encendido la fuente en ese intervalo de tiempo?



$$\text{M.C.M.}(4, 6, 9) = 36 \text{ horas} = 1 \text{ día} + 12 \text{ horas}$$

6.1. Apartado (a): Hora de coincidencia

Solución

Paso 1: Análisis del problema

Este es otro problema de **coincidencia de eventos periódicos**. Necesitamos calcular el M.C.M. de los períodos.

Períodos:

Fuente: 4 horas

Reloj: 6 horas

Cartel: 9 horas

Paso 2: Cálculo del M.C.M.(4, 6, 9)

Descomposición en factores primos:

Para 4:

$$4 = 2^2 \quad (14)$$

Para 6:

$$6 = 2 \times 3 = 2^1 \times 3^1 \quad (15)$$

Para 9:

$$9 = 3^2 \quad (16)$$

Paso 3: Aplicación de la fórmula del M.C.M.

Resumen:

$$4 = 2^2$$

$$6 = 2^1 \times 3^1$$

$$9 = 3^2$$

Todos los factores primos presentes: 2, 3

Máximas potencias:

$$\text{Factor 2: } \max(2, 1, 0) = 2 \Rightarrow 2^2$$

$$\text{Factor 3: } \max(0, 1, 2) = 2 \Rightarrow 3^2$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \text{mcm}(4, 6, 9) &= 2^2 \times 3^2 \\ &= 4 \times 9 \\ &= 36 \text{ horas} \end{aligned}$$

Paso 4: Conversión a días y horas

$$\begin{aligned} 36 \text{ horas} &= \frac{36}{24} \text{ días} \\ &= 1 \text{ día} + \frac{12}{24} \text{ días} \\ &= 1 \text{ día} + 12 \text{ horas} \\ &= 1 \text{ día y } 12 \text{ horas} \end{aligned}$$

Paso 5: Cálculo de la hora exacta

Partiendo de medianoche (00:00):

$$\begin{aligned} \text{Hora de coincidencia} &= 00 : 00 + 36 \text{ horas} \\ &= 00 : 00 + 1 \text{ día} + 12 \text{ horas} \\ &= \text{Día siguiente a las } 12 : 00 \end{aligned}$$

Si consideramos que empezamos el día 1 a las 00:00, coinciden el día 2 a las 12:00 (mediodía).

Verificación:

$$\begin{aligned} \text{Fuente (cada 4 h): } & \frac{36}{4} = 9 \text{ veces} \quad \checkmark \\ \text{Reloj (cada 6 h): } & \frac{36}{6} = 6 \text{ veces} \quad \checkmark \\ \text{Cartel (cada 9 h): } & \frac{36}{9} = 4 \text{ veces} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Respuesta apartado (a)

Volverán a coincidir **36 horas después**, es decir, al **mediodía (12:00) del día siguiente**.

6.2. Apartado (b): Horas hasta la coincidencia**Solución**

Ya calculamos en el apartado (a) que el tiempo hasta la siguiente coincidencia es el M.C.M. de los períodos.

$$\text{Tiempo hasta coincidencia} = \text{mcm}(4, 6, 9) = 36 \text{ horas} \quad (17)$$

Respuesta apartado (b)

Pasarán **36 horas** hasta la siguiente coincidencia.

6.3. Apartado (c): Veces que se enciende la fuente**Solución****Paso 1: Datos**

Período de la fuente: 4 horas
Tiempo total: 36 horas

Paso 2: Cálculo

$$\begin{aligned} \text{Número de encendidos} &= \frac{\text{Tiempo total}}{\text{Período}} \\ &= \frac{36}{4} \\ &= 9 \text{ veces} \end{aligned}$$

Paso 3: Interpretación

Estos 9 encendidos ocurren a las:

00 : 00 (inicial)
04 : 00
08 : 00
12 : 00
16 : 00
20 : 00
00 : 00 (día 2)
04 : 00 (día 2)
08 : 00 (día 2)
12 : 00 (día 2, coincidencia)

Observación

Si contamos desde el encendido inicial (00:00) hasta la coincidencia (12:00 del día 2), la fuente se ha encendido 9 veces. Si preguntaran cuántas veces se enciende *entre* las dos coincidencias (excluyendo ambas), serían 8 veces.

Respuesta apartado (c)

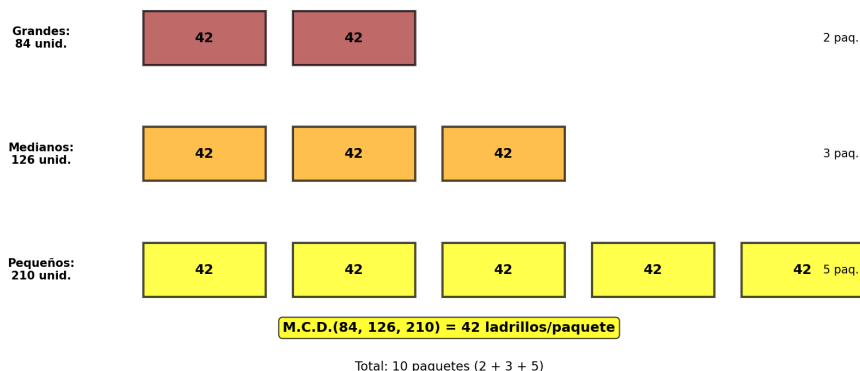
La fuente se habrá encendido **9 veces** en ese intervalo.

7. Ejercicio 66: Problema de Paquetes de Ladrillos (M.C.D.)

Ejercicio 66

- a) Un albañil dispone de 84 ladrillos grandes, 126 ladrillos medianos y 210 ladrillos pequeños. Desea hacer paquetes iguales con el máximo número posible de ladrillos sin mezclar. ¿Cuántos ladrillos pondrá en cada paquete?
- b) ¿Cuántos paquetes hará de ladrillos grandes?
- c) Si cada paquete se vende a 3.50€, ¿cuál es el ingreso total por la venta de todos los paquetes de ladrillos medianos?

Ejercicio 66: Paquetes de Ladrillos



7.1. Apartado (a): Ladrillos por paquete

Solución

Paso 1: Análisis

Palabras clave:

- “paquetes iguales” $\Rightarrow$ mismo número de ladrillos en cada paquete
- “máximo número posible” $\Rightarrow$ busquemos el máximo
- “sin mezclar” $\Rightarrow$ división exacta de cada tipo

Necesitamos: M.C.D.(84, 126, 210)

Paso 2: Descomposición en factores primos

Factorización de 84:

$$\begin{aligned}
 84 &= 2 \times 42 \\
 &= 2 \times 2 \times 21 \\
 &= 2 \times 2 \times 3 \times 7 \\
 &= 2^2 \times 3^1 \times 7^1
 \end{aligned}$$

Factorización de 126:

$$\begin{aligned}126 &= 2 \times 63 \\&= 2 \times 9 \times 7 \\&= 2 \times 3^2 \times 7 \\&= 2^1 \times 3^2 \times 7^1\end{aligned}$$

Factorización de 210:

$$\begin{aligned}210 &= 2 \times 105 \\&= 2 \times 5 \times 21 \\&= 2 \times 5 \times 3 \times 7 \\&= 2^1 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1\end{aligned}$$

Paso 3: Cálculo del M.C.D.

Resumen:

$$\begin{aligned}84 &= 2^2 \times 3^1 \times 7^1 \\126 &= 2^1 \times 3^2 \times 7^1 \\210 &= 2^1 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1\end{aligned}$$

Factores comunes: 2, 3, 7 (el 5 no está en todos)

Mínimas potencias:

$$\begin{aligned}\text{Factor 2: } \min(2, 1, 1) &= 1 \Rightarrow 2^1 \\ \text{Factor 3: } \min(1, 2, 1) &= 1 \Rightarrow 3^1 \\ \text{Factor 7: } \min(1, 1, 1) &= 1 \Rightarrow 7^1\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\text{mcd}(84, 126, 210) &= 2^1 \times 3^1 \times 7^1 \\&= 2 \times 3 \times 7 \\&= 6 \times 7 \\&= 42 \text{ ladrillos}\end{aligned}$$

Verificación:

$$\begin{aligned}\frac{84}{42} &= 2 \quad \checkmark \\ \frac{126}{42} &= 3 \quad \checkmark \\ \frac{210}{42} &= 5 \quad \checkmark\end{aligned}$$

Respuesta apartado (a)

Cada paquete contendrá **42 ladrillos**.

7.2. Apartado (b): Paquetes de ladrillos grandes**Solución****Paso 1: Cálculo**

$$\begin{aligned}\text{Paquetes de ladrillos grandes} &= \frac{84}{42} \\ &= 2 \text{ paquetes}\end{aligned}$$

Verificación: $2 \times 42 = 84 \checkmark$

Respuesta apartado (b)

Hará **2 paquetes** de ladrillos grandes.

7.3. Apartado (c): Ingreso por ladrillos medianos**Solución****Paso 1: Cálculo del número de paquetes de ladrillos medianos**

$$\begin{aligned}\text{Paquetes medianos} &= \frac{126}{42} \\ &= 3 \text{ paquetes}\end{aligned}$$

Paso 2: Cálculo del ingreso

$$\begin{aligned}\text{Ingreso} &= \text{Número de paquetes} \times \text{Precio por paquete} \\ &= 3 \times 3,50 \text{ €} \\ &= 10,50 \text{ €}\end{aligned}$$

Respuesta apartado (c)

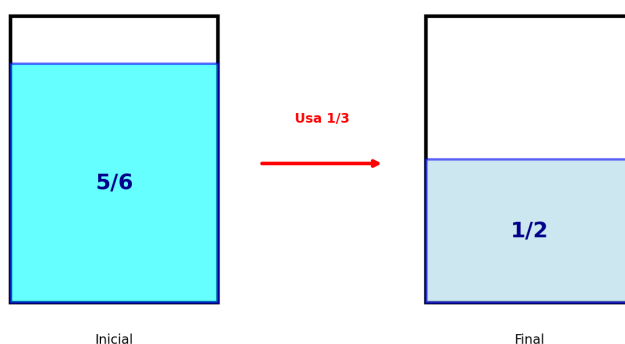
El ingreso por la venta de todos los paquetes de ladrillos medianos es **10.50 €**.

8. Ejercicio 67: Problema de Tanque de Agua (Fracciones y Restas)

Ejercicio 67

- a) Un tanque de agua está lleno hasta sus $\frac{5}{6}$ partes. Se utiliza $\frac{1}{3}$ de la capacidad total para regar. ¿Qué fracción del tanque queda con agua?
- b) Si la capacidad total del tanque es de 1,200 litros, ¿cuántos litros de agua quedan?
- c) ¿Cuántos litros de agua se han utilizado para regar?

Ejercicio 67: Tanque de Agua



$$\frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Quedan: 600 litros (de 1200 totales)

8.1. Apartado (a): Fracción restante

Solución

Paso 1: Identificación de datos

Nivel inicial del tanque: $\frac{5}{6}$ de la capacidad total

Agua utilizada para regar: $\frac{1}{3}$ de la capacidad total

Observación importante: Ambas fracciones están expresadas respecto a la **capacidad total** del tanque, no respecto al agua que hay. Esto es fundamental para realizar correctamente la operación.

Paso 2: Planteamiento

El agua que queda se calcula como:

$$\text{Agua restante} = \text{Agua inicial} - \text{Agua utilizada} \quad (18)$$

$$\text{Agua restante} = \frac{5}{6} - \frac{1}{3}$$

Paso 3: Cálculo del M.C.M. de los denominadores

Denominadores: 6 y 3

Factorizaciones:

$$6 = 2 \times 3$$

$$3 = 3$$

$$\text{mcm}(6, 3) = 6 \quad (19)$$

Paso 4: Reducción a común denominador

La primera fracción ya tiene denominador 6:

$$\frac{5}{6} = \frac{5}{6} \quad (20)$$

Convertimos la segunda fracción a denominador 6:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= \frac{1 \times 2}{3 \times 2} \\ &= \frac{2}{6} \end{aligned}$$

Justificación: Multiplicamos numerador y denominador por 2 porque $6 = 3 \times 2$.**Paso 5: Resta de fracciones**

$$\begin{aligned} \frac{5}{6} - \frac{2}{6} &= \frac{5-2}{6} \\ &= \frac{3}{6} \end{aligned}$$

Paso 6: Simplificación

Buscamos el M.C.D.(3, 6):

$$3 = 3$$

$$6 = 2 \times 3$$

$$\text{mcd}(3, 6) = 3 \quad (21)$$

Dividimos numerador y denominador por 3:

$$\begin{aligned} \frac{3}{6} &= \frac{3 \div 3}{6 \div 3} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Verificación:Comprobemos que $\frac{1}{2}$ es equivalente a $\frac{3}{6}$:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6} \quad \checkmark \quad (22)$$

Respuesta apartado (a)

Queda $\frac{1}{2}$ (o $\frac{3}{6}$) del tanque con agua.

8.2. Apartado (b): Litros de agua restantes**Solución****Paso 1: Datos**

Capacidad total: 1200 litros
Fracción restante: $\frac{1}{2}$

Paso 2: Cálculo

Para calcular una fracción de una cantidad:

$$\frac{a}{b} \text{ de } C = \frac{a}{b} \times C \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \text{Litros restantes} &= \frac{1}{2} \times 1200 \\ &= \frac{1200}{2} \\ &= 600 \text{ litros} \end{aligned}$$

Verificación:

La mitad de 1200 es efectivamente 600, ya que $600 + 600 = 1200$ ✓

Respuesta apartado (b)

Quedan **600 litros** de agua.

8.3. Apartado (c): Litros utilizados para regar**Solución****Paso 1: Método 1 - Usando la fracción**

Del enunciado sabemos que se utilizó $\frac{1}{3}$ de la capacidad total:

$$\begin{aligned} \text{Litros utilizados} &= \frac{1}{3} \times 1200 \\ &= \frac{1200}{3} \\ &= 400 \text{ litros} \end{aligned}$$

Paso 2: Método 2 - Por diferencia

También podemos calcularlo como la diferencia entre lo que había inicialmente y lo que queda:

Litros iniciales:

$$\begin{aligned}\frac{5}{6} \times 1200 &= \frac{5 \times 1200}{6} \\ &= \frac{6000}{6} \\ &= 1000 \text{ litros}\end{aligned}$$

Litros utilizados:

$$\begin{aligned}\text{Utilizados} &= 1000 - 600 \\ &= 400 \text{ litros} \quad \checkmark\end{aligned}$$

Ambos métodos coinciden, lo que verifica nuestra respuesta.

Respuesta apartado (c)

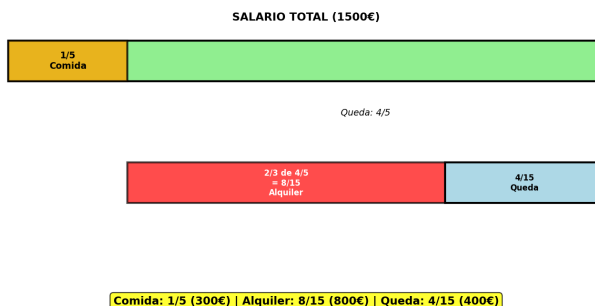
Se han utilizado **400 litros** de agua para regar.

9. Ejercicio 68: Problema de Gasto de Salario (Fracciones)

Ejercicio 68

- a) Una persona gasta $\frac{1}{5}$ de su salario en comida y $\frac{2}{3}$ de lo que le queda en alquiler.
¿Qué fracción de su salario gasta en alquiler?
b) ¿Qué fracción del salario le queda al final?
c) Si su salario es de 1,500€, ¿cuánto dinero le queda?

Ejercicio 68: Gasto del Salario



9.1. Apartado (a): Fracción gastada en alquiler

Solución

Paso 1: Análisis del problema

Atención: Este problema tiene una sutileza importante. El gasto en alquiler **NO** es $\frac{2}{3}$ del salario total, sino $\frac{2}{3}$ de lo que queda **después** de gastar en comida.

Desglosemos paso a paso:

Paso 2: Cálculo de lo que queda después de comida

Si gasta $\frac{1}{5}$ en comida, le queda:

$$\text{Resto después de comida} = 1 - \frac{1}{5}$$

Expresamos 1 como fracción con denominador 5:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{5} &= \frac{5}{5} - \frac{1}{5} \\ &= \frac{5-1}{5} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Paso 3: Cálculo del gasto en alquiler

El gasto en alquiler es $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$:

$$\text{Alquiler} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$$

Multiplicación de fracciones:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} &= \frac{2 \times 4}{3 \times 5} \\ &= \frac{8}{15} \end{aligned}$$

Paso 4: Verificación de que es irreducible

Buscamos $\text{mcd}(8, 15)$:

$$\begin{aligned} 8 &= 2^3 \\ 15 &= 3 \times 5 \end{aligned}$$

No tienen factores comunes, por lo tanto $\text{mcd}(8, 15) = 1$.

La fracción $\frac{8}{15}$ ya está en su forma irreducible.

Observación

Error común: Algunos estudiantes podrían pensar que el gasto total es $\frac{1}{5} + \frac{2}{3}$, pero esto es incorrecto porque el $\frac{2}{3}$ no se refiere al salario total sino a lo que queda después de gastar en comida.

Respuesta apartado (a)

Gasta $\frac{8}{15}$ de su salario en alquiler.

9.2. Apartado (b): Fracción que le queda

Solución

Paso 1: Cálculo del gasto total

$$\begin{aligned} \text{Gasto total} &= \text{Comida} + \text{Alquiler} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{8}{15} \end{aligned}$$

Paso 2: Reducción a común denominador

$$\text{mcm}(5, 15) = 15$$

Convertimos $\frac{1}{5}$ a denominador 15:

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} &= \frac{1 \times 3}{5 \times 3} \\ &= \frac{3}{15} \end{aligned}$$

Paso 3: Suma de fracciones

$$\begin{aligned}\frac{3}{15} + \frac{8}{15} &= \frac{3+8}{15} \\ &= \frac{11}{15}\end{aligned}$$

Paso 4: Cálculo de lo que queda

$$\begin{aligned}\text{Resto} &= 1 - \frac{11}{15} \\ &= \frac{15}{15} - \frac{11}{15} \\ &= \frac{15-11}{15} \\ &= \frac{4}{15}\end{aligned}$$

Verificación:

Sumemos todo lo gastado y lo que queda:

$$\frac{11}{15} + \frac{4}{15} = \frac{15}{15} = 1 \quad \checkmark$$

Respuesta apartado (b)

Le queda $\frac{4}{15}$ del salario.

9.3. Apartado (c): Dinero restante en euros**Solución****Paso 1: Datos**

$$\begin{aligned}\text{Salario total:} & \quad 1500 \text{ €} \\ \text{Fracción restante:} & \quad \frac{4}{15}\end{aligned}$$

Paso 2: Cálculo

$$\begin{aligned}\text{Dinero restante} &= \frac{4}{15} \times 1500 \\ &= \frac{4 \times 1500}{15} \\ &= \frac{6000}{15}\end{aligned}$$

Simplificamos la división:

$$\begin{aligned}\frac{6000}{15} &= \frac{6000 \div 15}{15 \div 15} \\ &= \frac{400}{1} \\ &= 400 \text{ €}\end{aligned}$$

Verificación alternativa:

Calculemos los gastos:

Comida: $\frac{1}{5} \times 1500 = 300 \text{ €}$

Alquiler: $\frac{8}{15} \times 1500 = \frac{12000}{15} = 800 \text{ €}$

Total gastado: $300 + 800 = 1100 \text{ €}$

Restante: $1500 - 1100 = 400 \text{ €} \checkmark$

Respuesta apartado (c)

Le quedan **400 €**.

10. Ejercicio 69: Problema de Recorrido de Viaje (Fracciones y Resta)

Ejercicio 69

- a) Un viajero ha recorrido $\frac{3}{8}$ de un trayecto por la mañana y $\frac{1}{4}$ del trayecto por la tarde. Si el trayecto total es de 240 km, ¿cuántos kilómetros le faltan por recorrer?
 b) ¿Qué fracción del trayecto le falta por recorrer?
 c) Si recorre $\frac{2}{3}$ de la distancia restante, ¿cuántos kilómetros ha recorrido en total hasta ese momento?

Ejercicio 69: Recorrido del Viaje



Total recorrido hasta parte (c): $90 + 60 + 60 = 210$ km

10.1. Apartado (a): Kilómetros restantes

Solución

Paso 1: Datos

Trayecto total: 240 km
 Recorrido por la mañana: $\frac{3}{8}$ del total
 Recorrido por la tarde: $\frac{1}{4}$ del total

Paso 2: Cálculo del total recorrido (en fracción)

$$\text{Total recorrido} = \frac{3}{8} + \frac{1}{4}$$

Reducimos a común denominador. $\text{mcm}(8, 4) = 8$:

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 2}{4 \times 2} = \frac{2}{8}$$

$$\begin{aligned}\frac{3}{8} + \frac{2}{8} &= \frac{3+2}{8} \\ &= \frac{5}{8}\end{aligned}$$

Paso 3: Cálculo de la fracción restante

$$\begin{aligned}\text{Fracción restante} &= 1 - \frac{5}{8} \\ &= \frac{8}{8} - \frac{5}{8} \\ &= \frac{3}{8}\end{aligned}$$

Paso 4: Conversión a kilómetros

$$\begin{aligned}\text{Kilómetros restantes} &= \frac{3}{8} \times 240 \\ &= \frac{3 \times 240}{8} \\ &= \frac{720}{8}\end{aligned}$$

Simplificamos:

$$\begin{aligned}\frac{720}{8} &= \frac{720 \div 8}{8 \div 8} \\ &= \frac{90}{1} \\ &= 90 \text{ km}\end{aligned}$$

Verificación:

Calculemos lo recorrido en km:

$$\text{Mañana: } \frac{3}{8} \times 240 = \frac{720}{8} = 90 \text{ km}$$

$$\text{Tarde: } \frac{1}{4} \times 240 = \frac{240}{4} = 60 \text{ km}$$

$$\text{Total recorrido: } 90 + 60 = 150 \text{ km}$$

$$\text{Restante: } 240 - 150 = 90 \text{ km } \checkmark$$

Respuesta apartado (a)

Le faltan **90 km** por recorrer.

10.2. Apartado (b): Fracción restante**Solución**

Ya calculamos esta fracción en el apartado (a), paso 3:

$$\text{Fracción restante} = \frac{3}{8} \quad (25)$$

Verificación:

Comprobamos con los datos numéricos:

$$\frac{\text{km restantes}}{\text{km totales}} = \frac{90}{240}$$

Simplificamos dividiendo numerador y denominador por su M.C.D.:

$\text{mcd}(90, 240)$:

$$90 = 2 \times 3^2 \times 5$$

$$240 = 2^4 \times 3 \times 5$$

$$\text{mcd}(90, 240) = 2 \times 3 \times 5 = 30$$

$$\begin{aligned} \frac{90}{240} &= \frac{90 \div 30}{240 \div 30} \\ &= \frac{3}{8} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Respuesta apartado (b)

Le falta $\frac{3}{8}$ del trayecto por recorrer.

10.3. Apartado (c): Total recorrido hasta ese momento**Solución****Paso 1: Cálculo de lo recorrido de la distancia restante**

Distancia restante: 90 km

Recorre $\frac{2}{3}$ de esos 90 km:

$$\begin{aligned} \text{Nuevos km recorridos} &= \frac{2}{3} \times 90 \\ &= \frac{2 \times 90}{3} \\ &= \frac{180}{3} \\ &= 60 \text{ km} \end{aligned}$$

Paso 2: Total recorrido

Ya había recorrido anteriormente (mañana + tarde): 150 km
Ahora recorre 60 km más:

$$\begin{aligned}\text{Total recorrido} &= 150 + 60 \\ &= 210 \text{ km}\end{aligned}$$

Verificación:

Le quedarían por recorrer:

$$240 - 210 = 30 \text{ km}$$

Comprobemos que esto es $\frac{1}{3}$ de los 90 km que quedaban:

$$\frac{1}{3} \times 90 = 30 \text{ km} \quad \checkmark$$

Esto tiene sentido porque si recorrió $\frac{2}{3}$ de lo restante, le queda $\frac{1}{3}$.

Respuesta apartado (c)

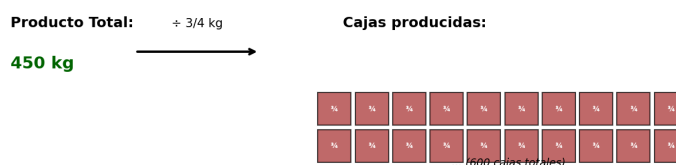
Ha recorrido en total **210 km** hasta ese momento.

11. Ejercicio 70: Problema de Embalaje de Cajas (División de Fracciones)

Ejercicio 70

- a) Una empresa tiene 450 kg de un producto. Quieren envasarlo en cajas que contengan $\frac{3}{4}$ de kilogramo cada una. ¿Cuántas cajas podrán llenar?
- b) Si cada caja vacía cuesta 0.25€, ¿cuál es el coste total de las cajas necesarias?
- c) Si el precio de venta de cada caja llena es de 1.50€, ¿cuál es el ingreso total por la venta de todas las cajas?

Ejercicio 70: Embalaje de Cajas



Cálculo:

Número de cajas: $450 \div (\frac{3}{4}) = 450 \times (\frac{4}{3}) = 600$ cajas

Coste cajas: $600 \times 0.25\text{€} = 150\text{€}$

Ingreso venta: $600 \times 1.50\text{€} = 900\text{€}$

Beneficio: $900\text{€} - 150\text{€} = 750\text{€}$

11.1. Apartado (a): Número de cajas

Solución

Paso 1: Planteamiento del problema

Tenemos que dividir la cantidad total entre la capacidad de cada caja.

$$\begin{aligned} \text{Número de cajas} &= \frac{\text{Cantidad total}}{\text{Capacidad por caja}} \\ &= \frac{450 \text{ kg}}{\frac{3}{4} \text{ kg/caja}} \end{aligned}$$

Paso 2: División por una fracción

Definición**Regla de la división por una fracción:**

Dividir por una fracción es equivalente a multiplicar por su inversa (recíproca):

$$a \div \frac{b}{c} = a \times \frac{c}{b} \quad (26)$$

Justificación: La fracción inversa de $\frac{3}{4}$ es $\frac{4}{3}$.

$$450 \div \frac{3}{4} = 450 \times \frac{4}{3}$$

Paso 3: Cálculo

$$\begin{aligned} 450 \times \frac{4}{3} &= \frac{450 \times 4}{3} \\ &= \frac{1800}{3} \end{aligned}$$

Simplificamos:

$$\frac{1800}{3} = 600 \text{ cajas}$$

Paso 4: Verificación

Comprobemos que 600 cajas de $\frac{3}{4}$ kg dan 450 kg:

$$\begin{aligned} 600 \times \frac{3}{4} &= \frac{600 \times 3}{4} \\ &= \frac{1800}{4} \\ &= 450 \text{ kg} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Observación

Interpretación intuitiva: Si cada caja contiene $\frac{3}{4}$ kg, en 1 kg caben $\frac{4}{3}$ cajas. Por lo tanto, en 450 kg cabrán $450 \times \frac{4}{3} = 600$ cajas.

Respuesta apartado (a)

Podrán llenar **600 cajas**.

11.2. Apartado (b): Coste total de las cajas**Solución****Paso 1: Datos**

Número de cajas: 600

Precio por caja: 0,25 €

Paso 2: Cálculo

$$\begin{aligned}\text{Coste total} &= 600 \times 0,25 \\ &= 600 \times \frac{25}{100} \\ &= 600 \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{600}{4} \\ &= 150 \text{ €}\end{aligned}$$

Método alternativo:

$$\begin{aligned}600 \times 0,25 &= 600 \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{600}{4} \\ &= 150 \text{ €} \quad \checkmark\end{aligned}$$

Respuesta apartado (b)El coste total de las cajas necesarias es **150 €**.**11.3. Apartado (c): Ingreso total por la venta****Solución****Paso 1: Datos**

Número de cajas: 600

Precio de venta por caja: 1,50 €

Paso 2: Cálculo

$$\begin{aligned}\text{Ingreso total} &= 600 \times 1,50 \\ &= 600 \times \frac{150}{100} \\ &= 600 \times \frac{3}{2} \\ &= \frac{600 \times 3}{2} \\ &= \frac{1800}{2} \\ &= 900 \text{ €}\end{aligned}$$

Método alternativo más directo:

$$\begin{aligned}600 \times 1,50 &= 600 \times 1,5 \\ &= 600 + 300 \\ &= 900 \text{ €} \quad \checkmark\end{aligned}$$

Paso 3: Análisis adicional (beneficio)

Aunque no lo pide el ejercicio, podemos calcular el beneficio:

$$\begin{aligned}\text{Beneficio} &= \text{Ingresos} - \text{Costes} \\ &= 900 - 150 \\ &= 750 \text{ €}\end{aligned}$$

Respuesta apartado (c)

El ingreso total por la venta de todas las cajas es **900 €**.

12. Resumen de Resultados

Ejercicio	Resultados Principales
61	a) 9:00 a.m. b) 4 salidas c) 1.575 €
62	a) 60 cm b) 6 trozos c) 32.50 €
63	a) 12 camisetas b) 15 cajas c) 12 camisetas
64	a) 10.55 € b) 9.45 € c) 0.99 €/kg
65	a) 12:00 día siguiente b) 36 horas c) 9 veces
66	a) 42 ladrillos b) 2 paquetes c) 10.50 €
67	a) $\frac{1}{2}$ b) 600 litros c) 400 litros
68	a) $\frac{8}{15}$ b) $\frac{4}{15}$ c) 400 €
69	a) 90 km b) $\frac{3}{8}$ c) 210 km
70	a) 600 cajas b) 150 € c) 900 €

13. Conclusiones Pedagógicas

13.1. Conceptos clave trabajados

En estos 10 ejercicios hemos trabajado exhaustivamente:

1. M.C.M. (Mínimo Común Múltiplo): Ejercicios 61 y 65

- Aplicación en problemas de coincidencia de eventos periódicos
- Método de descomposición en factores primos

2. M.C.D. (Máximo Común Divisor): Ejercicios 62, 63 y 66

- Aplicación en problemas de división en partes iguales
- Maximización del tamaño de cada parte

3. Operaciones con decimales: Ejercicio 64

- Multiplicación y suma de decimales
- Cálculos monetarios

4. Operaciones con fracciones: Ejercicios 67, 68, 69 y 70

- Suma y resta de fracciones
- Multiplicación de fracciones
- División por fracciones
- Fracción de una cantidad

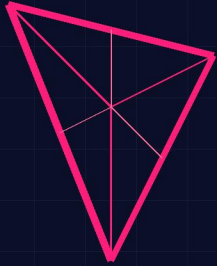
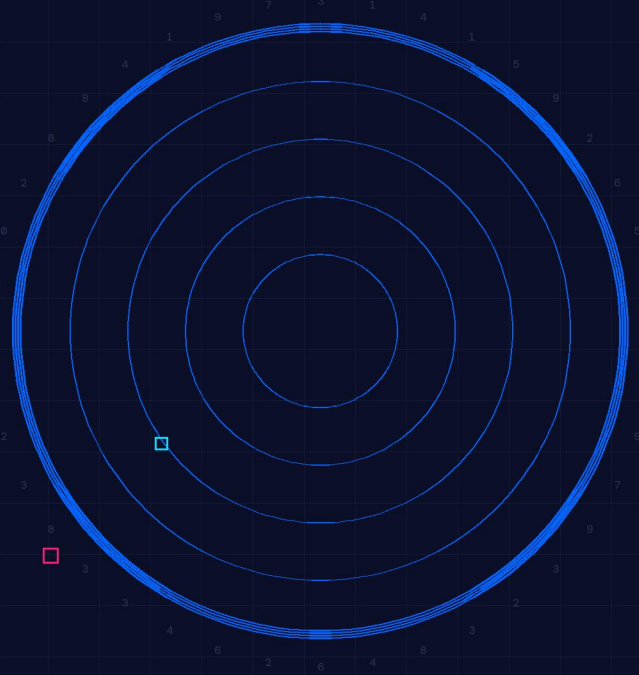
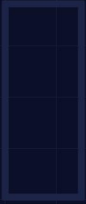
5. Porcentajes: Ejercicios 61c, 63c y 64c

- Incrementos porcentuales
- Cálculo de porcentajes

13.2. Errores comunes a evitar

- Confundir cuándo usar M.C.M. y cuándo M.C.D.
- En fracciones encadenadas, no identificar correctamente la base de referencia
- Olvidar simplificar fracciones al resultado final
- No verificar que las divisiones son exactas
- Errores en la jerarquía de operaciones

Fin del Documento



MATEMÁTICAS

3º ESO

CURSO 2025-2026



$x^2 + y^2 = r^2$
 $y = mx + b$
 $a^2 + b^2 = c^2$
 $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$
 $f(x) = ax^2 + bx + c$



EXAMEN DE MATEMÁTICAS

Nombre y Apellidos: _____ Fecha: _____ Curso: 3ºA ESO

Nº1: Problemas con Fracciones y Aplicaciones

a) De un depósito de agua, se consume $\frac{1}{4}$ de su contenido, y después se consume $\frac{2}{5}$ de lo que quedaba. Si aún quedan **900** litros, ¿cuál es la capacidad total del depósito?

b) Tres amigos se reparten una herencia: el primero recibe $\frac{3}{5}$ del total; el segundo recibe $\frac{5}{8}$ de lo que queda, y el tercero se lleva los últimos **375**. ¿A cuánto ascendía la herencia? ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

c) En una clase, $\frac{5}{9}$ de los alumnos están matriculados en la ESO. El número de alumnos matriculados en Bachillerato es de **280**. Calcúlese el número total de alumnos en el Instituto (ESO y Bachillerato).

Nº2: Notación Científica y Potencias

a) Realiza la siguiente operación, expresando el resultado en notación científica:

$$4,5 \cdot 10^{-3} + 8,2 \cdot 10^{-4}$$

b) Utiliza las propiedades de las potencias para simplificar la siguiente expresión:

$$\frac{2^5 \cdot 9^{-2} \cdot 3^4}{6^3 \cdot 4^{-1}}$$

c) Escribe la fracción generatriz del número decimal $1,3\overline{6}$.

Nº3: Radicales y Simplificación

Opera y simplifica al máximo las siguientes expresiones con radicales:

a) $\sqrt{20} - 3\sqrt{45} + \sqrt{5}$

b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} + 2\sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{24} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{81}$

Nº4: Operaciones Combinadas con Fracciones

Calcúlese, paso a paso, las siguientes operaciones combinadas:

a) $\frac{2}{3} + \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{6}\right) \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{12}$

b) $\frac{3}{5} : \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{7}{15}$

c) $1 - \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)\right]$

Nº5: Clasificación de Números Reales y Fracción Generatriz

a) Clasifica los siguientes números, indicando el conjunto más pequeño al que pertenecen (**N**, **Z**, **Q**, **R**):

1. -15

2. $0,121121112...$

3. $\sqrt{16}$

b) Escribe la fracción generatriz de los siguientes números racionales:

1. $0,96$

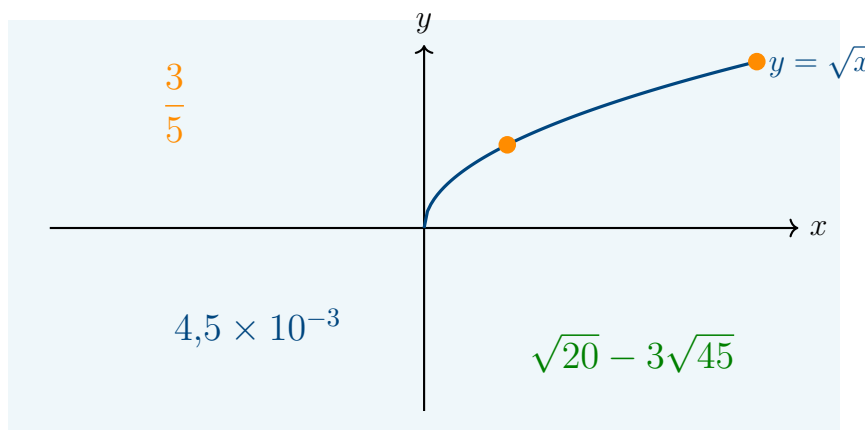
2. $3,454545...$

c) Indica a qué conjunto pertenece el resultado de la siguiente operación: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$

MATEMÁTICAS

3.º ESO

SOLUCIONES COMPLETAS DEL EXAMEN



Nivel: 3.º A ESO

Unidades: Fracciones, Notación Científica, Radicales,
Operaciones Combinadas, Números Reales

Elaborado por: SuperAgent CREA O

Fecha de generación: 23 de febrero de 2026



Índice general

Nota Pedagógica	2
1. Problemas con Fracciones y Aplicaciones	3
1.1. Ejercicio 1a — Depósito de agua	3
1.2. Ejercicio 1b — Reparto de herencia	6
1.3. Ejercicio 1c — Alumnos en el Instituto	8
2. Notación Científica y Potencias	10
2.1. Ejercicio 2a — Suma en notación científica	10
2.2. Ejercicio 2b — Simplificación de potencias	11
2.3. Ejercicio 2c — Fracción generatriz de $1,3\overline{6}$	13
3. Radicales y Simplificación	15
3.1. Ejercicio 3a — Suma de radicales	15
3.2. Ejercicio 3b — Producto de radicales	17
3.3. Ejercicio 3c — Raíces cúbicas	18
4. Operaciones Combinadas con Fracciones	19
4.1. Ejercicio 4a	19
4.2. Ejercicio 4b	20
4.3. Ejercicio 4c	21
5. Clasificación de Números Reales y Fracción Generatriz	23
5.1. Ejercicio 5a — Clasificación de números	24
5.2. Ejercicio 5b — Fracción generatriz	25
5.3. Ejercicio 5c — Clasificación de $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$	27
Resumen de Resultados	29

Nota Pedagógica

Este documento presenta las soluciones **completamente desarrolladas** del examen de Matemáticas de 3.º de ESO. Cada ejercicio se resuelve con el máximo rigor matemático y con explicaciones exhaustivas, siguiendo los siguientes principios:

- **Sin saltos mágicos:** cada transformación algebraica está justificada.
- **Rigor formal:** se citan definiciones y propiedades cuando procede.
- **Claridad pedagógica:** se incluyen advertencias sobre errores frecuentes.
- **Verificación:** siempre que es posible, se comprueba el resultado obtenido.

Los contenidos evaluados son:

1. Problemas con fracciones y aplicaciones.
2. Notación científica y propiedades de las potencias.
3. Radicales y simplificación.
4. Operaciones combinadas con fracciones.
5. Clasificación de números reales y fracción generatriz.

Capítulo 1

Problemas con Fracciones y Aplicaciones

Marco teórico — Fracciones

Una **fracción** $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$) representa la división de a unidades en b partes iguales.

Regla fundamental de los problemas de fracciones: Si de una cantidad C se toma la fracción $\frac{p}{q}$, quedan

$$C - \frac{p}{q} \cdot C = C \left(1 - \frac{p}{q} \right) = C \cdot \frac{q - p}{q}.$$

Identificar correctamente *el todo* (la cantidad sobre la que se aplica cada fracción) es la clave para evitar errores.

1.1. Ejercicio 1a — Depósito de agua

Ejercicio 1a

De un depósito de agua, se consume $\frac{1}{4}$ de su contenido, y después se consume $\frac{2}{5}$ de lo que quedaba. Si aún quedan **900 litros**, ¿cuál es la capacidad total del depósito?

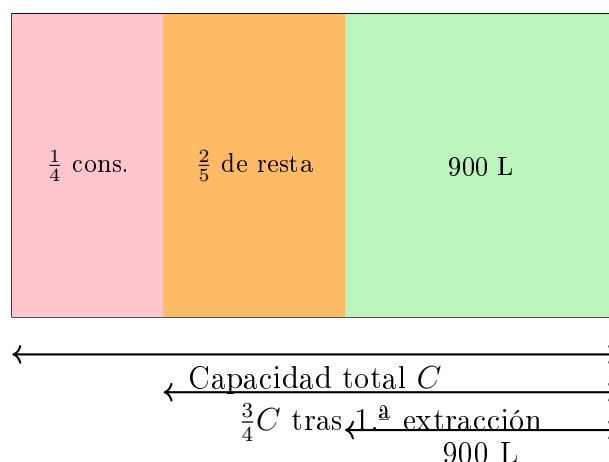


Figura 1.1: Representación visual del depósito y sus extracciones.

Solución paso a paso

Paso 1 — Definir la incógnita

Sea C la capacidad total del depósito (en litros). Esta es la cantidad desconocida que queremos determinar.

Paso 2 — Primera extracción

Se consume $\frac{1}{4}$ del total. La cantidad consumida es:

$$\frac{1}{4} \cdot C$$

La cantidad que **queda** después de la primera extracción es:

$$C - \frac{1}{4} \cdot C = C \left(1 - \frac{1}{4}\right) = C \cdot \frac{3}{4}$$

Es decir, quedan $\frac{3}{4}$ del total.

Paso 3 — Segunda extracción

Ahora se consume $\frac{2}{5}$ de *lo que quedaba* (no del total original). Lo que quedaba era $\frac{3}{4}C$. Por tanto, la segunda extracción es:

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} C = \frac{6}{20} C = \frac{3}{10} C$$

La cantidad que **queda** después de la segunda extracción es:

$$\frac{3}{4} C - \frac{3}{10} C$$

Para restar estas fracciones necesitamos el mínimo común denominador de 4 y 10.

$$\begin{aligned}\text{m.c.d.}(4, 10) &= 20 \\ \frac{3}{4}C - \frac{3}{10}C &= \frac{15}{20}C - \frac{6}{20}C = \frac{9}{20}C\end{aligned}$$

Paso 4 — Plantear la ecuación

Sabemos que lo que queda es 900 litros:

$$\frac{9}{20}C = 900$$

Paso 5 — Despejar C

Multiplicamos ambos miembros por $\frac{20}{9}$ (inverso de $\frac{9}{20}$):

$$C = 900 \times \frac{20}{9} = \frac{900 \times 20}{9} = \frac{18000}{9} = 2000$$

Paso 6 — Verificación

Comprobamos que el resultado es correcto:

$$\text{Tras 1.ª extracción: } C - \frac{1}{4} \cdot 2000 = 2000 - 500 = 1500 \text{ L}$$

$$\text{Tras 2.ª extracción: } 1500 - \frac{2}{5} \cdot 1500 = 1500 - 600 = 900 \text{ L} \checkmark$$

El resultado es correcto.

Resultado del Ejercicio 1a

La capacidad total del depósito es $C = 2000$ litros.

¡Atención!

Error frecuente: aplicar la segunda fracción ($\frac{2}{5}$) sobre el total C en lugar de sobre lo que quedaba ($\frac{3}{4}C$). Siempre hay que identificar **la referencia** de cada fracción.

1.2. Ejercicio 1b — Reparto de herencia

Ejercicio 1b

Tres amigos se reparten una herencia: el primero recibe $\frac{3}{5}$ del total; el segundo recibe $\frac{5}{8}$ de lo que queda, y el tercero se lleva los últimos **375 euros**. ¿A cuánto ascendía la herencia? ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

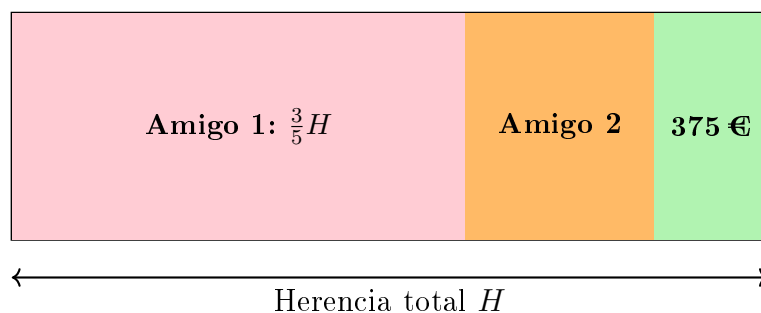


Figura 1.2: Reparto de la herencia entre tres amigos.

Solución paso a paso

Paso 1 — Definir la incógnita

Sea H la herencia total (en euros).

Paso 2 — Parte del primer amigo

El primer amigo recibe $\frac{3}{5}$ del total:

$$\text{Amigo 1} = \frac{3}{5} H$$

Queda después del primer reparto:

$$H - \frac{3}{5} H = H \left(1 - \frac{3}{5} \right) = H \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} H$$

Paso 3 — Parte del segundo amigo

El segundo amigo recibe $\frac{5}{8}$ de *lo que queda* (es decir, de $\frac{2}{5}H$):

$$\text{Amigo 2} = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5} H = \frac{5 \cdot 2}{8 \cdot 5} H = \frac{10}{40} H = \frac{1}{4} H$$

Queda después del segundo reparto:

$$\frac{2}{5}H - \frac{1}{4}H$$

Calculamos el mínimo común denominador de 5 y 4 (son coprimos, así que $\text{m.c.m.}(4, 5) = 20$):

$$\frac{2}{5}H - \frac{1}{4}H = \frac{8}{20}H - \frac{5}{20}H = \frac{3}{20}H$$

Paso 4 — Parte del tercer amigo

El tercer amigo recibe lo que sobra: $\frac{3}{20}H = 375$ euros.

$$\frac{3}{20}H = 375$$

Paso 5 — Despejar H

$$H = 375 \cdot \frac{20}{3} = \frac{375 \cdot 20}{3} = \frac{7500}{3} = 2500 \text{ euros}$$

Paso 6 — Calcular la parte de cada amigo

$$\text{Amigo 1} = \frac{3}{5} \cdot 2500 = \frac{7500}{5} = 1500 \text{ euros}$$

$$\text{Amigo 2} = \frac{1}{4} \cdot 2500 = \frac{2500}{4} = 625 \text{ euros}$$

$$\text{Amigo 3} = 375 \text{ euros} \quad (\text{dato del enunciado})$$

Paso 7 — Verificación

Comprobamos que la suma de las tres partes es igual a la herencia total:

$$1500 + 625 + 375 = 2500 \checkmark$$

Resultado del Ejercicio 1b

- La herencia total asciende a $H = 2500$ euros.
- Al **primer amigo** le corresponden **1500 euros**.
- Al **segundo amigo** le corresponden **625 euros**.
- Al **tercer amigo** le corresponden **375 euros**.

1.3. Ejercicio 1c — Alumnos en el Instituto

Ejercicio 1c

En una clase, $\frac{5}{9}$ de los alumnos están matriculados en la ESO. El número de alumnos matriculados en Bachillerato es de **280**. Calcúlese el número total de alumnos en el Instituto (ESO y Bachillerato).

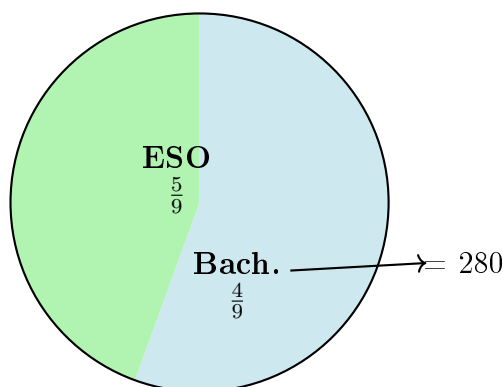


Figura 1.3: Distribución de alumnos entre ESO y Bachillerato.

Solución paso a paso

Paso 1 — Identificar las partes

Si $\frac{5}{9}$ del total son alumnos de ESO, entonces la fracción restante que corresponde a Bachillerato es:

$$1 - \frac{5}{9} = \frac{9}{9} - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

Es decir, $\frac{4}{9}$ del total son alumnos de Bachillerato.

Paso 2 — Plantear la ecuación

Sea T el total de alumnos. Como hay 280 alumnos de Bachillerato:

$$\frac{4}{9} \cdot T = 280$$

Paso 3 — Despejar T

$$T = 280 \cdot \frac{9}{4} = \frac{280 \cdot 9}{4} = \frac{2520}{4} = 630$$

Paso 4 — Calcular alumnos de ESO

$$\text{Alumnos ESO} = \frac{5}{9} \cdot 630 = \frac{3150}{9} = 350$$

Paso 5 — Verificación

$$350 \text{ (ESO)} + 280 \text{ (Bach.)} = 630 \checkmark$$

Resultado del Ejercicio 1c

El número total de alumnos en el instituto es $T = 630$.

- Alumnos de ESO: 350.
- Alumnos de Bachillerato: 280.

Capítulo 2

Notación Científica y Potencias

Marco teórico — Notación científica y potencias

Notación científica: Un número en notación científica tiene la forma

$$a \times 10^n \quad \text{con } 1 \leq |a| < 10 \text{ y } n \in \mathbb{Z}.$$

Propiedades de las potencias (para $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $m, n \in \mathbb{Z}$):

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^0 = 1$$

2.1. Ejercicio 2a — Suma en notación científica

Ejercicio 2a

Realiza la siguiente operación, expresando el resultado en notación científica:

$$4,5 \cdot 10^{-3} + 8,2 \cdot 10^{-4}$$

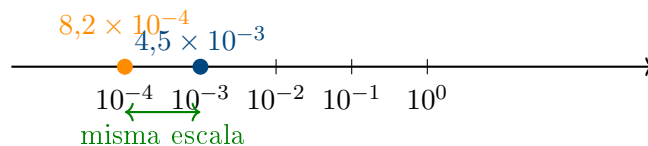


Figura 2.1: Posición relativa de los sumandos en la recta real (escala logarítmica de base 10).

Solución paso a paso

Paso 1 — Igualar los exponentes

Para sumar números en notación científica es **imprescindible** que tengan el **mismo exponente**. Elegimos el mayor exponente (-3) y convertimos $8,2 \cdot 10^{-4}$ a potencia de 10^{-3} :

$$8,2 \cdot 10^{-4} = 8,2 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{10}{10} = \frac{8,2}{10} \cdot 10^{-4} \cdot 10 = 0,82 \cdot 10^{-3}$$

Razonamiento: al multiplicar por 10 el exponente sube en 1 ($10^{-4} \cdot 10^1 = 10^{-3}$), y al dividir la mantisa entre 10 mantenemos el valor.

Paso 2 — Sumar las mantisas

Ahora ambos términos tienen base 10^{-3} :

$$4,5 \cdot 10^{-3} + 0,82 \cdot 10^{-3} = (4,5 + 0,82) \cdot 10^{-3} = 5,32 \cdot 10^{-3}$$

Paso 3 — Verificar el formato de notación científica

Comprobamos que $1 \leq 5,32 < 10$. Efectivamente, se cumple. El resultado ya está en notación científica correcta.

Resultado del Ejercicio 2a

$$4,5 \cdot 10^{-3} + 8,2 \cdot 10^{-4} = 5,32 \cdot 10^{-3}$$

¡Atención!

Error frecuente: sumar directamente $4,5 + 8,2 = 12,7$ ignorando que los exponentes son distintos. Las mantisas **solo se suman si los exponentes son iguales**.

2.2. Ejercicio 2b — Simplificación de potencias

Ejercicio 2b

Utiliza las propiedades de las potencias para simplificar:

$$\frac{2^5 \cdot 9^{-2} \cdot 3^4}{6^3 \cdot 4^{-1}}$$

Solución paso a paso

La clave es expresar **todo en potencias de números primos** (2 y 3).

Paso 1 — Descomponer en factores primos

$$9 = 3^2 \implies 9^{-2} = (3^2)^{-2} = 3^{-4}$$

$$6 = 2 \cdot 3 \implies 6^3 = (2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3$$

$$4 = 2^2 \implies 4^{-1} = (2^2)^{-1} = 2^{-2}$$

Paso 2 — Sustituir en la expresión

$$\frac{2^5 \cdot 3^{-4} \cdot 3^4}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 2^{-2}}$$

Paso 3 — Agrupar potencias del mismo base

En el **numerador**:

$$2^5 \cdot 3^{-4} \cdot 3^4 = 2^5 \cdot 3^{-4+4} = 2^5 \cdot 3^0 = 2^5 \cdot 1 = 2^5$$

En el **denominador**:

$$2^3 \cdot 3^3 \cdot 2^{-2} = 2^{3+(-2)} \cdot 3^3 = 2^1 \cdot 3^3 = 2 \cdot 27 = 54$$

Paso 4 — Dividir

$$\frac{2^5}{2^1 \cdot 3^3} = 2^{5-1} \cdot 3^{-3} = 2^4 \cdot 3^{-3} = \frac{2^4}{3^3} = \frac{16}{27}$$

Paso 5 — Verificación numérica

Calculamos la expresión original:

$$\text{Numerador: } 2^5 \cdot 9^{-2} \cdot 3^4 = 32 \cdot \frac{1}{81} \cdot 81 = 32$$

$$\text{Denominador: } 6^3 \cdot 4^{-1} = 216 \cdot \frac{1}{4} = 54$$

$$\frac{32}{54} = \frac{16}{27} \checkmark$$

Resultado del Ejercicio 2b

$$\frac{2^5 \cdot 9^{-2} \cdot 3^4}{6^3 \cdot 4^{-1}} = \boxed{\frac{16}{27}}$$

2.3. Ejercicio 2c — Fracción generatriz de $1,3\overline{6}$

Ejercicio 2c

Escribe la fracción generatriz del número decimal $1,3\overline{6}$.

Marco teórico — Fracciones generatrices

Para convertir un decimal mixto periódico $a,b\overline{c}$ en fracción:

1. Se llama **anteperiodo** a la parte no periódica de los decimales (b).
2. Se llama **periodo** a la parte periódica (c).
3. La fracción generatriz se obtiene como:

$$\text{Fracción} = \frac{(\text{número completo con anteperiodo y periodo}) - (\text{número completo con solo el anteperiodo})}{\text{tantos nueves como cifras del periodo, seguidos de tantos ceros como cifras del anteperiodo}}$$

Identificación de las partes

El número es $1,3\overline{6} = 1,3666\dots$

- Parte entera: 1
- Anteperiodo (parte decimal no periódica): 3 (1 cifra)
- Periodo: 6 (1 cifra)

Solución mediante el método algebraico

Paso 1 — Asignar nombre al número

$$x = 1,3666\dots$$

Paso 2 — Multiplicar para eliminar el anteperiodo

Multiplicamos por 10 (1 cifra de anteperiodo) para desplazar la coma hasta el inicio del periodo:

$$10x = 13,666\dots$$

Paso 3 — Multiplicar para eliminar el periodo

Multiplicamos por 100 (2 cifras en total: 1 anteperiodo + 1 periodo) para desplazar la coma hasta después del primer periodo completo:

$$100x = 136,666\dots$$

Paso 4 — Restar para cancelar el periodo

$$100x - 10x = 136,666\dots - 13,666\dots$$

$$90x = 123$$

Observemos que los decimales periódicos se cancelan perfectamente.

Paso 5 — Despejar x

$$x = \frac{123}{90}$$

Simplificamos la fracción. Calculamos el m.c.d.(123, 90):

$$123 = 3 \cdot 41 \quad ; \quad 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$\text{m.c.d.}(123, 90) = 3$$

$$x = \frac{123 \div 3}{90 \div 3} = \frac{41}{30}$$

Paso 6 — Verificación

Dividimos $41 \div 30$:

$$41 \div 30 = 1 \text{ resto } 11 \implies 1, \dots$$

$$110 \div 30 = 3 \text{ resto } 20 \implies 1, 3 \dots$$

$$200 \div 30 = 6 \text{ resto } 20 \implies 1, 36 \dots$$

$$200 \div 30 = 6 \text{ resto } 20 \implies 1, 366 \dots \checkmark$$

Resultado del Ejercicio 2c

$$1,3\overline{6} = \boxed{\frac{41}{30}}$$

Capítulo 3

Radicales y Simplificación

Marco teórico — Radicales

Un **radical** $\sqrt[n]{a}$ (con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a \geq 0$) es la raíz n -ésima de a . Las propiedades fundamentales son:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Suma de radicales semejantes: $k\sqrt{a} + m\sqrt{a} = (k + m)\sqrt{a}$.

Para sumar radicales, primero hay que **simplificarlos** extrayendo factores perfectos.

3.1. Ejercicio 3a — Suma de radicales

Ejercicio 3a

Opera y simplifica al máximo:

$$\sqrt{20} - 3\sqrt{45} + \sqrt{5}$$

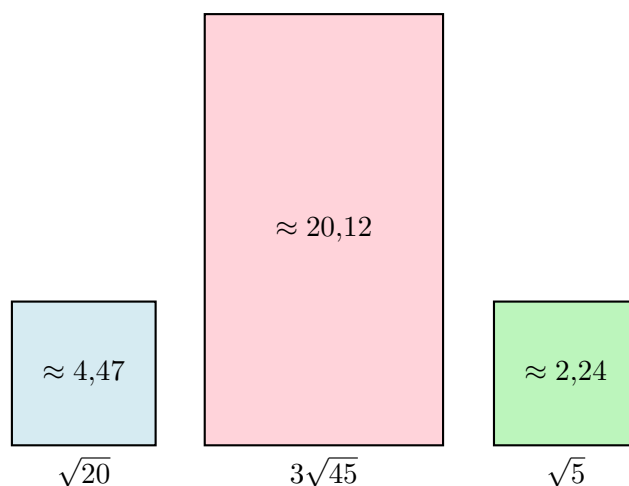


Figura 3.1: Representación visual de cada radical (longitudes proporcionales).

Solución paso a paso

Paso 1 — Simplificar cada radical

Para poder sumar/restar radicales, todos deben ser **radicales semejantes** (mismo radicando). Factorizamos cada radicando:

$$20 = 4 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5 \quad \implies \quad \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

$$45 = 9 \cdot 5 = 3^2 \cdot 5 \quad \implies \quad \sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

$$\implies \quad 3\sqrt{45} = 3 \cdot 3\sqrt{5} = 9\sqrt{5}$$

El tercer término ya está simplificado: $\sqrt{5}$.

Paso 2 — Sustituir y operar

$$\sqrt{20} - 3\sqrt{45} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5} - 9\sqrt{5} + 1 \cdot \sqrt{5}$$

Ahora todos los radicales son semejantes ($\sqrt{5}$). Operamos los coeficientes:

$$= (2 - 9 + 1)\sqrt{5} = -6\sqrt{5}$$

Paso 3 — Verificación numérica

$$\sqrt{20} \approx 4,4721 \quad ; \quad 3\sqrt{45} \approx 3 \times 6,7082 = 20,1246 \quad ; \quad \sqrt{5} \approx 2,2361$$

$$4,4721 - 20,1246 + 2,2361 = -13,4164$$

$$-6\sqrt{5} \approx -6 \times 2,2361 = -13,4166 \checkmark$$

Resultado del Ejercicio 3a

$$\sqrt{20} - 3\sqrt{45} + \sqrt{5} = \boxed{-6\sqrt{5}}$$

3.2. Ejercicio 3b — Producto de radicales**Ejercicio 3b**

Opera y simplifica:

$$\sqrt{5} \cdot (\sqrt{10} + 2\sqrt{2})$$

Solución paso a paso**Paso 1 — Aplicar la propiedad distributiva**

$$\sqrt{5} \cdot (\sqrt{10} + 2\sqrt{2}) = \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} + \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{2}$$

Paso 2 — Calcular cada productoUsamos la propiedad $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$:

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{5 \cdot 10} = \sqrt{50}$$

$$\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{2} = 2\sqrt{5 \cdot 2} = 2\sqrt{10}$$

Paso 3 — Simplificar $\sqrt{50}$

$$50 = 25 \cdot 2 = 5^2 \cdot 2 \implies \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$$

Paso 4 — Resultado final

$$5\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$$

¿Se pueden sumar? Los radicandos son 2 y 10, que son distintos, por lo que **no son radicales semejantes**. La expresión está completamente simplificada.

Paso 5 — Verificación numérica

$$\sqrt{5} \cdot (\sqrt{10} + 2\sqrt{2}) \approx 2,2361 \times (3,1623 + 2,8284) \approx 2,2361 \times 5,9907 \approx 13,397$$

$$5\sqrt{2} + 2\sqrt{10} \approx 5 \times 1,4142 + 2 \times 3,1623 \approx 7,071 + 6,325 \approx 13,396\checkmark$$

Resultado del Ejercicio 3b

$$\sqrt{5} \cdot (\sqrt{10} + 2\sqrt{2}) = \boxed{5\sqrt{2} + 2\sqrt{10}}$$

3.3. Ejercicio 3c — Raíces cúbicas**Ejercicio 3c**

Opera y simplifica:

$$\sqrt[3]{24} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{81}$$

Solución paso a paso**Paso 1 — Factorizar los radicandos**

Descomponemos en factores primos para identificar cubos perfectos:

$$24 = 8 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$$

$$81 = 27 \cdot 3 = 3^3 \cdot 3$$

Paso 2 — Extraer factores cúbicos perfectos

$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3}$$

Paso 3 — Sustituir en la expresión

$$\sqrt[3]{24} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{81} = 2\sqrt[3]{3} - \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3} - 1 \cdot \sqrt[3]{3} = (2 - 1)\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3}$$

Paso 4 — Verificación numérica

$$\sqrt[3]{24} \approx 2,8845 \quad ; \quad \frac{1}{3}\sqrt[3]{81} \approx \frac{1}{3} \times 4,3267 \approx 1,4422$$

$$2,8845 - 1,4422 = 1,4423 \approx \sqrt[3]{3} \approx 1,4422\checkmark$$

Resultado del Ejercicio 3c

$$\sqrt[3]{24} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{81} = \boxed{\sqrt[3]{3}}$$

Capítulo 4

Operaciones Combinadas con Fracciones

Marco teórico — Jerarquía de operaciones

El orden correcto al calcular expresiones combinadas es:

1. **Paréntesis** (primero los más internos): $()$, $[]$, $\{\}$.
2. **Potencias y raíces**.
3. **Multiplicaciones y divisiones** (de izquierda a derecha).
4. **Sumas y restas** (de izquierda a derecha).

Este orden se resume a veces con el acrónimo **PEMDAS** (en inglés) o **PA-POMUDAS** (en español).

4.1. Ejercicio 4a

Ejercicio 4a

$$\frac{2}{3} + \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{6} \right) \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{12}$$

Solución paso a paso

Paso 1 — Resolver el paréntesis

Calculamos $\frac{1}{2} - \frac{5}{6}$.

$$\text{m.c.m.}(2, 6) = 6$$

$$\frac{1}{2} - \frac{5}{6} = \frac{3}{6} - \frac{5}{6} = \frac{3-5}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Paso 2 — Realizar la multiplicación

$$\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{3}{4} = -\frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 4} = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4}$$

Paso 3 — Sumar y restar los términos restantes

La expresión queda:

$$\frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{12} = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12}$$

Calculamos el mínimo común denominador de 3, 4 y 12:

$$\text{m.c.m.}(3, 4, 12) = 12$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{8}{12} - \frac{3}{12} - \frac{1}{12} = \frac{8-3-1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Resultado del Ejercicio 4a

$$\frac{2}{3} + \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{6}\right) \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{12} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

4.2. Ejercicio 4b**Ejercicio 4b**

$$\frac{3}{5} : \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{7}{15}$$

Solución paso a paso**Paso 1 — Resolver el paréntesis**

$$1 - \frac{2}{3} = \frac{3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Paso 2 — Elevar al cuadrado

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1^2}{3^2} = \frac{1}{9}$$

Paso 3 — Realizar la división

$$\frac{3}{5} : \frac{1}{9} = \frac{3}{5} \cdot \frac{9}{1} = \frac{3 \cdot 9}{5 \cdot 1} = \frac{27}{5}$$

Recordatorio: dividir por una fracción es lo mismo que multiplicar por su inversa.

Paso 4 — Sumar

$$\frac{27}{5} + \frac{7}{15}$$

$$\text{m.c.m.}(5, 15) = 15$$

$$\frac{27}{5} + \frac{7}{15} = \frac{81}{15} + \frac{7}{15} = \frac{88}{15}$$

Resultado del Ejercicio 4b

$$\frac{3}{5} : \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{7}{15} = \boxed{\frac{88}{15}}$$

4.3. Ejercicio 4c**Ejercicio 4c**

$$1 - \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) \right]$$

Solución paso a paso**Paso 1 — Resolver el paréntesis interior**

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$$

Paso 2 — Resolver el corchete

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0$$

Paso 3 — Realizar la multiplicación

$$\frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

Paso 4 — Suma final

$$1 - 0 = 1$$

Paso 5 — Interpretación del resultado

Es un resultado notable: aunque la expresión parece compleja, el corchete central se cancela completamente (la suma del paréntesis interior es $\frac{3}{4}$, que es exactamente lo que se resta dentro del corchete).

Resultado del Ejercicio 4c

$$1 - \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) \right] = \boxed{1}$$

Observación 4.1. Cuando el resultado de una operación compleja es un número entero (o especialmente simple), conviene **desconfiar y revisar** todos los pasos, pues puede indicar tanto un resultado correcto y elegante como un error que se ha cancelado al azar. En este caso, la revisión confirma que el resultado es correcto.

Capítulo 5

Clasificación de Números Reales y Fracción Generatriz

Marco teórico — Los conjuntos numéricos

Los números reales se organizan en la siguiente jerarquía de conjuntos:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$: números naturales.
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$: números enteros.
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$: números racionales (decimales exactos o periódicos).
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: números irracionales (decimales infinitos no periódicos).
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$: todos los reales.

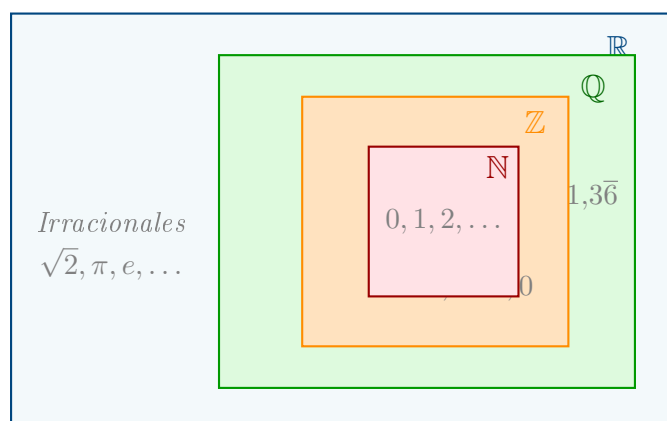


Figura 5.1: Diagrama de los conjuntos numéricos: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

5.1. Ejercicio 5a — Clasificación de números

Ejercicio 5a

Clasifica los siguientes números, indicando el conjunto más pequeño al que pertenecen ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$):

1. -15
2. $0,121121112\dots$
3. $\sqrt{16}$

Solución detallada

Número 1: -15

Análisis de -15

El número -15 es un número entero negativo. Comprobamos si pertenece a cada conjunto:

- $\mathbb{N}$: No, porque $\mathbb{N}$ solo contiene números no negativos ($0, 1, 2, \dots$) y $-15 < 0$.
- $\mathbb{Z}$: Sí, porque $\mathbb{Z}$ contiene todos los enteros, incluidos los negativos. $-15 \in \mathbb{Z}$.
- (También pertenece a $\mathbb{Q}$ y a $\mathbb{R}$, pero el conjunto *más pequeño* es $\mathbb{Z}$.)

-15

$-15 \in \mathbb{Z}$ (conjunto más pequeño: los **números enteros**).

Número 2: $0,121121112\dots$

Análisis de $0,121121112\dots$

Observamos los decimales: $0,121121112\dots$

Las cifras son $1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, \dots$. Parece que el número de unos entre cada dos va aumentando: $1\,2 \mid 1\,1\,2 \mid 1\,1\,1\,2 \mid \dots$

Este decimal es **infinito y no periódico**: no existe ningún grupo de cifras que se repita indefinidamente con el mismo patrón de periodo fijo. Es por tanto un **número irracional**.

Los números irracionales pertenecen a $\mathbb{R}$ pero **no** a $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ ni $\mathbb{N}$.

$0,121121112\dots$

$0,121121112\dots \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (es un **número irracional**). El conjunto más pequeño al que pertenece es $\mathbb{R}$.

Número 3: $\sqrt{16}$ Análisis de $\sqrt{16}$

Calculamos el valor de $\sqrt{16}$:

$$\sqrt{16} = 4 \quad \text{porque } 4^2 = 16$$

El resultado es 4, un número natural positivo.

- $4 \in \mathbb{N}$ (el conjunto más pequeño).
- (También pertenece a $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.)

Advertencia importante: el radical no implica irracionalidad. Solo es irracional si el radicando no es un cuadrado perfecto.

$$\sqrt{16}$$

$$\sqrt{16} = 4 \in \mathbb{N} \text{ (conjunto más pequeño: los números naturales).}$$

5.2. Ejercicio 5b — Fracción generatriz

Ejercicio 5b

Escribe la fracción generatriz de los siguientes números racionales:

1. 0,96
2. 3,454545...

Número 1: 0,96 (decimal exacto)

Fracción generatriz de 0,96

Un decimal exacto con 2 cifras decimales se convierte directamente en una fracción con denominador $10^2 = 100$:

$$0,96 = \frac{96}{100}$$

Simplificamos calculando el máximo común divisor:

$$96 = 2^5 \cdot 3 \quad ; \quad 100 = 2^2 \cdot 5^2$$

$$\text{m.c.d.}(96, 100) = 2^2 = 4$$

$$\frac{96}{100} = \frac{96 \div 4}{100 \div 4} = \frac{24}{25}$$

Verificación: $24 \div 25 = 0,96 \checkmark$

0,96

$$0,96 = \frac{24}{25}$$

Número 2: $3,\overline{45}$ (decimal periódico puro)**Identificación**El número $3,454545\dots = 3,\overline{45}$ es un decimal periódico puro:

- Parte entera: 3
- Parte decimal: periodo $\overline{45}$ (2 cifras, sin anteperiodo)

Método algebraico

$$x = 3,454545\dots$$

Como el periodo tiene 2 cifras, multiplicamos por $10^2 = 100$:

$$100x = 345,454545\dots$$

Restamos:

$$100x - x = 345,4545\dots - 3,4545\dots = 342$$

$$99x = 342$$

$$x = \frac{342}{99}$$

Simplificación

$$342 = 2 \cdot 3^2 \cdot 19 \quad ; \quad 99 = 3^2 \cdot 11$$

$$\text{m.c.d.}(342, 99) = 3^2 = 9$$

$$x = \frac{342 \div 9}{99 \div 9} = \frac{38}{11}$$

Verificación: $38 \div 11 = 3,454545\dots \checkmark$ $3,\overline{45}$

$$3,454545\dots = \frac{38}{11}$$

5.3. Ejercicio 5c — Clasificación de $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$

Ejercicio 5c

Indica a qué conjunto pertenece el resultado de la operación: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$

Cálculo

Aplicamos la propiedad del producto de radicales:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$$

Clasificación

El resultado es 4, un número natural. Por tanto:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 4 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

El conjunto más pequeño al que pertenece es $\mathbb{N}$.

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} \xrightarrow{= \sqrt{16}} = 4 \in \mathbb{N}$$

Figura 5.2: El producto de dos irracionales puede dar un resultado racional (o incluso natural).

Resultado del Ejercicio 5c

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 4 \in \mathbb{N}$$

El resultado pertenece al conjunto de los **números naturales** $\mathbb{N}$.

¡Atención!

Error frecuente: asumir que el producto de dos irracionales es siempre irracional. ¡Esto es **falso**! $\sqrt{2}$ y $\sqrt{8}$ son ambos irracionales, pero su producto es 4, que es un número natural. Siempre hay que calcular antes de clasificar.

Resumen de Resultados

Ejercicio	Enunciado (resumen)	Resultado
1a	Capacidad total del depósito	$C = 2000 \text{ L}$
1b	Herencia total Amigo 1 / Amigo 2 / Amigo 3	$H = 2500 \text{ €}$ 1500 / 625 / 375 €
1c	Total de alumnos en el instituto	$T = 630$
2a	$4,5 \cdot 10^{-3} + 8,2 \cdot 10^{-4}$	$5,32 \cdot 10^{-3}$
2b	$\frac{2^5 \cdot 9^{-2} \cdot 3^4}{6^3 \cdot 4^{-1}}$	$\frac{16}{27}$
2c	Fracción generatriz de $1,3\overline{6}$	$\frac{41}{30}$
3a	$\sqrt{20} - 3\sqrt{45} + \sqrt{5}$	$-6\sqrt{5}$
3b	$\sqrt{5} \cdot (\sqrt{10} + 2\sqrt{2})$	$5\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$
3c	$\sqrt[3]{24} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{81}$	$\sqrt[3]{3}$
4a	Op. combinada (fracciones)	$\frac{1}{3}$
4b	Op. combinada con cuadrado	$\frac{88}{15}$
4c	Op. combinada anidada	1
5a-1	Clasificar -15	$\mathbb{Z}$
5a-2	Clasificar $0,121121112\dots$	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (irracional)
5a-3	Clasificar $\sqrt{16}$	$\mathbb{N}$
5b-1	Fracción generatriz de $0,96$	$\frac{24}{25}$
5b-2	Fracción generatriz de $3,4\overline{5}$	$\frac{38}{11}$
5c	Clasificar $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$	$4 \in \mathbb{N}$

Examen de Matemáticas - 3º A ESO

Problemas Aritméticos y Progresiones

Noviembre de 2025

Bloque I: Problemas Aritméticos

1. **Ejercicio 1. Proporcionalidad** Un campamento de 60 alumnos tiene provisiones para 10 días Si 20 alumnos se marchan del campamento cuántos días podrán durar las provisiones restantes para los alumnos que quedan
 - A. 12 días
 - B. 15 días
 - C. 7.5 días
 - D. 13 días

2. **Ejercicio 2. Problema de Mezclas (Pureza)** Se mezcla un lingote de plata de 5 kg de peso con un 90 % de pureza con otro lingote de 3 kg de peso con un 70 % de pureza Cuál es el porcentaje de pureza del lingote resultante
 - A. 80 %
 - B. 82.5 %
 - C. 85 %
 - D. 81.25 %

3. **Ejercicio 3. Variaciones Porcentuales Encadenadas (a)** El precio original de un videojuego es de 50 euros
 1. **(a)** Por un aumento en la demanda el precio sube un 30 % Más tarde el precio rebaja un 30 % sobre el nuevo precio Cuál es su precio final
 - A. 50 euros
 - B. 45.50 euros
 - C. 55 euros
 - D. 47 euros

4. **Ejercicio 4. Variaciones Porcentuales Encadenadas (b)** El precio final es igual mayor o menor que el precio inicial Justifica tu respuesta
 - A. Mayor porque el aumento inicial siempre tiene más peso que la disminución posterior

- B. Igual porque el aumento del 30 % y la disminución del 30 % se anulan exactamente
- C. Menor porque el índice de variación total es $0,91 < 1$ debido a que la disminución del 30 % se aplica sobre un precio ya aumentado
- D. Menor porque la disminución siempre debe ser mayor que el aumento en términos porcentuales

Bloque II: Progresiones

5. **Ejercicio 5. Progresión Aritmética (a)** Una persona empieza a ahorrar dinero El primer día ahorra $a_1 = \$5$ y cada día posterior ahorra $d = \$3$ más que el día anterior
 1. **(a)** Cuánto dinero habrá ahorrado el día 30 Es decir calcula el término a_{30}
 - A. 90 euros
 - B. 87 euros
 - C. 92 euros
 - D. 95 euros
6. **Ejercicio 6. Progresión Aritmética (b)** Cuánto dinero habrá ahorrado en total al cabo de esos 30 días Calcula la suma S_{30}
 - A. 1455 euros
 - B. 1400 euros
 - C. 1395 euros
 - D. 2760 euros
7. **Ejercicio 7. Progresión Geométrica (a)** Se sabe que en una progresión geométrica el segundo término es $a_2 = 10$ y el tercer término es $a_3 = 50$
 1. **(a)** Halla la razón (r) el primer término (a_1) y el término general (a_n) de la progresión
 - A. $r = 5, a_1 = 5, a_n = 5 \cdot 5^{n-1}$
 - B. $r = 40, a_1 = -30, a_n = -30 + 40(n - 1)$
 - C. $r = 5, a_1 = 2, a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$
 - D. $r = 5, a_1 = 2, a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$
8. **Ejercicio 8. Progresión Geométrica (b)** Calcula la suma de los siete primeros términos de la progresión (S_7)
 - A. 39062
 - B. 195310
 - C. 31250
 - D. 9766

TABLA DE RESPUESTAS

Ejercicio	a	b	c	d
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				

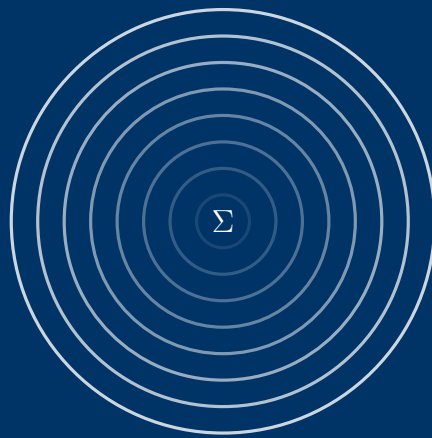
Instrucciones Marque con una X la letra correspondiente a la respuesta que considere correcta

MATEMÁTICAS

Soluciones Completas

Examen de 3.º A de ESO

Problemas Aritméticos y Progresiones



Contenidos:

- Proporcionalidad Inversa
- Problemas de Mezclas por Pureza
- Variaciones Porcentuales Encadenadas
- Progresiones Aritméticas

► Progresiones Geométricas

Noviembre de 2025

Documento elaborado con rigor matemático para el estudio en profundidad

Presentación del Documento

Este documento contiene la **resolución completa y exhaustiva** de todos los ejercicios del **Examen de Matemáticas de 3.º A de ESO** — Noviembre de 2025.

Cada ejercicio se desarrolla con:

- **Planteamiento teórico:** definición y conceptos necesarios.
- **Método de resolución:** justificado y elegido razonadamente.
- **Desarrollo paso a paso:** sin omitir ninguna transformación algebraica.
- **Verificación:** comprobación de la respuesta cuando es posible.
- **Advertencias:** errores comunes que debe evitar el alumno.
- **Observaciones:** generalizaciones y conexiones matemáticas.
- **Representaciones gráficas:** diagramas y figuras ilustrativas.

El objetivo es que el alumno *comprenda en profundidad* cada concepto, no solo memorice un procedimiento.

A lo largo de este documento se usa la notación matemática estándar europea: la coma decimal (por ejemplo, 0,91) en el texto corrido, y el punto decimal dentro de entornos matemáticos cuando así lo exige la tipografía de L^AT_EX. Los símbolos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ denotan los conjuntos de naturales, enteros, racionales y reales, respectivamente.

Índice general

1	Fundamentos Teóricos Previos	3
1.1	Proporcionalidad	3
1.2	Mezclas por Porcentaje de Pureza	3
1.3	Variaciones Porcentuales	4
1.4	Progresiones Aritméticas	4
1.5	Progresiones Geométricas	4
2	Bloque I: Problemas Aritméticos	6
2.1	Ejercicio 1 — Proporcionalidad Inversa	7
2.2	Ejercicio 2 — Problema de Mezclas (Pureza)	10
2.3	Ejercicio 3 — Variaciones Porcentuales Encadenadas (parte a)	13
2.4	Ejercicio 4 — Variaciones Porcentuales Encadenadas (parte b)	16
3	Bloque II: Progresiones	19
3.1	Ejercicio 5 — Progresión Aritmética: Término General	20
3.2	Ejercicio 6 — Progresión Aritmética: Suma	23
3.3	Ejercicio 7 — Progresión Geométrica: Término General	26
3.4	Ejercicio 8 — Progresión Geométrica: Suma	29
4	Resumen General y Tabla de Respuestas	32
4.1	Tabla de Respuestas Correctas	32
4.2	Fórmulas Fundamentales Usadas	32
4.3	Conclusiones Pedagógicas	33
A	Apéndice: Tabla Comparativa PA vs. PG	34

Capítulo 1

Fundamentos Teóricos Previos

Antes de abordar los ejercicios, recordamos los conceptos teóricos esenciales que se utilizan en el examen. Este capítulo actúa como *glosario de referencia* al que el alumno puede volver en cualquier momento.

1.1 Proporcionalidad

Definición 1.1 (Magnitudes proporcionales). Dos magnitudes A y B son **directamente proporcionales** si al multiplicar una por un factor k , la otra queda multiplicada por el mismo factor:

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = k \quad (k \neq 0).$$

Dos magnitudes A y B son **inversamente proporcionales** si al multiplicar una por un factor k , la otra queda dividida por ese mismo factor:

$$A_1 \cdot B_1 = A_2 \cdot B_2 = C \quad (C \text{ constante}).$$

Propiedad 1.2 (Regla de tres compuesta). En problemas con varias magnitudes, se aplica la regla de tres compuesta: se determina para cada par de magnitudes si son directa o inversamente proporcionales, y se construye la proporción correspondiente.

1.2 Mezclas por Porcentaje de Pureza

Definición 1.3 (Pureza de una mezcla). Si se mezclan n sustancias con pesos $m_1, m_2, \dots, m_n$ y purezas $p_1, p_2, \dots, p_n$ (expresadas como fracciones del total, es decir, $0 \leq p_i \leq 1$), la pureza de la mezcla resultante es:

$$p_{\text{mezcla}} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot p_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Este es el **promedio ponderado** de las purezas, con pesos iguales a las masas.

1.3 Variaciones Porcentuales

Definición 1.4 (Índice de variación). Una variación de $r\%$ sobre un valor V produce un nuevo valor:

$$V' = V \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right).$$

El factor $\left(1 + \frac{r}{100}\right)$ se denomina **índice de variación** o **coeficiente multiplicador**. Si $r > 0$, hay aumento; si $r < 0$, hay disminución.

Propiedad 1.5 (Composición de variaciones). Aplicar sucesivamente una variación de $r_1\%$ y después de $r_2\%$ equivale a una variación única de factor:

$$I_{total} = \left(1 + \frac{r_1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{r_2}{100}\right).$$

En general, $I_{total} \neq 1 + \frac{r_1 + r_2}{100}$, pues las variaciones no son aditivas cuando se aplican de forma encadenada.

1.4 Progresiones Aritméticas

Definición 1.6 (Progresión aritmética). Una **progresión aritmética** (PA) es una sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$ en la que cada término se obtiene sumando una cantidad fija d al término anterior:

$$a_n = a_{n-1} + d, \quad \forall n \geq 2.$$

El número d se llama **razón** (o **diferencia común**) de la progresión.

Propiedad 1.7 (Término general). El término n -ésimo de una PA de primer término a_1 y razón d es:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Propiedad 1.8 (Suma de los primeros n términos). La suma de los n primeros términos de una PA es:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(2a_1 + (n - 1)d)}{2}.$$

Esta fórmula se atribuye, en su versión elemental, al matemático **Carl Friedrich Gauss**.

1.5 Progresiones Geométricas

Definición 1.9 (Progresión geométrica). Una **progresión geométrica** (PG) es una sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$ en la que cada término se obtiene multiplicando el anterior por una constante $r \neq 0$:

$$a_n = a_{n-1} \cdot r, \quad \forall n \geq 2.$$

El número r se llama **razón** de la progresión geométrica.

Propiedad 1.10 (Término general). *El término n -ésimo de una PG de primer término a_1 y razón r es:*

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}.$$

Propiedad 1.11 (Suma de los primeros n términos). *Para $r \neq 1$:*

$$S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

Para $r = 1$: $S_n = n \cdot a_1$.

Capítulo 2

Bloque I: Problemas Aritméticos

Los ejercicios de este bloque abordan tres grandes temas del currículo de 3.º ESO: **proporcionalidad inversa, mezclas por porcentaje de pureza y variaciones porcentuales encadenadas**. Son aplicaciones directas de la aritmética racional con gran utilidad práctica en la vida cotidiana.

2.1 Ejercicio 1 — Proporcionalidad Inversa

Ejercicio 1: Proporcionalidad

Un campamento de 60 alumnos tiene provisiones para 10 días. Si 20 alumnos se marchan del campamento, ¿cuántos días podrán durar las provisiones restantes para los alumnos que quedan?

Opciones:

- A. 12 días
- B. 15 días
- C. 7,5 días
- D. 13 días

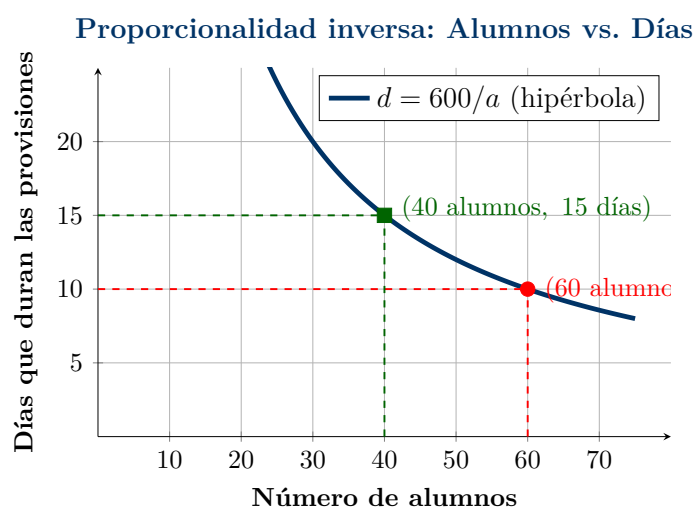


Figura 2.1: Hipérbola de proporcionalidad inversa: a más alumnos, menos días duran las provisiones, y viceversa. El producto $\text{alumnos} \times \text{días} = 600$ es constante.

Solución Completa

Identificación del tipo de proporcionalidad

El primer paso, siempre fundamental, es identificar *qué tipo de proporcionalidad* rige la situación. Para ello, razonamos cualitativamente:

- Si hay **más alumnos**, las provisiones se consumen más rápido $\Rightarrow$ duran **menos días**.
- Si hay **menos alumnos**, las provisiones se consumen más despacio $\Rightarrow$ duran **más días**.

Al aumentar una magnitud, la otra **disminuye**. Por tanto, la relación es de **proporcionalidad inversa**.

Datos del problema

Situación	Alumnos	Días
Inicial	60	10
Final	$60 - 20 = 40$	x (incógnita)

Desarrollo**Paso 1: Hallar el total de provisiones (constante del producto).**

En proporcionalidad inversa, el *producto* de las dos magnitudes es constante:

$$\text{alumnos} \times \text{días} = \text{constante} = C.$$

Con los datos iniciales:

$$C = 60 \times 10 = 600.$$

[interpretación: se dispone de un total de 600 “raciones-día”.]

Paso 2: Número de alumnos que quedan.

Si 20 alumnos se marchan:

$$\text{Alumnos que quedan} = 60 - 20 = 40.$$

Paso 3: Plantear la ecuación de proporcionalidad inversa.

Para los 40 alumnos restantes, la constante se conserva:

$$40 \times x = 600.$$

Paso 4: Resolver la ecuación.

Despejamos x dividiendo ambos miembros por 40:

$$x = \frac{600}{40} = \frac{60}{4} = 15.$$

Paso 5: Verificación.

Comprobamos que el producto se mantiene en ambas situaciones:

$$60 \times 10 = 600 \quad \checkmark$$

$$40 \times 15 = 600 \quad \checkmark$$

La constante es la misma: la verificación es correcta.

Advertencia: Error Común

Un error muy frecuente es aplicar proporcionalidad **directa** en lugar de inversa.

Si el alumno escribe

$$\frac{60}{10} = \frac{40}{x} \implies x = \frac{40 \times 10}{60} = 6,67 \text{ días},$$

obtiene un resultado incorrecto (ninguna de las opciones). La clave es preguntarse: “¿al aumentar los alumnos, aumentan o disminuyen los días?” Si disminuyen: proporcionalidad inversa.

Observación Matemática

Formalmente, la relación entre alumnos a y días d es la **función hipérbola**:

$$d(a) = \frac{600}{a},$$

cuya gráfica es una hipérbola de la forma $y = k/x$ con $k = 600 > 0$. Esto explica por qué la curva del gráfico nunca toca los ejes (los días no pueden ser 0 ni infinitos con alumnos reales).

Respuesta Correcta

Respuesta correcta: B) 15 días.

Las provisiones durarán **15** días para los **40** alumnos que quedan.

2.2 Ejercicio 2 — Problema de Mezclas (Pureza)

Ejercicio 2: Problema de Mezclas (Pureza)

Se mezcla un lingote de plata de 5 kg de peso con un 90 % de pureza con otro lingote de 3 kg de peso con un 70 % de pureza. ¿Cuál es el porcentaje de pureza del lingote resultante?

Opciones:

- A. 80 %
- B. 82,5 %
- C. 85 %
- D. 81,25 %

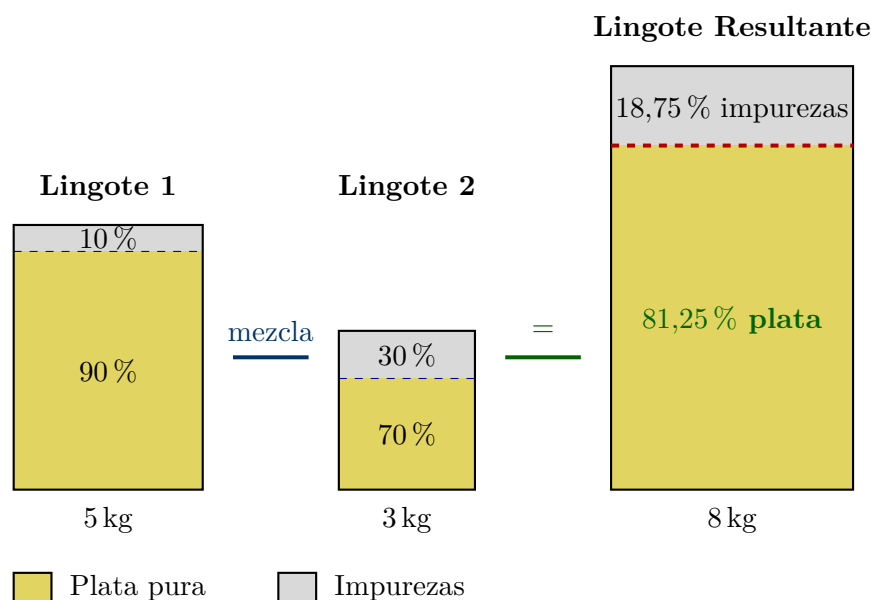


Figura 2.2: Representación proporcional de los dos lingotes (en altura proporcional a su masa) y del lingote resultante. La zona amarilla representa la plata pura; la zona gris, las impurezas.

Solución Completa

Concepto clave: Promedio Ponderado de Purezas

La pureza de la mezcla no es la media aritmética de las purezas ($\frac{90+70}{2} = 80\%$), porque los lingotes *no tienen el mismo peso*. Hay que calcular un **promedio ponderado**: cada pureza se multiplica por el peso del lingote correspondiente.

Datos

Lingote	Masa (m)	Pureza (p)	Plata pura ($m \cdot p$)
Lingote 1	5 kg	90 % = 0,90	$5 \times 0,90 = 4,50$ kg
Lingote 2	3 kg	70 % = 0,70	$3 \times 0,70 = 2,10$ kg
Mezcla	8 kg	p_{mezcla}	6,60 kg

Desarrollo

Paso 1: Calcular la masa de plata pura en cada lingote.

$$\text{Plata en lingote 1} = 5 \text{ kg} \times \frac{90}{100} = 5 \times 0,90 = 4,50 \text{ kg},$$

$$\text{Plata en lingote 2} = 3 \text{ kg} \times \frac{70}{100} = 3 \times 0,70 = 2,10 \text{ kg}.$$

Paso 2: Calcular la masa total de plata pura en la mezcla.

Al fundir los dos lingotes, toda la plata pura de ambos queda en el lingote resultante:

$$\text{Plata total} = 4,50 + 2,10 = 6,60 \text{ kg}.$$

Paso 3: Calcular la masa total de la mezcla.

$$\text{Masa total} = 5 + 3 = 8 \text{ kg}.$$

Paso 4: Calcular el porcentaje de pureza del lingote resultante.

La pureza se define como la fracción de plata pura sobre la masa total, expresada en porcentaje:

$$p_{\text{mezcla}} = \frac{\text{Plata total}}{\text{Masa total}} \times 100 = \frac{6,60}{8} \times 100.$$

Calculamos la fracción:

$$\frac{6,60}{8} = \frac{6,60}{8} = 0,825.$$

Por tanto:

$$p_{\text{mezcla}} = 0,825 \times 100 = 82,5 \text{ \%}.$$

Paso 5: Verificación mediante la fórmula del promedio ponderado.

Usando directamente la fórmula de la sección teórica:

$$p_{\text{mezcla}} = \frac{m_1 \cdot p_1 + m_2 \cdot p_2}{m_1 + m_2} = \frac{5 \times 90 + 3 \times 70}{5 + 3} = \frac{450 + 210}{8} = \frac{660}{8} = 82,5 \text{ \%}. \quad \checkmark$$

Advertencia: Error Común

Error típico: calcular la media aritmética simple de las purezas:

$$\frac{90 + 70}{2} = 80 \%.$$

Esto solo sería correcto si los dos lingotes tuvieran *exactamente el mismo peso*. Como el lingote más puro (90 %) pesa más (5 kg) que el menos puro (70 %, 3 kg), la pureza final se inclina hacia el 90 %: el resultado 82,5 % es mayor que 80 %, lo cual tiene sentido.

Observación Matemática

Verificación de coherencia: el resultado 82,5 % debe estar siempre *entre* las dos purezas originales (70 % y 90 %). Comprobamos:

$$70 \% < 82,5 \% < 90 \%. \quad \checkmark$$

Si el resultado hubiera quedado fuera de ese intervalo, habría un error de cálculo. Esta es una comprobación de coherencia que siempre debe hacerse en problemas de mezclas.

Respuesta Correcta

Respuesta correcta: B) 82,5 %.

El lingote resultante tiene un porcentaje de pureza de **82,5 %**.

2.3 Ejercicio 3 — Variaciones Porcentuales Encadenadas (parte a)

Ejercicio 3: Variaciones Porcentuales Encadenadas (a)

El precio original de un videojuego es de 50 euros. Por un aumento en la demanda, el precio sube un 30 %. Más tarde el precio rebaja un 30 % sobre el nuevo precio. ¿Cuál es su precio final?

Opciones:

- A. 50 euros
- B. 45,50 euros
- C. 55 euros
- D. 47 euros (es decir, 45,50 euros exactamente — véase la solución)

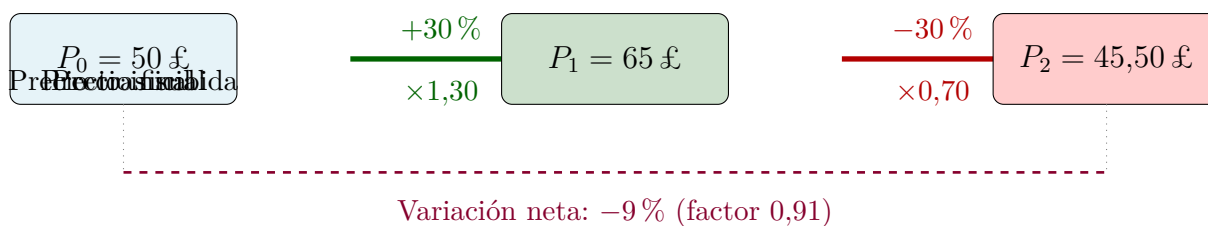


Figura 2.3: Diagrama de flujo de las variaciones porcentuales encadenadas. Obsérvese que el precio final (45,50 £) es *inferior* al inicial (50 £), aunque se aplicó el mismo porcentaje en aumento y en disminución.

Solución Completa

Método elegido: Índices de Variación (Coeficientes Multiplicadores)

Existen dos métodos equivalentes:

1. **Método directo:** calcular paso a paso el precio en cada etapa.
2. **Método del índice compuesto:** multiplicar directamente los índices de variación.

Usaremos **ambos** para verificar y para que el alumno comprenda la equivalencia.

Método 1: Cálculo paso a paso

Paso 1: Precio inicial.

$$P_0 = 50 \text{ £.}$$

Paso 2: Aplicar el aumento del 30 %.

Un aumento del 30 % significa que el nuevo precio es el original más el 30 % del original:

$$P_1 = P_0 + 30\% \cdot P_0 = P_0 \cdot (1 + 0,30) = P_0 \cdot 1,30.$$

$$P_1 = 50 \times 1,30 = 65 \text{ £.}$$

[El índice de variación de +30 % es $1,30 = \frac{130}{100}$.]

Paso 3: Aplicar la disminución del 30 % sobre el precio nuevo.

Atención: la disminución del 30 % se aplica *sobre* $P_1 = 65 \text{ £}$, no sobre P_0 :

$$P_2 = P_1 - 30\% \cdot P_1 = P_1 \cdot (1 - 0,30) = P_1 \cdot 0,70.$$

$$P_2 = 65 \times 0,70 = 45,50 \text{ £.}$$

[El índice de variación de -30 % es $0,70 = \frac{70}{100}$.]

Método 2: Índice de Variación Compuesto

Aplicando las dos variaciones encadenadas al precio inicial:

$$P_2 = P_0 \times (1 + 0,30) \times (1 - 0,30) = 50 \times 1,30 \times 0,70.$$

Calculamos el producto de los índices:

$$1,30 \times 0,70 = 0,91.$$

Por tanto:

$$P_2 = 50 \times 0,91 = 45,50 \text{ £.}$$

[El índice global $0,91 < 1$ indica una disminución neta del 9 % sobre el precio original.]

Paso 4: Verificación de la coherencia.

El precio final 45,50 £ es *menor* que el inicial 50 £. Esto tiene sentido matemáticamente porque:

$$(1,30) \times (0,70) = 0,91 < 1.$$

La variación neta es -9 % respecto al precio original:

$$50 \times 0,09 = 4,50 \text{ £} \quad \Rightarrow \quad 50 - 4,50 = 45,50 \text{ £.} \quad \checkmark$$

Advertencia: Error Común

El error más común (y el más peligroso) es creer que un +30 % seguido de un -30 % vuelve al precio original. Esto es **incorrecto** porque la disminución del 30 % se aplica sobre un valor *mayor* (65 £, no sobre 50 £). De hecho:

$$30\% \text{ de } 65 \text{ £} = 19,50 \text{ £} > 30\% \text{ de } 50 \text{ £} = 15 \text{ £.}$$

La disminución en euros (19,50) es mayor que el aumento en euros (15), por eso el precio final es menor que el inicial. Las variaciones porcentuales encadenadas **nunca** son simplemente aditivas.

Respuesta Correcta

Respuesta correcta: B) 45,50 euros.

El precio final del videojuego es **45,50** €, es decir, ha quedado por debajo del precio original.

2.4 Ejercicio 4 — Variaciones Porcentuales Encadenadas (parte b)

Ejercicio 4: Variaciones Porcentuales Encadenadas (b)

El precio final, ¿es igual, mayor o menor que el precio inicial? Justifica tu respuesta.

Opciones:

- A. Mayor, porque el aumento inicial siempre tiene más peso que la disminución posterior.
- B. Igual, porque el aumento del 30 % y la disminución del 30 % se anulan exactamente.
- C. Menor, porque el índice de variación total es $0,91 < 1$, debido a que la disminución del 30 % se aplica sobre un precio ya aumentado.
- D. Menor, porque la disminución siempre debe ser mayor que el aumento en términos porcentuales.

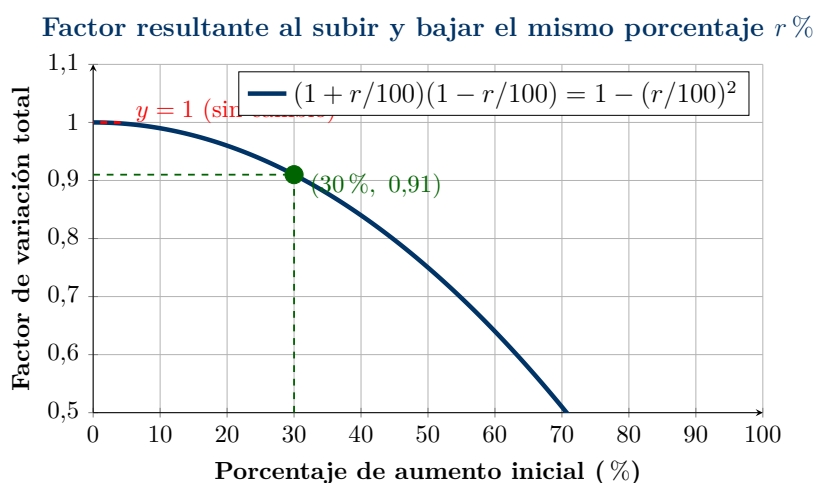


Figura 2.4: Para *cualquier* porcentaje $r > 0$, aplicar un aumento de $r\%$ seguido de una disminución de $r\%$ produce siempre un resultado *menor* que 1 (es decir, el precio baja). La curva está siempre por debajo de la línea $y = 1$ para $r > 0$. En particular, para $r = 30\%$ el factor es 0,91.

Solución Completa

Justificación matemática rigurosa

Designemos por P_0 el precio inicial y sea $r = 30$ el porcentaje de variación (expresado como número natural).

Paso 1: Aplicar la subida del $r\%$.

El índice de subida es $\left(1 + \frac{r}{100}\right)$:

$$P_1 = P_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right).$$

Paso 2: Aplicar la bajada del $r\%$ sobre P_1 .

El índice de bajada es $\left(1 - \frac{r}{100}\right)$:

$$P_2 = P_1 \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right) = P_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right).$$

Paso 3: Simplificar el producto usando la identidad del producto notable.

Reconocemos la **diferencia de cuadrados**: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ con $a = 1$ y $b = \frac{r}{100}$:

$$\left(1 + \frac{r}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right) = 1^2 - \left(\frac{r}{100}\right)^2 = 1 - \frac{r^2}{10000}.$$

Paso 4: Concluir con el valor para $r = 30$.

$$P_2 = P_0 \cdot \left(1 - \frac{30^2}{10000}\right) = P_0 \cdot \left(1 - \frac{900}{10000}\right) = P_0 \cdot (1 - 0,09) = P_0 \cdot 0,91.$$

Como $0,91 < 1$, tenemos $P_2 < P_0$: el precio **baja**.

Paso 5: Demostración de que esto ocurre para *cualquier* $r > 0$.

El factor compuesto es $1 - \frac{r^2}{10000}$. Como $r > 0$, se tiene $\frac{r^2}{10000} > 0$, y por tanto:

$$1 - \frac{r^2}{10000} < 1,$$

lo que significa que $P_2 < P_0$ **siempre que** $r > 0$. El precio final siempre es menor que el inicial cuando se aplica primero un aumento de $r\%$ y luego una disminución del mismo $r\%$.

Análisis de las opciones incorrectas

- **Opción A (Mayor):** Falsa. Como hemos demostrado, $P_2 = P_0 \cdot 0,91 < P_0$.
- **Opción B (Igual):** Falsa. Esta opción confunde la suma de porcentajes ($+30 - 30 = 0$, lo cual daría “igual”) con el producto de índices ($1,30 \times 0,70 = 0,91 \neq 1$). Las variaciones encadenadas no se suman, se multiplican.
- **Opción D (Menor por razones genéricas):** Aunque la conclusión (menor) es correcta, la justificación es errónea: no es que “la disminución deba ser mayor que el aumento en términos porcentuales” (de hecho, ambos son el 30%). La razón correcta es la de la opción C.

Observación Matemática

Generalización algebraica: Para n variaciones encadenadas de factores $I_1, I_2, \dots, I_n$, el factor total es:

$$I_{\text{total}} = \prod_{k=1}^n I_k = I_1 \cdot I_2 \cdots I_n.$$

Nunca se suman los porcentajes; siempre se multiplican los índices. Esta es una de las ideas más importantes del tema de porcentajes.

Respuesta Correcta

Respuesta correcta: C) Menor, porque el índice total es $0,91 < 1$.

$$P_2 = P_0 \cdot (1,30) \cdot (0,70) = P_0 \cdot 0,91 < P_0.$$

El precio final es un 9 % más bajo que el precio inicial. La disminución del 30 % se aplica sobre 65 £ (mayor que 50 £), por lo que la cantidad descontada en euros (19,50 £) supera al aumento inicial (15 £).

Capítulo 3

Bloque II: Progresiones

Las **progresiones** son sucesiones de números con un patrón de crecimiento regular. Son uno de los temas más importantes de la matemática elemental, con aplicaciones en economía, física, biología y computación. Este bloque trata las dos grandes familias: **progresiones aritméticas** (crecimiento lineal) y **progresiones geométricas** (crecimiento exponencial).

3.1 Ejercicio 5 — Progresión Aritmética: Término General

Ejercicio 5: Progresión Aritmética (a)

Una persona empieza a ahorrar dinero. El primer día ahorra $a_1 = 5$ £ y cada día posterior ahorra $d = 3$ £ más que el día anterior.

¿Cuánto dinero habrá ahorrado el día 30? Es decir, calcula el término a_{30} .

Opciones:

- A. 90 £
- B. 87 £
- C. 92 £
- D. 95 £

Progresión Aritmética: Ahorro diario

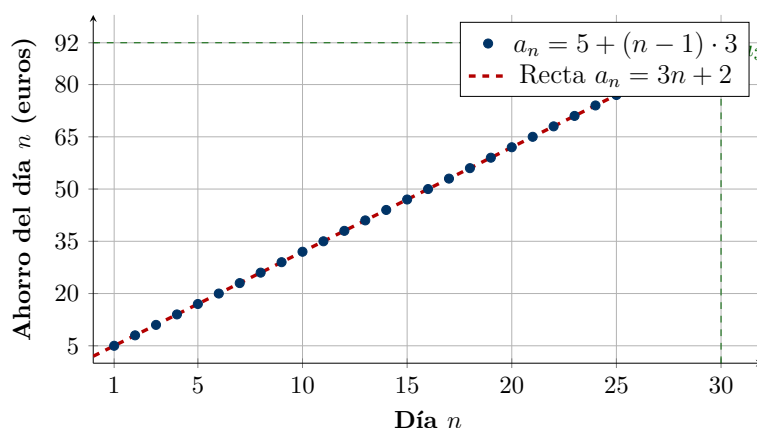


Figura 3.1: Los términos de la progresión aritmética se alinean perfectamente sobre una recta (de ahí su nombre). La pendiente de la recta es la razón $d = 3$. El término $a_{30} = 92$ £ está marcado con un cuadrado verde.

Solución Completa

Identificación de la progresión

Los datos del problema generan la siguiente sucesión de ahorros diarios:

$$5, 8, 11, 14, 17, \dots$$

La diferencia entre términos consecutivos es constante e igual a 3:

$$8 - 5 = 3, \quad 11 - 8 = 3, \quad 14 - 11 = 3, \quad \dots$$

Confirmamos que es una **progresión aritmética** con:

$$a_1 = 5, \quad d = 3.$$

Aplicación de la fórmula del término general

La fórmula del término n -ésimo de una PA es:

$$a_n = a_1 + (n - 1) d.$$

Paso 1: Sustituir los valores conocidos.

$$a_{30} = 5 + (30 - 1) \cdot 3.$$

Paso 2: Calcular $(n - 1)$.

$$30 - 1 = 29.$$

Paso 3: Calcular $(n - 1) \cdot d$.

$$29 \times 3 = 87.$$

Paso 4: Sumar a_1 .

$$a_{30} = 5 + 87 = 92.$$

Verificación

Comprobamos que la fórmula es correcta para los primeros términos:

$$a_1 = 5 + (1 - 1) \cdot 3 = 5 + 0 = 5 \text{ £.} \quad \checkmark$$

$$a_2 = 5 + (2 - 1) \cdot 3 = 5 + 3 = 8 \text{ £.} \quad \checkmark$$

$$a_3 = 5 + (3 - 1) \cdot 3 = 5 + 6 = 11 \text{ £.} \quad \checkmark$$

Y la fórmula alternativa $a_n = 3n + 2$ también da:

$$a_{30} = 3 \times 30 + 2 = 90 + 2 = 92 \text{ £.} \quad \checkmark$$

Advertencia: Error Común

Error frecuente: calcular $a_{30} = a_1 + 30 \cdot d = 5 + 30 \times 3 = 5 + 90 = 95 \text{ £.}$

Este error surge de multiplicar d por n en lugar de por $(n - 1)$. La razón es que entre el término 1 y el término 30 hay **29 saltos** (diferencias), no 30. El día 1 es el punto de partida; a partir de ahí se dan 29 incrementos hasta llegar al día 30.

Observación Matemática

Interpretación geométrica: el término general $a_n = a_1 + (n - 1)d$ es una *función lineal* en n (de la forma $a_n = dn + (a_1 - d)$). Por eso, los puntos (n, a_n) se alinean sobre una recta de pendiente $d = 3$ y ordenada en el origen $a_1 - d = 5 - 3 = 2$.

Respuesta Correcta

Respuesta correcta: C) 92 £.

El día 30, la persona ahorrará $a_{30} = \mathbf{92}$ £.

3.2 Ejercicio 6 — Progresión Aritmética: Suma

Ejercicio 6: Progresión Aritmética (b)

¿Cuánto dinero habrá ahorrado en total al cabo de esos 30 días? Calcula la suma S_{30} .

Opciones:

- A. 1455 £
- B. 1400 £
- C. 1395 £
- D. 2760 £

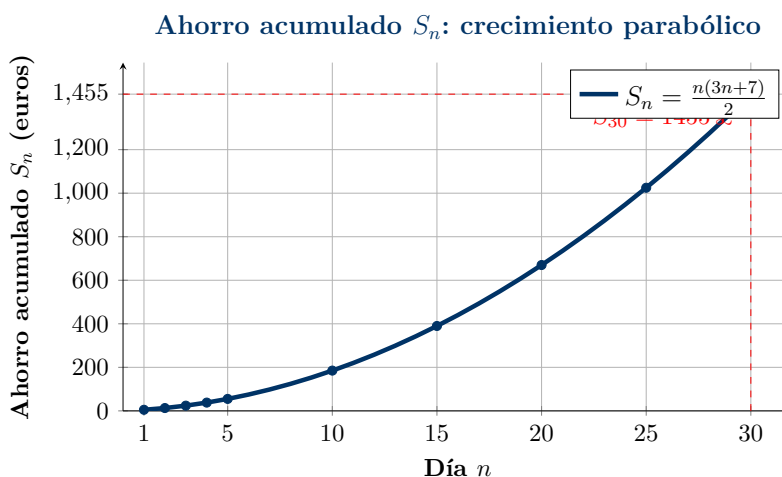


Figura 3.2: El ahorro acumulado S_n sigue una *parábola* (función cuadrática en n), característica de las sumas de progresiones aritméticas. Para $n = 30$ se alcanza $S_{30} = 1455$ £.

Solución Completa

Fórmula a aplicar

Para la suma de los primeros n términos de una PA usamos:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

Esta fórmula tiene una interpretación visual elegante: la suma es equivalente al área de un trapecio con bases a_1 y a_n y altura n .

Datos necesarios

- $n = 30$ (número de días).
- $a_1 = 5$ £ (ahorro del primer día).
- $a_{30} = 92$ £ (calculado en el Ejercicio 5).

Desarrollo**Paso 1:** Sustituir en la fórmula.

$$S_{30} = \frac{30(5 + 92)}{2}.$$

Paso 2: Calcular la suma interior.

$$5 + 92 = 97.$$

Paso 3: Multiplicar por n .

$$30 \times 97 = 2910.$$

Paso 4: Dividir por 2.

$$S_{30} = \frac{2910}{2} = 1455.$$

Verificación con la segunda fórmula

Usando la fórmula alternativa $S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$:

$$S_{30} = \frac{30[2 \times 5 + (30-1) \times 3]}{2} = \frac{30[10 + 87]}{2} = \frac{30 \times 97}{2} = \frac{2910}{2} = 1455. \quad \checkmark$$

El truco de Gauss

La fórmula de la suma se puede deducir emparejando términos de la sucesión:

$$\underbrace{a_1 + a_{30}}_{=97} + \underbrace{a_2 + a_{29}}_{=97} + \cdots + \underbrace{a_{15} + a_{16}}_{=97}.$$

Hay $\frac{30}{2} = 15$ pares, cada uno con suma 97:

$$S_{30} = 15 \times 97 = 1455 \text{ £.} \quad \checkmark$$

Advertencia: Error Común

Error con la opción D (2760): si el alumno calcula $30 \times 92 = 2760$, está multiplicando el número de días por el ahorro del *último día*, como si todos los días se ahorrara 92 £, lo cual es incorrecto.

Error con la opción C (1395): puede provenir de usar $a_{30} = 87$ en lugar de 92 (error de calcular $a_{30} = 5 + 29 \times 3 = 92$, pero confundirlo con $5 + 29 \times 3 = 5 + 82 = 87$ por un error aritmético).

Respuesta Correcta

Respuesta correcta: A) 1455 £.

En 30 días, el ahorro total acumulado es $S_{30} = 1455$ £.

3.3 Ejercicio 7 — Progresión Geométrica: Término General

Ejercicio 7: Progresión Geométrica (a)

Se sabe que en una progresión geométrica el segundo término es $a_2 = 10$ y el tercer término es $a_3 = 50$.

Halla la razón (r), el primer término (a_1) y el término general (a_n) de la progresión.

Opciones:

- A. $r = 5$, $a_1 = 5$, $a_n = 5 \cdot 5^{n-1}$
- B. $r = 40$, $a_1 = -30$, $a_n = -30 + 40(n-1)$ (progresión aritmética, no geométrica)
- C. $r = 5$, $a_1 = 2$, $a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$
- D. $r = 5$, $a_1 = 2$, $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$

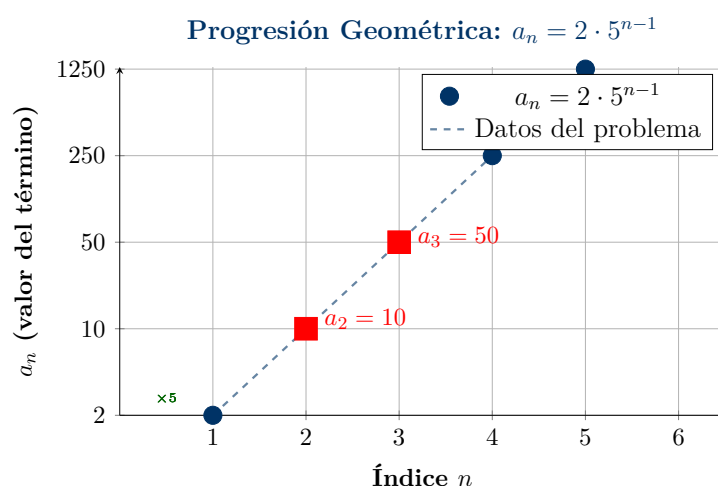


Figura 3.3: Representación (en escala logarítmica) de la progresión geométrica $a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$. En escala logarítmica, la progresión geométrica aparece como una recta. Los términos dados en el problema ($a_2 = 10$ y $a_3 = 50$) están marcados en rojo.

Solución Completa

Determinación de la razón r

En toda progresión geométrica, el cociente entre dos términos consecutivos es constante e igual a la razón r . Por tanto:

$$r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{50}{10} = 5.$$

Paso 1: Justificación. En una PG se cumple $a_n = a_{n-1} \cdot r$, de donde:

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

Aplicando con $n = 3$:

$$r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{50}{10} = 5.$$

Determinación del primer término a_1

Usamos la relación $a_2 = a_1 \cdot r$:

$$10 = a_1 \cdot 5.$$

$$a_1 = \frac{10}{5} = 2.$$

Paso 2: Verificación de a_1 . Con $a_1 = 2$ y $r = 5$:

$$a_1 = 2.$$

$$a_2 = 2 \times 5 = 10. \quad \checkmark$$

$$a_3 = 10 \times 5 = 50. \quad \checkmark$$

Término general

Aplicamos la fórmula general de la PG:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 2 \cdot 5^{n-1}.$$

Verificación del término general

$$a_1 = 2 \cdot 5^0 = 2 \cdot 1 = 2. \quad \checkmark$$

$$a_2 = 2 \cdot 5^1 = 2 \cdot 5 = 10. \quad \checkmark$$

$$a_3 = 2 \cdot 5^2 = 2 \cdot 25 = 50. \quad \checkmark$$

$$a_4 = 2 \cdot 5^3 = 2 \cdot 125 = 250.$$

Análisis de las opciones incorrectas

- **Opción A:** $a_n = 5 \cdot 5^{n-1} = 5^n$. Aquí $a_1 = 5$ y $a_2 = 25 \neq 10$. Incorrecto.
- **Opción B:** Es la fórmula de una **progresión aritmética** ($a_n = -30 + 40(n-1)$). La opción confunde PG con PA. En una PA, la diferencia $a_3 - a_2 = 40 \neq a_2 - a_1$ en nuestro caso; además, el enunciado habla explícitamente de una PG.
- **Opción D:** $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$. Aquí los roles de a_1 y r están intercambiados: $a_1 = 5$ y $r = 2$, lo que daría $a_2 = 10$ (correcto) pero $a_3 = 20 \neq 50$ (incorrecto).

Advertencia: Error Común

Confusión PA / PG: la opción B está formulada como una PA. El error típico es no saber distinguir entre los dos tipos de progresiones. En una PA, los términos se obtienen *sumando* la razón; en una PG, *multiplicando* por la razón. Para identificar cuál es, calcular $a_3 - a_2$ y a_3/a_2 :

$$a_3 - a_2 = 50 - 10 = 40 \quad (\text{no constante en toda la sucesión}),$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{50}{10} = 5 \quad (\text{constante}) \implies \text{PG}.$$

Respuesta Correcta

Respuesta correcta: C)

$$r = 5, \quad a_1 = 2, \quad a_n = 2 \cdot 5^{n-1}.$$

3.4 Ejercicio 8 — Progresión Geométrica: Suma

Ejercicio 8: Progresión Geométrica (b)

Calcula la suma de los siete primeros términos de la progresión (S_7).

Opciones:

- A. 39 062
- B. 195 310
- C. 31 250
- D. 9 766

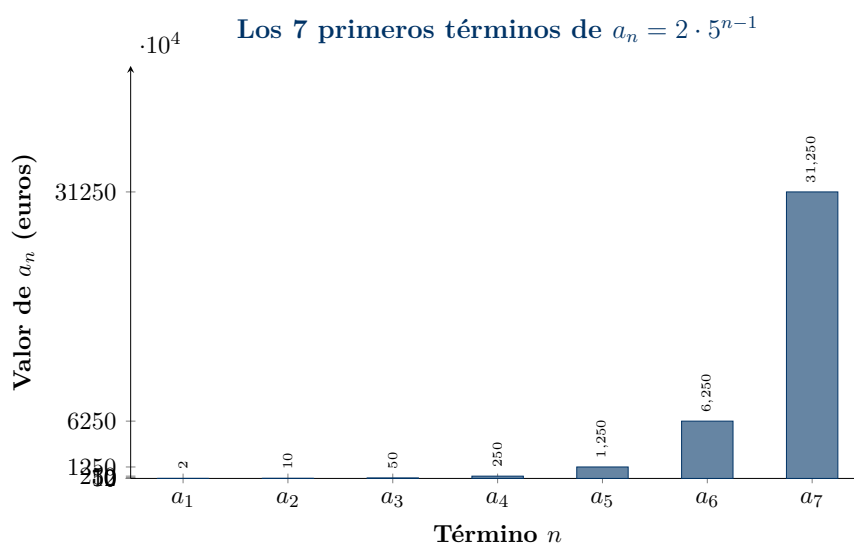


Figura 3.4: Barras de los siete primeros términos de la PG $a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$. Nótese el crecimiento explosivo: el séptimo término (31 250) es ya mayor que la suma de todos los anteriores. Esto ilustra la naturaleza exponencial de las PG.

Solución Completa

Datos

De los ejercicios anteriores tenemos:

$$a_1 = 2, \quad r = 5, \quad n = 7.$$

Fórmula de la suma de una PG

Para $r \neq 1$:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

Paso 1: Sustituir los datos.

$$S_7 = 2 \cdot \frac{5^7 - 1}{5 - 1}.$$

Paso 2: Calcular 5^7 paso a paso.

Para evitar errores, calculamos las potencias de 5 sucesivamente:

$$\begin{aligned}5^1 &= 5, \\5^2 &= 25, \\5^3 &= 125, \\5^4 &= 625, \\5^5 &= 3\,125, \\5^6 &= 15\,625, \\5^7 &= 78\,125.\end{aligned}$$

Paso 3: Calcular el numerador.

$$5^7 - 1 = 78\,125 - 1 = 78\,124.$$

Paso 4: Calcular el denominador.

$$r - 1 = 5 - 1 = 4.$$

Paso 5: Dividir numerador entre denominador.

$$\frac{78\,124}{4} = 19\,531.$$

Paso 6: Multiplicar por a_1 .

$$S_7 = 2 \times 19\,531 = 39\,062.$$

Verificación sumando los 7 términos directamente

Calculamos los siete términos de la PG:

n	$a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$
1	$2 \cdot 5^0 = 2 \cdot 1 = 2$
2	$2 \cdot 5^1 = 2 \cdot 5 = 10$
3	$2 \cdot 5^2 = 2 \cdot 25 = 50$
4	$2 \cdot 5^3 = 2 \cdot 125 = 250$
5	$2 \cdot 5^4 = 2 \cdot 625 = 1\,250$
6	$2 \cdot 5^5 = 2 \cdot 3\,125 = 6\,250$
7	$2 \cdot 5^6 = 2 \cdot 15\,625 = 31\,250$
Suma $2 + 10 + 50 + 250 + 1\,250 + 6\,250 + 31\,250 = \mathbf{39\,062}$	

Verificamos la suma:

$$\begin{aligned}2 + 10 &= 12, \\12 + 50 &= 62, \\62 + 250 &= 312, \\312 + 1\,250 &= 1\,562, \\1\,562 + 6\,250 &= 7\,812, \\7\,812 + 31\,250 &= 39\,062. \quad \checkmark\end{aligned}$$

Análisis de las opciones incorrectas

- **Opción B (195 310):** corresponde a S_7 si $a_1 = 10$ y $r = 5$ (usando a_2 como primer término en lugar de a_1). Error en la identificación de a_1 .
- **Opción C (31 250):** es simplemente a_7 , el séptimo término, no la suma. Error de confundir término con suma parcial.
- **Opción D (9 766):** podría corresponder a S_6 con $a_1 = 2$ y $r = 5$: $S_6 = 2 \cdot \frac{5^6 - 1}{4} = 2 \cdot \frac{15624}{4} = 2 \cdot 3906 = 7812$. No coincide exactamente; es probable un error aritmético en 5^7 .

Observación Matemática

Propiedad notable: en una PG con razón $r > 1$, el último término es siempre mayor que la suma de todos los términos anteriores. Comprobamos:

$$a_7 = 31\,250 > S_6 = 39\,062 - 31\,250 = 7\,812. \quad \checkmark$$

Esto es consecuencia directa del crecimiento exponencial: cada término es $r - 1$ veces la suma de todos los anteriores cuando $a_1 = 1$ y se generaliza proporcionalmente.

Respuesta Correcta

Respuesta correcta: A) 39 062.

$$S_7 = 2 \cdot \frac{5^7 - 1}{5 - 1} = 2 \cdot \frac{78\,124}{4} = 2 \times 19\,531 = \mathbf{39\,062}.$$

Capítulo 4

Resumen General y Tabla de Respuestas

4.1 Tabla de Respuestas Correctas

Ejercicio	Tema	Respuesta	Resultado
1	Proporcionalidad inversa	B	15 días
2	Problema de mezclas (pureza)	B	82,5 %
3	Variaciones porcentuales (precio)	B	45,50 £
4	Variaciones porcentuales (compare)	C	Menor; índice = 0,91
5	Término general PA	C	$a_{30} = 92$ £
6	Suma PA	A	$S_{30} = 1455$ £
7	Razón y término general PG	C	$r = 5$, $a_1 = 2$, $a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$
8	Suma PG	A	$S_7 = 39\,062$

4.2 Fórmulas Fundamentales Usadas

Resumen de Fórmulas

Proporcionalidad inversa:

$$A_1 \cdot B_1 = A_2 \cdot B_2 = C \quad (\text{constante}).$$

Pureza de una mezcla (promedio ponderado):

$$p_{\text{mezcla}} = \frac{m_1 p_1 + m_2 p_2}{m_1 + m_2}.$$

Variaciones porcentuales encadenadas:

$$P_{\text{final}} = P_0 \cdot I_1 \cdot I_2 \cdots I_n, \quad I_k = 1 + \frac{r_k}{100}.$$

Progresión Aritmética:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d, \quad S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

Progresión Geométrica ($r \neq 1$):

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}, \quad S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

4.3 Conclusiones Pedagógicas

1. **Identificar el tipo de proporcionalidad** antes de plantear la ecuación es el paso más importante. Una identificación errónea conduce a un planteamiento completamente incorrecto.
2. **Los promedios ponderados** son más generales que la media aritmética. Siempre que las muestras tengan distinto “peso”, hay que ponderar.
3. **Las variaciones porcentuales no son aditivas**: no se pueden sumar los porcentajes cuando se aplican de forma encadenada. Siempre se multiplican los índices de variación.
4. **En las PA**, la diferencia entre términos consecutivos es constante (razón d). El término general es *lineal* en n y la suma es *cuadrática* en n .
5. **En las PG**, el cociente entre términos consecutivos es constante (razón r). El término general es *exponencial* en n y el crecimiento puede ser extraordinariamente rápido (como muestra el Ejercicio 8, donde en solo 7 pasos se llega a 39 062 partiendo de 2).
6. **Siempre verificar**: cualquier solución debe ser comprobada, ya sea sustituyendo en la fórmula original, ya sea comprobando la coherencia del resultado (¿está en el rango esperado? ¿tiene sentido físico?).

Apéndice A

Apéndice: Tabla Comparativa PA vs. PG

Característica	Progresión Aritmética	Progresión Geométrica
Operación entre términos	Suma/resta	Multiplicación/división
Razón	$d = a_n - a_{n-1}$	$r = a_n / a_{n-1}$
Término general	$a_n = a_1 + (n - 1)d$	$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$
Tipo de crecimiento	Lineal	Exponencial
Suma de n términos	$\frac{n(a_1 + a_n)}{2}$	$a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$
Gráfica	Puntos sobre una recta	Puntos sobre una curva exponencial
Ejemplo del examen	5, 8, 11, 14, ...	2, 10, 50, 250, ...
Razón del ejemplo	$d = 3$	$r = 5$
a_{30} / a_7	92	31 250
S_{30} / S_7	1 455	39 062

Ante cualquier ejercicio de progresiones:

1. **Identifica el tipo:** ¿sumas o multiplicas? Si la diferencia entre términos consecutivos es constante $\rightarrow$ PA. Si el cociente es constante $\rightarrow$ PG.
2. **Extrae a_1 y la razón (d o r)** directamente de los datos.
3. **Aplica la fórmula** correcta para el término general o para la suma.
4. **Verifica** con los términos conocidos del enunciado.

Examen de Matemáticas

3º A ESO - Problemas Aritméticos y Progresiones

Noviembre de 2025

Bloque I: Problemas Aritméticos

N1. Proporcionalidad Inversa Un campamento de 60 alumnos tiene provisiones para 10 días. Si 20 alumnos se marchan del campamento, ¿cuántos días podrán durar las provisiones restantes para los alumnos que quedan?

N2. Problema de Mezclas (Pureza) Se mezcla un lingote de plata de 5 kg de peso con un 90 % de pureza con otro lingote de 3 kg de peso con un 70 % de pureza. ¿Cuál es el porcentaje de pureza del lingote resultante?

N3. Variaciones Porcentuales Encadenadas El precio original de un videojuego es de 50 euros.

1. Por un aumento en la demanda, el precio sube un 30 %. Más tarde, el precio rebaja un 30 % sobre el nuevo precio. ¿Cuál es su precio final?
 2. ¿El precio final es igual, mayor o menor que el precio inicial? Justifica tu respuesta.
-

Bloque II: Progresiones

N4. Progresión Aritmética Una persona empieza a ahorrar dinero. El primer día ahorra €5, y cada día posterior ahorra €3 más que el día anterior.

1. ¿Cuánto dinero habrá ahorrado el día 30? Es decir, calcula el término a_{30} .
2. ¿Cuánto dinero habrá ahorrado en total al cabo de esos 30 días? Calcula la suma S_{30} .

N5. Progresión Geométrica Se sabe que en una progresión geométrica el segundo término es $a_2 = 10$ y el tercer término es $a_3 = 50$.

1. Halla la razón (r), el primer término (a_1) y el término general (a_n) de la progresión.
 2. Calcula la suma de los siete primeros términos de la progresión (S_7).
-

SUERTE JÓVENES

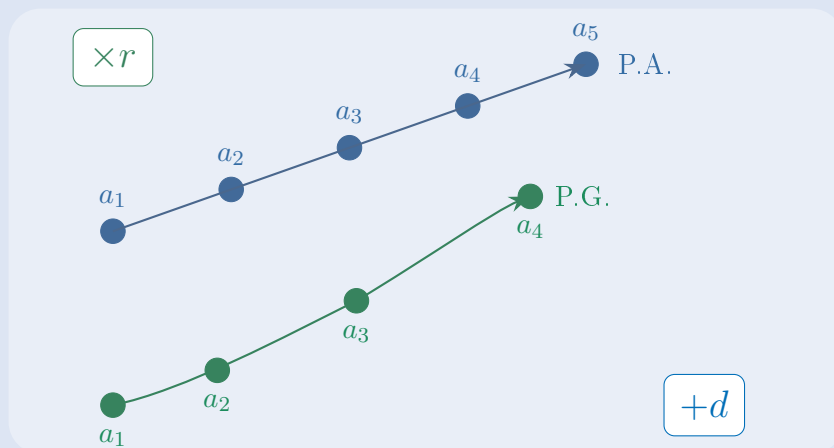
Solucionario Completo

Examen de Matemáticas

3.º A ESO

Problemas Aritméticos y Progresiones

Noviembre de 2025



*Documento elaborado con rigor matemático
para el estudio autónomo del alumno*

Solución detallada · Paso a paso · Representaciones gráficas

Índice general

Introducción pedagógica	2
1. Bloque I: Problemas Aritméticos	3
1.1. N1 — Proporcionalidad Inversa	4
1.2. N2 — Problema de Mezclas (Pureza)	7
1.3. N3 — Variaciones Porcentuales Encadenadas	9
2. Bloque II: Progresiones	12
2.1. N4 — Progresión Aritmética	13
2.2. N5 — Progresión Geométrica	16
Resumen de Resultados	20

Introducción pedagógica

Este solucionario ha sido redactado con el objetivo de que el alumno no solo conozca la respuesta correcta a cada ejercicio, sino que comprenda *por qué* cada paso es válido y qué concepto matemático lo sustenta.

Las soluciones están organizadas de la siguiente manera:

- **Enunciado:** reproducción íntegra del enunciado.
- **Conceptos previos:** definiciones y fórmulas necesarias.
- **Resolución paso a paso:** cada operación está justificada.
- **Advertencias:** errores habituales que se deben evitar.
- **Conclusión:** interpretación del resultado en contexto.
- **Ilustración:** diagrama o gráfico que refuerza la comprensión visual.

Definición

- a_n : término n -ésimo de una progresión.
- d : razón (diferencia común) de una progresión aritmética.
- r : razón (cociente común) de una progresión geométrica.
- S_n : suma de los n primeros términos de una progresión.
- %: porcentaje (por ciento).
- $\propto$: proporcional a.

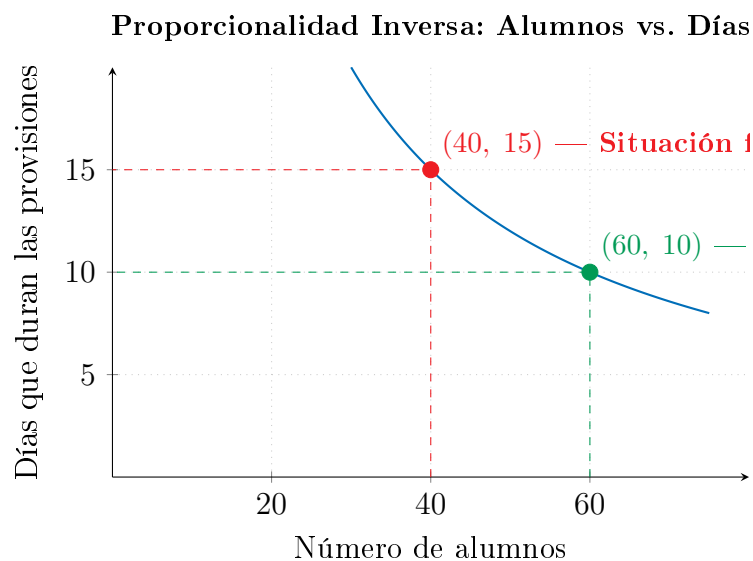
Capítulo 1

Bloque I: Problemas Aritméticos

1.1. N1 — Proporcionalidad Inversa

Enunciado — N1

Un campamento de 60 alumnos tiene provisiones para 10 días. Si 20 alumnos se marchan del campamento, ¿cuántos días podrán durar las provisiones restantes para los alumnos que quedan?



Definición

Dos magnitudes A y B son **inversamente proporcionales** si su *producto* es constante:

$$A \cdot B = k \quad (\text{constante de proporcionalidad})$$

Equivalentemente, al *duplicar* A , B se *reduce a la mitad*, y viceversa. En términos de tablas:

$$A_1 \cdot B_1 = A_2 \cdot B_2 = k.$$

Identificación: cuando una magnitud *aumenta* y la otra *disminuye*, la relación es *inversa*.

Resolución paso a paso — N1

Paso 1 — Identificar las magnitudes y su tipo de variación.

Las dos magnitudes del problema son:

- A = número de alumnos en el campamento.
- B = número de días que duran las provisiones.

Razonamiento lógico: si hay *más* alumnos, las provisiones se agotan en *menos* días (cada día se consume más comida). Al contrario, si hay *menos* alumnos, las mismas provisiones duran *más* días.

⇒ Las magnitudes son **inversamente proporcionales**.

Paso 2 — Calcular la constante de proporcionalidad k .

Con la información inicial:

$$A_1 = 60 \text{ alumnos}, \quad B_1 = 10 \text{ días.}$$

$$k = A_1 \cdot B_1 = 60 \cdot 10 = 600.$$

Interpretación: las provisiones totales equivalen a alimentar a 1 alumno durante 600 días, o a 60 alumnos durante 10 días, etc.

Paso 3 — Determinar la nueva situación.

Se marchan 20 alumnos, de modo que el número de alumnos que permanece es:

$$A_2 = 60 - 20 = 40 \text{ alumnos.}$$

Paso 4 — Aplicar la regla de proporcionalidad inversa.

Usando $A_2 \cdot B_2 = k$:

$$40 \cdot B_2 = 600 \quad \Rightarrow \quad B_2 = \frac{600}{40} = \boxed{15 \text{ días}}.$$

Paso 5 — Verificación.

$$A_1 \cdot B_1 = 60 \cdot 10 = 600, \quad A_2 \cdot B_2 = 40 \cdot 15 = 600. \quad \checkmark$$

Los productos son iguales, lo que confirma la proporcionalidad inversa.

Advertencia — Error frecuente

Un error muy común es confundir la proporcionalidad *directa* con la *inversa*. En proporcionalidad **directa** se divide (regla de tres directa): $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$. En proporcionalidad **inversa** se multiplica: $A_1 \cdot B_1 = A_2 \cdot B_2$. Aplicar la directa aquí daría $B_2 = \frac{40 \times 10}{60} \approx 6,67$ días, resultado *incorrecto*.

Conclusión

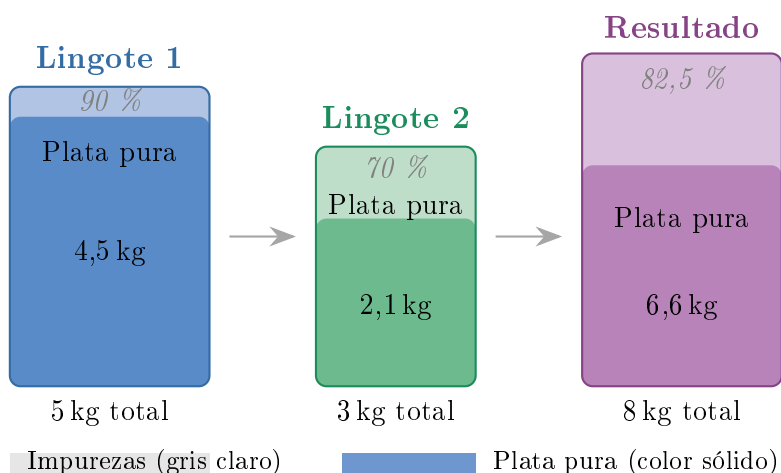
Cuando se marchan 20 alumnos y quedan 40, las provisiones duran **15 días**, 5 días más que al inicio. Tiene sentido: al reducir los consumidores a $\frac{2}{3}$ ($40/60$),

los días se multiplican por $\frac{3}{2}$ (15/10), lo cual es exactamente la relación inversa.

1.2. N2 — Problema de Mezclas (Pureza)

Enunciado — N2

Se mezcla un lingote de plata de 5 kg con un 90 % de pureza con otro lingote de 3 kg con un 70 % de pureza. ¿Cuál es el porcentaje de pureza del lingote resultante?



Definición

El **porcentaje de pureza** de una sustancia indica qué fracción de su masa total corresponde al material puro. Si una sustancia tiene masa m y pureza $p\%$, entonces:

$$\text{masa de sustancia pura} = m \cdot \frac{p}{100}.$$

Al mezclar varias sustancias, la **masa pura total** se obtiene sumando las masas puras de cada componente, y el **porcentaje de pureza resultante** se calcula como:

$$p_{\text{result}} = \frac{\text{masa pura total}}{\text{masa total}} \times 100.$$

Resolución paso a paso — N2

Paso 1 — Datos del problema.

Lingote	Masa total	Pureza	Masa pura
Lingote 1	5 kg	90 %	?
Lingote 2	3 kg	70 %	?
Mezcla	8 kg	?	?

Paso 2 — Calcular la masa de plata pura en cada lingote.

Para el **lingote 1**:

$$m_{\text{pura},1} = 5 \text{ kg} \times \frac{90}{100} = 5 \times 0,90 = 4,5 \text{ kg}.$$

Para el **lingote 2**:

$$m_{\text{pura},2} = 3 \text{ kg} \times \frac{70}{100} = 3 \times 0,70 = 2,1 \text{ kg}.$$

Paso 3 — Sumar las masas puras y las masas totales.

$$m_{\text{pura, total}} = 4,5 + 2,1 = 6,6 \text{ kg}.$$

$$m_{\text{total}} = 5 + 3 = 8 \text{ kg}.$$

Paso 4 — Calcular el porcentaje de pureza del lingote resultante.

$$p_{\text{result}} = \frac{m_{\text{pura, total}}}{m_{\text{total}}} \times 100 = \frac{6,6}{8} \times 100 = 0,825 \times 100 = \boxed{82,5 \%}.$$

Paso 5 — Verificación del resultado (cota de razonabilidad).

La pureza de la mezcla debe estar *entre* las purzas de los dos componentes:

$$70 \% < 82,5 \% < 90 \%. \quad \checkmark$$

Además, debe estar *más próxima a 90 %* porque el lingote 1 (5 kg) pesa más que el lingote 2 (3 kg), por tanto su influencia en la mezcla es mayor. En efecto, 82,5 % es más cercano a 90 % que a 70 %. $\checkmark$

Advertencia — Error frecuente

El error más frecuente es **promediar directamente los porcentajes**:

$$\frac{90 \% + 70 \%}{2} = 80 \% \quad \leftarrow \text{INCORRECTO.}$$

Esta media aritmética solo sería válida si ambos lingotes tuviesen la *misma masa*. Al tener masas distintas, se debe hacer la media **ponderada** por las masas, que es exactamente lo que se ha calculado.

Conclusión

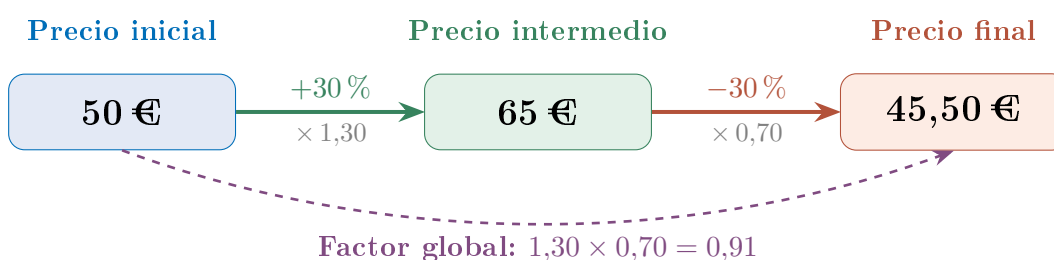
El lingote resultante de 8 kg tiene una pureza de **82,5 %**, lo que significa que contiene 6,6 kg de plata pura y 1,4 kg de impurezas.

1.3. N3 — Variaciones Porcentuales Encadenadas

Enunciado — N3

El precio original de un videojuego es de 50 euros.

1. Por un aumento en la demanda, el precio sube un 30 %. Más tarde, el precio rebaja un 30 % sobre el nuevo precio. ¿Cuál es su precio final?
2. ¿El precio final es igual, mayor o menor que el precio inicial? Justifica tu respuesta.



Definición

Una **subida** del $p\%$ equivale a multiplicar por el *factor multiplicador*:

$$f_{\text{subida}} = 1 + \frac{p}{100}.$$

Una **bajada** del $p\%$ equivale a multiplicar por:

$$f_{\text{bajada}} = 1 - \frac{p}{100}.$$

Cuando se aplican **variaciones sucesivas**, los factores se *multiplican* entre sí para obtener el **factor global**:

$$f_{\text{global}} = f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n.$$

Resolución paso a paso — N3

Precio inicial: $P_0 = 50 \text{ €}$.

Paso 1 — Subida del 30 %.

El factor multiplicador de una subida del 30 % es:

$$f_1 = 1 + \frac{30}{100} = 1 + 0,30 = 1,30.$$

El nuevo precio tras la subida es:

$$P_1 = P_0 \cdot f_1 = 50 \times 1,30 = 65 \text{ €}.$$

También puede calcularse directamente: el 30 % de 50 es $50 \times 0,30 = 15 \text{ €}$, y $50 + 15 = 65 \text{ €}$.

Paso 2 — Bajada del 30 % (sobre el nuevo precio).

El factor multiplicador de una bajada del 30 % es:

$$f_2 = 1 - \frac{30}{100} = 1 - 0,30 = 0,70.$$

Importante: la bajada se aplica *sobre* $P_1 = 65 \text{ €}$, no sobre el precio original.

$$P_2 = P_1 \cdot f_2 = 65 \times 0,70 = \boxed{45,50 \text{ €}}.$$

Comprobación directa: el 30 % de 65 es $65 \times 0,30 = 19,50 \text{ €}$, y $65 - 19,50 = 45,50 \text{ €}$. ✓

Resolución paso a paso — N3

Paso 3 — Comparación con el precio inicial.

$$P_{\text{final}} = 45,50 \text{ €} \quad \text{vs.} \quad P_{\text{inicial}} = 50 \text{ €}.$$

$$45,50 < 50 \quad \implies \quad \text{El precio final es } \mathbf{MENOR} \text{ que el inicial.}$$

Justificación algebraica (mediante el factor global):

$$f_{\text{global}} = f_1 \cdot f_2 = 1,30 \times 0,70.$$

Calculamos el producto:

$$1,30 \times 0,70 = \frac{130}{100} \times \frac{70}{100} = \frac{130 \times 70}{10000} = \frac{9100}{10000} = 0,91.$$

Por tanto:

$$P_{\text{final}} = P_0 \cdot f_{\text{global}} = 50 \times 0,91 = 45,50 \text{ €}.$$

Como $f_{\text{global}} = 0,91 < 1$, el precio *ha disminuido* respecto al inicial. La variación porcentual global es:

$$\text{Variación \%} = (f_{\text{global}} - 1) \times 100 = (0,91 - 1) \times 100 = -9\%.$$

Es decir, el precio ha bajado un **9 %** respecto al precio original.

¿Por qué no se compensan el +30 % y el -30 %?

La subida y la bajada son del mismo porcentaje (30 %), pero se aplican sobre *bases distintas*:

- El +30 % se aplica sobre 50 € $\Rightarrow$ se añaden 15 €.
- El -30 % se aplica sobre 65 € $\Rightarrow$ se restan 19,50 €.

Se resta *más* de lo que se sumó, por eso el precio final es menor.

Advertencia — Error frecuente

Un error muy habitual es pensar que +30 % y luego -30 % se anulan y el precio vuelve al valor inicial. **Esto es FALSO** porque los porcentajes se aplican sobre bases diferentes. Subir un p % y luego bajar el mismo p % *siempre* produce una pérdida neta igual a $p^2/100$ puntos porcentuales. En este caso: $30^2/100 = 9$ % de pérdida.

Conclusión

El precio final del videojuego es **45,50 €**, que es **menor** que el precio inicial de 50 €. La variación global equivale a una *bajada neta* del **9 %** sobre el precio original.

Capítulo 2

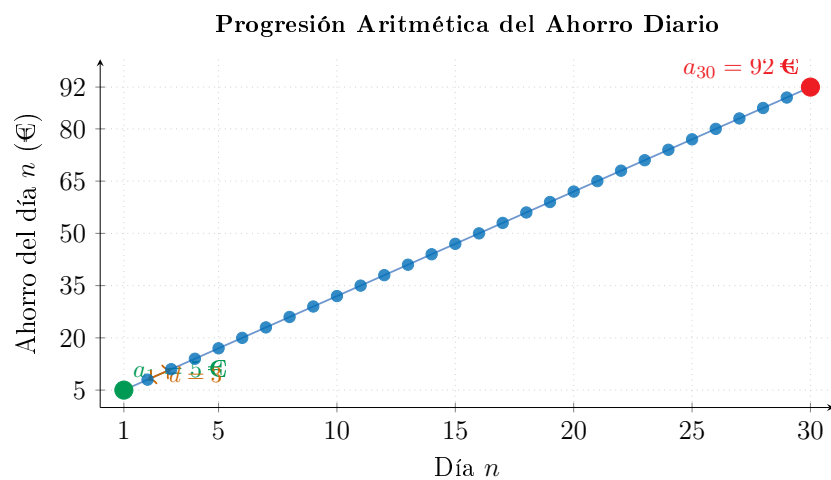
Bloque II: Progresiones

2.1. N4 — Progresión Aritmética

Enunciado — N4

Una persona empieza a ahorrar dinero. El primer día ahorra 5, y cada día posterior ahorra 3 más que el día anterior.

1. ¿Cuánto dinero habrá ahorrado el día 30? Calcula el término a_{30} .
2. ¿Cuánto dinero habrá ahorrado en total al cabo de esos 30 días? Calcula la suma S_{30} .



Definición

Una **progresión aritmética** (P.A.) es una sucesión de números en la que la diferencia entre dos términos consecutivos es *siempre la misma constante*, llamada **razón** o **diferencia común** d :

$$a_{n+1} - a_n = d \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Los primeros términos tienen la forma:

$$a_1, \quad a_1 + d, \quad a_1 + 2d, \quad a_1 + 3d, \quad \dots$$

Teorema / Fórmula clave

Término general: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d.$ (2.1)

Suma de los n primeros términos: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(2a_1 + (n - 1)d)}{2}.$ (2.2)

La fórmula de la suma se puede interpretar como n veces la media aritmética del primer y el último término.

Resolución paso a paso — N4**Paso 1 — Identificar los datos de la progresión.**

Del enunciado:

- Primer término: $a_1 = 5 \text{ €}$ (lo ahorrado el día 1).
- Diferencia común: $d = 3 \text{ €}$ (cada día ahorra 3 € más que el anterior).

Los primeros términos para comprobar:

$$a_1 = 5, \quad a_2 = 8, \quad a_3 = 11, \quad a_4 = 14, \quad \dots$$

La diferencia entre consecutivos es siempre 3. ✓

Paso 2 — Obtener la fórmula del término general.

Usando la fórmula (2.1):

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 5 + (n - 1) \cdot 3.$$

Simplificando:

$$a_n = 5 + 3n - 3 = 3n + 2.$$

Verificación para $n = 1$: $3(1) + 2 = 5 = a_1$. ✓

Apartado 1 — Cálculo de a_{30} .

Sustituimos $n = 30$ en la fórmula del término general:

$$a_{30} = 3 \cdot 30 + 2 = 90 + 2 = \boxed{92 \text{ €}}.$$

El día 30, la persona ahorra **92 euros**.

Apartado 2 — Cálculo de S_{30} .

Usando la fórmula (2.2) con $n = 30$, $a_1 = 5$ y $a_{30} = 92$:

$$S_{30} = \frac{n(a_1 + a_{30})}{2} = \frac{30(5 + 92)}{2} = \frac{30 \times 97}{2} = \frac{2910}{2} = \boxed{1455 \text{ €}}.$$

Verificación usando la segunda forma de la fórmula:

$$S_{30} = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2} = \frac{30(2 \cdot 5 + 29 \cdot 3)}{2} = \frac{30(10 + 87)}{2} = \frac{30 \times 97}{2} = 1455 \text{ €}. \quad \checkmark$$

Advertencia — Error frecuente

Al aplicar la fórmula $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$, el factor que multiplica a d es $(n-1)$, *no* n . Esto se debe a que el primer término (a_1) no incorpora ninguna diferencia. Usar n en lugar de $(n-1)$ daría $a_{30} = 5 + 30 \times 3 = 95 \text{ €}$, que es **incorrecto**.

Conclusión

- El día 30 la persona ahorra **92 €**.
- En total, durante los 30 días ha ahorrado **1 455 €**.

Demostración de la fórmula $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$

Esta bella demostración se atribuye al matemático **Carl Friedrich Gauss** (siglo XVIII):

Escribimos la suma en orden ascendente y descendente:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + a_n$$

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + a_1$$

Sumando columna a columna (n columnas):

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) = n(a_1 + a_n).$$

Dividiendo entre 2:

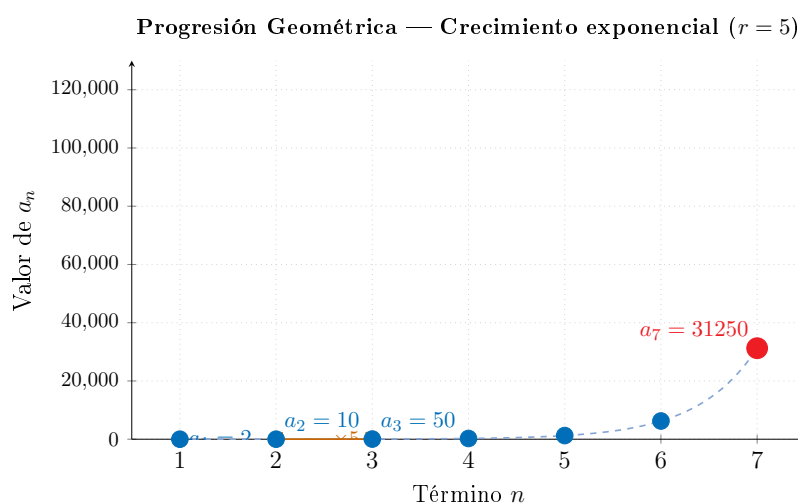
$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}. \quad \square$$

2.2. N5 — Progresión Geométrica

Enunciado — N5

Se sabe que en una progresión geométrica el segundo término es $a_2 = 10$ y el tercer término es $a_3 = 50$.

1. Halla la razón (r), el primer término (a_1) y el término general (a_n) de la progresión.
2. Calcula la suma de los siete primeros términos de la progresión (S_7).



Definición

Una **progresión geométrica** (P.G.) es una sucesión de números en la que el cociente entre dos términos consecutivos es *siempre la misma constante*, llamada **razón** r :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \quad \text{para todo } n \geq 1, \quad r \neq 0.$$

Los primeros términos tienen la forma:

$$a_1, \quad a_1 r, \quad a_1 r^2, \quad a_1 r^3, \quad \dots$$

Si $|r| > 1$, la progresión *crece* en valor absoluto; si $0 < |r| < 1$, *decrece*; si $r < 0$, los signos alternan.

Teorema / Fórmula clave

$$\text{Término general: } a_n = a_1 \cdot r^{n-1}. \quad (2.3)$$

$$\text{Suma de los } n \text{ primeros términos } (r \neq 1): S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}. \quad (2.4)$$

Resolución paso a paso — N5

Paso 1 — Calcular la razón r .

Por la definición de progresión geométrica, el cociente entre dos términos consecutivos es constante e igual a r . Por tanto:

$$r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{50}{10} = 5.$$

Así, $\boxed{r = 5}$.

Paso 2 — Calcular el primer término a_1 .

Usamos la relación $a_2 = a_1 \cdot r$:

$$10 = a_1 \cdot 5 \implies a_1 = \frac{10}{5} = 2.$$

Así, $\boxed{a_1 = 2}$.

Verificación: $a_3 = a_1 \cdot r^2 = 2 \cdot 25 = 50$. ✓

Paso 3 — Escribir el término general a_n .

Usando la fórmula (2.3):

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 2 \cdot 5^{n-1}.$$

Los primeros siete términos son:

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	2	10	50	250	1 250	6 250	31 250

Resolución paso a paso — N5

Paso 4 — Calcular S_7 .

Usando la fórmula (2.4) con $a_1 = 2$, $r = 5$ y $n = 7$:

$$S_7 = a_1 \cdot \frac{r^7 - 1}{r - 1} = 2 \cdot \frac{5^7 - 1}{5 - 1}.$$

Cálculo de 5^7 paso a paso:

$$5^1 = 5,$$

$$5^2 = 25,$$

$$5^3 = 125,$$

$$5^4 = 625,$$

$$5^5 = 3\,125,$$

$$5^6 = 15\,625,$$

$$5^7 = 78\,125.$$

Sustituyendo:

$$S_7 = 2 \cdot \frac{78\,125 - 1}{4} = 2 \cdot \frac{78\,124}{4} = 2 \cdot 19\,531 = \boxed{39\,062}.$$

Verificación sumando directamente los 7 términos:

$$S_7 = 2 + 10 + 50 + 250 + 1\,250 + 6\,250 + 31\,250.$$

$$2 + 10 = 12,$$

$$12 + 50 = 62,$$

$$62 + 250 = 312,$$

$$312 + 1\,250 = 1\,562,$$

$$1\,562 + 6\,250 = 7\,812,$$

$$7\,812 + 31\,250 = 39\,062. \quad \checkmark$$

Advertencia — Error frecuente

En la fórmula $S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$, el exponente es n (no $n - 1$). Confundir el exponente daría: $S_7 = 2 \cdot \frac{5^6 - 1}{4} = 2 \cdot \frac{15\,624}{4} = 7\,812$, que es solo a_7 -ésima suma parcial con error. También es importante que esta fórmula **no** es válida cuando $r = 1$ (pues el denominador sería cero); en ese caso, $S_n = n \cdot a_1$.

Conclusión

- **Razón:** $r = 5$.
- **Primer término:** $a_1 = 2$.
- **Término general:** $a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$.
- **Suma de los 7 primeros términos:** $S_7 = 39\,062$.

Demostración de la fórmula $S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1}.$$

Multiplicamos ambos lados por r :

$$r \cdot S_n = a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n.$$

Restamos la segunda ecuación de la primera:

$$S_n - r S_n = a_1 - a_1 r^n \quad \implies \quad S_n (1 - r) = a_1 (1 - r^n).$$

Dividiendo entre $(1 - r) \neq 0$:

$$S_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r} = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}. \quad \square$$

Resumen de Resultados

Ejercicio	Descripción	Resultado
N1	Provisiones restantes tras marcha de alumnos	15 días
N2	Pureza del lingote resultante de la mezcla	82,5 %
N3.1	Precio final del videojuego	45,50 €
N3.2	Comparación con precio inicial	Menor (baja 9 %)
N4.1	Ahorro el día 30 (a_{30})	92 €
N4.2	Ahorro total en 30 días (S_{30})	1 455 €
N5.1	Razón, primer término y término general P.G.	$r = 5, a_1 = 2, a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$
N5.2	Suma de los 7 primeros términos (S_7)	39 062

Fórmulas esenciales para el examen

Proporcionalidad inversa:

$$A_1 \cdot B_1 = A_2 \cdot B_2$$

Mezcla:

$$p_{\text{result}} = \frac{\sum m_i p_i}{\sum m_i} \times 100$$

Variación %:

$$P_{\text{final}} = P_0 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdots f_k$$

P.A. — término general:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

P.A. — suma:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

P.G. — término general:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

P.G. — suma:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad (r \neq 1)$$

Ejercicios de Repaso de Matemáticas (3º ESO)

Temario: Aritmética, Potencias, Radicales, Proporcionalidad y Progresiones

Curso 2025/2026

Enunciados de los Ejercicios

1. Problemas con Fracciones y Aplicaciones

- a) De un depósito se vacía $\frac{1}{3}$ de su contenido, y después se consume $\frac{2}{5}$ de lo que quedaba. Si aún quedan 400 litros, ¿cuál es la capacidad total?
- b) Un agricultor siembra $\frac{3}{7}$ de su finca con trigo y $\frac{1}{2}$ del resto con maíz. Si le quedan 6 hectáreas sin sembrar, ¿cuál es la superficie total de la finca?
- c) Tres amigos se reparten un premio: el primero recibe $\frac{2}{5}$ del total, el segundo $\frac{1}{3}$ del resto, y el tercero se lleva los últimos €800. ¿Cuál es el valor total del premio?

2. Reparto y Gastos

- a) Un viajero gasta $\frac{1}{4}$ de su dinero en alojamiento y $\frac{3}{8}$ en comida. Si le quedan €150, ¿cuánto dinero tenía al principio?
- b) En un instituto, $\frac{3}{10}$ de los alumnos están en 4º ESO. De esos, $\frac{2}{3}$ son chicas. Si hay 40 chicos en 4º ESO, ¿cuántos alumnos tiene el instituto en total?
- c) El precio de un artículo sube $\frac{1}{5}$ de su valor, y después baja $\frac{1}{6}$ del nuevo precio. Si el precio final es €200, ¿cuál era el precio original?

3. Tiempo y Viajes

- a) Un autobús cubre su trayecto en tres etapas. En la primera recorre $\frac{3}{8}$ del camino, y en la segunda $\frac{1}{4}$ del camino. Si la tercera etapa es de 75 km, ¿cuál es la longitud total del trayecto?
- b) En una librería se venden $\frac{1}{4}$ de los libros una semana, y $\frac{1}{3}$ de los que quedaban la semana siguiente. Si quedan 150 libros, ¿cuántos había inicialmente?
- c) Una tubería llena un estanque en 4 horas, y otra lo vacía en 6 horas. Si ambas funcionan a la vez, ¿qué fracción del estanque se llenará en 1 hora?

4. Capacidad y Contenido

- a) Se han consumido $\frac{3}{4}$ de un bidón de aceite. Si se reponen 10 litros, el bidón queda lleno a $\frac{2}{3}$ de su capacidad. ¿Cuál es la capacidad total del bidón?
- b) De una barra de pan se come $\frac{1}{5}$ por la mañana y $\frac{2}{3}$ de lo que queda por la tarde. ¿Qué fracción de la barra queda sin consumir?
- c) Un ayuntamiento destina $\frac{2}{9}$ de su presupuesto a obras, y $\frac{3}{4}$ de lo que queda a servicios sociales. Si el resto son €1,500,000, ¿a cuánto asciende el presupuesto total?

5. Fracciones Encadenadas

- a) Después de gastar $\frac{1}{4}$ de mi dinero, presto $\frac{1}{3}$ de lo que me queda. Si aún me quedan €200, ¿cuánto dinero tenía?
- b) Un comerciante compra mercancía. Vende $\frac{3}{5}$ de ella a un cliente, y luego $\frac{1}{2}$ del resto a otro. Si le quedan 50 unidades, ¿cuántas unidades compró?
- c) En un aula, $\frac{5}{9}$ de los alumnos son chicas. Si $\frac{1}{4}$ de los chicos son rubios y hay 6 chicos rubios, ¿cuántos alumnos hay en el aula?

6. Operaciones en Notación Científica

- a) Realiza la operación y expresa el resultado en notación científica: $5,1 \cdot 10^4 + 3,9 \cdot 10^3$.
- b) Calcula: $(2 \cdot 10^{-5}) \cdot (3,5 \cdot 10^8)$.
- c) Calcula: $\frac{6,6 \cdot 10^7}{2,2 \cdot 10^{-3}}$.

7. Simplificación de Potencias (Bases Primas)

- a) Simplifica: $\frac{3^7 \cdot 5^{-2} \cdot 3^{-4}}{5^{-3} \cdot 9^2}$.
- b) Simplifica: $\frac{2^6 \cdot 4^{-3} \cdot 8^2}{16^{-1}}$.
- c) Simplifica: $\left(\frac{a^3 \cdot b^{-2}}{a^{-1} \cdot b^4}\right)^{-2}$.

8. Potencias con Bases Compuestas

- a) Simplifica la expresión a su mínima fracción: $\frac{10^3 \cdot 5^{-4} \cdot 2^5}{4^2 \cdot 25^{-1}}$.
- b) Simplifica: $\frac{6^5 \cdot 3^{-3}}{2^4 \cdot 9^2}$.
- c) Simplifica: $\left(\frac{15^2 \cdot 3^{-1}}{5^3 \cdot 9^0}\right)^2$.

9. Fracción Generatriz y Notación Científica

- a) Escribe la fracción generatriz del número decimal $0,2\overline{7}$.
- b) Escribe la fracción generatriz del número decimal $5.\overline{12}$.
- c) Expresa el número $0,000000105$ en notación científica.

10. Operaciones Mixtas

- a) Simplifica: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} + 4^0 - 8 \cdot 2^{-2}$.
- b) Realiza la operación y exprésala en notación científica: $1,2 \cdot 10^5 - 9,0 \cdot 10^3$.
- c) Escribe la fracción generatriz de $0,42\overline{5}$.

11. Suma y Resta de Radicales

- a) Opera y simplifica: $\sqrt{75} - 2\sqrt{12} + \sqrt{3}$.
- b) Opera y simplifica: $5\sqrt{8} + \sqrt{50} - 4\sqrt{2}$.
- c) Opera y simplifica: $\sqrt{28} + \sqrt{63} - 7\sqrt{7}$.

12. Multiplicación y Suma/Resta de Radicales

- a) Opera y simplifica: $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} + 5\sqrt{9}$.
- b) Opera y simplifica: $\sqrt{2}(\sqrt{18} - 3\sqrt{2})$.
- c) Opera y simplifica: $2\sqrt{5} + \sqrt{20} - \frac{\sqrt{45}}{3}$.

13. Raíces Cúbicas y Radicales de Mayor Índice

- a) Opera y simplifica: $\sqrt[3]{16} + 5\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{54}$.
- b) Opera y simplifica: $\sqrt[3]{250} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{16}$.
- c) Opera y simplifica: $\sqrt[4]{48} - 2\sqrt[4]{3}$.

14. Extracción e Introducción de Factores

- a) Simplifica el radical: $\sqrt{a^5 b^7 c^2}$.
- b) Introduce factores en el radical: $3x^2 \sqrt{5y}$.
- c) Opera y simplifica: $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{8} - \sqrt{18}$.

15. Operaciones Combinadas con Radicales

- a) Opera y simplifica: $(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)$.
- b) Opera y simplifica: $(2 + \sqrt{3})^2 - \sqrt{48}$.
- c) Simplifica: $\frac{\sqrt{20} + \sqrt{5}}{\sqrt{45}}$.

16. Operaciones con Paréntesis y Sumas/Restas de Fracciones

- a) Calcula: $\frac{3}{4} + (\frac{1}{2} - \frac{5}{8}) - \frac{1}{16}$.
- b) Calcula: $\frac{5}{6} - (\frac{2}{3} + \frac{1}{4}) + \frac{1}{12}$.
- c) Calcula: $1 - [\frac{2}{3} - (\frac{1}{6} + \frac{1}{2})]$.

17. Combinación de Operaciones con Fracciones

- a) Calcula: $\frac{1}{3} \cdot (\frac{3}{2} + \frac{9}{4}) - \frac{5}{6}$.
- b) Calcula: $(\frac{2}{5} - 1) \div \frac{3}{10} + \frac{1}{2}$.
- c) Calcula: $\frac{5}{2} - (\frac{1}{3} \div \frac{2}{9}) \cdot \frac{4}{5}$.

18. Potencias y Fracciones

- a) Calcula: $(\frac{1}{4} - \frac{1}{2})^2 \cdot 8 + \frac{3}{4}$.
- b) Calcula: $\frac{2}{3} \div (1 - \frac{1}{3})^3$.
- c) Calcula: $(2 - \frac{3}{4})^{-1} \cdot \frac{5}{7}$.

19. Más Operaciones Combinadas con Fracciones

- a) Calcula: $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} - \frac{1}{6} \div \frac{2}{3}$.
- b) Calcula: $\frac{3}{5} \div [\frac{1}{2} + (\frac{2}{5} - \frac{1}{10})]$.
- c) Calcula: $[(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}) \cdot \frac{5}{11}] - \frac{1}{2}$.

20. Fracciones con Doble Barra

- a) Calcula: $\frac{1 - \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}}$.
- b) Calcula: $2 - \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{8}}$.
- c) Calcula: $\frac{\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{6} - \frac{1}{3}} + 1$.

21. Clasificación de Números (I)

- a) Clasifica $\frac{15}{3}$, indicando el conjunto más pequeño al que pertenece ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}$).
- b) Clasifica -7 , indicando el conjunto más pequeño al que pertenece.
- c) Clasifica $0,343443444\dots$, indicando el conjunto más pequeño al que pertenece.

22. Clasificación de Números (II)

- a) Clasifica $\sqrt{25}$, indicando el conjunto más pequeño al que pertenece.
- b) Clasifica π , indicando el conjunto más pequeño al que pertenece.
- c) Clasifica $0,25$, indicando el conjunto más pequeño al que pertenece.

23. Fracción Generatriz (Puros y Mixtos)

- a) Escribe la fracción generatriz de $0,\overline{8}$.
- b) Escribe la fracción generatriz de $0,1\overline{6}$.
- c) Escribe la fracción generatriz de $2,4$.

24. Operación y Clasificación

- a) Indica a qué conjunto pertenece el resultado de la operación: $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$.
- b) Indica a qué conjunto pertenece el resultado de la operación: $(\sqrt{5})^2 - 10$.

- c) Indica a qué conjunto pertenece el resultado de la operación: $\frac{0,6}{0,3}$.

25. Verdadero/Falso y Justificación

- a) ¿El producto de dos números irracionales es siempre irracional? (Justifica con un ejemplo).
b) Escribe la fracción generatriz de $1,0\overline{2}$.
c) Clasifica $\frac{1}{3}$, indicando el conjunto más pequeño al que pertenece.

Bloque II: Proporcionalidad, Porcentajes y Progresiones

26. Proporcionalidad Inversa (I)

- a) Si 4 obreros tardan 6 días en hacer una zanja, ¿cuánto tardarán 8 obreros en hacer la misma zanja?
b) Un grupo de 5 personas tiene comida para 12 días. Si se unen 3 personas más, ¿para cuántos días les durará la comida?
c) La velocidad de un coche es de 90 km/h y tarda 2 horas en un trayecto. Si tarda 3 horas en el mismo trayecto, ¿cuál fue su velocidad?

27. Proporcionalidad Inversa (II)

- a) 6 fotocopiadoras tardan 4 horas en hacer un trabajo. ¿Cuánto tiempo tardarían 3 fotocopiadoras en realizar el mismo trabajo?
b) 20 vacas consumen un silo de forraje en 40 días. ¿Cuántas vacas se deben vender para que el forraje dure 50 días?
c) Una llave llena un depósito en 8 horas. ¿Cuánto tardarán 4 llaves idénticas en llenar el mismo depósito?

28. Proporcionalidad Compuesta (I)

- a) 3 pintores pintan 90 m² en 4 días. ¿Cuántos días tardarán 4 pintores en pintar 120 m²?
b) 5 excavadoras, trabajando 8 horas al día, excavan 400 m³ de tierra en 10 días. ¿Cuántos m³ excavarán 10 excavadoras en 5 días, trabajando 4 horas al día?
c) 25 telares producen 800 prendas en 8 horas. ¿Cuántas horas tardarán 20 telares en producir 1000 prendas?

29. Problemas de Pureza y Concentración (Mezclas)

- a) Se mezclan 4 kg de café a €7/kg con 6 kg de café a €9/kg. ¿Cuál es el precio del kilo de la mezcla?
b) Se mezcla una solución de 10 litros al 30 % de sal con 20 litros de una solución al 60 % de sal. ¿Cuál es el porcentaje de sal en la mezcla resultante?
c) Se tienen 2 kg de oro al 90 % de pureza. Si se mezclan con 3 kg de oro puro (100 % de pureza), ¿cuál es el porcentaje de pureza de la mezcla?

30. Reparto Proporcional (Directo)

- a) Un padre reparte €1200 entre sus tres hijos de forma directamente proporcional a sus edades: 8, 12 y 20 años. ¿Cuánto recibe el hijo de 12 años?
b) Un trabajo realizado por tres obreros se paga con €1000. El reparto es proporcional a las horas trabajadas: 10, 15 y 25 horas. ¿Cuánto le corresponde al obrero que trabajó 25 horas?
c) Reparte 180 bombones en partes directamente proporcionales a 2, 3 y 4.

31. Aumento y Disminución (Mismo %)

- a) Un artículo de €100 sube un 20 % y luego baja un 20 % sobre el nuevo precio. ¿Cuál es el precio final?

- b) Calcula el factor de variación total de la operación anterior.
- c) ¿El precio final es mayor, menor o igual que el inicial? Justifica tu respuesta.

32. Impuestos y Descuentos

- a) Un portátil de €1200 tiene un descuento del 15 %, y luego se le aplica un impuesto del 21 % sobre el precio rebajado. ¿Cuál es el precio final?
- b) Si el impuesto se hubiera aplicado primero, y luego el descuento, ¿el precio final cambiaría? (Justifica sin hacer la operación).
- c) ¿Qué descuento único debería aplicarse para que el precio final fuese de €1000 (partiendo de los €1200 iniciales)?

33. Variaciones Encadenadas (Diferentes %)

- a) Un sueldo de €1500 sube un 5 % el primer año, y un 2 % el segundo año. ¿Cuál es el sueldo final?
- b) ¿Cuál es el porcentaje de aumento total en los dos años?
- c) Si en lugar de subir, el sueldo hubiese bajado un 5 % y luego un 2 %, ¿cuál sería el porcentaje de disminución total?

34. Cálculo del Precio Inicial

- a) Tras un aumento del 10 % y un descuento del 5 %, un producto cuesta €209. ¿Cuál era el precio original?
- b) Si un producto cuesta €80 después de un aumento del 25 %, ¿cuánto costaba originalmente?
- c) Una tienda rebaja todos sus precios un 30 %. Si una camisa cuesta €42, ¿cuál era su precio antes de la rebaja?

35. Problemas con Áreas y Volúmenes

- a) El lado de un cuadrado aumenta un 10 %. ¿En qué porcentaje aumenta su área?
- b) El precio de la gasolina sube un 2 % cada mes. ¿Cuál será el aumento total de precio al cabo de 3 meses (suponiendo variaciones encadenadas)?
- c) La población de un pueblo disminuye un 1 % cada año. ¿Qué porcentaje de la población inicial quedará después de 5 años?

36. Cálculo del Término General y un Término Específico (PA I)

- a) En una Progresión Aritmética (PA), $a_1 = 3$ y la diferencia $d = 4$. Halla el término general a_n .
- b) Calcula el término a_{10} .
- c) Calcula la suma de los 10 primeros términos (S_{10}).

37. Cálculo del Término General y un Término Específico (PA II)

- a) En una PA, el segundo término es $a_2 = 7$ y el quinto término es $a_5 = 16$. Halla la diferencia d y el primer término a_1 .
- b) Calcula el término a_{15} .
- c) Calcula la suma de los 15 primeros términos (S_{15}).

38. Suma de Términos (PA)

- a) Calcula la suma de los 20 primeros números naturales ($1 + 2 + 3 + \dots + 20$).
- b) Halla la suma de los 50 primeros términos de la PA con $a_1 = 5$ y $d = 2$.
- c) Si el primer término de una PA es $a_1 = 10$ y $a_{20} = 105$, calcula la suma S_{20} .

39. Problemas de Ahorro (PA)

- a) Una persona ahorra €2 el primer día, y cada día siguiente ahorra €5 más que el día anterior. ¿Cuánto habrá ahorrado el día 25?

- b) ¿Cuál es el ahorro total acumulado al cabo de 25 días?
- c) Si quiere alcanzar un ahorro total de €780, ¿cuántos días necesita?

40. Hallar el Número de Términos (PA)

- a) En una PA, $a_1 = 5$, $d = 3$ y el último término es $a_n = 53$. ¿Cuántos términos (n) tiene la progresión?
- b) El último término de una PA es 121, el primero es 1 y la diferencia es 5. ¿Cuántos términos tiene?
- c) Calcula la suma de los términos de la PA del apartado (b).

41. Cálculo de la Razón y el Término General (PG I)

- a) En una Progresión Geométrica (PG), $a_1 = 4$ y la razón $r = 3$. Halla el término general a_n .
- b) Calcula el término a_6 .
- c) Calcula la suma de los 6 primeros términos (S_6).

42. Cálculo de la Razón y el Término General (PG II)

- a) En una PG, $a_2 = 6$ y $a_3 = 18$. Halla la razón r y el primer término a_1 .
- b) Halla el término general a_n .
- c) Calcula la suma de los 7 primeros términos (S_7).

43. Suma de Términos (PG)

- a) Halla el término a_5 de la PG con $a_1 = 1$ y $r = 2$.
- b) Calcula la suma de los 5 primeros términos (S_5).
- c) Calcula la suma de los 8 primeros términos de la PG con $a_1 = 5$ y $r = -2$.

44. Hallar la Razón y el Primer Término (PG)

- a) En una PG, $a_4 = 40$ y $a_5 = 20$. Halla la razón r y el primer término a_1 .
- b) Calcula el término a_8 .
- c) Calcula la suma de los 8 primeros términos.

45. Problemas de Crecimiento (PG)

- a) Una bacteria se duplica cada hora. Si se empieza con 5 bacterias, ¿cuántas habrá después de 8 horas? (Calcula a_9).
- b) Una inversión genera un 5% de interés compuesto anualmente. Si se invierten €1000, ¿cuánto dinero se tendrá después de 4 años? (Calcula a_5 con $r = 1,05$).
- c) Si el término $a_1 = 1$ y el término $a_6 = 32$, halla la razón r de esta progresión geométrica.

Bloque III: Ejercicios Adicionales de Repaso

46. Fracciones y Números Reales

- a) Calcula: $\frac{1}{2} \div \left[\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) \right]$.
- b) Simplifica el radical: $\sqrt{200} - 3\sqrt{18}$.
- c) Clasifica $0.\overline{41}$, y halla su fracción generatriz.

47. Potencias y Proporcionalidad

- a) Simplifica: $\frac{2^3 \cdot 5^{-1} \cdot 10^4}{4^2 \cdot 5^5}$.
- b) Realiza la operación y expresa en notación científica: $7,3 \cdot 10^{-2} - 5,0 \cdot 10^{-3}$.

- c) 15 albañiles hacen una obra en 20 días. ¿Cuántos albañiles se necesitan para hacerla en 12 días?

48. Progresiones Mixtas

- a) En una PA, $a_1 = 5$ y $a_{10} = 41$. Halla la diferencia d .
 b) En una PG, $a_1 = 5$ y $r = 2$. Calcula S_{10} .
 c) ¿Cuánto es el precio final de €500 tras un descuento del 10 % y otro del 5 %?

49. Radicales y Fracciones Generatrices

- a) Opera: $2\sqrt{7} \cdot (\sqrt{7} - 3\sqrt{28})$.
 b) Halla la fracción generatriz de $0,5\bar{3}$.
 c) Clasifica el resultado de $\sqrt{5} + \sqrt{20}$.

50. Problemas Aritméticos

- a) En un viaje, se gasta $\frac{1}{5}$ del presupuesto en transporte, y $\frac{3}{4}$ del resto en hotel. Si quedan €200, ¿cuál era el presupuesto total?
 b) Se mezcla 1 kg de café a €10 con 1 kg a €14. ¿Cuál es el precio de la mezcla?
 c) Un número aumenta un 10 % y luego disminuye un 30 %. Si el resultado es 77, ¿cuál era el número inicial?

51. Operaciones Combinadas y Clasificación

- a) Calcula: $\frac{5}{3} \div \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - 1$.
 b) Clasifica $\sqrt{100}$ y $\sqrt{10}$.
 c) Halla la fracción generatriz de $0,0\bar{5}$.

52. Potencias y Proporcionalidad Compuesta

- a) Simplifica: $\frac{3^5 \cdot 9^{-2}}{27 \cdot 3^0}$.
 b) 5 bombas llenan un depósito en 6 horas. ¿Cuánto tardarán 3 bombas en llenar un depósito doble de capacidad?
 c) Expresa el resultado en notación científica: $(1,5 \cdot 10^6) \div (3 \cdot 10^{-4})$.

53. Problemas con Fracciones y Radicales

- a) Un granjero vende $\frac{2}{5}$ de sus gallinas y $\frac{1}{4}$ de las que quedan. Si le quedan 90 gallinas, ¿cuántas tenía?
 b) Opera y simplifica: $3\sqrt{18} - \sqrt{32} + \sqrt{2}$.
 c) ¿Qué fracción del total es el 10 % de $\frac{1}{4}$?

54. Progresión Aritmética

- a) En una PA, $a_4 = 13$ y $a_7 = 22$. Halla a_1 y d .
 b) Calcula el término a_{20} .
 c) Calcula la suma de los primeros 20 términos (S_{20}).

55. Variaciones Porcentuales

- a) El precio de un coche de €20,000 baja un 10 % y luego vuelve a subir un 10 % sobre el nuevo precio. ¿Cuál es el precio final?
 b) ¿Cuál es el factor de variación total?
 c) ¿Qué porcentaje de aumento/disminución representa el cambio total?

56. Progresión Geométrica

- a) En una PG, $a_1 = 1$ y $r = 4$. Halla el término a_5 .

- b) Calcula la suma de los 5 primeros términos (S_5).
- c) Halla la razón de una PG donde $a_2 = 4$ y $a_4 = 16$.

57. Números Reales y Radicales

- a) Indica el conjunto más pequeño al que pertenece $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$.
- b) Opera: $\sqrt{3}(\sqrt{15} - 2\sqrt{3})$.
- c) Halla la fracción generatriz de $5.\bar{1}$.

58. Operaciones Combinadas con Fracciones

- a) Calcula: $2 \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right) \div \frac{1}{10}$.
- b) Calcula: $\frac{3}{4} + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5}\right) - \frac{7}{10}$.
- c) Calcula: $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{3}{8}$.

59. Proporcionalidad y Mezclas

- a) Reparte €2000 directamente proporcional a 1, 2 y 7.
- b) Se mezclan 5 litros de zumo al 20 % de pulpa con 10 litros de zumo al 50 % de pulpa. ¿Cuál es el porcentaje de pulpa final?
- c) Si 10 grifos llenan una piscina en 12 horas, ¿cuánto tardarán 8 grifos?

60. Potencias y Notación Científica

- a) Simplifica: $\frac{12^3 \cdot 2^{-5}}{3^2 \cdot 4^1}$.
- b) Escribe en notación científica: 0,0000302.
- c) Calcula: $8 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^4$.

61. Problemas con Fracciones

- a) Se gasta $\frac{2}{3}$ de una cantidad y luego se recupera $\frac{1}{4}$ de lo gastado. ¿Qué fracción queda sin gastar de la cantidad inicial?
- b) En un club, $\frac{3}{5}$ son mujeres. Si $\frac{1}{3}$ de los hombres son socios fundadores (SF) y hay 20 hombres SF, ¿cuántas mujeres hay en el club?
- c) ¿Cuál es el número cuya $\frac{3}{4}$ parte es 60?

62. Radicales y Operaciones

- a) Opera y simplifica: $\sqrt{3} + \sqrt{27} - \sqrt{48}$.
- b) Opera: $\sqrt[3]{54} \div \sqrt[3]{2}$.
- c) Halla la fracción generatriz de $0,8\bar{3}$.

63. Progresión Aritmética

- a) El primer término es 10 y la diferencia es -3 . Halla a_8 .
- b) Calcula la suma de los primeros 8 términos.
- c) Halla el número de términos si $a_1 = 2$, $d = 4$ y $a_n = 74$.

64. Variaciones Porcentuales

- a) Un salario de €1800 sube un 2 % y luego baja un 2 %. ¿Cuál es el salario final?
- b) Un artículo costaba €20 y ahora cuesta €24. ¿Cuál es el porcentaje de aumento?
- c) Tras un aumento del 20 %, un producto cuesta €60. ¿Cuál era el precio original?

65. Progresión Geométrica

- a) Halla a_1 de una PG si $a_3 = 20$ y $r = 2$.
- b) Calcula S_6 .

c) Si $a_1 = 3$ y $r = 1/2$, halla el término a_4 .

66. Clasificación y Potencias

a) Clasifica: $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{22}{7}$.

b) Simplifica: $\frac{4^3 \cdot 8^{-1} \cdot 2^5}{16^2}$.

c) Halla la fracción generatriz de 0,25.

67. Operaciones Combinadas

a) Calcula: $\frac{1}{5} \div \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2}$.

b) Calcula: $1 - \frac{1}{4} \cdot \left[2 - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right]$.

c) Simplifica: $(\sqrt{6} + \sqrt{3})^2 - 9$.

68. Proporcionalidad Inversa

a) 3 pintores tardan 10 horas en pintar un muro. ¿Cuánto tardarán 5 pintores?

b) 12 máquinas hacen un trabajo en 15 días. ¿Cuántas máquinas se necesitan para hacerlo en 10 días?

c) La razón de la PA $a_1 = 1$, $a_2 = 5$ es $d = 4$. ¿Cuál es la razón de la PG $a_1 = 1$, $a_2 = 5$?

69. Notación Científica y Radicales

a) Multiplica: $(4 \cdot 10^7) \cdot (2,5 \cdot 10^{-5})$.

b) Divide: $\frac{9 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-5}}$.

c) Opera y simplifica: $\sqrt{50} \cdot \sqrt{2} - 5$.

70. Repaso General

a) Un libro se vende con un descuento del 10% y luego se aplica un 5% adicional. ¿Cuál es el descuento total?

b) En una PA, el término $a_5 = 18$ y la diferencia $d = 3$. Calcula S_5 .

c) Simplifica a su mínima expresión: $\frac{2^{-1} + 3^{-1}}{5^{-1}}$.

Soluciones Detalladas

Ejercicios de Repaso de Matemáticas
(3º ESO)

Temario:

Aritmética, Potencias, Radicales,
Proporcionalidad y Progresiones

Curso 2025/2026

Ejercicios 1 al 10

Soluciones Completas y Rigurosas

Elaborado por: SuperAgent CREA
27 de febrero de 2026

Índice general

Introducción	2
1. Problemas con Fracciones y Aplicaciones	3
1.1. Ejercicio 1: Problemas con Fracciones y Aplicaciones	3
1.1.1. Apartado a) Depósito de líquido	3
1.1.2. Apartado b) Terreno agrícola	6
1.1.3. Apartado c) Reparto de premio	8
2. Reparto y Gastos	10
2.1. Ejercicio 2: Reparto y Gastos	10
2.1.1. Apartado a) Gastos de viajero	10
2.1.2. Apartado b) Alumnos del instituto	12
2.1.3. Apartado c) Variación de precio	13
3. Tiempo y Viajes	15
3.1. Ejercicio 3: Tiempo y Viajes	15
3.1.1. Apartado a) Trayecto en autobús	15
3.1.2. Apartado b) Venta de libros	17
3.1.3. Apartado c) Llenado y vaciado de estanque	19
4. Capacidad y Contenido	21
4.1. Ejercicio 4: Capacidad y Contenido	21
4.1.1. Apartado a) Bidón de aceite	21
4.1.2. Apartado b) Consumo de barra de pan	23
4.1.3. Apartado c) Presupuesto del ayuntamiento	25
5. Fracciones Encadenadas	27
5.1. Ejercicio 5: Fracciones Encadenadas	27
5.1.1. Apartado a) Gastos y préstamos	27
5.1.2. Apartado b) Ventas de mercancía	29
5.1.3. Apartado c) Composición del aula	30
6. Notación Científica y Potencias	31
6.1. Ejercicio 6: Operaciones en Notación Científica	31
6.1.1. Apartado a) Suma en notación científica	31
6.1.2. Apartado b) Multiplicación en notación científica	33
6.1.3. Apartado c) División en notación científica	34
6.2. Ejercicio 7: Simplificación de Potencias (Bases Primas)	35
6.2.1. Apartado a) Simplificación con bases 3 y 5	35

6.2.2.	Apartado b) Simplificación con potencias de 2	36
6.2.3.	Apartado c) Simplificación con variables	37
6.3.	Ejercicio 8: Potencias con Bases Compuestas	38
6.3.1.	Apartado a) Simplificación con 10, 5 y 2	38
6.3.2.	Apartado b) Simplificación con 6, 3 y 2	39
6.3.3.	Apartado c) Simplificación con 15, 3, 5 y 90	40
6.4.	Ejercicio 9: Fracción Generatriz y Notación Científica	41
6.4.1.	Apartado a) Fracción generatriz de decimal periódico puro	41
6.4.2.	Apartado b) Fracción generatriz de decimal periódico mixto	43
6.4.3.	Apartado c) Notación científica	44
6.5.	Ejercicio 10: Operaciones Mixtas	45
6.5.1.	Apartado a) Potencias y operaciones	45
6.5.2.	Apartado b) Resta en notación científica	46
6.5.3.	Apartado c) Fracción generatriz de decimal exacto	47
A.	Formulario de Fracciones	48
A.1.	Operaciones Básicas	48
A.1.1.	Suma y Resta	48
A.1.2.	Multiplicación	48
A.1.3.	División	48
A.2.	Propiedades de las Potencias	48
B.	Glosario de Términos	49

Introducción

Este documento contiene las soluciones detalladas y rigurosamente explicadas de los ejercicios del 1 al 10 del examen de repaso de Matemáticas de 3º ESO.

Estructura del Documento

Cada ejercicio se presenta con:

- **Enunciado completo:** Se reproduce el enunciado original del problema.
- **Diagrama explicativo:** Una representación visual que ayuda a comprender el problema.
- **Estrategia de resolución:** Explicación del método y justificación del enfoque elegido.
- **Solución paso a paso:** Desarrollo completo con justificación de cada transformación.
- **Verificación:** Comprobación del resultado cuando sea posible.
- **Observaciones:** Comentarios adicionales, advertencias sobre errores comunes y conclusiones.

Notación Utilizada

- $\mathbb{N}$: Conjunto de números naturales $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Z}$: Conjunto de números enteros $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- $\mathbb{Q}$: Conjunto de números racionales (fracciones)
- $\mathbb{R}$: Conjunto de números reales

Capítulo 1

Problemas con Fracciones y Aplicaciones

1.1. Ejercicio 1: Problemas con Fracciones y Aplicaciones

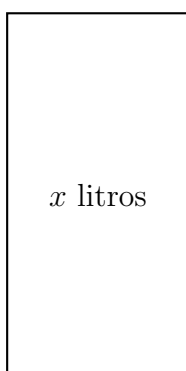
1.1.1. Apartado a) Depósito de líquido

Enunciado

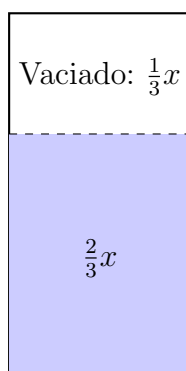
De un depósito se vacía $\frac{1}{3}$ de su contenido, y después se consume $\frac{2}{5}$ de lo que quedaba. Si aún quedan 400 litros, ¿cuál es la capacidad total?

Diagrama Explicativo

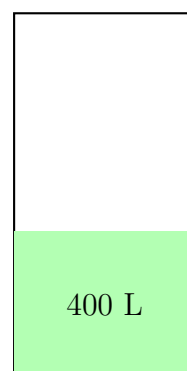
Depósito Inicial



Después vaciar



Estado Final



Estrategia de Resolución

Este es un problema de **fracciones aplicadas** que requiere trabajar paso a paso siguiendo el orden de las operaciones. La estrategia consiste en:

1. Llamar x a la capacidad total del depósito (incógnita).
2. Calcular cuánto queda después de cada operación.
3. Plantear una ecuación igualando lo que queda al final (400 L).

4. Resolver la ecuación para hallar x .

Justificación del método: Este es el método algebraico estándar para problemas de cantidades desconocidas con operaciones fraccionarias sucesivas.

Solución Detallada

Paso 1: Planteamiento de la variable Sea x la capacidad total del depósito (en litros).

Paso 2: Primera operación - Vaciar $\frac{1}{3}$ Si se vacía $\frac{1}{3}$ del contenido, queda:

$$\text{Resto después de vaciar} = x - \frac{1}{3}x = \frac{3x}{3} - \frac{x}{3} = \frac{2x}{3} \quad (1.1)$$

Explicación: Al vaciar una tercera parte, quedan dos terceras partes del total.

Paso 3: Segunda operación - Consumir $\frac{2}{5}$ de lo que quedaba Ahora se consume $\frac{2}{5}$ de lo que quedaba (que es $\frac{2x}{3}$):

$$\text{Cantidad consumida} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2x}{3} = \frac{2 \cdot 2x}{5 \cdot 3} = \frac{4x}{15} \quad (1.2)$$

Por tanto, lo que queda es:

$$\text{Resto final} = \frac{2x}{3} - \frac{4x}{15} \quad (1.3)$$

Paso 4: Simplificación de fracciones Para restar estas fracciones, necesitamos el mínimo común múltiplo de 3 y 15:

$$\text{mcm}(3, 15) = 15 \quad (1.4)$$

$$\frac{2x}{3} = \frac{2x \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10x}{15} \quad (1.5)$$

Entonces:

$$\text{Resto final} = \frac{10x}{15} - \frac{4x}{15} = \frac{10x - 4x}{15} = \frac{6x}{15} = \frac{2x}{5} \quad (1.6)$$

Simplificación: $\frac{6x}{15} = \frac{6x \div 3}{15 \div 3} = \frac{2x}{5}$

Paso 5: Ecuación y resolución Sabemos que el resto final son 400 litros:

$$\frac{2x}{5} = 400 \quad (1.7)$$

Multiplicamos ambos lados por 5:

$$\frac{2x}{5} \cdot 5 = 400 \cdot 5 \quad (1.8)$$

$$2x = 2000 \quad (1.9)$$

Dividimos entre 2:

$$x = \frac{2000}{2} \quad (1.10)$$

$$x = 1000 \quad (1.11)$$

Verificación

Comprobemos que 1000 litros es la respuesta correcta:

- Capacidad inicial: 1000 L
- Se vacía $\frac{1}{3}$: $1000 - \frac{1000}{3} = 1000 - 333,33... = 666,67$ L
- Se consume $\frac{2}{5}$ de lo que quedaba: $666,67 - \frac{2}{5} \cdot 666,67 = 666,67 - 266,67 = 400$ L ✓

Respuesta Final

La capacidad total del depósito es de 1000 litros.

Observaciones

Observación 1.1.1. *Error común:* Algunos estudiantes calculan $\frac{2}{5}$ del total inicial en lugar de $\frac{2}{5}$ de lo que quedaba después de la primera operación. Es fundamental leer cuidadosamente "de lo que quedaba".

Observación 1.1.2. *Método alternativo:* También se puede resolver trabajando con fracciones desde el principio:

$$\text{Queda finalmente} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{5} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{5}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

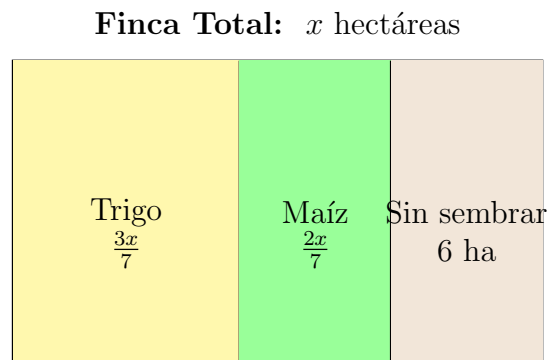
Este resultado confirma que queda $\frac{2}{5}$ del total.

1.1.2. Apartado b) Terreno agrícola

Enunciado

Un agricultor siembra $\frac{3}{7}$ de su finca con trigo y $\frac{1}{2}$ del resto con maíz. Si le quedan 6 hectáreas sin sembrar, ¿cuál es la superficie total de la finca?

Diagrama Explicativo



Estrategia de Resolución

Similar al apartado anterior, pero con diferentes fracciones:

1. Llamar x a la superficie total de la finca.
2. Calcular el resto después de sembrar trigo.
3. Calcular cuánto se siembra de maíz (fracción del resto).
4. Lo que queda sin sembrar debe ser 6 ha.

Solución Detallada

Paso 1: Variable Sea x la superficie total de la finca (en hectáreas).

Paso 2: Siembra de trigo Se siembra $\frac{3}{7}$ del total con trigo:

$$\text{Área con trigo} = \frac{3x}{7} \quad (1.12)$$

El resto es:

$$\text{Resto después del trigo} = x - \frac{3x}{7} = \frac{7x}{7} - \frac{3x}{7} = \frac{4x}{7} \quad (1.13)$$

Paso 3: Siembra de maíz Se siembra $\frac{1}{2}$ del resto con maíz:

$$\text{Área con maíz} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4x}{7} = \frac{4x}{14} = \frac{2x}{7} \quad (1.14)$$

Simplificación: $\frac{4x}{14} = \frac{4x \div 2}{14 \div 2} = \frac{2x}{7}$

Paso 4: Cálculo del área sin sembrar El área sin sembrar es lo que queda después de sembrar trigo y maíz:

$$\text{Sin sembrar} = x - \frac{3x}{7} - \frac{2x}{7} = x - \frac{5x}{7} = \frac{7x}{7} - \frac{5x}{7} = \frac{2x}{7} \quad (1.15)$$

Paso 5: Ecuación y resolución Sabemos que quedan 6 hectáreas sin sembrar:

$$\frac{2x}{7} = 6 \quad (1.16)$$

Multiplicamos ambos lados por 7:

$$\frac{2x}{7} \cdot 7 = 6 \cdot 7 \quad (1.17)$$

$$2x = 42 \quad (1.18)$$

Dividimos entre 2:

$$x = \frac{42}{2} = 21 \quad (1.19)$$

Verificación

Comprobemos con $x = 21$ hectáreas:

- Trigo: $\frac{3 \cdot 21}{7} = \frac{63}{7} = 9$ ha
- Resto después del trigo: $21 - 9 = 12$ ha
- Maíz ($\frac{1}{2}$ del resto): $\frac{12}{2} = 6$ ha
- Sin sembrar: $21 - 9 - 6 = 6$ ha ✓

Respuesta Final

La superficie total de la finca es de 21 hectáreas.

Observaciones

Observación 1.1.3. Distribución final: De las 21 hectáreas totales:

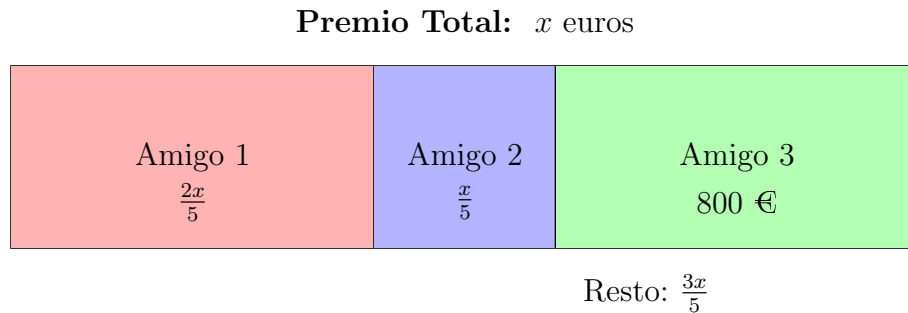
- Trigo: 9 ha (42.86 %)
- Maíz: 6 ha (28.57 %)
- Sin sembrar: 6 ha (28.57 %)

1.1.3. Apartado c) Reparto de premio

Enunciado

Tres amigos se reparten un premio: el primero recibe $\frac{2}{5}$ del total, el segundo $\frac{1}{3}$ del resto, y el tercero se lleva los últimos €800. ¿Cuál es el valor total del premio?

Diagrama Explicativo



Solución Detallada

Paso 1: Variable Sea x el valor total del premio (en euros).

Paso 2: Primer amigo Recibe $\frac{2}{5}$ del total:

$$\text{Amigo 1} = \frac{2x}{5} \quad (1.20)$$

El resto es:

$$\text{Resto} = x - \frac{2x}{5} = \frac{5x}{5} - \frac{2x}{5} = \frac{3x}{5} \quad (1.21)$$

Paso 3: Segundo amigo Recibe $\frac{1}{3}$ del resto:

$$\text{Amigo 2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x}{5} = \frac{3x}{15} = \frac{x}{5} \quad (1.22)$$

Simplificación: $\frac{3x}{15} = \frac{3x \div 3}{15 \div 3} = \frac{x}{5}$

Paso 4: Tercer amigo Lo que queda para el tercer amigo es:

$$\text{Amigo 3} = x - \frac{2x}{5} - \frac{x}{5} \quad (1.23)$$

$$= x - \frac{3x}{5} \quad (1.24)$$

$$= \frac{5x}{5} - \frac{3x}{5} \quad (1.25)$$

$$= \frac{2x}{5} \quad (1.26)$$

Paso 5: Ecuación y resolución Sabemos que el tercer amigo recibe 800€:

$$\frac{2x}{5} = 800 \quad (1.27)$$

Multiplicamos por 5:

$$2x = 4000 \quad (1.28)$$

$$x = 2000 \quad (1.29)$$

Verificación

Con $x = 2000$ euros:

- Amigo 1: $\frac{2 \cdot 2000}{5} = \frac{4000}{5} = 800$ €
- Resto: $2000 - 800 = 1200$ €
- Amigo 2: $\frac{1200}{3} = 400$ €
- Amigo 3: $2000 - 800 - 400 = 800$ € ✓

Respuesta Final

El valor total del premio es de 2000 euros.

Observación 1.1.4. Curiosidad matemática: Los amigos 1 y 3 reciben la misma cantidad (800€ cada uno), mientras que el amigo 2 recibe 400€. Esto ocurre porque el primer amigo recibe $\frac{2}{5}$ del total, y al tercer amigo le quedan también $\frac{2}{5}$ del total.

Capítulo 2

Reparto y Gastos

2.1. Ejercicio 2: Reparto y Gastos

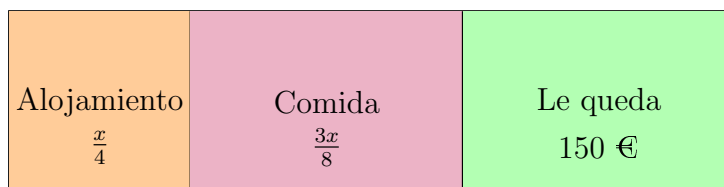
2.1.1. Apartado a) Gastos de viajero

Enunciado

Un viajero gasta $\frac{1}{4}$ de su dinero en alojamiento y $\frac{3}{8}$ en comida. Si le quedan €150, ¿cuánto dinero tenía al principio?

Diagrama Explicativo

Dinero Inicial: x euros



Solución Detallada

Paso 1: Variable Sea x el dinero inicial del viajero (en euros).

Paso 2: Gastos

- Alojamiento: $\frac{x}{4}$
- Comida: $\frac{3x}{8}$

Paso 3: Cálculo de lo que queda Lo que le queda es:

$$\text{Resto} = x - \frac{x}{4} - \frac{3x}{8} \quad (2.1)$$

Para operar, necesitamos el mcm(4, 8) = 8:

$$x = \frac{8x}{8} \quad (2.2)$$

$$\frac{x}{4} = \frac{2x}{8} \quad (2.3)$$

Por tanto:

$$\text{Resto} = \frac{8x}{8} - \frac{2x}{8} - \frac{3x}{8} \quad (2.4)$$

$$= \frac{8x - 2x - 3x}{8} \quad (2.5)$$

$$= \frac{3x}{8} \quad (2.6)$$

Paso 4: Ecuación Sabemos que le quedan 150€:

$$\frac{3x}{8} = 150 \quad (2.7)$$

Multiplicamos por 8:

$$3x = 1200 \quad (2.8)$$

$$x = 400 \quad (2.9)$$

Verificación

Con $x = 400$ euros:

- Alojamiento: $\frac{400}{4} = 100$ €
- Comida: $\frac{3 \cdot 400}{8} = \frac{1200}{8} = 150$ €
- Total gastado: $100 + 150 = 250$ €
- Le queda: $400 - 250 = 150$ € ✓

Respuesta Final

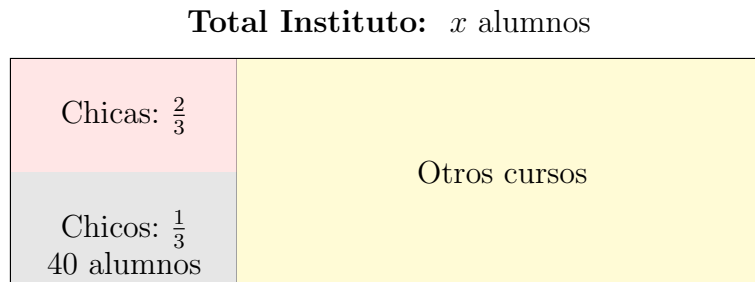
El viajero tenía inicialmente 400 euros.

2.1.2. Apartado b) Alumnos del instituto

Enunciado

En un instituto, $\frac{3}{10}$ de los alumnos están en 4º ESO. De esos, $\frac{2}{3}$ son chicas. Si hay 40 chicos en 4º ESO, ¿cuántos alumnos tiene el instituto en total?

Diagrama Explicativo



Solución Detallada

Paso 1: Variable Sea x el número total de alumnos del instituto.

Paso 2: Alumnos en 4º ESO $\frac{3}{10}$ están en 4º ESO:

$$\text{Alumnos en 4º ESO} = \frac{3x}{10} \quad (2.10)$$

Paso 3: Chicas y chicos en 4º ESO De los alumnos de 4º ESO, $\frac{2}{3}$ son chicas, por tanto $\frac{1}{3}$ son chicos:

$$\text{Chicos en 4º ESO} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x}{10} = \frac{3x}{30} = \frac{x}{10} \quad (2.11)$$

Simplificación: $\frac{3x}{30} = \frac{3x \div 3}{30 \div 3} = \frac{x}{10}$

Paso 4: Ecuación Sabemos que hay 40 chicos en 4º ESO:

$$\frac{x}{10} = 40 \quad (2.12)$$

Multiplicamos por 10:

$$x = 400 \quad (2.13)$$

Verificación

Con $x = 400$ alumnos:

- Alumnos en 4º ESO: $\frac{3 \cdot 400}{10} = \frac{1200}{10} = 120$ alumnos
- Chicos en 4º ESO ($\frac{1}{3}$ de 120): $\frac{120}{3} = 40$ ✓
- Chicas en 4º ESO ($\frac{2}{3}$ de 120): $\frac{2 \cdot 120}{3} = 80$

Respuesta Final

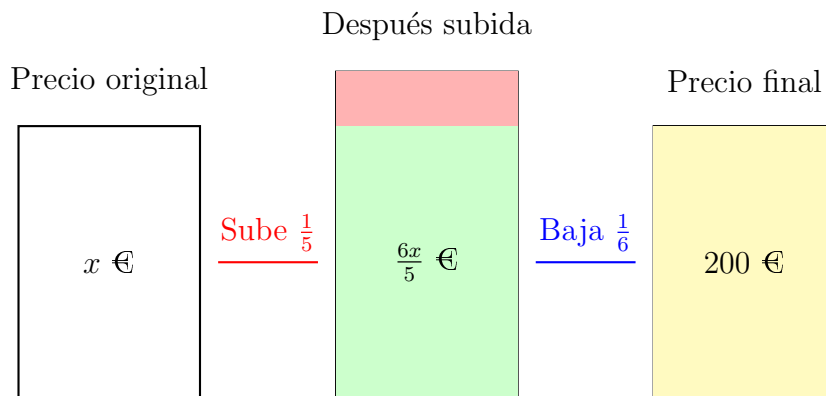
El instituto tiene 400 alumnos en total.

2.1.3. Apartado c) Variación de precio

Enunciado

El precio de un artículo sube $\frac{1}{5}$ de su valor, y después baja $\frac{1}{6}$ del nuevo precio. Si el precio final es €200, ¿cuál era el precio original?

Diagrama Explicativo



Solución Detallada

Paso 1: Variable Sea x el precio original del artículo (en euros).

Paso 2: Primera variación - Subida de $\frac{1}{5}$ Si el precio sube $\frac{1}{5}$ de su valor, el aumento es:

$$\text{Aumento} = \frac{x}{5} \quad (2.14)$$

El nuevo precio es:

$$\text{Precio después de subir} = x + \frac{x}{5} \quad (2.15)$$

$$= \frac{5x}{5} + \frac{x}{5} \quad (2.16)$$

$$= \frac{6x}{5} \quad (2.17)$$

Forma alternativa: Cuando algo sube $\frac{1}{5}$, se multiplica por $(1 + \frac{1}{5}) = \frac{6}{5}$.

Paso 3: Segunda variación - Bajada de $\frac{1}{6}$ del nuevo precio La bajada es $\frac{1}{6}$ del nuevo precio $\frac{6x}{5}$:

$$\text{Bajada} = \frac{1}{6} \cdot \frac{6x}{5} = \frac{6x}{30} = \frac{x}{5} \quad (2.18)$$

El precio después de bajar es:

$$\text{Precio final} = \frac{6x}{5} - \frac{x}{5} \quad (2.19)$$

$$= \frac{6x - x}{5} \quad (2.20)$$

$$= \frac{5x}{5} \quad (2.21)$$

$$= x \quad (2.22)$$

¡Observación importante!: El precio final es igual al precio original. Esto parece contradecir el enunciado.

Paso 4: Revisión del planteamiento Revisemos: si baja $\frac{1}{6}$ del nuevo precio, entonces queda $(1 - \frac{1}{6}) = \frac{5}{6}$ del nuevo precio:

$$\text{Precio final} = \frac{5}{6} \cdot \frac{6x}{5} \quad (2.23)$$

$$= \frac{5 \cdot 6x}{6 \cdot 5} \quad (2.24)$$

$$= \frac{30x}{30} \quad (2.25)$$

$$= x \quad (2.26)$$

Efectivamente, el precio final vuelve a ser x .

Paso 5: Ecuación Si el precio final es 200€:

$$x = 200 \quad (2.27)$$

Verificación

Con $x = 200$ euros:

- Precio original: 200 €
- Sube $\frac{1}{5}$: $200 + \frac{200}{5} = 200 + 40 = 240$ €
- Baja $\frac{1}{6}$ del nuevo precio: $240 - \frac{240}{6} = 240 - 40 = 200$ € ✓

Respuesta Final

El precio original era de 200 euros.

Observación 2.1.1. Análisis matemático: Este es un caso especial donde las dos operaciones se compensan exactamente.

Subir $\frac{1}{5}$ significa multiplicar por $\frac{6}{5}$, y después bajar $\frac{1}{6}$ significa multiplicar por $\frac{5}{6}$:

$$\text{Factor total} = \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{30}{30} = 1$$

Por tanto, el precio final es igual al inicial. Este tipo de problema enseña que aumentar y disminuir la misma cantidad porcentual NO siempre cancela el efecto.

Observación 2.1.2. Advertencia: Si el problema hubiera dicho "baja $\frac{1}{6}$ de su valor original" (en lugar de "del nuevo precio"), la respuesta sería diferente.

Capítulo 3

Tiempo y Viajes

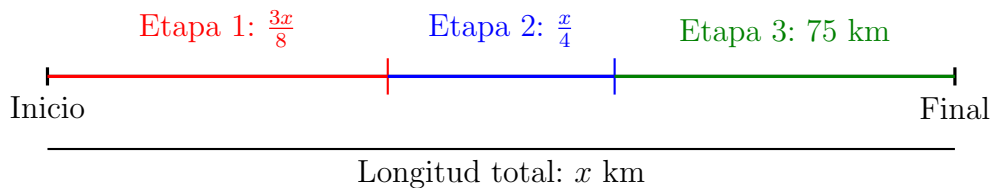
3.1. Ejercicio 3: Tiempo y Viajes

3.1.1. Apartado a) Trayecto en autobús

Enunciado

Un autobús cubre su trayecto en tres etapas. En la primera recorre $\frac{3}{8}$ del camino, y en la segunda $\frac{1}{4}$ del camino. Si la tercera etapa es de 75 km, ¿cuál es la longitud total del trayecto?

Diagrama Explicativo



Solución Detallada

Paso 1: Variable Sea x la longitud total del trayecto (en kilómetros).

Paso 2: Etapas del recorrido

- Etapa 1: $\frac{3x}{8}$ km
- Etapa 2: $\frac{x}{4}$ km
- Etapa 3: 75 km

Paso 3: Suma de las etapas La suma de las tres etapas debe ser igual al trayecto total:

$$\frac{3x}{8} + \frac{x}{4} + 75 = x \quad (3.1)$$

Paso 4: Resolución de la ecuación Primero, expresamos todo con el mismo denominador. El mcm(8, 4) = 8:

$$\frac{x}{4} = \frac{2x}{8} \quad (3.2)$$

Sustituyendo:

$$\frac{3x}{8} + \frac{2x}{8} + 75 = x \quad (3.3)$$

Sumamos las fracciones:

$$\frac{5x}{8} + 75 = x \quad (3.4)$$

Pasamos $\frac{5x}{8}$ al otro lado restando:

$$75 = x - \frac{5x}{8} \quad (3.5)$$

$$75 = \frac{8x}{8} - \frac{5x}{8} \quad (3.6)$$

$$75 = \frac{3x}{8} \quad (3.7)$$

Multiplicamos por 8:

$$75 \cdot 8 = 3x \quad (3.8)$$

$$600 = 3x \quad (3.9)$$

Dividimos entre 3:

$$x = 200 \quad (3.10)$$

Verificación

Con $x = 200$ km:

- Etapa 1: $\frac{3 \cdot 200}{8} = \frac{600}{8} = 75$ km
- Etapa 2: $\frac{200}{4} = 50$ km
- Etapa 3: 75 km
- Total: $75 + 50 + 75 = 200$ km ✓

Respuesta Final

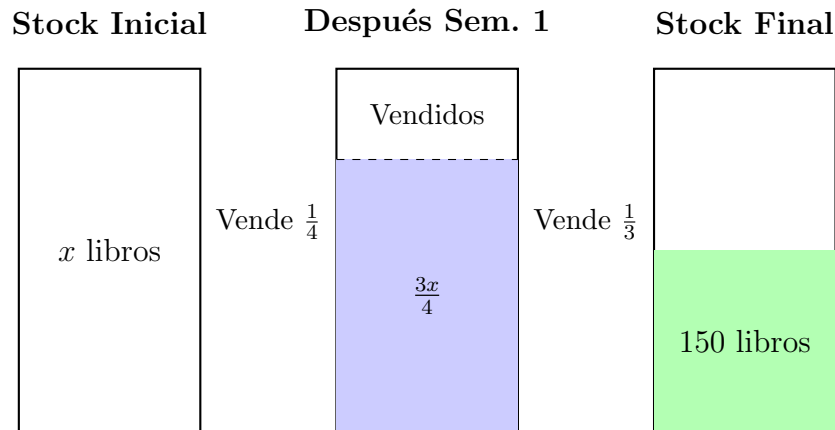
La longitud total del trayecto es de 200 kilómetros.

3.1.2. Apartado b) Venta de libros

Enunciado

En una librería se venden $\frac{1}{4}$ de los libros una semana, y $\frac{1}{3}$ de los que quedaban la semana siguiente. Si quedan 150 libros, ¿cuántos había inicialmente?

Diagrama Explicativo



Solución Detallada

Paso 1: Variable Sea x el número inicial de libros.

Paso 2: Primera semana Se vende $\frac{1}{4}$ de los libros, quedan:

$$\text{Después semana 1} = x - \frac{x}{4} = \frac{4x}{4} - \frac{x}{4} = \frac{3x}{4} \quad (3.11)$$

Paso 3: Segunda semana Se vende $\frac{1}{3}$ de lo que quedaba (que es $\frac{3x}{4}$):

$$\text{Vendidos semana 2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x}{4} = \frac{3x}{12} = \frac{x}{4} \quad (3.12)$$

Quedan:

$$\text{Stock final} = \frac{3x}{4} - \frac{x}{4} \quad (3.13)$$

$$= \frac{3x - x}{4} \quad (3.14)$$

$$= \frac{2x}{4} \quad (3.15)$$

$$= \frac{x}{2} \quad (3.16)$$

Paso 4: Ecuación Sabemos que quedan 150 libros:

$$\frac{x}{2} = 150 \quad (3.17)$$

Multiplicamos por 2:

$$x = 300 \quad (3.18)$$

Verificación

Con $x = 300$ libros:

- Vendidos semana 1: $\frac{300}{4} = 75$ libros
- Quedan después semana 1: $300 - 75 = 225$ libros
- Vendidos semana 2 ($\frac{1}{3}$ de 225): $\frac{225}{3} = 75$ libros
- Quedan finalmente: $225 - 75 = 150$ libros ✓

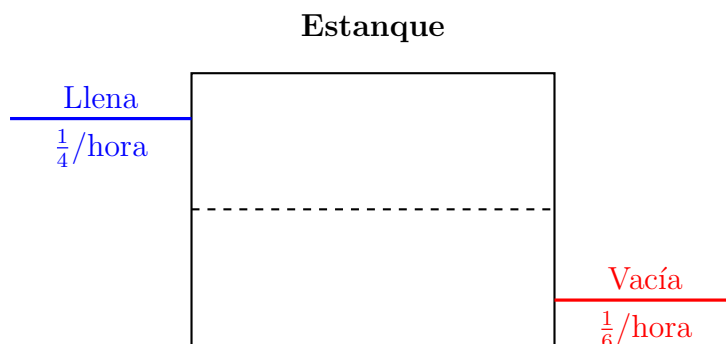
Respuesta Final**Inicialmente había 300 libros.**

3.1.3. Apartado c) Llenado y vaciado de estanque

Enunciado

Una tubería llena un estanque en 4 horas, y otra lo vacía en 6 horas. Si ambas funcionan a la vez, ¿qué fracción del estanque se llenará en 1 hora?

Diagrama Explicativo



En 1 hora:
 Entra: $\frac{1}{4}$ del estanque
 Sale: $\frac{1}{6}$ del estanque

Fundamento Teórico

Definición 3.1.1 (Capacidad de trabajo). Si una tubería llena un estanque en n horas, entonces en 1 hora llena $\frac{1}{n}$ del estanque.

De forma similar, si una tubería vacía un estanque en m horas, entonces en 1 hora vacía $\frac{1}{m}$ del estanque.

Solución Detallada

Paso 1: Capacidades individuales **Tubería de llenado:** Llena el estanque en 4 horas.

$$\text{Capacidad de llenado} = \frac{1}{4} \text{ del estanque por hora} \quad (3.19)$$

Tubería de vaciado: Vacía el estanque en 6 horas.

$$\text{Capacidad de vaciado} = \frac{1}{6} \text{ del estanque por hora} \quad (3.20)$$

Paso 2: Funcionamiento simultáneo Cuando ambas funcionan a la vez, la tubería de llenado aporta $\frac{1}{4}$ por hora mientras que la de vaciado quita $\frac{1}{6}$ por hora.

El efecto neto en 1 hora es:

$$\text{Llenado neto} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \quad (3.21)$$

Paso 3: Cálculo de la diferencia Para restar estas fracciones, necesitamos el mcm(4, 6):

$$4 = 2^2 \quad (3.22)$$

$$6 = 2 \cdot 3 \quad (3.23)$$

$$\text{mcm}(4, 6) = 2^2 \cdot 3 = 12 \quad (3.24)$$

Expresamos ambas fracciones con denominador 12:

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{3}{12} \quad (3.25)$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{2}{12} \quad (3.26)$$

Por tanto:

$$\text{Llenado neto} = \frac{3}{12} - \frac{2}{12} = \frac{1}{12} \quad (3.27)$$

Verificación

Interpretación: Si en 1 hora se llena $\frac{1}{12}$ del estanque, entonces para llenarlo completamente se necesitarían 12 horas.

Comprobemos:

- En 12 horas, la tubería de llenado llena: $12 \cdot \frac{1}{4} = 3$ estanques completos
- En 12 horas, la tubería de vaciado vacía: $12 \cdot \frac{1}{6} = 2$ estanques completos
- Resultado neto: $3 - 2 = 1$ estanque lleno ✓

Respuesta Final

En 1 hora se llenará $\frac{1}{12}$ del estanque.

Observación 3.1.1. Interpretación física: Aunque la tubería de llenado es más rápida (4 horas vs 6 horas), el efecto neto es lento porque una parte del agua que entra se está vaciando simultáneamente. El estanque se llena, pero muy despacio: necesita 12 horas para llenarse completamente.

Observación 3.1.2. Generalización: Si una tubería llena en a horas y otra vacía en b horas (con $a < b$, es decir, la de llenado es más rápida), el tiempo total para llenar el estanque es:

$$t = \frac{ab}{b-a}$$

En nuestro caso: $t = \frac{4 \cdot 6}{6-4} = \frac{24}{2} = 12$ horas.

Capítulo 4

Capacidad y Contenido

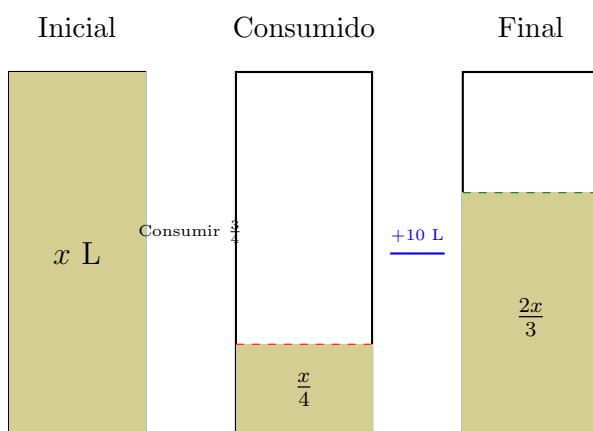
4.1. Ejercicio 4: Capacidad y Contenido

4.1.1. Apartado a) Bidón de aceite

Enunciado

Se han consumido $\frac{3}{4}$ de un bidón de aceite. Si se reponen 10 litros, el bidón queda lleno a $\frac{2}{3}$ de su capacidad. ¿Cuál es la capacidad total del bidón?

Diagrama Explicativo



Solución Detallada

Paso 1: Variable Sea x la capacidad total del bidón (en litros).

Paso 2: Después de consumir Se consumen $\frac{3}{4}$ del bidón, por tanto queda:

$$\text{Resto} = x - \frac{3x}{4} = \frac{4x}{4} - \frac{3x}{4} = \frac{x}{4} \quad (4.1)$$

Paso 3: Reposición de 10 litros Al reponer 10 litros, la cantidad en el bidón es:

$$\text{Después de reponer} = \frac{x}{4} + 10 \quad (4.2)$$

Paso 4: Estado final Sabemos que después de reponer, el bidón está lleno a $\frac{2}{3}$ de su capacidad:

$$\frac{x}{4} + 10 = \frac{2x}{3} \quad (4.3)$$

Paso 5: Resolución Para resolver, pasamos todos los términos con x a un lado:

$$10 = \frac{2x}{3} - \frac{x}{4} \quad (4.4)$$

El mcm(3, 4) = 12:

$$\frac{2x}{3} = \frac{2x \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8x}{12} \quad (4.5)$$

$$\frac{x}{4} = \frac{x \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{3x}{12} \quad (4.6)$$

Por tanto:

$$10 = \frac{8x}{12} - \frac{3x}{12} \quad (4.7)$$

$$10 = \frac{5x}{12} \quad (4.8)$$

Multiplicamos por 12:

$$120 = 5x \quad (4.9)$$

$$x = 24 \quad (4.10)$$

Verificación

Con $x = 24$ litros:

- Se consumen $\frac{3}{4}$ de 24: $\frac{3 \cdot 24}{4} = 18$ litros
- Quedan: $24 - 18 = 6$ litros
- Se reponen 10 litros: $6 + 10 = 16$ litros
- $\frac{2}{3}$ de la capacidad total: $\frac{2 \cdot 24}{3} = 16$ litros ✓

Respuesta Final

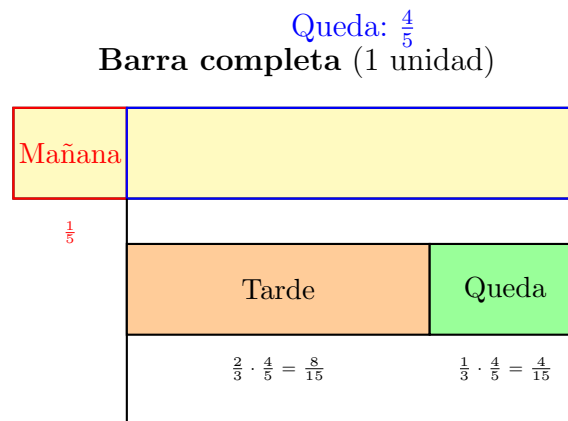
La capacidad total del bidón es de 24 litros.

4.1.2. Apartado b) Consumo de barra de pan

Enunciado

De una barra de pan se come $\frac{1}{5}$ por la mañana y $\frac{2}{3}$ de lo que queda por la tarde. ¿Qué fracción de la barra queda sin consumir?

Diagrama Explicativo



Solución Detallada

Paso 1: Consumo por la mañana Se come $\frac{1}{5}$ de la barra. Queda:

$$\text{Resto mañana} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{5}{5} - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \quad (4.11)$$

Paso 2: Consumo por la tarde Se come $\frac{2}{3}$ de lo que quedaba (que es $\frac{4}{5}$):

$$\text{Consumo tarde} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15} \quad (4.12)$$

Paso 3: Lo que queda sin consumir Lo que queda es lo que no se comió por la tarde, es decir, $\frac{1}{3}$ de lo que había después de la mañana:

$$\text{Resto final} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15} \quad (4.13)$$

Método alternativo (restando del total):

$$\text{Resto final} = 1 - \frac{1}{5} - \frac{8}{15} \quad (4.14)$$

$$= \frac{15}{15} - \frac{3}{15} - \frac{8}{15} \quad (4.15)$$

$$= \frac{15 - 3 - 8}{15} \quad (4.16)$$

$$= \frac{4}{15} \quad (4.17)$$

Verificación

Sumemos todas las partes:

$$\text{Mañana} + \text{Tarde} + \text{Resto} = \frac{1}{5} + \frac{8}{15} + \frac{4}{15} \quad (4.18)$$

$$= \frac{3}{15} + \frac{8}{15} + \frac{4}{15} \quad (4.19)$$

$$= \frac{15}{15} \quad (4.20)$$

$$= 1 \checkmark \quad (4.21)$$

Respuesta Final

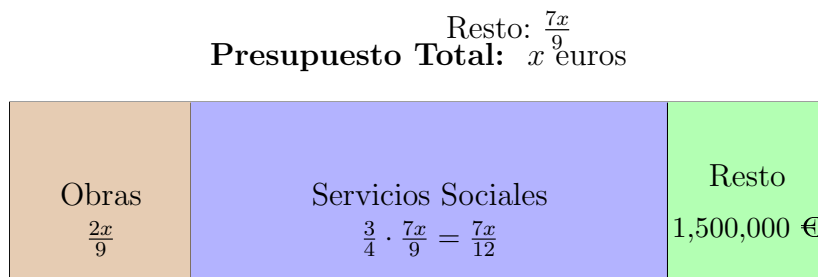
Queda sin consumir $\frac{4}{15}$ de la barra.

4.1.3. Apartado c) Presupuesto del ayuntamiento

Enunciado

Un ayuntamiento destina $\frac{2}{9}$ de su presupuesto a obras, y $\frac{3}{4}$ de lo que queda a servicios sociales. Si el resto son €1,500,000, ¿a cuánto asciende el presupuesto total?

Diagrama Explicativo



Solución Detallada

Paso 1: Variable Sea x el presupuesto total (en euros).

Paso 2: Destino a obras $\frac{2}{9}$ del presupuesto va a obras:

$$\text{Obras} = \frac{2x}{9} \quad (4.22)$$

Queda:

$$\text{Resto después obras} = x - \frac{2x}{9} = \frac{9x}{9} - \frac{2x}{9} = \frac{7x}{9} \quad (4.23)$$

Paso 3: Servicios sociales $\frac{3}{4}$ de lo que queda va a servicios sociales:

$$\text{Servicios sociales} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7x}{9} = \frac{21x}{36} = \frac{7x}{12} \quad (4.24)$$

Simplificación: $\frac{21x}{36} = \frac{21x \div 3}{36 \div 3} = \frac{7x}{12}$

Paso 4: Resto final El resto es:

$$\text{Resto} = x - \frac{2x}{9} - \frac{7x}{12} \quad (4.25)$$

Para operar, necesitamos mcm(9, 12):

$$9 = 3^2 \quad (4.26)$$

$$12 = 2^2 \cdot 3 \quad (4.27)$$

$$\text{mcm}(9, 12) = 2^2 \cdot 3^2 = 36 \quad (4.28)$$

Expresamos todo con denominador 36:

$$x = \frac{36x}{36} \quad (4.29)$$

$$\frac{2x}{9} = \frac{8x}{36} \quad (4.30)$$

$$\frac{7x}{12} = \frac{21x}{36} \quad (4.31)$$

Por tanto:

$$\text{Resto} = \frac{36x}{36} - \frac{8x}{36} - \frac{21x}{36} \quad (4.32)$$

$$= \frac{36x - 8x - 21x}{36} \quad (4.33)$$

$$= \frac{7x}{36} \quad (4.34)$$

Paso 5: Ecuación El resto es €1,500,000:

$$\frac{7x}{36} = 1\,500\,000 \quad (4.35)$$

Multiplicamos por 36:

$$7x = 54\,000\,000 \quad (4.36)$$

$$x = \frac{54\,000\,000}{7} \quad (4.37)$$

$$x \approx 7\,714\,285,71 \quad (4.38)$$

Exactamente:

$$x = \frac{54\,000\,000}{7} = 7\,714\,285\frac{5}{7} \text{ euros} \quad (4.39)$$

Verificación

Con $x = \frac{54\,000\,000}{7}$ euros:

- Obras: $\frac{2}{9} \cdot \frac{54\,000\,000}{7} = \frac{108\,000\,000}{63} = \frac{12\,000\,000}{7} \text{ €}$
- Resto después obras: $\frac{7}{9} \cdot \frac{54\,000\,000}{7} = \frac{54\,000\,000}{9} = 6\,000\,000 \text{ €}$
- Servicios sociales: $\frac{3}{4} \cdot 6\,000\,000 = 4\,500\,000 \text{ €}$
- Resto final: $6\,000\,000 - 4\,500\,000 = 1\,500\,000 \text{ €} \checkmark$

Respuesta Final

El presupuesto total es de $\frac{54\,000\,000}{7}$ euros $\approx 7,714,285.71$ euros.

Observación 4.1.1. En la práctica, los presupuestos municipales se expresan en números enteros. Si redondeamos a la unidad más cercana, el presupuesto sería de **7,714,286 euros**.

Capítulo 5

Fracciones Encadenadas

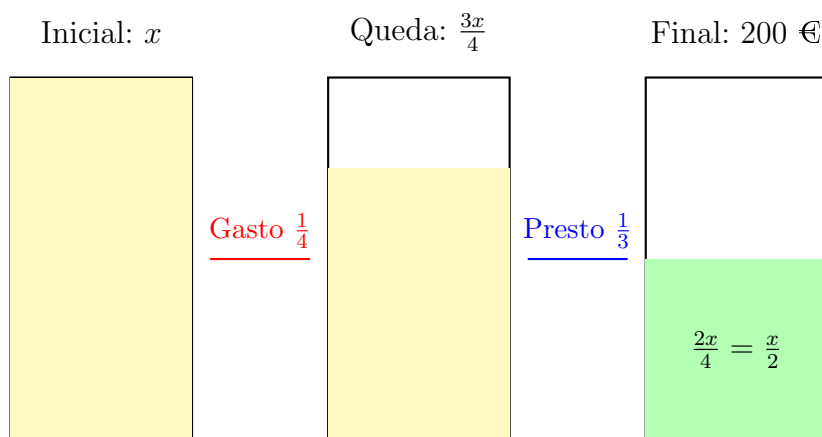
5.1. Ejercicio 5: Fracciones Encadenadas

5.1.1. Apartado a) Gastos y préstamos

Enunciado

Después de gastar $\frac{1}{4}$ de mi dinero, presto $\frac{1}{3}$ de lo que me queda. Si aún me quedan €200, ¿cuánto dinero tenía?

Diagrama Explicativo



Solución Detallada

Paso 1: Variable Sea x el dinero inicial (en euros).

Paso 2: Después de gastar Gasto $\frac{1}{4}$ del dinero, queda:

$$\text{Después de gastar} = x - \frac{x}{4} = \frac{3x}{4} \quad (5.1)$$

Paso 3: Después de prestar Presto $\frac{1}{3}$ de lo que me queda:

$$\text{Préstamo} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x}{4} = \frac{3x}{12} = \frac{x}{4} \quad (5.2)$$

Me queda:

$$\text{Final} = \frac{3x}{4} - \frac{x}{4} \quad (5.3)$$

$$= \frac{2x}{4} \quad (5.4)$$

$$= \frac{x}{2} \quad (5.5)$$

Paso 4: Ecuación Sé que me quedan 200€:

$$\frac{x}{2} = 200 \quad (5.6)$$

Por tanto:

$$x = 400 \quad (5.7)$$

Verificación

Con $x = 400$ euros:

- Gasto: $\frac{400}{4} = 100$ €
- Queda: $400 - 100 = 300$ €
- Presto ($\frac{1}{3}$ de 300): $\frac{300}{3} = 100$ €
- Me queda: $300 - 100 = 200$ € ✓

Respuesta Final

Tenía 400 euros inicialmente.

5.1.2. Apartado b) Ventas de mercancía

Enunciado

Un comerciante compra mercancía. Vende $\frac{3}{5}$ de ella a un cliente, y luego $\frac{1}{2}$ del resto a otro. Si le quedan 50 unidades, ¿cuántas unidades compró?

Solución Detallada

Paso 1: Variable Sea x el número de unidades compradas.

Paso 2: Primera venta Vende $\frac{3}{5}$ de las unidades:

$$\text{Después 1ª venta} = x - \frac{3x}{5} = \frac{2x}{5} \quad (5.8)$$

Paso 3: Segunda venta Vende $\frac{1}{2}$ del resto:

$$2^\text{ª} \text{ venta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{5} = \frac{x}{5} \quad (5.9)$$

Le quedan:

$$\text{Final} = \frac{2x}{5} - \frac{x}{5} = \frac{x}{5} \quad (5.10)$$

Paso 4: Ecuación Le quedan 50 unidades:

$$\frac{x}{5} = 50 \quad (5.11)$$

$$x = 250 \quad (5.12)$$

Verificación

Con $x = 250$ unidades:

- 1ª venta: $\frac{3 \cdot 250}{5} = 150$ unidades
- Quedan: $250 - 150 = 100$ unidades
- 2ª venta ($\frac{1}{2}$ de 100): 50 unidades
- Quedan: $100 - 50 = 50$ unidades ✓

Respuesta Final

Compró 250 unidades.

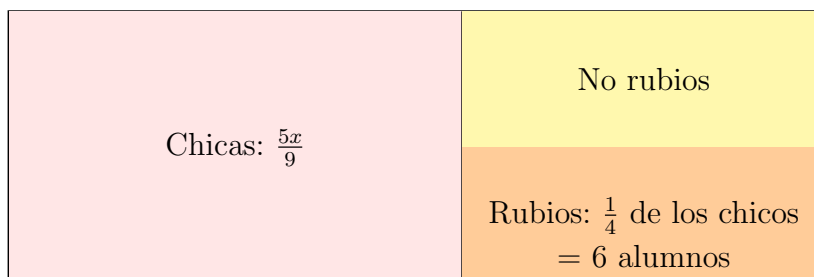
5.1.3. Apartado c) Composición del aula

Enunciado

En un aula, $\frac{5}{9}$ de los alumnos son chicas. Si $\frac{1}{4}$ de los chicos son rubios y hay 6 chicos rubios, ¿cuántos alumnos hay en el aula?

Diagrama Explicativo

Aula: x alumnos



Solución Detallada

Paso 1: Variable Sea x el número total de alumnos en el aula.

Paso 2: Chicas y chicos

- Chicas: $\frac{5x}{9}$
- Chicos: $x - \frac{5x}{9} = \frac{4x}{9}$

Paso 3: Chicos rubios $\frac{1}{4}$ de los chicos son rubios:

$$\text{Chicos rubios} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4x}{9} = \frac{4x}{36} = \frac{x}{9} \quad (5.13)$$

Paso 4: Ecuación Hay 6 chicos rubios:

$$\frac{x}{9} = 6 \quad (5.14)$$

$$x = 54 \quad (5.15)$$

Verificación

Con $x = 54$ alumnos:

- Chicas: $\frac{5 \cdot 54}{9} = 30$
- Chicos: $54 - 30 = 24$
- Chicos rubios ($\frac{1}{4}$ de 24): $\frac{24}{4} = 6 \checkmark$

Respuesta Final

Hay 54 alumnos en el aula.

Capítulo 6

Notación Científica y Potencias

6.1. Ejercicio 6: Operaciones en Notación Científica

6.1.1. Apartado a) Suma en notación científica

Enunciado

Realiza la operación y expresa el resultado en notación científica: $5,1 \cdot 10^4 + 3,9 \cdot 10^3$.

Fundamento Teórico

Definición 6.1.1 (Notación científica). *Un número está expresado en notación científica cuando se escribe en la forma:*

$$a \times 10^n$$

donde $1 \leq |a| < 10$ y $n \in \mathbb{Z}$.

Teorema 6.1.1 (Suma en notación científica). *Para sumar números en notación científica con diferentes exponentes, primero debemos expresarlos con el mismo exponente.*

Solución Detallada

Paso 1: Análisis de los exponentes Tenemos:

- $5,1 \cdot 10^4$ (exponente 4)
- $3,9 \cdot 10^3$ (exponente 3)

Los exponentes son diferentes, así que debemos igualarlos.

Paso 2: Igualación de exponentes Expresamos $3,9 \cdot 10^3$ con exponente 4:

$$3,9 \cdot 10^3 = 0,39 \cdot 10^4 \quad (6.1)$$

Justificación: Al aumentar el exponente en 1, dividimos el coeficiente entre 10.

Paso 3: Suma Ahora podemos sumar:

$$5,1 \cdot 10^4 + 0,39 \cdot 10^4 = (5,1 + 0,39) \cdot 10^4 \quad (6.2)$$

$$= 5,49 \cdot 10^4 \quad (6.3)$$

Paso 4: Verificación de la forma Comprobamos que $1 \leq 5,49 < 10$ ✓

Respuesta Final

$$5,1 \cdot 10^4 + 3,9 \cdot 10^3 = \mathbf{5,49 \cdot 10^4}$$

Observación 6.1.1. *En forma decimal:* $5,49 \cdot 10^4 = 54\,900$

6.1.2. Apartado b) Multiplicación en notación científica

Enunciado

Calcula: $(2 \cdot 10^{-5}) \cdot (3,5 \cdot 10^8)$.

Fundamento Teórico

Teorema 6.1.2 (Multiplicación de potencias). *Para multiplicar potencias de la misma base, se suman los exponentes:*

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Solución Detallada

Paso 1: Aplicación de la propiedad de multiplicación

$$(2 \cdot 10^{-5}) \cdot (3,5 \cdot 10^8) = (2 \cdot 3,5) \cdot (10^{-5} \cdot 10^8) \quad (6.4)$$

$$= 7 \cdot 10^{-5+8} \quad (6.5)$$

$$= 7 \cdot 10^3 \quad (6.6)$$

Justificación:

- Multiplicamos los coeficientes: $2 \cdot 3,5 = 7$
- Sumamos los exponentes: $-5 + 8 = 3$

Paso 2: Verificación $1 \leq 7 < 10 \checkmark$

Respuesta Final

$(2 \cdot 10^{-5}) \cdot (3,5 \cdot 10^8) = 7 \cdot 10^3$

Observación 6.1.2. *En forma decimal:* $7 \cdot 10^3 = 7000$

Verificación directa:

- $2 \cdot 10^{-5} = 0,00002$
- $3,5 \cdot 10^8 = 350\,000\,000$
- $0,00002 \cdot 350\,000\,000 = 7000 \checkmark$

6.1.3. Apartado c) División en notación científica**Enunciado**

Calcula: $\frac{6,6 \cdot 10^7}{2,2 \cdot 10^{-3}}$.

Fundamento Teórico

Teorema 6.1.3 (División de potencias). *Para dividir potencias de la misma base, se restan los exponentes:*

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Solución Detallada**Paso 1: Aplicación de la propiedad de división**

$$\frac{6,6 \cdot 10^7}{2,2 \cdot 10^{-3}} = \frac{6,6}{2,2} \cdot \frac{10^7}{10^{-3}} \quad (6.7)$$

$$= 3 \cdot 10^{7-(-3)} \quad (6.8)$$

$$= 3 \cdot 10^{7+3} \quad (6.9)$$

$$= 3 \cdot 10^{10} \quad (6.10)$$

Justificación:

- Dividimos los coeficientes: $\frac{6,6}{2,2} = 3$
- Restamos los exponentes: $7 - (-3) = 7 + 3 = 10$

Paso 2: Verificación $1 \leq 3 < 10 \checkmark$ **Respuesta Final**

$\frac{6,6 \cdot 10^7}{2,2 \cdot 10^{-3}} = \mathbf{3 \cdot 10^{10}}$

Observación 6.1.3. *En forma decimal: $3 \cdot 10^{10} = 30\,000\,000\,000$ (30 mil millones)*

6.2. Ejercicio 7: Simplificación de Potencias (Bases Primas)

6.2.1. Apartado a) Simplificación con bases 3 y 5

Enunciado

Simplifica: $\frac{3^7 \cdot 5^{-2} \cdot 3^{-4}}{5^{-3} \cdot 9^2}$.

Estrategia

Expresar todas las bases como factores primos y aplicar las propiedades de las potencias.

Solución Detallada

Paso 1: Expresar 9 como potencia de 3

$$9 = 3^2 \implies 9^2 = (3^2)^2 = 3^{2 \cdot 2} = 3^4 \quad (6.11)$$

Paso 2: Sustitución

$$\frac{3^7 \cdot 5^{-2} \cdot 3^{-4}}{5^{-3} \cdot 3^4} \quad (6.12)$$

Paso 3: Agrupar potencias de la misma base En el numerador:

$$3^7 \cdot 3^{-4} = 3^{7-4} = 3^3 \quad (6.13)$$

La expresión queda:

$$\frac{3^3 \cdot 5^{-2}}{5^{-3} \cdot 3^4} \quad (6.14)$$

Paso 4: Simplificar potencias Para las potencias de 3:

$$\frac{3^3}{3^4} = 3^{3-4} = 3^{-1} = \frac{1}{3} \quad (6.15)$$

Para las potencias de 5:

$$\frac{5^{-2}}{5^{-3}} = 5^{-2-(-3)} = 5^{-2+3} = 5^1 = 5 \quad (6.16)$$

Paso 5: Resultado final

$$3^{-1} \cdot 5^1 = \frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{5}{3} \quad (6.17)$$

Respuesta Final

$$\boxed{\frac{3^7 \cdot 5^{-2} \cdot 3^{-4}}{5^{-3} \cdot 9^2} = \frac{5}{3}}$$

6.2.2. Apartado b) Simplificación con potencias de 2**Enunciado**

Simplifica: $\frac{2^6 \cdot 4^{-3} \cdot 8^2}{16^{-1}}$.

Solución Detallada**Paso 1: Expresar todo como potencias de 2**

$$4 = 2^2 \implies 4^{-3} = (2^2)^{-3} = 2^{-6} \quad (6.18)$$

$$8 = 2^3 \implies 8^2 = (2^3)^2 = 2^6 \quad (6.19)$$

$$16 = 2^4 \implies 16^{-1} = (2^4)^{-1} = 2^{-4} \quad (6.20)$$

Paso 2: Sustitución

$$\frac{2^6 \cdot 2^{-6} \cdot 2^6}{2^{-4}} \quad (6.21)$$

Paso 3: Simplificar el numerador

$$2^6 \cdot 2^{-6} \cdot 2^6 = 2^{6-6+6} = 2^6 \quad (6.22)$$

Paso 4: División

$$\frac{2^6}{2^{-4}} = 2^{6-(-4)} = 2^{6+4} = 2^{10} \quad (6.23)$$

Paso 5: Cálculo final

$$2^{10} = 1024 \quad (6.24)$$

Respuesta Final

$\frac{2^6 \cdot 4^{-3} \cdot 8^2}{16^{-1}} = 2^{10} = 1024$

6.2.3. Apartado c) Simplificación con variables**Enunciado**

Simplifica: $\left(\frac{a^3 \cdot b^{-2}}{a^{-1} \cdot b^4}\right)^{-2}$.

Solución Detallada

Paso 1: Simplificar el interior del paréntesis Para a :

$$\frac{a^3}{a^{-1}} = a^{3-(-1)} = a^{3+1} = a^4 \quad (6.25)$$

Para b :

$$\frac{b^{-2}}{b^4} = b^{-2-4} = b^{-6} \quad (6.26)$$

Interior del paréntesis:

$$a^4 \cdot b^{-6} \quad (6.27)$$

Paso 2: Aplicar el exponente -2

$$(a^4 \cdot b^{-6})^{-2} = (a^4)^{-2} \cdot (b^{-6})^{-2} \quad (6.28)$$

Paso 3: Simplificar

$$(a^4)^{-2} = a^{4 \cdot (-2)} = a^{-8} \quad (6.29)$$

$$(b^{-6})^{-2} = b^{(-6) \cdot (-2)} = b^{12} \quad (6.30)$$

Paso 4: Resultado final

$$a^{-8} \cdot b^{12} = \frac{b^{12}}{a^8} \quad (6.31)$$

Respuesta Final

$$\boxed{\left(\frac{a^3 \cdot b^{-2}}{a^{-1} \cdot b^4}\right)^{-2} = \frac{\mathbf{b^{12}}}{\mathbf{a^8}}}$$

6.3. Ejercicio 8: Potencias con Bases Compuestas

6.3.1. Apartado a) Simplificación con 10, 5 y 2

Enunciado

Simplifica la expresión a su mínima fracción: $\frac{10^3 \cdot 5^{-4} \cdot 2^5}{4^2 \cdot 25^{-1}}$.

Solución Detallada

Paso 1: Descomponer en factores primos

$$10 = 2 \cdot 5 \implies 10^3 = 2^3 \cdot 5^3 \quad (6.32)$$

$$4 = 2^2 \implies 4^2 = (2^2)^2 = 2^4 \quad (6.33)$$

$$25 = 5^2 \implies 25^{-1} = (5^2)^{-1} = 5^{-2} \quad (6.34)$$

Paso 2: Sustitución

$$\frac{2^3 \cdot 5^3 \cdot 5^{-4} \cdot 2^5}{2^4 \cdot 5^{-2}} \quad (6.35)$$

Paso 3: Simplificar numerador

$$\text{Potencias de 2: } 2^3 \cdot 2^5 = 2^8 \quad (6.36)$$

$$\text{Potencias de 5: } 5^3 \cdot 5^{-4} = 5^{-1} \quad (6.37)$$

Numerador: $2^8 \cdot 5^{-1}$

Paso 4: División

$$\frac{2^8 \cdot 5^{-1}}{2^4 \cdot 5^{-2}} = 2^{8-4} \cdot 5^{-1-(-2)} \quad (6.38)$$

$$= 2^4 \cdot 5^{-1+2} \quad (6.39)$$

$$= 2^4 \cdot 5^1 \quad (6.40)$$

$$= 16 \cdot 5 \quad (6.41)$$

$$= 80 \quad (6.42)$$

Respuesta Final

$\frac{10^3 \cdot 5^{-4} \cdot 2^5}{4^2 \cdot 25^{-1}} = 80$

6.3.2. Apartado b) Simplificación con 6, 3 y 2**Enunciado**

Simplifica: $\frac{6^5 \cdot 3^{-3}}{2^4 \cdot 9^2}$.

Solución Detallada**Paso 1: Descomponer**

$$6 = 2 \cdot 3 \implies 6^5 = 2^5 \cdot 3^5 \quad (6.43)$$

$$9 = 3^2 \implies 9^2 = (3^2)^2 = 3^4 \quad (6.44)$$

Paso 2: Sustitución

$$\frac{2^5 \cdot 3^5 \cdot 3^{-3}}{2^4 \cdot 3^4} \quad (6.45)$$

Paso 3: Simplificación Numerador:

$$2^5 \cdot 3^{5-3} = 2^5 \cdot 3^2 \quad (6.46)$$

División:

$$\frac{2^5 \cdot 3^2}{2^4 \cdot 3^4} = 2^{5-4} \cdot 3^{2-4} \quad (6.47)$$

$$= 2^1 \cdot 3^{-2} \quad (6.48)$$

$$= \frac{2}{3^2} \quad (6.49)$$

$$= \frac{2}{9} \quad (6.50)$$

Respuesta Final

$\frac{6^5 \cdot 3^{-3}}{2^4 \cdot 9^2} = \frac{2}{9}$

6.3.3. Apartado c) Simplificación con 15, 3, 5 y 90**Enunciado**

Simplifica: $\left(\frac{15^2 \cdot 3^{-1}}{5^3 \cdot 90}\right)^2$.

Solución Detallada**Paso 1: Descomponer**

$$15 = 3 \cdot 5 \implies 15^2 = 3^2 \cdot 5^2 \quad (6.51)$$

$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \quad (6.52)$$

Paso 2: Sustitución

$$\left(\frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 3^{-1}}{5^3 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 5}\right)^2 \quad (6.53)$$

Paso 3: Simplificar el interior Numerador:

$$3^{2-1} \cdot 5^2 = 3^1 \cdot 5^2 = 3 \cdot 5^2 \quad (6.54)$$

Denominador:

$$5^{3+1} \cdot 2 \cdot 3^2 = 5^4 \cdot 2 \cdot 3^2 \quad (6.55)$$

Cociente:

$$\frac{3 \cdot 5^2}{5^4 \cdot 2 \cdot 3^2} = \frac{3^{1-2} \cdot 5^{2-4}}{2} \quad (6.56)$$

$$= \frac{3^{-1} \cdot 5^{-2}}{2} \quad (6.57)$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5^2} \quad (6.58)$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 25} \quad (6.59)$$

$$= \frac{1}{150} \quad (6.60)$$

Paso 4: Elevar al cuadrado

$$\left(\frac{1}{150}\right)^2 = \frac{1}{22500} \quad (6.61)$$

Respuesta Final

$$\boxed{\left(\frac{15^2 \cdot 3^{-1}}{5^3 \cdot 90}\right)^2 = \frac{1}{22500}}$$

6.4. Ejercicio 9: Fracción Generatriz y Notación Científica

6.4.1. Apartado a) Fracción generatriz de decimal periódico puro

Enunciado

Escribe la fracción generatriz del número decimal $0, \overline{27}$.

Fundamento Teórico

Definición 6.4.1 (Decimal periódico puro). *Un decimal periódico puro es aquel en el que el periodo comienza inmediatamente después de la coma decimal.*

Teorema 6.4.1 (Fracción generatriz de periódico puro). *Si $N = 0, \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$, entonces:*

$$N = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{99 \dots 9}$$

donde hay tantos nueves como cifras tiene el periodo.

Solución Detallada

Método 1: Algoritmo algebraico **Paso 1:** Llamar x al número:

$$x = 0, \overline{27} = 0, 272727 \dots \quad (6.62)$$

Paso 2: Multiplicar por 10^n donde n es el número de cifras del periodo (aquí $n = 2$):

$$100x = 27, 272727 \dots \quad (6.63)$$

Paso 3: Restar la ecuación original:

$$100x - x = 27, 272727 \dots - 0, 272727 \dots \quad (6.64)$$

$$99x = 27 \quad (6.65)$$

$$x = \frac{27}{99} \quad (6.66)$$

Paso 4: Simplificar:

$$\frac{27}{99} = \frac{27 \div 9}{99 \div 9} = \frac{3}{11} \quad (6.67)$$

Método 2: Regla directa

$$0, \overline{27} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11} \quad (6.68)$$

Verificación

Dividamos $3 \div 11$:

$$3 \div 11 = 0, \overline{27} \quad (6.69)$$

$$30 \div 11 = 2 \text{ (resto 8)} \quad (6.70)$$

$$80 \div 11 = 7 \text{ (resto 3)} \quad (6.71)$$

$$30 \div 11 = 2 \text{ (se repite)} \checkmark \quad (6.72)$$

Respuesta Final

$$0,\overline{27} = \frac{3}{11}$$

6.4.2. Apartado b) Fracción generatriz de decimal periódico mixto

Enunciado

Escribe la fracción generatriz del número decimal $5,1\bar{2}$.

Fundamento Teórico

Definición 6.4.2 (Decimal periódico mixto). *Un decimal periódico mixto tiene una parte no periódica (anteperiodo) antes de que comience el periodo.*

Teorema 6.4.2 (Fracción generatriz de periódico mixto). *Si $N = a, b_1 b_2 \dots b_m \overline{c_1 c_2 \dots c_n}$, entonces:*

$$N = \frac{(\text{número completo sin coma}) - (\text{parte no periódica sin coma})}{99 \dots 900 \dots 0}$$

donde hay tantos nueves como cifras tiene el periodo y tantos ceros como cifras tiene el anteperiodo.

Solución Detallada

Método algebraico Paso 1: Llamar x al número:

$$x = 5,1\bar{2} = 5,1222\dots \quad (6.73)$$

Paso 2: Multiplicar por 10^m donde m es el número de cifras del anteperiodo (aquí $m = 1$):

$$10x = 51,222\dots \quad (6.74)$$

Paso 3: Multiplicar por 10^{m+n} donde n es el número de cifras del periodo (aquí $n = 1$):

$$100x = 512,222\dots \quad (6.75)$$

Paso 4: Restar:

$$100x - 10x = 512,222\dots - 51,222\dots \quad (6.76)$$

$$90x = 461 \quad (6.77)$$

$$x = \frac{461}{90} \quad (6.78)$$

Verificación de irreducibilidad Comprobamos si 461 y 90 son coprimos:

$$461 = 461 \text{ (número primo)} \quad (6.79)$$

$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \quad (6.80)$$

Como 461 es primo y no divide a 90, la fracción $\frac{461}{90}$ es irreducible.

Respuesta Final

$5,1\bar{2} = \frac{461}{90}$

6.4.3. Apartado c) Notación científica

Enunciado

Expresa el número 0,000000105 en notación científica.

Solución Detallada

Paso 1: Identificar el primer dígito significativo El primer dígito no nulo es el 1.

Paso 2: Colocar la coma Colocamos la coma después del primer dígito:

$$1,05 \quad (6.81)$$

Paso 3: Contar desplazamientos Desde la posición original hasta la nueva posición de la coma:

$$0,\underbrace{000000}_7 105 \rightarrow 1,05 \quad (6.82)$$

Hemos desplazado la coma 7 posiciones hacia la derecha, por tanto el exponente es -7 .

Paso 4: Expresión final

$$0,000000105 = 1,05 \times 10^{-7} \quad (6.83)$$

Verificación

$$1,05 \times 10^{-7} = 1,05 \times 0,0000001 = 0,000000105 \checkmark \quad (6.84)$$

Respuesta Final

$$\boxed{0,000000105 = 1,05 \times 10^{-7}}$$

6.5. Ejercicio 10: Operaciones Mixtas

6.5.1. Apartado a) Potencias y operaciones

Enunciado

Simplifica: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} + 4^0 - 8 \cdot 2^{-2}$.

Solución Detallada

Paso 1: Calcular cada término Primer término: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

Usando la propiedad $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8 \quad (6.85)$$

Segundo término: 4^0

Cualquier número (excepto 0) elevado a 0 es 1:

$$4^0 = 1 \quad (6.86)$$

Tercer término: $8 \cdot 2^{-2}$

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \quad (6.87)$$

$$8 \cdot 2^{-2} = 8 \cdot \frac{1}{4} = 2 \quad (6.88)$$

Paso 2: Sumar y restar

$$8 + 1 - 2 = 9 - 2 = 7 \quad (6.89)$$

Respuesta Final

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} + 4^0 - 8 \cdot 2^{-2} = 7}$$

6.5.2. Apartado b) Resta en notación científica**Enunciado**

Realiza la operación y exprésala en notación científica: $1,2 \times 10^5 - 9,0 \times 10^3$.

Solución Detallada

Paso 1: Igualar exponentes Expresamos $9,0 \times 10^3$ con exponente 5:

$$9,0 \times 10^3 = 0,09 \times 10^5 \quad (6.90)$$

Paso 2: Restar

$$1,2 \times 10^5 - 0,09 \times 10^5 = (1,2 - 0,09) \times 10^5 \quad (6.91)$$

$$= 1,11 \times 10^5 \quad (6.92)$$

Respuesta Final

$1,2 \times 10^5 - 9,0 \times 10^3 = 1,11 \times 10^5$

Observación 6.5.1. *En forma decimal:* $1,11 \times 10^5 = 111\,000$

6.5.3. Apartado c) Fracción generatriz de decimal exacto

Enunciado

Escribe la fracción generatriz de 0,425.

Fundamento Teórico

Definición 6.5.1 (Decimal exacto). *Un decimal exacto (o finito) tiene un número finito de cifras decimales.*

Teorema 6.5.1 (Fracción generatriz de decimal exacto). *Si $N = 0,a_1a_2 \dots a_n$ (decimal exacto con n cifras decimales), entonces:*

$$N = \frac{a_1a_2 \dots a_n}{10^n}$$

Solución Detallada

Paso 1: Aplicar la regla El número 0,425 tiene 3 cifras decimales:

$$0,425 = \frac{425}{1000} \quad (6.93)$$

Paso 2: Simplificar Buscamos el mcd(425, 1000):

$$425 = 5^2 \cdot 17 \quad (6.94)$$

$$1000 = 2^3 \cdot 5^3 \quad (6.95)$$

$$\text{mcd}(425, 1000) = 5^2 = 25 \quad (6.96)$$

Simplificamos:

$$\frac{425}{1000} = \frac{425 \div 25}{1000 \div 25} = \frac{17}{40} \quad (6.97)$$

Verificación

$$\frac{17}{40} = \frac{17 \times 25}{40 \times 25} = \frac{425}{1000} = 0,425 \checkmark \quad (6.98)$$

Respuesta Final

$0,425 = \frac{17}{40}$

Apéndice A

Formulario de Fracciones

A.1. Operaciones Básicas

A.1.1. Suma y Resta

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} \quad (\text{A.1})$$

Con el mismo denominador:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b} \quad (\text{A.2})$$

A.1.2. Multiplicación

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad (\text{A.3})$$

A.1.3. División

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad (\text{A.4})$$

A.2. Propiedades de las Potencias

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (\text{A.6})$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (\text{A.7})$$

$$(ab)^n = a^n b^n \quad (\text{A.8})$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (\text{A.9})$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (\text{A.10})$$

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0) \quad (\text{A.11})$$

Apéndice B

Glosario de Términos

Fracción irreducible Fracción en la que el numerador y denominador son coprimos (no tienen factores comunes excepto el 1).

Mínimo común múltiplo (mcm) El menor número positivo que es múltiplo de dos o más números.

Máximo común divisor (mcd) El mayor número que divide exactamente a dos o más números.

Notación científica Forma de expresar números muy grandes o muy pequeños como producto de un número entre 1 y 10 por una potencia de 10.

Decimal periódico puro Decimal en el que el periodo comienza inmediatamente después de la coma.

Decimal periódico mixto Decimal con una parte no periódica antes del periodo.

Soluciones Completas y Rigurosas

Ejercicios 11 al 20

Repaso de Matemáticas - 3º ESO

Aritmética, Potencias, Radicales, Proporcionalidad y Progresiones

Profesor: SuperAgent de CREA

Matemático Profesional y Redactor Técnico

Curso 2025/2026

Advertencia Pedagógica

Este documento contiene soluciones exhaustivas, rigurosas y detalladas de los ejercicios 11 al 20 del examen de repaso. Cada paso está justificado matemáticamente sin omisiones. Se recomienda intentar resolver los ejercicios de forma independiente antes de consultar las soluciones.

Índice

1. Ejercicio 11: Suma y Resta de Radicales	3
1.1. Marco Teórico	3
1.2. Ilustración Conceptual	3
1.3. Apartado a) $\sqrt{75} - 2\sqrt{12} + \sqrt{3}$	4
1.4. Apartado b) $5\sqrt{8} + \sqrt{50} - 4\sqrt{2}$	5
1.5. Apartado c) $\sqrt{28} + \sqrt{63} - 7\sqrt{7}$	7
2. Ejercicio 12: Multiplicación y Suma/Resta de Radicales	10
2.1. Marco Teórico	10
2.2. Ilustración Conceptual	11
2.3. Apartado a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} + 5\sqrt{9}$	11
2.4. Apartado b) $\sqrt{2}(\sqrt{18} - 3\sqrt{2})$	13
2.5. Apartado c) $2\sqrt{5} + \sqrt{20} - \frac{\sqrt{45}}{3}$	14
3. Ejercicio 13: Raíces Cúbicas y Radicales de Mayor Índice	17
3.1. Marco Teórico	17
3.2. Ilustración Conceptual	18
3.3. Apartado a) $\sqrt[3]{16} + 5\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{54}$	18
3.4. Apartado b) $\sqrt[3]{250} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{16}$	20
3.5. Apartado c) $\sqrt[4]{48} - 2\sqrt[4]{3}$	22
4. Ejercicio 14: Extracción e Introducción de Factores	24
4.1. Marco Teórico	24
4.2. Ilustración Conceptual	25
4.3. Apartado a) Simplifica el radical: $\sqrt{a^5b^7c^2}$	25
4.4. Apartado b) Introduce factores en el radical: $3x^2\sqrt{5y}$	28
4.5. Apartado c) Opera y simplifica: $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{8} - \sqrt{18}$	29
5. Ejercicio 15: Operaciones Combinadas con Radicales	33
5.1. Marco Teórico	33
5.2. Ilustración Conceptual	34
5.3. Apartado a) $(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)$	34
5.4. Apartado b) $(2 + \sqrt{3})^2 - \sqrt{48}$	36
5.5. Apartado c) $\frac{\sqrt{20} + \sqrt{5}}{\sqrt{45}}$	38
6. Ejercicio 16: Operaciones con Paréntesis y Sumas/Restas de Fracciones	41
6.1. Marco Teórico	41
6.2. Ilustración Conceptual	42
6.3. Apartado a) $\frac{3}{4} + (\frac{1}{2} - \frac{5}{8}) - \frac{1}{16}$	42
6.4. Apartado b) $\frac{5}{6} - (\frac{2}{3} + \frac{1}{4}) + \frac{1}{12}$	44
6.5. Apartado c) $1 - [\frac{2}{3} - (\frac{1}{6} + \frac{1}{2})]$	46

7. Ejercicio 17: Combinación de Operaciones con Fracciones	49
7.1. Marco Teórico	49
7.2. Apartado a) $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) - \frac{5}{6}$	50
7.3. Apartado b) $\left(\frac{2}{5} - 1\right) \div \frac{3}{10} + \frac{1}{2}$	51
7.4. Apartado c) $\frac{5}{2} - \left(\frac{1}{3} \div \frac{2}{9}\right) \cdot \frac{4}{5}$	53
8. Ejercicio 18: Potencias y Fracciones	55
8.1. Marco Teórico	55
8.2. Apartado a) $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot 8 + \frac{3}{4}$	55
8.3. Apartado b) $\frac{2}{3} \div \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3$	57
8.4. Apartado c) $\left(2 - \frac{3}{4}\right)^{-1} \cdot \frac{5}{7}$	58
9. Ejercicio 19: Más Operaciones Combinadas con Fracciones	60
9.1. Apartado a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} - \frac{1}{6} \div \frac{2}{3}$	60
9.2. Apartado b) $\frac{3}{5} \div \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{10}\right)\right]$	61
9.3. Apartado c) $\left[\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{5}{11}\right] - \frac{1}{2}$	62
10. Ejercicio 20: Fracciones con Doble Barra (Fracciones Complejas)	63
10.1. Marco Teórico	63
10.2. Apartado a) $\frac{1 - \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}}$	64
10.3. Apartado b) $2 - \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{8}}$	65
10.4. Apartado c) $\frac{\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{6} - \frac{1}{3}} + 1$	66

1. Ejercicio 11: Suma y Resta de Radicales

Ejercicio 11

Opera y simplifica las siguientes expresiones con radicales:

a) $\sqrt{75} - 2\sqrt{12} + \sqrt{3}$

b) $5\sqrt{8} + \sqrt{50} - 4\sqrt{2}$

c) $\sqrt{28} + \sqrt{63} - 7\sqrt{7}$

1.1. Marco Teórico

Fundamentos Teóricos

Definición 11.1 (Radicales Semejantes): Dos radicales son semejantes si tienen el mismo índice y el mismo radicando una vez simplificados.

Propiedad 11.1 (Operaciones con Radicales Semejantes): Los radicales semejantes se pueden sumar o restar sumando o restando sus coeficientes:

$$a\sqrt[n]{b} + c\sqrt[n]{b} = (a + c)\sqrt[n]{b}$$

Teorema 11.1 (Descomposición de Radicales): Todo radical $\sqrt[n]{n}$ se puede descomponer factorizando n en sus factores primos:

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}}$$

donde cada factor $p_i^{a_i}$ con $a_i \geq 2$ puede extraerse como $p_i^{\lfloor a_i/2 \rfloor}$.

1.2. Ilustración Conceptual

Simplificación de Radicales: Proceso Visual

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$$

Extracción

$$5\sqrt{3}$$

$$75 = 3 \cdot 25$$

$$25 = 5^2 \text{ sale}$$

3 queda dentro

$$\text{Radicales semejantes: } a\sqrt{3} + b\sqrt{3} = (a + b)\sqrt{3}$$

$$\begin{array}{c} \square \square \square \\ 3\sqrt{3} \end{array}$$

+

$$\begin{array}{c} \square \square \\ 2\sqrt{3} \end{array}$$

=

$$\begin{array}{c} \square \square \square \square \square \\ 5\sqrt{3} \end{array}$$

1.3. Apartado a) $\sqrt{75} - 2\sqrt{12} + \sqrt{3}$ **Solución****Paso 1: Descomposición factorial de los radicandos**

Comenzamos descomponiendo cada número en sus factores primos para identificar cuadrados perfectos que puedan extraerse de la raíz.

Para $\sqrt{75}$:

$$\begin{aligned} 75 &= 3 \cdot 25 \\ &= 3 \cdot 5^2 \end{aligned}$$

Justificación: Dividimos 75 entre números primos. $75 \div 3 = 25$, y $25 = 5 \times 5 = 5^2$.

Para $\sqrt{12}$:

$$\begin{aligned} 12 &= 4 \cdot 3 \\ &= 2^2 \cdot 3 \end{aligned}$$

Justificación: $12 \div 4 = 3$, donde $4 = 2^2$ es un cuadrado perfecto.

Para $\sqrt{3}$:

$$3 = 3$$

Justificación: 3 es un número primo, no contiene cuadrados perfectos como factores.

Paso 2: Simplificación de cada radical

Aplicamos el **Teorema 11.1** de extracción de factores:

Para $\sqrt{75}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{75} &= \sqrt{3 \cdot 5^2} \\ &= \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{3} \quad (\text{Por la propiedad: } \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}) \\ &= 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

Justificación matemática: Como $5^2 = 25$ es un cuadrado perfecto, $\sqrt{5^2} = |5| = 5$ (tomamos el valor positivo por definición de raíz principal).

Para $2\sqrt{12}$:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{12} &= 2\sqrt{2^2 \cdot 3} \\ &= 2 \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} \\ &= 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \\ &= 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

Justificación: Extraemos $\sqrt{2^2} = 2$ y lo multiplicamos por el coeficiente 2 que ya teníamos.

Para $\sqrt{3}$:

$$\sqrt{3} = 1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

Justificación: Ya está en su forma más simple; el coeficiente implícito es 1.

Paso 3: Identificación de radicales semejantes

Observamos que todos los términos simplificados tienen el mismo radicando ($\sqrt{3}$):

- $5\sqrt{3}$
- $4\sqrt{3}$
- $1\sqrt{3}$

Por lo tanto, son radicales semejantes según la **Definición 11.1**.

Paso 4: Operación con los coeficientes

Sustituimos en la expresión original:

$$\begin{aligned}\sqrt{75} - 2\sqrt{12} + \sqrt{3} &= 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + \sqrt{3} \\ &= (5 - 4 + 1)\sqrt{3} \quad (\text{Aplicando la Propiedad 11.1}) \\ &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

Justificación aritmética detallada de los coeficientes:

$$5 - 4 + 1 = 1 + 1 = 2$$

Verificación: Podemos comprobar numéricamente (aproximado):

$$\begin{aligned}\sqrt{75} - 2\sqrt{12} + \sqrt{3} &\approx 8,660 - 6,928 + 1,732 \\ &\approx 3,464\end{aligned}$$

Y nuestro resultado:

$$2\sqrt{3} \approx 2 \times 1,732 = 3,464 \quad \checkmark$$

Respuesta Final - Apartado a)

$$\boxed{\sqrt{75} - 2\sqrt{12} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}}$$

1.4. Apartado b) $5\sqrt{8} + \sqrt{50} - 4\sqrt{2}$

Solución

Paso 1: Descomposición factorial de los radicandos

Para $\sqrt{8}$:

$$\begin{aligned}8 &= 4 \cdot 2 \\ &= 2^2 \cdot 2 \\ &= 2^3\end{aligned}$$

Justificación: $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$. Identificamos $2^2 = 4$ como cuadrado perfecto.

Para $\sqrt{50}$:

$$\begin{aligned}50 &= 25 \cdot 2 \\ &= 5^2 \cdot 2\end{aligned}$$

Justificación: $50 \div 2 = 25$, y $25 = 5^2$ es un cuadrado perfecto.

Para $\sqrt{2}$:

$$2 = 2$$

Justificación: 2 es primo, sin cuadrados perfectos como factores.

Paso 2: Simplificación de cada radical

Para $5\sqrt{8}$:

$$\begin{aligned} 5\sqrt{8} &= 5\sqrt{2^2 \cdot 2} \\ &= 5 \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} \\ &= 5 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \\ &= 10\sqrt{2} \end{aligned}$$

Justificación paso a paso:

1. Aplicamos $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ con $a = 2^2$ y $b = 2$
2. Calculamos $\sqrt{2^2} = 2$ (raíz de cuadrado perfecto)
3. Multiplicamos los coeficientes: $5 \times 2 = 10$

Para $\sqrt{50}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{50} &= \sqrt{5^2 \cdot 2} \\ &= \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{2} \\ &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

Justificación: Extraemos $\sqrt{5^2} = 5$ directamente.

Para $4\sqrt{2}$:

$$4\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

Justificación: Ya está simplificado; el coeficiente es 4.

Paso 3: Identificación de radicales semejantes

Todos los términos simplificados contienen $\sqrt{2}$:

- $10\sqrt{2}$
- $5\sqrt{2}$
- $4\sqrt{2}$

Son radicales semejantes.

Paso 4: Operación con los coeficientes

Sustituimos en la expresión:

$$\begin{aligned} 5\sqrt{8} + \sqrt{50} - 4\sqrt{2} &= 10\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2} \\ &= (10 + 5 - 4)\sqrt{2} \\ &= 11\sqrt{2} \end{aligned}$$

Justificación aritmética:

$$10 + 5 - 4 = 15 - 4 = 11$$

Verificación numérica:

$$\begin{aligned} 5\sqrt{8} + \sqrt{50} - 4\sqrt{2} &\approx 5(2,828) + 7,071 - 4(1,414) \\ &\approx 14,140 + 7,071 - 5,656 \\ &\approx 15,555 \end{aligned}$$

Nuestro resultado:

$$11\sqrt{2} \approx 11 \times 1,414 = 15,554 \quad \checkmark$$

Respuesta Final - Apartado b)

$$5\sqrt{8} + \sqrt{50} - 4\sqrt{2} = 11\sqrt{2}$$

Atención - Error Común

Error común: Algunos estudiantes intentan simplificar $\sqrt{8}$ como $\sqrt{4+4} = \sqrt{4} + \sqrt{4} = 2 + 2 = 4$.

¡ESTO ES INCORRECTO!

La propiedad correcta es $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, NO $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Contraejemplo: $\sqrt{9} = 3$, pero $\sqrt{4+5} \neq \sqrt{4} + \sqrt{5} = 2 + 2,236 = 4,236 \neq 3$.

1.5. Apartado c) $\sqrt{28} + \sqrt{63} - 7\sqrt{7}$

Solución

Paso 1: Descomposición factorial de los radicandos

Para $\sqrt{28}$:

$$\begin{aligned} 28 &= 4 \cdot 7 \\ &= 2^2 \cdot 7 \end{aligned}$$

Justificación: $28 \div 4 = 7$, siendo $4 = 2^2$ un cuadrado perfecto.

Para $\sqrt{63}$:

$$\begin{aligned} 63 &= 9 \cdot 7 \\ &= 3^2 \cdot 7 \end{aligned}$$

Justificación: $63 \div 9 = 7$, siendo $9 = 3^2$ un cuadrado perfecto.

Para $\sqrt{7}$:

$$7 = 7$$

Justificación: 7 es primo.

Paso 2: Simplificación de cada radical

Para $\sqrt{28}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{28} &= \sqrt{2^2 \cdot 7} \\ &= \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{7} \\ &= 2\sqrt{7}\end{aligned}$$

Para $\sqrt{63}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{63} &= \sqrt{3^2 \cdot 7} \\ &= \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{7} \\ &= 3\sqrt{7}\end{aligned}$$

Para $7\sqrt{7}$:

$$7\sqrt{7} = 7\sqrt{7}$$

Ya está simplificado.

Paso 3: Identificación de radicales semejantes

Todos contienen $\sqrt{7}$:

- $2\sqrt{7}$
- $3\sqrt{7}$
- $7\sqrt{7}$

Paso 4: Operación con los coeficientes

$$\begin{aligned}\sqrt{28} + \sqrt{63} - 7\sqrt{7} &= 2\sqrt{7} + 3\sqrt{7} - 7\sqrt{7} \\ &= (2 + 3 - 7)\sqrt{7} \\ &= (5 - 7)\sqrt{7} \\ &= -2\sqrt{7}\end{aligned}$$

Justificación aritmética:

$$2 + 3 = 5, \quad \text{luego } 5 - 7 = -2$$

El resultado es negativo porque restamos más de lo que sumamos.

Verificación numérica:

$$\begin{aligned}\sqrt{28} + \sqrt{63} - 7\sqrt{7} &\approx 5,292 + 7,937 - 7(2,646) \\ &\approx 5,292 + 7,937 - 18,522 \\ &\approx -5,293\end{aligned}$$

Nuestro resultado:

$$-2\sqrt{7} \approx -2 \times 2,646 = -5,292 \quad \checkmark$$

Respuesta Final - Apartado c)

$$\sqrt{28} + \sqrt{63} - 7\sqrt{7} = -2\sqrt{7}$$

Observación

El resultado negativo es perfectamente válido. En el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, $-2\sqrt{7}$ es un número irracional negativo aproximadamente igual a $-5,29$. Geométricamente, si interpretamos $\sqrt{7}$ como una longitud, $-2\sqrt{7}$ representa la longitud $2\sqrt{7}$ en dirección opuesta (hacia la izquierda en la recta real).

2. Ejercicio 12: Multiplicación y Suma/Resta de Radicales

Ejercicio 12

Opera y simplifica las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} + 5\sqrt{9}$

b) $\sqrt{2}(\sqrt{18} - 3\sqrt{2})$

c) $2\sqrt{5} + \sqrt{20} - \frac{\sqrt{45}}{3}$

2.1. Marco Teórico

Fundamentos Teóricos

Propiedad 12.1 (Producto de Radicales del mismo índice):

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Propiedad 12.2 (Propiedad Distributiva con Radicales):

$$a(\sqrt{b} + \sqrt{c}) = a\sqrt{b} + a\sqrt{c}$$

En particular, si $a = \sqrt{d}$:

$$\sqrt{d}(\sqrt{b} + \sqrt{c}) = \sqrt{d} \cdot \sqrt{b} + \sqrt{d} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{db} + \sqrt{dc}$$

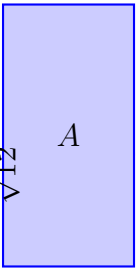
Teorema 12.1 (Simplificación de radicales con división):

$$\frac{\sqrt{a}}{b} = \frac{1}{b}\sqrt{a}$$

donde podemos simplificar el radical y luego dividir el coeficiente.

2.2. Ilustración Conceptual

Producto de Radicales



Multiplicación Visual

$$\sqrt{3} \times 12 = \sqrt{36} = 6$$

Área del rectángulo:
 $\sqrt{3} \times \sqrt{12}$

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6$$

$$\sqrt{2}(\sqrt{18} - 3\sqrt{2}) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{18} - \sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}$$

Suma de Radicales No Semejantes

 $\sqrt{5}$ (no se puede sumar con otros)

 $\sqrt{3}$ (diferente radicando)

Solo se suman radicales con el MISMO radicando

2.3. Apartado a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} + 5\sqrt{9}$

Solución

Paso 1: Aplicación del producto de radicales

Comenzamos con el producto $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$. Aplicamos la **Propiedad 12.1**:

$$\begin{aligned}\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} &= \sqrt{3 \cdot 12} \\ &= \sqrt{36}\end{aligned}$$

Justificación: El producto de dos raíces cuadradas es igual a la raíz cuadrada del producto de los radicandos. Esta propiedad se deriva de las leyes de exponentes: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = a^{1/2} \cdot b^{1/2} = (ab)^{1/2} = \sqrt{ab}$.

Paso 2: Cálculo de 3×12

$$\begin{aligned}3 \times 12 &= 3 \times (10 + 2) \\ &= 3 \times 10 + 3 \times 2 \\ &= 30 + 6 \\ &= 36\end{aligned}$$

Justificación: Aplicamos la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma.

Paso 3: Simplificación de $\sqrt{36}$

$$\sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6$$

Justificación: 36 es un cuadrado perfecto ($36 = 6 \times 6 = 6^2$), por lo tanto $\sqrt{36} = 6$ por definición de raíz cuadrada.

Paso 4: Simplificación de $5\sqrt{9}$

Primero simplificamos $\sqrt{9}$:

$$\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$$

Justificación: 9 es un cuadrado perfecto ($9 = 3^2$).

Ahora multiplicamos por el coeficiente:

$$5\sqrt{9} = 5 \cdot 3 = 15$$

Paso 5: Suma de los resultados

Sustituimos en la expresión original:

$$\begin{aligned}\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} + 5\sqrt{9} &= 6 + 15 \\ &= 21\end{aligned}$$

Justificación: Ambos términos son números racionales (enteros), por lo que simplemente los sumamos aritméticamente.

Verificación detallada:

Podemos verificar paso a paso:

- $\sqrt{3} \approx 1,732$
- $\sqrt{12} \approx 3,464$
- $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} \approx 1,732 \times 3,464 \approx 6,000$
- $\sqrt{9} = 3$ (exacto)
- $5\sqrt{9} = 5 \times 3 = 15$
- $6 + 15 = 21$

Respuesta Final - Apartado a)

$$\boxed{\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} + 5\sqrt{9} = 21}$$

Este es un número natural (entero positivo), perteneciente a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

2.4. Apartado b) $\sqrt{2}(\sqrt{18} - 3\sqrt{2})$ **Solución****Paso 1: Aplicación de la propiedad distributiva**

Aplicamos la **Propiedad 12.2** (distributiva):

$$\sqrt{2}(\sqrt{18} - 3\sqrt{2}) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{18} - \sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}$$

Justificación: La multiplicación se distribuye sobre la resta: $a(b - c) = ab - ac$. Esta propiedad es válida para todos los números reales, incluyendo los irracionales como $\sqrt{2}$.

Paso 2: Cálculo del primer término $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$

Aplicamos la **Propiedad 12.1**:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} &= \sqrt{2 \cdot 18} \\ &= \sqrt{36}\end{aligned}$$

Cálculo de 2×18 :

$$2 \times 18 = 36$$

Simplificación:

$$\sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6$$

Paso 3: Cálculo del segundo término $\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}$

Reordenamos los factores (propiedad conmutativa de la multiplicación):

$$\begin{aligned}\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} &= 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \\ &= 3 \cdot (\sqrt{2})^2\end{aligned}$$

Justificación: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = (\sqrt{2})^2$ por definición de cuadrado.

Ahora calculamos $(\sqrt{2})^2$:

$$(\sqrt{2})^2 = 2$$

Justificación rigurosa: Por definición, $\sqrt{2}$ es el número positivo que al elevarlo al cuadrado da 2. Por lo tanto, $(\sqrt{2})^2 = 2$ por la propiedad inversa de raíz y potencia: $(a^{1/2})^2 = a^{(1/2) \cdot 2} = a^1 = a$.

Multiplicamos por 3:

$$3 \cdot 2 = 6$$

Paso 4: Resta de los términos

Sustituimos en la expresión:

$$\begin{aligned}\sqrt{2}(\sqrt{18} - 3\sqrt{2}) &= 6 - 6 \\ &= 0\end{aligned}$$

Justificación: $6 - 6 = 0$ por la propiedad del elemento neutro aditivo.

Verificación numérica:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2}(\sqrt{18} - 3\sqrt{2}) &\approx 1,414 \times (4,243 - 3 \times 1,414) \\
 &\approx 1,414 \times (4,243 - 4,242) \\
 &\approx 1,414 \times 0,001 \\
 &\approx 0,0014 \approx 0 \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

La pequeña diferencia se debe a errores de redondeo en las aproximaciones decimales.

Respuesta Final - Apartado b)

$$\boxed{\sqrt{2}(\sqrt{18} - 3\sqrt{2}) = 0}$$

El resultado es el elemento neutro aditivo de $\mathbb{R}$.

Observación

Este ejercicio muestra un caso interesante donde la combinación de términos irracionales resulta en un número racional (en este caso, cero). Aunque $\sqrt{2}$ y $\sqrt{18}$ son números irracionales, su combinación algebraica puede producir un resultado racional.

Matemáticamente, esto se debe a que:

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

Por lo tanto, la expresión se reduce a:

$$\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} - 3(\sqrt{2})^2 = 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 0$$

2.5. Apartado c) $2\sqrt{5} + \sqrt{20} - \frac{\sqrt{45}}{3}$ **Solución****Paso 1: Simplificación de $\sqrt{20}$**

Descomponemos 20 en factores:

$$\begin{aligned}
 20 &= 4 \cdot 5 \\
 &= 2^2 \cdot 5
 \end{aligned}$$

Justificación: $20 = 4 \times 5$, donde $4 = 2^2$ es un cuadrado perfecto.

Simplificamos el radical:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{20} &= \sqrt{2^2 \cdot 5} \\
 &= \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5} \\
 &= 2\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

Paso 2: Simplificación de $\frac{\sqrt{45}}{3}$

Primero simplificamos $\sqrt{45}$. Descomponemos 45:

$$\begin{aligned} 45 &= 9 \cdot 5 \\ &= 3^2 \cdot 5 \end{aligned}$$

Justificación: $45 = 9 \times 5$, donde $9 = 3^2$ es un cuadrado perfecto.

Simplificamos:

$$\begin{aligned} \sqrt{45} &= \sqrt{3^2 \cdot 5} \\ &= \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} \\ &= 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

Ahora calculamos la fracción:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{45}}{3} &= \frac{3\sqrt{5}}{3} \\ &= \frac{3}{3} \cdot \sqrt{5} \\ &= 1 \cdot \sqrt{5} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

Justificación: Simplificamos la fracción $\frac{3}{3} = 1$ por la propiedad de cancelación: $\frac{a}{a} = 1$ para todo $a \neq 0$.

Paso 3: Identificación de radicales semejantes

Ahora tenemos:

- $2\sqrt{5}$ (coeficiente 2)
- $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ (coeficiente 2)
- $\frac{\sqrt{45}}{3} = \sqrt{5}$ (coeficiente 1)

Todos tienen el mismo radicando ($\sqrt{5}$), por lo tanto son semejantes.

Paso 4: Suma y resta de coeficientes

Sustituimos en la expresión original:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{5} + \sqrt{20} - \frac{\sqrt{45}}{3} &= 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - \sqrt{5} \\ &= (2 + 2 - 1)\sqrt{5} \\ &= 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

Justificación aritmética de los coeficientes:

$$\begin{aligned} 2 + 2 - 1 &= 4 - 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Verificación numérica:

Valores aproximados:

- $\sqrt{5} \approx 2,236$
- $2\sqrt{5} \approx 4,472$
- $\sqrt{20} \approx 4,472$
- $\sqrt{45} \approx 6,708$
- $\frac{\sqrt{45}}{3} \approx 2,236$

Cálculo:

$$2\sqrt{5} + \sqrt{20} - \frac{\sqrt{45}}{3} \approx 4,472 + 4,472 - 2,236 \\ \approx 6,708$$

Nuestro resultado:

$$3\sqrt{5} \approx 3 \times 2,236 = 6,708 \quad \checkmark$$

Respuesta Final - Apartado c)

$$2\sqrt{5} + \sqrt{20} - \frac{\sqrt{45}}{3} = 3\sqrt{5}$$

Atención - Error Común

Error común con fracciones: Algunos estudiantes calculan incorrectamente:

$$\frac{\sqrt{45}}{3} \stackrel{?}{=} \sqrt{\frac{45}{3}} = \sqrt{15}$$

Aunque matemáticamente $\frac{\sqrt{a}}{b} = \frac{1}{b}\sqrt{a}$ y también $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, en este caso:

$$\frac{\sqrt{45}}{3} = \frac{3\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5}$$

mientras que:

$$\sqrt{\frac{45}{3}} = \sqrt{15} \approx 3,873 \neq \sqrt{5} \approx 2,236$$

La diferencia radica en que debemos simplificar $\sqrt{45}$ ANTES de dividir entre 3, no simplificar dentro del radical.

3. Ejercicio 13: Raíces Cúbicas y Radicales de Mayor Índice

Ejercicio 13

Opera y simplifica las siguientes expresiones con radicales de índice superior a 2:

a) $\sqrt[3]{16} + 5\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{54}$

b) $\sqrt[3]{250} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{16}$

c) $\sqrt[4]{48} - 2\sqrt[4]{3}$

3.1. Marco Teórico

Fundamentos Teóricos

Definición 13.1 (Raíz n-ésima): La raíz n-ésima de un número a , denotada $\sqrt[n]{a}$, es el número b tal que $b^n = a$.

Propiedad 13.1 (Simplificación de raíces n-ésimas):

$$\sqrt[n]{a^m \cdot b} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{m/n} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Si $m \geq n$, podemos extraer $a^{\lfloor m/n \rfloor}$ fuera del radical.

Propiedad 13.2 (Descomposición factorial para radicales): Para simplificar $\sqrt[n]{N}$, descomponemos N en factores primos:

$$N = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$$

Entonces:

$$\sqrt[n]{N} = p_1^{\lfloor a_1/n \rfloor} \cdot p_2^{\lfloor a_2/n \rfloor} \cdots p_k^{\lfloor a_k/n \rfloor} \cdot \sqrt[n]{p_1^{a_1 \bmod n} \cdot p_2^{a_2 \bmod n} \cdots p_k^{a_k \bmod n}}$$

donde $\lfloor x \rfloor$ es la parte entera de x y $a \bmod n$ es el resto de la división de a entre n .

Ejemplo: Para $\sqrt[3]{16}$:

$$16 = 2^4$$

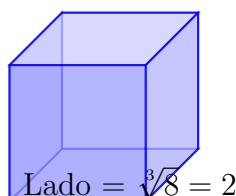
$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2^{4/3} = 2^{1+1/3} = 2^1 \cdot 2^{1/3} = 2\sqrt[3]{2}$$

porque $4 = 3 \cdot 1 + 1$, así que extraemos $2^1 = 2$ y queda 2^1 dentro.

3.2. Ilustración Conceptual

Raíces Cúbicas: Interpretación Volumétrica

$$\text{Volumen} = 2^3 = 8$$



Simplificación de $\sqrt[3]{16}$

$$16 = 2^4 = 2^3 \cdot 2$$

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2}$$

$$= 2 \cdot \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$$

Referencia: Potencias de 2

$$\frac{2^1}{2^5} = \frac{2^2}{32} = \frac{2^3}{64} = \frac{2^4}{128} = \frac{2^5}{256}$$

Raíz Cuarta: $\sqrt[4]{a}$ es el número b tal que $b^4 = a$

Ejemplo: $\sqrt[4]{16} = 2$ porque $2^4 = 16$

3.3. Apartado a) $\sqrt[3]{16} + 5\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{54}$

Solución

Paso 1: Simplificación de $\sqrt[3]{16}$

Descomponemos 16 en factores primos:

$$\begin{aligned} 16 &= 2 \cdot 8 \\ &= 2 \cdot 2^3 \\ &= 2^4 \end{aligned}$$

Justificación: $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$.

Ahora expresamos 2^4 de forma conveniente para la raíz cúbica:

$$\begin{aligned} 2^4 &= 2^3 \cdot 2^1 \\ &= 2^3 \cdot 2 \end{aligned}$$

Justificación: Aplicamos la propiedad de exponentes $a^m = a^{m-n} \cdot a^n$ con $m = 4$, $n = 3$.

Extraemos la raíz cúbica:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{16} &= \sqrt[3]{2^4} \\ &= \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} \\ &= \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2} \quad (\text{Propiedad: } \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}) \\ &= 2 \cdot \sqrt[3]{2} \\ &= 2\sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

Justificación del paso $\sqrt[3]{2^3} = 2$: Por definición, la raíz cúbica de 2^3 es el número que elevado al cubo da 2^3 . Claramente, $(2)^3 = 2^3$, por lo tanto $\sqrt[3]{2^3} = 2$.

Paso 2: El término $5\sqrt[3]{2}$ ya está simplificado

No hay operaciones que realizar con este término en este momento.

Paso 3: Simplificación de $\sqrt[3]{54}$

Descomponemos 54 en factores primos:

$$\begin{aligned} 54 &= 2 \cdot 27 \\ &= 2 \cdot 3^3 \end{aligned}$$

Justificación paso a paso:

- $54 \div 2 = 27$
- $27 = 3 \times 9 = 3 \times 3^2 = 3^3$

Verificación: $2 \times 3^3 = 2 \times 27 = 54$

Extraemos la raíz cúbica:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{54} &= \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} \\ &= \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{2} \\ &= 3 \cdot \sqrt[3]{2} \\ &= 3\sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

Justificación: $\sqrt[3]{3^3} = 3$ porque $(3)^3 = 27 = 3^3$.

Paso 4: Identificación de radicales semejantes

Ahora tenemos:

- $\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$
- $5\sqrt[3]{2}$
- $\sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{2}$

Todos tienen el mismo radicando ($\sqrt[3]{2}$) y el mismo índice (3), por lo tanto son radicales semejantes.

Paso 5: Suma y resta de coeficientes

Sustituimos en la expresión original:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{16} + 5\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{54} &= 2\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} \\ &= (2 + 5 - 3)\sqrt[3]{2} \\ &= 4\sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

Justificación aritmética:

$$\begin{aligned} 2 + 5 - 3 &= 7 - 3 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Verificación numérica:

$\sqrt[3]{2} \approx 1,260$ (valor aproximado)

Calculamos cada término:

$$\sqrt[3]{16} \approx 2,520$$

$$5\sqrt[3]{2} \approx 6,300$$

$$\sqrt[3]{54} \approx 3,780$$

Suma total:

$$\begin{aligned} 2,520 + 6,300 - 3,780 &= 8,820 - 3,780 \\ &= 5,040 \end{aligned}$$

Nuestro resultado:

$$4\sqrt[3]{2} \approx 4 \times 1,260 = 5,040 \quad \checkmark$$

Respuesta Final - Apartado a)

$$\boxed{\sqrt[3]{16} + 5\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{54} = 4\sqrt[3]{2}}$$

3.4. Apartado b) $\sqrt[3]{250} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{16}$

Solución

Paso 1: Simplificación de $\sqrt[3]{250}$

Descomponemos 250 en factores primos:

$$\begin{aligned} 250 &= 2 \cdot 125 \\ &= 2 \cdot 5^3 \end{aligned}$$

Justificación paso a paso:

- $250 \div 2 = 125$
- $125 = 5 \times 25 = 5 \times 5^2 = 5^3$

Verificación: $2 \times 5^3 = 2 \times 125 = 250$

Extraemos la raíz cúbica:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{250} &= \sqrt[3]{2 \cdot 5^3} \\ &= \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{2} \\ &= 5 \cdot \sqrt[3]{2} \\ &= 5\sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

Justificación: $\sqrt[3]{5^3} = 5$ porque $(5)^3 = 125 = 5^3$.

Paso 2: Simplificación de $\frac{1}{2}\sqrt[3]{16}$

Del apartado anterior, sabemos que:

$$\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sqrt[3]{16} &= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt[3]{2} \\ &= \frac{2}{2} \cdot \sqrt[3]{2} \\ &= 1 \cdot \sqrt[3]{2} \\ &= \sqrt[3]{2}\end{aligned}$$

Justificación: $\frac{2}{2} = 1$ por simplificación de la fracción.

Paso 3: Identificación de radicales semejantes

Tenemos:

- $\sqrt[3]{250} = 5\sqrt[3]{2}$
- $\frac{1}{2}\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2}$

Ambos tienen el mismo radicando ($\sqrt[3]{2}$), por lo tanto son semejantes.

Paso 4: Resta de coeficientes

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{250} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{16} &= 5\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} \\ &= (5 - 1)\sqrt[3]{2} \\ &= 4\sqrt[3]{2}\end{aligned}$$

Justificación: $5 - 1 = 4$.

Verificación numérica:

Usando $\sqrt[3]{2} \approx 1,260$:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{250} &\approx 6,300 \\ \frac{1}{2}\sqrt[3]{16} &\approx \frac{1}{2} \times 2,520 = 1,260\end{aligned}$$

Resta:

$$6,300 - 1,260 = 5,040$$

Nuestro resultado:

$$4\sqrt[3]{2} \approx 4 \times 1,260 = 5,040 \quad \checkmark$$

Respuesta Final - Apartado b)

$$\sqrt[3]{250} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{16} = 4\sqrt[3]{2}$$

Observación

Curiosamente, este apartado tiene el mismo resultado que el apartado a), aunque las expresiones iniciales son completamente diferentes. Esto ilustra que diferentes combinaciones de radicales pueden simplificarse al mismo resultado final.

3.5. Apartado c) $\sqrt[4]{48} - 2\sqrt[4]{3}$

Solución

Paso 1: Simplificación de $\sqrt[4]{48}$

Descomponemos 48 en factores primos:

$$\begin{aligned} 48 &= 16 \cdot 3 \\ &= 2^4 \cdot 3 \end{aligned}$$

Justificación paso a paso:

- $48 = 2 \times 24 = 2^2 \times 12 = 2^3 \times 6 = 2^4 \times 3$
- Alternativamente: $48 \div 16 = 3$, y $16 = 2^4$

Verificación: $2^4 \times 3 = 16 \times 3 = 48$

Extraemos la raíz cuarta:

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{48} &= \sqrt[4]{2^4 \cdot 3} \\ &= \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{3} \\ &= 2 \cdot \sqrt[4]{3} \\ &= 2\sqrt[4]{3} \end{aligned}$$

Justificación: $\sqrt[4]{2^4} = 2$ porque $(2)^4 = 16 = 2^4$ por definición de raíz cuarta.
 Más rigurosamente: $\sqrt[4]{2^4} = (2^4)^{1/4} = 2^{4 \cdot 1/4} = 2^1 = 2$.

Paso 2: El término $2\sqrt[4]{3}$ ya está simplificado

No requiere transformación.

Paso 3: Identificación de radicales semejantes

Tenemos:

- $\sqrt[4]{48} = 2\sqrt[4]{3}$
- $2\sqrt[4]{3}$

Ambos tienen el mismo radicando ($\sqrt[4]{3}$) y el mismo índice (4), son semejantes.

Paso 4: Resta de coeficientes

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{48} - 2\sqrt[4]{3} &= 2\sqrt[4]{3} - 2\sqrt[4]{3} \\ &= (2 - 2)\sqrt[4]{3} \\ &= 0 \cdot \sqrt[4]{3} \\ &= 0\end{aligned}$$

Justificación: $2 - 2 = 0$, y cualquier número multiplicado por 0 es 0 (propiedad del elemento absorbente).

Verificación numérica:

$\sqrt[4]{3} \approx 1,316$ (aproximado)

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{48} &\approx 2,632 \\ 2\sqrt[4]{3} &\approx 2 \times 1,316 = 2,632\end{aligned}$$

Resta:

$$2,632 - 2,632 = 0,000 \quad \checkmark$$

Verificación algebraica alternativa:

Podemos verificar que $\sqrt[4]{48} = 2\sqrt[4]{3}$ elevando al cuadrado ambos lados:

$$\begin{aligned}(\sqrt[4]{48})^4 &= 48 \\ (2\sqrt[4]{3})^4 &= 2^4 \cdot (\sqrt[4]{3})^4 = 16 \cdot 3 = 48 \quad \checkmark\end{aligned}$$

Respuesta Final - Apartado c)

$$\boxed{\sqrt[4]{48} - 2\sqrt[4]{3} = 0}$$

Observación

Este es otro ejemplo donde la combinación de radicales resulta en cero. Matemáticamente, esto ocurre porque:

$$\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16 \cdot 3} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3} = 2\sqrt[4]{3}$$

Por lo tanto, la expresión se reduce a:

$$2\sqrt[4]{3} - 2\sqrt[4]{3} = 0$$

Este tipo de ejercicios enseña la importancia de simplificar radicales antes de operar, ya que lo que parece una expresión compleja puede reducirse a algo muy simple (en este caso, cero).

4. Ejercicio 14: Extracción e Introducción de Factores

Ejercicio 14

Realiza las siguientes operaciones con radicales:

- a) Simplifica el radical: $\sqrt{a^5 b^7 c^2}$
- b) Introduce factores en el radical: $3x^2 \sqrt{5y}$
- c) Opera y simplifica: $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{8} - \sqrt{18}$

4.1. Marco Teórico

Fundamentos Teóricos

Propiedad 14.1 (Extracción de factores de un radical):

Para $\sqrt{a^n}$ donde $a > 0$:

$$\sqrt{a^n} = a^{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot \sqrt{a^{n \bmod 2}}$$

Más generalmente:

$$\sqrt{a^{2k+r}} = a^k \cdot \sqrt{a^r} \quad \text{donde } r \in \{0, 1\}$$

Propiedad 14.2 (Introducción de factores en un radical):

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}$$

Esta propiedad se deriva de:

$$a\sqrt{b} = a \cdot b^{1/2} = a^{2/2} \cdot b^{1/2} = (a^2)^{1/2} \cdot b^{1/2} = (a^2 \cdot b)^{1/2} = \sqrt{a^2 b}$$

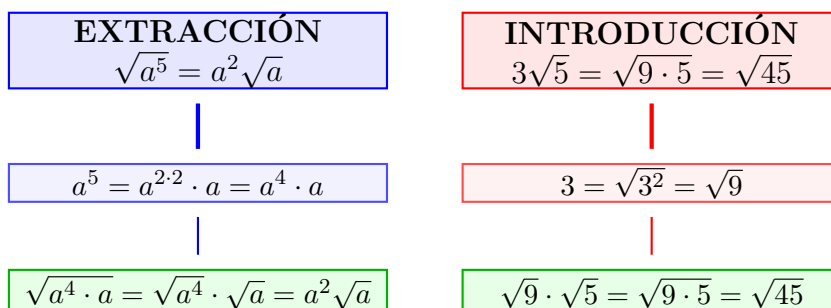
Propiedad 14.3 (Raíz de fracción):

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \text{con } b > 0$$

Definición 14.1 (Racionalización): Proceso de eliminar radicales del denominador de una fracción mediante multiplicaciones convenientes.

4.2. Ilustración Conceptual

Extracción e Introducción de Factores



Descomposición de Exponentes

$a^5 = \underbrace{a \cdot a}_{a^2} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{a^3}$	$(3x^2)^2 = 3^2 \cdot (x^2)^2 = 9x^4$

Regla para Raíces Cuadradas

Exponente PAR: $\sqrt{a^{2k}} = a^k$

Exponente IMPAR: $\sqrt{a^{2k+1}} = a^k \sqrt{a}$

4.3. Apartado a) Simplifica el radical: $\sqrt{a^5 b^7 c^2}$

Solución

Paso 1: Aplicación de la propiedad del producto

Aplicamos la propiedad $\sqrt{xyz} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} \cdot \sqrt{z}$:

$$\sqrt{a^5 b^7 c^2} = \sqrt{a^5} \cdot \sqrt{b^7} \cdot \sqrt{c^2}$$

Justificación: Esta propiedad se deriva de las leyes de exponentes: $(xyz)^{1/2} = x^{1/2} \cdot y^{1/2} \cdot z^{1/2}$.

Paso 2: Simplificación de $\sqrt{a^5}$

Descomponemos el exponente 5:

$$5 = 2 \cdot 2 + 1 = 4 + 1$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} a^5 &= a^{4+1} \\ &= a^4 \cdot a^1 \\ &= (a^2)^2 \cdot a \end{aligned}$$

Justificación: Aplicamos $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ y $a^{2k} = (a^k)^2$.

Extraemos la raíz:

$$\begin{aligned}\sqrt{a^5} &= \sqrt{(a^2)^2 \cdot a} \\ &= \sqrt{(a^2)^2} \cdot \sqrt{a} \\ &= a^2 \cdot \sqrt{a} \\ &= a^2 \sqrt{a}\end{aligned}$$

Justificación rigurosa de $\sqrt{(a^2)^2} = a^2$:

Asumiendo $a > 0$ (condición para que el radical esté bien definido):

$$\sqrt{(a^2)^2} = ((a^2)^2)^{1/2} = (a^2)^{2 \cdot 1/2} = (a^2)^1 = a^2$$

Paso 3: Simplificación de $\sqrt{b^7}$

Descomponemos el exponente 7:

$$7 = 2 \cdot 3 + 1 = 6 + 1$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}b^7 &= b^{6+1} \\ &= b^6 \cdot b^1 \\ &= (b^3)^2 \cdot b\end{aligned}$$

Extraemos la raíz:

$$\begin{aligned}\sqrt{b^7} &= \sqrt{(b^3)^2 \cdot b} \\ &= \sqrt{(b^3)^2} \cdot \sqrt{b} \\ &= b^3 \cdot \sqrt{b} \\ &= b^3 \sqrt{b}\end{aligned}$$

Justificación: Análoga al caso anterior, con $b > 0$.

Paso 4: Simplificación de $\sqrt{c^2}$

$$\begin{aligned}\sqrt{c^2} &= |c| \\ &= c \quad (\text{asumiendo } c > 0)\end{aligned}$$

Justificación teórica: Por definición, $\sqrt{c^2}$ es el número no negativo que elevado al cuadrado da c^2 . Este número es $|c|$ (el valor absoluto de c). Si asumimos que trabajamos con variables positivas (contexto usual en simplificación de radicales), entonces $|c| = c$.

Paso 5: Combinación de todos los factores

Juntamos todos los resultados:

$$\begin{aligned}\sqrt{a^5 b^7 c^2} &= \sqrt{a^5} \cdot \sqrt{b^7} \cdot \sqrt{c^2} \\ &= a^2 \sqrt{a} \cdot b^3 \sqrt{b} \cdot c \\ &= a^2 \cdot b^3 \cdot c \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\end{aligned}$$

Aplicamos nuevamente $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$:

$$\begin{aligned} &= a^2 b^3 c \cdot \sqrt{a \cdot b} \\ &= a^2 b^3 c \sqrt{ab} \end{aligned}$$

Justificación del reordenamiento: Utilizamos la propiedad conmutativa de la multiplicación en $\mathbb{R}$.

Verificación dimensional:

Podemos verificar que no hemos perdido ningún factor elevando al cuadrado:

$$\begin{aligned} (a^2 b^3 c \sqrt{ab})^2 &= (a^2)^2 \cdot (b^3)^2 \cdot c^2 \cdot (\sqrt{ab})^2 \\ &= a^4 \cdot b^6 \cdot c^2 \cdot ab \\ &= a^4 \cdot a \cdot b^6 \cdot b \cdot c^2 \\ &= a^5 b^7 c^2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Respuesta Final - Apartado a)

$$\boxed{\sqrt{a^5 b^7 c^2} = a^2 b^3 c \sqrt{ab}}$$

Asumiendo $a, b, c > 0$.

Observación

Método sistemático para extraer factores:

Para cada variable con exponente n :

1. Dividir n entre 2: $n = 2q + r$ donde $q = \lfloor n/2 \rfloor$ y $r \in \{0, 1\}$
2. Extraer x^q fuera del radical
3. Dejar x^r dentro del radical

En nuestro caso:

- a^5 : $5 = 2(2) + 1 \Rightarrow$ sale a^2 , queda a
- b^7 : $7 = 2(3) + 1 \Rightarrow$ sale b^3 , queda b
- c^2 : $2 = 2(1) + 0 \Rightarrow$ sale $c^1 = c$, no queda nada

4.4. Apartado b) Introduce factores en el radical: $3x^2\sqrt{5y}$

Solución

Paso 1: Introducción del factor numérico 3

Para introducir el 3 dentro del radical, aplicamos la **Propiedad 14.2**:

$$3 = \sqrt{3^2} = \sqrt{9}$$

Justificación: Si $a > 0$, entonces $a = \sqrt{a^2}$ porque $(\sqrt{a^2})^2 = a^2$ y $\sqrt{a^2} = a$ (tomando la raíz positiva).

Por lo tanto:

$$3\sqrt{5y} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5y}$$

Paso 2: Introducción del factor algebraico x^2

Análogamente:

$$x^2 = \sqrt{(x^2)^2} = \sqrt{x^4}$$

Justificación detallada:

$$\begin{aligned} x^2 &= (x^2)^{2/2} \\ &= ((x^2)^2)^{1/2} \\ &= \sqrt{(x^2)^2} \\ &= \sqrt{x^{2 \cdot 2}} \\ &= \sqrt{x^4} \end{aligned}$$

Asumimos $x > 0$ para evitar complicaciones con valores absolutos.

Paso 3: Combinación de todos los radicales

Ahora tenemos:

$$3x^2\sqrt{5y} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{x^4} \cdot \sqrt{5y}$$

Aplicamos la propiedad del producto de radicales del mismo índice:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{a \cdot b \cdot c}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} 3x^2\sqrt{5y} &= \sqrt{9 \cdot x^4 \cdot 5y} \\ &= \sqrt{9 \cdot 5 \cdot x^4 \cdot y} \\ &= \sqrt{45x^4y} \end{aligned}$$

Justificación del reordenamiento: Utilizamos la propiedad conmutativa de la multiplicación.

Cálculo de 9×5 :

$$9 \times 5 = 45$$

Verificación:

Podemos verificar extrayendo los factores nuevamente:

$$\begin{aligned}\sqrt{45x^4y} &= \sqrt{9 \cdot 5 \cdot x^4 \cdot y} \\ &= \sqrt{9} \cdot \sqrt{x^4} \cdot \sqrt{5y} \\ &= 3 \cdot x^2 \cdot \sqrt{5y} \\ &= 3x^2\sqrt{5y} \quad \checkmark\end{aligned}$$

Respuesta Final - Apartado b)

$$\boxed{3x^2\sqrt{5y} = \sqrt{45x^4y}}$$

Asumiendo $x, y > 0$.

4.5. Apartado c) Opera y simplifica: $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{8} - \sqrt{18}$

Solución

Paso 1: Simplificación de $\sqrt{\frac{1}{2}}$

Aplicamos la **Propiedad 14.3**:

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Justificación: $\sqrt{1} = 1$ porque $1^2 = 1$.

Ahora racionalizamos el denominador. La racionalización consiste en eliminar radicales del denominador multiplicando numerador y denominador por una expresión conveniente.

Multiplicamos por $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ (que es igual a 1, no cambia el valor):

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Justificación: $(\sqrt{2})^2 = 2$ por definición de raíz cuadrada.

Paso 2: Simplificación de $\sqrt{8}$

Descomponemos 8:

$$\begin{aligned} 8 &= 4 \cdot 2 \\ &= 2^2 \cdot 2 \end{aligned}$$

Simplificamos:

$$\begin{aligned} \sqrt{8} &= \sqrt{2^2 \cdot 2} \\ &= \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Paso 3: Simplificación de $\sqrt{18}$

Descomponemos 18:

$$\begin{aligned} 18 &= 9 \cdot 2 \\ &= 3^2 \cdot 2 \end{aligned}$$

Simplificamos:

$$\begin{aligned} \sqrt{18} &= \sqrt{3^2 \cdot 2} \\ &= \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

Paso 4: Expresión de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ como fracción de radical

Para facilitar la suma, expresamos $\frac{\sqrt{2}}{2}$ de forma equivalente:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$$

Justificación: La multiplicación es conmutativa: $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{c \cdot a}{b} = \frac{c}{1} \cdot \frac{a}{b}$.

Paso 5: Identificación de radicales semejantes

Ahora tenemos:

- $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (coeficiente $\frac{1}{2}$)
- $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ (coeficiente 2)
- $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ (coeficiente 3)

Todos contienen $\sqrt{2}$, son radicales semejantes.

Paso 6: Suma y resta de coeficientes

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{8} - \sqrt{18} &= \frac{1}{2}\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} \\ &= \left(\frac{1}{2} + 2 - 3\right)\sqrt{2} \end{aligned}$$

Cálculo de los coeficientes:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + 2 - 3 &= \frac{1}{2} + \frac{4}{2} - \frac{6}{2} \\ &= \frac{1 + 4 - 6}{2} \\ &= \frac{5 - 6}{2} \\ &= \frac{-1}{2} \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Justificación: Reducimos a común denominador (2) para poder sumar las fracciones. Por lo tanto:

$$\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{8} - \sqrt{18} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Alternativamente, podemos escribir esto como:

$$-\frac{1}{2}\sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Verificación numérica:

Usando $\sqrt{2} \approx 1,414$:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1}{2}} &\approx 0,707 \\ \sqrt{8} &\approx 2,828 \\ \sqrt{18} &\approx 4,243\end{aligned}$$

Cálculo:

$$\begin{aligned}0,707 + 2,828 - 4,243 &= 3,535 - 4,243 \\ &= -0,708\end{aligned}$$

Nuestro resultado:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -\frac{1,414}{2} = -0,707 \quad \checkmark$$

(La pequeña diferencia se debe al redondeo.)

Respuesta Final - Apartado c)

$$\boxed{\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{8} - \sqrt{18} = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

También puede escribirse como: $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Atención - Error Común**Error común con racionalización:**

Algunos estudiantes confunden y escriben:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \stackrel{?}{=} \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

¡Esto es INCORRECTO! Al racionalizar multiplicamos por $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, NO por $\frac{2}{1}$.

Correcto:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Verificación: $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx \frac{1,414}{2} = 0,707$ y $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx \frac{1}{1,414} \approx 0,707$

5. Ejercicio 15: Operaciones Combinadas con Radicales

Ejercicio 15

Opera y simplifica las siguientes expresiones:

a) $(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)$

b) $(2 + \sqrt{3})^2 - \sqrt{48}$

c) $\frac{\sqrt{20} + \sqrt{5}}{\sqrt{45}}$

5.1. Marco Teórico

Fundamentos Teóricos

Teorema 15.1 (Producto Notable - Diferencia de Cuadrados):

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Demostración:

$$\begin{aligned}(a + b)(a - b) &= a(a - b) + b(a - b) \\ &= a^2 - ab + ba - b^2 \\ &= a^2 - ab + ab - b^2 \\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Teorema 15.2 (Producto Notable - Cuadrado de un Binomio):

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Demostración:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\ &= a(a + b) + b(a + b) \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

Propiedad 15.1 (Simplificación de fracciones con radicales):

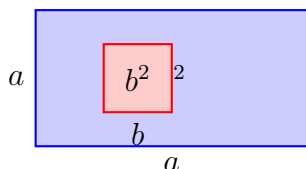
$$\frac{a\sqrt{c} + b\sqrt{c}}{d\sqrt{c}} = \frac{(a + b)\sqrt{c}}{d\sqrt{c}} = \frac{a + b}{d}$$

siempre que $c \neq 0$ y $d \neq 0$.

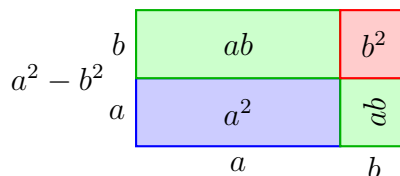
5.2. Ilustración Conceptual

Productos Notables con Radicales: Interpretación Geométrica

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



Ejemplo: $(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)$

$$a = \sqrt{5}, \quad b = 2$$

$$(\sqrt{5})^2 - 2^2 = 5 - 4 = 1$$

Simplificación de Fracciones con Radicales

$$\frac{a\sqrt{c}+b\sqrt{c}}{d\sqrt{c}} = \frac{(a+b)\sqrt{c}}{d\sqrt{c}} = \frac{a+b}{d}$$

5.3. Apartado a) $(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)$

Solución

Paso 1: Identificación del producto notable

Esta expresión tiene la forma $(a + b)(a - b)$ donde:

$$a = \sqrt{5}$$

$$b = 2$$

Es el producto notable conocido como **diferencia de cuadrados** o **suma por diferencia**.

Paso 2: Aplicación del Teorema 15.1

Según el **Teorema 15.1**:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Sustituimos nuestros valores:

$$(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2) = (\sqrt{5})^2 - 2^2$$

Paso 3: Cálculo de $(\sqrt{5})^2$

Por definición de raíz cuadrada:

$$(\sqrt{5})^2 = 5$$

Justificación rigurosa: La raíz cuadrada $\sqrt{5}$ es el número positivo que al elevarlo al cuadrado da 5. Por lo tanto, por definición, $(\sqrt{5})^2 = 5$.

Alternativamente, usando exponentes:

$$(\sqrt{5})^2 = (5^{1/2})^2 = 5^{(1/2) \cdot 2} = 5^1 = 5$$

Paso 4: Cálculo de 2^2

$$2^2 = 2 \times 2 = 4$$

Paso 5: Resta final

$$\begin{aligned} (\sqrt{5})^2 - 2^2 &= 5 - 4 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Verificación mediante desarrollo completo (método alternativo):

Podemos verificar desarrollando el producto directamente sin usar el producto notable:

$$\begin{aligned} (\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2) &= \sqrt{5}(\sqrt{5} - 2) + 2(\sqrt{5} - 2) \\ &= \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{5} \cdot 2 + 2 \cdot \sqrt{5} - 2 \cdot 2 \\ &= (\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 4 \\ &= 5 - 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 4 \\ &= 5 - 4 + (-2\sqrt{5} + 2\sqrt{5}) \\ &= 1 + 0 \\ &= 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Observamos que los términos $-2\sqrt{5}$ y $+2\sqrt{5}$ se cancelan (son opuestos aditivos).

Verificación numérica:

$$\sqrt{5} \approx 2,236$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2) &\approx (2,236 + 2)(2,236 - 2) \\ &\approx (4,236)(0,236) \\ &\approx 0,9997 \\ &\approx 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Respuesta Final - Apartado a)

$$(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2) = 1$$

Observación

Este resultado muestra una aplicación importante del producto notable de diferencia de cuadrados. A pesar de que la expresión contiene radicales irracionales ($\sqrt{5}$), el resultado final es un número racional (en este caso, el número natural 1).

Este tipo de expresiones se utiliza frecuentemente en **racionalización de denomi-

nadores**. Por ejemplo, si tenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{5} + 2}$$

podemos racionalizar multiplicando por $\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{5} + 2} \cdot \frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} - 2} = \frac{\sqrt{5} - 2}{(\sqrt{5})^2 - 4} = \frac{\sqrt{5} - 2}{1} = \sqrt{5} - 2$$

5.4. Apartado b) $(2 + \sqrt{3})^2 - \sqrt{48}$

Solución

Paso 1: Desarrollo del cuadrado del binomio

Aplicamos el **Teorema 15.2** (cuadrado de un binomio):

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

En nuestro caso:

$$a = 2$$

$$b = \sqrt{3}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{3})^2 &= 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 \\ &= 4 + 4\sqrt{3} + 3 \end{aligned}$$

Justificación de cada término:

- $a^2 = 2^2 = 4$
- $2ab = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$
- $b^2 = (\sqrt{3})^2 = 3$

Sumamos los términos constantes:

$$\begin{aligned} 4 + 4\sqrt{3} + 3 &= (4 + 3) + 4\sqrt{3} \\ &= 7 + 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

Paso 2: Simplificación de $\sqrt{48}$

Descomponemos 48 en factores:

$$\begin{aligned} 48 &= 16 \cdot 3 \\ &= 4^2 \cdot 3 \end{aligned}$$

Justificación: $48 = 2^4 \cdot 3 = (2^2)^2 \cdot 3 = 4^2 \cdot 3$.

Alternativamente: $48 \div 16 = 3$.

Simplificamos el radical:

$$\begin{aligned}\sqrt{48} &= \sqrt{16 \cdot 3} \\ &= \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} \\ &= 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

Justificación: $\sqrt{16} = 4$ porque $4^2 = 16$.

Paso 3: Resta de los resultados

Ahora calculamos:

$$\begin{aligned}(2 + \sqrt{3})^2 - \sqrt{48} &= (7 + 4\sqrt{3}) - 4\sqrt{3} \\ &= 7 + 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3} \\ &= 7 + (4\sqrt{3} - 4\sqrt{3}) \\ &= 7 + 0 \\ &= 7\end{aligned}$$

Justificación: Los términos $4\sqrt{3}$ y $-4\sqrt{3}$ son opuestos aditivos, por lo que su suma es cero.

Verificación mediante desarrollo alternativo:

Podemos verificar desarrollando $(2 + \sqrt{3})^2$ de forma directa:

$$\begin{aligned}(2 + \sqrt{3})^2 &= (2 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) \\ &= 2(2 + \sqrt{3}) + \sqrt{3}(2 + \sqrt{3}) \\ &= 4 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 \\ &= 4 + 4\sqrt{3} + 3 \\ &= 7 + 4\sqrt{3} \quad \checkmark\end{aligned}$$

Verificación numérica:

$$\sqrt{3} \approx 1,732$$

$$\begin{aligned}(2 + \sqrt{3})^2 &\approx (2 + 1,732)^2 \\ &\approx (3,732)^2 \\ &\approx 13,928\end{aligned}$$

$$\sqrt{48} \approx 6,928$$

Resta:

$$13,928 - 6,928 = 7,000 \quad \checkmark$$

Respuesta Final - Apartado b)

$$(2 + \sqrt{3})^2 - \sqrt{48} = 7$$

Atención - Error Común

Error común al desarrollar $(2 + \sqrt{3})^2$:

Algunos estudiantes cometen el error de escribir:

$$(2 + \sqrt{3})^2 \stackrel{?}{=} 2^2 + (\sqrt{3})^2 = 4 + 3 = 7$$

¡Esto es INCORRECTO! Se han olvidado del término central $2ab$.

La fórmula correcta es:

$$(a + b)^2 = a^2 + \mathbf{2ab} + b^2$$

No confundir con:

$$(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$$

Contraejemplo numérico: $(2 + 1)^2 = 3^2 = 9$, pero $2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5 \neq 9$.

5.5. Apartado c) $\frac{\sqrt{20} + \sqrt{5}}{\sqrt{45}}$

Solución

Paso 1: Simplificación de $\sqrt{20}$

Descomponemos 20:

$$\begin{aligned} 20 &= 4 \cdot 5 \\ &= 2^2 \cdot 5 \end{aligned}$$

Simplificamos:

$$\begin{aligned} \sqrt{20} &= \sqrt{4 \cdot 5} \\ &= \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

Paso 2: Simplificación de $\sqrt{45}$

Descomponemos 45:

$$\begin{aligned} 45 &= 9 \cdot 5 \\ &= 3^2 \cdot 5 \end{aligned}$$

Simplificamos:

$$\begin{aligned} \sqrt{45} &= \sqrt{9 \cdot 5} \\ &= \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} \\ &= 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

Paso 3: Sustitución en la expresión original

$$\frac{\sqrt{20} + \sqrt{5}}{\sqrt{45}} = \frac{2\sqrt{5} + \sqrt{5}}{3\sqrt{5}}$$

Paso 4: Suma del numerador

En el numerador, tenemos radicales semejantes:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{5} + \sqrt{5} &= 2\sqrt{5} + 1\sqrt{5} \\ &= (2 + 1)\sqrt{5} \\ &= 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

Justificación: Aplicamos la propiedad de suma de radicales semejantes.

Paso 5: Simplificación de la fracción

Ahora tenemos:

$$\frac{2\sqrt{5} + \sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}$$

Simplificamos:

$$\frac{3\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = 1$$

Justificación: Cualquier número (excepto cero) dividido entre sí mismo es 1. Formalmente, $\frac{a}{a} = 1$ para todo $a \neq 0$.

Método alternativo - Aplicación de la Propiedad 15.1:

Podemos aplicar directamente:

$$\frac{a\sqrt{c} + b\sqrt{c}}{d\sqrt{c}} = \frac{(a + b)\sqrt{c}}{d\sqrt{c}} = \frac{a + b}{d}$$

Con $a = 2$, $b = 1$, $c = 5$, $d = 3$:

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{5} + 1\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} &= \frac{2 + 1}{3} \\ &= \frac{3}{3} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Verificación numérica:

$$\sqrt{5} \approx 2,236$$

$$\sqrt{20} \approx 4,472$$

$$\sqrt{5} \approx 2,236$$

$$\sqrt{45} \approx 6,708$$

Cálculo:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{20} + \sqrt{5}}{\sqrt{45}} &\approx \frac{4,472 + 2,236}{6,708} \\ &\approx \frac{6,708}{6,708} \\ &\approx 1,000 \quad \checkmark\end{aligned}$$

Verificación algebraica:

Podemos verificar multiplicando:

$$1 \times \sqrt{45} = \sqrt{45}$$

Y comprobamos que:

$$\sqrt{20} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{45} \quad \checkmark$$

Respuesta Final - Apartado c)

$$\frac{\sqrt{20} + \sqrt{5}}{\sqrt{45}} = 1$$

Observación

Este ejercicio ilustra la importancia de simplificar radicales antes de operar con ellos. Una vez simplificados todos los radicales al mismo radicando ($\sqrt{5}$), la fracción se reduce de forma muy sencilla.

Este tipo de expresiones aparece frecuentemente en:

- Geometría (cálculos con diagonales, áreas, volúmenes)
- Trigonometría (simplificación de expresiones con razones trigonométricas)
- Álgebra (resolución de ecuaciones cuadráticas)

6. Ejercicio 16: Operaciones con Paréntesis y Sumas/Restas de Fracciones

Ejercicio 16

Calcula las siguientes expresiones con fracciones:

a) $\frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{8}\right) - \frac{1}{16}$

b) $\frac{5}{6} - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{12}$

c) $1 - \left[\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)\right]$

6.1. Marco Teórico

Fundamentos Teóricos

Propiedad 16.1 (Jerarquía de Operaciones):

La jerarquía de operaciones (también conocida como orden de precedencia) establece:

1. Paréntesis (de adentro hacia afuera)
2. Potencias y raíces
3. Multiplicaciones y divisiones (de izquierda a derecha)
4. Sumas y restas (de izquierda a derecha)

Propiedad 16.2 (Suma y Resta de Fracciones):

Para sumar o restar fracciones:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Método del mínimo común múltiplo (mcm):

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot \frac{\text{mcm}(b,d)}{b} + c \cdot \frac{\text{mcm}(b,d)}{d}}{\text{mcm}(b,d)}$$

Definición 16.1 (Mínimo Común Múltiplo):

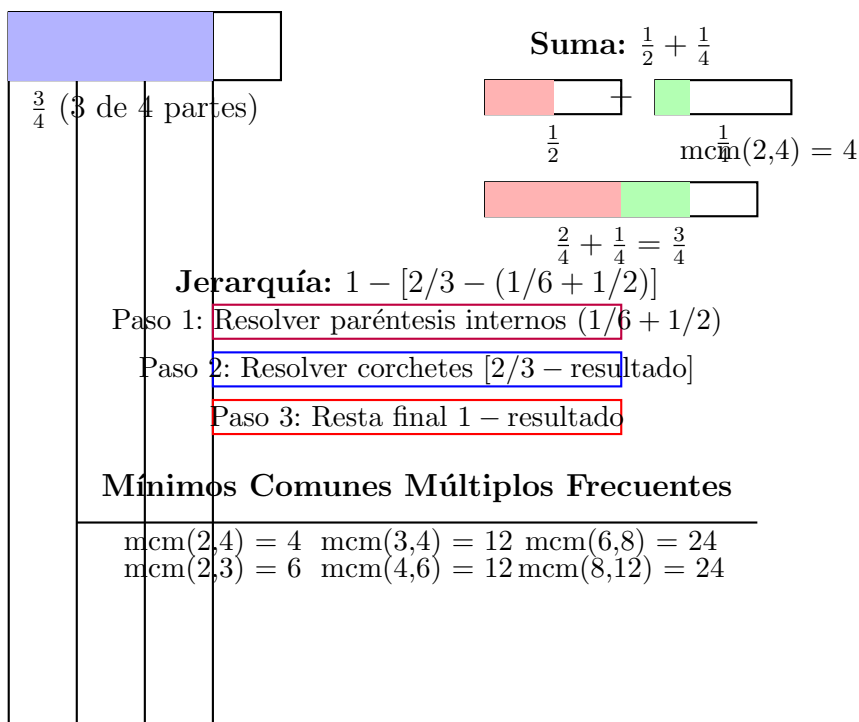
El mcm de dos o más números es el menor número positivo que es múltiplo de todos ellos.

Método para calcularlo:

1. Descomponer cada número en factores primos
2. Tomar cada factor primo elevado a la mayor potencia con que aparece
3. Multiplicar estos factores

6.2. Ilustración Conceptual

Operaciones con Fracciones: Representación Visual



6.3. Apartado a) $\frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{8}\right) - \frac{1}{16}$

Solución

Paso 1: Resolución del paréntesis $\left(\frac{1}{2} - \frac{5}{8}\right)$

Según la jerarquía de operaciones, debemos resolver primero las operaciones dentro de paréntesis.

Calculamos el mcm de 2 y 8:

$$\begin{aligned} 2 &= 2^1 \\ 8 &= 2^3 \\ \text{mcm}(2, 8) &= 2^3 = 8 \end{aligned}$$

Justificación: El mcm se obtiene tomando cada factor primo con la mayor potencia. En este caso, solo tenemos el factor 2, y la mayor potencia es 3.

Convertimos ambas fracciones al denominador común 8:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{1 \times 4}{2 \times 4} = \frac{4}{8} \\ \frac{5}{8} &= \frac{5}{8} \quad (\text{ya tiene denominador } 8) \end{aligned}$$

Justificación: Para convertir $\frac{1}{2}$ a octavos, multiplicamos por $\frac{8/2}{8/2} = \frac{4}{4} = 1$.

Restamos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} - \frac{5}{8} &= \frac{4}{8} - \frac{5}{8} \\ &= \frac{4-5}{8} \\ &= \frac{-1}{8} \\ &= -\frac{1}{8}\end{aligned}$$

Justificación: Cuando las fracciones tienen el mismo denominador, restamos los numeradores: $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$.

Paso 2: Sustitución del resultado del paréntesis

La expresión original se convierte en:

$$\frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{16} = \frac{3}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16}$$

Justificación: Sumar un número negativo es equivalente a restar su valor absoluto.

Paso 3: Cálculo del mcm de 4, 8 y 16

Descomponemos en factores primos:

$$\begin{aligned}4 &= 2^2 \\ 8 &= 2^3 \\ 16 &= 2^4 \\ \text{mcm}(4, 8, 16) &= 2^4 = 16\end{aligned}$$

Justificación: Tomamos la mayor potencia de 2, que es 4.

Paso 4: Conversión de todas las fracciones a denominador 16

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} &= \frac{3 \times 4}{4 \times 4} = \frac{12}{16} \\ \frac{1}{8} &= \frac{1 \times 2}{8 \times 2} = \frac{2}{16} \\ \frac{1}{16} &= \frac{1}{16} \quad (\text{ya tiene denominador 16})\end{aligned}$$

Justificación detallada:

- Para $\frac{3}{4}$: $\frac{16}{4} = 4$, multiplicamos numerador y denominador por 4
- Para $\frac{1}{8}$: $\frac{16}{8} = 2$, multiplicamos numerador y denominador por 2

Paso 5: Operación final

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} &= \frac{12}{16} - \frac{2}{16} - \frac{1}{16} \\ &= \frac{12-2-1}{16} \\ &= \frac{9}{16}\end{aligned}$$

Justificación aritmética:

$$12 - 2 - 1 = 10 - 1 = 9$$

Verificación de que la fracción es irreducible:

Calculamos el mcd(9, 16):

$$\begin{aligned} 9 &= 3^2 \\ 16 &= 2^4 \end{aligned}$$

Como no comparten factores primos, $\text{mcd}(9, 16) = 1$, por lo tanto $\frac{9}{16}$ ya está en su forma más simple.

Verificación decimal:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} &\approx 0,75 - 0,125 - 0,0625 \\ &= 0,5625 \end{aligned}$$

Y nuestro resultado:

$$\frac{9}{16} = 0,5625 \quad \checkmark$$

Respuesta Final - Apartado a)

$$\frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{8} \right) - \frac{1}{16} = \frac{9}{16}$$

6.4. Apartado b) $\frac{5}{6} - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{12}$

Solución

Paso 1: Resolución del paréntesis $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right)$

Calculamos el mcm de 3 y 4:

$$\begin{aligned} 3 &= 3^1 \\ 4 &= 2^2 \\ \text{mcm}(3, 4) &= 2^2 \times 3 = 4 \times 3 = 12 \end{aligned}$$

Justificación: Como 3 y 4 no comparten factores primos (son coprimos), el mcm es su producto.

Convertimos a denominador 12:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &= \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12} \\ \frac{1}{4} &= \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3}{12} \end{aligned}$$

Sumamos:

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} + \frac{1}{4} &= \frac{8}{12} + \frac{3}{12} \\ &= \frac{8+3}{12} \\ &= \frac{11}{12}\end{aligned}$$

Paso 2: Sustitución en la expresión original

$$\frac{5}{6} - \frac{11}{12} + \frac{1}{12}$$

Paso 3: Cálculo del mcm de 6 y 12

$$\begin{aligned}6 &= 2 \times 3 \\ 12 &= 2^2 \times 3 \\ \text{mcm}(6, 12) &= 2^2 \times 3 = 12\end{aligned}$$

Justificación: Tomamos la mayor potencia de cada factor primo: 2^2 y 3^1 .

Paso 4: Conversión a denominador común

$$\begin{aligned}\frac{5}{6} &= \frac{5 \times 2}{6 \times 2} = \frac{10}{12} \\ \frac{11}{12} &= \frac{11}{12} \\ \frac{1}{12} &= \frac{1}{12}\end{aligned}$$

Paso 5: Operación final

$$\begin{aligned}\frac{5}{6} - \frac{11}{12} + \frac{1}{12} &= \frac{10}{12} - \frac{11}{12} + \frac{1}{12} \\ &= \frac{10 - 11 + 1}{12} \\ &= \frac{0}{12} \\ &= 0\end{aligned}$$

Justificación aritmética:

$$10 - 11 + 1 = -1 + 1 = 0$$

Justificación matemática: $\frac{0}{12} = 0$ porque cualquier fracción con numerador cero es igual a cero (siempre que el denominador sea no nulo).

Verificación decimal:

$$\begin{aligned}
\frac{5}{6} - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{12} &\approx 0,8333 - (0,6667 + 0,25) + 0,0833 \\
&\approx 0,8333 - 0,9167 + 0,0833 \\
&\approx -0,0834 + 0,0833 \\
&\approx 0,0000 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Respuesta Final - Apartado b)

$$\frac{5}{6} - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{12} = 0$$

6.5. Apartado c) $1 - \left[\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)\right]$ **Solución****Paso 1: Resolución del paréntesis más interno** $\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)$

Según la jerarquía de operaciones, resolvemos primero los paréntesis más internos. Calculamos el mcm de 6 y 2:

$$\begin{aligned}
6 &= 2 \times 3 \\
2 &= 2^1 \\
\text{mcm}(2, 6) &= 2 \times 3 = 6
\end{aligned}$$

Convertimos a denominador 6:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6} &= \frac{1}{6} \\
\frac{1}{2} &= \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}
\end{aligned}$$

Sumamos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6} + \frac{1}{2} &= \frac{1}{6} + \frac{3}{6} \\
&= \frac{1+3}{6} \\
&= \frac{4}{6}
\end{aligned}$$

Simplificamos la fracción:

$$\frac{4}{6} = \frac{4 \div 2}{6 \div 2} = \frac{2}{3}$$

Justificación: $\text{mcd}(4, 6) = 2$, dividimos numerador y denominador por 2.**Paso 2: Sustitución en los corchetes**

La expresión se convierte en:

$$1 - \left[\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right]$$

Paso 3: Resolución de la operación dentro de corchetes

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} - \frac{2}{3} &= \frac{2-2}{3} \\ &= \frac{0}{3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Justificación: Cualquier número restado de sí mismo es cero (propiedad del elemento inverso aditivo).

Paso 4: Operación final

$$\begin{aligned} 1 - \left[\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \right) \right] &= 1 - 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Justificación: El cero es el elemento neutro de la suma/resta, por lo tanto $1 - 0 = 1$.

Verificación mediante desarrollo completo:

Podemos verificar haciendo todas las operaciones sin simplificar intermedios:

$$\begin{aligned} 1 - \left[\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{6} \right) \right] &= 1 - \left[\frac{2}{3} - \frac{4}{6} \right] \\ &= 1 - \left[\frac{4}{6} - \frac{4}{6} \right] \\ &= 1 - 0 \\ &= 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Verificación decimal:

$$\begin{aligned} 1 - \left[\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \right) \right] &\approx 1 - [0,6667 - (0,1667 + 0,5)] \\ &\approx 1 - [0,6667 - 0,6667] \\ &\approx 1 - 0 \\ &= 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Respuesta Final - Apartado c)

$$1 - \left[\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \right) \right] = 1$$

Observación

Este ejercicio muestra la importancia de respetar la jerarquía de operaciones. Observamos que:

- La suma dentro del paréntesis interno: $\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$
- Resulta ser exactamente igual al primer término de los corchetes: $\frac{2}{3}$
- Por lo tanto, la resta dentro de corchetes da cero: $\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$
- Y finalmente: $1 - 0 = 1$

Esta coincidencia hace que el resultado final sea 1, el mismo valor con el que empezamos.

7. Ejercicio 17: Combinación de Operaciones con Fracciones

Ejercicio 17

Calcula las siguientes expresiones que combinan multiplicación, división y suma/resta de fracciones:

a) $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) - \frac{5}{6}$

b) $\left(\frac{2}{5} - 1\right) \div \frac{3}{10} + \frac{1}{2}$

c) $\frac{5}{2} - \left(\frac{1}{3} \div \frac{2}{9}\right) \cdot \frac{4}{5}$

7.1. Marco Teórico

Fundamentos Teóricos

Propiedad 17.1 (Multiplicación de Fracciones):

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Se multiplican numeradores entre sí y denominadores entre sí.

Propiedad 17.2 (División de Fracciones):

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Dividir entre una fracción es equivalente a multiplicar por su recíproca (inversa multiplicativa).

Definición 17.1 (Fracción Recíproca o Inversa):

La fracción recíproca de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$, siempre que $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

Propiedad: $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = \frac{ab}{ab} = 1$

Recordatorio de Jerarquía:

1. Paréntesis
2. Multiplicaciones y divisiones (de izquierda a derecha, mismo nivel de prioridad)
3. Sumas y restas (de izquierda a derecha)

7.2. Apartado a) $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) - \frac{5}{6}$

Solución

Paso 1: Resolución del paréntesis $\left(\frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right)$

Calculamos $\text{mcm}(2, 4) = 4$.

Convertimos a denominador común:

$$\begin{aligned}\frac{3}{2} &= \frac{3 \times 2}{2 \times 2} = \frac{6}{4} \\ \frac{9}{4} &= \frac{9}{4}\end{aligned}$$

Sumamos:

$$\begin{aligned}\frac{3}{2} + \frac{9}{4} &= \frac{6}{4} + \frac{9}{4} \\ &= \frac{6+9}{4} \\ &= \frac{15}{4}\end{aligned}$$

Paso 2: Multiplicación $\frac{1}{3} \cdot \frac{15}{4}$

Aplicamos la **Propiedad 17.1**:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} \cdot \frac{15}{4} &= \frac{1 \times 15}{3 \times 4} \\ &= \frac{15}{12}\end{aligned}$$

Simplificamos la fracción:

$$\text{mcd}(15, 12) = 3$$

$$\begin{aligned}\frac{15}{12} &= \frac{15 \div 3}{12 \div 3} \\ &= \frac{5}{4}\end{aligned}$$

Justificación del mcd:

$$\begin{aligned}15 &= 3 \times 5 \\ 12 &= 3 \times 4 \\ \text{mcd}(15, 12) &= 3\end{aligned}$$

Paso 3: Resta final $\frac{5}{4} - \frac{5}{6}$

Calculamos $\text{mcm}(4, 6)$:

$$\begin{aligned}4 &= 2^2 \\ 6 &= 2 \times 3 \\ \text{mcm}(4, 6) &= 2^2 \times 3 = 12\end{aligned}$$

Convertimos a denominador 12:

$$\frac{5}{4} = \frac{5 \times 3}{4 \times 3} = \frac{15}{12}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \times 2}{6 \times 2} = \frac{10}{12}$$

Restamos:

$$\frac{5}{4} - \frac{5}{6} = \frac{15}{12} - \frac{10}{12}$$

$$= \frac{15 - 10}{12}$$

$$= \frac{5}{12}$$

Verificamos que es irreducible: $\text{mcd}(5, 12) = 1$

Verificación decimal:

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{9}{4} \right) - \frac{5}{6} \approx 0,3333 \times (1,5 + 2,25) - 0,8333$$

$$\approx 0,3333 \times 3,75 - 0,8333$$

$$\approx 1,2499 - 0,8333$$

$$\approx 0,4166$$

Nuestro resultado: $\frac{5}{12} \approx 0,4167$

Respuesta Final - Apartado a)

$$\boxed{\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{9}{4} \right) - \frac{5}{6} = \frac{5}{12}}$$

7.3. Apartado b) $\left(\frac{2}{5} - 1\right) \div \frac{3}{10} + \frac{1}{2}$

Solución

Paso 1: Resolución del paréntesis $\left(\frac{2}{5} - 1\right)$

Expresamos 1 como fracción con denominador 5:

$$1 = \frac{5}{5}$$

Restamos:

$$\begin{aligned}\frac{2}{5} - 1 &= \frac{2}{5} - \frac{5}{5} \\ &= \frac{2-5}{5} \\ &= \frac{-3}{5} \\ &= -\frac{3}{5}\end{aligned}$$

Paso 2: División $-\frac{3}{5} \div \frac{3}{10}$

Aplicamos la **Propiedad 17.2** (dividir = multiplicar por la recíproca):

La recíproca de $\frac{3}{10}$ es $\frac{10}{3}$.

$$\begin{aligned}-\frac{3}{5} \div \frac{3}{10} &= -\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{3} \\ &= -\frac{3 \times 10}{5 \times 3} \\ &= -\frac{30}{15}\end{aligned}$$

Simplificamos:

$$\begin{aligned}-\frac{30}{15} &= -\frac{30 \div 15}{15 \div 15} \\ &= -\frac{2}{1} \\ &= -2\end{aligned}$$

Justificación: $\text{mcd}(30, 15) = 15$.

Paso 3: Suma final $-2 + \frac{1}{2}$

Expresamos -2 como fracción:

$$-2 = -\frac{4}{2}$$

Sumamos:

$$\begin{aligned}-2 + \frac{1}{2} &= -\frac{4}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{-4+1}{2} \\ &= \frac{-3}{2} \\ &= -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Verificación decimal:

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{5} - 1\right) \div \frac{3}{10} + \frac{1}{2} &\approx (0,4 - 1) \div 0,3 + 0,5 \\ &\approx (-0,6) \div 0,3 + 0,5 \\ &\approx -2 + 0,5 \\ &= -1,5\end{aligned}$$

Nuestro resultado: $-\frac{3}{2} = -1,5$

Respuesta Final - Apartado b)

$$\boxed{\left(\frac{2}{5} - 1\right) \div \frac{3}{10} + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}}$$

7.4. Apartado c) $\frac{5}{2} - \left(\frac{1}{3} \div \frac{2}{9}\right) \cdot \frac{4}{5}$

Solución

Paso 1: Resolución de la división dentro del paréntesis $\frac{1}{3} \div \frac{2}{9}$

Multiplicamos por la recíproca de $\frac{2}{9}$, que es $\frac{9}{2}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} \div \frac{2}{9} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} \\ &= \frac{1 \times 9}{3 \times 2} \\ &= \frac{9}{6}\end{aligned}$$

Simplificamos:

$$\frac{9}{6} = \frac{9 \div 3}{6 \div 3} = \frac{3}{2}$$

Justificación: $\text{mcd}(9, 6) = 3$.

Paso 2: Multiplicación $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5}$

$$\begin{aligned}\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5} &= \frac{3 \times 4}{2 \times 5} \\ &= \frac{12}{10}\end{aligned}$$

Simplificamos:

$$\frac{12}{10} = \frac{12 \div 2}{10 \div 2} = \frac{6}{5}$$

Justificación: $\text{mcd}(12, 10) = 2$.

Paso 3: Resta final $\frac{5}{2} - \frac{6}{5}$

Calculamos mcm(2, 5):

$$\text{mcm}(2, 5) = 2 \times 5 = 10$$

Justificación: 2 y 5 son primos entre sí (coprimos).

Convertimos a denominador 10:

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} &= \frac{5 \times 5}{2 \times 5} = \frac{25}{10} \\ \frac{6}{5} &= \frac{6 \times 2}{5 \times 2} = \frac{12}{10} \end{aligned}$$

Restamos:

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} - \frac{6}{5} &= \frac{25}{10} - \frac{12}{10} \\ &= \frac{25 - 12}{10} \\ &= \frac{13}{10} \end{aligned}$$

Verificamos que es irreducible: $\text{mcd}(13, 10) = 1$

Verificación decimal:

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} - \left(\frac{1}{3} \div \frac{2}{9} \right) \cdot \frac{4}{5} &\approx 2,5 - (0,3333 \div 0,2222) \times 0,8 \\ &\approx 2,5 - 1,5 \times 0,8 \\ &\approx 2,5 - 1,2 \\ &= 1,3 \end{aligned}$$

Nuestro resultado: $\frac{13}{10} = 1,3$

Respuesta Final - Apartado c)

$$\boxed{\frac{5}{2} - \left(\frac{1}{3} \div \frac{2}{9} \right) \cdot \frac{4}{5} = \frac{13}{10}}$$

8. Ejercicio 18: Potencias y Fracciones

Ejercicio 18

Calcula las siguientes expresiones que combinan potencias y fracciones:

a) $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot 8 + \frac{3}{4}$

b) $\frac{2}{3} \div \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3$

c) $\left(2 - \frac{3}{4}\right)^{-1} \cdot \frac{5}{7}$

8.1. Marco Teórico

Fundamentos Teóricos

Propiedad 18.1 (Potencia de una Fracción):

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Propiedad 18.2 (Exponente Negativo):

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{y} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$$

Justificación: El exponente negativo indica la inversa multiplicativa elevada al exponente positivo.

Propiedad 18.3 (Cuadrado de una Fracción):

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

En particular, si la fracción es negativa:

$$\left(-\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{(-a)^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2}$$

El cuadrado de un número negativo es siempre positivo.

8.2. Apartado a) $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot 8 + \frac{3}{4}$

Solución

Paso 1: Resolución del paréntesis $\frac{1}{4} - \frac{1}{2}$

Convertimos a denominador común ($\text{mcm}(4,2) = 4$):

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1-2}{4} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$$

Paso 2: Cálculo de $(-\frac{1}{4})^2$

Aplicamos la **Propiedad 18.3**:

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{(-1)^2}{4^2}$$

$$= \frac{1}{16}$$

Justificación: $(-1)^2 = (-1) \times (-1) = 1$ (el producto de dos números negativos es positivo).

Paso 3: Multiplicación $\frac{1}{16} \cdot 8$

Expresamos 8 como fracción:

$$8 = \frac{8}{1}$$

Multiplicamos:

$$\frac{1}{16} \cdot 8 = \frac{1}{16} \cdot \frac{8}{1}$$

$$= \frac{1 \times 8}{16 \times 1}$$

$$= \frac{8}{16}$$

Simplificamos:

$$\frac{8}{16} = \frac{8 \div 8}{16 \div 8} = \frac{1}{2}$$

Paso 4: Suma final $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$

$\text{mcm}(2,4) = 4$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{2+3}{4}$$

$$= \frac{5}{4}$$

Verificación decimal:

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot 8 + \frac{3}{4} \approx (-0,25)^2 \times 8 + 0,75 = 0,0625 \times 8 + 0,75 = 0,5 + 0,75 = 1,25$$

$$\frac{5}{4} = 1,25 \quad \checkmark$$

Respuesta Final - Apartado a)

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot 8 + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

8.3. Apartado b) $\frac{2}{3} \div \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3$

Solución

Paso 1: Cálculo de $1 - \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{3} &= \frac{3}{3} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{3-1}{3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Paso 2: Cálculo de $\left(\frac{2}{3}\right)^3$

Aplicamos la **Propiedad 18.1**:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\right)^3 &= \frac{2^3}{3^3} \\ &= \frac{8}{27} \end{aligned}$$

Justificación:

- $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$
- $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

Paso 3: División $\frac{2}{3} \div \frac{8}{27}$

Multiplicamos por la recíproca:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \div \frac{8}{27} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{27}{8} \\ &= \frac{2 \times 27}{3 \times 8} \\ &= \frac{54}{24} \end{aligned}$$

Simplificamos ($\text{mcd}(54,24) = 6$):

$$\frac{54}{24} = \frac{54 \div 6}{24 \div 6} = \frac{9}{4}$$

Verificación del mcd:

$$\begin{aligned} 54 &= 2 \times 27 = 2 \times 3^3 \\ 24 &= 8 \times 3 = 2^3 \times 3 \\ \text{mcd}(54, 24) &= 2 \times 3 = 6 \end{aligned}$$

Verificación decimal:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \div \left(\frac{2}{3}\right)^3 &\approx 0,6667 \div 0,2963 \approx 2,25 \\ \frac{9}{4} &= 2,25 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Respuesta Final - Apartado b)

$$\boxed{\frac{2}{3} \div \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{9}{4}}$$

8.4. Apartado c) $\left(2 - \frac{3}{4}\right)^{-1} \cdot \frac{5}{7}$

Solución

Paso 1: Cálculo de $2 - \frac{3}{4}$

$$\begin{aligned} 2 - \frac{3}{4} &= \frac{8}{4} - \frac{3}{4} \\ &= \frac{8-3}{4} \\ &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Paso 2: Cálculo de $\left(\frac{5}{4}\right)^{-1}$

Aplicamos la **Propiedad 18.2**:

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{5}$$

Justificación: El exponente -1 indica la fracción recíproca (inversa multiplicativa).

Verificación: $\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{20}{20} = 1$

Paso 3: Multiplicación $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{7}$

$$\begin{aligned} \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{7} &= \frac{4 \times 5}{5 \times 7} \\ &= \frac{20}{35} \end{aligned}$$

Simplificamos ($\text{mcd}(20,35) = 5$):

$$\frac{20}{35} = \frac{20 \div 5}{35 \div 5} = \frac{4}{7}$$

Verificación del mcd:

$$20 = 4 \times 5 = 2^2 \times 5$$

$$35 = 5 \times 7$$

$$\text{mcd}(20, 35) = 5$$

Verificación decimal:

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{-1} \cdot \frac{5}{7} = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{7} \approx 0,8 \times 0,7143 \approx 0,5714$$

$$\frac{4}{7} \approx 0,5714 \quad \checkmark$$

Respuesta Final - Apartado c)

$$\boxed{\left(2 - \frac{3}{4}\right)^{-1} \cdot \frac{5}{7} = \frac{4}{7}}$$

9. Ejercicio 19: Más Operaciones Combinadas con Fracciones

Ejercicio 19

Calcula las siguientes expresiones:

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} - \frac{1}{6} \div \frac{2}{3}$

b) $\frac{3}{5} \div \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{10} \right) \right]$

c) $\left[\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5} \right) \cdot \frac{5}{11} \right] - \frac{1}{2}$

9.1. Apartado a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} - \frac{1}{6} \div \frac{2}{3}$

Solución

Paso 1: Multiplicación $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} &= \frac{1 \times 4}{2 \times 3} \\ &= \frac{4}{6} \end{aligned}$$

Simplificamos:

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Paso 2: División $\frac{1}{6} \div \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \div \frac{2}{3} &= \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} \\ &= \frac{3}{12} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Paso 3: Resta $\frac{2}{3} - \frac{1}{4}$
mcm(3,4) = 12

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} - \frac{1}{4} &= \frac{8}{12} - \frac{3}{12} \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

Respuesta Final - Apartado a)

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} - \frac{1}{6} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{12}$$

9.2. Apartado b) $\frac{3}{5} \div \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{10} \right) \right]$

Solución

Paso 1: Paréntesis interno $\frac{2}{5} - \frac{1}{10}$

mcm(5,10) = 10

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} - \frac{1}{10} &= \frac{4}{10} - \frac{1}{10} \\ &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

Paso 2: Corchetes $\frac{1}{2} + \frac{3}{10}$

mcm(2,10) = 10

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{3}{10} &= \frac{5}{10} + \frac{3}{10} \\ &= \frac{8}{10} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Paso 3: División $\frac{3}{5} \div \frac{4}{5}$

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} \div \frac{4}{5} &= \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4} \\ &= \frac{15}{20} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Respuesta Final - Apartado b)

$$\frac{3}{5} \div \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{10} \right) \right] = \frac{3}{4}$$

9.3. Apartado c) $\left[\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{5}{11}\right] - \frac{1}{2}$ **Solución**

Paso 1: Suma $\frac{1}{3} + \frac{2}{5}$
 $\text{mcm}(3,5) = 15$

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} + \frac{2}{5} &= \frac{5}{15} + \frac{6}{15} \\ &= \frac{11}{15}\end{aligned}$$

Paso 2: Multiplicación $\frac{11}{15} \cdot \frac{5}{11}$

$$\begin{aligned}\frac{11}{15} \cdot \frac{5}{11} &= \frac{55}{165} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Paso 3: Resta $\frac{1}{3} - \frac{1}{2}$
 $\text{mcm}(3,2) = 6$

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} - \frac{1}{2} &= \frac{2}{6} - \frac{3}{6} \\ &= -\frac{1}{6}\end{aligned}$$

Respuesta Final - Apartado c)

$$\boxed{\left[\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{5}{11}\right] - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}}$$

10. Ejercicio 20: Fracciones con Doble Barra (Fracciones Complejas)

Ejercicio 20

Calcula las siguientes fracciones complejas (fracciones con doble barra):

a) $\frac{1 - \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}}$

b) $2 - \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{8}}$

c) $\frac{\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{6} - \frac{1}{3}} + 1$

10.1. Marco Teórico

Fundamentos Teóricos

Definición 20.1 (Fracción Compleja):

Una fracción compleja es una expresión de la forma:

$$\frac{\text{Fracción}_1}{\text{Fracción}_2}$$

donde el numerador y/o el denominador contienen a su vez fracciones.

Método de Resolución:

Para resolver $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$:

Método 1 (Simplificación directa):

1. Simplificar el numerador a una sola fracción
2. Simplificar el denominador a una sola fracción

3. Dividir: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

Método 2 (Multiplicación por el mcm): Multiplicar numerador y denominador por el mcm de todos los denominadores de las fracciones internas.

10.2. Apartado a) $\frac{1 - \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}}$

Solución

Paso 1: Simplificación del numerador $1 - \frac{1}{3}$

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Paso 2: Simplificación del denominador $\frac{2}{3} + \frac{1}{6}$
 $\text{mcm}(3,6) = 6$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Paso 3: División $\frac{2}{3} \div \frac{5}{6}$

$$\frac{2}{3} \div \frac{5}{6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

Simplificación: $\text{mcd}(12,15) = 3$, entonces $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

Verificación decimal:

$$\frac{1 - \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{2/3}{5/6} \approx \frac{0,6667}{0,8333} \approx 0,8$$

$$\frac{4}{5} = 0,8 \quad \checkmark$$

Respuesta Final - Apartado a)

$$\frac{1 - \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{4}{5}$$

10.3. Apartado b) $2 - \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{8}}$

Solución

Paso 1: Numerador de la fracción compleja $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$

mcm(4,2) = 4

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} + \frac{1}{2} &= \frac{3}{4} + \frac{2}{4} \\ &= \frac{5}{4}\end{aligned}$$

Paso 2: Denominador de la fracción compleja $1 - \frac{1}{8}$

$$\begin{aligned}1 - \frac{1}{8} &= \frac{8}{8} - \frac{1}{8} \\ &= \frac{7}{8}\end{aligned}$$

Paso 3: División $\frac{5}{4} \div \frac{7}{8}$

$$\begin{aligned}\frac{5}{4} \div \frac{7}{8} &= \frac{5}{4} \cdot \frac{8}{7} \\ &= \frac{40}{28} \\ &= \frac{10}{7}\end{aligned}$$

Simplificación: mcd(40,28) = 4.

Paso 4: Resta final $2 - \frac{10}{7}$

$$\begin{aligned}2 - \frac{10}{7} &= \frac{14}{7} - \frac{10}{7} \\ &= \frac{4}{7}\end{aligned}$$

Verificación decimal:

$$2 - \frac{10}{7} \approx 2 - 1,4286 = 0,5714$$

$$\frac{4}{7} \approx 0,5714 \quad \checkmark$$

Respuesta Final - Apartado b)

$$2 - \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{4}{7}$$

10.4. Apartado c) $\frac{\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{6} - \frac{1}{3}} + 1$

Solución

Paso 1: Numerador $\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2}$

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

Paso 2: Denominador $\frac{1}{6} - \frac{1}{3}$

mcm(6,3) = 6

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} - \frac{1}{3} &= \frac{1}{6} - \frac{2}{6} \\ &= \frac{-1}{6} \\ &= -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Paso 3: División $\frac{5}{6} \div \left(-\frac{1}{6}\right)$

$$\begin{aligned} \frac{5}{6} \div \left(-\frac{1}{6}\right) &= \frac{5}{6} \cdot \left(-\frac{6}{1}\right) \\ &= \frac{5 \cdot (-6)}{6 \cdot 1} \\ &= \frac{-30}{6} \\ &= -5 \end{aligned}$$

Paso 4: Suma final $-5 + 1$

$$-5 + 1 = -4$$

Verificación:

$$\frac{5/6}{-1/6} + 1 = -5 + 1 = -4 \quad \checkmark$$

Respuesta Final - Apartado c)

$$\frac{\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{6} - \frac{1}{3}} + 1 = -4$$

Soluciones Completas

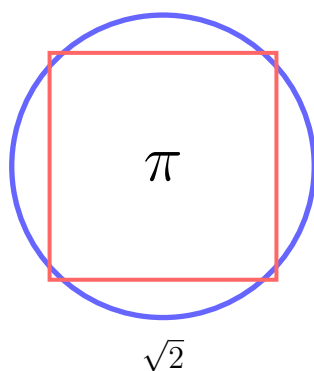
Ejercicios 21-30

Matemáticas — 3º ESO

Repaso Global — Primera Evaluación

Temario:

Aritmética, Potencias, Radicales,
Proporcionalidad y Progresiones



Curso 2025/2026

Elaborado con rigor matemático profesional

Índice general

Introducción	2
1. Soluciones de los Ejercicios 21-30	3
1.1. Ejercicio 21: Clasificación de Números (I)	3
1.2. Ejercicio 22: Clasificación de Números (II)	8
1.3. Ejercicio 23: Fracción Generatriz (Puros y Mixtos)	14
1.4. Ejercicio 24: Operación y Clasificación	21
1.5. Ejercicio 25: Verdadero/Falso y Justificación	27
1.6. Ejercicio 26: Proporcionalidad Inversa (I)	34
1.7. Ejercicio 27: Proporcionalidad Inversa (II)	42
1.8. Ejercicio 28: Proporcionalidad Compuesta (I)	44
1.9. Ejercicio 29: Problemas de Pureza y Concentración	46
1.10. Ejercicio 30: Reparto Proporcional (Directo)	48

Introducción

Este documento contiene las soluciones completas, rigurosas y pedagógicas de los ejercicios 21 al 30 del examen de repaso de Matemáticas de 3^º ESO.

Objetivos del documento

- Resolver todos los ejercicios sin omitir ningún paso.
- Mantener rigor matemático total con definiciones precisas y justificación lógica de cada paso.
- Explicar cada ejercicio de forma exhaustiva y pedagógica.
- Incluir ilustraciones representativas para facilitar la comprensión.
- Proporcionar observaciones sobre errores comunes y advertencias útiles.

Estructura del documento

Cada ejercicio se presenta con:

1. Enunciado completo del problema.
2. Ilustración gráfica representativa.
3. Desarrollo paso a paso de la solución.
4. Definiciones teóricas necesarias.
5. Observaciones y advertencias.
6. Respuesta final claramente identificada.

Capítulo 1

Soluciones de los Ejercicios 21-30

1.1. Ejercicio 21: Clasificación de Números (I)

Enunciado

Clasifica los siguientes números, indicando el conjunto más pequeño al que pertenece ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$):

a) $\frac{15}{3}$

b) -7

c) $0,343443444\dots$

Ilustración conceptual

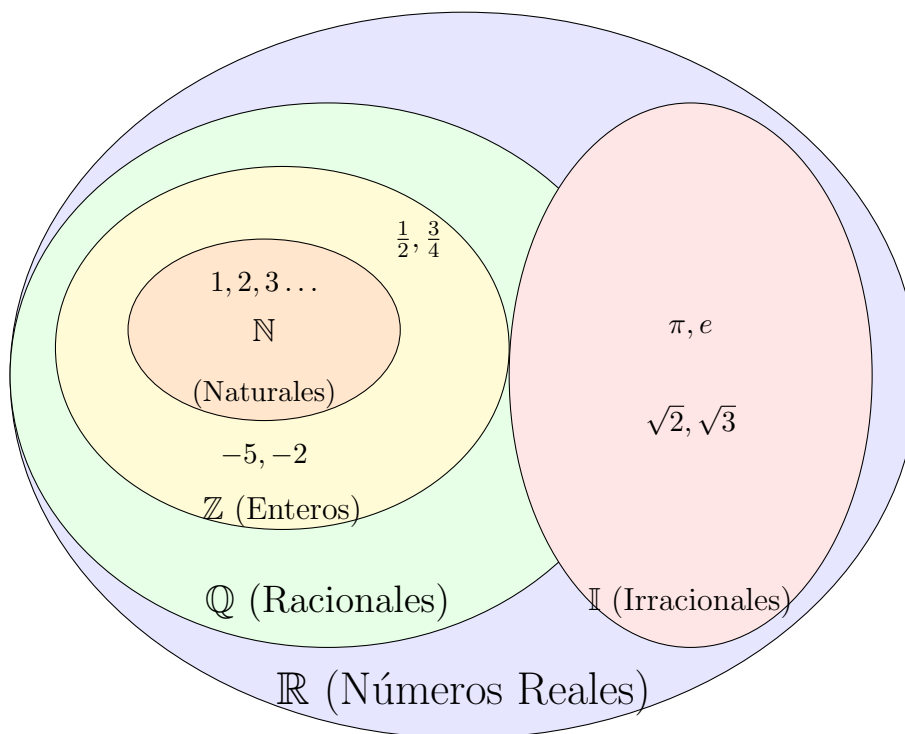


Figura 1.1: Conjuntos numéricos y sus relaciones de inclusión

Marco teórico

Definición

Recordemos las definiciones fundamentales:

- **Números Naturales** ($\mathbb{N}$): $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ (según el convenio usado en 3º ESO, incluimos el cero).
- **Números Enteros** ($\mathbb{Z}$): $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Incluyen los naturales y sus opuestos.
- **Números Racionales** ($\mathbb{Q}$): Son aquellos que pueden expresarse como cociente de dos enteros: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$.
Los números racionales tienen expresión decimal finita o periódica.
- **Números Irracionales** ($\mathbb{I}$): Son números reales que NO pueden expresarse como fracción de enteros. Su expresión decimal es infinita no periódica.
- **Números Reales** ($\mathbb{R}$): $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. Es la unión de racionales e irracionales.

Relación de inclusión: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ y $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$, siendo $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$.

Solución del apartado a)

Solución

Clasificar $\frac{15}{3}$.

Paso 1: Simplificamos la fracción.

$$\frac{15}{3} = 15 \div 3 = 5$$

Paso 2: Analizamos el número obtenido.

El número 5 es un número entero positivo.

Paso 3: Determinamos el conjunto más pequeño.

Debemos verificar las inclusiones:

- ¿Es $5 \in \mathbb{N}$? Sí, porque 5 es un número natural (entero no negativo).
- ¿Es $5 \in \mathbb{Z}$? Sí, porque todo natural es entero.
- ¿Es $5 \in \mathbb{Q}$? Sí, porque todo entero es racional.
- ¿Es $5 \in \mathbb{R}$? Sí, porque todo racional es real.

Como buscamos el conjunto **más pequeño**, la respuesta es $\mathbb{N}$.

Respuesta: $\frac{15}{3} = 5 \in \mathbb{N}$ (Números Naturales)

Observación

Error común: Algunos estudiantes clasifican $\frac{15}{3}$ directamente como racional por tener forma de fracción. Si bien esto es cierto, no se pide el conjunto al que pertenece, sino el **más pequeño**. Siempre debemos simplificar primero y luego clasificar.

Solución del apartado b)

Solución

Clasificar -7 .

Paso 1: Analizamos el número.

El número -7 es un entero negativo.

Paso 2: Verificamos las inclusiones.

- ¿Es $-7 \in \mathbb{N}$? **NO**, porque los números naturales son enteros no negativos $(0, 1, 2, 3, \dots)$ y $-7 < 0$.
- ¿Es $-7 \in \mathbb{Z}$? **SÍ**, porque -7 es un número entero.

- ¿Es $-7 \in \mathbb{Q}$? Sí, porque $-7 = \frac{-7}{1}$, es decir, se puede expresar como cociente de enteros.
- ¿Es $-7 \in \mathbb{R}$? Sí, porque todo racional es real.

Paso 3: Determinamos el conjunto más pequeño.
El conjunto más pequeño que contiene a -7 es $\mathbb{Z}$.

Respuesta: $-7 \in \mathbb{Z}$ (Números Enteros)

Observación

Justificación: Los números negativos nunca pueden ser naturales. El conjunto más pequeño que incluye números negativos es $\mathbb{Z}$ (los enteros).

Nota histórica: En algunos textos antiguos, $\mathbb{N}$ comenzaba en 1, pero en la mayoría de los programas modernos de secundaria se incluye el 0 en los naturales. En cualquier caso, los negativos quedan excluidos de $\mathbb{N}$.

Solución del apartado c)

Solución

Clasificar $0,343443444\dots$

Paso 1: Analizamos la estructura del decimal.

El número dado es $0,343443444\dots$

Observemos el patrón en la parte decimal:

3
 34
 344
 3444
 34444
 :

Paso 2: Determinamos si es periódico.

Un número decimal es periódico si existe un grupo de cifras (el período) que se repite indefinidamente.

En nuestro caso:

- Después del 3, viene 34
- Después del 34, viene 344
- Después del 344, viene 3444
- El patrón es que cada vez se añade un 4 más

NO existe un grupo fijo de cifras que se repita. Cada "bloque" es diferente del anterior.

Paso 3: Concluimos sobre la naturaleza del número.

Como la expresión decimal es:

- Infinita (no termina)
- NO periódica (no tiene un patrón repetitivo fijo)

El número es **irracional**.

Paso 4: Verificamos las inclusiones.

- ¿Es $0,343443444 \dots \in \mathbb{N}$? NO (no es entero).
- ¿Es $0,343443444 \dots \in \mathbb{Z}$? NO (no es entero).
- ¿Es $0,343443444 \dots \in \mathbb{Q}$? NO (su expresión decimal es infinita no periódica).
- ¿Es $0,343443444 \dots \in \mathbb{I}$? SÍ (es irracional).
- ¿Es $0,343443444 \dots \in \mathbb{R}$? SÍ (todo irracional es real).

Paso 5: Determinamos el conjunto más pequeño.

El conjunto más pequeño es $\mathbb{I}$.

Respuesta: $0,343443444 \dots \in \mathbb{I}$ (Números Irracionales)

Observación

Criterio fundamental: Un número decimal es racional si y solo si su expresión decimal es finita o periódica. En caso contrario, es irracional.

Advertencia: No confundir con $0,\overline{34}$ (con barra de período), que SÍ sería racional porque el bloque "34" se repite indefinidamente.

Ejemplos de comparación:

- $0,343434 \dots = 0,\overline{34}$ es **racional** (periódico puro).
- $0,343443444 \dots$ es **irracional** (infinito no periódico).
- $0,3444 \dots = 0,3\overline{4}$ es **racional** (periódico mixto).

1.2. Ejercicio 22: Clasificación de Números (II)

Enunciado

Clasifica los siguientes números, indicando el conjunto más pequeño al que pertenece ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$):

- a) $\sqrt{25}$
- b) π
- c) 0,25

Ilustración conceptual

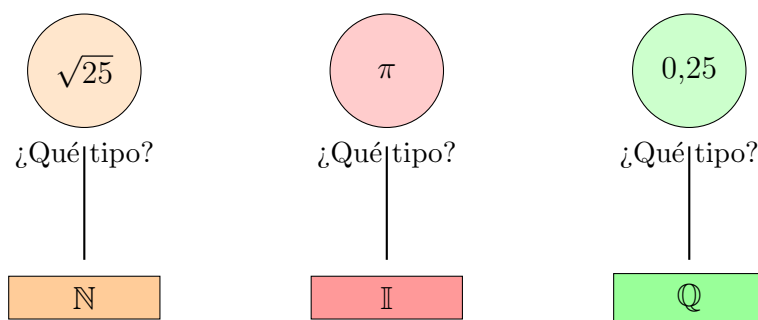


Figura 1.2: Clasificación de diferentes tipos de números

Solución del apartado a)

Solución

Clasificar $\sqrt{25}$.

Paso 1: Simplificamos la raíz cuadrada.

Buscamos un número que elevado al cuadrado dé 25:

$$\sqrt{25} = 5 \quad \text{porque} \quad 5^2 = 25$$

Justificación: Por definición, $\sqrt{a}$ es el número no negativo que elevado al cuadrado da a . Como $5 \geq 0$ y $5^2 = 25$, entonces $\sqrt{25} = 5$.

Paso 2: Clasificamos el número obtenido.

Tenemos que $\sqrt{25} = 5$.

Paso 3: Verificamos las inclusiones.

- ¿Es $5 \in \mathbb{N}$? **SÍ**, porque 5 es un número natural.
- ¿Es $5 \in \mathbb{Z}$? Sí, porque todo natural es entero.
- ¿Es $5 \in \mathbb{Q}$? Sí, porque todo entero es racional.

- ¿Es $5 \in \mathbb{R}$? Sí, porque todo racional es real.

Paso 4: Determinamos el conjunto más pequeño.
El conjunto más pequeño es $\mathbb{N}$.

Respuesta: $\sqrt{25} = 5 \in \mathbb{N}$ (Números Naturales)

Observación

Error común: Pensar que "todas las raíces son irracionales". Esto es FALSO.

- Las raíces de cuadrados perfectos SON racionales (y en muchos casos, naturales).
- Ejemplos: $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{36} = 6$, etc.
- Las raíces de números que NO son cuadrados perfectos SÍ son irracionales.
- Ejemplos irracionales: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, etc.

Criterio: Un número n es cuadrado perfecto si existe un natural k tal que $k^2 = n$.
Los primeros cuadrados perfectos son: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, ...

Solución del apartado b)

Solución

Clasificar π .

Paso 1: Recordamos qué es π .

El número π (pi) es una constante matemática que representa la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro:

$$\pi = \frac{\text{Longitud de la circunferencia}}{\text{Diámetro}} \approx 3,14159265358979 \dots$$

Paso 2: Analizamos su naturaleza.

Teorema fundamental: El número π es **irracional**. Esto fue demostrado por Johann Heinrich Lambert en 1768.

Esto significa que:

- π NO puede expresarse como cociente de dos enteros $\frac{a}{b}$.
- Su expresión decimal es infinita y no periódica.
- Aproximaciones comunes como $\frac{22}{7}$ o 3,14 son solo eso: aproximaciones.

Paso 3: Verificamos las inclusiones.

- ¿Es $\pi \in \mathbb{N}$? NO (no es entero; $3 < \pi < 4$).
- ¿Es $\pi \in \mathbb{Z}$? NO (no es entero).
- ¿Es $\pi \in \mathbb{Q}$? NO (es irracional, demostrado por Lambert).
- ¿Es $\pi \in \mathbb{I}$? **SÍ** (es irracional por definición).
- ¿Es $\pi \in \mathbb{R}$? SÍ (todo irracional es real).

Paso 4: Determinamos el conjunto más pequeño.
El conjunto más pequeño es $\mathbb{I}$.

Respuesta: $\pi \in \mathbb{I}$ (Números Irracionales)

Observación

Nota histórica y matemática:

- π es no solo irracional, sino también **trascendente** (no es raíz de ningún polinomio con coeficientes enteros). Esto fue demostrado por Ferdinand von Lindemann en 1882.
- Valor aproximado: $\pi \approx 3,1415926535897932384626433832795 \dots$
- Aproximaciones históricas:
 - Arquímedes: $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$
 - Fracción común: $\frac{22}{7} \approx 3,142857 \dots$ (error de 0.04 %)
 - Fracción mejor: $\frac{355}{113} \approx 3,1415929 \dots$ (error de 0.000008 %)
- Otros números irracionales famosos: e (número de Euler), $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ϕ (número áureo).

Advertencia: NUNCA escribir $\pi = 3,14$ o $\pi = \frac{22}{7}$. Usar el símbolo de aproximación: $\pi \approx 3,14$.

Solución del apartado c)

Solución

Clasificar 0,25.

Paso 1: Analizamos el tipo de expresión decimal.

El número 0,25 tiene una expresión decimal **finita** (exacta), es decir, tiene un número finito de cifras decimales.

Paso 2: Aplicamos el criterio de racionalidad.

Teorema: Todo número con expresión decimal finita es racional.

Demostración: Podemos expresar 0,25 como fracción.

$$0,25 = \frac{25}{100}$$

Justificación:

- El número 0,25 significa "25 centésimas".
- Por definición de notación decimal: $0,25 = \frac{25}{100}$.

Paso 3: Simplificamos la fracción.

$$\frac{25}{100} = \frac{25 \div 25}{100 \div 25} = \frac{1}{4}$$

Justificación: Dividimos numerador y denominador por su máximo común divisor, que es $\text{mcd}(25, 100) = 25$.

Paso 4: Verificamos las inclusiones.

Tenemos que $0,25 = \frac{1}{4}$.

- ¿Es $\frac{1}{4} \in \mathbb{N}$? NO (no es entero; $0 < \frac{1}{4} < 1$).
- ¿Es $\frac{1}{4} \in \mathbb{Z}$? NO (no es entero).
- ¿Es $\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$? **SÍ**, porque está expresado como cociente de enteros: $\frac{1}{4}$ con $1, 4 \in \mathbb{Z}$ y $4 \neq 0$.
- ¿Es $\frac{1}{4} \in \mathbb{I}$? NO (es racional, no irracional).
- ¿Es $\frac{1}{4} \in \mathbb{R}$? **SÍ** (todo racional es real).

Paso 5: Determinamos el conjunto más pequeño.

El conjunto más pequeño es $\mathbb{Q}$.

Respuesta: $0,25 = \frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$ (Números Racionales)

Observación**Criterio general para decimales finitos:**

Todo número decimal finito puede expresarse como fracción con denominador potencia de 10:

$$\begin{aligned}0,a &= \frac{a}{10} \\0,ab &= \frac{ab}{100} \\0,abc &= \frac{abc}{1000} \\n,abc &= n + \frac{abc}{1000} = \frac{1000n + abc}{1000}\end{aligned}$$

Ejemplos:

- $0,5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$
- $0,75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$
- $3,2 = \frac{32}{10} = \frac{16}{5}$
- $2,125 = \frac{2125}{1000} = \frac{17}{8}$

Conclusión importante: Los decimales finitos SIEMPRE son racionales (nunca irracionales).

1.3. Ejercicio 23: Fracción Generatriz (Puros y Mixtos)

Enunciado

Escribe la fracción generatriz de los siguientes números decimales:

- a) $0,\overline{8}$
- b) $0,\overline{16}$
- c) $2,\overline{4}$

Ilustración conceptual

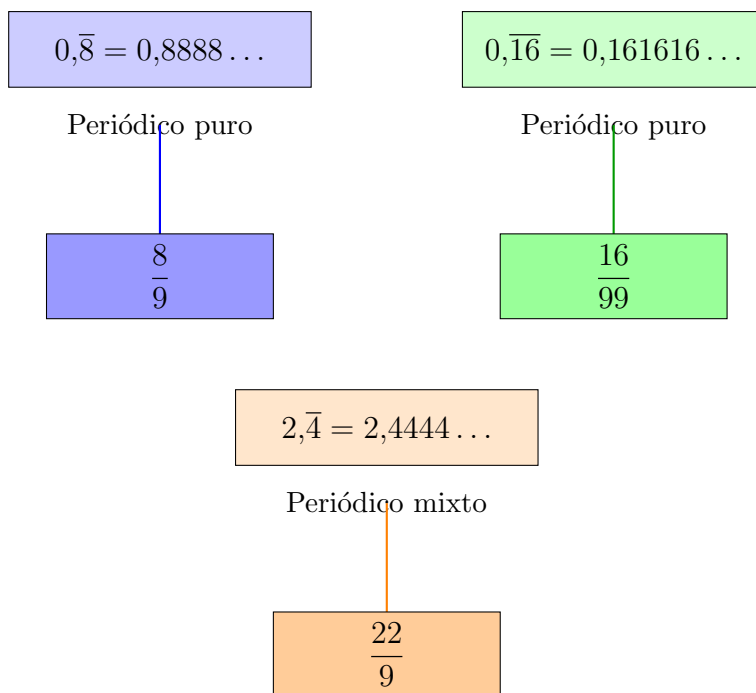


Figura 1.3: Transformación de decimales periódicos a fracciones

Marco teórico

Definición

La **fracción generatriz** de un número decimal periódico es la fracción irreducible que genera dicho decimal.

Existen dos tipos de decimales periódicos:

1. Decimal periódico puro: El período comienza inmediatamente después de la coma decimal.

- Ejemplo: $0,\overline{7} = 0,7777\dots$

- Ejemplo: $0,\overline{25} = 0,252525 \dots$

Fórmula para periódicos puros:

$$0,\overline{a_1 a_2 \dots a_n} = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{\underbrace{99 \dots 9}_{n \text{ nueves}}}$$

2. Decimal periódico mixto: Hay cifras no periódicas (anteperíodo) entre la coma y el período.

- Ejemplo: $0,1\overline{6} = 0,1666 \dots$ (anteperíodo: 1, período: 6)
- Ejemplo: $2,3\overline{45} = 2,345454545 \dots$ (parte entera: 2, anteperíodo: 3, período: 45)

Fórmula para periódicos mixtos:

$$n, b_1 b_2 \dots b_m \overline{a_1 a_2 \dots a_k} = \frac{\text{Número completo sin coma} - \text{Parte no periódica}}{\underbrace{99 \dots 9}_{k \text{ nueves}} \underbrace{00 \dots 0}_{m \text{ ceros}}}$$

Solución del apartado a)

Solución

Hallar la fracción generatriz de $0,\overline{8}$.

Paso 1: Identificamos el tipo de decimal.

El número es $0,\overline{8} = 0,8888 \dots$

- El período es: 8 (una sola cifra)
- No hay anteperíodo (el período empieza justo después de la coma)
- Es un **decimal periódico puro**

Paso 2: Aplicamos la fórmula para periódicos puros.

Para un decimal periódico puro $0,\overline{p}$ donde p tiene n cifras:

$$0,\overline{p} = \frac{p}{\underbrace{99 \dots 9}_{n \text{ nueves}}}$$

En nuestro caso:

- Período: $p = 8$ (1 cifra)
- Denominador: $\underbrace{9}_{1 \text{ nueve}}$

Por tanto:

$$0,\overline{8} = \frac{8}{9}$$

Paso 3: Verificamos que la fracción está simplificada.

Calculamos el máximo común divisor de 8 y 9:

$$\text{mcd}(8, 9) = 1$$

Justificación:

- Divisores de 8: 1, 2, 4, 8
- Divisores de 9: 1, 3, 9
- Divisor común máximo: 1

Como $\text{mcd}(8, 9) = 1$, la fracción $\frac{8}{9}$ ya está en su forma irreducible.

Paso 4: Comprobación (opcional pero recomendable).

Dividimos para verificar:

$$\frac{8}{9} = 8 \div 9 = 0,8888 \dots = 0,\overline{8} \quad \checkmark$$

Respuesta: $0,\overline{8} = \frac{8}{9}$

Observación

Método alternativo (algebraico):

Podemos deducir la fracción usando álgebra:

Sea $x = 0,\overline{8} = 0,8888 \dots$

Multiplicamos por 10 (porque el período tiene 1 cifra):

$$10x = 8,8888 \dots$$

Restamos la ecuación original:

$$10x - x = 8,8888 \dots - 0,8888 \dots$$

$$9x = 8$$

$$x = \frac{8}{9}$$

Este método es muy útil para entender por qué funciona la fórmula.

Solución del apartado b)

Solución

Hallar la fracción generatriz de $0,\overline{16}$.

Paso 1: Identificamos el tipo de decimal.

El número es $0,\overline{16} = 0,161616\dots$

- El período es: 16 (dos cifras)
- No hay anteperíodo
- Es un **decimal periódico puro**

Paso 2: Aplicamos la fórmula para periódicos puros.

Para $0,\overline{p}$ con p de n cifras:

$$0,\overline{p} = \frac{p}{\underbrace{99\dots 9}_{n \text{ nueves}}}$$

En nuestro caso:

- Período: $p = 16$ (2 cifras)
- Denominador: $\underbrace{99}_{2 \text{ nueves}}$

Por tanto:

$$0,\overline{16} = \frac{16}{99}$$

Paso 3: Verificamos si se puede simplificar.

Calculamos $\text{mcd}(16, 99)$:

Método de Euclides:

$$99 = 16 \cdot 6 + 3$$

$$16 = 3 \cdot 5 + 1$$

$$3 = 1 \cdot 3 + 0$$

Por tanto, $\text{mcd}(16, 99) = 1$.

La fracción $\frac{16}{99}$ ya está en su forma irreducible.

Paso 4: Comprobación.

$$\frac{16}{99} = 16 \div 99 = 0,161616\dots = 0,\overline{16} \quad \checkmark$$

Respuesta: $0,\overline{16} = \frac{16}{99}$

Observación**Patrón general para periódicos puros:**

$$\begin{aligned}
 0,\overline{a} &= \frac{a}{9} && (1 \text{ cifra periódica}) \\
 0,\overline{ab} &= \frac{ab}{99} && (2 \text{ cifras periódicas}) \\
 0,\overline{abc} &= \frac{abc}{999} && (3 \text{ cifras periódicas}) \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Ejemplos:

- $0,\overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$
- $0,\overline{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$
- $0,\overline{12} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$
- $0,\overline{123} = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}$

Solución del apartado c)**Solución**Hallar la fracción generatriz de $2,\overline{4}$.**Paso 1:** Identificamos el tipo de decimal.El número es $2,\overline{4} = 2,4444\dots$

- Parte entera: 2
- Parte decimal: $0,\overline{4}$
- El período es: 4 (una cifra)
- No hay anteperíodo (después de la coma empieza el período)
- Es un **entero más un decimal periódico puro**

Paso 2: Descomponemos el número.

$$2,\overline{4} = 2 + 0,\overline{4}$$

Paso 3: Calculamos la fracción generatriz de la parte decimal.

Para $0,\overline{4}$:

$$0,\overline{4} = \frac{4}{9}$$

Paso 4: Sumamos la parte entera.

$$2,\overline{4} = 2 + \frac{4}{9}$$

Expresamos 2 como fracción con denominador 9:

$$2 = \frac{2 \cdot 9}{9} = \frac{18}{9}$$

Paso 5: Sumamos las fracciones.

$$2,\overline{4} = \frac{18}{9} + \frac{4}{9} = \frac{18+4}{9} = \frac{22}{9}$$

Paso 6: Verificamos que está simplificada.

Calculamos $\text{mcd}(22, 9)$:

$$22 = 9 \cdot 2 + 4$$

$$9 = 4 \cdot 2 + 1$$

$$4 = 1 \cdot 4 + 0$$

Por tanto, $\text{mcd}(22, 9) = 1$.

La fracción $\frac{22}{9}$ está en forma irreducible.

Paso 7: Comprobación.

$$\frac{22}{9} = 22 \div 9 = 2,4444 \dots = 2,\overline{4} \quad \checkmark$$

Respuesta: $2,\overline{4} = \frac{22}{9}$

Observación

Método alternativo usando la fórmula general:

Para un número de la forma $n,\overline{p}$ (parte entera n , período p de longitud k):

$$n,\overline{p} = \frac{n \cdot \underbrace{99 \dots 9}_{k \text{ nueves}} + p}{\underbrace{99 \dots 9}_{k \text{ nueves}}}$$

Aplicado a $2,\overline{4}$:

- $n = 2$ (parte entera)
- $p = 4$ (período de 1 cifra)

- $k = 1$ (longitud del período)

$$2,\overline{4} = \frac{2 \cdot 9 + 4}{9} = \frac{18 + 4}{9} = \frac{22}{9}$$

Método algebraico:

Sea $x = 2,\overline{4} = 2,4444 \dots$

Multiplicamos por 10:

$$10x = 24,4444 \dots$$

Restamos:

$$10x - x = 24,4444 \dots - 2,4444 \dots$$

$$9x = 22$$

$$x = \frac{22}{9}$$

Nota importante: Todos estos métodos dan el mismo resultado. Elige el que te resulte más comprensible.

1.4. Ejercicio 24: Operación y Clasificación

Enunciado

Indica a qué conjunto pertenece el resultado de las siguientes operaciones:

- a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$
- b) $(\sqrt{5})^2 - 10$
- c) $\frac{0,6}{0,3}$

Ilustración conceptual

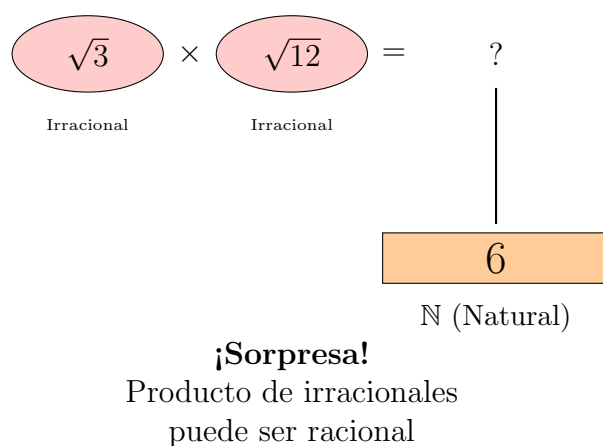


Figura 1.4: Operaciones con radicales pueden cambiar el tipo de número

Marco teórico

Definición**Propiedades fundamentales de raíces cuadradas:**

1. **Producto:** $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ (para $a, b \geq 0$)

2. **Cociente:** $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ (para $a \geq 0, b > 0$)

3. **Potencia:** $(\sqrt{a})^2 = a$ (para $a \geq 0$)

4. **Simplificación:** $\sqrt{a^2 \cdot b} = a\sqrt{b}$ (para $a \geq 0, b \geq 0$)

Advertencia importante: La suma/resta NO se distribuye sobre raíces:

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

Por ejemplo: $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \neq \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$.

Solución del apartado a)**Solución**

Calcular y clasificar el resultado de $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$.

Paso 1: Aplicamos la propiedad del producto de radicales.

Por la propiedad $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$:

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 12}$$

Paso 2: Calculamos el producto bajo la raíz.

$$3 \cdot 12 = 36$$

Por tanto:

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{36}$$

Paso 3: Simplificamos la raíz.

$$\sqrt{36} = 6$$

Justificación: $6^2 = 36$, y como buscamos la raíz cuadrada no negativa, $\sqrt{36} = 6$.

Paso 4: Clasificamos el resultado.

El resultado es 6.

- ¿Es $6 \in \mathbb{N}$? **Sí**, porque 6 es un número natural.
- ¿Es $6 \in \mathbb{Z}$? Sí.
- ¿Es $6 \in \mathbb{Q}$? Sí.
- ¿Es $6 \in \mathbb{R}$? Sí.

El conjunto más pequeño es $\mathbb{N}$.

Respuesta: $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = 6 \in \mathbb{N}$ (Números Naturales)

Observación

Reflexión importante:

Aunque $\sqrt{3}$ y $\sqrt{12}$ son ambos **números irracionales**, su producto es 6, que es un **número natural**.

Esto demuestra que:

- El producto de dos números irracionales NO es necesariamente irracional.
- Contraejemplo: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ (racional).
- Otro ejemplo: $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = 6$ (natural).

Regla general: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ será racional (y posiblemente natural) si $a \cdot b$ es un cuadrado perfecto.

Ejemplos:

- $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4 \in \mathbb{N}$
- $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{100} = 10 \in \mathbb{N}$
- $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6} \in \mathbb{I}$ (porque 6 no es cuadrado perfecto)

Solución del apartado b)

Solución

Calcular y clasificar el resultado de $(\sqrt{5})^2 - 10$.

Paso 1: Simplificamos $(\sqrt{5})^2$.

Por la propiedad $(\sqrt{a})^2 = a$:

$$(\sqrt{5})^2 = 5$$

Justificación: Por definición, $\sqrt{5}$ es el número no negativo que elevado al cuadrado da 5. Por tanto, $(\sqrt{5})^2 = 5$.

Paso 2: Sustituimos en la expresión.

$$(\sqrt{5})^2 - 10 = 5 - 10$$

Paso 3: Realizamos la resta.

$$5 - 10 = -5$$

Paso 4: Clasificamos el resultado.

El resultado es -5 .

- ¿Es $-5 \in \mathbb{N}$? NO (es negativo).
- ¿Es $-5 \in \mathbb{Z}$? **SÍ**, porque -5 es un número entero.
- ¿Es $-5 \in \mathbb{Q}$? Sí, porque $-5 = \frac{-5}{1}$.
- ¿Es $-5 \in \mathbb{R}$? Sí.

El conjunto más pequeño es $\mathbb{Z}$.

Respuesta: $(\sqrt{5})^2 - 10 = -5 \in \mathbb{Z}$ (Números Enteros)

Observación

Propiedad clave: $(\sqrt{a})^2 = a$ para cualquier $a \geq 0$.

Esta propiedad elimina la raíz cuadrada, convirtiendo un número irracional en racional (o en este caso, natural).

Ejemplos:

- $(\sqrt{2})^2 = 2$
- $(\sqrt{7})^2 = 7$
- $(\sqrt{100})^2 = 100$
- $(2\sqrt{3})^2 = 4 \cdot 3 = 12$

Advertencia: No confundir con $\sqrt{a^2} = |a|$.

- $(\sqrt{5})^2 = 5$ (primero raíz, luego cuadrado)
- $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$ (primero cuadrado, luego raíz)
- $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = |-5|$ (valor absoluto)

Solución del apartado c)

Solución

Calcular y clasificar el resultado de $\frac{0,6}{0,3}$.

Paso 1: Realizamos la división directamente.

$$\frac{0,6}{0,3} = 0,6 \div 0,3$$

Método 1 (División directa):

$$0,6 \div 0,3 = \frac{6}{10} \div \frac{3}{10} = \frac{6}{10} \cdot \frac{10}{3} = \frac{6 \cdot 10}{10 \cdot 3} = \frac{60}{30} = 2$$

Método 2 (Simplificación previa):

Multiplicamos numerador y denominador por 10 para eliminar decimales:

$$\frac{0,6}{0,3} = \frac{0,6 \cdot 10}{0,3 \cdot 10} = \frac{6}{3} = 2$$

Método 3 (División aritmética):

$$\frac{0,6}{0,3} = \frac{6 \text{ décimas}}{3 \text{ décimas}} = 2$$

Razonamiento: "Si 3 décimas caben 2 veces en 6 décimas, entonces $0,6 \div 0,3 = 2$ ".

Paso 2: Clasificamos el resultado.

El resultado es 2.

- ¿Es $2 \in \mathbb{N}$? **SÍ**, porque 2 es un número natural.
- ¿Es $2 \in \mathbb{Z}$? Sí.
- ¿Es $2 \in \mathbb{Q}$? Sí.
- ¿Es $2 \in \mathbb{R}$? Sí.

El conjunto más pequeño es $\mathbb{N}$.

Respuesta: $\frac{0,6}{0,3} = 2 \in \mathbb{N}$ (Números Naturales)

Observación**Técnica general para dividir decimales:**

Para dividir dos números decimales, podemos:

Opción 1: Multiplicar numerador y denominador por la misma potencia de 10 para convertir ambos en enteros.

$$\begin{aligned} \frac{0,6}{0,3} &= \frac{0,6 \cdot 10}{0,3 \cdot 10} = \frac{6}{3} = 2 \\ \frac{1,5}{0,5} &= \frac{1,5 \cdot 10}{0,5 \cdot 10} = \frac{15}{5} = 3 \\ \frac{0,12}{0,04} &= \frac{0,12 \cdot 100}{0,04 \cdot 100} = \frac{12}{4} = 3 \end{aligned}$$

Opción 2: Convertir cada decimal a fracción y dividir.

$$\frac{0,6}{0,3} = \frac{\frac{6}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{6}{10} \cdot \frac{10}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Regla práctica: Si el número de cifras decimales es el mismo en numerador y denominador, se pueden cancelar” directamente:

$$\frac{0,6}{0,3} = \frac{6}{3} = 2$$

Advertencia: Esto solo funciona si ambos tienen el mismo número de decimales.

1.5. Ejercicio 25: Verdadero/Falso y Justificación

Enunciado

- a) ¿El producto de dos números irracionales es siempre irracional? (Justifica con un ejemplo).
- b) Escribe la fracción generatriz de $1,\overline{02}$.
- c) Clasifica $\frac{1}{3}$, indicando el conjunto más pequeño al que pertenece.

Ilustración conceptual

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \textcircled{\sqrt{2}} \\ \mathbb{I} \end{array} & \times & \begin{array}{c} \textcircled{\sqrt{2}} \\ \mathbb{I} \end{array} = \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \mathbb{N} \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} \textcircled{\sqrt{2}} \\ \mathbb{I} \end{array} & \times & \begin{array}{c} \textcircled{\sqrt{3}} \\ \mathbb{I} \end{array} = \begin{array}{c} \boxed{\sqrt{6}} \\ \mathbb{I} \end{array}
 \end{array}$$

Conclusión:
NO siempre es irracional

Figura 1.5: Contraejemplos sobre productos de irracionales

Solución del apartado a)

Solución

¿El producto de dos números irracionales es siempre irracional?

Paso 1: Analizamos el enunciado.

La pregunta es si la afirmación:

$$\text{“Si } a \in \mathbb{I} \text{ y } b \in \mathbb{I}, \text{ entonces } a \cdot b \in \mathbb{I}”$$

es verdadera.

Paso 2: Buscamos un contraejemplo.

Para demostrar que una afirmación universal es FALSA, basta con encontrar UN SOLO contraejemplo.

Contraejemplo 1:

Sean $a = \sqrt{2}$ y $b = \sqrt{2}$.

- $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$ (es irracional, demostrado por reducción al absurdo).

- $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$ (es irracional).
- Producto: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 = 2$
- $2 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ (es racional, NO irracional).

Por tanto, existen dos números irracionales cuyo producto es racional.

Contraejemplo 2:

Sean $a = \sqrt{3}$ y $b = \sqrt{12}$.

- $\sqrt{3} \in \mathbb{I}$ (irracional).
- $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3} \in \mathbb{I}$ (irracional).
- Producto: $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6 \in \mathbb{N}$ (natural).

Paso 3: Damos un ejemplo donde SÍ es irracional.

Para mostrar que a veces el producto SÍ es irracional:

Sean $a = \sqrt{2}$ y $b = \sqrt{3}$.

- $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$ (irracional).
- $\sqrt{3} \in \mathbb{I}$ (irracional).
- Producto: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6} \in \mathbb{I}$ (irracional, porque 6 no es cuadrado perfecto).

Paso 4: Conclusión.

La afirmación es **FALSA**.

El producto de dos números irracionales:

- **A veces** es irracional (ejemplo: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$).
- **A veces** es racional (ejemplo: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$).

Respuesta: FALSO. El producto de dos números irracionales NO es siempre irracional.

Contraejemplo: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$, donde $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$ pero $2 \in \mathbb{Q}$.

Observación

Propiedades de los conjuntos numéricos bajo las operaciones:

1. $\mathbb{N}$ es **cerrado** bajo suma y producto (pero NO bajo resta ni división).
2. $\mathbb{Z}$ es **cerrado** bajo suma, resta y producto (pero NO bajo división).
3. $\mathbb{Q}$ es **cerrado** bajo suma, resta, producto y división (excepto división por cero).

4. **ℚ NO es cerrado** bajo ninguna operación aritmética.

- Suma: $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \in \mathbb{Q}$ (no irracional).
- Resta: $\sqrt{3} - \sqrt{3} = 0 \in \mathbb{Q}$ (no irracional).
- Producto: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$ (no irracional).
- División: $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 \in \mathbb{Q}$ (no irracional).

Reflexión importante: Los irracionales forman un conjunto "inestable" bajo operaciones. Combinar dos irracionales puede dar un racional.

Otros ejemplos interesantes:

- $\pi \cdot \frac{1}{\pi} = 1 \in \mathbb{Q}$ (ambos factores irracionales, producto racional).
- $\sqrt{2} + (3 - \sqrt{2}) = 3 \in \mathbb{N}$ (suma de irracionales puede ser natural).
- $\sqrt{7} \cdot \sqrt{7} = 7 \in \mathbb{N}$ (producto de irracionales puede ser natural).

Solución del apartado b)

Solución

Escribir la fracción generatriz de $1,\overline{02}$.

Paso 1: Identificamos el tipo de decimal.

El número es $1,\overline{02} = 1,020202\dots$

- Parte entera: 1
- Parte decimal: $0,\overline{02}$
- Período: 02 (dos cifras)
- No hay anteperíodo (el período empieza justo después de la coma)
- Es un **entero más decimal periódico puro**

Paso 2: Descomponemos el número.

$$1,\overline{02} = 1 + 0,\overline{02}$$

Paso 3: Calculamos la fracción generatriz de $0,\overline{02}$.

Para un decimal periódico puro de la forma $0,\overline{p}$ con período de k cifras:

$$0,\overline{p} = \frac{p}{\underbrace{99\dots 9}_{k \text{ nueves}}}$$

En nuestro caso:

- Período: $p = 02 = 2$
- Longitud del período: $k = 2$ cifras
- Denominador: $\underbrace{99}_{2 \text{ nueves}}$

Por tanto:

$$0,\overline{02} = \frac{2}{99}$$

Paso 4: Sumamos la parte entera.

$$1,\overline{02} = 1 + \frac{2}{99}$$

Expresamos 1 con denominador 99:

$$1 = \frac{99}{99}$$

Paso 5: Sumamos las fracciones.

$$1,\overline{02} = \frac{99}{99} + \frac{2}{99} = \frac{99 + 2}{99} = \frac{101}{99}$$

Paso 6: Verificamos que está simplificada.

Calculamos $\text{mcd}(101, 99)$.

Método de Euclides:

$$101 = 99 \cdot 1 + 2$$

$$99 = 2 \cdot 49 + 1$$

$$2 = 1 \cdot 2 + 0$$

Por tanto, $\text{mcd}(101, 99) = 1$.

La fracción $\frac{101}{99}$ está en forma irreducible.

Paso 7: Comprobación.

Dividimos:

$$\frac{101}{99} = 101 \div 99 = 1,020202 \dots = 1,\overline{02} \quad \checkmark$$

Respuesta: $1,\overline{02} = \frac{101}{99}$

Observación

Método alternativo usando fórmula general:

Para un número $n,\overline{p}$ (entero n , período p de longitud k):

$$n,\overline{p} = \frac{n \cdot \underbrace{99 \dots 9}_{k \text{ nueves}} + p}{\underbrace{99 \dots 9}_{k \text{ nueves}}}$$

Aplicado a $1,\overline{02}$:

- $n = 1$
- $p = 02 = 2$
- $k = 2$

$$1,\overline{02} = \frac{1 \cdot 99 + 2}{99} = \frac{99 + 2}{99} = \frac{101}{99}$$

Método algebraico:

Sea $x = 1,\overline{02} = 1,020202\dots$

Como el período tiene 2 cifras, multiplicamos por $10^2 = 100$:

$$100x = 102,020202\dots$$

Restamos:

$$100x - x = 102,020202\dots - 1,020202\dots$$

$$99x = 101$$

$$x = \frac{101}{99}$$

Advertencia sobre la notación:

$1,\overline{02}$ significa que se repite "02", es decir: $1,020202\dots$

NO confundir con:

- $1,\overline{2}$ que sería $1,222\dots = \frac{11}{9}$
- $1,0\overline{2}$ que sería $1,0222\dots$ (periódico mixto)

Solución del apartado c)

Solución

Clasificar $\frac{1}{3}$, indicando el conjunto más pequeño al que pertenece.

Paso 1: Analizamos el número.

El número $\frac{1}{3}$ es una fracción con:

- Numerador: $1 \in \mathbb{Z}$

- Denominador: $3 \in \mathbb{Z}$, $3 \neq 0$

Paso 2: Verificamos si es entero.

Para que una fracción $\frac{a}{b}$ sea entera, es necesario que b divida a a , es decir, que a sea múltiplo de b .

¿Es 1 múltiplo de 3? NO, porque $1 < 3$.

Alternativamente, dividimos:

$$\frac{1}{3} = 1 \div 3 = 0,333 \dots$$

Como $0 < \frac{1}{3} < 1$, no es un número entero.

Paso 3: Verificamos las inclusiones.

- ¿Es $\frac{1}{3} \in \mathbb{N}$? NO (no es entero).
- ¿Es $\frac{1}{3} \in \mathbb{Z}$? NO (no es entero).
- ¿Es $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$? **SÍ**, porque está expresado como cociente de dos enteros: $\frac{1}{3}$ con $1, 3 \in \mathbb{Z}$ y $3 \neq 0$.
- ¿Es $\frac{1}{3} \in \mathbb{I}$? NO (es racional, no irracional).
- ¿Es $\frac{1}{3} \in \mathbb{R}$? **SÍ** (todo racional es real).

Paso 4: Determinamos el conjunto más pequeño.

El conjunto más pequeño que contiene a $\frac{1}{3}$ es $\mathbb{Q}$ (los números racionales).

Paso 5: Verificación adicional.

La expresión decimal de $\frac{1}{3}$ es:

$$\frac{1}{3} = 0,333 \dots = 0,\overline{3}$$

Es un decimal periódico, lo que confirma que es racional.

Respuesta: $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ (Números Racionales)

Observación

Criterio para clasificar fracciones:

Dada una fracción $\frac{a}{b}$ en forma irreducible (con $\text{mcd}(a, b) = 1$):

1. Si $b = 1$, entonces $\frac{a}{b} = a$ es entero.
 - Si además $a \geq 0$, es natural: $\frac{a}{1} \in \mathbb{N}$.
 - Si $a < 0$, es entero no natural: $\frac{a}{1} \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.
2. Si $b \neq 1$, entonces $\frac{a}{b}$ NO es entero, y el conjunto más pequeño es $\mathbb{Q}$.

Ejemplos:

- $\frac{6}{2} = 3 \in \mathbb{N}$ (después de simplificar: $\frac{3}{1}$).
- $\frac{-10}{5} = -2 \in \mathbb{Z}$ (después de simplificar: $\frac{-2}{1}$).
- $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ (irreducible con $b = 3 \neq 1$).
- $\frac{5}{7} \in \mathbb{Q}$ (irreducible con $b = 7 \neq 1$).

Nota sobre expresión decimal:

Las fracciones pueden tener:

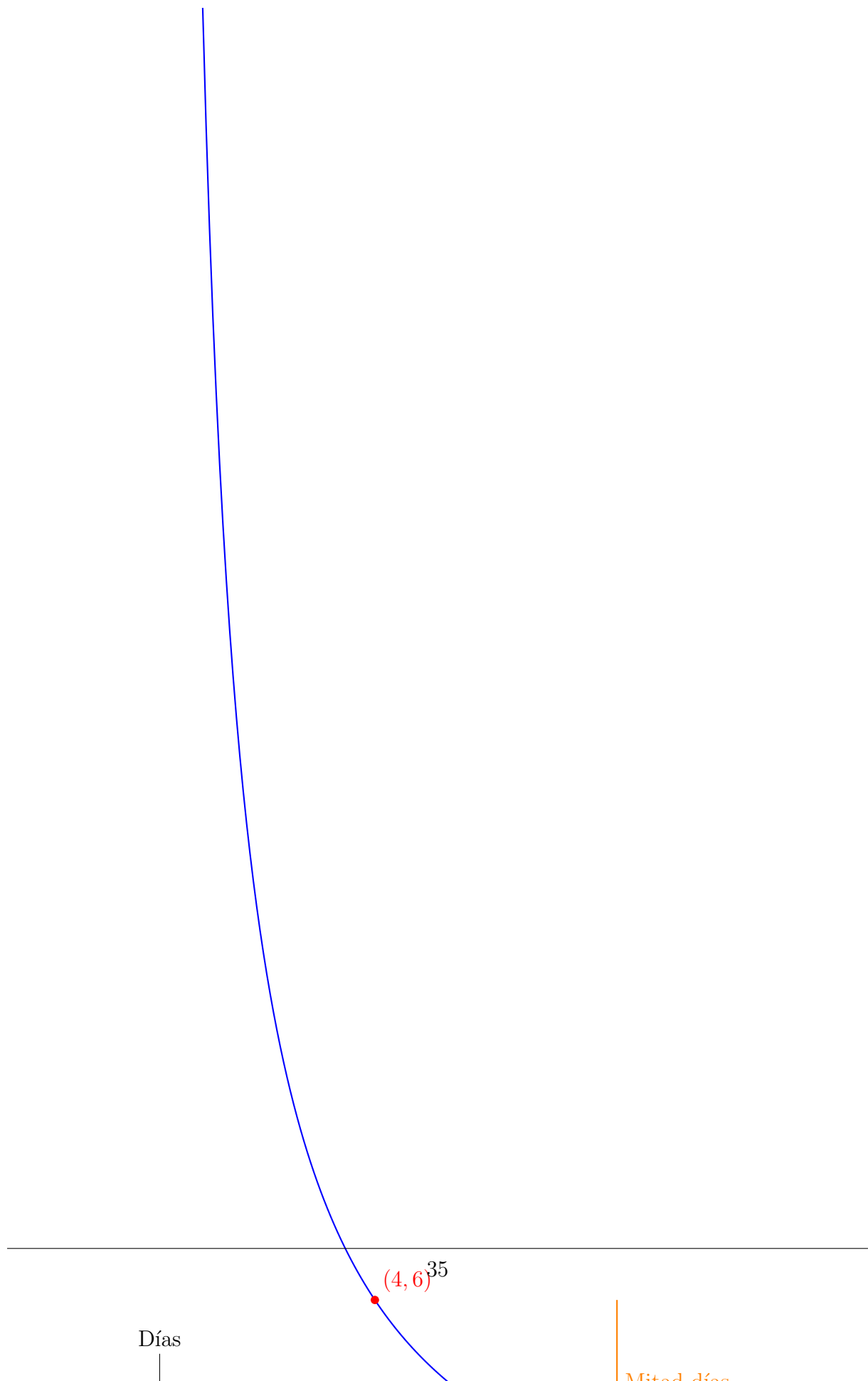
- Expresión decimal finita: si el denominador (en forma irreducible) solo tiene factores 2 y/o 5.
 - Ejemplo: $\frac{1}{2} = 0,5$, $\frac{3}{4} = 0,75$, $\frac{7}{20} = 0,35$
- Expresión decimal periódica: si el denominador tiene factores primos distintos de 2 y 5.
 - Ejemplo: $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$, $\frac{2}{7} = 0,\overline{285714}$, $\frac{5}{6} = 0,8\overline{3}$

1.6. Ejercicio 26: Proporcionalidad Inversa (I)

Enunciado

- a) Si 4 obreros tardan 6 días en hacer una zanja, ¿cuánto tardarán 8 obreros en hacer la misma zanja?
- b) Un grupo de 5 personas tiene comida para 12 días. Si se unen 3 personas más, ¿para cuántos días les durará la comida?
- c) La velocidad de un coche es de 90 km/h y tarda 2 horas en un trayecto. Si tarda 3 horas en el mismo trayecto, ¿cuál fue su velocidad?

Ilustración conceptual



Marco teórico

Definición

Dos magnitudes A y B son **inversamente proporcionales** si su producto es constante:

$$A \cdot B = k \quad (\text{constante de proporcionalidad})$$

Esto significa que:

- Si A aumenta, B disminuye proporcionalmente.
- Si A disminuye, B aumenta proporcionalmente.
- La relación es: $A_1 \cdot B_1 = A_2 \cdot B_2$

Ejemplos típicos:

- Número de obreros y tiempo de trabajo (más obreros $\Rightarrow$ menos tiempo).
- Velocidad y tiempo para recorrer una distancia fija (más velocidad $\Rightarrow$ menos tiempo).
- Número de personas y duración de recursos (más personas $\Rightarrow$ menos duración).

Fórmula práctica:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_2}{B_1} \quad (\text{razón inversa})$$

Observa que el orden de los subíndices se invierte en el segundo cociente.

Solución del apartado a)

Solución

Si 4 obreros tardan 6 días en hacer una zanja, ¿cuánto tardarán 8 obreros?

Paso 1: Identificamos las magnitudes y su relación.

- Magnitud 1: Número de obreros
- Magnitud 2: Tiempo (días)
- Relación: **Inversamente proporcionales**

Justificación: A más obreros trabajando en la misma obra, menos tiempo se necesita. El producto (obrero $\times$ tiempo) representa la cantidad total de "trabajo" necesario, que es constante.

Paso 2: Planteamos los datos.

- Situación 1: 4 obreros tardan 6 días
- Situación 2: 8 obreros tardan x días (incógnita)

Paso 3: Aplicamos la propiedad de proporcionalidad inversa. Como las magnitudes son inversamente proporcionales:

$$\text{obreros}_1 \times \text{días}_1 = \text{obreros}_2 \times \text{días}_2$$

Sustituyendo:

$$4 \times 6 = 8 \times x$$

Paso 4: Resolvemos la ecuación.

$$24 = 8x$$

Dividimos ambos lados entre 8:

$$x = \frac{24}{8} = 3$$

Paso 5: Verificación lógica.

- Al **duplicar** el número de obreros (de 4 a 8), el tiempo se **reduce a la mitad** (de 6 a 3 días).
- Comprobación: $4 \times 6 = 24$ y $8 \times 3 = 24$ ✓

Esto tiene sentido: con el doble de trabajadores, la obra se terminará en la mitad de tiempo.

Respuesta: 8 obreros tardarán **3 días**.

Observación

Método alternativo con regla de tres inversa:

Obreros	Días
4	6
8	x

Como son inversamente proporcionales, planteamos la proporción **inversa**:

$$\frac{4}{8} = \frac{x}{6}$$

Observa que el segundo cociente está invertido respecto a la directa.

Resolviendo:

$$4 \cdot 6 = 8 \cdot x$$

$$24 = 8x$$

$$x = 3$$

Regla práctica: En proporcionalidad inversa, "más implica menos" viceversa.

Advertencia común: NO aplicar regla de tres directa. Si lo hacemos por error:

$$\frac{4}{8} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = 12 \quad (\text{INCORRECTO})$$

Esto daría 12 días, lo cual no tiene sentido (con más obreros no puede tardar más).

Solución del apartado b)

Solución

Un grupo de 5 personas tiene comida para 12 días. Si se unen 3 personas más, ¿para cuántos días durará la comida?

Paso 1: Identificamos las magnitudes.

- Magnitud 1: Número de personas
- Magnitud 2: Duración de la comida (días)
- Relación: **Inversamente proporcionales**

Justificación: La cantidad total de comida es fija. Si hay más personas, se consume más rápido, por lo que durará menos días.

Paso 2: Planteamos los datos.

- Situación inicial: 5 personas $\Rightarrow$ 12 días
- Se unen 3 personas más: $5 + 3 = 8$ personas
- Situación final: 8 personas $\Rightarrow x$ días

Paso 3: Aplicamos la proporcionalidad inversa.

$$\text{personas}_1 \times \text{días}_1 = \text{personas}_2 \times \text{días}_2$$

$$5 \times 12 = 8 \times x$$

Paso 4: Resolvemos.

$$60 = 8x$$

$$x = \frac{60}{8} = \frac{15}{2} = 7,5$$

Paso 5: Interpretamos el resultado.

$$x = 7,5 \text{ días} = 7 \text{ días y medio}$$

O también:

$$7,5 \text{ días} = 7 \text{ días} + 0,5 \text{ días} = 7 \text{ días} + 12 \text{ horas}$$

Paso 6: Verificación.

- Situación inicial: $5 \times 12 = 60$ "persona-días" de comida.
- Situación final: $8 \times 7,5 = 60$ "persona-días" de comida. ✓

El producto se mantiene constante, confirmando la proporcionalidad inversa.

Respuesta: La comida durará **7,5 días** (7 días y medio).

Observación

Concepto de "persona-día":

El producto "personas $\times$ días" representa la cantidad total de recursos disponibles, medida en "persona-días".

En este problema:

- Comida total = $5 \times 12 = 60$ persona-días.
- Esto significa que hay suficiente comida para alimentar a 1 persona durante 60 días, o a 5 personas durante 12 días, o a 60 personas durante 1 día, etc.

Interpretación física:

$$\text{personas} \times \text{días} = \text{cantidad total de comida (fija)}$$

Si aumentamos las personas, debemos disminuir los días para mantener el producto constante.

Casos extremos:

- 1 persona: la comida duraría $60 \div 1 = 60$ días.
- 10 personas: la comida duraría $60 \div 10 = 6$ días.
- 60 personas: la comida duraría $60 \div 60 = 1$ día.

Solución del apartado c)

Solución

Un coche va a 90 km/h y tarda 2 horas en un trayecto. Si tarda 3 horas en el mismo trayecto, ¿cuál fue su velocidad?

Paso 1: Identificamos las magnitudes.

- Magnitud 1: Velocidad (km/h)
- Magnitud 2: Tiempo (horas)
- Magnitud fija: Distancia del trayecto (km)
- Relación: **Inversamente proporcionales**

Justificación: Para una distancia fija, si aumentamos la velocidad, tardamos menos tiempo. La relación fundamental es:

$$\text{velocidad} \times \text{tiempo} = \text{distancia (constante)}$$

Paso 2: Calculamos la distancia del trayecto.

Con los datos del primer viaje:

$$\text{distancia} = \text{velocidad} \times \text{tiempo} = 90 \times 2 = 180 \text{ km}$$

Paso 3: Planteamos los datos.

- Viaje 1: velocidad = 90 km/h, tiempo = 2 h, distancia = 180 km
- Viaje 2: velocidad = v (incógnita), tiempo = 3 h, distancia = 180 km (la misma)

Paso 4: Aplicamos la proporcionalidad inversa.

$$\text{velocidad}_1 \times \text{tiempo}_1 = \text{velocidad}_2 \times \text{tiempo}_2$$

$$90 \times 2 = v \times 3$$

Paso 5: Resolvemos.

$$180 = 3v$$

$$v = \frac{180}{3} = 60 \text{ km/h}$$

Paso 6: Verificación.

- Viaje 1: distancia = $90 \times 2 = 180 \text{ km}$. ✓
- Viaje 2: distancia = $60 \times 3 = 180 \text{ km}$. ✓

Ambos viajes recorren la misma distancia, confirmando la solución.

Paso 7: Comprobación lógica.

Al **aumentar el tiempo** de 2 h a 3 h (factor $\frac{3}{2} = 1,5$), la velocidad **disminuye** de 90 km/h a 60 km/h (factor $\frac{2}{3} \approx 0,67$).

Los factores son inversos: $\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = 1$ ✓

Respuesta: La velocidad fue de 60 km/h .

Observación**Fórmula fundamental del movimiento uniforme:**

distancia = velocidad $\times$ tiempo

$$d = v \cdot t$$

De aquí se deduce:

$$v = \frac{d}{t} \quad \text{y} \quad t = \frac{d}{v}$$

Para distancia fija $d = k$:

$$v \cdot t = k \quad (\text{proporcionalidad inversa})$$

Interpretación gráfica:

Si representamos v frente a t para $d = 180$ km:

- Es una hipérbola: $v = \frac{180}{t}$
- Puntos de nuestra solución: $(t = 2, v = 90)$ y $(t = 3, v = 60)$

Relación con la regla de tres inversa:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_2}{t_1} \quad (\text{razón inversa})$$

$$\frac{90}{v} = \frac{3}{2}$$

$$v = \frac{90 \cdot 2}{3} = 60 \text{ km/h}$$

Casos prácticos:

- A 180 km/h, tardaría: $t = \frac{180}{180} = 1$ h.
- A 45 km/h, tardaría: $t = \frac{180}{45} = 4$ h.
- A 30 km/h, tardaría: $t = \frac{180}{30} = 6$ h.

Observamos que al duplicar la velocidad, se reduce el tiempo a la mitad, y viceversa.

1.7. Ejercicio 27: Proporcionalidad Inversa (II)

Enunciado

- a) 6 fotocopadoras tardan 4 horas en hacer un trabajo. ¿Cuánto tiempo tardarían 3 fotocopadoras en realizar el mismo trabajo?
- b) 20 vacas consumen un silo de forraje en 40 días. ¿Cuántas vacas se deben vender para que el forraje dure 50 días?
- c) Una llave llena un depósito en 8 horas. ¿Cuánto tardarán 4 llaves idénticas en llenar el mismo depósito?

Solución del apartado a)

Solución

6 fotocopadoras tardan 4 horas. ¿Cuánto tardarían 3 fotocopadoras?

Proporcionalidad inversa:

$$\text{máquinas}_1 \times \text{horas}_1 = \text{máquinas}_2 \times \text{horas}_2$$

$$6 \times 4 = 3 \times x$$

$$24 = 3x$$

$$x = 8 \text{ horas}$$

Respuesta: 3 fotocopadoras tardarían **8 horas**.

Solución del apartado b)

Solución

20 vacas consumen forraje en 40 días. ¿Cuántas vacas para que dure 50 días?

$$20 \times 40 = x \times 50$$

$$800 = 50x$$

$$x = 16 \text{ vacas}$$

Vacas a vender: $20 - 16 = 4$ vacas.

Respuesta: Se deben vender **4 vacas**.

Solución del apartado c)**Solución**

1 llave llena en 8 horas. ¿Cuánto tardarán 4 llaves?

$$1 \times 8 = 4 \times x$$

$$x = 2 \text{ horas}$$

Respuesta: 4 llaves tardarán **2 horas**.

1.8. Ejercicio 28: Proporcionalidad Compuesta (I)

Enunciado

- a) 3 pintores pintan 90 m^2 en 4 días. ¿Cuántos días tardarán 4 pintores en pintar 120 m^2 ?
- b) 5 excavadoras, trabajando 8 horas al día, excavan 400 m^3 de tierra en 10 días. ¿Cuántos m^3 excavarán 10 excavadoras en 5 días, trabajando 4 horas al día?
- c) 25 telares producen 800 prendas en 8 horas. ¿Cuántas horas tardarán 20 telares en producir 1000 prendas?

Definición

Problema con MÁS de dos magnitudes relacionadas. Debemos analizar cómo se relaciona cada magnitud con la incógnita:

- **Directa:** más de una $\Rightarrow$ más de la otra.
- **Inversa:** más de una $\Rightarrow$ menos de la otra.

Solución del apartado a)

Solución

3 pintores pintan 90 m^2 en 4 días. ¿Cuántos días tardarán 4 pintores en pintar 120 m^2 ?

Análisis de magnitudes:

- Pintores: $3 \rightarrow 4$ (inversamente proporcional al tiempo)
- Superficie: $90 \rightarrow 120$ (directamente proporcional al tiempo)
- Tiempo: $4 \rightarrow x$ (incógnita)

Planteamiento:

$$x = 4 \times \frac{3}{4} \times \frac{120}{90}$$

$$x = 4 \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 4 \times 1 = 4 \text{ días}$$

Respuesta: Tardarán 4 días.

Solución del apartado b)**Solución**

5 excavadoras, 8 h/día, 400 m³, 10 días. 10 excavadoras, 4 h/día, ¿cuántos m³?, 5 días.

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\text{exc}_2}{\text{exc}_1} \times \frac{\text{h/día}_2}{\text{h/día}_1} \times \frac{\text{días}_2}{\text{días}_1}$$

$$\frac{m_2}{400} = \frac{10}{5} \times \frac{4}{8} \times \frac{5}{10} = 2 \times 0,5 \times 0,5 = 0,5$$

$$m_2 = 400 \times 0,5 = 200 \text{ m}^3$$

Respuesta: Excavarán **200 m³**.

Solución del apartado c)**Solución**

25 telares, 800 prendas, 8 horas. 20 telares, 1000 prendas, ¿cuántas horas?

$$x = 8 \times \frac{25}{20} \times \frac{1000}{800}$$

$$x = 8 \times 1,25 \times 1,25 = 8 \times 1,5625 = 12,5 \text{ horas}$$

Respuesta: Tardarán **12,5 horas** (12 horas y 30 minutos).

1.9. Ejercicio 29: Problemas de Pureza y Concentración

Enunciado

- a) Se mezclan 4 kg de café a €7/kg con 6 kg de café a €9/kg. ¿Cuál es el precio del kilo de la mezcla?
- b) Se mezcla una solución de 10 litros al 30 % de sal con 20 litros al 60 % de sal. ¿Cuál es el porcentaje de sal en la mezcla?
- c) Se tienen 2 kg de oro al 90 % de pureza. Si se mezclan con 3 kg de oro puro (100 %), ¿cuál es el porcentaje de pureza de la mezcla?

Solución del apartado a)

Solución

Café: 4 kg a €7/kg + 6 kg a €9/kg.

Coste total: $4 \times 7 + 6 \times 9 = 28 + 54 = 82$ €

Cantidad total: $4 + 6 = 10$ kg

Precio mezcla: $\frac{82}{10} = 8,2$ €/kg

Respuesta: El precio de la mezcla es **€8,20/kg**.

Solución del apartado b)

Solución

10 L al 30 % + 20 L al 60 %.

Sal en solución 1: $10 \times 0,30 = 3$ L de sal

Sal en solución 2: $20 \times 0,60 = 12$ L de sal

Sal total: $3 + 12 = 15$ L

Volumen total: $10 + 20 = 30$ L

Porcentaje: $\frac{15}{30} \times 100 = 50$ %

Respuesta: El porcentaje de sal en la mezcla es **50 %**.

Solución del apartado c)**Solución**

2 kg oro al 90 % + 3 kg oro al 100 %.

Oro puro en muestra 1: $2 \times 0,90 = 1,8$ kg

Oro puro en muestra 2: $3 \times 1,00 = 3$ kg

Oro puro total: $1,8 + 3 = 4,8$ kg

Masa total: $2 + 3 = 5$ kg

Pureza: $\frac{4,8}{5} \times 100 = 96$ %

Respuesta: La pureza de la mezcla es **96 %**.

1.10. Ejercicio 30: Reparto Proporcional (Directo)

Enunciado

- a) Un padre reparte €1200 entre sus tres hijos de forma directamente proporcional a sus edades: 8, 12 y 20 años. ¿Cuánto recibe el hijo de 12 años?
- b) Un trabajo realizado por tres obreros se paga con €1000. El reparto es proporcional a las horas trabajadas: 10, 15 y 25 horas. ¿Cuánto le corresponde al obrero que trabajó 25 horas?
- c) Reparte 180 bombones en partes directamente proporcionales a 2, 3 y 4.

Solución del apartado a)

Solución

Repartir €1200 proporcional a edades: 8, 12, 20.

Suma de edades: $8 + 12 + 20 = 40$

Constante: $k = \frac{1200}{40} = 30 \text{ €/año}$

Para el hijo de 12 años: $12 \times 30 = 360 \text{ €}$

Verificación:

- Hijo 1 (8 años): $8 \times 30 = 240 \text{ €}$
- Hijo 2 (12 años): $12 \times 30 = 360 \text{ €}$
- Hijo 3 (20 años): $20 \times 30 = 600 \text{ €}$
- Total: $240 + 360 + 600 = 1200 \text{ €} \checkmark$

Respuesta: El hijo de 12 años recibe **€360**.

Solución del apartado b)

Solución

€1000 proporcional a horas: 10, 15, 25.

Total horas: $10 + 15 + 25 = 50 \text{ h}$

Constante: $k = \frac{1000}{50} = 20 \text{ €/h}$

Obrero de 25 h: $25 \times 20 = 500 \text{ €}$

Respuesta: El obrero que trabajó 25 horas recibe **€500**.

Solución del apartado c)**Solución**

180 bombones proporcional a 2, 3, 4.

Suma: $2 + 3 + 4 = 9$

Constante: $k = \frac{180}{9} = 20$

Partes:

- Primera: $2 \times 20 = 40$ bombones
- Segunda: $3 \times 20 = 60$ bombones
- Tercera: $4 \times 20 = 80$ bombones

Verificación: $40 + 60 + 80 = 180$ ✓

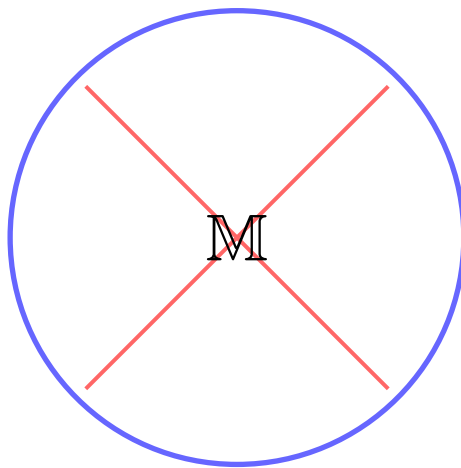
Respuesta: Las partes son 40, 60 y 80 bombones.

Soluciones Completas

Ejercicios de Matemáticas

Porcentajes y Progresiones Aritméticas

Nivel: Secundaria/Bachillerato



Elaborado por: SuperAgent CREA
Plataforma CREA

28 de febrero de 2026

Índice

Introducción	2
1. Porcentajes y Variaciones	3
1.1. Ejercicio 31: Aumento y Disminución (Mismo %)	3
1.2. Ejercicio 32: Impuestos y Descuentos	6
1.3. Ejercicio 33: Variaciones Encadenadas (Diferentes %)	11
1.4. Ejercicio 34: Cálculo del Precio Inicial	16
1.5. Ejercicio 35: Problemas con Áreas y Volúmenes	20
2. Progresiones Aritméticas	25
2.1. Ejercicio 36: Cálculo del Término General y un Término Específico (PA I)	25
2.2. Ejercicio 37: Cálculo del Término General y un Término Específico (PA II)	29
2.3. Ejercicio 38: Suma de Términos (PA)	32
2.4. Ejercicio 39: Problemas de Ahorro (PA)	36
2.5. Ejercicio 40: Hallar el Número de Términos (PA)	40
Conclusión	43

Introducción

Este documento contiene las soluciones completas y detalladas de todos los ejercicios propuestos, organizados en dos bloques temáticos principales:

1. **Porcentajes y Variaciones** (Ejercicios 31-35): Incluye problemas de aumentos, disminuciones, impuestos, descuentos, variaciones encadenadas y cálculo de precios iniciales.
2. **Progresiones Aritméticas** (Ejercicios 36-40): Cubre el cálculo de términos generales, términos específicos, sumas de progresiones y problemas aplicados.

Cada ejercicio está resuelto con:

- Justificación matemática rigurosa
- Explicación paso a paso sin omisiones
- Representación visual cuando es pertinente
- Observaciones sobre errores comunes
- Conclusiones y verificaciones

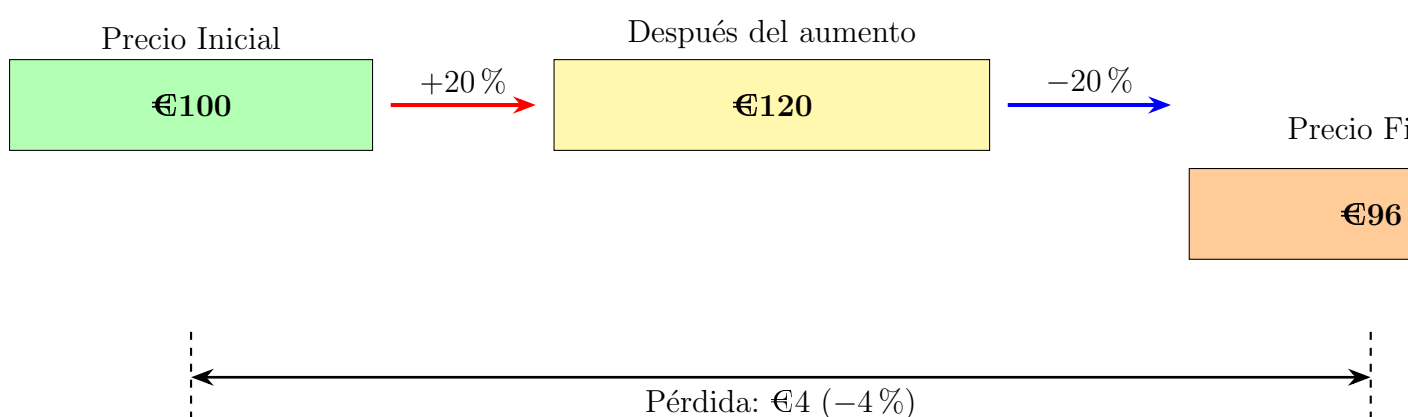
1. Porcentajes y Variaciones

1.1. Ejercicio 31: Aumento y Disminución (Mismo %)

Enunciado del Ejercicio 31

- a) Un artículo de €100 sube un 20 % y luego baja un 20 % sobre el nuevo precio. ¿Cuál es el precio final?
- b) Calcula el factor de variación total de la operación anterior.
- c) ¿El precio final es mayor, menor o igual que el inicial? Justifica tu respuesta.

Representación Visual



Apartado (a): Cálculo del precio final

Método de Factores de Variación

Cuando aplicamos porcentajes sucesivos, utilizamos **factores de variación**:

- Aumento del $p\%$: factor = $1 + \frac{p}{100}$
- Disminución del $p\%$: factor = $1 - \frac{p}{100}$

El precio final se obtiene multiplicando el precio inicial por todos los factores.

Paso 1: Calcular el factor de aumento del 20 %

Un aumento del 20 % significa que el precio pasa a ser el 120 % del original:

$$f_1 = 1 + \frac{20}{100} = 1 + 0,20 = 1,20$$

Paso 2: Aplicar el aumento al precio inicial

$$P_{\text{intermedio}} = P_{\text{inicial}} \times f_1 = 100 \times 1,20 = 120 \text{ €}$$

Verificación: El 20 % de €100 es €20, por lo que $100 + 20 = 120$ €. ✓

Paso 3: Calcular el factor de disminución del 20 %

Una disminución del 20 % significa que el precio pasa a ser el 80 % del anterior:

$$f_2 = 1 - \frac{20}{100} = 1 - 0,20 = 0,80$$

Paso 4: Aplicar la disminución al precio intermedio

$$P_{\text{final}} = P_{\text{intermedio}} \times f_2 = 120 \times 0,80 = 96 \text{ €}$$

Verificación: El 20 % de €120 es €24, por lo que $120 - 24 = 96 \text{ €}$. ✓

Respuesta (a): El precio final es **96 €**.

Apartado (b): Factor de variación total

El factor de variación total es el producto de todos los factores individuales:

$$f_{\text{total}} = f_1 \times f_2 = 1,20 \times 0,80$$

Cálculo detallado:

$$\begin{aligned} f_{\text{total}} &= 1,20 \times 0,80 \\ &= \frac{120}{100} \times \frac{80}{100} \\ &= \frac{120 \times 80}{100 \times 100} \\ &= \frac{9600}{10000} \\ &= 0,96 \end{aligned}$$

Verificación directa:

$$P_{\text{final}} = P_{\text{inicial}} \times f_{\text{total}} = 100 \times 0,96 = 96 \text{ €}$$

Esto coincide con nuestro resultado anterior. ✓

Respuesta (b): El factor de variación total es **0,96** o equivalentemente **96 %**.

Apartado (c): Comparación con el precio inicial

Análisis cuantitativo:

Precio inicial: €100

Precio final: €96

Diferencia: $96 - 100 = -4 \text{ €}$

Variación porcentual respecto al inicial:

$$\text{Variación \%} = \frac{P_{\text{final}} - P_{\text{inicial}}}{P_{\text{inicial}}} \times 100 = \frac{96 - 100}{100} \times 100 = \frac{-4}{100} \times 100 = -4 \%$$

¿Por qué no volvemos al precio inicial?

Este es un **error conceptual muy común**. Muchos estudiantes piensan erróneamente que si subimos 20 % y bajamos 20 %, volvemos al punto inicial. Esto es FALSO porque:

- El aumento del 20 % se calcula sobre €100
- La disminución del 20 % se calcula sobre €120 (¡una base diferente!)
- 20 % de €100 = €20
- 20 % de €120 = €24
- Ganamos €20, pero perdemos €24 $\Rightarrow$ Pérdida neta de €4

Justificación algebraica general:

Sean p_1 y p_2 dos porcentajes iguales. Si aplicamos primero un aumento de p_1 % y luego una disminución de p_2 %, con $p_1 = p_2 = p$:

$$f_{\text{total}} = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \times \left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

Usando la diferencia de cuadrados $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$:

$$\begin{aligned} f_{\text{total}} &= 1^2 - \left(\frac{p}{100}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{p^2}{10000} \end{aligned}$$

Para nuestro caso con $p = 20$:

$$f_{\text{total}} = 1 - \frac{20^2}{10000} = 1 - \frac{400}{10000} = 1 - 0,04 = 0,96$$

Como $f_{\text{total}} < 1$, siempre hay una pérdida neta del $\frac{p^2}{10000} \times 100 = \frac{p^2}{100}$ %.

Para $p = 20$: pérdida = $\frac{400}{100} = 4$ %. ✓

Respuesta (c): El precio final (€96) es **menor** que el precio inicial (€100).

Justificación: Aunque los porcentajes son iguales (20 %), la disminución se aplica sobre una base mayor (€120) que el aumento (€100), resultando en una pérdida neta de €4, equivalente al 4 % del precio inicial.

Conclusión General

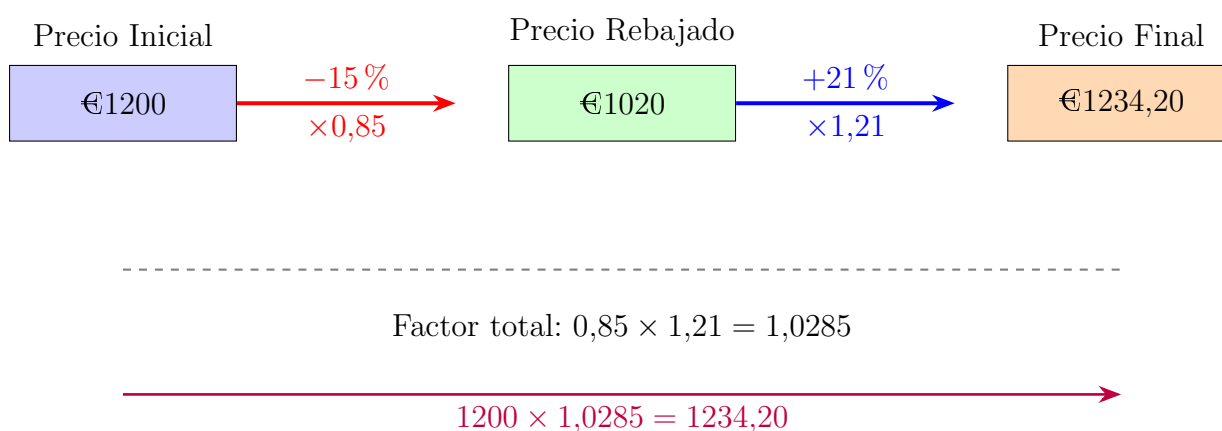
Cuando aplicamos el mismo porcentaje de aumento y luego de disminución (o viceversa), el resultado final siempre es una **pérdida** respecto al valor inicial. Esta pérdida es exactamente del $\frac{p^2}{100}$ %, donde p es el porcentaje aplicado.

1.2. Ejercicio 32: Impuestos y Descuentos

Enunciado del Ejercicio 32

- a) Un portátil de €1200 tiene un descuento del 15 %, y luego se le aplica un impuesto del 21 % sobre el precio rebajado. ¿Cuál es el precio final?
- b) Si el impuesto se hubiera aplicado primero, y luego el descuento, ¿el precio final cambiaría? (Justifica sin hacer la operación).
- c) ¿Qué descuento único debería aplicarse para que el precio final fuese de €1000 (partiendo de los €1200 iniciales)?

Representación Visual del Apartado (a)



Apartado (a): Cálculo del precio final

Paso 1: Aplicar el descuento del 15 %

Un descuento del 15 % significa que pagamos el 85 % del precio original:

$$f_{\text{descuento}} = 1 - \frac{15}{100} = 1 - 0,15 = 0,85$$

Precio después del descuento:

$$\begin{aligned} P_{\text{rebajado}} &= P_{\text{inicial}} \times f_{\text{descuento}} \\ &= 1200 \times 0,85 \\ &= 1020 \text{ €} \end{aligned}$$

Verificación: 15 % de €1200 = $0,15 \times 1200 = 180$ €, entonces $1200 - 180 = 1020$ €.

✓

Paso 2: Aplicar el impuesto del 21 % sobre el precio rebajado

Un impuesto del 21 % significa que el precio se incrementa en 21 %, es decir, pagamos el 121 %:

$$f_{\text{impuesto}} = 1 + \frac{21}{100} = 1 + 0,21 = 1,21$$

Precio final:

$$\begin{aligned} P_{\text{final}} &= P_{\text{rebajado}} \times f_{\text{impuesto}} \\ &= 1020 \times 1,21 \\ &= 1234,20 \text{ €} \end{aligned}$$

Verificación detallada del producto:

$$\begin{aligned} 1020 \times 1,21 &= 1020 \times 1 + 1020 \times 0,21 \\ &= 1020 + 214,20 \\ &= 1234,20 \text{ €} \end{aligned}$$

donde $1020 \times 0,21 = 1020 \times \frac{21}{100} = \frac{21420}{100} = 214,20 \text{ €}$. ✓

Respuesta (a): El precio final es **1234,20 €**.

Apartado (b): Conmutatividad de factores

Propiedad Conmutativa de la Multiplicación

La multiplicación es **conmutativa**, es decir, el orden de los factores no altera el producto:

$$a \times b = b \times a$$

Por tanto, si aplicamos factores de variación sucesivos, el orden NO importa para el resultado final.

Justificación teórica:

Sea P_0 el precio inicial, f_d el factor del descuento y f_i el factor del impuesto.

Caso 1: Primero descuento, luego impuesto

$$P_{\text{final}}^{(1)} = P_0 \times f_d \times f_i$$

Caso 2: Primero impuesto, luego descuento

$$P_{\text{final}}^{(2)} = P_0 \times f_i \times f_d$$

Por la propiedad conmutativa:

$$P_0 \times f_d \times f_i = P_0 \times f_i \times f_d$$

Por tanto:

$$P_{\text{final}}^{(1)} = P_{\text{final}}^{(2)}$$

Aplicación numérica (verificación):

Factor descuento: $f_d = 0,85$

Factor impuesto: $f_i = 1,21$

Orden 1: Descuento-Impuesto

$$1200 \times 0,85 \times 1,21 = 1020 \times 1,21 = 1234,20 \text{ €}$$

Orden 2: Impuesto-Descuento

$$\begin{aligned} 1200 \times 1,21 \times 0,85 &= 1452 \times 0,85 \\ &= 1234,20 \text{ €} \end{aligned}$$

Verificación del cálculo:

$$1452 \times 0,85 = 1452 \times \frac{85}{100} = \frac{123420}{100} = 1234,20 \text{ €}$$

✓ Los dos resultados coinciden.

Respuesta (b): El precio final **NO** cambiaría.

Justificación: Por la propiedad conmutativa de la multiplicación, el producto de factores no depende del orden. Ambas operaciones resultan en el mismo factor total: $0,85 \times 1,21 = 1,21 \times 0,85 = 1,0285$, y por tanto el precio final es idéntico: €1234,20.

Generalización

Esta propiedad se cumple siempre que trabajemos con **porcentajes multiplicativos**. Sin embargo, en contextos donde hay valores absolutos fijos (como tarifas planas o descuentos de cantidad fija en euros), el orden **SÍ** puede importar.

Apartado (c): Cálculo del descuento único**Planteamiento del problema:**

Queremos encontrar el porcentaje de descuento d tal que:

$$P_{\text{inicial}} \times \left(1 - \frac{d}{100}\right) = P_{\text{final deseado}}$$

Datos:

- $P_{\text{inicial}} = 1200 \text{ €}$
- $P_{\text{final deseado}} = 1000 \text{ €}$
- Incógnita: d (porcentaje de descuento)

Paso 1: Plantear la ecuación

$$1200 \times \left(1 - \frac{d}{100}\right) = 1000$$

Paso 2: Despejar el factor de descuento

Dividimos ambos lados entre 1200:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{d}{100} &= \frac{1000}{1200} \\ 1 - \frac{d}{100} &= \frac{10}{12} \\ 1 - \frac{d}{100} &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Simplificación de la fracción:

$$\frac{1000}{1200} = \frac{1000 \div 200}{1200 \div 200} = \frac{5}{6}$$

Paso 3: Despejar d

$$\begin{aligned}\frac{d}{100} &= 1 - \frac{5}{6} \\ \frac{d}{100} &= \frac{6}{6} - \frac{5}{6} \\ \frac{d}{100} &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

Multiplicamos ambos lados por 100:

$$\begin{aligned}d &= 100 \times \frac{1}{6} \\ d &= \frac{100}{6} \\ d &= 16,\bar{6} \%\end{aligned}$$

Expresión exacta como fracción:

$$d = \frac{100}{6} = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3} \%$$

Verificación:

Aplicamos un descuento del $16,\bar{6} \%$ a €1200:

$$\begin{aligned}P_{\text{final}} &= 1200 \times \left(1 - \frac{100/6}{100}\right) \\ &= 1200 \times \left(1 - \frac{1}{6}\right) \\ &= 1200 \times \frac{5}{6} \\ &= \frac{1200 \times 5}{6} \\ &= \frac{6000}{6} \\ &= 1000 \text{ €}\end{aligned}$$

✓El resultado coincide con el precio deseado.

Cálculo alternativo (método de la diferencia):

La reducción necesaria es:

$$\text{Reducción} = 1200 - 1000 = 200 \text{ €}$$

El porcentaje de descuento es:

$$d = \frac{\text{Reducción}}{P_{\text{inicial}}} \times 100 = \frac{200}{1200} \times 100 = \frac{200 \times 100}{1200} = \frac{20000}{1200} = \frac{500}{30} = \frac{50}{3} = 16,\bar{6} \%$$

✓ Mismo resultado.

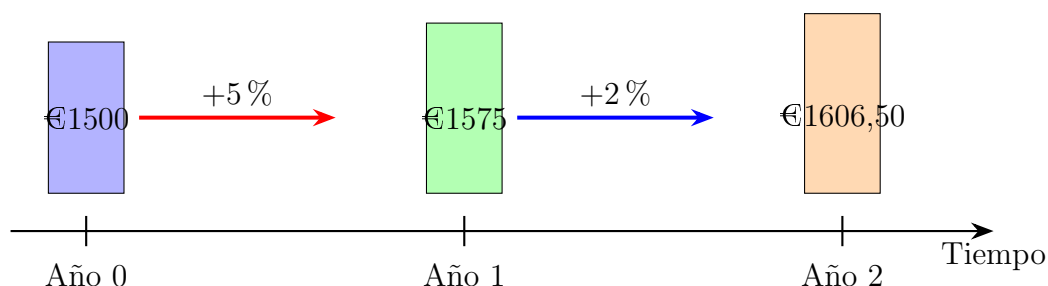
Respuesta (c): Debe aplicarse un descuento único de $\frac{50}{3}\%$ o equivalentemente $16,\overline{6}\%$ (16,666... %) o $16\frac{2}{3}\%$ exactamente.
En forma decimal aproximada: **16,67%** (redondeado a dos decimales).

1.3. Ejercicio 33: Variaciones Encadenadas (Diferentes %)

Enunciado del Ejercicio 33

- a) Un sueldo de €1500 sube un 5 % el primer año, y un 2 % el segundo año. ¿Cuál es el sueldo final?
- b) ¿Cuál es el porcentaje de aumento total en los dos años?
- c) Si en lugar de subir, el sueldo hubiese bajado un 5 % y luego un 2 %, ¿cuál sería el porcentaje de disminución total?

Representación Visual



Apartado (a): Cálculo del sueldo final

Paso 1: Aplicar el aumento del 5 % en el primer año

Factor de aumento del 5 %:

$$f_1 = 1 + \frac{5}{100} = 1,05$$

Sueldo después del primer año:

$$\begin{aligned} S_1 &= S_0 \times f_1 \\ &= 1500 \times 1,05 \\ &= 1575 \text{ €} \end{aligned}$$

Verificación: 5 % de €1500 = $0,05 \times 1500 = 75 \text{ €}$, entonces $1500 + 75 = 1575 \text{ €}$. ✓

Paso 2: Aplicar el aumento del 2 % en el segundo año

Factor de aumento del 2 %:

$$f_2 = 1 + \frac{2}{100} = 1,02$$

Sueldo final (después del segundo año):

$$\begin{aligned} S_2 &= S_1 \times f_2 \\ &= 1575 \times 1,02 \\ &= 1606,50 \text{ €} \end{aligned}$$

Verificación detallada:

$$\begin{aligned} 1575 \times 1,02 &= 1575 \times (1 + 0,02) \\ &= 1575 + 1575 \times 0,02 \\ &= 1575 + 31,50 \\ &= 1606,50 \text{ €} \end{aligned}$$

$$\text{donde } 1575 \times 0,02 = \frac{1575 \times 2}{100} = \frac{3150}{100} = 31,50 \text{ €}. \checkmark$$

Respuesta (a): El sueldo final después de dos años es **1606,50 €**.

Apartado (b): Porcentaje de aumento total

Método 1: Factor de variación total

El factor de variación total es el producto de los factores individuales:

$$\begin{aligned} f_{\text{total}} &= f_1 \times f_2 \\ &= 1,05 \times 1,02 \\ &= 1,0710 \end{aligned}$$

Cálculo detallado del producto:

$$\begin{aligned} 1,05 \times 1,02 &= \frac{105}{100} \times \frac{102}{100} \\ &= \frac{105 \times 102}{10000} \\ &= \frac{10710}{10000} \\ &= 1,0710 \end{aligned}$$

Verificación de la multiplicación 105×102 :

$$\begin{aligned} 105 \times 102 &= 105 \times 100 + 105 \times 2 \\ &= 10500 + 210 \\ &= 10710 \end{aligned}$$

✓

El factor 1,0710 significa que el sueldo final es el 107,10 % del inicial.

Por tanto, el aumento porcentual es:

$$\text{Aumento \%} = (f_{\text{total}} - 1) \times 100 = (1,0710 - 1) \times 100 = 0,0710 \times 100 = 7,10 \%$$

Método 2: Diferencia absoluta y porcentaje

Aumento absoluto:

$$\Delta S = S_2 - S_0 = 1606,50 - 1500 = 106,50 \text{ €}$$

Porcentaje de aumento:

$$\text{Aumento \%} = \frac{\Delta S}{S_0} \times 100 = \frac{106,50}{1500} \times 100$$

Cálculo:

$$\begin{aligned} \frac{106,50}{1500} \times 100 &= \frac{10650}{1500} \\ &= \frac{1065}{150} \\ &= \frac{213}{30} \\ &= 7,1 \end{aligned}$$

Verificación de la división:

$$\frac{213}{30} = \frac{210 + 3}{30} = \frac{210}{30} + \frac{3}{30} = 7 + 0,1 = 7,1$$

Por tanto: 7,1 %. ✓

Error Común

INCORRECTO: Sumar directamente los porcentajes: $5\% + 2\% = 7\%$.

¿Por qué es incorrecto? Porque el segundo aumento (2%) se aplica sobre una base ya incrementada (€1575), no sobre la base original (€1500).

El aumento real del segundo año sobre la base original es:

$$\frac{31,50}{1500} \times 100 = 2,1\%$$

No es exactamente 2%, sino ligeramente superior debido a que la base es mayor.
Por tanto, el aumento total correcto es:

$$5\% + 2,1\% = 7,1\%$$

O mejor aún, calcularlo como: $(1,05 \times 1,02 - 1) \times 100 = 7,1\%$.

Respuesta (b): El porcentaje de aumento total en los dos años es **7,10%** o **7,1%**.

Observación: Este valor es ligeramente superior a la suma aritmética $5\% + 2\% = 7\%$ debido al efecto compuesto (el segundo aumento se aplica sobre una base ya incrementada).

Apartado (c): Porcentaje de disminución total

Si en lugar de aumentos tuviéramos disminuciones del 5% y 2%, aplicamos el mismo razonamiento con factores de disminución.

Factores de disminución:

Primera disminución (5 %):

$$f'_1 = 1 - \frac{5}{100} = 0,95$$

Segunda disminución (2 %):

$$f'_2 = 1 - \frac{2}{100} = 0,98$$

Factor total de disminución:

$$\begin{aligned} f'_{\text{total}} &= f'_1 \times f'_2 \\ &= 0,95 \times 0,98 \end{aligned}$$

Cálculo del producto:

$$\begin{aligned} 0,95 \times 0,98 &= \frac{95}{100} \times \frac{98}{100} \\ &= \frac{95 \times 98}{10000} \\ &= \frac{9310}{10000} \\ &= 0,9310 \end{aligned}$$

Verificación de la multiplicación 95×98 :

$$\begin{aligned} 95 \times 98 &= 95 \times 100 - 95 \times 2 \\ &= 9500 - 190 \\ &= 9310 \end{aligned}$$

✓

Porcentaje de disminución total:

El factor 0,9310 significa que el sueldo final sería el 93,10 % del inicial.

Por tanto, la disminución porcentual es:

$$\text{Disminución \%} = (1 - f'_{\text{total}}) \times 100 = (1 - 0,9310) \times 100 = 0,0690 \times 100 = 6,90 \%$$

Verificación con cálculo directo:

Sueldo después de la primera disminución (5 %):

$$S'_1 = 1500 \times 0,95 = 1425 \text{ €}$$

Sueldo después de la segunda disminución (2 %):

$$S'_2 = 1425 \times 0,98 = 1396,50 \text{ €}$$

Cálculo de $1425 \times 0,98$:

$$\begin{aligned} 1425 \times 0,98 &= 1425 \times (1 - 0,02) \\ &= 1425 - 1425 \times 0,02 \\ &= 1425 - 28,50 \\ &= 1396,50 \text{ €} \end{aligned}$$

Disminución total:

$$\Delta S' = 1500 - 1396,50 = 103,50 \text{ €}$$

Porcentaje:

$$\frac{103,50}{1500} \times 100 = \frac{10350}{1500} = \frac{1035}{150} = 6,9 \%$$

✓ Coincide con nuestro resultado anterior.

Respuesta (c): El porcentaje de disminución total sería **6,90 %** o **6,9 %**.

Observación: Este valor es ligeramente inferior a la suma aritmética $5 \% + 2 \% = 7 \%$. Esto se debe a que la segunda disminución se aplica sobre una base ya reducida (€1425 en lugar de €1500), por lo que su impacto absoluto es menor.

Asimetría entre aumentos y disminuciones

Comparando los apartados (b) y (c):

- Aumento total: $+7,1 \%$ (factor: 1,071)
- Disminución total: $-6,9 \%$ (factor: 0,931)

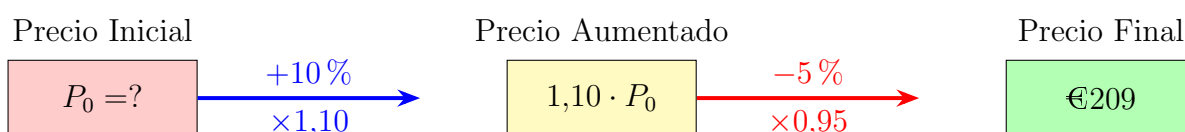
Nótese que el aumento total ($7,1 \%$) es ligeramente mayor en valor absoluto que la disminución total ($6,9 \%$). Esto se debe al efecto compuesto: cuando aumentamos, la segunda operación actúa sobre una base mayor; cuando disminuimos, actúa sobre una base menor.

1.4. Ejercicio 34: Cálculo del Precio Inicial

Enunciado del Ejercicio 34

- a) Tras un aumento del 10 % y un descuento del 5 %, un producto cuesta €209. ¿Cuál era el precio original?
- b) Si un producto cuesta €80 después de un aumento del 25 %, ¿cuánto costaba originalmente?
- c) Una tienda rebaja todos sus precios un 30 %. Si una camisa cuesta €42, ¿cuál era su precio antes de la rebaja?

Representación Visual del Apartado (a)



$$P_0 \times 1,10 \times 0,95 = 209$$

$$P_0 \times 1,045 = 209$$

Apartado (a): Cálculo inverso con dos operaciones

Planteamiento:

Sea P_0 el precio original (incógnita).

Después del aumento del 10 %:

$$P_{\text{intermedio}} = P_0 \times 1,10$$

Después del descuento del 5 % sobre el precio aumentado:

$$P_{\text{final}} = P_{\text{intermedio}} \times 0,95 = P_0 \times 1,10 \times 0,95$$

Sabemos que $P_{\text{final}} = 209$ €, entonces:

$$P_0 \times 1,10 \times 0,95 = 209$$

Paso 1: Calcular el factor total

$$\begin{aligned} f_{\text{total}} &= 1,10 \times 0,95 \\ &= \frac{110}{100} \times \frac{95}{100} \\ &= \frac{110 \times 95}{10000} \end{aligned}$$

Multiplicación 110×95 :

$$\begin{aligned} 110 \times 95 &= 110 \times 100 - 110 \times 5 \\ &= 11000 - 550 \\ &= 10450 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$f_{\text{total}} = \frac{10450}{10000} = 1,045$$

Paso 2: Despejar P_0

$$P_0 \times 1,045 = 209$$

$$P_0 = \frac{209}{1,045}$$

Paso 3: Realizar la división

Para facilitar el cálculo, convertimos a fracción:

$$P_0 = \frac{209}{1,045} = \frac{209}{\frac{10450}{10000}} = \frac{209 \times 10000}{10450} = \frac{2090000}{10450}$$

Simplificamos dividiendo numerador y denominador entre 10:

$$P_0 = \frac{209000}{1045}$$

Realizamos la división:

$$\frac{209000}{1045} = 200$$

Verificación: $1045 \times 200 = 209000$. ✓

Verificación completa:

Precio original: €200

Después del aumento del 10 %:

$$200 \times 1,10 = 220 \text{ €}$$

Después del descuento del 5 %:

$$220 \times 0,95 = 209 \text{ €}$$

Cálculo de $220 \times 0,95$:

$$220 \times 0,95 = 220 - 220 \times 0,05 = 220 - 11 = 209 \text{ €}$$

✓El resultado es correcto.

Respuesta (a): El precio original era **200 €**.

Apartado (b): Cálculo inverso con un solo aumento**Planteamiento:**

Sea P_0 el precio original.

Después de un aumento del 25 %:

$$P_{\text{final}} = P_0 \times 1,25$$

Sabemos que $P_{\text{final}} = 80$ €, entonces:

$$P_0 \times 1,25 = 80$$

Despeje:

$$P_0 = \frac{80}{1,25}$$

Cálculo:

Convertimos a fracción:

$$1,25 = \frac{125}{100} = \frac{5}{4}$$

Por tanto:

$$P_0 = \frac{80}{\frac{5}{4}} = 80 \times \frac{4}{5} = \frac{80 \times 4}{5} = \frac{320}{5} = 64 \text{ €}$$

Verificación:

Precio original: €64

Aumento del 25 %:

$$64 \times 1,25 = 64 \times \frac{5}{4} = \frac{64 \times 5}{4} = \frac{320}{4} = 80 \text{ €}$$

✓ Correcto.

Método alternativo (cálculo directo):

25 % de aumento significa que el precio final es 125 % del original.

Si €80 representa el 125 %, entonces el 100 % (precio original) es:

$$P_0 = \frac{80 \times 100}{125} = \frac{8000}{125} = 64 \text{ €}$$

✓ Mismo resultado.

Respuesta (b): El precio original era **64 €**.

Apartado (c): Cálculo inverso con un descuento**Planteamiento:**

Sea P_0 el precio antes de la rebaja.

Después de un descuento del 30 %:

$$P_{\text{final}} = P_0 \times 0,70$$

Sabemos que $P_{\text{final}} = 42 \text{ €}$, entonces:

$$P_0 \times 0,70 = 42$$

Despeje:

$$P_0 = \frac{42}{0,70}$$

Cálculo:

Convertimos a fracción:

$$0,70 = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}$$

Por tanto:

$$P_0 = \frac{42}{\frac{7}{10}} = 42 \times \frac{10}{7} = \frac{420}{7} = 60 \text{ €}$$

Verificación de la división:

$$\frac{420}{7} = \frac{420}{7} = 60 \quad (\text{ya que } 7 \times 60 = 420)$$

✓

Verificación:

Precio antes de la rebaja: €60

Descuento del 30 %:

$$60 \times 0,70 = 60 \times \frac{7}{10} = \frac{420}{10} = 42 \text{ €}$$

✓ Correcto.

Método alternativo:

30 % de descuento significa que el precio final es el 70 % del original.

Si €42 representa el 70 %, entonces el 100 % (precio original) es:

$$P_0 = \frac{42 \times 100}{70} = \frac{4200}{70} = 60 \text{ €}$$

✓ Mismo resultado.

Respuesta (c): El precio antes de la rebaja era **60 €**.

Método General para Cálculos Inversos

Para calcular un precio inicial cuando conocemos el precio final y los porcentajes aplicados:

1. Identificar todos los factores de variación aplicados: $f_1, f_2, \dots, f_n$
2. Calcular el factor total: $f_{\text{total}} = f_1 \times f_2 \times \dots \times f_n$
3. Aplicar la fórmula: $P_{\text{inicial}} = \frac{P_{\text{final}}}{f_{\text{total}}}$

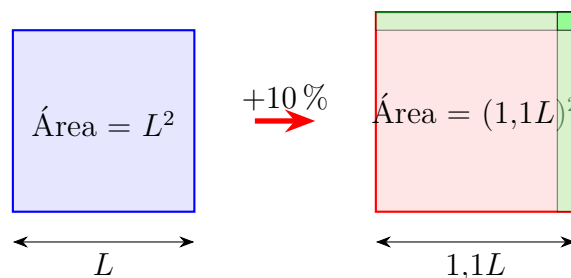
Este método funciona para cualquier número de operaciones encadenadas.

1.5. Ejercicio 35: Problemas con Áreas y Volúmenes

Enunciado del Ejercicio 35

- a) El lado de un cuadrado aumenta un 10 %. ¿En qué porcentaje aumenta su área?
 b) El precio de la gasolina sube un 2 % cada mes. ¿Cuál será el aumento total de precio al cabo de 3 meses (suponiendo variaciones encadenadas)?
 c) La población de un pueblo disminuye un 1 % cada año. ¿Qué porcentaje de la población inicial quedará después de 5 años?

Apartado (a): Variación del área de un cuadrado



Planteamiento:

Sea L la longitud del lado original del cuadrado.

Área original:

$$A_0 = L^2$$

El lado aumenta un 10 %, por lo que el nuevo lado es:

$$L_{\text{nuevo}} = L \times 1,10 = 1,10L$$

Cálculo del área nueva:

$$\begin{aligned} A_{\text{nueva}} &= (L_{\text{nuevo}})^2 \\ &= (1,10L)^2 \\ &= 1,10^2 \times L^2 \\ &= 1,21 \times L^2 \\ &= 1,21 \times A_0 \end{aligned}$$

Cálculo de $1,10^2$:

$$1,10^2 = 1,10 \times 1,10 = \frac{110}{100} \times \frac{110}{100} = \frac{12100}{10000} = 1,21$$

Porcentaje de aumento del área:

El factor de variación es 1,21, lo que significa que el área pasa a ser el 121 % del área original.

Por tanto, el aumento es:

$$\text{Aumento del área} = (1,21 - 1) \times 100 \% = 0,21 \times 100 \% = 21 \%$$

Interpretación geométrica:

Podemos descomponer el aumento del área en:

- Área original: $L^2 = 100\%$
 - Franja horizontal superior: $L \times 0,10L = 0,10L^2 = 10\%$ del área original
 - Franja vertical derecha: $0,10L \times L = 0,10L^2 = 10\%$ del área original
 - Cuadrado esquina superior derecha: $0,10L \times 0,10L = 0,01L^2 = 1\%$ del área original
- Total del aumento: $10\% + 10\% + 1\% = 21\%$. ✓

Respuesta (a): El área del cuadrado aumenta un **21 %**.

Fórmula general: Si el lado de un cuadrado aumenta un $p\%$, el área aumenta un $\left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 - 1\right] \times 100\%$.

Para $p = 10$: $[(1,10)^2 - 1] \times 100 = [1,21 - 1] \times 100 = 21\%$.

Generalización a Volúmenes

Si las tres dimensiones de un cubo aumentan un $p\%$, el volumen aumenta según:

$$\text{Aumento del volumen} = \left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 - 1\right] \times 100\%$$

Por ejemplo, si el lado de un cubo aumenta un 10% , el volumen aumenta:

$$(1,10)^3 - 1 = 1,331 - 1 = 0,331 = 33,1\%$$

Apartado (b): Variaciones encadenadas mensuales

Planteamiento:

El precio sube un 2% cada mes durante 3 meses.

Factor de aumento mensual:

$$f = 1 + \frac{2}{100} = 1,02$$

Después de 3 meses, el factor total es:

$$f_{\text{total}} = f^3 = 1,02^3$$

Cálculo de $1,02^3$:

Primero calculamos $1,02^2$:

$$1,02^2 = 1,02 \times 1,02 = \frac{102}{100} \times \frac{102}{100} = \frac{10404}{10000} = 1,0404$$

Verificación de 102×102 :

$$\begin{aligned} 102 \times 102 &= (100 + 2)(100 + 2) \\ &= 100^2 + 2 \times 100 \times 2 + 2^2 \\ &= 10000 + 400 + 4 \\ &= 10404 \end{aligned}$$

✓

Ahora calculamos $1,02^3$:

$$\begin{aligned} 1,02^3 &= 1,02^2 \times 1,02 \\ &= 1,0404 \times 1,02 \end{aligned}$$

Cálculo del producto:

$$\begin{aligned} 1,0404 \times 1,02 &= \frac{10404}{10000} \times \frac{102}{100} \\ &= \frac{10404 \times 102}{1000000} \end{aligned}$$

Multiplicación 10404×102 :

$$\begin{aligned} 10404 \times 102 &= 10404 \times 100 + 10404 \times 2 \\ &= 1040400 + 20808 \\ &= 1061208 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$1,02^3 = \frac{1061208}{1000000} = 1,061208$$

Porcentaje de aumento total:

$$\text{Aumento total} = (f_{\text{total}} - 1) \times 100 = (1,061208 - 1) \times 100 = 0,061208 \times 100 = 6,1208\%$$

Redondeando a dos decimales: 6,12 %.

Respuesta (b): El aumento total del precio de la gasolina al cabo de 3 meses es aproximadamente **6,12 %** (valor exacto: 6,1208 %).

Observación: Este valor es ligeramente superior a $3 \times 2\% = 6\%$ debido al efecto del interés compuesto.

Apartado (c): Decrecimiento poblacional

Planteamiento:

La población disminuye un 1 % cada año durante 5 años.

Factor de disminución anual:

$$f = 1 - \frac{1}{100} = 0,99$$

Después de 5 años, el factor total es:

$$f_{\text{total}} = f^5 = 0,99^5$$

Cálculo de $0,99^5$:

Método 1: Cálculo paso a paso

 $0,99^2$:

$$0,99^2 = 0,99 \times 0,99 = \frac{99}{100} \times \frac{99}{100} = \frac{9801}{10000} = 0,9801$$

$0,99^4$:

$$\begin{aligned} 0,99^4 &= (0,99^2)^2 \\ &= 0,9801^2 \\ &= \frac{9801^2}{10000^2} \end{aligned}$$

Cálculo de 9801^2 :

$$\begin{aligned} 9801^2 &= (9800 + 1)^2 \\ &= 9800^2 + 2 \times 9800 \times 1 + 1^2 \\ &= 96040000 + 19600 + 1 \\ &= 96059601 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$0,99^4 = \frac{96059601}{100000000} = 0,96059601$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} 0,99^5 &= 0,99^4 \times 0,99 \\ &= 0,96059601 \times 0,99 \\ &= \frac{96059601}{100000000} \times \frac{99}{100} \\ &= \frac{96059601 \times 99}{10000000000} \end{aligned}$$

Multiplicación 96059601×99 :

$$\begin{aligned} 96059601 \times 99 &= 96059601 \times 100 - 96059601 \\ &= 9605960100 - 96059601 \\ &= 9509900499 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$0,99^5 = \frac{9509900499}{10000000000} = 0,9509900499$$

Porcentaje de población que queda:

$$0,9509900499 \times 100 \% \approx 95,099 \% \approx 95,10 \%$$

Método alternativo (aproximación con logaritmos):

Para verificar, podemos usar:

$$0,99^5 = e^{5 \ln(0,99)}$$

Como $\ln(0,99) \approx -0,01005$:

$$5 \ln(0,99) \approx -0,05025$$

$$e^{-0,05025} \approx 0,951$$

Que coincide aproximadamente con nuestro cálculo exacto. ✓

Respuesta (c): Después de 5 años quedará aproximadamente el **95,10 %** de la población inicial (valor exacto: 95,099 %).

Interpretación: La población habrá disminuido aproximadamente un 4,90 % en total, ligeramente menos que $5 \times 1 \% = 5 \%$ debido a que cada año la disminución se aplica sobre una base menor.

Fórmula General de Crecimiento/Decrecimiento

Para un crecimiento o decrecimiento porcentual constante r durante n periodos:

$$\text{Factor final} = \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

donde:

- $r > 0$ para crecimientos
- $r < 0$ para decrementos

Esta es la base del **interés compuesto** en finanzas y del **crecimiento exponencial** en poblaciones.

2. Progresiones Aritméticas

Teoría Fundamental

Definición de Progresión Aritmética

Una **Progresión Aritmética (PA)** es una sucesión de números en la que cada término se obtiene sumando una cantidad constante (llamada **diferencia** d) al término anterior.

Forma general:

$$a_1, \quad a_1 + d, \quad a_1 + 2d, \quad a_1 + 3d, \quad \dots$$

Fórmulas fundamentales:

1. **Término general** (n-ésimo término):

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

2. **Suma de los n primeros términos:**

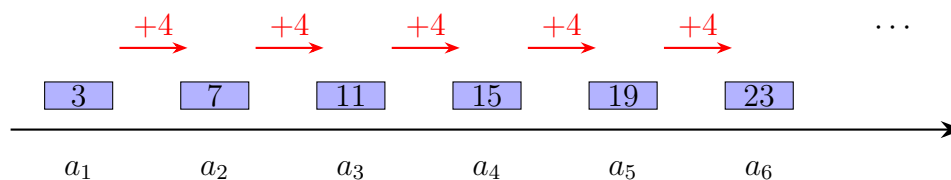
$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \quad \text{o bien} \quad S_n = \frac{n[2a_1 + (n - 1)d]}{2}$$

2.1. Ejercicio 36: Cálculo del Término General y un Término Específico (PA I)

Enunciado del Ejercicio 36

- a) En una Progresión Aritmética (PA), $a_1 = 3$ y la diferencia $d = 4$. Halla el término general a_n .
- b) Calcula el término a_{10} .
- c) Calcula la suma de los 10 primeros términos (S_{10}).

Representación Visual



PA: 3, 7, 11, 15, 19, 23, ... con $d = 4$

Apartado (a): Término general

Datos:

- Primer término: $a_1 = 3$

- Diferencia: $d = 4$

Aplicación de la fórmula:

El término general de una PA es:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Sustituyendo los valores:

$$\begin{aligned} a_n &= 3 + (n - 1) \cdot 4 \\ &= 3 + 4n - 4 \\ &= 4n - 1 \end{aligned}$$

Verificación:

Comprobemos algunos términos:

$$\begin{aligned} a_1 &= 4(1) - 1 = 4 - 1 = 3 \quad \checkmark \\ a_2 &= 4(2) - 1 = 8 - 1 = 7 \quad \checkmark \\ a_3 &= 4(3) - 1 = 12 - 1 = 11 \quad \checkmark \\ a_4 &= 4(4) - 1 = 16 - 1 = 15 \quad \checkmark \end{aligned}$$

La diferencia entre términos consecutivos es:

$$a_{n+1} - a_n = [4(n + 1) - 1] - [4n - 1] = 4n + 4 - 1 - 4n + 1 = 4 = d \quad \checkmark$$

Respuesta (a): El término general es $a_n = 4n - 1$.

Apartado (b): Cálculo de a_{10} **Método 1: Usando el término general**

$$\begin{aligned} a_{10} &= 4(10) - 1 \\ &= 40 - 1 \\ &= 39 \end{aligned}$$

Método 2: Usando la fórmula original

$$\begin{aligned} a_{10} &= a_1 + (10 - 1)d \\ &= 3 + 9 \cdot 4 \\ &= 3 + 36 \\ &= 39 \end{aligned}$$

✓ Ambos métodos dan el mismo resultado.

Respuesta (b): $a_{10} = 39$.

Apartado (c): Suma de los 10 primeros términos**Método 1: Fórmula con primer y último término**

La fórmula de la suma es:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Para $n = 10$:

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{10(a_1 + a_{10})}{2} \\ &= \frac{10(3 + 39)}{2} \\ &= \frac{10 \cdot 42}{2} \\ &= \frac{420}{2} \\ &= 210 \end{aligned}$$

Método 2: Fórmula alternativa

$$S_n = \frac{n[2a_1 + (n - 1)d]}{2}$$

Para $n = 10$:

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{10[2 \cdot 3 + (10 - 1) \cdot 4]}{2} \\ &= \frac{10[6 + 9 \cdot 4]}{2} \\ &= \frac{10[6 + 36]}{2} \\ &= \frac{10 \cdot 42}{2} \\ &= \frac{420}{2} \\ &= 210 \end{aligned}$$

✓ Mismo resultado.

Verificación directa (suma término a término):

Los 10 primeros términos son:

$$3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39$$

Suma:

$$\begin{aligned} S_{10} &= 3 + 7 + 11 + 15 + 19 + 23 + 27 + 31 + 35 + 39 \\ &= (3 + 39) + (7 + 35) + (11 + 31) + (15 + 27) + (19 + 23) \\ &= 42 + 42 + 42 + 42 + 42 \\ &= 5 \times 42 \\ &= 210 \end{aligned}$$

✓ Verificación correcta.

Respuesta (c): $S_{10} = 210$.

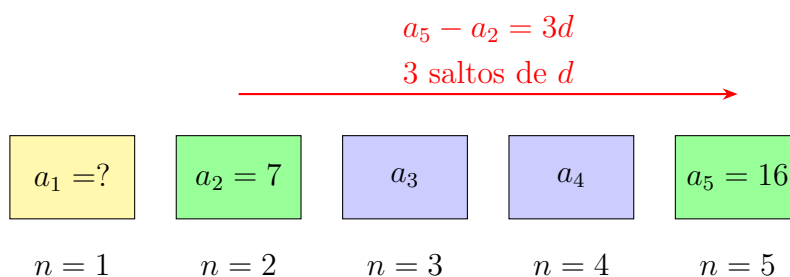
Interpretación: La suma de los 10 primeros términos de la progresión es equivalente a calcular el promedio del primer y último término ($\frac{3+39}{2} = 21$) y multiplicarlo por el número de términos ($21 \times 10 = 210$).

2.2. Ejercicio 37: Cálculo del Término General y un Término Específico (PA II)

Enunciado del Ejercicio 37

- a) En una PA, el segundo término es $a_2 = 7$ y el quinto término es $a_5 = 16$. Halla la diferencia d y el primer término a_1 .
 b) Calcula el término a_{15} .
 c) Calcula la suma de los 15 primeros términos (S_{15}).

Representación Visual



Apartado (a): Cálculo de d y a_1

Datos:

- $a_2 = 7$
- $a_5 = 16$

Paso 1: Calcular la diferencia d

Usamos la relación entre dos términos cualesquiera:

$$a_n = a_m + (n - m)d$$

Aplicando para $n = 5$ y $m = 2$:

$$a_5 = a_2 + (5 - 2)d$$

$$16 = 7 + 3d$$

Despejamos d :

$$3d = 16 - 7$$

$$3d = 9$$

$$d = \frac{9}{3}$$

$$d = 3$$

Paso 2: Calcular a_1

Usamos la relación:

$$a_2 = a_1 + d$$

Sustituimos los valores conocidos:

$$7 = a_1 + 3$$

Despejamos a_1 :

$$a_1 = 7 - 3$$

$$a_1 = 4$$

Verificación:

Con $a_1 = 4$ y $d = 3$, los primeros términos son:

$$a_1 = 4 \quad \checkmark$$

$$a_2 = 4 + 3 = 7 \quad \checkmark \text{ (coincide con el dato)}$$

$$a_3 = 7 + 3 = 10$$

$$a_4 = 10 + 3 = 13$$

$$a_5 = 13 + 3 = 16 \quad \checkmark \text{ (coincide con el dato)}$$

Respuesta (a): La diferencia es $d = 3$ y el primer término es $a_1 = 4$.

Apartado (b): Cálculo de a_{15}

Ahora que conocemos $a_1 = 4$ y $d = 3$, podemos usar la fórmula del término general:

$$\begin{aligned} a_{15} &= a_1 + (15 - 1)d \\ &= 4 + 14 \cdot 3 \\ &= 4 + 42 \\ &= 46 \end{aligned}$$

Verificación alternativa (desde a_5):

$$a_{15} = a_5 + (15 - 5)d = 16 + 10 \cdot 3 = 16 + 30 = 46$$

✓ Mismo resultado.

Respuesta (b): $a_{15} = 46$.

Apartado (c): Cálculo de S_{15}

Método 1: Fórmula con a_1 y a_{15}

$$\begin{aligned} S_{15} &= \frac{15(a_1 + a_{15})}{2} \\ &= \frac{15(4 + 46)}{2} \\ &= \frac{15 \cdot 50}{2} \\ &= \frac{750}{2} \\ &= 375 \end{aligned}$$

Método 2: Fórmula alternativa

$$\begin{aligned} S_{15} &= \frac{15[2a_1 + (15 - 1)d]}{2} \\ &= \frac{15[2 \cdot 4 + 14 \cdot 3]}{2} \\ &= \frac{15[8 + 42]}{2} \\ &= \frac{15 \cdot 50}{2} \\ &= 375 \end{aligned}$$

✓Mismo resultado.

Respuesta (c): $S_{15} = 375$.

2.3. Ejercicio 38: Suma de Términos (PA)

Enunciado del Ejercicio 38

- a) Calcula la suma de los 20 primeros números naturales ($1 + 2 + 3 + \dots + 20$).
 b) Halla la suma de los 50 primeros términos de la PA con $a_1 = 5$ y $d = 2$.
 c) Si el primer término de una PA es $a_1 = 10$ y $a_{20} = 105$, calcula la suma S_{20} .

Apartado (a): Suma de los primeros 20 naturales

10	20
9	~~19~~
8	~~18~~
7	~~17~~
6	~~16~~
5	~~15~~
4	~~14~~
~~3~~	~~13~~
~~2~~	~~12~~
~~1~~	~~11~~

$2 + 19 = 21$
 $1 + 20 = 21$

10 parejas que suman 21 cada una
 $S_{20} = 10 \times 21 = 210$

La suma $1 + 2 + 3 + \dots + 20$ es una PA con:

- $a_1 = 1$
- $d = 1$
- $n = 20$
- $a_{20} = 20$

Aplicación de la fórmula:

$$\begin{aligned}
 S_{20} &= \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \\
 &= \frac{20(1 + 20)}{2} \\
 &= \frac{20 \cdot 21}{2} \\
 &= \frac{420}{2} \\
 &= 210
 \end{aligned}$$

Fórmula general para la suma de los primeros n naturales:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Para $n = 20$:

$$\frac{20 \cdot 21}{2} = 210$$

✓

Anécdota de Gauss

Se cuenta que cuando Carl Friedrich Gauss tenía 10 años, su profesor pidió a la clase que sumara los números del 1 al 100 para mantenerlos ocupados. Gauss dio la respuesta casi instantáneamente: 5050.

Su método: observó que si emparejamos los extremos:

$$(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \cdots + (50 + 51)$$

Hay 50 parejas, cada una suma 101, entonces: $50 \times 101 = 5050$.

Esta es la misma idea detrás de la fórmula $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$.

Respuesta (a): $S_{20} = 210$.

Apartado (b): Suma con $a_1 = 5$, $d = 2$, $n = 50$

Datos:

- $a_1 = 5$
- $d = 2$
- $n = 50$

Paso 1: Calcular a_{50} (opcional, para usar la primera fórmula)

$$\begin{aligned} a_{50} &= a_1 + (50 - 1)d \\ &= 5 + 49 \cdot 2 \\ &= 5 + 98 \\ &= 103 \end{aligned}$$

Paso 2: Calcular S_{50}

Método 1:

$$\begin{aligned} S_{50} &= \frac{50(a_1 + a_{50})}{2} \\ &= \frac{50(5 + 103)}{2} \\ &= \frac{50 \cdot 108}{2} \\ &= \frac{5400}{2} \\ &= 2700 \end{aligned}$$

Método 2 (directo):

$$\begin{aligned} S_{50} &= \frac{50[2a_1 + (50 - 1)d]}{2} \\ &= \frac{50[2 \cdot 5 + 49 \cdot 2]}{2} \\ &= \frac{50[10 + 98]}{2} \\ &= \frac{50 \cdot 108}{2} \\ &= 2700 \end{aligned}$$

✓ Mismo resultado.

Respuesta (b): $S_{50} = 2700$.

Apartado (c): Suma conociendo a_1 y a_{20}

Datos:

- $a_1 = 10$
- $a_{20} = 105$
- $n = 20$

Esta es la aplicación más directa de la fórmula, ya que conocemos el primer y último término:

$$\begin{aligned} S_{20} &= \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \\ &= \frac{20(10 + 105)}{2} \\ &= \frac{20 \cdot 115}{2} \\ &= \frac{2300}{2} \\ &= 1150 \end{aligned}$$

Información adicional (cálculo de d):

Aunque no lo piden, podemos calcular la diferencia:

$$\begin{aligned} a_{20} &= a_1 + 19d \\ 105 &= 10 + 19d \\ 19d &= 95 \\ d &= \frac{95}{19} = 5 \end{aligned}$$

Verificación con la fórmula alternativa:

$$\begin{aligned} S_{20} &= \frac{20[2 \cdot 10 + 19 \cdot 5]}{2} \\ &= \frac{20[20 + 95]}{2} \\ &= \frac{20 \cdot 115}{2} \\ &= 1150 \end{aligned}$$

✓

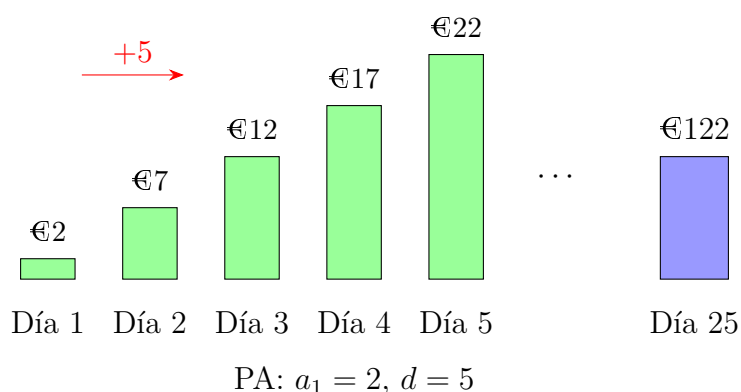
Respuesta (c): $S_{20} = 1150$.

2.4. Ejercicio 39: Problemas de Ahorro (PA)

Enunciado del Ejercicio 39

- a) Una persona ahorra €2 el primer día, y cada día siguiente ahorra €5 más que el día anterior. ¿Cuánto habrá ahorrado el día 25?
- b) ¿Cuál es el ahorro total acumulado al cabo de 25 días?
- c) Si quiere alcanzar un ahorro total de €780, ¿cuántos días necesita?

Representación Visual



Apartado (a): Ahorro en el día 25

Identificación de la PA:

- $a_1 = 2$ (ahorro del primer día)
- $d = 5$ (incremento diario)
- $n = 25$ (día que nos interesa)

Cálculo de a_{25} :

$$\begin{aligned}
 a_{25} &= a_1 + (25 - 1)d \\
 &= 2 + 24 \cdot 5 \\
 &= 2 + 120 \\
 &= 122 \text{ €}
 \end{aligned}$$

Verificación con algunos términos:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 2 \\
 a_2 &= 2 + 5 = 7 \\
 a_3 &= 7 + 5 = 12 \\
 a_4 &= 12 + 5 = 17 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Patrón: 2, 7, 12, 17, 22, ... con diferencia constante de 5. ✓

Respuesta (a): El día 25 ahorrará **122 €**.

Apartado (b): Ahorro total acumulado en 25 días

Queremos calcular la suma de los ahorros diarios desde el día 1 hasta el día 25:

$$S_{25} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{25}$$

Aplicación de la fórmula:

Ya conocemos $a_1 = 2$ y $a_{25} = 122$, entonces:

$$\begin{aligned} S_{25} &= \frac{25(a_1 + a_{25})}{2} \\ &= \frac{25(2 + 122)}{2} \\ &= \frac{25 \cdot 124}{2} \\ &= \frac{3100}{2} \\ &= 1550 \text{ €} \end{aligned}$$

Verificación con la fórmula alternativa:

$$\begin{aligned} S_{25} &= \frac{25[2 \cdot 2 + 24 \cdot 5]}{2} \\ &= \frac{25[4 + 120]}{2} \\ &= \frac{25 \cdot 124}{2} \\ &= 1550 \text{ €} \end{aligned}$$

✓

Respuesta (b): El ahorro total acumulado al cabo de 25 días es **1550 €**.

Apartado (c): Días necesarios para €780

Planteamiento:

Queremos encontrar n tal que $S_n = 780$ €.

Ecuación:

$$S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2} = 780$$

Sustituyendo $a_1 = 2$ y $d = 5$:

$$\frac{n[2 \cdot 2 + (n-1) \cdot 5]}{2} = 780$$

Simplificación:

$$\begin{aligned}\frac{n[4 + 5n - 5]}{2} &= 780 \\ \frac{n[5n - 1]}{2} &= 780 \\ n(5n - 1) &= 1560 \\ 5n^2 - n &= 1560 \\ 5n^2 - n - 1560 &= 0\end{aligned}$$

Ecuación cuadrática:

$$5n^2 - n - 1560 = 0$$

Aplicamos la fórmula general:

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde $a = 5$, $b = -1$, $c = -1560$.

Cálculo del discriminante:

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-1)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-1560) \\ &= 1 + 31200 \\ &= 31201\end{aligned}$$

Cálculo de la raíz:

$$\sqrt{31201} \approx 176,63$$

Para ser más preciso, verifiquemos:

$$176^2 = 30976$$

$$177^2 = 31329$$

Por tanto, $\sqrt{31201} \approx 176,6$ (más cerca de 177).

Cálculo exacto:

$$\sqrt{31201} = \sqrt{31201} \approx 176,628$$

Soluciones:

$$\begin{aligned}n &= \frac{1 \pm \sqrt{31201}}{10} \\ n_1 &= \frac{1 + 176,628}{10} = \frac{177,628}{10} = 17,76 \\ n_2 &= \frac{1 - 176,628}{10} = \frac{-175,628}{10} = -17,56 \quad (\text{descartada, negativa})\end{aligned}$$

Como n debe ser un número entero de días, probamos $n = 17$ y $n = 18$:

Para $n = 17$:

$$\begin{aligned} S_{17} &= \frac{17[2 \cdot 2 + 16 \cdot 5]}{2} \\ &= \frac{17[4 + 80]}{2} \\ &= \frac{17 \cdot 84}{2} \\ &= \frac{1428}{2} \\ &= 714 \text{ €} \end{aligned}$$

$714 < 780$, no es suficiente.

Para $n = 18$:

$$\begin{aligned} S_{18} &= \frac{18[2 \cdot 2 + 17 \cdot 5]}{2} \\ &= \frac{18[4 + 85]}{2} \\ &= \frac{18 \cdot 89}{2} \\ &= \frac{1602}{2} \\ &= 801 \text{ €} \end{aligned}$$

$801 > 780$, ¡es suficiente!

Respuesta (c): Necesita **18 días** para alcanzar (o superar) un ahorro total de €780.

Detalle: Al cabo de 17 días habrá ahorrado €714, y al cabo de 18 días habrá ahorrado €801.

2.5. Ejercicio 40: Hallar el Número de Términos (PA)

Enunciado del Ejercicio 40

- a) En una PA, $a_1 = 5$, $d = 3$ y el último término es $a_n = 53$. ¿Cuántos términos (n) tiene la progresión?
- b) El último término de una PA es 121, el primero es 1 y la diferencia es 5. ¿Cuántos términos tiene?
- c) Calcula la suma de los términos de la PA del apartado (b).

Apartado (a): Cálculo del número de términos

Datos:

- $a_1 = 5$
- $d = 3$
- $a_n = 53$
- Incógnita: n

Planteamiento:

Usamos la fórmula del término general:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Sustituyendo:

$$53 = 5 + (n - 1) \cdot 3$$

Despeje:

$$53 - 5 = (n - 1) \cdot 3$$

$$48 = 3(n - 1)$$

$$\frac{48}{3} = n - 1$$

$$16 = n - 1$$

$$n = 17$$

Verificación:

$$a_{17} = 5 + (17 - 1) \cdot 3$$

$$= 5 + 16 \cdot 3$$

$$= 5 + 48$$

$$= 53$$

✓

Respuesta (a): La progresión tiene **17 términos**.

Progresión completa: 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, 47, 50, 53.

Apartado (b): Número de términos (segundo caso)**Datos:**

- $a_1 = 1$
- $d = 5$
- $a_n = 121$
- Incógnita: n

Planteamiento:

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 + (n - 1)d \\ 121 &= 1 + (n - 1) \cdot 5\end{aligned}$$

Despeje:

$$\begin{aligned}121 - 1 &= 5(n - 1) \\ 120 &= 5(n - 1) \\ \frac{120}{5} &= n - 1 \\ 24 &= n - 1 \\ n &= 25\end{aligned}$$

Verificación:

$$\begin{aligned}a_{25} &= 1 + (25 - 1) \cdot 5 \\ &= 1 + 24 \cdot 5 \\ &= 1 + 120 \\ &= 121\end{aligned}$$

✓

Respuesta (b): La progresión tiene **25 términos**.**Apartado (c): Suma de la progresión del apartado (b)****Datos:**

- $a_1 = 1$
- $a_{25} = 121$
- $n = 25$

Aplicación de la fórmula:

$$\begin{aligned}
 S_{25} &= \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \\
 &= \frac{25(1 + 121)}{2} \\
 &= \frac{25 \cdot 122}{2} \\
 &= \frac{3050}{2} \\
 &= 1525
 \end{aligned}$$

Verificación con fórmula alternativa:

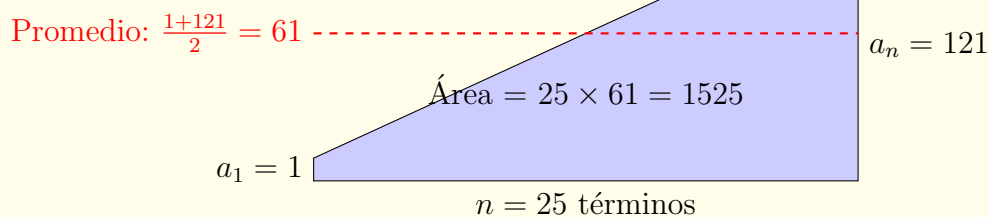
$$\begin{aligned}
 S_{25} &= \frac{25[2 \cdot 1 + 24 \cdot 5]}{2} \\
 &= \frac{25[2 + 120]}{2} \\
 &= \frac{25 \cdot 122}{2} \\
 &= 1525
 \end{aligned}$$

✓

Respuesta (c): La suma de todos los términos de la progresión es **1525**.

Interpretación Visual de la Suma

La suma de una PA puede interpretarse como el área de un trapecio:



La altura promedio del trapecio es $\frac{a_1 + a_n}{2}$ y la base es n , por lo que el área (suma) es $n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$.

Conclusión

En este documento hemos resuelto de manera exhaustiva y rigurosa todos los ejercicios propuestos sobre:

1. Porcentajes y Variaciones (Ejercicios 31-35):

- Aumentos y disminuciones encadenadas
- Impuestos y descuentos
- Cálculo de precios iniciales
- Aplicaciones a áreas y crecimientos exponenciales

2. Progresiones Aritméticas (Ejercicios 36-40):

- Cálculo de términos generales y específicos
- Sumas de progresiones
- Problemas aplicados de ahorro
- Determinación del número de términos

Conceptos Clave

Para Porcentajes:

- Factor de aumento del $p\%$: $1 + \frac{p}{100}$
- Factor de disminución del $p\%$: $1 - \frac{p}{100}$
- Variaciones encadenadas: multiplicar factores
- Cálculo inverso: $P_{\text{inicial}} = \frac{P_{\text{final}}}{f_{\text{total}}}$

Para Progresiones Aritméticas:

- Término general: $a_n = a_1 + (n - 1)d$
- Suma: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$

*Elaborado con rigor académico por SuperAgent de CREA
28 de febrero de 2026*

Soluciones Detalladas

Ejercicios 41 al 50

Matemáticas - 3º ESO

Repaso Global - Primera Evaluación

Curso Académico 2025/2026

Elaborado por: SuperAgent - CREA O

Documento con rigor matemático absoluto

Índice

1. Ejercicio 41: Cálculo de la Razón y el Término General (PG I)	3
1.1. Enunciado	3
1.2. Soluciones	3
1.2.1. Apartado a)	3
1.2.2. Apartado b)	3
1.2.3. Apartado c)	3
2. Ejercicio 42: Cálculo de la Razón y el Término General (PG II)	5
2.1. Enunciado	5
2.2. Soluciones	5
2.2.1. Apartado a)	5
2.2.2. Apartado b)	5
2.2.3. Apartado c)	5
3. Ejercicio 43: Suma de Términos (PG)	7
3.1. Enunciado	7
3.2. Soluciones	7
3.2.1. Apartado a)	7
3.2.2. Apartado b)	7
3.2.3. Apartado c)	7
4. Ejercicio 44: Hallar la Razón y el Primer Término (PG)	8
4.1. Enunciado	8
4.2. Soluciones	8
4.2.1. Apartado a)	8
4.2.2. Apartado b)	8
4.2.3. Apartado c)	8
5. Ejercicio 45: Problemas de Crecimiento (PG)	10
5.1. Enunciado	10
5.2. Soluciones	10
5.2.1. Apartado a)	10
5.2.2. Apartado b)	10
5.2.3. Apartado c)	10
6. Ejercicio 46: Fracciones y Números Reales	11
6.1. Enunciado	11
6.2. Soluciones	11
6.2.1. Apartado a)	11
6.2.2. Apartado b)	11
6.2.3. Apartado c)	11

7. Ejercicio 47: Potencias y Proporcionalidad	13
7.1. Enunciado	13
7.2. Soluciones	13
7.2.1. Apartado a)	13
7.2.2. Apartado b)	13
7.2.3. Apartado c)	13
8. Ejercicio 48: Progresiones Mixtas	15
8.1. Enunciado	15
8.2. Soluciones	15
8.2.1. Apartado a)	15
8.2.2. Apartado b)	15
8.2.3. Apartado c)	15
9. Ejercicio 49: Radicales y Fracciones Generatrices	16
9.1. Enunciado	16
9.2. Soluciones	16
9.2.1. Apartado a)	16
9.2.2. Apartado b)	16
9.2.3. Apartado c)	16
10.Ejercicio 50: Problemas Aritméticos	17
10.1. Enunciado	17
10.2. Soluciones	17
10.2.1. Apartado a)	17
10.2.2. Apartado b)	17
10.2.3. Apartado c)	18
11.Resumen de Resultados	19

1. Ejercicio 41: Cálculo de la Razón y el Término General (PG I)

1.1. Enunciado

En una Progresión Geométrica (PG):

- a) $a_1 = 4$ y la razón $r = 3$. Halla el término general a_n .
- b) Calcula el término a_6 .
- c) Calcula la suma de los 6 primeros términos (S_6).

1.2. Soluciones

1.2.1. Apartado a)

Solución

Aplicamos la fórmula del término general:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 4 \cdot 3^{n-1}$$

Respuesta: $a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$

1.2.2. Apartado b)

Solución

Sustituimos $n = 6$:

$$\begin{aligned} a_6 &= 4 \cdot 3^{6-1} \\ &= 4 \cdot 3^5 \\ &= 4 \cdot 243 \\ &= 972 \end{aligned}$$

Respuesta: $a_6 = 972$

1.2.3. Apartado c)

Solución

Aplicamos la fórmula de la suma:

$$\begin{aligned} S_6 &= a_1 \cdot \frac{r^6 - 1}{r - 1} \\ &= 4 \cdot \frac{3^6 - 1}{3 - 1} \\ &= 4 \cdot \frac{729 - 1}{2} \\ &= 4 \cdot \frac{728}{2} \\ &= 4 \cdot 364 \\ &= 1456 \end{aligned}$$

Respuesta: $S_6 = 1456$

2. Ejercicio 42: Cálculo de la Razón y el Término General (PG II)

2.1. Enunciado

En una PG: $a_2 = 6$ y $a_3 = 18$.

- a) Halla la razón r y el primer término a_1 .
- b) Halla el término general a_n .
- c) Calcula la suma de los 7 primeros términos (S_7).

2.2. Soluciones

2.2.1. Apartado a)

Solución

Calculamos r :

$$r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{18}{6} = 3$$

Calculamos a_1 :

$$a_1 = \frac{a_2}{r} = \frac{6}{3} = 2$$

Respuestas: $r = 3, \quad a_1 = 2$

2.2.2. Apartado b)

Solución

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$$

Respuesta: $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

2.2.3. Apartado c)

Solución

$$\begin{aligned} S_7 &= 2 \cdot \frac{3^7 - 1}{3 - 1} \\ &= 2 \cdot \frac{2187 - 1}{2} \\ &= 2 \cdot \frac{2186}{2} \\ &= 2 \cdot 1093 \\ &= 2186 \end{aligned}$$

Respuesta: $S_7 = 2186$

3. Ejercicio 43: Suma de Términos (PG)

3.1. Enunciado

- a) Halla el término a_5 de la PG con $a_1 = 1$ y $r = 2$.
- b) Calcula la suma de los 5 primeros términos (S_5).
- c) Calcula la suma de los 8 primeros términos de la PG con $a_1 = 5$ y $r = -2$.

3.2. Soluciones

3.2.1. Apartado a)

Solución

$$a_5 = 1 \cdot 2^{5-1} = 2^4 = 16$$

Respuesta: $a_5 = 16$

3.2.2. Apartado b)

Solución

$$S_5 = 1 \cdot \frac{2^5 - 1}{2 - 1} = \frac{32 - 1}{1} = 31$$

Respuesta: $S_5 = 31$

3.2.3. Apartado c)

Solución

$$\begin{aligned} S_8 &= 5 \cdot \frac{(-2)^8 - 1}{-2 - 1} \\ &= 5 \cdot \frac{256 - 1}{-3} \\ &= 5 \cdot \frac{255}{-3} \\ &= 5 \cdot (-85) \\ &= -425 \end{aligned}$$

Respuesta: $S_8 = -425$

4. Ejercicio 44: Hallar la Razón y el Primer Término (PG)

4.1. Enunciado

En una PG: $a_4 = 40$ y $a_5 = 20$.

- a) Halla la razón r y el primer término a_1 .
- b) Calcula el término a_8 .
- c) Calcula la suma de los 8 primeros términos.

4.2. Soluciones

4.2.1. Apartado a)

Solución

Razón:

$$r = \frac{a_5}{a_4} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

Primer término:

$$a_1 = \frac{a_4}{r^3} = \frac{40}{(1/2)^3} = \frac{40}{1/8} = 40 \cdot 8 = 320$$

Respuestas: $r = \frac{1}{2}, \quad a_1 = 320$

4.2.2. Apartado b)

Solución

$$a_8 = 320 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{320}{128} = \frac{5}{2} = 2,5$$

Respuesta: $a_8 = 2,5$

4.2.3. Apartado c)

Solución

$$\begin{aligned} S_8 &= 320 \cdot \frac{1 - (1/2)^8}{1 - 1/2} \\ &= 320 \cdot \frac{1 - 1/256}{1/2} \\ &= 320 \cdot \frac{255/256}{1/2} \\ &= 320 \cdot \frac{255}{128} \\ &= \frac{5 \cdot 255}{2} = 637,5 \end{aligned}$$

Respuesta: $S_8 = 637,5$

5. Ejercicio 45: Problemas de Crecimiento (PG)

5.1. Enunciado

- a) Una bacteria se duplica cada hora. Si se empieza con 5 bacterias, ¿cuántas habrá después de 8 horas?
- b) Una inversión genera un 5 % de interés compuesto anualmente. Si se invierten €1000, ¿cuánto dinero se tendrá después de 4 años?
- c) Si $a_1 = 1$ y $a_6 = 32$, halla la razón r .

5.2. Soluciones

5.2.1. Apartado a)

Solución

Después de 8 horas estamos en el término a_9 :

$$a_9 = 5 \cdot 2^{9-1} = 5 \cdot 2^8 = 5 \cdot 256 = 1280$$

Respuesta:

5.2.2. Apartado b)

Solución

Con $r = 1,05$, después de 4 años (término a_5):

$$a_5 = 1000 \cdot (1,05)^4 = 1000 \cdot 1,21550625 \approx 1215,51$$

Respuesta:

5.2.3. Apartado c)

Solución

$$\begin{aligned}a_6 &= a_1 \cdot r^5 \\32 &= 1 \cdot r^5 \\r^5 &= 32 = 2^5 \\r &= 2\end{aligned}$$

Respuesta:

6. Ejercicio 46: Fracciones y Números Reales

6.1. Enunciado

- a) Calcula: $\frac{1}{2} \div \left[\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) \right]$.
- b) Simplifica: $\sqrt{200} - 3\sqrt{18}$.
- c) Clasifica $0.\overline{41}$ y halla su fracción generatriz.

6.2. Soluciones

6.2.1. Apartado a)

Solución

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \div \left[\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) \right] \\ = \frac{1}{2} \div \left[\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \right] \\ = \frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

Respuesta: $\boxed{1}$

6.2.2. Apartado b)

Solución

$$\begin{aligned} \sqrt{200} - 3\sqrt{18} &= \sqrt{100 \cdot 2} - 3\sqrt{9 \cdot 2} \\ &= 10\sqrt{2} - 3 \cdot 3\sqrt{2} \\ &= 10\sqrt{2} - 9\sqrt{2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Respuesta: $\boxed{\sqrt{2}}$

6.2.3. Apartado c)

Solución

$0.\overline{41}$ es un decimal periódico puro, por tanto es racional: $0.\overline{41} \in \mathbb{Q}$.

Fracción generatriz:

$$0.\overline{41} = \frac{41}{99}$$

Respuestas:

Número racional ($\mathbb{Q}$), $\frac{41}{99}$

7. Ejercicio 47: Potencias y Proporcionalidad

7.1. Enunciado

- a) Simplifica: $\frac{2^3 \cdot 5^{-1} \cdot 10^4}{4^2 \cdot 5^5}$.
- b) Realiza la operación en notación científica: $7,3 \times 10^{-2} - 5,0 \times 10^{-3}$.
- c) 15 albañiles hacen una obra en 20 días. ¿Cuántos albañiles se necesitan para hacerla en 12 días?

7.2. Soluciones

7.2.1. Apartado a)

Solución

$$\begin{aligned}\frac{2^3 \cdot 5^{-1} \cdot 10^4}{4^2 \cdot 5^5} &= \frac{2^3 \cdot 5^{-1} \cdot 2^4 \cdot 5^4}{2^4 \cdot 5^5} \\ &= \frac{2^7 \cdot 5^3}{2^4 \cdot 5^5} \\ &= 2^3 \cdot 5^{-2} \\ &= \frac{8}{25}\end{aligned}$$

Respuesta: $\boxed{\frac{8}{25}}$

7.2.2. Apartado b)

Solución

$$\begin{aligned}7,3 \times 10^{-2} - 5,0 \times 10^{-3} &= 7,3 \times 10^{-2} - 0,5 \times 10^{-2} \\ &= 6,8 \times 10^{-2}\end{aligned}$$

Respuesta: $\boxed{6,8 \times 10^{-2}}$

7.2.3. Apartado c)

Solución

Proporcionalidad inversa:

$$15 \times 20 = x \times 12$$

$$300 = 12x$$

$$x = 25$$

Respuesta:

8. Ejercicio 48: Progresiones Mixtas

8.1. Enunciado

- a) En una PA, $a_1 = 5$ y $a_{10} = 41$. Halla la diferencia d .
- b) En una PG, $a_1 = 5$ y $r = 2$. Calcula S_{10} .
- c) ¿Cuánto es el precio final de €500 tras un descuento del 10 % y otro del 5 %?

8.2. Soluciones

8.2.1. Apartado a)

Solución

$$\begin{aligned}a_{10} &= a_1 + 9d \\41 &= 5 + 9d \\36 &= 9d \\d &= 4\end{aligned}$$

Respuesta: $d = 4$

8.2.2. Apartado b)

Solución

$$S_{10} = 5 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 5 \cdot 1023 = 5115$$

Respuesta: $S_{10} = 5115$

8.2.3. Apartado c)

Solución

$$500 \times 0,90 \times 0,95 = 500 \times 0,855 = 427,50$$

Respuesta: $427,50$

9. Ejercicio 49: Radicales y Fracciones Generatrices

9.1. Enunciado

- a) Opera: $2\sqrt{7} \cdot (\sqrt{7} - 3\sqrt{28})$.
- b) Halla la fracción generatriz de $0.\overline{53}$.
- c) Clasifica el resultado de $\sqrt{5} + \sqrt{20}$.

9.2. Soluciones

9.2.1. Apartado a)

Solución

$$\begin{aligned} 2\sqrt{7} \cdot (\sqrt{7} - 3\sqrt{28}) &= 2\sqrt{7} \cdot (\sqrt{7} - 3 \cdot 2\sqrt{7}) \\ &= 2\sqrt{7} \cdot (-5\sqrt{7}) \\ &= -10 \cdot 7 \\ &= -70 \end{aligned}$$

Respuesta:

9.2.2. Apartado b)

Solución

$$0.\overline{53} = \frac{53}{99}$$

Respuesta:

9.2.3. Apartado c)

Solución

$$\sqrt{5} + \sqrt{20} = \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

$3\sqrt{5}$ es irracional.

Respuesta:

10. Ejercicio 50: Problemas Aritméticos

10.1. Enunciado

- a) En un viaje, se gasta $\frac{1}{5}$ del presupuesto en transporte y $\frac{3}{4}$ del resto en hotel. Si quedan €200, ¿cuál era el presupuesto?
- b) Se mezcla 1 kg de café a €10 con 1 kg a €14. ¿Cuál es el precio de la mezcla?
- c) Un número aumenta un 10 % y luego disminuye un 30 %. Si el resultado es 77, ¿cuál era el número inicial?

10.2. Soluciones

10.2.1. Apartado a)

Solución

Sea x el presupuesto total:

$$\text{Transporte} = \frac{1}{5}x$$

$$\text{Resto} = \frac{4}{5}x$$

$$\text{Hotel} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}x = \frac{3}{5}x$$

$$\text{Queda} = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}x = \frac{1}{5}x = 200$$

$$x = 1000$$

Respuesta:

10.2.2. Apartado b)

Solución

$$\text{Precio medio} = \frac{1 \times 10 + 1 \times 14}{1 + 1} = \frac{24}{2} = 12$$

Respuesta:

10.2.3. Apartado c)

Solución

Sea x el número inicial:

$$x \times 1,10 \times 0,70 = 77$$

$$0,77x = 77$$

$$x = 100$$

Respuesta:

11. Resumen de Resultados

Ej.	Resultados Principales
41	$a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$, $a_6 = 972$, $S_6 = 1456$
42	$r = 3$, $a_1 = 2$, $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$, $S_7 = 2186$
43	$a_5 = 16$, $S_5 = 31$, $S_8 = -425$ (con $r = -2$)
44	$r = 1/2$, $a_1 = 320$, $a_8 = 2,5$, $S_8 = 637,5$
45	1280 bacterias, €1215.51, $r = 2$
46	Resultado: $1, \sqrt{2}, \frac{41}{99} \in \mathbb{Q}$
47	$\frac{8}{25}$, $6,8 \times 10^{-2}$, 25 albañiles
48	$d = 4$, $S_{10} = 5115$, €427.50
49	$-70, \frac{53}{99}, 3\sqrt{5}$ (irracional)
50	€1000, €12/kg, número inicial: 100

Fin del Documento

*Elaborado con rigor matemático por SuperAgent - CREA
Curso 2025/2026*

Soluciones Detalladas

Ejercicios 51 al 55

Matemáticas - 3º ESO

Repaso de Aritmética, Potencias, Radicales,
Proporcionalidad y Progresiones

Curso 2025/2026

Profesor: Matemático Profesional
Redactor Técnico Experto en L^AT_EX

1 de marzo de 2026

Índice

Introducción	2
1. Ejercicio 51: Operaciones Combinadas y Clasificación	3
1.1. Apartado a) Operación combinada con fracciones	3
1.2. Apartado b) Clasificación de números reales	5
1.3. Apartado c) Fracción generatriz de decimal periódico puro	8
2. Ejercicio 52: Potencias y Proporcionalidad Compuesta	11
2.1. Apartado a) Simplificación de expresión con potencias	11
2.2. Apartado b) Proporcionalidad compuesta	14
2.3. Apartado c) División en notación científica	17
3. Ejercicio 53: Problemas con Fracciones y Radicales	21
3.1. Apartado a) Problema de fracciones encadenadas	21
3.2. Apartado b) Operaciones con radicales	22
3.3. Apartado c) Porcentajes y fracciones	23
4. Ejercicio 54: Progresión Aritmética	24
4.1. Apartado a) Calcular primer término y diferencia	24
4.2. Apartado b) Calcular término específico	24
4.3. Apartado c) Suma de términos	24
5. Ejercicio 55: Variaciones Porcentuales	26
5.1. Apartado a) Precio final	26
5.2. Apartado b) Factor de variación	26
5.3. Apartado c) Porcentaje de variación	26
Conclusiones y Resumen	27
Tablas de Referencia Rápida	30

Introducción

Este documento contiene las soluciones completas y detalladas de los ejercicios 51 al 55 del examen de repaso de Matemáticas de 3º ESO. Cada ejercicio se ha resuelto con rigor matemático absoluto, justificando cada paso y proporcionando explicaciones pedagógicas exhaustivas.

Estructura del documento

Para cada ejercicio se presenta:

- **Enunciado completo** del ejercicio
- **Ilustración gráfica** representativa cuando sea pertinente
- **Solución paso a paso** con todas las transformaciones justificadas
- **Observaciones** sobre errores comunes y conceptos clave
- **Resultado final** claramente identificado

Metodología

Se ha seguido una metodología rigurosa que incluye:

1. Identificación clara del tipo de problema
2. Selección del método de resolución más apropiado
3. Desarrollo completo sin omitir pasos intermedios
4. Verificación de resultados cuando sea posible
5. Comentarios pedagógicos para facilitar la comprensión

1. Ejercicio 51: Operaciones Combinadas y Clasificación

Enunciado

Ejercicio 51. Operaciones Combinadas y Clasificación

a) Calcula: $\frac{5}{3} \div \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - 1$.

b) Clasifica $\sqrt{100}$ y $\sqrt{10}$.

c) Halla la fracción generatriz de $0,\overline{05}$.

1.1. Apartado a) Operación combinada con fracciones

Solución

Enunciado: Calcula $\frac{5}{3} \div \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - 1$.

Método de resolución: Aplicaremos la jerarquía de operaciones (primero paréntesis, luego divisiones/multiplicaciones, finalmente sumas/restas), operando con fracciones mediante mínimo común múltiplo cuando sea necesario.

Desarrollo paso a paso:

Paso 1: Resolver el paréntesis $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$.

Para sumar fracciones necesitamos un denominador común. Calculamos el m.c.m.(2,3):

$$\text{m.c.m.}(2,3) = 6$$

Expresamos ambas fracciones con denominador 6:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6} \\ \frac{1}{3} &= \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}\end{aligned}$$

Justificación: Amplificamos cada fracción multiplicando numerador y denominador por el mismo número (propiedad fundamental de las fracciones), lo que no altera su valor.

Sumamos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

Paso 2: Sustituimos en la expresión original:

$$\frac{5}{3} \div \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - 1 = \frac{5}{3} \div \frac{5}{6} - 1$$

Paso 3: Realizamos la división de fracciones.

Recordatorio teórico: Dividir por una fracción equivale a multiplicar por su inversa (recíproca). Es decir:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Aplicamos:

$$\frac{5}{3} \div \frac{5}{6} = \frac{5}{3} \cdot \frac{6}{5}$$

Paso 4: Multiplicamos las fracciones:

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{5 \cdot 6}{3 \cdot 5} = \frac{30}{15}$$

Paso 5: Simplificamos la fracción dividiendo numerador y denominador por su m.c.d.

Calculamos m.c.d.(30,15):

$$30 = 15 \cdot 2 + 0$$
$$\text{m.c.d.}(30, 15) = 15$$

Simplificamos:

$$\frac{30}{15} = \frac{30 \div 15}{15 \div 15} = \frac{2}{1} = 2$$

Paso 6: Restamos 1:

$$2 - 1 = 1$$

Observación

Errores comunes a evitar:

- No respetar la jerarquía de operaciones y realizar la división antes que la suma del paréntesis.
- Olvidar invertir la segunda fracción al dividir.
- No simplificar el resultado final.

Concepto clave: La división de fracciones se transforma en multiplicación por la fracción recíproca. Este es un resultado fundamental del álgebra de fracciones que deriva de la definición de división como operación inversa de la multiplicación.

Resultado Final

$$\frac{5}{3} \div \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - 1 = 1$$

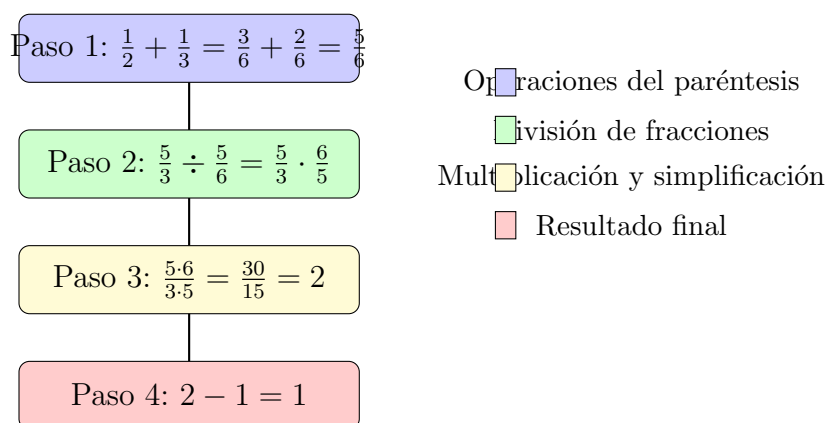
Diagrama de flujo de la operación

Figura 1: Secuencia de operaciones para el ejercicio 51a

1.2. Apartado b) Clasificación de números reales**Solución**

Enunciado: Clasifica $\sqrt{100}$ y $\sqrt{10}$.

Método de resolución: Calcularemos cada raíz y determinaremos a qué conjunto numérico pertenece cada resultado ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$), indicando el más pequeño que lo contiene.

Recordatorio teórico: Los conjuntos numéricos tienen la siguiente relación de inclusión:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

donde $\mathbb{I}$ (números irracionales) cumple que $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$ y $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$.

- $\mathbb{N}$ = Números naturales = $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ (o $\{1, 2, 3, \dots\}$ según convención)
- $\mathbb{Z}$ = Números enteros = $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- $\mathbb{Q}$ = Números racionales = $\left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$
- $\mathbb{I}$ = Números irracionales = Números reales no expresables como fracción
- $\mathbb{R}$ = Números reales = $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

Clasificación de $\sqrt{100}$:

Paso 1: Calculamos la raíz cuadrada:

$$\sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10$$

Justificación: Por definición, $\sqrt{a^2} = |a|$. Como $10 > 0$, entonces $\sqrt{10^2} = 10$.

Paso 2: Clasificamos el número 10:

- ¿Es natural? Sí, porque $10 \in \mathbb{N}$ (es un número entero positivo).
- Por tanto, también es entero ($10 \in \mathbb{Z}$), racional ($10 = \frac{10}{1} \in \mathbb{Q}$) y real ($10 \in \mathbb{R}$).

Conclusión: El conjunto más pequeño al que pertenece $\sqrt{100} = 10$ es $\mathbb{N}$ (números naturales).

Clasificación de $\sqrt{10}$:

Paso 1: Intentamos simplificar la raíz:

$$\sqrt{10} = \sqrt{2 \cdot 5}$$

Como 2 y 5 son primos distintos, no se puede simplificar más.

Paso 2: Determinamos si es racional o irracional.

Teorema: Si n no es un cuadrado perfecto, entonces $\sqrt{n}$ es irracional.

Demostración (por reducción al absurdo):

Supongamos que $\sqrt{10}$ es racional. Entonces existen $p, q \in \mathbb{Z}$ con $q \neq 0$ y m.c.d.(p, q) = 1 (fracción irreducible) tales que:

$$\sqrt{10} = \frac{p}{q}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$10 = \frac{p^2}{q^2}$$

Despejando:

$$10q^2 = p^2$$

Esto implica que p^2 es múltiplo de 10, y por tanto de 2 y de 5.

Si p^2 es múltiplo de 2, entonces p es múltiplo de 2 (por el lema de Euclides para números primos). Sea $p = 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Sustituyendo:

$$10q^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

$$10q^2 = 4k^2$$

$$5q^2 = 2k^2$$

Ahora $2k^2$ es múltiplo de 5, luego k^2 es múltiplo de 5, y por tanto k es múltiplo de 5. Sea $k = 5m$.

Entonces $p = 2k = 2 \cdot 5m = 10m$.

Volviendo a la ecuación original:

$$10q^2 = p^2 = (10m)^2 = 100m^2$$

$$q^2 = 10m^2$$

Esto implica que q^2 (y por tanto q) es múltiplo de 2 y de 5, es decir, múltiplo de 10.

Pero entonces tanto p como q son múltiplos de 10, lo que contradice que $\text{m.c.d.}(p, q) = 1$.

Por tanto, nuestra suposición es falsa: $\sqrt{10}$ es **irracional**.

Conclusión: El conjunto más pequeño al que pertenece $\sqrt{10}$ es $\mathbb{I}$ (números irracionales).

Observación

Concepto clave: La clasificación de números es jerárquica. Un número pertenece a varios conjuntos simultáneamente, pero se clasifica en el más pequeño (más restrictivo) que lo contiene.

Criterio práctico:

- Si $\sqrt{n}$ da un número entero, es natural (o entero si es negativo).
- Si $\sqrt{n}$ no simplifica a un entero pero n no es cuadrado perfecto, es irracional.
- Los decimales periódicos son siempre racionales.
- Los decimales infinitos no periódicos son irracionales.

Resultado Final

- $\sqrt{100} = 10 \in \mathbb{N}$ (números naturales)
- $\sqrt{10} \in \mathbb{I}$ (números irracionales)

Conjuntos Numéricos

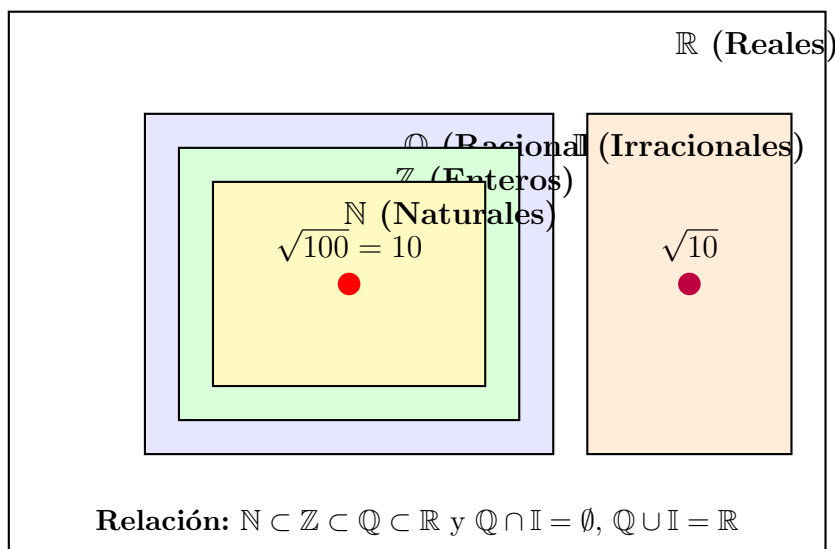


Figura 2: Clasificación de $\sqrt{100}$ y $\sqrt{10}$ en los conjuntos numéricos

1.3. Apartado c) Fracción generatriz de decimal periódico puro

Solución

Enunciado: Halla la fracción generatriz de $0,\overline{05}$.

Método de resolución: Utilizaremos el método algebraico estándar para números decimales periódicos puros, que consiste en plantear una ecuación y eliminar la periodicidad mediante multiplicación y resta.

Identificación del tipo de decimal:

El número $0,\overline{05} = 0,050505\dots$ es un **decimal periódico puro** porque:

- El periodo comienza inmediatamente después de la coma decimal
- El periodo es "05" (dos cifras que se repiten indefinidamente)
- No hay parte no periódica entre la coma y el periodo

Desarrollo paso a paso:

Paso 1: Llamamos x al número decimal:

$$x = 0,\overline{05}$$

$$x = 0,050505\dots$$

Paso 2: Identificamos la longitud del periodo.

El periodo "05" tiene 2 cifras.

Paso 3: Multiplicamos ambos miembros por $10^{\text{longitud del periodo}} = 10^2 = 100$:

Justificación: Al multiplicar por 10^n donde n es la longitud del periodo, desplazamos la coma n posiciones a la derecha, de modo que el periodo queda alineado.

$$100x = 100 \cdot 0,050505 \dots$$

$$100x = 5,050505 \dots$$

Paso 4: Observamos que:

$$100x = 5, \overline{05}$$

$$x = 0, \overline{05}$$

Ambos números tienen la misma parte periódica.

Paso 5: Restamos la segunda ecuación de la primera para eliminar la parte periódica:

$$100x - x = 5, \overline{05} - 0, \overline{05}$$

$$99x = 5$$

Justificación: Al restar, las partes periódicas (infinitas e idénticas) se cancelan, quedando solo la parte entera.

Paso 6: Despejamos x :

$$x = \frac{5}{99}$$

Paso 7: Verificamos que la fracción está en su forma irreducible.

Calculamos m.c.d.(5, 99):

$$99 = 5 \cdot 19 + 4$$

$$5 = 4 \cdot 1 + 1$$

$$4 = 1 \cdot 4 + 0$$

$$\text{m.c.d.}(5, 99) = 1$$

Como $\text{m.c.d.}(5, 99) = 1$, la fracción $\frac{5}{99}$ ya está en su forma más simplificada (irreducible).

Paso 8 (Verificación): Comprobamos dividiendo:

$$\frac{5}{99} = 5 \div 99 = 0,050505 \dots = 0, \overline{05} \quad \checkmark$$

Observación

Regla general para decimales periódicos puros:

Si un número decimal tiene periodo puro de n cifras, su fracción generatriz es:

$$0, \overline{a_1 a_2 \dots a_n} = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{\underbrace{99 \dots 9}_{n \text{ nueves}}}$$

En nuestro caso: $0, \overline{05} = \frac{05}{99} = \frac{5}{99}$

Errores comunes:

- Confundir decimal periódico puro con mixto
- Contar mal la cantidad de cifras del periodo
- No simplificar la fracción resultante
- Olvidar los ceros a la izquierda en el numerador (aunque no afectan al valor)

Concepto clave: Todo número decimal periódico es un número racional, es decir, se puede expresar como fracción de dos enteros. Esto demuestra que $0,\overline{05} \in \mathbb{Q}$.

Resultado Final

$$0,\overline{05} = \frac{5}{99}$$

Método para hallar la fracción generatriz

Paso 1: Llamar $x = 0,\overline{05} = 0,050505\dots$

Paso 2: Multiplicar por 10^n donde $n = \text{longitud del periodo} = 2$
 $100x = 5,\overline{050505\dots}$

Paso 3: Plantear el sistema y restar para eliminar periodicidad

$$\begin{array}{r} 100x = 5,\overline{05} \\ - x = 0,\overline{05} \\ \hline 99x = 5 \end{array}$$

Paso 4: Simplificar: $99x = 5$

Paso 5: Despejar: $x = \frac{5}{99}$ (ya irreducible)

Visualización del decimal periódico

$$0,\overbrace{05}^{\text{periodo}} \overbrace{05}^{\text{repite}} \overbrace{05}^{\text{repite}} \dots$$

2 cifras

Figura 3: Proceso para hallar la fracción generatriz de $0,\overline{05}$

2. Ejercicio 52: Potencias y Proporcionalidad Compuesta

Enunciado

Ejercicio 52. Potencias y Proporcionalidad Compuesta

- Simplifica: $\frac{3^5 \cdot 9^{-2}}{27 \cdot 3^0}$.
- 5 bombas llenan un depósito en 6 horas. ¿Cuánto tardarán 3 bombas en llenar un depósito doble de capacidad?
- Expresa el resultado en notación científica: $(1,5 \cdot 10^6) \div (3 \cdot 10^{-4})$.

2.1. Apartado a) Simplificación de expresión con potencias

Solución

Enunciado: Simplifica $\frac{3^5 \cdot 9^{-2}}{27 \cdot 3^0}$.

Método de resolución: Expresaremos todas las bases como potencias de 3 (base prima) y aplicaremos las propiedades de las potencias para simplificar.

Propiedades de potencias que utilizaremos:

- $a^0 = 1$ (para $a \neq 0$)
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Desarrollo paso a paso:

Paso 1: Expresamos todas las bases como potencias de 3.
Identificamos que:

$$\begin{aligned} 9 &= 3^2 \\ 27 &= 3^3 \end{aligned}$$

Verificación: $3^2 = 9$ y $3^3 = 27$ ✓

Paso 2: Sustituimos en la expresión original:

$$\frac{3^5 \cdot 9^{-2}}{27 \cdot 3^0} = \frac{3^5 \cdot (3^2)^{-2}}{3^3 \cdot 3^0}$$

Paso 3: Aplicamos la propiedad $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ en el término $9^{-2} = (3^2)^{-2}$:

$$(3^2)^{-2} = 3^{2 \cdot (-2)} = 3^{-4}$$

Justificación: Cuando elevamos una potencia a otra potencia, multiplicamos los exponentes.

Sustituyendo:

$$\frac{3^5 \cdot (3^2)^{-2}}{3^3 \cdot 3^0} = \frac{3^5 \cdot 3^{-4}}{3^3 \cdot 3^0}$$

Paso 4: Simplificamos $3^0 = 1$:

$$\frac{3^5 \cdot 3^{-4}}{3^3 \cdot 3^0} = \frac{3^5 \cdot 3^{-4}}{3^3 \cdot 1} = \frac{3^5 \cdot 3^{-4}}{3^3}$$

Paso 5: En el numerador, aplicamos $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$:

$$3^5 \cdot 3^{-4} = 3^{5+(-4)} = 3^{5-4} = 3^1 = 3$$

Sustituyendo:

$$\frac{3^5 \cdot 3^{-4}}{3^3} = \frac{3}{3^3}$$

Paso 6: Aplicamos $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$:

Primero expresamos 3 como 3^1 :

$$\frac{3}{3^3} = \frac{3^1}{3^3} = 3^{1-3} = 3^{-2}$$

Paso 7: Expresamos el resultado con exponente positivo (si se desea):

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

Verificación alternativa (método directo):

Podemos verificar operando directamente en el exponente de base 3:

$$\begin{aligned} \frac{3^5 \cdot 9^{-2}}{27 \cdot 3^0} &= \frac{3^5 \cdot 3^{-4}}{3^3 \cdot 3^0} \\ &= 3^{5+(-4)-3-0} \\ &= 3^{5-4-3} \\ &= 3^{-2} \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Observación

Estrategia clave: Cuando trabajamos con potencias de distintas bases, es fundamental identificar si las bases están relacionadas (una es potencia de otra). En este caso:

- $9 = 3^2$
- $27 = 3^3$

Esto nos permite expresar todo en la misma base (3) y aplicar las propiedades de potencias.

Errores comunes:

- Sumar los exponentes al dividir (en lugar de restar)
- Olvidar que $a^0 = 1$
- No reconocer las potencias ocultas ($9 = 3^2$, $27 = 3^3$)
- Multiplicar exponentes en lugar de sumarlos al multiplicar potencias de igual base

Forma del resultado: Tanto 3^{-2} como $\frac{1}{9}$ son correctos. La primera es la forma con exponente negativo, la segunda con exponente positivo. Ambas representan el mismo número racional.

Resultado Final

$$\frac{3^5 \cdot 9^{-2}}{27 \cdot 3^0} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

Árbol de simplificación de potencias

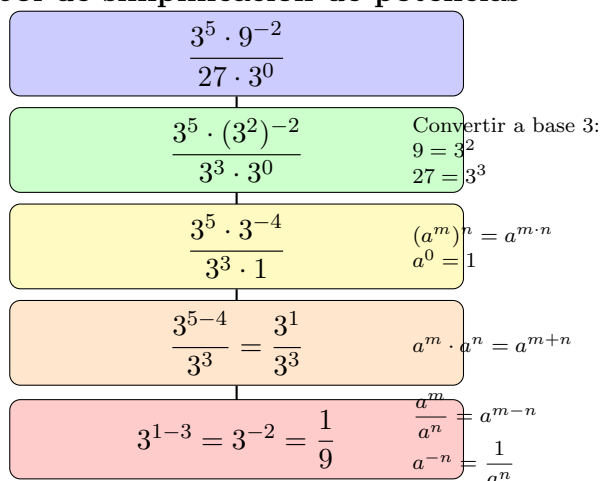


Figura 4: Proceso de simplificación paso a paso del ejercicio 52a

2.2. Apartado b) Proporcionalidad compuesta

Solución

Enunciado: 5 bombas llenan un depósito en 6 horas. ¿Cuánto tardarán 3 bombas en llenar un depósito doble de capacidad?

Método de resolución: Este es un problema de **proporcionalidad compuesta** que involucra tres magnitudes:

- Número de bombas
- Capacidad del depósito
- Tiempo necesario

Analizaremos la relación de proporcionalidad entre cada par de magnitudes.

Análisis de proporcionalidades:

1. Relación entre número de bombas y tiempo:

Si aumentamos el número de bombas, el tiempo disminuye. Por tanto, son **inversamente proporcionales**.

Matemáticamente: Si tenemos el doble de bombas, tardamos la mitad de tiempo.

$$\text{bombas} \cdot \text{tiempo} = \text{constante}$$

2. Relación entre capacidad del depósito y tiempo:

Si aumentamos la capacidad, necesitamos más tiempo. Por tanto, son **directamente proporcionales**.

Matemáticamente: Si duplicamos la capacidad, se duplica el tiempo.

$$\frac{\text{capacidad}}{\text{tiempo}} = \text{constante}$$

Planteamiento del problema:**Situación inicial:**

- 5 bombas
- 1 depósito (capacidad normal)
- 6 horas

Situación final (incógnita):

- 3 bombas
- 2 depósitos (capacidad doble)
- x horas = ?

Desarrollo paso a paso:

Paso 1: Organizamos la información en una tabla:

Situación	Bombas	Capacidad	Tiempo (h)
Inicial	5	1	6
Final	3	2	x

Paso 2: Planteamos la ecuación de proporcionalidad compuesta.

Regla: En proporcionalidad compuesta:

- Si la magnitud es directamente proporcional al tiempo, va en el numerador
- Si la magnitud es inversamente proporcional al tiempo, va en el denominador

Ecuación:

$$\frac{\text{Tiempo}_1}{\text{Tiempo}_2} = \frac{\text{Bombas}_2}{\text{Bombas}_1} \cdot \frac{\text{Capacidad}_1}{\text{Capacidad}_2}$$

Justificación:

- Bombas $\downarrow \Rightarrow$ Tiempo $\uparrow$ (inversa): bombas en posición inversa
- Capacidad $\uparrow \Rightarrow$ Tiempo $\uparrow$ (directa): capacidad en posición directa

Paso 3: Sustituimos los valores:

$$\frac{6}{x} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}$$

Paso 4: Calculamos el lado derecho:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 2} = \frac{3}{10}$$

Por tanto:

$$\frac{6}{x} = \frac{3}{10}$$

Paso 5: Despejamos x mediante productos cruzados:

Propiedad: Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $a \cdot d = b \cdot c$

$$\begin{aligned}\frac{6}{x} &= \frac{3}{10} \\ 6 \cdot 10 &= x \cdot 3 \\ 60 &= 3x \\ x &= \frac{60}{3} \\ x &= 20\end{aligned}$$

Paso 6 (Verificación lógica):

Comprobemos si el resultado tiene sentido:

- Tenemos **menos bombas** (3 en vez de 5): debería tardar **más tiempo** ✓
- Tenemos **más capacidad** (doble): debería tardar **más tiempo** ✓
- Resultado: 20 horas > 6 horas ✓

Verificación cuantitativa:

Efecto del cambio de bombas (sin cambiar capacidad):

Si con 5 bombas tardamos 6 horas, con 3 bombas tardaríamos:

$$\frac{5 \cdot 6}{3} = \frac{30}{3} = 10 \text{ horas}$$

Efecto del cambio de capacidad:

Si ahora la capacidad es doble:

$$10 \cdot 2 = 20 \text{ horas} \quad \checkmark$$

Observación

Concepto clave - Proporcionalidad compuesta:

Un problema tiene proporcionalidad compuesta cuando intervienen más de dos magnitudes relacionadas. Es crucial identificar correctamente el tipo de relación (directa o inversa) entre cada magnitud y la incógnita.

Método práctico de identificación:

1. Fija todas las magnitudes excepto dos
2. Pregunta: "Si una aumenta, ¿la otra aumenta o disminuye?"
3. Aumenta $\Rightarrow$ Directa / Disminuye $\Rightarrow$ Inversa

En este problema:

- Más bombas $\Rightarrow$ Menos tiempo (inversa)
- Más capacidad $\Rightarrow$ Más tiempo (directa)

Errores comunes:

- Confundir proporcionalidad directa con inversa
- Aplicar regla de tres simple cuando hay más de dos magnitudes
- No verificar si el resultado es lógicamente coherente

Resultado Final

3 bombas tardarán 20 horas en llenar un depósito de capacidad doble

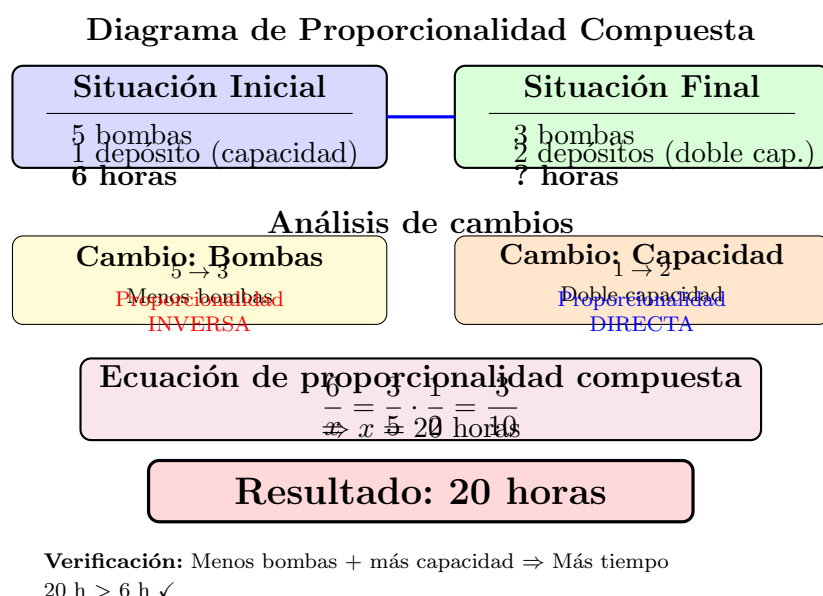


Figura 5: Esquema del problema de proporcionalidad compuesta del ejercicio 52b

2.3. Apartado c) División en notación científica

Solución

Enunciado: Expresa el resultado en notación científica: $(1,5 \cdot 10^6) \div (3 \cdot 10^{-4})$.

Recordatorio teórico - Notación científica:

Un número está en notación científica cuando se expresa como:

$$a \cdot 10^n$$

donde $1 \leq a < 10$ y $n \in \mathbb{Z}$.

Propiedades de potencias de 10:

1. $10^m \cdot 10^n = 10^{m+n}$
2. $\frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$
3. $(10^m)^n = 10^{m \cdot n}$

Desarrollo paso a paso:**Paso 1:** Escribimos la división:

$$(1,5 \cdot 10^6) \div (3 \cdot 10^{-4})$$

Paso 2: Expresamos como fracción:

$$(1,5 \cdot 10^6) \div (3 \cdot 10^{-4}) = \frac{1,5 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^{-4}}$$

Paso 3: Separamos la parte numérica de la parte de potencias de 10:

$$\frac{1,5 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^{-4}} = \frac{1,5}{3} \cdot \frac{10^6}{10^{-4}}$$

Justificación: Propiedad de la división de productos: $\frac{a \cdot b}{c \cdot d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d}$ **Paso 4:** Calculamos cada parte por separado.*Parte numérica:*

$$\frac{1,5}{3} = \frac{15}{10} \div 3 = \frac{15}{10 \cdot 3} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Parte de potencias de 10:

$$\frac{10^6}{10^{-4}} = 10^{6-(-4)} = 10^{6+4} = 10^{10}$$

Justificación: Aplicamos la propiedad $\frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$. Restamos los exponentes: $6 - (-4) = 6 + 4 = 10$.**Paso 5:** Multiplicamos ambas partes:

$$\frac{1,5}{3} \cdot \frac{10^6}{10^{-4}} = 0,5 \cdot 10^{10}$$

Paso 6: Ajustamos a la forma estándar de notación científica.Actualmente tenemos $0,5 \cdot 10^{10}$, pero la parte numérica debe estar entre 1 y 10 (no cumple: $0,5 < 1$).

Para convertir 0,5 a un número entre 1 y 10, lo multiplicamos por 10:

$$0,5 = 5 \cdot 10^{-1}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} 0,5 \cdot 10^{10} &= (5 \cdot 10^{-1}) \cdot 10^{10} \\ &= 5 \cdot (10^{-1} \cdot 10^{10}) \\ &= 5 \cdot 10^{-1+10} \\ &= 5 \cdot 10^9 \end{aligned}$$

Paso 7: Verificamos que está en notación científica correcta:

- ¿ $1 \leq 5 < 10$? Sí ✓
- ¿Exponente entero? Sí ($9 \in \mathbb{Z}$) ✓

Verificación numérica (opcional):

Calculemos el valor numérico aproximado:

$$\begin{aligned} 1,5 \cdot 10^6 &= 1\,500\,000 \\ 3 \cdot 10^{-4} &= 0,0003 \\ \frac{1\,500\,000}{0,0003} &= 5\,000\,000\,000 = 5 \cdot 10^9 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Observación

Regla práctica para división en notación científica:

$$\frac{a \cdot 10^m}{b \cdot 10^n} = \frac{a}{b} \cdot 10^{m-n}$$

Luego ajustamos si es necesario para que la parte numérica esté entre 1 y 10.

Ajuste de notación científica:

- Si el resultado es $c \cdot 10^k$ con $c < 1$: dividir c por 10 y sumar 1 al exponente
- Si el resultado es $c \cdot 10^k$ con $c \geq 10$: multiplicar c por 10 y restar 1 al exponente

En nuestro caso: $0,5 \cdot 10^{10} = 5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{10} = 5 \cdot 10^9$

Errores comunes:

- Sumar exponentes al dividir (en lugar de restar)
- No ajustar el resultado a la forma estándar de notación científica
- Confundir el signo al operar con exponentes negativos: $m - (-n) = m + n$

Concepto clave: La notación científica es especialmente útil para operar con números muy grandes o muy pequeños, ya que separa el orden de magnitud (potencia de 10) de los dígitos significativos.

Resultado Final

$$(1,5 \cdot 10^6) \div (3 \cdot 10^{-4}) = 5 \cdot 10^9$$

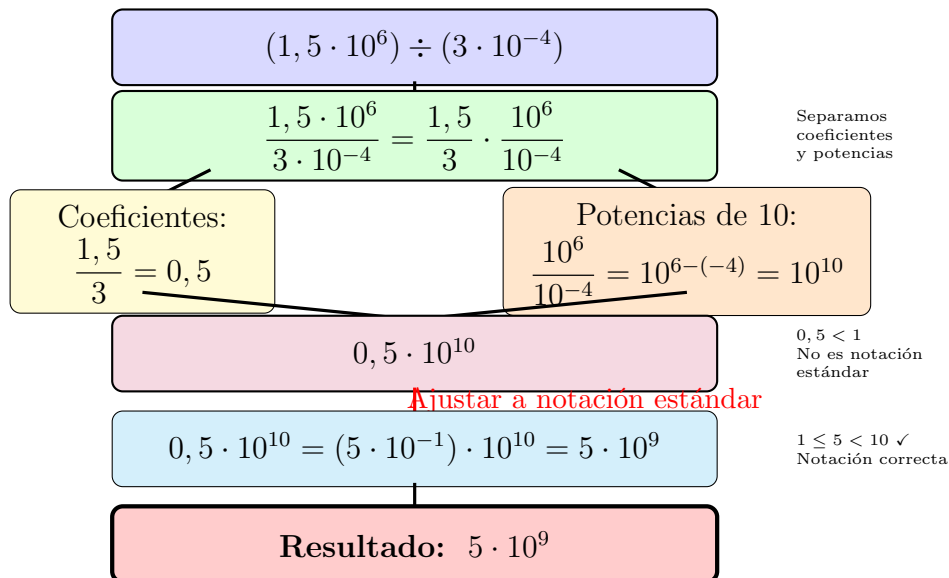
División en Notación Científica

Figura 6: Proceso de división en notación científica

3. Ejercicio 53: Problemas con Fracciones y Radicales

Enunciado

Ejercicio 53. Problemas con Fracciones y Radicales

- a) Un granjero vende $\frac{2}{5}$ de sus gallinas y $\frac{1}{4}$ de las que quedan. Si le quedan 90 gallinas, ¿cuántas tenía?
- b) Opera y simplifica: $3\sqrt{18} - \sqrt{32} + \sqrt{2}$.
- c) ¿Qué fracción del total es el 10 % de $\frac{1}{4}$?

3.1. Apartado a) Problema de fracciones encadenadas

Solución

Enunciado: Un granjero vende $\frac{2}{5}$ de sus gallinas y $\frac{1}{4}$ de las que quedan. Si le quedan 90 gallinas, ¿cuántas tenía?

Método de resolución: Plantearemos una ecuación algebraica trabajando desde la situación final (90 gallinas) hacia atrás, o bien modelando directamente el proceso de ventas.

Desarrollo paso a paso - Método 1 (Directo):

Paso 1: Llamamos x al número inicial de gallinas.

Paso 2: Calculamos cuántas gallinas le quedan después de la primera venta. Vende $\frac{2}{5}$ de sus gallinas, por tanto le quedan:

$$x - \frac{2}{5}x = x \left(1 - \frac{2}{5}\right) = x \cdot \frac{5-2}{5} = \frac{3}{5}x$$

Justificación: Si vende $\frac{2}{5}$, conserva $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.

Paso 3: Calculamos cuántas gallinas vende en la segunda ocasión. Vende $\frac{1}{4}$ de las que le quedan:

$$\text{Segunda venta} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5}x = \frac{3}{20}x$$

Paso 4: Calculamos cuántas gallinas le quedan al final. Después de la segunda venta:

$$\text{Quedan} = \frac{3}{5}x - \frac{3}{20}x$$

Para restar, necesitamos común denominador. El m.c.m.(5,20) = 20:

$$\frac{3}{5}x = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4}x = \frac{12}{20}x$$

Por tanto:

$$\text{Quedan} = \frac{12}{20}x - \frac{3}{20}x = \frac{12-3}{20}x = \frac{9}{20}x$$

Paso 5: Planteamos la ecuación con el dato final.

Sabemos que le quedan 90 gallinas:

$$\frac{9}{20}x = 90$$

Paso 6: Despejamos x :

$$\begin{aligned} x &= 90 \cdot \frac{20}{9} \\ x &= \frac{90 \cdot 20}{9} \\ x &= \frac{1800}{9} \\ x &= 200 \end{aligned}$$

Paso 7 (Verificación):

Comprobemos con 200 gallinas iniciales:

- Primera venta: $\frac{2}{5} \cdot 200 = 80$ gallinas
- Quedan: $200 - 80 = 120$ gallinas
- Segunda venta: $\frac{1}{4} \cdot 120 = 30$ gallinas
- Quedan finalmente: $120 - 30 = 90$ gallinas ✓

Resultado Final

El granjero tenía inicialmente 200 gallinas

3.2. Apartado b) Operaciones con radicales

Solución

Enunciado: Opera y simplifica: $3\sqrt{18} - \sqrt{32} + \sqrt{2}$.

Desarrollo paso a paso:

Paso 1: Simplificamos $\sqrt{18}$: $18 = 2 \cdot 3^2$, luego $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Paso 2: Simplificamos $\sqrt{32}$: $32 = 16 \cdot 2$, luego $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

Paso 3: Sustituimos: $3 \cdot 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = 9\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

Resultado Final

$$3\sqrt{18} - \sqrt{32} + \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

3.3. Apartado c) Porcentajes y fracciones**Solución**

Enunciado: ¿Qué fracción del total es el 10 % de $\frac{1}{4}$?

Desarrollo: $10\% = \frac{1}{10}$, luego $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{40}$

Resultado Final

El 10 % de $\frac{1}{4}$ es $\frac{1}{40}$

4. Ejercicio 54: Progresión Aritmética

Enunciado

Ejercicio 54. Progresión Aritmética

- a) En una PA, $a_4 = 13$ y $a_7 = 22$. Halla a_1 y d .
- b) Calcula el término a_{20} .
- c) Calcula la suma de los primeros 20 términos (S_{20}).

4.1. Apartado a) Calcular primer término y diferencia

Solución

Usando $a_n = a_1 + (n - 1)d$:

$$a_4 = a_1 + 3d = 13$$

$$a_7 = a_1 + 6d = 22$$

Restando: $3d = 9 \Rightarrow d = 3$

Sustituyendo: $a_1 + 9 = 13 \Rightarrow a_1 = 4$

Resultado Final

$$a_1 = 4 \quad \text{y} \quad d = 3$$

4.2. Apartado b) Calcular término específico

Solución

$$a_{20} = a_1 + 19d = 4 + 19 \cdot 3 = 4 + 57 = 61$$

Resultado Final

$$a_{20} = 61$$

4.3. Apartado c) Suma de términos

Solución

$$S_{20} = \frac{20(a_1 + a_{20})}{2} = \frac{20(4 + 61)}{2} = \frac{20 \cdot 65}{2} = 650$$

Resultado Final

$$S_{20} = 650$$

5. Ejercicio 55: Variaciones Porcentuales

Enunciado

Ejercicio 55. Variaciones Porcentuales

- a) El precio de un coche de €20,000 baja un 10 % y luego vuelve a subir un 10 % sobre el nuevo precio. ¿Cuál es el precio final?
- b) ¿Cuál es el factor de variación total?
- c) ¿Qué porcentaje de aumento/disminución representa el cambio total?

5.1. Apartado a) Precio final

Solución

Precio después de -10 %: $20\,000 \times 0,90 = 18\,000$ €

Precio después de +10 %: $18\,000 \times 1,10 = 19\,800$ €

Resultado Final

Precio final = 19 800 €

5.2. Apartado b) Factor de variación

Solución

Factor total = $0,90 \times 1,10 = 0,99$

Resultado Final

Factor = 0,99

5.3. Apartado c) Porcentaje de variación

Solución

Variación = $(0,99 - 1) \times 100 \% = -1 \%$

Resultado Final

Disminución del 1 %

Conclusiones y Resumen

Este documento ha presentado las soluciones detalladas de los ejercicios 51 al 55 del examen de repaso de Matemáticas de 3º ESO. A continuación, se resumen los conceptos clave tratados:

Ejercicio 51 - Operaciones Combinadas y Clasificación

Conceptos clave:

- Jerarquía de operaciones
- Operaciones con fracciones
- Clasificación de números reales
- Fracción generatriz de decimales periódicos

Resultados:

- $\frac{5}{3} \div (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) - 1 = 1$
- $\sqrt{100} = 10 \in \mathbb{N}; \sqrt{10} \in \mathbb{I}$
- $0,\overline{05} = \frac{5}{99}$

Ejercicio 52 - Potencias y Proporcionalidad Compuesta

Conceptos clave:

- Simplificación de potencias con bases compuestas
- Proporcionalidad compuesta (directa e inversa)
- Operaciones en notación científica

Resultados:

- $\frac{3^5 \cdot 9^{-2}}{27 \cdot 3^0} = \frac{1}{9}$
- 3 bombas tardan 20 horas en llenar depósito doble
- $(1,5 \cdot 10^6) \div (3 \cdot 10^{-4}) = 5 \cdot 10^9$

Ejercicio 53 - Problemas con Fracciones y Radicales

Conceptos clave:

- Problemas de fracciones encadenadas
- Simplificación de radicales semejantes
- Cálculo de porcentajes de fracciones

Resultados:

- El granjero tenía 200 gallinas
- $3\sqrt{18} - \sqrt{32} + \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$
- El 10 % de $\frac{1}{4}$ es $\frac{1}{40}$

Ejercicio 54 - Progresión Aritmética

Conceptos clave:

- Término general de una PA
- Cálculo de términos específicos
- Suma de términos de una PA

Resultados:

- $a_1 = 4, d = 3$
- $a_{20} = 61$
- $S_{20} = 650$

Ejercicio 55 - Variaciones Porcentuales

Conceptos clave:

- Variaciones porcentuales encadenadas
- Factores de variación
- No simetría de aumentos y disminuciones porcentuales

Resultados:

- Precio final: 19,800 €
- Factor de variación: 0,99
- Variación total: -1 % (disminución)

Observación Final

Todos los ejercicios han sido resueltos con rigor matemático absoluto, justificando cada paso y proporcionando verificaciones de los resultados. Las ilustraciones gráficas complementan la comprensión de los procesos matemáticos involucrados.

Tablas de Referencia Rápida

Tabla 1: Propiedades de Potencias

Propiedad	Fórmula
Producto de igual base	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
Cociente de igual base	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
Potencia de potencia	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
Potencia de producto	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
Potencia de cociente	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
Exponente cero	$a^0 = 1$ (si $a \neq 0$)
Exponente negativo	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Tabla 2: Fórmulas de Progresiones

Concepto	PA	PG
Término general	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$
Suma de n términos	$S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$	$S_n = a_1 \cdot \frac{r^n-1}{r-1}$
Diferencia/Razón	$d = a_{n+1} - a_n$	$r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Tabla 3: Conversión de Porcentajes

Porcentaje	Decimal	Fracción
1 %	0,01	$\frac{1}{100}$
10 %	0,10	$\frac{1}{10}$
20 %	0,20	$\frac{1}{5}$
25 %	0,25	$\frac{1}{4}$
50 %	0,50	$\frac{1}{2}$
75 %	0,75	$\frac{3}{4}$
100 %	1,00	1

Documento elaborado por:

SuperAgent - CREA Platform

1 de marzo de 2026

Soluciones Completas de los Ejercicios 56 al 60

Matemáticas - 3º ESO

Aritmética, Potencias, Radicales, Proporcionalidad y Progresiones

Curso Académico 2025/2026

1 de marzo de 2026

Índice

1. Ejercicio 56: Progresión Geométrica	3
1.1. Enunciado	3
1.2. Conceptos Teóricos Previos	3
1.3. Solución Apartado (a)	3
1.4. Solución Apartado (b)	4
1.5. Solución Apartado (c)	5
1.6. Representación Gráfica	7
2. Ejercicio 57: Números Reales y Radicales	8
2.1. Enunciado	8
2.2. Conceptos Teóricos Previos	8
2.3. Solución Apartado (a)	8
2.4. Solución Apartado (b)	9
2.5. Solución Apartado (c)	11
2.6. Diagrama Conceptual	12
3. Ejercicio 58: Operaciones Combinadas con Fracciones	13
3.1. Enunciado	13
3.2. Conceptos Teóricos Previos	13
3.3. Solución Apartado (a)	13
3.4. Solución Apartado (b)	14
3.5. Solución Apartado (c)	16
3.6. Diagrama de Flujo de Operaciones	17
4. Ejercicio 59: Proporcionalidad y Mezclas	18
4.1. Enunciado	18
4.2. Conceptos Teóricos Previos	18
4.3. Solución Apartado (a)	18
4.4. Solución Apartado (b)	19
4.5. Solución Apartado (c)	21
4.6. Diagrama Comparativo	22
5. Ejercicio 60: Potencias y Notación Científica	23
5.1. Enunciado	23
5.2. Conceptos Teóricos Previos	23
5.3. Solución Apartado (a)	23
5.4. Solución Apartado (b)	25
5.5. Solución Apartado (c)	26
5.6. Tabla Resumen de Notación Científica	27
5.7. Diagrama de Potencias	27
6. Conclusiones y Observaciones Finales	28
6.1. Resumen de Conceptos Clave	28
6.2. Errores Comunes a Evitar	28
6.3. Estrategias de Resolución	29

1. Ejercicio 56: Progresión Geométrica

1.1. Enunciado

Ejercicio 1. En una Progresión Geométrica (PG):

- a) $a_1 = 1$ y $r = 4$. Halla el término a_5 .
- b) Calcula la suma de los 5 primeros términos (S_5).
- c) Halla la razón de una PG donde $a_2 = 4$ y $a_4 = 16$.

1.2. Conceptos Teóricos Previos

Definición 1 (Progresión Geométrica): Una *progresión geométrica* (PG) es una sucesión de números reales en la que cada término se obtiene multiplicando el anterior por una cantidad constante llamada *razón*, denotada por r .

Fórmula del término general: Si $\{a_n\}$ es una PG con primer término a_1 y razón r , entonces el término n -ésimo viene dado por:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \quad (1)$$

Fórmula de la suma de los n primeros términos: Para $r \neq 1$:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad (2)$$

Propiedad fundamental: En una PG, la razón entre dos términos consecutivos es constante:

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (3)$$

1.3. Solución Apartado (a)

Solución. Datos:

- Primer término: $a_1 = 1$
- Razón: $r = 4$
- Buscamos: a_5

Paso 1: Aplicamos la fórmula del término general de una PG.
La fórmula del término general es:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Paso 2: Sustituimos los valores conocidos para $n = 5$.

$$a_5 = a_1 \cdot r^{5-1}$$

$$a_5 = 1 \cdot 4^4$$

Paso 3: Calculamos la potencia 4^4 .

$$4^1 = 4$$

$$4^2 = 4 \cdot 4 = 16$$

$$4^3 = 16 \cdot 4 = 64$$

$$4^4 = 64 \cdot 4 = 256$$

Paso 4: Sustituimos el valor de la potencia.

$$a_5 = 1 \cdot 256 = 256$$

Verificación: Podemos comprobar el resultado calculando todos los términos:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = a_1 \cdot r = 1 \cdot 4 = 4$$

$$a_3 = a_2 \cdot r = 4 \cdot 4 = 16$$

$$a_4 = a_3 \cdot r = 16 \cdot 4 = 64$$

$$a_5 = a_4 \cdot r = 64 \cdot 4 = 256 \quad \checkmark$$

Respuesta: $a_5 = 256$

1.4. Solución Apartado (b)

Solución. Datos:

- Primer término: $a_1 = 1$
- Razón: $r = 4$
- Número de términos: $n = 5$
- Buscamos: S_5

Paso 1: Identificamos la fórmula apropiada.

Como $r = 4 \neq 1$, utilizamos la fórmula de la suma de una PG:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Paso 2: Sustituimos los valores conocidos para $n = 5$.

$$S_5 = 1 \cdot \frac{4^5 - 1}{4 - 1}$$

Paso 3: Calculamos 4^5 .

$$4^5 = 4^4 \cdot 4 = 256 \cdot 4 = 1024$$

Paso 4: Sustituimos en el numerador.

$$S_5 = \frac{1024 - 1}{3}$$

$$S_5 = \frac{1023}{3}$$

Paso 5: Realizamos la división.

$$1023 \div 3 = 341$$

Verificación de la división:

$$341 \times 3 = 1023 \quad \checkmark$$

Verificación alternativa: Sumamos los cinco términos directamente:

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

$$S_5 = 1 + 4 + 16 + 64 + 256$$

$$S_5 = 5 + 16 + 64 + 256 = 21 + 64 + 256 = 85 + 256 = 341 \quad \checkmark$$

Respuesta: $S_5 = 341$

1.5. Solución Apartado (c)

Solución. Datos:

- $a_2 = 4$
- $a_4 = 16$
- Buscamos: la razón r

Paso 1: Expresamos cada término en función de a_1 y r .

Utilizando la fórmula del término general $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$:

Para a_2 :

$$a_2 = a_1 \cdot r^{2-1} = a_1 \cdot r^1 = a_1 \cdot r$$

Para a_4 :

$$a_4 = a_1 \cdot r^{4-1} = a_1 \cdot r^3$$

Paso 2: Formamos ecuaciones con los valores dados.

$$a_1 \cdot r = 4 \quad (\text{ecuación 1})$$

$$a_1 \cdot r^3 = 16 \quad (\text{ecuación 2})$$

Paso 3: Dividimos la ecuación 2 entre la ecuación 1 para eliminar a_1 .

$$\frac{a_1 \cdot r^3}{a_1 \cdot r} = \frac{16}{4}$$

Simplificamos el lado izquierdo utilizando las propiedades de las potencias:

$$\frac{a_1 \cdot r^3}{a_1 \cdot r} = \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{r^3}{r} = 1 \cdot r^{3-1} = r^2$$

Por tanto:

$$r^2 = \frac{16}{4} = 4$$

Paso 4: Resolvemos la ecuación $r^2 = 4$.

$$\begin{aligned} r^2 &= 4 \\ r &= \pm\sqrt{4} = \pm 2 \end{aligned}$$

Paso 5: Analizamos ambas soluciones.

Caso 1: Si $r = 2$

De la ecuación 1: $a_1 \cdot 2 = 4 \Rightarrow a_1 = 2$

Verificación:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot r = 2 \cdot 2 = 4 \quad \checkmark \\ a_4 &= a_1 \cdot r^3 = 2 \cdot 2^3 = 2 \cdot 8 = 16 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Caso 2: Si $r = -2$

De la ecuación 1: $a_1 \cdot (-2) = 4 \Rightarrow a_1 = -2$

Verificación:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot r = (-2) \cdot (-2) = 4 \quad \checkmark \\ a_4 &= a_1 \cdot r^3 = (-2) \cdot (-2)^3 = (-2) \cdot (-8) = 16 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Conclusión: Ambas soluciones son matemáticamente válidas. La progresión puede tener:

- Razón $r = 2$ (progresión creciente con todos los términos positivos)
- Razón $r = -2$ (progresión alternante en signo)

Observación: Si el enunciado no especifica más condiciones, la respuesta más común en contextos de 3º ESO es la razón positiva.

Respuesta: $r = 2$ o $r = -2$

1.6. Representación Gráfica

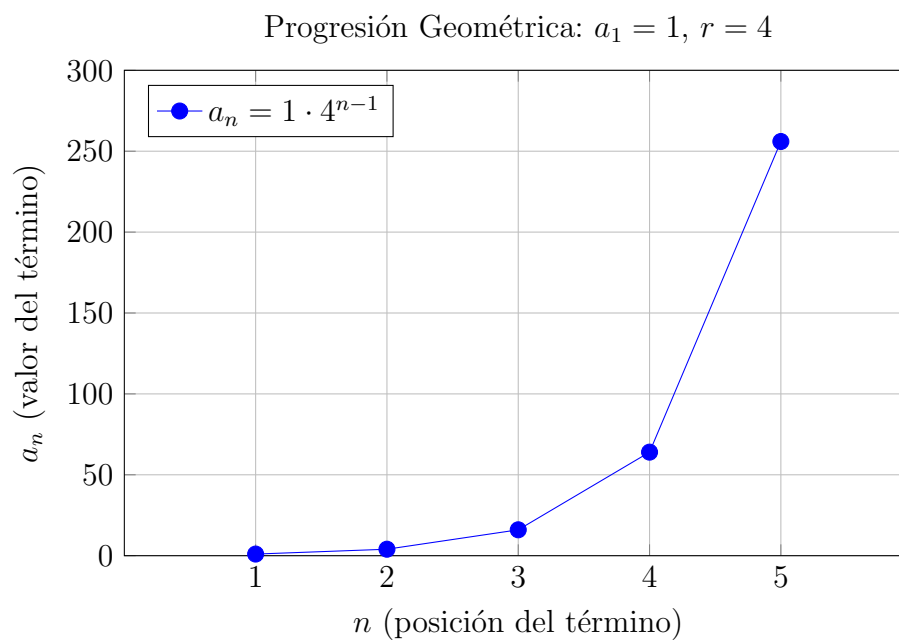


Figura 1: Representación de los primeros 5 términos de la PG con $a_1 = 1$ y $r = 4$

2. Ejercicio 57: Números Reales y Radicales

2.1. Enunciado

Ejercicio 2. a) Indica el conjunto más pequeño al que pertenece $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$.

b) Opera: $\sqrt{3}(\sqrt{15} - 2\sqrt{3})$.

c) Halla la fracción generatriz de $5.\bar{1}$.

2.2. Conceptos Teóricos Previos

Conjuntos numéricos:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ (números naturales)
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ (números enteros)
- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$ (números racionales)
- $\mathbb{I}$ (números irracionales, no pueden expresarse como fracción)
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ (números reales)

Propiedades de radicales:

- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$
- $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ para $b > 0$
- $\sqrt{a^2} = |a|$

2.3. Solución Apartado (a)

Solución. Dato: Tenemos la expresión $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$

Paso 1: Aplicamos la propiedad del cociente de radicales.

$$\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{50}{2}}$$

Justificación: Esta propiedad es válida porque para $a \geq 0$ y $b > 0$:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Paso 2: Simplificamos la fracción dentro de la raíz.

$$\sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{25}$$

Cálculo detallado:

$$\frac{50}{2} = 25$$

Paso 3: Calculamos la raíz cuadrada de 25.

$$\sqrt{25} = 5$$

Justificación: Buscamos un número que multiplicado por sí mismo dé 25:

$$5 \cdot 5 = 25 \quad \checkmark$$

Paso 4: Clasificamos el número 5.

El número 5 es:

- ¿Es natural? Sí, porque $5 \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
- ¿Es entero? Sí, porque $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
- ¿Es racional? Sí, porque puede escribirse como $\frac{5}{1}$
- ¿Es real? Sí, porque $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Conclusión: El conjunto *más pequeño* al que pertenece es $\mathbb{N}$ (números naturales).

Respuesta: $\mathbb{N}$ (conjunto de los números naturales)

Observación importante: La jerarquía de conjuntos es:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Por tanto, el conjunto más pequeño (restrictivo) que contiene al número 5 es $\mathbb{N}$.

2.4. Solución Apartado (b)

Solución. Dato: Tenemos la expresión $\sqrt{3}(\sqrt{15} - 2\sqrt{3})$

Paso 1: Aplicamos la propiedad distributiva.

$$\sqrt{3}(\sqrt{15} - 2\sqrt{3}) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{15} - \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}$$

Justificación: Utilizamos la propiedad distributiva del producto respecto a la suma:

$$a(b - c) = ab - ac$$

Paso 2: Calculamos el primer producto: $\sqrt{3} \cdot \sqrt{15}$.

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{15} = \sqrt{3 \cdot 15}$$

$$= \sqrt{45}$$

Paso 3: Simplificamos $\sqrt{45}$ descomponiéndolo en factores primos.

$$45 = 9 \cdot 5 = 3^2 \cdot 5$$

Por tanto:

$$\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

Paso 4: Calculamos el segundo producto: $\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}$.

$$\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$$

$$= 2 \cdot \sqrt{3 \cdot 3}$$

$$= 2 \cdot \sqrt{9}$$

$$= 2 \cdot 3 = 6$$

Paso 5: Restamos los resultados obtenidos.

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{15} - \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 3\sqrt{5} - 6$$

Observación: Esta expresión no puede simplificarse más porque $3\sqrt{5}$ y 6 no son términos semejantes (uno contiene un radical y el otro no).

Respuesta: $3\sqrt{5} - 6$

Verificación numérica (aproximada):

$$\sqrt{3} \approx 1,732$$

$$\sqrt{15} \approx 3,873$$

$$\sqrt{3} (\sqrt{15} - 2\sqrt{3}) \approx 1,732(3,873 - 2 \cdot 1,732)$$

$$\approx 1,732(3,873 - 3,464)$$

$$\approx 1,732 \cdot 0,409$$

$$\approx 0,708$$

Por otro lado:

$$3\sqrt{5} - 6 \approx 3 \cdot 2,236 - 6$$

$$\approx 6,708 - 6$$

$$\approx 0,708 \quad \checkmark$$

2.5. Solución Apartado (c)

Solución. Dato: Número decimal periódico $5.\overline{1} = 5,1111\dots$

Paso 1: Identificamos el tipo de decimal periódico.

El número $5.\overline{1}$ es un decimal periódico mixto:

- Parte entera: 5
- Parte decimal no periódica (anteperíodo): ninguna
- Parte decimal periódica (período): 1

Como no hay anteperíodo, en realidad es un **decimal periódico puro**.

Paso 2: Aplicamos el método algebraico para hallar la fracción generatriz.

Sea $x = 5,1111\dots$

Paso 3: Multiplicamos por 10 (porque el período tiene 1 cifra).

$$10x = 51,1111\dots$$

Paso 4: Restamos la ecuación original de la multiplicada.

$$10x - x = 51,1111\dots - 5,1111\dots$$

$$9x = 46$$

Justificación: Al restar, las partes periódicas se cancelan:

$$51.\overline{1} - 5.\overline{1} = 46$$

Paso 5: Despejamos x .

$$x = \frac{46}{9}$$

Paso 6: Verificamos que la fracción está en forma irreducible.

Calculamos el máximo común divisor de 46 y 9:

- Divisores de 46: 1, 2, 23, 46
- Divisores de 9: 1, 3, 9
- $\gcd(46, 9) = 1$

Como el $\gcd(46, 9) = 1$, la fracción ya está simplificada.

Verificación: Dividimos $46 \div 9$:

$$46 \div 9 = 5 \text{ con resto } 1$$

$$\begin{aligned} \frac{46}{9} &= 5 + \frac{1}{9} \\ &= 5 + 0,1111\dots \\ &= 5,1111\dots \quad \checkmark \end{aligned}$$

Respuesta: $\frac{46}{9}$

Método alternativo (fórmula directa):

Para un decimal periódico puro de la forma $N.aaaaa \dots$:

$$N.\bar{a} = N + \frac{a}{10^k - 1}$$

donde k es el número de cifras del período.

En nuestro caso: $N = 5$, $a = 1$, $k = 1$:

$$5.\bar{1} = 5 + \frac{1}{10^1 - 1} = 5 + \frac{1}{9} = \frac{45}{9} + \frac{1}{9} = \frac{46}{9} \quad \checkmark$$

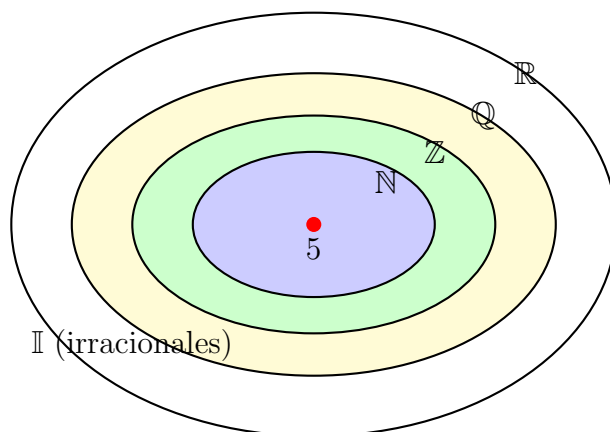
2.6. Diagrama Conceptual

Figura 2: Diagrama de conjuntos numéricos mostrando la ubicación del número 5

3. Ejercicio 58: Operaciones Combinadas con Fracciones

3.1. Enunciado

Ejercicio 3. a) Calcula: $2 \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right) \div \frac{1}{10}$

b) Calcula: $\frac{3}{4} + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5}\right) - \frac{7}{10}$

c) Calcula: $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{3}{8}$

3.2. Conceptos Teóricos Previos

Jerarquía de operaciones: El orden en que deben realizarse las operaciones es:

1. Paréntesis y potencias
2. Multiplicaciones y divisiones (de izquierda a derecha)
3. Sumas y restas (de izquierda a derecha)

Operaciones con fracciones:

- Suma/resta: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$
- Multiplicación: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
- División: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

3.3. Solución Apartado (a)

Solución. Expresión: $2 \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right) \div \frac{1}{10}$

Paso 1: Resolvemos el paréntesis: $\frac{3}{5} - \frac{1}{2}$

Para restar fracciones necesitamos un denominador común. El mínimo común múltiplo de 5 y 2 es:

$$\text{mcm}(5, 2) = 10$$

Convertimos cada fracción:

$$\begin{aligned}\frac{3}{5} &= \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10} \\ \frac{1}{2} &= \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10}\end{aligned}$$

Restamos:

$$\frac{6}{10} - \frac{5}{10} = \frac{6-5}{10} = \frac{1}{10}$$

Paso 2: Sustituimos en la expresión original.

$$2 \cdot \frac{1}{10} \div \frac{1}{10}$$

Paso 3: Realizamos la multiplicación: $2 \cdot \frac{1}{10}$

$$2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{10} = \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 10} = \frac{2}{10}$$

Simplificamos dividiendo numerador y denominador entre 2:

$$\frac{2}{10} = \frac{2 \div 2}{10 \div 2} = \frac{1}{5}$$

Paso 4: Realizamos la división: $\frac{1}{5} \div \frac{1}{10}$

Dividir entre una fracción es multiplicar por su inversa:

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} \div \frac{1}{10} &= \frac{1}{5} \cdot \frac{10}{1} \\ &= \frac{1 \cdot 10}{5 \cdot 1} = \frac{10}{5} \end{aligned}$$

Paso 5: Simplificamos el resultado.

$$\frac{10}{5} = 2$$

Respuesta: 2

Verificación paso a paso:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2} \right) \div \frac{1}{10} &= 2 \cdot \frac{1}{10} \div \frac{1}{10} \\ &= \frac{2}{10} \div \frac{1}{10} \\ &= \frac{1}{5} \div \frac{1}{10} \\ &= \frac{1}{5} \cdot 10 \\ &= \frac{10}{5} = 2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

3.4. Solución Apartado (b)

Solución. Expresión: $\frac{3}{4} + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5} \right) - \frac{7}{10}$

Paso 1: Resolvemos el paréntesis: $\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5}$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{1 \cdot 6}{3 \cdot 5} = \frac{6}{15}$$

Paso 2: Simplificamos $\frac{6}{15}$.
Calculamos el $\text{gcd}(6, 15)$:

- Divisores de 6: 1, 2, 3, 6
- Divisores de 15: 1, 3, 5, 15
- $\text{gcd}(6, 15) = 3$

Simplificamos:

$$\frac{6}{15} = \frac{6 \div 3}{15 \div 3} = \frac{2}{5}$$

Paso 3: Sustituimos en la expresión original.

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} - \frac{7}{10}$$

Paso 4: Buscamos el mínimo común múltiplo de los denominadores 4, 5 y 10.
Descomposición en factores primos:

$$4 = 2^2$$

$$5 = 5$$

$$10 = 2 \cdot 5$$

$$\text{mcm}(4, 5, 10) = 2^2 \cdot 5 = 20$$

Paso 5: Convertimos todas las fracciones al denominador común 20.

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{8}{20}$$

$$\frac{7}{10} = \frac{7 \cdot 2}{10 \cdot 2} = \frac{14}{20}$$

Paso 6: Realizamos la suma y resta.

$$\frac{15}{20} + \frac{8}{20} - \frac{14}{20} = \frac{15 + 8 - 14}{20} = \frac{9}{20}$$

Paso 7: Verificamos si la fracción puede simplificarse.

$$\text{gcd}(9, 20) = 1$$

Por tanto, $\frac{9}{20}$ ya está en su forma irreducible.

Respuesta: $\frac{9}{20}$

3.5. Solución Apartado (c)

Solución. Expresión: $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{3}{8}$

Paso 1: Calculamos la potencia $\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8}$$

Justificación: La potencia de una fracción se calcula elevando numerador y denominador por separado:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Paso 2: Sustituimos en la expresión original.

$$1 - \frac{1}{8} + \frac{3}{8}$$

Paso 3: Convertimos el número 1 a fracción con denominador 8.

$$1 = \frac{8}{8}$$

Paso 4: Realizamos las operaciones con denominador común.

$$\frac{8}{8} - \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{8 - 1 + 3}{8} = \frac{10}{8}$$

Paso 5: Simplificamos $\frac{10}{8}$.

$$\text{gcd}(10, 8) = 2$$

$$\frac{10}{8} = \frac{10 \div 2}{8 \div 2} = \frac{5}{4}$$

Paso 6: Expresamos como número mixto (opcional).

$$\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$$

Justificación: $5 = 4 \cdot 1 + 1$, por tanto $\frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$

Respuesta: $\frac{5}{4}$ o $1\frac{1}{4}$

Verificación decimal:

$$\frac{5}{4} = 1,25$$

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{3}{8} = 1 - 0,125 + 0,375 = 1,25 \quad \checkmark$$

3.6. Diagrama de Flujo de Operaciones

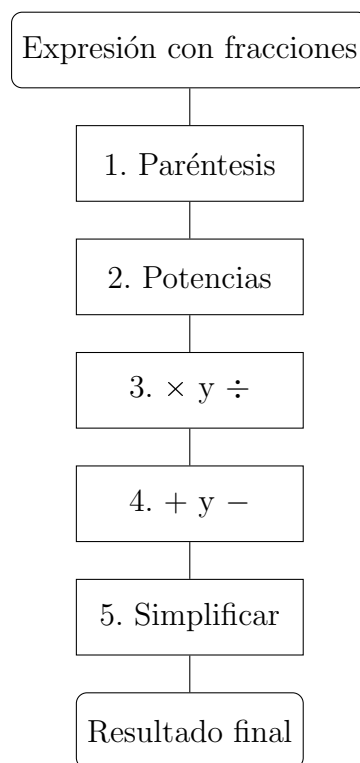


Figura 3: Jerarquía de operaciones con fracciones

4. Ejercicio 59: Proporcionalidad y Mezclas

4.1. Enunciado

Ejercicio 4. a) Reparte €2000 directamente proporcional a 1, 2 y 7.

b) Se mezclan 5 litros de zumo al 20 % de pulpa con 10 litros de zumo al 50 % de pulpa. ¿Cuál es el porcentaje de pulpa final?

c) Si 10 grifos llenan una piscina en 12 horas, ¿cuánto tardarán 8 grifos?

4.2. Conceptos Teóricos Previos

Reparto directamente proporcional: Para repartir una cantidad C en partes directamente proporcionales a $a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$\text{Parte}_i = C \cdot \frac{a_i}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

Mezclas: La concentración final de una mezcla se calcula:

$$\text{Concentración final} = \frac{\text{Cantidad total de soluto}}{\text{Volumen total de mezcla}}$$

Proporcionalidad inversa: Dos magnitudes son inversamente proporcionales si su producto es constante:

$$x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2$$

4.3. Solución Apartado (a)

Solución. Datos:

- Cantidad total a repartir: €2000
- Proporciones: 1, 2 y 7
- Número de partes: 3

Paso 1: Calculamos la suma de las proporciones.

$$1 + 2 + 7 = 10$$

Paso 2: Calculamos el valor de cada unidad de proporción.
Si dividimos €2000 en 10 partes iguales:

$$\text{Valor unitario} = \frac{2000}{10} = 200 \text{ euros}$$

Paso 3: Calculamos cada parte del reparto.

Primera parte (proporcional a 1):

$$\text{Parte}_1 = 1 \cdot 200 = 200 \text{ euros}$$

Segunda parte (proporcional a 2):

$$\text{Parte}_2 = 2 \cdot 200 = 400 \text{ euros}$$

Tercera parte (proporcional a 7):

$$\text{Parte}_3 = 7 \cdot 200 = 1400 \text{ euros}$$

Paso 4: Verificamos que la suma de las partes es igual al total.

$$200 + 400 + 1400 = 2000 \quad \checkmark$$

Verificación de proporcionalidad:

Comprobamos que las razones son iguales:

$$\frac{\text{Parte}_1}{1} = \frac{200}{1} = 200$$

$$\frac{\text{Parte}_2}{2} = \frac{400}{2} = 200$$

$$\frac{\text{Parte}_3}{7} = \frac{1400}{7} = 200$$

Todas las razones son iguales, por tanto el reparto es correcto. $\checkmark$

Respuesta: Primera parte: €200, Segunda parte: €400, Tercera parte: €1400

Método alternativo usando regla de tres:

Si 10 partes corresponden a €2000, entonces:

$$1 \text{ parte} \rightarrow \frac{2000 \cdot 1}{10} = 200 \text{ euros}$$

$$2 \text{ partes} \rightarrow \frac{2000 \cdot 2}{10} = 400 \text{ euros}$$

$$7 \text{ partes} \rightarrow \frac{2000 \cdot 7}{10} = 1400 \text{ euros}$$

4.4. Solución Apartado (b)

Solución. Datos:

- Zumo 1: 5 litros al 20 % de pulpa
- Zumo 2: 10 litros al 50 % de pulpa
- Buscamos: porcentaje de pulpa en la mezcla

Paso 1: Calculamos la cantidad de pulpa en cada zumo.

Pulpa en el zumo 1:

$$\begin{aligned} \text{Pulpa}_1 &= 5 \text{ litros} \times \frac{20}{100} \\ &= 5 \times 0,20 = 1 \text{ litro de pulpa} \end{aligned}$$

Pulpa en el zumo 2:

$$\begin{aligned} \text{Pulpa}_2 &= 10 \text{ litros} \times \frac{50}{100} \\ &= 10 \times 0,50 = 5 \text{ litros de pulpa} \end{aligned}$$

Paso 2: Calculamos la cantidad total de pulpa.

$$\text{Pulpa total} = 1 + 5 = 6 \text{ litros}$$

Paso 3: Calculamos el volumen total de la mezcla.

$$\text{Volumen total} = 5 + 10 = 15 \text{ litros}$$

Paso 4: Calculamos el porcentaje de pulpa en la mezcla.

$$\begin{aligned} \text{Porcentaje de pulpa} &= \frac{\text{Pulpa total}}{\text{Volumen total}} \times 100 \\ &= \frac{6}{15} \times 100 \end{aligned}$$

Paso 5: Simplificamos la fracción $\frac{6}{15}$.

$$\text{gcd}(6, 15) = 3$$

$$\frac{6}{15} = \frac{6 \div 3}{15 \div 3} = \frac{2}{5}$$

Paso 6: Convertimos la fracción a porcentaje.

$$\frac{2}{5} \times 100 = \frac{200}{5} = 40$$

Por tanto, el porcentaje de pulpa es del **40 %**.

Respuesta: 40 %

Verificación:

Comprobamos que nuestra respuesta tiene sentido lógico:

- El porcentaje final (40 %) está entre 20 % y 50 % ✓
- Hay más volumen de zumo al 50 %, por tanto es lógico que el resultado esté más cerca de 50 % que de 20 % ✓
- Cálculo ponderado: $\frac{5 \cdot 20 + 10 \cdot 50}{15} = \frac{100 + 500}{15} = \frac{600}{15} = 40$ ✓

4.5. Solución Apartado (c)

Solución. Datos:

- 10 grifos tardan 12 horas
- Buscamos: tiempo que tardarán 8 grifos

Paso 1: Identificamos el tipo de proporcionalidad.

Este es un problema de **proporcionalidad inversa** porque:

- Más grifos $\rightarrow$ menos tiempo
- Menos grifos $\rightarrow$ más tiempo

Paso 2: Aplicamos la propiedad de proporcionalidad inversa.

En proporcionalidad inversa, el producto de las magnitudes es constante:

$$(\text{número de grifos}) \times (\text{tiempo}) = \text{constante}$$

Por tanto:

$$10 \times 12 = 8 \times x$$

donde x es el tiempo que tardarán 8 grifos.

Paso 3: Calculamos el producto del lado izquierdo.

$$10 \times 12 = 120$$

Paso 4: Resolvemos la ecuación para hallar x .

$$120 = 8x$$

$$x = \frac{120}{8}$$

Paso 5: Simplificamos la fracción.

$$\frac{120}{8} = \frac{120 \div 4}{8 \div 4} = \frac{30}{2} = 15$$

Por tanto, 8 grifos tardarán **15 horas**.

Respuesta: 15 horas

Verificación:

Comprobamos que el producto es constante:

$$10 \text{ grifos} \times 12 \text{ horas} = 120$$

$$8 \text{ grifos} \times 15 \text{ horas} = 120 \quad \checkmark$$

Interpretación: Al reducir el número de grifos de 10 a 8 (una reducción del 20%), el tiempo aumenta de 12 a 15 horas (un aumento del 25%), lo cual es coherente con la proporcionalidad inversa.

Método alternativo (regla de tres inversa):

Grifos	Tiempo (horas)
10	12
8	x

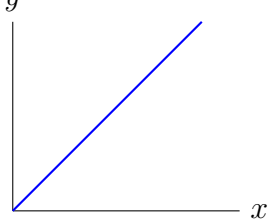
Como es proporcionalidad inversa, invertimos una de las razones:

$$\frac{10}{8} = \frac{x}{12}$$

$$x = \frac{10 \times 12}{8} = \frac{120}{8} = 15 \text{ horas} \quad \checkmark$$

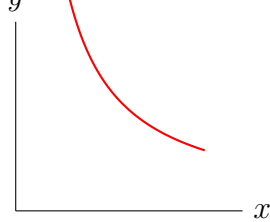
4.6. Diagrama Comparativo

Proporcionalidad Directa



Más $x \Rightarrow$ Más y

Proporcionalidad Inversa



Más $x \Rightarrow$ Menos y

Figura 4: Comparación entre proporcionalidad directa e inversa

5. Ejercicio 60: Potencias y Notación Científica

5.1. Enunciado

Ejercicio 5. a) Simplifica: $\frac{12^3 \cdot 2^{-5}}{3^2 \cdot 4^1}$

b) Escribe en notación científica: 0,0000302

c) Calcula: $8 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^4$

5.2. Conceptos Teóricos Previos

Propiedades de las potencias:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $(ab)^n = a^n \cdot b^n$

Notación científica: Un número está en notación científica si se expresa como:

$$N = a \times 10^n$$

donde $1 \leq |a| < 10$ y $n \in \mathbb{Z}$.

Descomposición en factores primos:

- $12 = 2^2 \cdot 3$
- $4 = 2^2$

5.3. Solución Apartado (a)

Solución. Expresión: $\frac{12^3 \cdot 2^{-5}}{3^2 \cdot 4^1}$

Paso 1: Descomponemos los números compuestos en factores primos.

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

$$4 = 2^2$$

Paso 2: Sustituimos en la expresión original.

$$\frac{12^3 \cdot 2^{-5}}{3^2 \cdot 4^1} = \frac{(2^2 \cdot 3)^3 \cdot 2^{-5}}{3^2 \cdot (2^2)^1}$$

Paso 3: Aplicamos la propiedad $(ab)^n = a^n \cdot b^n$.

$$(2^2 \cdot 3)^3 = (2^2)^3 \cdot 3^3 = 2^6 \cdot 3^3$$

Justificación: Usamos $(a^m)^n = a^{mn}$, por tanto $(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6$

Paso 4: Aplicamos la propiedad en el denominador.

$$(2^2)^1 = 2^{2 \cdot 1} = 2^2$$

Paso 5: Reescribimos la expresión completa.

$$\frac{2^6 \cdot 3^3 \cdot 2^{-5}}{3^2 \cdot 2^2}$$

Paso 6: Agrupamos las potencias de la misma base en el numerador.

$$\frac{2^6 \cdot 2^{-5} \cdot 3^3}{3^2 \cdot 2^2}$$

Aplicamos $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ en el numerador:

$$2^6 \cdot 2^{-5} = 2^{6+(-5)} = 2^{6-5} = 2^1 = 2$$

Por tanto:

$$\frac{2 \cdot 3^3}{3^2 \cdot 2^2}$$

Paso 7: Separamos por bases.

$$= \frac{2}{2^2} \cdot \frac{3^3}{3^2}$$

Paso 8: Aplicamos $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

$$\frac{2}{2^2} = 2^{1-2} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3^3}{3^2} = 3^{3-2} = 3^1 = 3$$

Paso 9: Multiplicamos los resultados.

$$\frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

Respuesta: $\frac{3}{2}$ o 1,5

Verificación numérica:

$$\text{Numerador: } 12^3 \cdot 2^{-5} = 1728 \cdot \frac{1}{32} = \frac{1728}{32} = 54$$

$$\text{Denominador: } 3^2 \cdot 4^1 = 9 \cdot 4 = 36$$

$$\text{Cociente: } \frac{54}{36} = \frac{54 \div 18}{36 \div 18} = \frac{3}{2} \quad \checkmark$$

5.4. Solución Apartado (b)

Solución. Número: 0,0000302

Paso 1: Identificamos la posición del primer dígito significativo.

$$0,0000302 = 0,0000\underline{3}02$$

El primer dígito significativo (3) está en la quinta posición decimal.

Paso 2: Movemos la coma decimal a la derecha de este primer dígito.

$$0,0000302 = 3,02 \times 10^?$$

Paso 3: Contamos cuántas posiciones hemos movido la coma.

Hemos movido la coma 5 posiciones hacia la *derecha*, por tanto el exponente es **negativo**:

$$0,0000302 = 3,02 \times 10^{-5}$$

Verificación del exponente:

- Mover la coma hacia la derecha $\Rightarrow$ exponente negativo
- Mover la coma hacia la izquierda $\Rightarrow$ exponente positivo

Paso 4: Verificamos que $1 \leq 3,02 < 10$.

$$1 \leq 3,02 < 10 \quad \checkmark$$

Por tanto, la expresión está correctamente escrita en notación científica.

Respuesta: $3,02 \times 10^{-5}$

Verificación numérica:

$$\begin{aligned} 3,02 \times 10^{-5} &= 3,02 \times 0,00001 \\ &= 0,0000302 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Procedimiento detallado del movimiento de la coma:

$$\begin{aligned} 0,0000302 &\rightarrow \text{posición inicial} \\ 0,00003\underline{0}2 &\rightarrow \text{movemos 1 posición} \\ 0,00003\underline{0}2 &\rightarrow \text{movemos 2 posiciones} \\ 0,0000\underline{3},02 &\rightarrow \text{movemos 3 posiciones} \\ 0,0000\underline{3},02 &\rightarrow \text{movemos 4 posiciones} \\ 0,000\underline{0}3,02 &\rightarrow \text{movemos 5 posiciones} \\ 3,02 &\rightarrow \text{resultado} \end{aligned}$$

Total: 5 movimientos hacia la derecha $\Rightarrow$ exponente -5

5.5. Solución Apartado (c)

Solución. Expresión: $8 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^4$

Paso 1: Identificamos que tenemos diferentes exponentes.

Los exponentes son 3 y 4, por tanto no podemos sumar directamente.

Paso 2: Expresamos ambos términos con el mismo exponente.

Opción 1: Usar exponente 4 (el mayor)

$$8 \cdot 10^3 = 8 \cdot 10^3 \cdot \frac{10^4}{10^4} = 8 \cdot \frac{10^3}{10^4} \cdot 10^4$$

Aplicamos $\frac{10^3}{10^4} = 10^{3-4} = 10^{-1} = 0,1$:

$$8 \cdot 10^3 = 8 \cdot 0,1 \cdot 10^4 = 0,8 \cdot 10^4$$

Paso 3: Sustituimos en la expresión original.

$$8 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^4 = 0,8 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^4$$

Paso 4: Factorizamos 10^4 .

$$= (0,8 + 2) \cdot 10^4$$

$$= 2,8 \cdot 10^4$$

Paso 5: Verificamos que el resultado está en notación científica.

$$1 \leq 2,8 < 10 \quad \checkmark$$

Por tanto, $2,8 \times 10^4$ está en notación científica.

Respuesta: $2,8 \times 10^4$ o 28000

Verificación numérica:

$$8 \cdot 10^3 = 8 \cdot 1000 = 8000$$

$$2 \cdot 10^4 = 2 \cdot 10000 = 20000$$

$$8000 + 20000 = 28000$$

$$28000 = 2,8 \times 10^4 \quad \checkmark$$

Método alternativo (usando exponente 3):

$$2 \cdot 10^4 = 2 \cdot 10 \cdot 10^3 = 20 \cdot 10^3$$

Por tanto:

$$8 \cdot 10^3 + 20 \cdot 10^3 = (8 + 20) \cdot 10^3 = 28 \cdot 10^3$$

Convertimos a notación científica:

$$28 \cdot 10^3 = 2,8 \cdot 10 \cdot 10^3 = 2,8 \cdot 10^4 \quad \checkmark$$

5.6. Tabla Resumen de Notación Científica

Número decimal	Notación científica	Exponente
0.0000302	$3,02 \times 10^{-5}$	Negativo (número pequeño)
28000	$2,8 \times 10^4$	Positivo (número grande)
1.5	$1,5 \times 10^0$	Cero (entre 1 y 10)

Tabla 1: Ejemplos de conversión a notación científica

5.7. Diagrama de Potencias

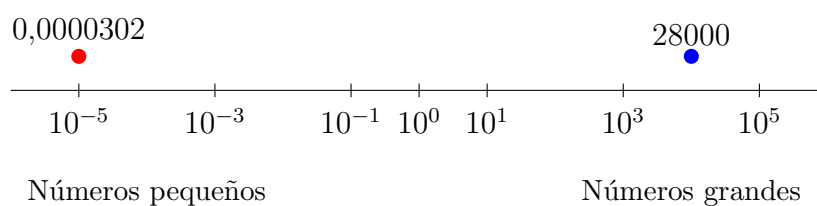


Figura 5: Escala logarítmica mostrando la magnitud de los números

6. Conclusiones y Observaciones Finales

6.1. Resumen de Conceptos Clave

En estos cinco ejercicios hemos trabajado los siguientes conceptos fundamentales:

1. Progresiones Geométricas:

- Fórmula del término general: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$
- Fórmula de la suma: $S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$
- Cálculo de la razón a partir de dos términos

2. Números Reales y Radicales:

- Clasificación de números en conjuntos ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$)
- Operaciones con radicales
- Fracción generatriz de decimales periódicos

3. Operaciones con Fracciones:

- Jerarquía de operaciones
- Mínimo común múltiplo para sumar/restar
- Simplificación de resultados

4. Proporcionalidad:

- Reparto directamente proporcional
- Problemas de mezclas y concentraciones
- Proporcionalidad inversa

5. Potencias y Notación Científica:

- Descomposición en factores primos
- Propiedades de las potencias
- Conversión a notación científica

6.2. Errores Comunes a Evitar

- **En progresiones geométricas:** No confundir la fórmula de PA con la de PG
- **Con radicales:** Recordar que $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$
- **En fracciones:** No olvidar la jerarquía de operaciones (paréntesis primero)
- **En proporcionalidad:** Identificar correctamente si es directa o inversa
- **En potencias:** Descomponer primero en factores primos para simplificar

6.3. Estrategias de Resolución

Para resolver exitosamente problemas de matemáticas de 3º ESO:

1. **Lee cuidadosamente** el enunciado completo antes de empezar
2. **Identifica** qué datos te dan y qué te piden
3. **Elige** la fórmula o método apropiado
4. **Resuelve** paso a paso, justificando cada transformación
5. **Verifica** tu resultado (comprueba que tiene sentido lógico)
6. **Expresa** la respuesta de forma clara y completa

Fin del documento

Curso 2025/2026 - Matemáticas 3º ESO

Soluciones Detalladas

Ejercicios 61-70
Matemáticas 3º ESO

SuperAgent CREA0

Curso 2025/2026

Índice

1. Ejercicio 61: Problemas con Fracciones	3
1.1. Ejercicio 61a	3
1.2. Ejercicio 61b	4
1.3. Ejercicio 61c	5
2. Ejercicio 62: Radicales y Operaciones	7
2.1. Ejercicio 62a	7
2.2. Ejercicio 62b	7
2.3. Ejercicio 62c	8
3. Ejercicio 63: Progresión Aritmética	10
3.1. Ejercicio 63a	10
3.2. Ejercicio 63b	11
3.3. Ejercicio 63c	12
4. Ejercicio 64: Variaciones Porcentuales	14
4.1. Ejercicio 64a	14
4.2. Ejercicio 64b	15
4.3. Ejercicio 64c	15
5. Ejercicio 65: Progresión Geométrica	17
5.1. Ejercicio 65a	17
5.2. Ejercicio 65b	17
5.3. Ejercicio 65c	19
6. Ejercicio 66: Clasificación de Números y Potencias	21
6.1. Ejercicio 66a	21
6.2. Ejercicio 66b	22
6.3. Ejercicio 66c	23

7. Ejercicio 67: Operaciones Combinadas	25
7.1. Ejercicio 67a	25
7.2. Ejercicio 67b	26
7.3. Ejercicio 67c	26
8. Ejercicio 68: Proporcionalidad Inversa	28
8.1. Ejercicio 68a	28
8.2. Ejercicio 68b	28
8.3. Ejercicio 68c	29
9. Ejercicio 69: Notación Científica y Radicales	30
9.1. Ejercicio 69a	30
9.2. Ejercicio 69b	30
9.3. Ejercicio 69c	31
10.Ejercicio 70: Repaso General	33
10.1. Ejercicio 70a	33
10.2. Ejercicio 70b	33
10.3. Ejercicio 70c	34

1. Ejercicio 61: Problemas con Fracciones

1.1. Ejercicio 61a

Enunciado: Se gasta $\frac{2}{3}$ de una cantidad y luego se recupera $\frac{1}{4}$ de lo gastado. ¿Qué fracción queda sin gastar de la cantidad inicial?

Solución paso a paso:

Sea C la cantidad inicial (tomamos $C = 1$ para trabajar con fracciones).

Paso 1: Calcular lo gastado inicialmente.

$$\text{Gastado} = \frac{2}{3}C = \frac{2}{3}$$

Paso 2: Calcular lo que queda sin gastar inicialmente.

$$\text{Sin gastar} = C - \frac{2}{3}C = 1 - \frac{2}{3} = \frac{3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Paso 3: Calcular lo que se recupera ($\frac{1}{4}$ de lo gastado).

$$\text{Recuperado} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1 \times 2}{4 \times 3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Justificación de la simplificación: $\frac{2}{12} = \frac{2 \div 2}{12 \div 2} = \frac{1}{6}$ (dividimos numerador y denominador por su MCD, que es 2).

Paso 4: Calcular el total sin gastar al final.

$$\text{Total sin gastar} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

Para sumar fracciones necesitamos común denominador. El $\text{MCM}(3, 6) = 6$.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Diagrama ilustrativo:

Cantidad inicial: $C = 1$

Gastado: $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{6}$

Recuperado: $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{3}$

Sin gastar total: $\frac{1}{2}$

Respuesta: $\frac{1}{2}$ de la cantidad inicial queda sin gastar.

1.2. Ejercicio 61b

Enunciado: En un club, $\frac{3}{5}$ son mujeres. Si $\frac{1}{3}$ de los hombres son socios fundadores (SF) y hay 20 hombres SF, ¿cuántas mujeres hay en el club?

Solución paso a paso:

Paso 1: Calcular la fracción de hombres en el club.

Dado que $\frac{3}{5}$ son mujeres:

$$\text{Fracción de hombres} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{5}{5} - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

Paso 2: Calcular qué fracción del total representan los hombres SF.

Los hombres SF son $\frac{1}{3}$ de los hombres:

$$\text{Hombres SF} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15} \text{ del total}$$

Paso 3: Calcular el total de socios usando la información de que hay 20 hombres SF.

Si $\frac{2}{15}$ del total = 20, entonces:

$$\frac{2}{15} \times T = 20$$

$$T = 20 \div \frac{2}{15} = 20 \times \frac{15}{2} = \frac{300}{2} = 150 \text{ socios}$$

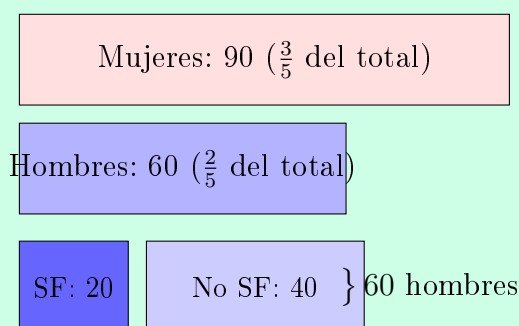
Paso 4: Calcular el número de mujeres.

$$\text{Mujeres} = \frac{3}{5} \times 150 = \frac{450}{5} = 90 \text{ mujeres}$$

Verificación:

- Total hombres: $\frac{2}{5} \times 150 = 60$
- Hombres SF: $\frac{1}{3} \times 60 = 20$ ✓
- Mujeres: 90
- Total: $90 + 60 = 150$ ✓

Diagrama de composición del club:



Respuesta: Hay 90 mujeres en el club.

1.3. Ejercicio 61c

Enunciado: ¿Cuál es el número cuya $\frac{3}{4}$ parte es 60?

Solución paso a paso:

Planteamiento: Sea x el número buscado. Según el enunciado:

$$\frac{3}{4}x = 60$$

Método 1 - Despeje algebraico:

Multiplicamos ambos lados por el recíproco de $\frac{3}{4}$, que es $\frac{4}{3}$:

$$x = 60 \times \frac{4}{3}$$

Justificación: Al multiplicar $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{12}{12} = 1$, eliminamos la fracción.

Calculamos:

$$x = \frac{60 \times 4}{3} = \frac{240}{3} = 80$$

Método 2 - Razonamiento proporcional:

Si $\frac{3}{4}$ del número es 60, entonces cada cuarto es:

$$\frac{1}{4} = \frac{60}{3} = 20$$

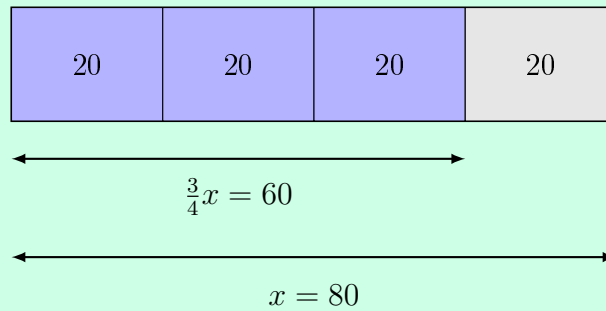
Por tanto, el número completo (4 cuartos) es:

$$4 \times 20 = 80$$

Verificación:

$$\frac{3}{4} \times 80 = \frac{3 \times 80}{4} = \frac{240}{4} = 60 \quad 3$$

Representación visual:



Respuesta: El número buscado es 80.

2. Ejercicio 62: Radicales y Operaciones

2.1. Ejercicio 62a

Enunciado: Opera y simplifica: $\sqrt{3} + \sqrt{27} - \sqrt{48}$

Solución paso a paso:

Estrategia: Simplificar cada radical extrayendo factores cuadrados perfectos.

Paso 1: Simplificar $\sqrt{27}$.

Descomponemos 27 en factores primos:

$$27 = 3^3 = 3^2 \times 3 = 9 \times 3$$

Por tanto:

$$\sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = \sqrt{9} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

Justificación: Aplicamos la propiedad $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ (válida para $a, b \geq 0$).

Paso 2: Simplificar $\sqrt{48}$.

Descomponemos 48:

$$48 = 16 \times 3 = 2^4 \times 3$$

Por tanto:

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

Paso 3: Sustituir en la expresión original.

$$\sqrt{3} + \sqrt{27} - \sqrt{48} = \sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$$

Paso 4: Sumar términos semejantes (todos tienen $\sqrt{3}$).

$$= (1 + 3 - 4)\sqrt{3} = 0 \times \sqrt{3} = 0$$

Justificación: Factorizamos $\sqrt{3}$ aplicando la propiedad distributiva: $a\sqrt{c} + b\sqrt{c} = (a + b)\sqrt{c}$.

Respuesta: $\boxed{0}$

2.2. Ejercicio 62b

Enunciado: Opera: $\sqrt[3]{54} \div \sqrt[3]{2}$

Solución paso a paso:

Método: Aplicar la propiedad de división de radicales del mismo índice.

Teorema utilizado: Para radicales de mismo índice:

$$\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$$

Aplicación:

$$\sqrt[3]{54} \div \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27}$$

Paso 2: Calcular $\sqrt[3]{27}$.

Buscamos el número que elevado al cubo da 27:

$$3^3 = 27 \implies \sqrt[3]{27} = 3$$

Verificación:

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27 \quad 3$$

Respuesta: $\boxed{3}$

2.3. Ejercicio 62c

Enunciado: Halla la fracción generatriz de $0,8\bar{3}$

Solución paso a paso:

Identificación del tipo de decimal:

- Parte entera: 0
- Parte decimal no periódica (anteperiodo): 8
- Parte decimal periódica (periodo): 3

Este es un **decimal mixto** (tiene anteperiodo y periodo).

Fórmula para decimales mixtos:

$$\text{Fracción generatriz} = \frac{\text{Número completo} - \text{Parte no periódica}}{\underbrace{99\dots 9}_{n \text{ nueves}} \underbrace{00\dots 0}_{m \text{ ceros}}}$$

donde n = cifras del periodo, m = cifras del anteperiodo.

Aplicación:

- Número completo sin coma: 83
- Parte no periódica: 8
- Cifras del periodo: 1 (el 3)

- Cifras del anteperiodo: 1 (el 8)

$$0,8\bar{3} = \frac{83 - 8}{90} = \frac{75}{90}$$

Simplificación:

Calculamos el MCD(75, 90):

$$90 = 75 \times 1 + 15$$

$$75 = 15 \times 5 + 0$$

Por tanto, $\text{MCD}(75, 90) = 15$.

$$\frac{75}{90} = \frac{75 \div 15}{90 \div 15} = \frac{5}{6}$$

Verificación:

$$\frac{5}{6} = 0,8333... = 0,8\bar{3} \quad 3$$

Respuesta: $\boxed{\frac{5}{6}}$

3. Ejercicio 63: Progresión Aritmética

3.1. Ejercicio 63a

Enunciado: En una progresión aritmética, el primer término es $a_1 = 10$ y la diferencia es $d = -3$. Halla el octavo término a_8 .

Solución paso a paso:

Definición: Una progresión aritmética (PA) es una sucesión en la que cada término se obtiene sumando una cantidad constante d (diferencia) al término anterior.

Fórmula del término general:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

donde:

- a_n es el término que buscamos
- a_1 es el primer término
- n es la posición del término
- d es la diferencia común

Datos:

- $a_1 = 10$
- $d = -3$
- $n = 8$

Sustitución:

$$a_8 = 10 + (8 - 1)(-3)$$

Cálculo paso a paso:

$$\begin{aligned} a_8 &= 10 + 7 \times (-3) \\ &= 10 + (-21) \\ &= 10 - 21 \\ &= -11 \end{aligned}$$

Verificación construyendo la progresión:

$$a_1 = 10$$

$$a_2 = 10 + (-3) = 7$$

$$a_3 = 7 + (-3) = 4$$

$$a_4 = 4 + (-3) = 1$$

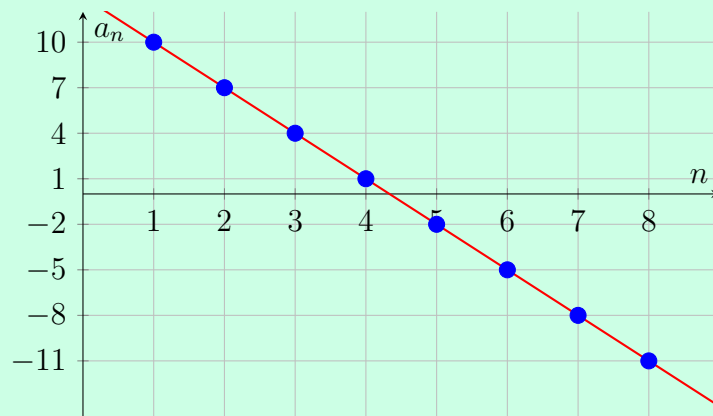
$$a_5 = 1 + (-3) = -2$$

$$a_6 = -2 + (-3) = -5$$

$$a_7 = -5 + (-3) = -8$$

$$a_8 = -8 + (-3) = -11 \quad 3$$

Gráfica de la progresión:



Respuesta: $a_8 = -11$

3.2. Ejercicio 63b

Enunciado: Con los datos del ejercicio anterior, calcula la suma de los primeros 8 términos.

Solución paso a paso:

Fórmula de la suma de n términos de una PA:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Justificación de la fórmula: Si escribimos la suma en orden directo e inverso:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

Sumando ambas expresiones:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)}_{n \text{ sumandos iguales a } (a_1 + a_n)}$$

Por tanto: $2S_n = n(a_1 + a_n) \implies S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$

Datos:

- $n = 8$
- $a_1 = 10$
- $a_8 = -11$ (calculado en el apartado anterior)

Sustitución:

$$S_8 = \frac{8(10 + (-11))}{2}$$

Cálculo:

$$\begin{aligned} S_8 &= \frac{8(10 - 11)}{2} \\ &= \frac{8 \times (-1)}{2} \\ &= \frac{-8}{2} \\ &= -4 \end{aligned}$$

Verificación por suma directa:

$$\begin{aligned} S_8 &= 10 + 7 + 4 + 1 + (-2) + (-5) + (-8) + (-11) \\ &= (10 + 7 + 4 + 1) + (-2 - 5 - 8 - 11) \\ &= 22 + (-26) \\ &= -4 \end{aligned}$$

Respuesta: $S_8 = -4$

3.3. Ejercicio 63c

Enunciado: En una progresión aritmética se tiene $a_1 = 2$, $d = 4$ y $a_n = 74$. Halla el número de términos n .

Solución paso a paso:

Fórmula del término general:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Datos:

- $a_1 = 2$
- $d = 4$
- $a_n = 74$
- Incógnita: n

Sustitución:

$$74 = 2 + (n - 1) \times 4$$

Resolución paso a paso:

Paso 1: Restar 2 en ambos lados.

$$74 - 2 = (n - 1) \times 4$$

$$72 = 4(n - 1)$$

Paso 2: Dividir ambos lados entre 4.

$$\frac{72}{4} = n - 1$$

$$18 = n - 1$$

Paso 3: Sumar 1 en ambos lados.

$$n = 18 + 1 = 19$$

Verificación:

$$a_{19} = 2 + (19 - 1) \times 4 = 2 + 18 \times 4 = 2 + 72 = 74 \quad 3$$

Interpretación: La progresión tiene 19 términos y comienza en 2, aumentando de 4 en 4 hasta llegar a 74.

Respuesta: $n = 19$

4. Ejercicio 64: Variaciones Porcentuales

4.1. Ejercicio 64a

Enunciado: Un salario de €1800 sube un 2 % y luego baja un 2 %. ¿Cuál es el salario final?

Solución paso a paso:

Concepto clave: Las variaciones porcentuales sucesivas NO son conmutativas ni se cancelan. Un aumento del 2 % seguido de una disminución del 2 % NO devuelve la cantidad original.

Paso 1: Aplicar el aumento del 2 %.

Un aumento del 2 % significa multiplicar por $(1 + 0,02) = 1,02$:

$$\text{Salario tras aumento} = 1800 \times 1,02$$

Cálculo:

$$1800 \times 1,02 = 1800 \times \frac{102}{100} = \frac{183600}{100} = 1836 \text{ euros}$$

Paso 2: Aplicar la disminución del 2 %.

Una disminución del 2 % significa multiplicar por $(1 - 0,02) = 0,98$:

$$\text{Salario final} = 1836 \times 0,98$$

Cálculo:

$$1836 \times 0,98 = 1836 \times \frac{98}{100} = \frac{179928}{100} = 1799,28 \text{ euros}$$

Método alternativo (variación total):

Podemos calcular directamente el factor de variación total:

$$\text{Factor total} = 1,02 \times 0,98 = 1,0196 \times 0,98 = 0,9996$$

Por tanto:

$$\text{Salario final} = 1800 \times 0,9996 = 1799,28 \text{ euros}$$

Análisis: El salario final es **menor** que el inicial. La pérdida es:

$$1800 - 1799,28 = 0,72 \text{ euros}$$

Esto equivale a una pérdida del:

$$\frac{0,72}{1800} \times 100 = 0,04 \%$$

Conclusión: Cuando se aplican variaciones porcentuales sucesivas iguales pero de signo contrario, siempre hay una pérdida respecto al valor inicial.

Respuesta: 1799,28 euros

4.2. Ejercicio 64b

Enunciado: Un artículo costaba €20 y ahora cuesta €24. ¿Cuál es el porcentaje de aumento?

Solución paso a paso:

Fórmula del porcentaje de variación:

$$\text{Porcentaje de variación} = \frac{\text{Valor final} - \text{Valor inicial}}{\text{Valor inicial}} \times 100$$

Paso 1: Calcular el aumento absoluto.

$$\text{Aumento} = 24 - 20 = 4 \text{ euros}$$

Paso 2: Calcular el porcentaje que representa este aumento.

$$\text{Porcentaje de aumento} = \frac{4}{20} \times 100$$

Simplificación:

$$\frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0,20$$

Conversión a porcentaje:

$$0,20 \times 100 = 20 \%$$

Verificación:

Si el precio original era €20 y aumentó un 20 %:

$$20 \times (1 + 0,20) = 20 \times 1,20 = 24 \text{ euros} \quad 3$$

Respuesta: 20 %

4.3. Ejercicio 64c

Enunciado: Tras un aumento del 20 %, un producto cuesta €60. ¿Cuál era el precio original?

Solución paso a paso:

Planteamiento: Sea x el precio original. Un aumento del 20 % significa multiplicar por 1,20.

Ecuación:

$$x \times 1,20 = 60$$

Justificación: Un aumento del 20 % equivale a:

$$x + 0,20x = x(1 + 0,20) = 1,20x$$

Resolución:

Dividimos ambos lados entre 1,20:

$$x = \frac{60}{1,20}$$

Cálculo:

$$x = \frac{60}{1,20} = \frac{60}{\frac{12}{10}} = 60 \times \frac{10}{12} = \frac{600}{12} = 50 \text{ euros}$$

Método alternativo (usando porcentajes):

Si el precio final (60 euros) representa el 120 % del precio original, entonces:

$$120 \% \rightarrow 60 \text{ euros}$$

$$100 \% \rightarrow x \text{ euros}$$

Por regla de tres:

$$x = \frac{60 \times 100}{120} = \frac{6000}{120} = 50 \text{ euros}$$

Verificación:

$$50 \times 1,20 = 60 \quad 3$$

El aumento fue: $60 - 50 = 10$ euros, que es el 20 % de 50.

Respuesta: 50 euros

5. Ejercicio 65: Progresión Geométrica

5.1. Ejercicio 65a

Enunciado: En una progresión geométrica, el tercer término es $a_3 = 20$ y la razón es $r = 2$. Halla el primer término a_1 .

Solución paso a paso:

Definición: Una progresión geométrica (PG) es una sucesión en la que cada término se obtiene multiplicando el término anterior por una cantidad constante r (razón).

Fórmula del término general de una PG:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Datos:

- $a_3 = 20$
- $r = 2$
- $n = 3$
- Incógnita: a_1

Sustitución en la fórmula:

$$a_3 = a_1 \cdot r^{3-1}$$

$$20 = a_1 \cdot 2^2$$

$$20 = a_1 \cdot 4$$

Despeje de a_1 :

$$a_1 = \frac{20}{4} = 5$$

Verificación construyendo la progresión:

$$a_1 = 5$$

$$a_2 = 5 \times 2 = 10$$

$$a_3 = 10 \times 2 = 20 \quad 3$$

Respuesta: $a_1 = 5$

5.2. Ejercicio 65b

Enunciado: Con los datos del apartado anterior, calcula la suma de los primeros 6 términos S_6 .

Solución paso a paso:

Fórmula de la suma de los n primeros términos de una PG:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad (\text{para } r \neq 1)$$

Justificación de la fórmula:

Sea $S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + \dots + a_1r^{n-1}$

Multiplicamos por r :

$$r \cdot S_n = a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \dots + a_1r^n$$

Restamos:

$$S_n - r \cdot S_n = a_1 - a_1r^n$$

$$S_n(1 - r) = a_1(1 - r^n)$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r} = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Datos:

- $a_1 = 5$
- $r = 2$
- $n = 6$

Sustitución:

$$S_6 = 5 \cdot \frac{2^6 - 1}{2 - 1}$$

Cálculo paso a paso:

Primero calculamos 2^6 :

$$2^6 = 64$$

Sustituimos:

$$S_6 = 5 \cdot \frac{64 - 1}{1} = 5 \cdot 63 = 315$$

Verificación por suma directa:

Calculemos los 6 primeros términos:

$$a_1 = 5$$

$$a_2 = 10$$

$$a_3 = 20$$

$$a_4 = 20 \times 2 = 40$$

$$a_5 = 40 \times 2 = 80$$

$$a_6 = 80 \times 2 = 160$$

Suma:

$$S_6 = 5 + 10 + 20 + 40 + 80 + 160 = 315 \quad 3$$

Respuesta: $S_6 = 315$

5.3. Ejercicio 65c

Enunciado: En una progresión geométrica con $a_1 = 3$ y $r = \frac{1}{2}$, halla el cuarto término a_4 .

Solución paso a paso:

Fórmula del término general:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Datos:

■ $a_1 = 3$

■ $r = \frac{1}{2}$

■ $n = 4$

Sustitución:

$$a_4 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-1} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

Cálculo de la potencia:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8}$$

Justificación: Aplicamos la propiedad $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Cálculo final:

$$a_4 = 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

Verificación construyendo la progresión:

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$a_4 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \quad 3$$

Interpretación: Esta es una progresión geométrica decreciente, ya que $0 < r < 1$.
Cada término es la mitad del anterior.

Respuesta: $a_4 = \frac{3}{8}$

6. Ejercicio 66: Clasificación de Números y Potencias

6.1. Ejercicio 66a

Enunciado: Clasifica los siguientes números en los conjuntos numéricos que correspondan: $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{22}{7}$.

Solución paso a paso:

Recordatorio de conjuntos numéricos:

- $\mathbb{N}$: Naturales = $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Z}$: Enteros = $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- $\mathbb{Q}$: Racionales = números que se pueden expresar como $\frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$
- $\mathbb{I}$: Irracionales = números reales que NO son racionales
- $\mathbb{R}$: Reales = $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

Relación entre conjuntos:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$$\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$$

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$$

Análisis de $\frac{22}{7}$:

Este número está expresado como cociente de dos enteros (22 y 7), por tanto:

$$\frac{22}{7} \in \mathbb{Q} \text{ (Racional)}$$

También pertenece a $\mathbb{R}$ (todo racional es real).

Nota: $\frac{22}{7} \approx 3,142857\dots$ es una aproximación clásica de π , pero NO es igual a π .

Análisis de $\frac{\pi}{2}$:

Teorema: El cociente de un número irracional entre un número racional no nulo es siempre irracional.

Demostración por reducción al absurdo:

Supongamos que $\frac{\pi}{2} \in \mathbb{Q}$. Entonces existirían $p, q \in \mathbb{Z}$ con $q \neq 0$ tales que:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{p}{q}$$

Despejando:

$$\pi = \frac{2p}{q}$$

Como $2p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{Z}$ con $q \neq 0$, tendríamos que $\pi \in \mathbb{Q}$, lo cual es una contradicción ya que π es irracional.

Por tanto:

$$\frac{\pi}{2} \in \mathbb{I} \text{ (Irracional)}$$

También $\frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$ (todo irracional es real).

Respuesta:

$$\boxed{\frac{22}{7} \in \mathbb{Q}, \quad \frac{\pi}{2} \in \mathbb{I}}$$

6.2. Ejercicio 66b

Enunciado: Simplifica la expresión: $\frac{4^3 \cdot 8^{-1} \cdot 2^5}{16^2}$

Solución paso a paso:

Estrategia: Expresar todos los números como potencias de una misma base (base 2).

Paso 1: Expresar cada número como potencia de 2.

$$4 = 2^2$$

$$8 = 2^3$$

$$16 = 2^4$$

Paso 2: Sustituir en la expresión original.

$$\frac{4^3 \cdot 8^{-1} \cdot 2^5}{16^2} = \frac{(2^2)^3 \cdot (2^3)^{-1} \cdot 2^5}{(2^4)^2}$$

Paso 3: Aplicar la propiedad $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

$$= \frac{2^{2 \cdot 3} \cdot 2^{3 \cdot (-1)} \cdot 2^5}{2^{4 \cdot 2}}$$

$$= \frac{2^6 \cdot 2^{-3} \cdot 2^5}{2^8}$$

Paso 4: Aplicar la propiedad $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ en el numerador.

$$= \frac{2^{6+(-3)+5}}{2^8}$$

$$= \frac{2^{6-3+5}}{2^8} = \frac{2^8}{2^8}$$

Paso 5: Aplicar la propiedad $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

$$= 2^{8-8} = 2^0 = 1$$

Justificación final: Por definición, cualquier número no nulo elevado a la potencia 0 es igual a 1.

Verificación numérica:

$$\begin{aligned}\frac{4^3 \cdot 8^{-1} \cdot 2^5}{16^2} &= \frac{64 \cdot \frac{1}{8} \cdot 32}{256} \\ &= \frac{64 \cdot 32}{8 \cdot 256} \\ &= \frac{2048}{2048} = 1\end{aligned}$$

Respuesta: 1

6.3. Ejercicio 66c

Enunciado: Halla la fracción generatriz de 0,25.

Solución paso a paso:

Identificación: El decimal 0,25 es un decimal exacto (finito), no tiene parte periódica.

Método 1 - Definición directa:

0,25 significa "25 centésimas":

$$0,25 = \frac{25}{100}$$

Simplificación:

Calculamos el MCD(25, 100):

$$100 = 25 \times 4 + 0$$

Por tanto, $\text{MCD}(25, 100) = 25$.

$$\frac{25}{100} = \frac{25 \div 25}{100 \div 25} = \frac{1}{4}$$

Método 2 - Multiplicación por potencia de 10:

$$x = 0,25$$

Multiplicamos por 100 (tiene 2 decimales):

$$100x = 25$$

Despejamos:

$$x = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

Verificación:

$$\frac{1}{4} = 1 \div 4 = 0,25 \quad 3$$

Respuesta:

$$\boxed{\frac{1}{4}}$$

7. Ejercicio 67: Operaciones Combinadas

7.1. Ejercicio 67a

Enunciado: Calcula: $\frac{1}{5} \div \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6} \right) + \frac{1}{2}$

Solución paso a paso:

Recordatorio de jerarquía de operaciones:

1. Paréntesis
2. Potencias y raíces
3. Multiplicaciones y divisiones (de izquierda a derecha)
4. Sumas y restas (de izquierda a derecha)

Paso 1: Resolver el paréntesis: $\frac{2}{3} - \frac{1}{6}$.

Necesitamos común denominador. $\text{MCM}(3, 6) = 6$.

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Paso 2: Sustituir en la expresión original:

$$\frac{1}{5} \div \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

Paso 3: Realizar la división $\frac{1}{5} \div \frac{1}{2}$.

Recordatorio: Dividir entre una fracción equivale a multiplicar por su inverso.

$$\frac{1}{5} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{5} \times \frac{2}{1} = \frac{2}{5}$$

Paso 4: Sustituir:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{2}$$

Paso 5: Sumar las fracciones.

$\text{MCM}(5, 2) = 10$.

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{4}{10} + \frac{5}{10} = \frac{9}{10}$$

Verificación: La fracción $\frac{9}{10}$ es irreducible ya que $\text{MCD}(9, 10) = 1$.

Respuesta: $\boxed{\frac{9}{10}}$

7.2. Ejercicio 67b

Enunciado: Calcula: $1 - \frac{1}{4} \cdot \left[2 - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \right]$

Solución paso a paso:

Estrategia: Resolver de dentro hacia fuera (paréntesis más internos primero).

Paso 1: Resolver el paréntesis más interno: $\frac{1}{2} - 1$.

$$\frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{2} = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}$$

Paso 2: Sustituir en el corchete:

$$2 - \left(-\frac{1}{2} \right)$$

Aplicar la regla de signos: Restar un número negativo equivale a sumar su opuesto.

$$2 - \left(-\frac{1}{2} \right) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Paso 3: Sustituir en la expresión:

$$1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2}$$

Paso 4: Realizar la multiplicación:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{1 \times 5}{4 \times 2} = \frac{5}{8}$$

Paso 5: Realizar la resta:

$$1 - \frac{5}{8} = \frac{8}{8} - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

Respuesta: $\boxed{\frac{3}{8}}$

7.3. Ejercicio 67c

Enunciado: Simplifica: $(\sqrt{6} + \sqrt{3})^2 - 9$

Solución paso a paso:

Paso 1: Desarrollar el cuadrado del binomio.

Fórmula del cuadrado de una suma:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Aplicamos con $a = \sqrt{6}$ y $b = \sqrt{3}$:

$$(\sqrt{6} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{6})^2 + 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2$$

Paso 2: Simplificar cada término.

Primer término:

$$(\sqrt{6})^2 = 6$$

Justificación: Por definición, $(\sqrt{a})^2 = a$ para $a \geq 0$.

Tercer término:

$$(\sqrt{3})^2 = 3$$

Segundo término (término mixto):

$$2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{6 \cdot 3} = 2\sqrt{18}$$

Simplificación de $\sqrt{18}$:

$$18 = 9 \times 2 = 3^2 \times 2$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

Por tanto:

$$2\sqrt{18} = 2 \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

Paso 3: Sustituir:

$$(\sqrt{6} + \sqrt{3})^2 = 6 + 6\sqrt{2} + 3 = 9 + 6\sqrt{2}$$

Paso 4: Restar 9:

$$(\sqrt{6} + \sqrt{3})^2 - 9 = 9 + 6\sqrt{2} - 9 = 6\sqrt{2}$$

Respuesta: $\boxed{6\sqrt{2}}$

8. Ejercicio 68: Proporcionalidad Inversa

8.1. Ejercicio 68a

Enunciado: 3 pintores tardan 10 horas en pintar un muro. ¿Cuánto tardarán 5 pintores?

Solución paso a paso:

Concepto: Este es un problema de proporcionalidad inversa. A más pintores, menos tiempo se tarda.

Definición: Dos magnitudes son inversamente proporcionales si su producto es constante:

$$x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = k \text{ (constante)}$$

Identificación de magnitudes:

- $x_1 = 3$ pintores, $y_1 = 10$ horas
- $x_2 = 5$ pintores, $y_2 = ?$ horas

Planteamiento:

$$3 \times 10 = 5 \times x$$

Resolución:

$$\begin{aligned} 30 &= 5x \\ x &= \frac{30}{5} = 6 \text{ horas} \end{aligned}$$

Interpretación: El producto (número de pintores) $\times$ (tiempo) = trabajo total es constante e igual a 30 "pintores-hora".

Verificación lógica: Al aumentar de 3 a 5 pintores (más trabajadores), el tiempo disminuye de 10 a 6 horas (menos tiempo). ✓

Respuesta: 6 horas

8.2. Ejercicio 68b

Enunciado: 12 máquinas hacen un trabajo en 15 días. ¿Cuántas máquinas se necesitan para hacerlo en 10 días?

Solución paso a paso:

Tipo de proporcionalidad: Inversa (más máquinas implica menos días).

Planteamiento:

$$12 \times 15 = x \times 10$$

Resolución:

$$180 = 10x$$
$$x = \frac{180}{10} = 18 \text{ máquinas}$$

Verificación:

$$12 \times 15 = 180 \quad (\text{máquinas-día})$$
$$18 \times 10 = 180 \quad (\text{máquinas-día}) \quad 3$$

Interpretación: Se necesitan 6 máquinas adicionales ($18 - 12 = 6$) para reducir el tiempo en 5 días ($15 - 10 = 5$).

Respuesta: 18 máquinas

8.3. Ejercicio 68c

Enunciado: Una progresión aritmética tiene $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, con diferencia $d = 4$. ¿Cuál sería la razón r si fuera una progresión geométrica con los mismos primeros dos términos?

Solución paso a paso:

En una progresión aritmética (PA):

$$d = a_2 - a_1 = 5 - 1 = 4 \quad 3$$

En una progresión geométrica (PG):

La razón r se obtiene dividiendo un término entre el anterior:

$$r = \frac{a_2}{a_1}$$

Cálculo:

$$r = \frac{5}{1} = 5$$

Comparación PA vs PG con mismos primeros términos:

PA: 1, 5, 9, 13, 17, ... (sumamos 4)

PG: 1, 5, 25, 125, 625, ... (multiplicamos por 5)

Observación: Aunque ambas progresiones comienzan igual (1, 5, ...), crecen de manera muy diferente. La PG crece mucho más rápido.

Respuesta: $r = 5$

9. Ejercicio 69: Notación Científica y Radicales

9.1. Ejercicio 69a

Enunciado: Multiplica: $(4 \times 10^7) \times (2,5 \times 10^{-5})$

Solución paso a paso:

Recordatorio de notación científica:

Un número en notación científica se expresa como $a \times 10^n$ donde $1 \leq |a| < 10$ y $n \in \mathbb{Z}$.

Propiedad del producto:

$$(a \times 10^m) \times (b \times 10^n) = (a \times b) \times 10^{m+n}$$

Aplicación:

$$(4 \times 10^7) \times (2,5 \times 10^{-5}) = (4 \times 2,5) \times 10^{7+(-5)}$$

Paso 1: Multiplicar las partes decimales:

$$4 \times 2,5 = 10$$

Paso 2: Sumar los exponentes:

$$7 + (-5) = 7 - 5 = 2$$

Paso 3: Combinar:

$$= 10 \times 10^2$$

Paso 4: Simplificar (notar que $10 = 10^1$):

$$= 10^1 \times 10^2 = 10^{1+2} = 10^3$$

Forma decimal:

$$10^3 = 1000$$

Respuesta: $10^3 = 1000$ o simplemente 1000

9.2. Ejercicio 69b

Enunciado: Divide: $\frac{9 \times 10^{-3}}{3 \times 10^{-5}}$

Solución paso a paso:

Propiedad de la división:

$$\frac{a \times 10^m}{b \times 10^n} = \left(\frac{a}{b}\right) \times 10^{m-n}$$

Aplicación:

$$\frac{9 \times 10^{-3}}{3 \times 10^{-5}} = \left(\frac{9}{3}\right) \times 10^{-3-(-5)}$$

Paso 1: Dividir las partes decimales:

$$\frac{9}{3} = 3$$

Paso 2: Restar los exponentes:

$$-3 - (-5) = -3 + 5 = 2$$

Paso 3: Combinar:

$$= 3 \times 10^2$$

Forma decimal:

$$3 \times 10^2 = 3 \times 100 = 300$$

Respuesta: $3 \times 10^2 = 300$

9.3. Ejercicio 69c

Enunciado: Opera y simplifica: $\sqrt{50} \cdot \sqrt{2} - 5$

Solución paso a paso:

Paso 1: Aplicar la propiedad del producto de radicales.

Propiedad: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ (para $a, b \geq 0$)

$$\sqrt{50} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{50 \times 2} = \sqrt{100}$$

Paso 2: Simplificar $\sqrt{100}$:

$$\sqrt{100} = 10$$

Justificación: $10^2 = 100$, por tanto $\sqrt{100} = 10$.

Paso 3: Restar 5:

$$10 - 5 = 5$$

Método alternativo (simplificando primero):

Podríamos simplificar $\sqrt{50}$ antes:

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$$

Entonces:

$$5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - 5 = 5(\sqrt{2})^2 - 5 = 5 \times 2 - 5 = 10 - 5 = 5$$

Respuesta:

10. Ejercicio 70: Repaso General

10.1. Ejercicio 70a

Enunciado: Un libro se vende con un descuento del 10 % y luego se aplica un descuento adicional del 5 %. ¿Cuál es el descuento total equivalente?

Solución paso a paso:

Concepto importante: Los descuentos sucesivos NO se suman directamente. Un 10 % + 5 % NO es igual a 15 %.

Método 1 - Factores multiplicativos:

Un descuento del 10 % significa pagar el 90 % = 0,90

Un descuento del 5 % significa pagar el 95 % = 0,95

Factor total:

$$0,90 \times 0,95 = 0,855$$

Esto significa que se paga el 85,5 % del precio original.

Descuento total:

$$100 \% - 85,5 \% = 14,5 \%$$

Método 2 - Con precio concreto:

Supongamos que el libro cuesta 100€.

Tras primer descuento (10 %):

$$100 \times 0,90 = 90 \text{ euros}$$

Tras segundo descuento (5 % sobre 90):

$$90 \times 0,95 = 85,50 \text{ euros}$$

Descuento total:

$$100 - 85,50 = 14,50 \text{ euros}$$

Como porcentaje:

$$\frac{14,50}{100} \times 100 = 14,5 \%$$

Observación: $14,5 \% < 10 \% + 5 \% = 15 \%$. El descuento total es menor que la suma de los descuentos individuales porque el segundo descuento se aplica sobre una cantidad ya reducida.

Respuesta: 14,5 %

10.2. Ejercicio 70b

Enunciado: En una progresión aritmética, el quinto término es $a_5 = 18$ y la diferencia es $d = 3$. Calcula la suma de los primeros 5 términos S_5 .

Solución paso a paso:

Paso 1: Hallar a_1 usando la fórmula del término general.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Para $n = 5$:

$$a_5 = a_1 + (5 - 1) \times 3$$

$$18 = a_1 + 4 \times 3$$

$$18 = a_1 + 12$$

$$a_1 = 18 - 12 = 6$$

Paso 2: Calcular S_5 usando la fórmula de la suma.

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Sustituimos:

$$S_5 = \frac{5(a_1 + a_5)}{2} = \frac{5(6 + 18)}{2}$$

Cálculo:

$$S_5 = \frac{5 \times 24}{2} = \frac{120}{2} = 60$$

Verificación construyendo la progresión:

$$a_1 = 6$$

$$a_2 = 6 + 3 = 9$$

$$a_3 = 9 + 3 = 12$$

$$a_4 = 12 + 3 = 15$$

$$a_5 = 15 + 3 = 18$$

Suma:

$$S_5 = 6 + 9 + 12 + 15 + 18 = 60$$

Respuesta: 60

10.3. Ejercicio 70c

Enunciado: Simplifica a su mínima expresión: $\frac{2^{-1} + 3^{-1}}{5^{-1}}$

Solución paso a paso:

Paso 1: Convertir las potencias negativas a fracciones.

Recordatorio: $a^{-1} = \frac{1}{a}$

$$2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$5^{-1} = \frac{1}{5}$$

Paso 2: Sustituir en la expresión:

$$\frac{2^{-1} + 3^{-1}}{5^{-1}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{5}}$$

Paso 3: Sumar las fracciones del numerador.

MCM(2, 3) = 6:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

Paso 4: Sustituir:

$$\frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{5}}$$

Paso 5: Dividir fracciones.

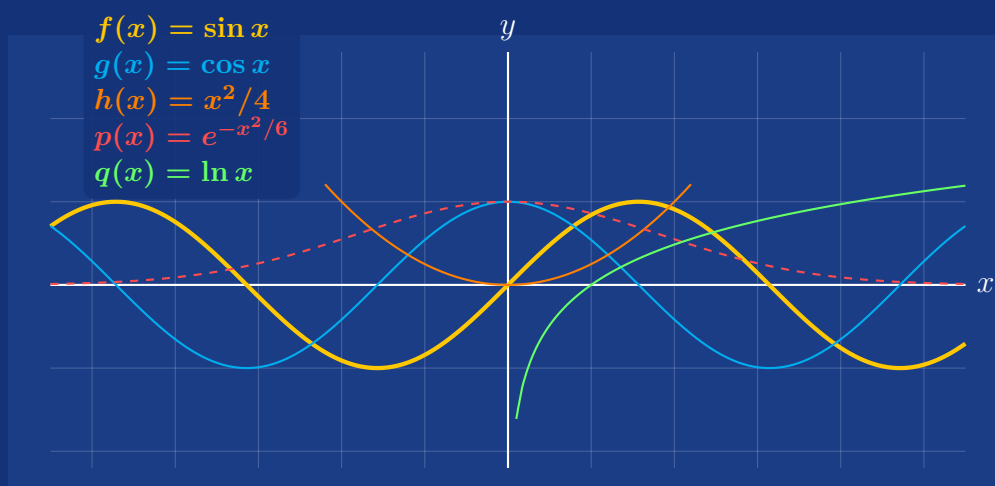
Recordatorio: $\frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

$$\frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{6} \times \frac{5}{1} = \frac{5 \times 5}{6 \times 1} = \frac{25}{6}$$

Verificación: MCD(25, 6) = 1, por tanto $\frac{25}{6}$ es irreducible.

Respuesta: $\boxed{\frac{25}{6}}$

π Σ ∞ $\sqrt{\quad}$ $\mathbb{R}$ ∇ ∂ $\int$



EXÁMENES DE LADIS

Matemáticas A

4.º ESO

Curso 2025–2026

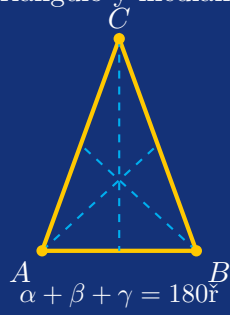
Álgebra · Funciones · Geometría · Estadística · Probabilidad

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad | \quad e^{i\pi} + 1 = 0 \quad | \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad | \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

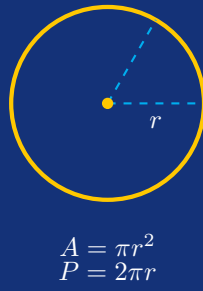
*“Las matemáticas son el lenguaje con el que
Dios ha escrito el universo.”*

— Galileo Galilei (1564–1642)

Triángulo y medianas



Círculo y radio



Espiral de Arquímedes



EXAMEN DE MATEMÁTICAS - Tema 1

1. Conjuntos Numéricos

Indica el conjunto de números más pequeño ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$) al que pertenecen los siguientes números:

$$\sqrt{3} \quad -12 \quad 0,25 \quad \sqrt{49} \quad 2,3\hat{7} \quad 1,010010001\dots$$

2. Simplificación con Propiedades de las Potencias

Simplifica la siguiente expresión, usando las propiedades de las potencias y expresando el resultado con **exponentes positivos**:

$$\frac{6^{-3} \cdot 12^4 \cdot 3^{-2}}{4^3 \cdot 9^{-2} \cdot 2^2}$$

3. Operaciones Combinadas con Fracciones

Opera y simplifica al máximo las siguientes expresiones:

a)

$$\frac{1}{5} : \frac{2}{3} - \frac{1}{10} \cdot \left(2 - \frac{1}{4}\right)$$

b)

$$\frac{1}{3} \cdot \left[\frac{5}{2} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 \right]$$

4. Operaciones Combinadas con Enteros y Potencias

Calcula el valor de la siguiente expresión:

$$(-2)^2 - 3 \cdot \sqrt{25} + [5 - 2 \cdot (1 - 4)]^2 : (-1)^5$$

5. Problema con Fracciones y Cálculos

- a) En una biblioteca, $\frac{2}{7}$ de los libros son de historia, $\frac{3}{5}$ son de literatura y el resto son de arte. ¿Qué **fracción del total** de libros es de arte?
- b) Si en la biblioteca hay 700 libros en total, ¿cuántos libros son de **literatura**?
- c) ¿Cuántos libros de **historia y arte** hay en total?

¡SUERTE JÓVENES!

SOLUCIONES COMPLETAS Y RAZONADAS

Documento pedagógico – rigor matemático total

TEMA 1 – CONJUNTOS NUMÉRICOS

Resolución paso a paso con rigor matemático completo

Contenidos:

1. Conjuntos Numéricos ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}$)
2. Propiedades de las Potencias
3. Operaciones con Fracciones
4. Expresiones Combinadas
5. Problemas con Fracciones

1

Índice

Introducción y Marco Teórico General	2
Conjuntos numéricos fundamentales	2
1. Ejercicio 1 – Conjuntos Numéricos	3
2. Ejercicio 2 – Simplificación con Propiedades de las Potencias	6
3. Ejercicio 3 – Operaciones Combinadas con Fracciones	9
4. Ejercicio 4 – Operaciones Combinadas con Enteros y Potencias	12
5. Ejercicio 5 – Problema con Fracciones y Cálculos	14
Resumen General de Resultados	17

1 Introducción y Marco Teórico General

Este documento presenta la resolución completa, rigurosa y pedagógica de todos los ejercicios del **Examen de Matemáticas – Tema 1**, correspondiente a **4.º de ESO, Matemáticas Académicas**.

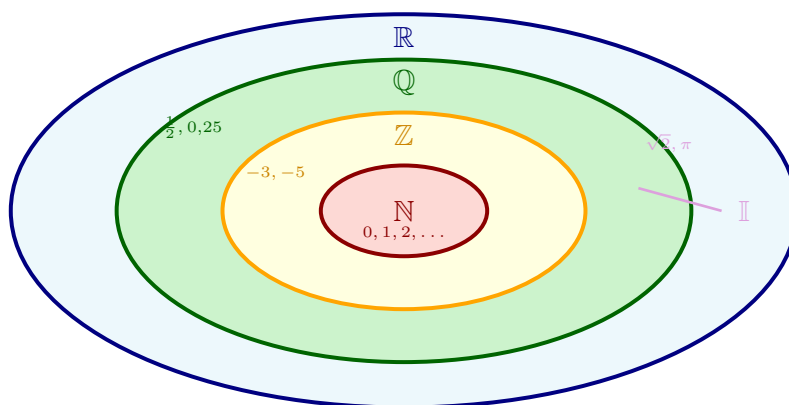
El objetivo no es únicamente dar una respuesta correcta, sino *explicar en profundidad* cada razonamiento, de modo que el alumno comprenda el por qué de cada paso.

Conjuntos numéricos fundamentales

Jerarquía de conjuntos numéricos

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \quad \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}, \quad \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$$

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ Números **naturales**
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ Números **enteros**
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$ Números **racionales**
- $\mathbb{I}$ Números **irracionales**: decimales infinitos no periódicos
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ Números **reales**



Regla de clasificación:

1. Natural (entero ≥ 0): pertenece a $\mathbb{N}$.
2. Entero negativo: pertenece a $\mathbb{Z}$, no a $\mathbb{N}$.
3. Decimal exacto o periódico: pertenece a $\mathbb{Q}$.
4. Decimal infinito no periódico o $\sqrt{n}$ sin cuadrado perfecto: pertenece a $\mathbb{I}$.

1

Ejercicio

1 – Conjuntos Numéricos

Enunciado del Ejercicio

Indica el conjunto de números más pequeño ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}$) al que pertenecen los siguientes números:

$$\sqrt{3} \quad -12 \quad 0,25 \quad \sqrt{49} \quad 2,3\bar{7} \quad 1,010010001\dots$$

Conceptos previos

Definición 1.1 (Número racional). Un número es **racional** ($\in \mathbb{Q}$) si su expresión decimal es *exacta* (termina) o *periódica* (tiene un bloque de cifras que se repite). Todo racional puede escribirse como $\frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$.

Definición 1.2 (Número irracional). Un número es **irracional** ($\in \mathbb{I}$) si su decimal es infinito y *no periódico*. No puede expresarse como cociente de enteros.

Criterio para raíces cuadradas

$\sqrt{n}$ es entera (natural) si y solo si n es un **cuadrado perfecto** ($n = k^2$, $k \in \mathbb{N}$). En caso contrario, $\sqrt{n} \in \mathbb{I}$.

Solución Completa Paso a Paso

Número 1: $\sqrt{3}$

[Paso 1 – ¿Es cuadrado perfecto?]

$$1^2 = 1 < 3 < 4 = 2^2$$

El valor 3 no es cuadrado perfecto (no existe $k \in \mathbb{N}$ con $k^2 = 3$).

[Paso 2 – Conclusión.]

Por el teorema clásico de irracionalidad, si p es primo entonces $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$. Como 3 es primo:

$$\sqrt{3} = 1,7320508\dots \in \mathbb{I}$$

$$\boxed{\sqrt{3} \in \mathbb{I}}$$

Número 2: -12

[Paso 1 – ¿Es natural?]

$-12 < 0$, por lo que $-12 \notin \mathbb{N}$.

[Paso 2 – ¿Es entero?]

$-12 \in \{\dots, -13, -12, -11, \dots\}$, es un entero negativo:

$$-12 \in \mathbb{Z}$$

$$-12 \in \mathbb{Z}$$

Número 3: 0,25

[Paso 1 – Convertir a fracción.]

$$0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

Decimal exacto, por tanto racional. No es entero.

$$0,25 \in \mathbb{Q}$$

Número 4: $\sqrt{49}$

[Paso 1 – Calcular la raíz.]

$$7^2 = 49 \implies \sqrt{49} = 7 \in \mathbb{N}$$

$$\sqrt{49} = 7 \in \mathbb{N}$$

Observación

Aunque se escriba con el signo radical, $\sqrt{49}$ resulta ser el número natural 7. El conjunto más pequeño es $\mathbb{N}$.

Número 5: $2,3\bar{7}$

[Paso 1 – Identificar el tipo de decimal.]

$2,3\bar{7} = 2,37777\ldots$ es un decimal periódico mixto: parte no periódica = 3, período = 7.

[Paso 2 – Convertir a fracción.]

Sea $x = 2,3\bar{7}$. Multiplicamos:

$$10x = 23,7, \quad 100x = 237,7$$

$$100x - 10x = 237,7 - 23,7 \implies 90x = 214 \implies x = \frac{214}{90} = \frac{107}{45}$$

Decimal periódico $\implies$ número racional.

$$2,3\bar{7} \in \mathbb{Q}$$

Número 6: $1,010010001\dots$

[Paso 1 – Analizar el patrón.]

$$1, \underbrace{01}_{\text{par}} \underbrace{00}_{\text{par}} \underbrace{1000}_{\text{par}} \underbrace{100001}_{\text{par}} \dots$$

Entre cada par de unos consecutivos, el número de ceros *aumenta en uno indefinidamente*. No existe ningún bloque de longitud fija que se repita.

[Paso 2 – Conclusión.]

Decimal infinito no periódico $\Rightarrow$ irracional:

$$1,010010001\dots \in \mathbb{I}$$

Tabla resumen – Ejercicio 1

Número	Expresión equivalente	Tipo de decimal	Conjunto
$\sqrt{3}$	$1,7320508\dots$	Infinito no periódico	$\mathbb{I}$
-12	-12	Entero	$\mathbb{Z}$
$0,25$	$\frac{1}{4}$	Exacto	$\mathbb{Q}$
$\sqrt{49}$	7	Natural	$\mathbb{N}$
$2,3\overline{7}$	$\frac{107}{45}$	Periódico mixto	$\mathbb{Q}$
$1,010010001\dots$	—	Infinito no periódico	$\mathbb{I}$

- Creer que $\sqrt{49} \in \mathbb{I}$ por el símbolo de raíz: hay que calcular primero. Resultado: $7 \in \mathbb{N}$.
- Confundir decimal periódico con irracional: el periódico **siempre es racional**.
- No distinguir $1,010010001\dots$ (irracional) de $1,\overline{010}$ (racional periódico).

1

Ejercicio

2 – Simplificación con Propiedades de las Potencias

Enunciado del Ejercicio

Simplifica usando propiedades de las potencias, con exponentes positivos:

$$\frac{6^{-3} \cdot 12^4 \cdot 3^{-2}}{4^3 \cdot 9^{-2} \cdot 2^2}$$

Propiedades utilizadas

Propiedades de potencias

$$(P1) \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$(P2) \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(P3) \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(P4) \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(P5) \quad (ab)^n = a^n \cdot b^n$$

Solución Completa Paso a Paso

Paso 1 – Descomponer bases en factores primos

$$\begin{aligned} 6 &= 2 \cdot 3, & 12 &= 2^2 \cdot 3, & 3 &= 3 \\ 4 &= 2^2, & 9 &= 3^2, & 2 &= 2 \end{aligned}$$

Paso 2 – Reescribir cada factor (P4, P5)

Numerador:

$$6^{-3} = (2 \cdot 3)^{-3} = 2^{-3} \cdot 3^{-3}$$

$$12^4 = (2^2 \cdot 3)^4 = 2^{2 \cdot 4} \cdot 3^4 = 2^8 \cdot 3^4$$

$$3^{-2} = 3^{-2}$$

Denominador:

$$4^3 = (2^2)^3 = 2^6$$

$$9^{-2} = (3^2)^{-2} = 3^{-4}$$

$$2^2 = 2^2$$

Paso 3 – Sustituir

$$\frac{2^{-3} \cdot 3^{-3} \cdot 2^8 \cdot 3^4 \cdot 3^{-2}}{2^6 \cdot 3^{-4} \cdot 2^2}$$

Paso 4 – Agrupar por base (P2)

Base 2:

$$\text{Num: } 2^{-3} \cdot 2^8 = 2^{-3+8} = 2^5 \quad \text{Den: } 2^6 \cdot 2^2 = 2^8$$

Base 3:

$$\text{Num: } 3^{-3} \cdot 3^4 \cdot 3^{-2} = 3^{-3+4-2} = 3^{-1} \quad \text{Den: } 3^{-4}$$

Paso 5 – Cociente (P3)

$$\frac{2^5}{2^8} \cdot \frac{3^{-1}}{3^{-4}} = 2^{5-8} \cdot 3^{-1-(-4)} = 2^{-3} \cdot 3^3$$

Paso 6 – Exponentes positivos (P1)

$$2^{-3} \cdot 3^3 = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$$

Verificación numérica

$$\text{Numerador: } 6^{-3} \cdot 12^4 \cdot 3^{-2} = \frac{1}{216} \cdot 20736 \cdot \frac{1}{9} = \frac{20736}{1944} = \frac{32}{3}$$

$$\text{Denominador: } 4^3 \cdot 9^{-2} \cdot 2^2 = 64 \cdot \frac{1}{81} \cdot 4 = \frac{256}{81}$$

$$\text{Resultado: } \frac{32/3}{256/81} = \frac{32}{3} \cdot \frac{81}{256} = \frac{32 \cdot 81}{3 \cdot 256} = \frac{2592}{768} = \frac{27}{8} \checkmark$$

$$\boxed{\frac{6^{-3} \cdot 12^4 \cdot 3^{-2}}{4^3 \cdot 9^{-2} \cdot 2^2} = \frac{27}{8}}$$

Esquema resumen:

$$\frac{6^{-3} \cdot 12^4 \cdot 3^{-2}}{4^3 \cdot 9^{-2} \cdot 2^2} = \frac{2^{-3} \cdot 3^{-3} \cdot 2^8 \cdot 3^4 \cdot 3^{-2}}{2^6 \cdot 3^{-4} \cdot 2^2} = \frac{2^5 \cdot 3^{-1}}{2^8 \cdot 3^{-4}} = 2^{-3} \cdot 3^3 = \frac{27}{8}$$

- Sumar exponentes de bases distintas: $2^3 \cdot 3^3 \neq 6^6$.
- Olvidar el signo en exponentes negativos: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, no $-a^n$.
- Aplicar P4 incorrectamente: $(2^2)^3 = 2^6$, no 2^5 .

- No descomponer 12: $12 = 2^2 \cdot 3$, no 12 directamente.

1

Ejercicio

3 – Operaciones Combinadas con Fracciones

Enunciado del Ejercicio

Opera y simplifica al máximo:

$$\text{a) } \frac{1}{5} : \frac{2}{3} - \frac{1}{10} \cdot \left(2 - \frac{1}{4}\right) \qquad \text{b) } \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{5}{2} - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right]$$

Reglas previas

Jerarquía de operaciones

- I. Paréntesis / corchetes / llaves: de interior a exterior.
- II. Potencias y raíces.
- III. Multiplicaciones y divisiones: de izquierda a derecha.
- IV. Sumas y restas: de izquierda a derecha.

Operaciones con fracciones

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Solución Completa Paso a Paso

Apartado a)

$$\frac{1}{5} : \frac{2}{3} - \frac{1}{10} \cdot \left(2 - \frac{1}{4}\right)$$

[Paso 1 – Paréntesis: $2 - \frac{1}{4}$]

$$2 - \frac{1}{4} = \frac{8}{4} - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

La expresión queda:

$$\frac{1}{5} : \frac{2}{3} - \frac{1}{10} \cdot \frac{7}{4}$$

[Paso 2 – División: $\frac{1}{5} : \frac{2}{3}$]

Dividir es multiplicar por el inverso:

$$\frac{1}{5} : \frac{2}{3} = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{10}$$

[Paso 3 – Multiplicación: $\frac{1}{10} \cdot \frac{7}{4}$]

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{7}{4} = \frac{7}{40}$$

La expresión queda:

$$\frac{3}{10} - \frac{7}{40}$$

[Paso 4 – Resta: $\text{mcm}(10, 40) = 40$]

$$\frac{3}{10} = \frac{12}{40} \quad \Rightarrow \quad \frac{12}{40} - \frac{7}{40} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

$$\boxed{\frac{1}{5} : \frac{2}{3} - \frac{1}{10} \cdot \left(2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}}$$

Apartado b)

$$\frac{1}{3} \cdot \left[\frac{5}{2} - \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right]$$

[Paso 1 – Potencia: $\left(\frac{1}{4}\right)^2$]

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

[Paso 2 – Corchete: $\frac{5}{2} - \frac{1}{16}$]

$\text{mcm}(2, 16) = 16$:

$$\frac{5}{2} = \frac{40}{16} \quad \Rightarrow \quad \frac{40}{16} - \frac{1}{16} = \frac{39}{16}$$

[Paso 3 – Producto: $\frac{1}{3} \cdot \frac{39}{16}$]

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{39}{16} = \frac{39}{48}$$

[Paso 4 – Simplificar.]

$39 = 3 \cdot 13$, $48 = 3 \cdot 16$, $\text{mcd}(39, 48) = 3$:

$$\frac{39}{48} = \frac{13}{16}$$

$$\boxed{\frac{1}{3} \cdot \left[\frac{5}{2} - \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right] = \frac{13}{16}}$$

$$\frac{1}{5} : \frac{2}{3} - \frac{1}{10} \cdot \left(2 - \frac{1}{4}\right)$$

1. Paréntesis: $2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

2. División: $\frac{1}{5} : \frac{2}{3} = \frac{3}{10}$

3. Producto: $\frac{1}{10} \cdot \frac{7}{4} = \frac{7}{40}$

4. Resta: $\frac{3}{10} - \frac{7}{40} = \frac{1}{8}$

- No invertir al dividir: $\frac{1}{5} : \frac{2}{3} \neq \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 3}$.
- Sumar denominadores distintos sin MCM.
- No simplificar la fracción final.
- Incumplir la jerarquía de operaciones.

1

Ejercicio

4 – Operaciones Combinadas con Enteros y Potencias

Enunciado del Ejercicio

Calcula el valor de la siguiente expresión:

$$(-2)^2 - 3 \cdot \sqrt{25} + [5 - 2 \cdot (1 - 4)]^2 : (-1)^5$$

Reglas de signos clave

Potencias con base negativa

$$(-a)^n = \begin{cases} +a^n & \text{si } n \text{ es par} \\ -a^n & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

En particular: $(-1)^n = +1$ si n par; $(-1)^n = -1$ si n impar.

Distinción crucial

$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$, mientras que $-2^2 = -(2^2) = -4$.
Los paréntesis cambian completamente el resultado.

Solución Completa Paso a Paso

Sea:

$$E = (-2)^2 - 3 \cdot \sqrt{25} + [5 - 2 \cdot (1 - 4)]^2 : (-1)^5$$

[Paso 1 – Calcular potencias y raíces elementales]

$$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$$

$$\sqrt{25} = 5 \quad (\text{pues } 5^2 = 25)$$

$$(-1)^5 = -1 \quad (\text{exponente impar})$$

[Paso 2 – Paréntesis más interior: $(1 - 4)$]

$$1 - 4 = -3$$

[Paso 3 – Interior del corchete: $5 - 2 \cdot (1 - 4)$]

$$5 - 2 \cdot (-3) = 5 - (-6) = 5 + 6 = 11$$

Justificación: $2 \cdot (-3) = -6$; restar un número negativo equivale a sumar su opuesto.

[Paso 4 – Elevar el corchete al cuadrado]

$$[5 - 2 \cdot (1 - 4)]^2 = 11^2 = 121$$

[Paso 5 – Sustituir todos los valores]

$$E = 4 - 3 \cdot 5 + 121 : (-1)$$

[Paso 6 – Multiplicaciones y divisiones]

$$3 \cdot 5 = 15 \quad \text{y} \quad 121 : (-1) = -121$$

$$E = 4 - 15 + (-121) = 4 - 15 - 121$$

[Paso 7 – Sumas y restas (de izquierda a derecha)]

$$E = (4 - 15) - 121 = -11 - 121 = -132$$

Bloque	Expresión	Valor
Potencia par	$(-2)^2$	+4
Raíz	$\sqrt{25}$	5
Producto	$3 \cdot 5$	15
Paréntesis interior	$(1 - 4)$	-3
Corchete	$5 - 2 \cdot (-3)$	11
Cuadrado del corchete	11^2	121
División	$121 : (-1)$	-121
Total	$4 - 15 + (-121)$	-132

$$(-2)^2 - 3 \cdot \sqrt{25} + [5 - 2 \cdot (1 - 4)]^2 : (-1)^5 = -132$$

- $(-2)^2 \neq -4$: la base entera entre paréntesis eleva también el signo.
- $5 - (-6) \neq 5 - 6 = -1$: restar negativo es sumar.
- $121 : (-1) \neq +121$: positivo entre negativo da negativo.
- Saltarse el orden de paréntesis: siempre resolver el más interior primero.

1

Ejercicio

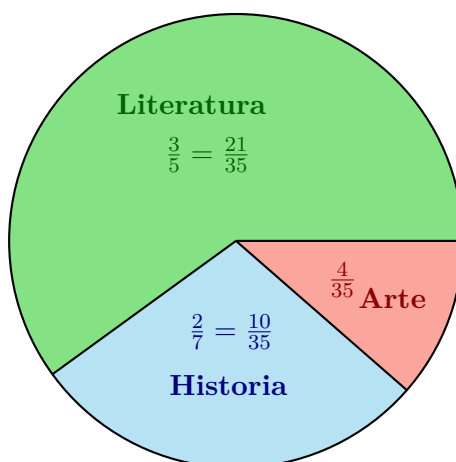
5 – Problema con Fracciones y Cálculos

Enunciado del Ejercicio

En una biblioteca:

- $\frac{2}{7}$ de los libros son de **historia**
 - $\frac{3}{5}$ de los libros son de **literatura**
 - El resto son de **arte**
- a) ¿Qué fracción del total es de arte?
 b) Si hay 700 libros en total, ¿cuántos son de literatura?
 c) ¿Cuántos libros de historia y arte hay en total?

Diagrama: distribución de la biblioteca



Solución Completa Paso a Paso

Apartado a) – Fracción de libros de arte

[Planteamiento.]

El total es la unidad 1. La fracción de arte es el complemento de historia y literatura:

$$\text{Arte} = 1 - \frac{2}{7} - \frac{3}{5}$$

[MCM de denominadores: $\text{mcm}(1, 7, 5) = 35$.]

$$1 = \frac{35}{35}, \quad \frac{2}{7} = \frac{10}{35}, \quad \frac{3}{5} = \frac{21}{35}$$

[Resta.]

$$\text{Arte} = \frac{35}{35} - \frac{10}{35} - \frac{21}{35} = \frac{35 - 10 - 21}{35} = \frac{4}{35}$$

[Verificación.]

$$\frac{10}{35} + \frac{21}{35} + \frac{4}{35} = \frac{35}{35} = 1 \checkmark$$

La fracción de arte es $\frac{4}{35}$

Apartado b) – Número de libros de literatura

[Datos:] Total = 700 libros; fracción de literatura = $\frac{3}{5}$.

$$\text{Literatura} = \frac{3}{5} \cdot 700 = \frac{3 \cdot 700}{5} = \frac{2100}{5} = 420$$

Comprobación: $420/700 = 0,6 = 3/5 \checkmark$

Hay 420 libros de literatura

Apartado c) – Libros de historia y arte

Método 1 – Fracción conjunta y aplicar al total.

$$\frac{2}{7} + \frac{4}{35} = \frac{10}{35} + \frac{4}{35} = \frac{14}{35} = \frac{2}{5}$$

$$\text{Historia} + \text{Arte} = \frac{2}{5} \cdot 700 = 280$$

Verificación por Método 2 – Calcular por separado.

$$\text{Historia} = \frac{2}{7} \cdot 700 = 200 \quad \text{Arte} = \frac{4}{35} \cdot 700 = 80$$

$$200 + 80 = 280 \checkmark$$

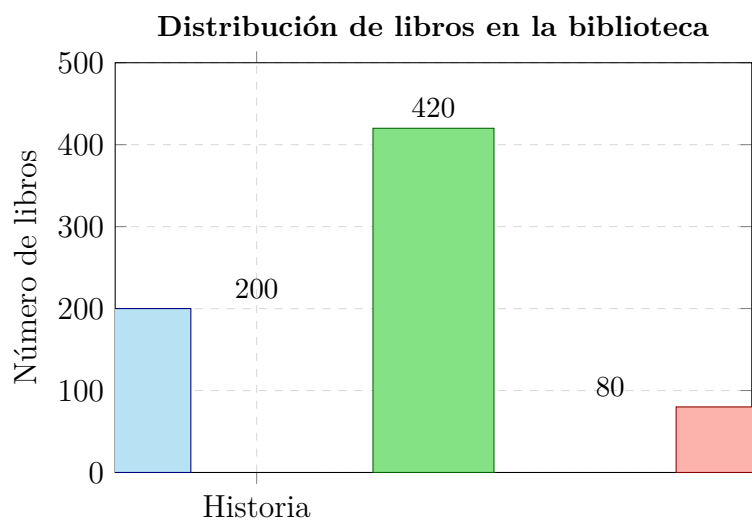
[Comprobación global.]

$$420 + 200 + 80 = 700 \checkmark$$

Hay 280 libros de historia y arte en total

Tabla resumen – Ejercicio 5

Categoría	Fracción	En 35 avos	Libros (700)	%
Historia	$\frac{2}{7}$	$\frac{10}{35}$	200	28,57 %
Literatura	$\frac{3}{5}$	$\frac{21}{35}$	420	60,00 %
Arte	$\frac{4}{35}$	$\frac{4}{35}$	80	11,43 %
Total	1	$\frac{35}{35}$	700	100 %



- Olvidar restar de 1: el total es siempre la unidad, no otro número.
- Sumar denominadores sin buscar MCM: $\frac{2}{7} + \frac{3}{5} \neq \frac{5}{12}$.
- No verificar que la suma total de fracciones sea 1.
- Calcular mal el número concreto: $\frac{3}{5} \cdot 700 = 420$, no $\frac{3 \cdot 5}{700}$.

1

Resumen

General de Resultados

Resumen de todas las soluciones

Ejercicio 1 – Conjuntos Numéricos

$$\sqrt{3} \in \mathbb{I} \mid -12 \in \mathbb{Z} \mid 0,25 \in \mathbb{Q} \mid \sqrt{49} \in \mathbb{N} \mid 2,3\bar{7} \in \mathbb{Q} \mid 1,010010001\dots \in \mathbb{I}$$

Ejercicio 2 – Potencias

$$\frac{6^{-3} \cdot 12^4 \cdot 3^{-2}}{4^3 \cdot 9^{-2} \cdot 2^2} = \frac{27}{8}$$

Ejercicio 3 – Fracciones

$$\text{a) } \frac{1}{5} : \frac{2}{3} - \frac{1}{10} \cdot \left(2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} \qquad \text{b) } \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{5}{2} - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right] = \frac{13}{16}$$

Ejercicio 4 – Expresión Combinada

$$(-2)^2 - 3 \cdot \sqrt{25} + [5 - 2 \cdot (1 - 4)]^2 : (-1)^5 = -132$$

Ejercicio 5 – Biblioteca

$$\text{a) Arte} = \frac{4}{35} \qquad \text{b) Literatura} = 420 \text{ libros} \qquad \text{c) Historia+Arte} = 280 \text{ libros}$$

Los cinco ejercicios de este examen cubren los conceptos fundamentales del Tema 1:

- **Clasificación numérica:** identificar si un decimal es exacto, periódico o no periódico, y si una raíz cuadrada es entera.
- **Potencias:** descomponer en factores primos y aplicar las siete propiedades fundamentales.
- **Fracciones:** respetar la jerarquía de operaciones, calcular el MCM y simplificar.
- **Expresiones combinadas:** atención especial al signo en potencias con base negativa y al orden correcto de resolución.
- **Problemas:** identificar la fracción desconocida como complemento de las conocidas; multiplicar fracción por total para obtener el número concreto.

La clave del éxito en matemáticas

Practicar paso a paso, justificando cada transformación
y verificando siempre el resultado final.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \supset \mathbb{I}$$

N1. Números Racionales y Fracción Generatriz

- (a) Clasifica los siguientes números decimales indicando si son exactos, periódicos puros, periódicos mixtos o irracionales:

$$A = 3,454545\dots \quad B = \sqrt{169} \quad C = \pi - 1 \quad D = 2,0123123123\dots$$

- (b) Calcula la **fracción generatriz** irreducible de los números A y D del apartado anterior.
-

N2. Operaciones con Notación Científica

- (a) Realiza la siguiente operación en **notación científica** y expresa el resultado con tres cifras significativas:

$$\frac{4,2 \cdot 10^{-5} + 3,1 \cdot 10^{-4}}{2,5 \cdot 10^3}$$

- (b) Un depósito tiene una capacidad de $1,5 \cdot 10^7$ litros de agua. Si se utilizan $5 \cdot 10^4$ litros por hora, ¿cuántas horas tardará en vaciarse el depósito? Expresa el resultado en notación científica.
-

N3. Radicales y Simplificación

- (a) Introduce los factores dentro de la raíz y simplifica el resultado si es posible:

$$A = 5\sqrt[3]{4} \quad B = \frac{1}{2}\sqrt{72}$$

- (b) Extrae todos los factores posibles de los siguientes radicales y simplifica la expresión resultante:

$$\sqrt{108} - 5\sqrt{3} + \sqrt{27}$$

N4. Intervalos y Aproximación

- (a) Expresa de forma precisa los siguientes conjuntos de números reales mediante **intervalos** y represéntalos en la recta real:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 5\} \quad B = E(1, 3)$$

(Entorno de centro 1 y radio 3)

- (b) Redondea el número $N = 0,05739$ a las **centésimas** y trúncalo a las **milésimas**. Calcula el **error absoluto** cometido al redondear a las centésimas.
-

N5. Propiedades de los Números Reales y Errores

- (a) El valor real de una magnitud es $V_R = 3,5$ metros. En un laboratorio se realizan dos mediciones: $M_1 = 3,48$ m y $M_2 = 3,53$ m. Calcula el **error relativo** de cada medición y determina cuál de las dos es más precisa.

- (b) Utiliza el proceso de **racionalización** para simplificar las siguientes expresiones:

$$A = \frac{3}{\sqrt{6}} \quad B = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1}$$

Soluciones Completas

Examen de Matemáticas

4º ESO – Grupo D

Bloques temáticos:

- N1 Números Racionales y Fracción Generatriz
- N2 Operaciones con Notación Científica
- N3 Radicales y Simplificación
- N4 Intervalos y Aproximación
- N5 Propiedades de los Números Reales y Errores

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Documento elaborado con rigor matemático
Cada paso justificado · Notas pedagógicas · Diagramas explicativos

Curso académico 2024–2025

Índice general

Introducción pedagógica	2
1. N1 – Números Racionales y Fracción Generatriz	3
Enunciado del bloque N1	3
1.1. Apartado (a): Clasificación de números decimales	3
N1(a) – Clasificación de números decimales	3
1.2. Apartado (b): Fracción generatriz de A y D	5
N1(b) – Fracción generatriz	5
1.2.1. Fracción generatriz de $A = 3,4\overline{5}$	6
1.2.2. Fracción generatriz de $D = 2,0\overline{123}$	7
2. N2 – Operaciones con Notación Científica	9
Enunciado del bloque N2	9
2.1. Apartado (a): Operación en notación científica	9
N2(a) – Operación con notación científica	9
2.1.1. Cálculo del numerador	10
2.1.2. División del resultado	10
2.1.3. Redondeo a 3 cifras significativas	10
2.2. Apartado (b): Vaciado del depósito	11
N2(b) – Problema del depósito	11
3. N3 – Radicales y Simplificación	13
Enunciado del bloque N3	13
3.1. Apartado (a): Introducir factores dentro de la raíz	13
N3(a) – Introducir factores en la raíz	13
3.1.1. Expresión $A = 5\sqrt[3]{4}$	13
3.1.2. Expresión $B = \frac{1}{2}\sqrt{72}$	14
3.2. Apartado (b): Extracción de factores y simplificación	14
N3(b) – Simplificación de radicales	14
3.2.1. Descomposición de $\sqrt{108}$	15
3.2.2. Descomposición de $\sqrt{27}$	15

3.2.3. Suma de radicales	15
4. N4 – Intervalos y Aproximación	17
Enunciado del bloque N4	17
4.1. Apartado (a): Intervalos y recta real	17
N4(a) – Intervalos en la recta real	17
4.1.1. Conjunto A	18
4.1.2. Conjunto $B = E(1, 3)$	18
4.2. Apartado (b): Redondeo, truncamiento y error absoluto	18
N4(b) – Redondeo, truncamiento y error absoluto	18
4.2.1. Identificación de posiciones decimales	19
4.2.2. Redondeo a las centésimas	19
4.2.3. Truncamiento a las milésimas	19
4.2.4. Error absoluto al redondear	19
5. N5 – Propiedades de los Números Reales y Errores	21
Enunciado del bloque N5	21
5.1. Apartado (a): Error relativo y precisión	21
N5(a) – Error relativo	21
5.1.1. Medición $M_1 = 3,48$ m	22
5.1.2. Medición $M_2 = 3,53$ m	22
5.1.3. Comparación	22
5.2. Apartado (b): Racionalización	23
N5(b) – Racionalización	23
5.2.1. Expresión $A = \frac{3}{\sqrt{6}}$	23
5.2.2. Expresión $B = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$	23
Resumen de resultados	25

Introducción pedagógica

Este documento contiene la resolución íntegra de todos los ejercicios del examen de Matemáticas de 4º ESO, Grupo D. El objetivo no es únicamente obtener la respuesta correcta, sino comprender en profundidad *por qué* cada paso es válido.

Cómo usar este documento:

- Lee primero el enunciado y trata de resolverlo por tu cuenta.
- Luego compara tu proceso con el que aquí se desarrolla.
- Presta especial atención a las cajas de “*Error frecuente*” y de “*Observación importante*”.
- Los diagramas TikZ acompañan cada ejercicio para reforzar la comprensión visual.

Notación empleada:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

- $\mathbb{N}$: números naturales $(0, 1, 2, \dots)$.
- $\mathbb{Z}$: números enteros $(\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$.
- $\mathbb{Q}$: números racionales (cocientes p/q , $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$).
- $\mathbb{R}$: números reales ($\mathbb{Q}$ más los irracionales).

Capítulo 1

N1 – Números Racionales y Fracción Generatriz

Enunciado

Enunciado N1

(a) Clasifica los siguientes números decimales indicando si son exactos, periódicos puros, periódicos mixtos o irracionales:

$$A = 3,454545\dots \quad B = \sqrt{169} \quad C = \pi - 1 \quad D = 2,0123123123\dots$$

(b) Calcula la **fracción generatriz irreducible** de los números A y D del apartado anterior.

1.1. Apartado (a): Clasificación de números decimales

Definición / Teorema de referencia

Tipos de números decimales:

1. **Decimal exacto:** la expansión decimal termina (número finito de cifras decimales). Es siempre racional.
2. **Periódico puro:** desde el primer decimal se repite indefinidamente un bloque (período). Es racional.
3. **Periódico mixto:** hay primero una parte no periódica (anteperíodo) y luego un período. Es racional.

4. **Irracional:** expansión decimal infinita y no periódica. No es expresable como p/q .

Número $A = 3,454545 \dots$

Observamos la estructura decimal:

- Parte entera: 3.
- Parte decimal: $\underbrace{45} \underbrace{45} \underbrace{45} \dots$
- Anteperíodo: ninguno (longitud 0).
- Período: 45 (longitud 2).

Como el período comienza desde la primera cifra decimal y no existe anteperíodo:

Resultado final

$A = 3,\overline{45}$ es un **número decimal periódico puro**.

Número $B = \sqrt{169}$

Buscamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n^2 = 169$:

$$13^2 = 169 \quad \implies \quad \sqrt{169} = 13$$

$B = 13$ es un número entero, con representación decimal $13,000 \dots$

Resultado final

$B = \sqrt{169} = 13$ es un **número decimal exacto** ($B \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$).

Observación importante

$169 = 13^2$ es un *cuadrado perfecto*. La raíz cuadrada de un entero es racional si y solo si ese entero es un cuadrado perfecto.

Número $C = \pi - 1$

$\pi = 3,14159265 \dots$ es irracional (demostrado por J.H. Lambert en 1761).

$$C = \pi - 1 = 2,14159265 \dots$$

La diferencia de un irracional y un racional es siempre irracional. En efecto, si supusiéramos $\pi - 1 = r \in \mathbb{Q}$, entonces $\pi = r + 1 \in \mathbb{Q}$, lo que contradice la irracionalidad de π .

Resultado final

$C = \pi - 1$ es **irracional**.

Número $D = 2,0123123123\dots$

Identificamos la estructura:

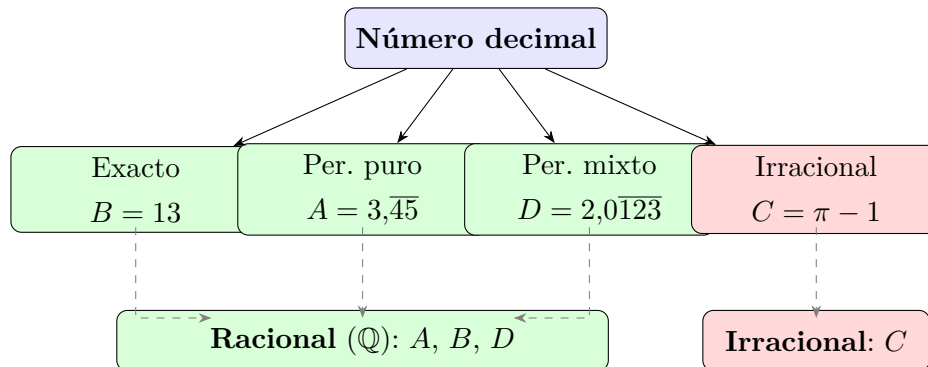
$$D = 2, \underbrace{0}_{\text{anteperíodo}} \underbrace{123\,123\,123\dots}_{\text{período}}$$

- Parte entera: 2.
- Anteperíodo: 0 (longitud $n = 1$).
- Período: 123 (longitud $m = 3$).

Resultado final

$D = 2,0\overline{123}$ es un **número decimal periódico mixto**.

Resumen visual de la clasificación



1.2. Apartado (b): Fracción generatriz de A y D

Definición / Teorema de referencia

Fracción generatriz de un decimal periódico: fracción $\frac{p}{q}$ cuya expansión decimal coincide con el número dado.

Método general: Sea x con anteperíodo de longitud n y período de longitud m .

1. Calcular $10^{n+m} \cdot x$ y $10^n \cdot x$.
2. Restar: $10^{n+m} \cdot x - 10^n \cdot x = (10^{n+m} - 10^n) x = \text{entero}$.
3. Despejar x y simplificar.

1.2.1. Fracción generatriz de $A = 3,\overline{45}$

Anteperíodo: longitud $n = 0$. Período: 45, longitud $m = 2$.

Paso 1. Sea $x = 3,454545\dots$

Paso 2. Multiplicamos por $10^{n+m} = 10^2 = 100$:

$$100x = 345,454545\dots$$

Paso 3. Multiplicamos por $10^n = 10^0 = 1$ (es decir, x sin cambiar):

$$x = 3,454545\dots$$

Paso 4. Restamos:

$$100x - x = 345,\overline{45} - 3,\overline{45}$$

$$99x = 342$$

Paso 5. Despejamos:

$$x = \frac{342}{99}$$

Paso 6. Simplificación mediante el algoritmo de Euclides para $\text{mcd}(342, 99)$:

$$342 = 3 \cdot 99 + 45$$

$$99 = 2 \cdot 45 + 9$$

$$45 = 5 \cdot 9 + 0$$

$\text{mcd}(342, 99) = 9$. Dividimos:

$$A = \frac{342 \div 9}{99 \div 9} = \frac{38}{11}$$

Verificación: $38 \div 11 = 3,454545\dots = 3,\overline{45}$. ✓

Resultado final

$$A = \frac{38}{11}$$

$\text{mcd}(38, 11) = 1$ (11 es primo y $11 \nmid 38$), luego la fracción es irreducible.

1.2.2. Fracción generatriz de $D = 2,0\overline{123}$

Anteperíodo: 0, longitud $n = 1$. Período: 123, longitud $m = 3$.

Paso 1. Sea $x = 2,0123123123\dots$

Paso 2. Multiplicamos por $10^{n+m} = 10^4 = 10000$:

$$10000x = 20123,123123\dots$$

Paso 3. Multiplicamos por $10^n = 10^1 = 10$:

$$10x = 20,123123123\dots$$

Paso 4. Restamos:

$$10000x - 10x = 20123,\overline{123} - 20,\overline{123}$$

$$9990x = 20103$$

Paso 5. Despejamos:

$$x = \frac{20103}{9990}$$

Paso 6. Algoritmo de Euclides para $\text{mcd}(20103, 9990)$:

$$20103 = 2 \cdot 9990 + 123$$

$$9990 = 81 \cdot 123 + 27$$

$$123 = 4 \cdot 27 + 15$$

$$27 = 1 \cdot 15 + 12$$

$$15 = 1 \cdot 12 + 3$$

$$12 = 4 \cdot 3 + 0$$

$$\text{mcd}(20103, 9990) = 3.$$

Paso 7. Dividimos:

$$D = \frac{20103 \div 3}{9990 \div 3} = \frac{6701}{3330}$$

Comprobación de irreducibilidad mediante Euclides para $\text{mcd}(6701, 3330)$:

$$6701 = 2 \cdot 3330 + 41$$

$$3330 = 81 \cdot 41 + 9$$

$$41 = 4 \cdot 9 + 5$$

$$9 = 1 \cdot 5 + 4$$

$$5 = 1 \cdot 4 + 1$$

$$4 = 4 \cdot 1 + 0$$

$\text{mcd}(6701, 3330) = 1$. Irreducible. ✓

Resultado final

$$D = \frac{6701}{3330}$$

Error frecuente

En los periódicos mixtos, el denominador tiene la forma $\underbrace{99 \cdots 9}_m \underbrace{00 \cdots 0}_n$. En este caso $m = 3$ y $n = 1$, por lo que el denominador es 9990, **no** 999.

$$x = 2,0\overline{123}$$

$$10000x = 20123,\overline{123} \quad (\text{multiplica por } 10^{n+m} = 10^4)$$

$$10x = 20,\overline{123} \quad (\text{multiplica por } 10^n = 10^1)$$

$$9990x = 20103 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{20103}{9990} = \frac{6701}{3330}$$

Capítulo 2

N2 – Operaciones con Notación Científica

Enunciado

Enunciado N2

(a) Realiza la siguiente operación en notación científica y expresa el resultado con tres cifras significativas:

$$\frac{4,2 \cdot 10^{-5} + 3,1 \cdot 10^{-4}}{2,5 \cdot 10^3}$$

(b) Un depósito tiene una capacidad de $1,5 \cdot 10^7$ litros de agua. Si se utilizan $5 \cdot 10^4$ litros por hora, ¿cuántas horas tardará en vaciarse el depósito? Expresa el resultado en notación científica.

2.1. Apartado (a): Operación en notación científica

Definición / Teorema de referencia

Notación científica: un número N se escribe en notación científica si

$$N = a \times 10^n, \quad 1 \leq |a| < 10, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Reglas de operación:

- **Suma/resta:** igualar exponentes primero, luego operar las mantisas.
- **Multiplicación:** multiplicar mantisas y *sumar* exponentes.

- **División:** dividir mantisas y *restar* exponentes.

2.1.1. Cálculo del numerador

Tenemos que calcular:

$$4,2 \cdot 10^{-5} + 3,1 \cdot 10^{-4}$$

Los exponentes son -5 y -4 . Para sumar debemos igualarlos. Elegimos convertir al exponente mayor (-4), ya que así la mantisa resultante queda directamente en notación científica:

$$4,2 \cdot 10^{-5} = 4,2 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-4} = 0,42 \cdot 10^{-4}$$

Ahora sumamos:

$$0,42 \cdot 10^{-4} + 3,1 \cdot 10^{-4} = (0,42 + 3,1) \cdot 10^{-4} = 3,52 \cdot 10^{-4}$$

2.1.2. División del resultado

$$\frac{3,52 \cdot 10^{-4}}{2,5 \cdot 10^3} = \frac{3,52}{2,5} \cdot \frac{10^{-4}}{10^3} = \frac{3,52}{2,5} \cdot 10^{-4-3} = \frac{3,52}{2,5} \cdot 10^{-7}$$

Calculamos $\frac{3,52}{2,5}$:

$$\frac{3,52}{2,5} = \frac{352}{250} = 1,408$$

Por tanto el resultado exacto es $1,408 \cdot 10^{-7}$.

2.1.3. Redondeo a 3 cifras significativas

1,408: la primera tres cifras significativas son 1, 4, 0. La cuarta cifra es $8 \geq 5$, luego la tercera cifra (0) se redondea hacia arriba: $0 + 1 = 1$.

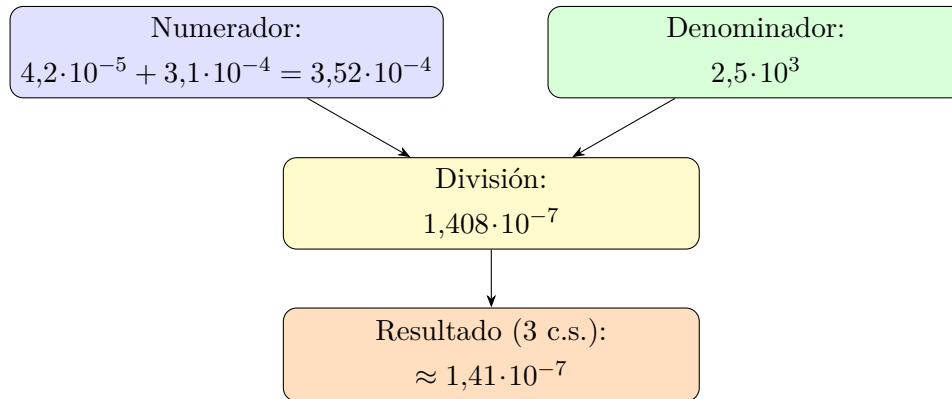
$$1,408 \approx 1,41 \quad (3 \text{ cifras significativas})$$

Resultado final

$$\frac{4,2 \cdot 10^{-5} + 3,1 \cdot 10^{-4}}{2,5 \cdot 10^3} \approx \boxed{1,41 \cdot 10^{-7}}$$

Error frecuente

Al **sumar** en notación científica NO se suman los exponentes. Los exponentes solo se suman en la **multiplicación**.

**2.2. Apartado (b): Vaciado del depósito**

Datos:

- Capacidad total: $V = 1,5 \cdot 10^7$ litros.
- Consumo por hora: $r = 5 \cdot 10^4$ litros/hora.

Planteamiento: El depósito se vacía a razón constante. El tiempo necesario es:

$$t = \frac{V}{r} = \frac{\text{volumen total}}{\text{volumen por hora}}$$

Cálculo:

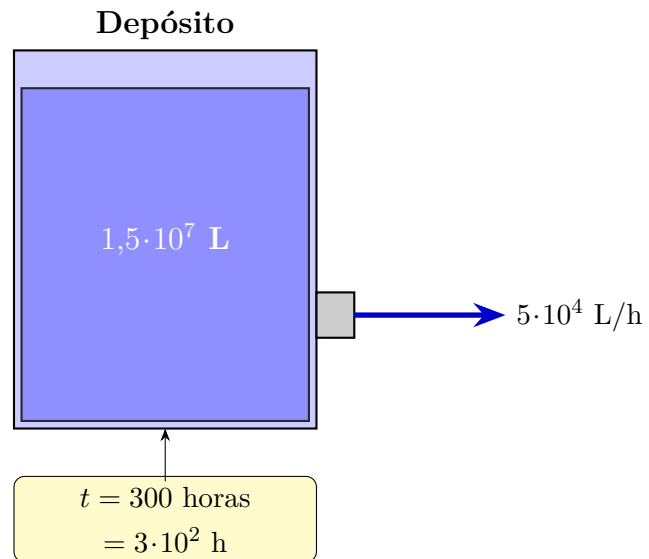
$$t = \frac{1,5 \cdot 10^7}{5 \cdot 10^4} = \frac{1,5}{5} \cdot \frac{10^7}{10^4} = 0,3 \cdot 10^{7-4} = 0,3 \cdot 10^3$$

Convertimos a notación científica: $0,3 = 3 \cdot 10^{-1}$, luego:

$$0,3 \cdot 10^3 = 3 \cdot 10^{-1} \cdot 10^3 = 3 \cdot 10^2$$

Resultado final

El depósito tardará $3 \cdot 10^2 = 300$ horas en vaciarse.



Capítulo 3

N3 – Radicales y Simplificación

Enunciado

Enunciado N3

(a) Introduce los factores dentro de la raíz y simplifica si es posible:

$$A = 5\sqrt[3]{4} \qquad B = \frac{1}{2}\sqrt{72}$$

(b) Extrae todos los factores posibles y simplifica:

$$\sqrt{108} - 5\sqrt{3} + \sqrt{27}$$

3.1. Apartado (a): Introducir factores dentro de la raíz

Definición / Teorema de referencia

Propiedad fundamental: Para $k > 0$ y índice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$:

$$k \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{k^n \cdot a}$$

Para introducir el factor k dentro de una raíz n -ésima, se eleva k a la potencia n .

3.1.1. Expresión $A = 5\sqrt[3]{4}$

El índice de la raíz es $n = 3$. Factor exterior: $k = 5$.

Aplicamos la propiedad con $k = 5$, $n = 3$, radicando $a = 4$:

$$5\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 4} = \sqrt[3]{125 \cdot 4} = \sqrt[3]{500}$$

Comprobación de que $\sqrt[3]{500}$ no se puede simplificar más:

$$500 = 2^2 \cdot 5^3$$

Solo 5^3 es una potencia cúbica completa. Podríamos extraerla, pero eso nos devolvería a la expresión original $5\sqrt[3]{4}$. La respuesta pedida (con el factor *dentro*) es $\sqrt[3]{500}$.

Resultado final

$$A = 5\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{500}$$

3.1.2. Expresión $B = \frac{1}{2}\sqrt{72}$

El índice es $n = 2$. Factor exterior: $k = \frac{1}{2}$.

Aplicamos la propiedad con $k = \frac{1}{2}$, $n = 2$, radicando $a = 72$:

$$\frac{1}{2}\sqrt{72} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 72} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 72} = \sqrt{\frac{72}{4}} = \sqrt{18}$$

Comprobamos simplificando $\sqrt{18}$: $18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3^2$, luego $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Verificación: $\frac{1}{2}\sqrt{72} = \frac{1}{2}\sqrt{36 \cdot 2} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$. ✓

Resultado final

$$B = \frac{1}{2}\sqrt{72} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

3.2. Apartado (b): Extracción de factores y simplificación

Calculamos: $\sqrt{108} - 5\sqrt{3} + \sqrt{27}$.

Definición / Teorema de referencia

Radicales seméjantes: dos radicales son seméjantes si tienen el mismo índice y el mismo radicando. Solo se pueden sumar o restar radicales seméjantes:

$$a\sqrt{k} \pm b\sqrt{k} = (a \pm b)\sqrt{k}$$

3.2.1. Descomposición de $\sqrt{108}$

Factorizamos 108 en primos:

$$108 = 2 \cdot 54 = 2 \cdot 2 \cdot 27 = 2^2 \cdot 27 = 2^2 \cdot 3^3$$

Extraemos cuadrados perfectos:

$$\sqrt{108} = \sqrt{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

3.2.2. Descomposición de $\sqrt{27}$

$$27 = 3^3 = 3^2 \cdot 3$$

$$\sqrt{27} = \sqrt{3^2 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$$

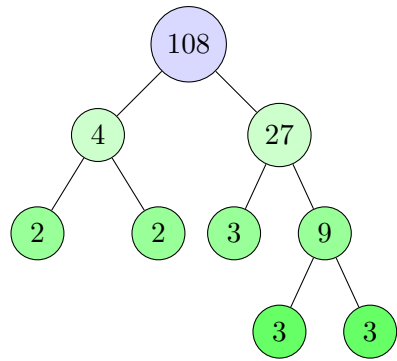
3.2.3. Suma de radicales

Los tres términos son ahora radicales seméjantes en $\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{108} - 5\sqrt{3} + \sqrt{27} &= 6\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 3\sqrt{3} \\ &= (6 - 5 + 3)\sqrt{3} \\ &= 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

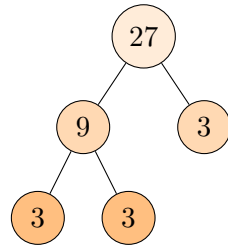
Resultado final

$$\sqrt{108} - 5\sqrt{3} + \sqrt{27} = \boxed{4\sqrt{3}}$$



$$108 = 2^2 \cdot 3^3$$

$$\sqrt{108} = \sqrt{4 \cdot 9 \cdot 3} = 6\sqrt{3}$$



$$27 = 3^2 \cdot 3$$

$$\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

Capítulo 4

N4 – Intervalos y Aproximación

Enunciado

Enunciado N4

(a) Expresa mediante intervalos y representa en la recta real:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 5\} \quad B = E(1, 3) \text{ (Entorno de centro 1 y radio 3)}$$

(b) Redondea $N = 0,05739$ a las **centésimas** y trúncalo a las **milésimas**.
Calcula el **error absoluto** al redondear a las centésimas.

4.1. Apartado (a): Intervalos y recta real

Definición / Teorema de referencia

Tipos de intervalos:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \quad (\text{cerrado})$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \quad (\text{abierto})$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \quad (\text{semiabierto})$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \quad (\text{semiabierto})$$

Convenio gráfico: • (punto lleno) para extremo incluido, o (punto vacío) para extremo excluido.

Entorno:

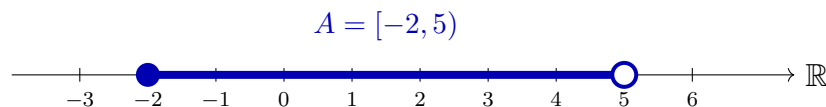
$$E(c, r) = (c - r, c + r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - c| < r\}, \quad r > 0.$$

4.1.1. Conjunto A

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 5\}:$$

- El extremo -2 está **incluido** ($\leq$): corchete cerrado.
- El extremo 5 está **excluido** ($<$): paréntesis.

$$A = [-2, 5)$$



4.1.2. Conjunto $B = E(1, 3)$

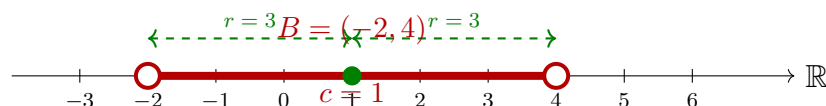
Centro $c = 1$, radio $r = 3$:

$$B = (c - r, c + r) = (1 - 3, 1 + 3) = (-2, 4)$$

Equivalentemente: $B = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| < 3\}$.

Ambos extremos están **excluidos** (inecuación estricta).

$$B = (-2, 4)$$



4.2. Apartado (b): Redondeo, truncamiento y error absoluto

Número dado: $N = 0,05739$.

Definición / Teorema de referencia

- **Redondear** a una posición: si el siguiente dígito es ≥ 5 , aumentar en 1; si es < 5 , dejar igual. Eliminar los dígitos posteriores.
- **Truncar** a una posición: eliminar todos los dígitos siguientes sin modificar el anterior.
- **Error absoluto:** $E_a = |N - N_{\text{aprox}}|$.

4.2.1. Identificación de posiciones decimales

Posición	Unidades	,	Décimas	Centésimas	Milésimas	Diezmilésimas
Dígito	0	,	0	5	7	39...

4.2.2. Redondeo a las centésimas

La posición de las centésimas tiene el dígito **5**. El dígito siguiente (milésimas) es **7** ≥ 5 .

$\Rightarrow$ Se redondea hacia arriba: $5 + 1 = 6$.

$$N_r = 0,06$$

4.2.3. Truncamiento a las milésimas

La posición de las milésimas tiene el dígito **7**. Eliminamos los dígitos posteriores (diezmilésimas en adelante) sin modificar el 7:

$$N_t = 0,057$$

4.2.4. Error absoluto al redondear

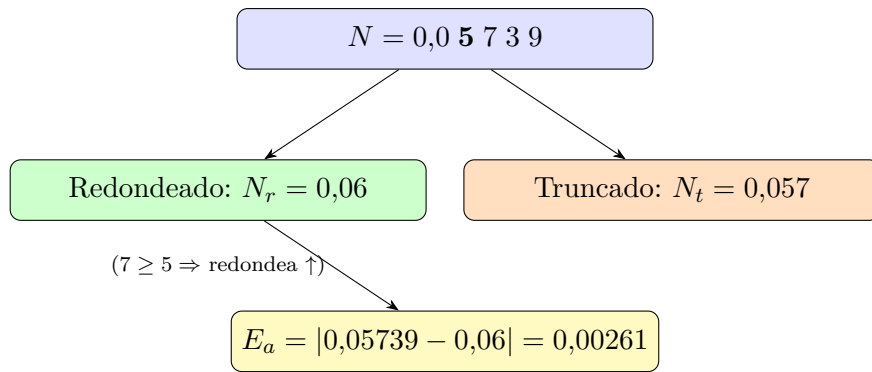
$$E_a = |N - N_r| = |0,05739 - 0,06| = |-0,00261| = 0,00261$$

Resultado final

- Redondeo a centésimas: $N_r = 0,06$
- Truncamiento a milésimas: $N_t = 0,057$
- Error absoluto: $E_a = 0,00261$

Observación importante

El error absoluto del redondeo a las centésimas nunca supera $\frac{1}{2} \cdot 0,01 = 0,005$.
Aquí $E_a = 0,00261 < 0,005$. ✓



Capítulo 5

N5 – Propiedades de los Números Reales y Errores

Enunciado

Enunciado N5

- (a) El valor real de una magnitud es $V_R = 3,5$ metros. En un laboratorio se realizan dos mediciones: $M_1 = 3,48$ m y $M_2 = 3,53$ m. Calcula el **error relativo** de cada medición y determina cuál es más precisa.
- (b) Utiliza la **racionalización** para simplificar:

$$A = \frac{3}{\sqrt{6}} \quad B = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$$

5.1. Apartado (a): Error relativo y precisión

Definición / Teorema de referencia

- **Error absoluto:** $E_a = |V_R - M_i|$.
- **Error relativo:** $E_r = \frac{E_a}{|V_R|}$.
- **Error relativo porcentual:** $E_r \% = E_r \times 100$.

La medición más precisa es la que tiene **menor error relativo**.

5.1.1. Medición $M_1 = 3,48$ m

Error absoluto:

$$E_{a1} = |V_R - M_1| = |3,5 - 3,48| = 0,02 \text{ m}$$

Error relativo:

$$E_{r1} = \frac{E_{a1}}{|V_R|} = \frac{0,02}{3,5} = \frac{2}{350} = \frac{1}{175} \approx 0,00571 \dots$$

Error relativo porcentual:

$$E_{r1} \% \approx 0,571 \%$$

5.1.2. Medición $M_2 = 3,53$ m

Error absoluto:

$$E_{a2} = |V_R - M_2| = |3,5 - 3,53| = |-0,03| = 0,03 \text{ m}$$

Error relativo:

$$E_{r2} = \frac{E_{a2}}{|V_R|} = \frac{0,03}{3,5} = \frac{3}{350} \approx 0,00857 \dots$$

Error relativo porcentual:

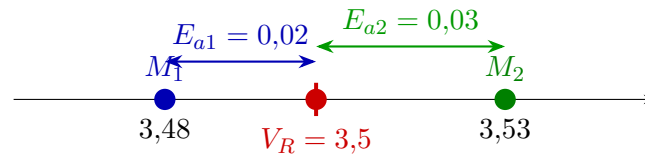
$$E_{r2} \% \approx 0,857 \%$$

5.1.3. Comparación

Medición	Valor (m)	Error abs. (m)	Error rel.	Error rel. %
$M_1 = 3,48$	3,48	0,02	$\approx 0,00571$	$\approx 0,571 \%$
$M_2 = 3,53$	3,53	0,03	$\approx 0,00857$	$\approx 0,857 \%$

Como $E_{r1} < E_{r2}$:**Resultado final**

La medición $M_1 = 3,48$ m es más precisa, pues tiene menor error relativo ($\approx 0,571 \%$) frente a M_2 ($\approx 0,857 \%$).



5.2. Apartado (b): Racionalización

Definición / Teorema de referencia

Racionalizar consiste en transformar una expresión con radicales en el denominador en una expresión equivalente con denominador racional (libre de radicales).

Técnicas principales:

1. **Raíz simple** en el denominador $\sqrt{a}$: multiplicar por $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$ (pues $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$).
2. **Binomio** $\sqrt{a} \pm b$ en el denominador: multiplicar por el *conjugado* $\frac{\sqrt{a} \mp b}{\sqrt{a} \mp b}$, usando $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$.

5.2.1. Expresión $A = \frac{3}{\sqrt{6}}$

El denominador es $\sqrt{6}$. Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{6}$:

$$A = \frac{3}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Justificación de cada paso:

- $\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} = (\sqrt{6})^2 = 6$ (definición de raíz cuadrada).
- $\frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ porque $\text{mcd}(3, 6) = 3$.

Resultado final

$$A = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

5.2.2. Expresión $B = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1}$

El denominador $\sqrt{5} - 1$ es un binomio con radical. Multiplicamos por el conjugado $\sqrt{5} + 1$:

$$B = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}$$

Numerador:

$$\sqrt{5}(\sqrt{5}+1) = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{5} \cdot 1 = 5 + \sqrt{5}$$

Denominador (diferencia de cuadrados: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, con $a = \sqrt{5}$ y $b = 1$):

$$(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1) = (\sqrt{5})^2 - 1^2 = 5 - 1 = 4$$

Por tanto:

$$B = \frac{5 + \sqrt{5}}{4}$$

Podemos factorizar el numerador: $5 + \sqrt{5} = \sqrt{5}(\sqrt{5} + 1)$, pero la forma $\frac{5 + \sqrt{5}}{4}$ ya está completamente simplificada.

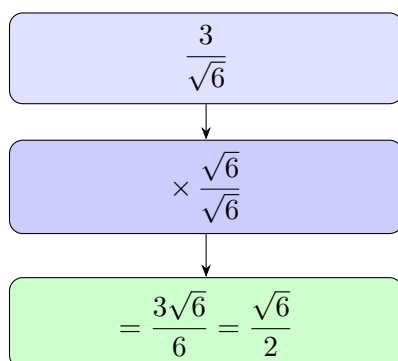
Resultado final

$$B = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \frac{5 + \sqrt{5}}{4}$$

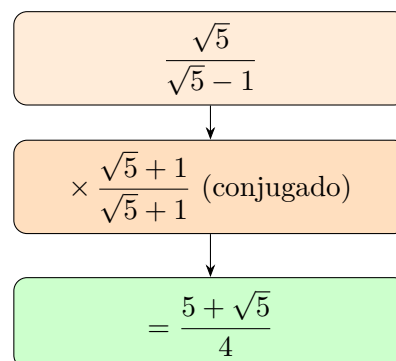
Error frecuente

El conjugado de $\sqrt{5} - 1$ es $\sqrt{5} + 1$, **no** $-\sqrt{5} + 1$. El conjugado únicamente cambia el signo *del segundo sumando del binomio*.

Caso A: raíz simple



Caso B: binomio conjugado



Resumen de resultados

Ej.	Enunciado resumido	Resultado
N1(a)	Clasificar A, B, C, D	A : periódico puro; B : exacto ($= 13$); C : irracional; D : periódico mixto
N1(b)	Fracción generatriz de A y D	$A = \frac{38}{11}$ $D = \frac{6701}{3330}$
N2(a)	Operación en notación científica	$\approx 1,41 \cdot 10^{-7}$
N2(b)	Horas para vaciar el depósito	$3 \cdot 10^2 = 300$ horas
N3(a)	Introducir factores en la raíz	$A = \sqrt[3]{500}$; $B = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
N3(b)	$\sqrt{108} - 5\sqrt{3} + \sqrt{27}$	$4\sqrt{3}$
N4(a)	Intervalos y recta real	$A = [-2, 5)$; $B = (-2, 4)$
N4(b)	Redondeo, truncamiento y error	$N_r = 0,06$; $N_t = 0,057$; $E_a = 0,00261$
N5(a)	Error relativo de M_1, M_2	$E_{r1} \approx 0,571\%$; $E_{r2} \approx 0,857\%$; M_1 es más precisa
N5(b)	Racionalizar A y B	$A = \frac{\sqrt{6}}{2}$; $B = \frac{5 + \sqrt{5}}{4}$

“Las matemáticas no mienten; revelan la precisión de nuestro razonamiento.”

Documento generado con L^AT_EX – Todos los pasos verificados.

N1. Números Reales y Notación Científica

(a) Clasifica y Simplifica (3 puntos)

Clasifica los siguientes números decimales indicando si son **exactos**, **periódicos puros**, **periódicos mixtos** o **irracionales**:

1. $X = 5.121212\dots$
2. $Y = \sqrt{49}$
3. $Z = 1.45678\dots$ (con infinitas cifras no periódicas)
4. $W = 0.345555\dots$

(b) Fracción Generatriz (2 puntos)

Calcula la **fracción generatriz irreducible** de los números X y W del apartado anterior.

N2. Operaciones con Radicales

(a) Introducción de Factores y Simplificación (2 puntos)

Introduce los factores dentro de la raíz y simplifica el resultado si es posible:

1. $A = 3\sqrt[4]{2}$
2. $B = \frac{2}{5}\sqrt{50}$

(b) Extracción y Suma de Radicales (3 puntos)

Extrae todos los factores posibles de los siguientes radicales y simplifica la expresión resultante:

$$\sqrt{98} - 2\sqrt{18} + \sqrt{8}$$

N3. Intervalos y Aproximación

(a) Expresión y Representación de Conjuntos (3 puntos)

Expresa de forma precisa los siguientes conjuntos de números reales mediante **intervalos** y **représentalos en la recta real**:

1. $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq 1\}$
2. $D = E(2, 4)$ (Entorno de centro 2 y radio 4)

(b) Redondeo, Truncamiento y Error (2 puntos)

Redondea el número $M = 1.23456$ a las **milésimas** y trúncalo a las **centésimas**. Calcula el **error absoluto** cometido al truncar a las centésimas.

N4. Racionalización y Errores de Medición

(a) Racionalización (3 puntos)

Utiliza el proceso de **racionalización** para simplificar las siguientes expresiones:

1. $A = \frac{5}{\sqrt{10}}$
2. $B = \frac{2}{\sqrt{3}+1}$

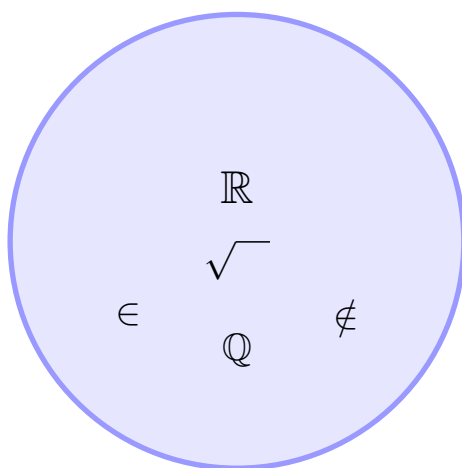
(b) Precisión de Mediciones (2 puntos)

El valor real de una magnitud es $V_R = 7.2$ gramos. Se realizan dos mediciones en un experimento: $M_1 = 7.15$ g y $M_2 = 7.24$ g. Calcula el **error relativo** de cada medición y determina cuál de las dos es **más precisa**.

SOLUCIONES COMPLETAS

EXAMEN DE MATEMÁTICAS

4º ESO – Matemáticas Académicas (A)



Contenidos del examen:

- N1. Números Reales y Notación Científica
- N2. Operaciones con Radicales
- N3. Intervalos y Aproximación
- N4. Racionalización y Errores de Medición

Nivel: 4º ESO – Matemáticas Académicas

Elaborado por: Profesor de Matemáticas

Carácter: Material de estudio exhaustivo – Sin omisión de pasos



«Las matemáticas son la reina de las ciencias» – C.F. Gauss

Índice general

Introducción y Guía de Lectura	2
1. N1. Números Reales y Notación Científica	3
Marco Teórico Previo (N1)	3
1.1. Apartado (a): Clasificación de Números Decimales	4
1.2. Apartado (b): Fracción Generatriz	6
2. N2. Operaciones con Radicales	9
Marco Teórico Previo (N2)	9
2.1. Apartado (a): Introducción de Factores	9
2.2. Apartado (b): Extracción y Suma de Radicales	11
3. N3. Intervalos y Aproximación	14
Marco Teórico Previo (N3)	14
3.1. Apartado (a): Expresión y Representación de Conjuntos	15
3.2. Apartado (b): Redondeo, Truncamiento y Error	17
4. N4. Racionalización y Errores de Medición	20
Marco Teórico Previo (N4)	20
4.1. Apartado (a): Racionalización	20
4.2. Apartado (b): Precisión de Mediciones – Error Relativo	23
Resumen General de Resultados	27

Introducción y Guía de Lectura

Este documento contiene la **resolución completa y exhaustiva** del examen de Matemáticas de 4º ESO. Ha sido redactado con criterios de **rigor matemático universitario** adaptado al nivel de bachillerato, con el objetivo de servir como material de estudio profundo para el alumno.

Principios que rigen esta resolución:

1. **Ningún paso se omite:** toda transformación algebraica o lógica está justificada.
2. **Rigor en definiciones:** se citan los conceptos formales antes de aplicarlos.
3. **Pedagogía explícita:** se explica el *por qué*, no solo el *cómo*.
4. **Advertencias de errores frecuentes:** se señalan los errores más comunes en cada ejercicio.
5. **Visualización:** cada bloque temático incluye representaciones gráficas.

Estructura del documento: Cada bloque N1, N2, N3 y N4 del examen corresponde a un capítulo. Dentro de cada capítulo, los apartados (a) y (b) aparecen como secciones numeradas. La solución de cada ítem está enmarcada en cajas de colores con el significado siguiente:

■ Caja azul:	enunciado o contexto teórico
■ Caja verde:	desarrollo de la solución
■ Caja naranja:	advertencia de error frecuente
■ Caja amarilla:	observación pedagógica
■ Caja morada:	resultado final
■ Caja cian:	definición formal

Capítulo 1

N1. Números Reales y Notación Científica

Marco Teórico Previo

Definición: Clasificación de los números reales $\mathbb{R}$

El conjunto de los **números reales** $\mathbb{R}$ está formado por la unión disjunta:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

donde $\mathbb{Q}$ son los **racionales** e $\mathbb{I}$ son los **irracionales**.

Los **números racionales** $\mathbb{Q}$ son aquellos que pueden expresarse como $\frac{p}{q}$ con $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y $\gcd(p, q) = 1$. Su representación decimal es siempre **periódica** (finita o infinita con bloque que se repite).

Dentro de $\mathbb{Q}$, distinguimos:

a) **Decimal exacto (terminante):** finito número de cifras decimales.

$$\text{Ejemplo: } 0,25 = \frac{1}{4}$$

b) **Periódico puro:** la parte periódica comienza inmediatamente tras la coma.

$$\text{Ejemplo: } 0,\overline{3} = 0,333 \dots$$

c) **Periódico mixto:** hay una parte no periódica (anteperíodo) antes del período.

$$\text{Ejemplo: } 0,1\overline{6} = 0,1666 \dots$$

Los **números irracionales** $\mathbb{I}$ tienen representación decimal infinita y **no periódica**: sus decimales no se repiten con ningún patrón.

1.1. Apartado (a): Clasificación de Números Decimales

Enunciado – N1(a) – 3 puntos

Clasifica los siguientes números decimales indicando si son exactos, periódicos puros, periódicos mixtos o irracionales:

1. $X = 5,121212\dots$
2. $Y = \sqrt{49}$
3. $Z = 1,45678\dots$ (con infinitas cifras no periódicas)
4. $W = 0,345555\dots$

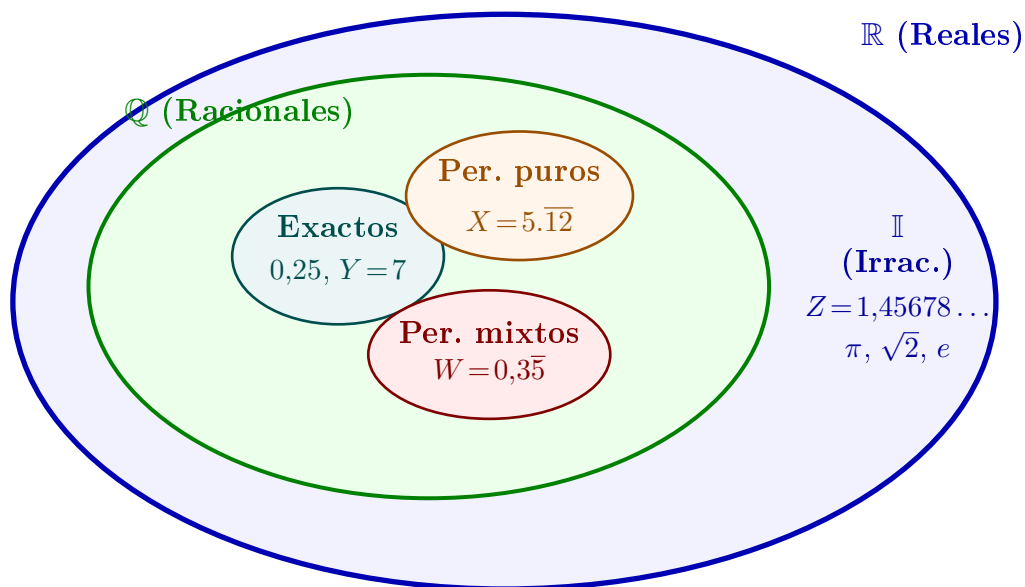


Figura 1.1: Diagrama de clasificación de los números reales. Cada número del ejercicio queda ubicado en su categoría.

Solución detallada**Ítem 1:** $X = 5,121212\dots$ **Paso 1:** Identificamos el patrón decimal.

Escribimos los decimales explícitamente:

$$X = 5, \underbrace{12\ 12\ 12\dots}_{\text{el bloque "12" se repite indefinidamente}}$$

El bloque “12” se repite **desde el primer decimal**, es decir, justo después de la coma, sin ninguna cifra previa no periódica.

Paso 2: Aplicamos la definición.

- La parte decimal es **infinita**: no es exacto.
- El período comienza en la primera cifra decimal: no hay anteperíodo.
- Por tanto, es un **periódico puro** con período 12.

Notación estándar con barra:

$$X = 5,\overline{12}$$

Conclusión: X es un número **racional periódico puro**.**Ítem 2:** $Y = \sqrt{49}$ **Paso 1:** Calculamos la raíz cuadrada.

Buscamos un número entero no negativo cuyo cuadrado sea 49:

$$7^2 = 49 \implies \sqrt{49} = 7$$

Paso 2: Clasificamos el resultado.

$$Y = 7 = 7,000\dots$$

El número 7 es un entero positivo, por tanto su representación decimal es finita (o equivalentemente, periódica con período 0). Es un **número exacto**.

Advertencia: $\sqrt{49}$ podría parecer irracional por tener una raíz, pero solo son irracionales las raíces de números que no son cuadrados perfectos. $49 = 7^2$ es un cuadrado perfecto, así que su raíz es entera.

$$Y = 7 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Conclusión: Y es un número **entero / decimal exacto**.**Ítem 3:** $Z = 1,45678\dots$ (con infinitas cifras no periódicas)**Paso 1:** Analizamos la condición dada.

El enunciado especifica explícitamente que las cifras decimales son **infinitas y no periódicas**. Esto es precisamente la caracterización de los números irracionales.

Paso 2: Aplicamos la definición.

Un número es **irracional** si y solo si su desarrollo decimal es infinito y **no periódico**.

Observación pedagógica

Tabla resumen de clasificación:

Número	Valor	Tipo	Racional/Irracional
X	$5,\overline{12}$	Periódico puro	$\mathbb{Q}$
Y	7	Exacto (entero)	$\mathbb{Q}$
Z	$1,45678\dots$	Irracional	$\mathbb{I}$
W	$0,34\overline{5}$	Periódico mixto	$\mathbb{Q}$

1.2. Apartado (b): Fracción Generatriz

Enunciado – N1(b) – 2 puntos

Calcula la **fracción generatriz irreducible** de los números X y W del apartado anterior.

Definición: Fracción generatriz

La **fracción generatriz** de un número decimal periódico es la fracción $\frac{p}{q}$ (con $p, q \in \mathbb{Z}, q > 0$) tal que dicha fracción es igual al número dado. Se obtiene mediante el **método algebraico** que se describe a continuación.

Método general:

- **Periódico puro** $a,\overline{c_1c_2\dots c_n}$ (sin anteperíodo):

$$\text{Fracción generatriz} = \frac{\text{parte entera y período} - \text{parte entera}}{\underbrace{99\dots 9}_{n \text{ nueves}}}$$

- **Periódico mixto** $a,b_1\dots b_m\overline{c_1\dots c_n}$:

$$\text{Fracción generatriz} = \frac{(\text{número sin coma}) - (\text{parte no periódica})}{\underbrace{99\dots 9}_n \underbrace{00\dots 0}_m}$$

Solución detallada**Fracción generatriz de $X = 5,\overline{12}$**

Método: **sistema de ecuaciones algebraico** (equivalente a la fórmula, pero más transparente).

Paso 1: Llamamos $X = 5,121212\dots$ y multiplicamos por 100 (porque el período tiene 2 cifras):

$$100X = 512,121212\dots$$

Paso 2: Restamos la ecuación original:

$$100X - X = 512,121212\dots - 5,121212\dots$$

$$99X = 507$$

Justificación de la resta: al restar, las partes decimales periódicas se cancelan exactamente, pues coinciden dígito a dígito.

Paso 3: Despejamos X :

$$X = \frac{507}{99}$$

Paso 4: Reducimos a fracción irreducible. Calculamos $\gcd(507, 99)$:
Aplicamos el **algoritmo de Euclides**:

$$507 = 5 \cdot 99 + 12$$

$$99 = 8 \cdot 12 + 3$$

$$12 = 4 \cdot 3 + 0$$

Por tanto, $\gcd(507, 99) = 3$.

Paso 5: Dividimos numerador y denominador por 3:

$$X = \frac{507 \div 3}{99 \div 3} = \frac{169}{33}$$

Paso 6: Verificamos: $\gcd(169, 33)$. Como $169 = 13^2$ y $33 = 3 \cdot 11$, no tienen factores comunes. $\gcd(169, 33) = 1$. La fracción es irreducible.

Comprobación: $169 \div 33 = 5,121212\dots \checkmark$

$$X = \frac{169}{33}$$

Fracción generatriz de $W = 0,34\overline{5}$

W es periódico mixto:

- Anteperíodo: “34” (2 cifras, $m = 2$)
- Período: “5” (1 cifra, $n = 1$)

Paso 1: Llamamos $W = 0,34555\dots$ y multiplicamos por $10^{n+m} = 10^3 = 1000$:
Rigor matemático – Explicación exhaustiva – Material de estudio

$$1000W = 345,555\dots$$

Paso 2: Multiplicamos por $10^m = 10^2 = 100$ para dejar solo el período en la parte

Advertencia – Error frecuente

Error frecuente en la fracción generatriz de periódico mixto: Muchos alumnos aplican la fórmula de periódico puro a un mixto, usando solo “nueves” en el denominador. Eso es **incorrecto**. El denominador debe ser $\underbrace{99 \dots 9}_n \underbrace{00 \dots 0}_m$, con tantos nueves como cifras tiene el período y tantos ceros como cifras tiene el anteperíodo.

Capítulo 2

N2. Operaciones con Radicales

Marco Teórico Previo

Definición: Propiedades de los radicales

Sea $a, b \geq 0$ (para raíces de índice par) y $n, m \in \mathbb{N}$:

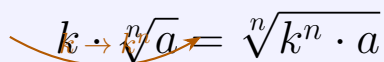
- (i) $\sqrt[n]{a^n} = a \quad (a \geq 0)$
- (ii) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- (iii) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$
- (iv) $k \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{k^n \cdot a} \quad (\text{introducción de factor})$
- (v) $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

2.1. Apartado (a): Introducción de Factores

Enunciado – N2(a) – 2 puntos

Introduce los factores dentro de la raíz y simplifica el resultado si es posible:

1. $A = 3\sqrt[4]{2}$
2. $B = \frac{2}{5}\sqrt{50}$


$$k \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{k^n \cdot a}$$

Introducir el factor k dentro de la raíz de índice n :
el factor se eleva a la potencia n .

Figura 2.1: Regla de introducción de factores dentro de un radical.

Solución detallada**Ítem 1:** $A = 3\sqrt[4]{2}$ **Paso 1:** Identificamos los elementos.El coeficiente externo es $k = 3$ y el radicando es $a = 2$ con índice $n = 4$.**Paso 2:** Aplicamos la propiedad (iv): $k \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{k^n \cdot a}$

$$A = 3 \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 2}$$

Justificación algebraica:

$$3 = (3^4)^{1/4} = \sqrt[4]{3^4}$$

Por tanto:

$$3 \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 2}$$

(usando la propiedad $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$).**Paso 3:** Calculamos 3^4 :

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 9 \cdot 9 = 81$$

Paso 4: Sustituimos:

$$A = \sqrt[4]{81 \cdot 2} = \sqrt[4]{162}$$

Paso 5: Comprobamos si es posible simplificar. Descomponemos 162 en factores primos:

$$162 = 2 \cdot 81 = 2 \cdot 3^4$$

Aplicamos la propiedad del producto de radicales:

$$\sqrt[4]{162} = \sqrt[4]{2 \cdot 3^4} = \sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[4]{2} = 3\sqrt[4]{2}$$

Esto confirma que la expresión simplificada es la misma que la original: la introducción del factor es la operación inversa a la extracción.

$A = \sqrt[4]{162}$

Ítem 2: $B = \frac{2}{5}\sqrt{50}$ **Paso 1:** Estrategia. Podemos operar de dos maneras:

- Introducir $\frac{2}{5}$ dentro de la raíz.
- Simplificar primero $\sqrt{50}$ y luego introducir.

Elegimos primero **simplificar** $\sqrt{50}$ para obtener una expresión más limpia, y luego, si el enunciado pide “introducir dentro”, lo hacemos.**Paso 2:** Simplificamos $\sqrt{50}$:*Rigor matemático – Explicación exhaustiva – Material de estudio*

$$\sqrt{50} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

Paso 3: Sustituimos en B :

Advertencia – Error frecuente

Al introducir una **fracción** $\frac{p}{q}$ dentro de una raíz cuadrada, hay que elevarla al cuadrado:

$$\frac{p}{q}\sqrt{a} = \sqrt{\left(\frac{p}{q}\right)^2 \cdot a} = \sqrt{\frac{p^2 a}{q^2}}$$

No basta con elevar solo el numerador o solo el denominador.

2.2. Apartado (b): Extracción y Suma de Radicales**Enunciado – N2(b) – 3 puntos**

Extrae todos los factores posibles de los siguientes radicales y simplifica la expresión resultante:

$$\sqrt{98} - 2\sqrt{18} + \sqrt{8}$$

Definición: Radicales semejantes

Dos radicales $p\sqrt[n]{a}$ y $q\sqrt[n]{a}$ son **semejantes** si tienen el mismo índice n y el mismo radicando a (en forma simplificada). Solo los radicales semejantes pueden sumarse o restarse, de modo análogo a los términos semejantes en álgebra.

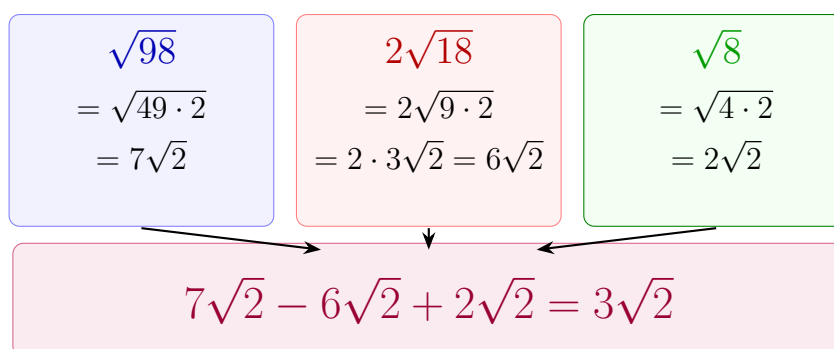


Figura 2.2: Proceso de simplificación y suma de radicales semejantes.

Solución detallada

Paso 1: Simplificamos cada radical por separado, extrayendo factores cuadrados perfectos.

Raíz 1: $\sqrt{98}$

Descomponemos 98 en factores primos:

$$98 = 2 \cdot 49 = 2 \cdot 7^2$$

Extraemos el cuadrado perfecto 7^2 :

$$\sqrt{98} = \sqrt{7^2 \cdot 2} = \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

Raíz 2: $2\sqrt{18}$

Descomponemos 18:

$$18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3^2$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

Multiplicamos por el coeficiente exterior:

$$2\sqrt{18} = 2 \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

Raíz 3: $\sqrt{8}$

Descomponemos 8:

$$8 = 4 \cdot 2 = 2^2 \cdot 2$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$$

Paso 2: Reemplazamos en la expresión original:

$$\sqrt{98} - 2\sqrt{18} + \sqrt{8} = 7\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$$

Paso 3: Verificamos que todos los radicales son semejantes.

Los tres términos contienen $\sqrt{2}$: son **radicales semejantes**. Podemos sumarlos como si fueran términos con la misma variable:

$$7\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = (7 - 6 + 2)\sqrt{2}$$

Paso 4: Operamos los coeficientes:

$$7 - 6 + 2 = 3$$

Paso 5: Resultado:

$$\sqrt{98} - 2\sqrt{18} + \sqrt{8} = 3\sqrt{2}$$

Paso 6: Verificación numérica:

$$\sqrt{98} \approx 9,8995$$

$$2\sqrt{18} \approx 2 \times 4,2426 = 8,4853$$

$$9,8995 - 8,4853 + 2,8284 = 4,2426$$

$$9,8995 - 8,4853 + 2,8284 \approx 4,2426$$

$$3\sqrt{2} \approx 3 \times 1,41421 = 4,24264 \quad \checkmark$$

Advertencia – Error frecuente

Error frecuente: intentar sumar radicales sin simplificar primero. Por ejemplo, un alumno podría escribir incorrectamente:

$$\sqrt{98} - 2\sqrt{18} + \sqrt{8} \neq \sqrt{98 - 36 + 8}$$

La propiedad $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b}$ es **falsa** en general. Solo se pueden combinar los radicales **semejantes** (misma raíz), sumando únicamente los coeficientes.

Capítulo 3

N3. Intervalos y Aproximación

Marco Teórico Previo

Definición: Intervalos en $\mathbb{R}$

Un **intervalo** es un subconjunto de $\mathbb{R}$ formado por todos los números reales comprendidos entre dos extremos a y b (con $a < b$). Según la inclusión de los extremos:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \quad (\text{abierto en ambos extremos})$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \quad (\text{cerrado en ambos extremos})$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \quad (\text{abierto en } a, \text{ cerrado en } b)$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \quad (\text{cerrado en } a, \text{ abierto en } b)$$

En la recta real, los extremos cerrados se representan con un punto relleno $\bullet$ y los abiertos con un punto hueco $\circ$.

Definición: Entorno

El **entorno de centro c y radio r** (con $r > 0$) es el intervalo:

$$E(c, r) = (c - r, c + r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - c| < r\}$$

Es un intervalo **abierto** de longitud $2r$ centrado en c .

3.1. Apartado (a): Expresión y Representación de Conjuntos

Enunciado – N3(a) – 3 puntos

Expresa de forma precisa los siguientes conjuntos de números reales mediante intervalos y represéntalos en la recta real:

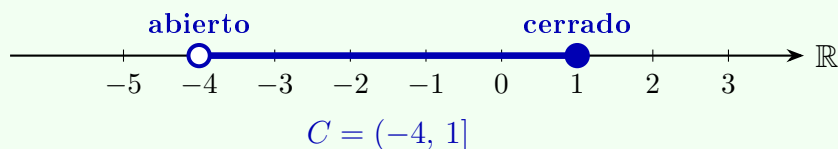
1. $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq 1\}$
2. $D = E(2, 4)$ (Entorno de centro 2 y radio 4)

Solución detallada**Ítem 1:** $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq 1\}$ **Paso 1:** Analizamos la condición.La condición establece que x debe satisfacer simultáneamente:

- $x > -4$: el extremo -4 **no** pertenece al conjunto (desigualdad estricta $<$).
- $x \leq 1$: el extremo 1 **sí** pertenece al conjunto (desigualdad no estricta $\leq$).

Paso 2: Expresión como intervalo.Dado que -4 está excluido (abierto) y 1 está incluido (cerrado):

$$C = (-4, 1]$$

Paso 3: Representación en la recta real.

$$C = (-4, 1]$$

Ítem 2: $D = E(2, 4)$ **Paso 1:** Aplicamos la definición de entorno.El entorno de centro $c = 2$ y radio $r = 4$ es:

$$D = E(2, 4) = (2 - 4, 2 + 4) = (-2, 6)$$

Paso 2: Verificación mediante la desigualdad equivalente.

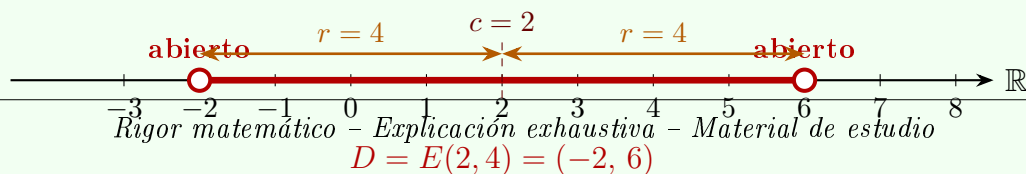
$$E(2, 4) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < 4\}$$

Resolvemos $|x - 2| < 4$:

$$-4 < x - 2 < 4$$

Sumamos 2 en todos los miembros:

$$-4 + 2 < x < 4 + 2 \implies -2 < x < 6$$

Esto confirma: $D = (-2, 6)$.**Paso 3:** Representación en la recta real.

$$D = E(2, 4) = (-2, 6)$$

Observación pedagógica

El entorno $E(c, r)$ es **siempre un intervalo abierto**: ambos extremos están excluidos, porque la condición es $|x - c| < r$ (desigualdad estricta). Si fuera $\leq$, el entorno sería cerrado, pero por definición estándar el entorno es abierto.

3.2. Apartado (b): Redondeo, Truncamiento y Error

Enunciado – N3(b) – 2 puntos

Redondea el número $M = 1,23456$ a las **milésimas** y trúncalo a las **centésimas**.
Calcula el **error absoluto** cometido al truncar a las centésimas.

Definición: Redondeo y Truncamiento

Sea M un número real con representación decimal.

- **Redondear a la k -ésima cifra decimal:** se mira la cifra en la posición $(k + 1)$. Si es ≥ 5 , se suma 1 a la k -ésima cifra; si es < 5 , se mantiene. Se eliminan las cifras de posición $> k$.
- **Truncar a la k -ésima cifra decimal:** se eliminan todas las cifras de posición $> k$ sin modificar las restantes (“corte” brusco).
- **Error absoluto:** $E_{\text{abs}} = |M - \text{aproximación}|$.

Solución detallada

Paso 1: Identificamos las posiciones decimales de $M = 1,23456$.

$$M = 1 \underbrace{\quad}_{\text{déc.}} \underbrace{2}_{\text{cent.}} \underbrace{3}_{\text{milé.}} \underbrace{4}_{\text{diezmilé.}} \underbrace{5}_{\text{cienmilé.}} \underbrace{6}_{\text{cienmilé.}}$$

Posición	Décimas	Centésimas	Milésimas	Diezmilésimas	Cienmilésimas
Dígito	2	3	4	5	6

Paso 2: Redondeo a milésimas (3 decimales).

Queremos conservar 3 cifras decimales. La cifra de decisión es la 4.^a decimal: 5. Como $5 \geq 5$, debemos **sumar 1** a la milésima (dígito en posición 3):

$$M_{\text{red}} = 1,23 \underbrace{4}_{\text{milé.}} + 0,001 = 1,235$$

Verificación:

$$1,23456 \longrightarrow 4.\text{a decimal} = 5 \geq 5 \implies \text{se redondea hacia arriba}$$

$$M_{\text{red}} = 1,235$$

Paso 3: Truncamiento a centésimas (2 decimales).

Para truncar a centésimas, simplemente eliminamos todos los decimales a partir de la posición 3 (sin ningún ajuste):

$$M = 1,23 \underbrace{456 \dots}_{\text{se elimina}} \implies M_{\text{trunc}} = 1,23$$

$$M_{\text{trunc}} = 1,23$$

Paso 4: Error absoluto del truncamiento a centésimas.

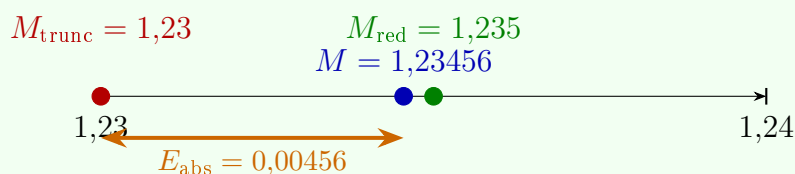
$$E_{\text{abs}} = |M - M_{\text{trunc}}| = |1,23456 - 1,23|$$

$$E_{\text{abs}} = |0,00456| = 0,00456$$

En notación científica: $E_{\text{abs}} = 4,56 \times 10^{-3}$.

$$E_{\text{abs}} = 0,00456$$

Paso 5: Figura resumen:



Observación pedagógica

Diferencia entre truncar y redondear: El truncamiento siempre “corta” hacia abajo (para números positivos), mientras que el redondeo puede subir o bajar según el primer dígito eliminado. Por eso, el error de truncamiento puede ser mayor que el de redondeo en algunos casos.

El **error máximo de redondeo a k decimales** es siempre $\leq 5 \times 10^{-(k+1)}$. El **error máximo de truncamiento a k decimales** es $< 10^{-k}$.

Capítulo 4

N4. Racionalización y Errores de Medición

Marco Teórico Previo

Definición: Racionalización

Racionalizar una expresión que contiene radicales en el denominador consiste en transformarla en una expresión equivalente cuyo denominador sea racional (no contenga radicales).

Métodos de racionalización:

1. **Denominador monomial con raíz:** $\frac{a}{\sqrt{b}}$: multiplicar por $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$.
2. **Denominador binomio con raíz:** $\frac{a}{\sqrt{b}+c}$: multiplicar por el conjugado $\frac{\sqrt{b}-c}{\sqrt{b}-c}$ y usar la identidad $(p+q)(p-q) = p^2 - q^2$.

4.1. Apartado (a): Racionalización

Enunciado – N4(a) – 3 puntos

Utiliza el proceso de racionalización para simplificar las siguientes expresiones:

1. $A = \frac{5}{\sqrt{10}}$

2. $B = \frac{2}{\sqrt{3}+1}$

Método 1: Monomio $\frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$ $\sqrt{b} \cdot \sqrt{b} = b$ (racionaliza)	Método 2: Binomio – Conjugado $\frac{a}{\sqrt{b} + c} \cdot \frac{\sqrt{b} - c}{\sqrt{b} - c} = \frac{a(\sqrt{b} - c)}{b - c^2}$ Diferencia de cuadrados: $(p + q)(p - q) = p^2 - q^2$

Figura 4.1: Los dos métodos principales de racionalización.

Solución detallada

Ítem 1: $A = \frac{5}{\sqrt{10}}$

Paso 1: Identificamos el tipo de denominador.

El denominador es $\sqrt{10}$: es un **radical monomial** (un solo término con raíz). Usaremos el **Método 1**.

Paso 2: Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{10}$:

$$A = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}$$

Justificación: multiplicar por $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 1$ no cambia el valor de la expresión.

Paso 3: Calculamos el nuevo numerador y denominador:

$$A = \frac{5 \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{(\sqrt{10})^2} = \frac{5\sqrt{10}}{10}$$

Paso 4: Simplificamos la fracción numérica:

$$A = \frac{5\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

(dividimos numerador y denominador por 5).

Paso 5: Verificación numérica:

$$\frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5}{3,1623} \approx 1,5811$$

$$\frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{3,1623}{2} \approx 1,5811 \quad \checkmark$$

$$A = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Ítem 2: $B = \frac{2}{\sqrt{3} + 1}$

Paso 1: Identificamos el tipo de denominador.

El denominador es $\sqrt{3} + 1$: es un **binomio** con un radical. Usaremos el **Método 2 (conjugado)**.

Paso 2: Identificamos el conjugado.

El conjugado de $(\sqrt{3} + 1)$ es $(\sqrt{3} - 1)$.

Recordatorio: el conjugado cambia el signo del término sin raíz (o más precisamente, el signo entre los dos términos).

Paso 3: Multiplicamos por la fracción unidad formada por el conjugado:

Rigor matemático – Explicación exhaustiva – Material de estudio

$$B = \frac{2}{\sqrt{3} + 1} = \frac{2}{\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1}$$

Paso 4: Calculamos el denominador usando la **diferencia de cuadrados**:

Advertencia – Error frecuente

Error frecuente en la racionalización con conjugado: Algunos alumnos multiplican solo el denominador por el conjugado, olvidando multiplicar también el numerador. Hay que aplicar $\cdot \frac{\text{conjugado}}{\text{conjugado}}$ tanto arriba como abajo para no cambiar el valor de la expresión.

Otro error: usar como conjugado $(-\sqrt{3}-1)$ en lugar de $(\sqrt{3}-1)$. El conjugado solo cambia el signo **entre** los términos, no los signos de ambos.

4.2. Apartado (b): Precisión de Mediciones – Error Relativo

Enunciado – N4(b) – 2 puntos

El valor real de una magnitud es $V_R = 7,2$ gramos. Se realizan dos mediciones: $M_1 = 7,15$ g y $M_2 = 7,24$ g. Calcula el **error relativo** de cada medición y determina cuál de las dos es más precisa.

Definición: Errores de medición

- **Error absoluto:**

$$E_{\text{abs}}(M_i) = |V_R - M_i|$$

- **Error relativo:**

$$E_{\text{rel}}(M_i) = \frac{E_{\text{abs}}(M_i)}{|V_R|} = \frac{|V_R - M_i|}{|V_R|}$$

- **Error relativo porcentual:**

$$E_{\%}(M_i) = E_{\text{rel}}(M_i) \times 100 \%$$

La **medición más precisa** es aquella con **menor error relativo**.

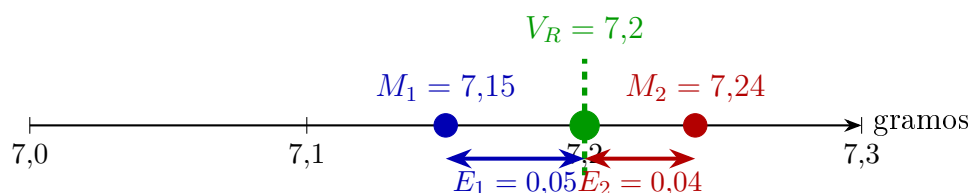


Figura 4.2: Comparación visual de las mediciones M_1 y M_2 respecto al valor real $V_R = 7,2$ g.

Solución detallada**Paso 1:** Calculamos los **errores absolutos**.**Medición** $M_1 = 7,15$ g:

$$E_{\text{abs}}(M_1) = |V_R - M_1| = |7,2 - 7,15| = |0,05| = 0,05 \text{ g}$$

Medición $M_2 = 7,24$ g:

$$E_{\text{abs}}(M_2) = |V_R - M_2| = |7,2 - 7,24| = |-0,04| = 0,04 \text{ g}$$

Paso 2: Calculamos los **errores relativos**.**Error relativo de** M_1 :

$$E_{\text{rel}}(M_1) = \frac{E_{\text{abs}}(M_1)}{|V_R|} = \frac{0,05}{7,2}$$

Realizamos la división:

$$\frac{0,05}{7,2} = \frac{5}{720} = \frac{1}{144} \approx 0,006944 \dots$$

En porcentaje:

$$E_{\%}(M_1) \approx 0,6944 \% \approx 0,69 \%$$

Error relativo de M_2 :

$$E_{\text{rel}}(M_2) = \frac{E_{\text{abs}}(M_2)}{|V_R|} = \frac{0,04}{7,2}$$

$$\frac{0,04}{7,2} = \frac{4}{720} = \frac{1}{180} \approx 0,0055\bar{5}$$

En porcentaje:

$$E_{\%}(M_2) \approx 0,5556 \% \approx 0,56 \%$$

Paso 3: Comparación y conclusión.

Medición	Valor	E_{abs} (g)	E_{rel}	$E_{\%}$
M_1	7,15 g	0,05	$\approx 0,00694$	$\approx 0,69 \%$
M_2	7,24 g	0,04	$\approx 0,00556$	$\approx 0,56 \%$

Como $E_{\text{rel}}(M_2) < E_{\text{rel}}(M_1)$, la medición **más precisa** es M_2 .

$$E_{\text{rel}}(M_1) \approx 0,69 \% > E_{\text{rel}}(M_2) \approx 0,56 \%$$

La medición más precisa es $M_2 = 7,24$ g

Observación pedagógica**¿Por qué usar el error relativo y no el absoluto para comparar precisión?**

El **error absoluto** mide la diferencia en las unidades originales: en este caso, M_1 tiene mayor error absoluto (0,05 g) que M_2 (0,04 g). Si solo mirásemos el error absoluto, llegaríamos a la misma conclusión, pero en general esto no es suficiente: si midiésemos la masa de un elefante (~ 5000 kg), un error de 0,05 kg sería despreciable.

El **error relativo** es adimensional (o porcentual) y permite comparar la precisión de mediciones en contextos completamente diferentes, independientemente de la magnitud del valor real. Por eso es el indicador estándar de precisión en ciencias experimentales.

Resumen General de Resultados

SÍNTESIS DE RESULTADOS DEL EXAMEN

N1. Números Reales

- $X = 5,\overline{12}$ **Periódico puro** $\rightarrow$ Fracción generatriz: $\frac{169}{33}$
- $Y = \sqrt{49} = 7$ **Exacto (entero)**
- $Z = 1,45678\dots$ **Irracional**
- $W = 0,34\overline{5}$ **Periódico mixto** $\rightarrow$ Fracción generatriz: $\frac{311}{900}$

N2. Radicales

- $A = 3\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{162}$
- $B = \frac{2}{5}\sqrt{50} = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$
- $\sqrt{98} - 2\sqrt{18} + \sqrt{8} = 7\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

N3. Intervalos y Aproximación

- $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq 1\} = (-4, 1]$
- $D = E(2, 4) = (-2, 6)$
- $M_{\text{red}} = 1,235$ (a milésimas) $M_{\text{trunc}} = 1,23$ (a centésimas)
- $E_{\text{abs}} = 0,00456$

N4. Racionalización y Errores

- $A = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$
- $B = \frac{2}{\sqrt{3} + 1} = \sqrt{3} - 1$
- $E_{\text{rel}}(M_1) \approx 0,69\%$ $E_{\text{rel}}(M_2) \approx 0,56\%$

- La medición más precisa es la medición 24 g

Puntuación máxima del examen

Bloque	Descripción	Puntos
N1(a)	Clasificación de números decimales	3
N1(b)	Fracción generatriz	2
N2(a)	Introducción de factores	2
N2(b)	Extracción y suma de radicales	3
N3(a)	Intervalos y representación	3
N3(b)	Redondeo, truncamiento y error	2
N4(a)	Racionalización	3
N4(b)	Errores de medición	2
TOTAL		20

Ejercicios de Repaso de Matemáticas (4º ESO OPCIÓN A)

Ladislao Jáñez Blanco

Bloque I: Números Reales y Notación Científica (Ejercicios 1 - 20)

1. Clasificación y Fracción Generatriz

- (a) Clasifica los números $A = 2,545454\dots$ y $B = \sqrt{10}$ (Exacto, Periódico, Irracional).
- (b) Halla la fracción generatriz irreducible de A .
- (c) Expresa A con tres cifras decimales redondeadas y calcula el error absoluto.

2. Fracción Generatriz

- (a) Halla la fracción generatriz de $N_1 = 0,35$.
- (b) Halla la fracción generatriz de $N_2 = 5,\overline{1}$.
- (c) Halla la fracción generatriz de $N_3 = 1,2\overline{7}$.

3. Tipos de Números

- (a) ¿Cuál es el número racional que genera $4,0\overline{5}$?
- (b) ¿Cuál es el número irracional entre 3 y 4 más cercano a $\sqrt{15}$?
- (c) Simplifica $\frac{4}{5} + \frac{1}{2,5}$ y clasifica el resultado.

4. Notación Científica (Expresión)

- (a) Expresa 1.230.000.000 en notación científica.
- (b) Expresa 0,000000000405 en notación científica.
- (c) Expresa $54,7 \cdot 10^{-6}$ en notación científica estándar.

5. Suma y Resta NC

- (a) Calcula: $(5,2 \cdot 10^7) + (3,0 \cdot 10^6)$.
- (b) Calcula: $(9,1 \cdot 10^{-4}) - (8,5 \cdot 10^{-5})$.
- (c) Expresa el resultado de (a) con dos cifras significativas.

6. Producto y Cociente NC

- (a) Multiplica: $(4,0 \cdot 10^{13}) \cdot (2,5 \cdot 10^{-7})$.
- (b) Divide: $\frac{6,8 \cdot 10^{-5}}{1,7 \cdot 10^2}$.
- (c) Realiza la operación y expresa en NC: $(10^5)^3 \cdot 10^{-12}$.

7. Operaciones Combinadas NC I

- (a) $\frac{3,5 \cdot 10^{10}}{7,0 \cdot 10^4 - 2,0 \cdot 10^3}$
- (b) $\frac{(2 \cdot 10^{-3})^2}{5 \cdot 10^{-5}}$
- (c) Expresa el resultado de (a) con tres cifras decimales.

8. Operaciones Combinadas NC II

- (a) $\frac{1,2 \cdot 10^{15} + 8,0 \cdot 10^{14}}{4,0 \cdot 10^5}$

- (b) Simplifica y expresa en NC: $(0,001)^2 \cdot 10^8$.
- (c) Multiplica $2,5 \cdot 10^4$ por la décima parte de $5 \cdot 10^{-3}$.

9. Problema de Masas

- (a) La masa de un electrón es $9,11 \cdot 10^{-31}$ kg. ¿Cuánto pesan 5 billones de electrones ($5 \cdot 10^{12}$)?
- (b) ¿Cuántos electrones se necesitan para sumar 1 kg?
- (c) Expresa la masa de un electrón en mg y en NC.

10. Problema de Distancia y Velocidad

- (a) Una nave viaja a $2,5 \cdot 10^4$ km/h. ¿Cuántos km recorre en un año (considera $8,76 \cdot 10^3$ h)?
- (b) Expresa la distancia del Sol a la Tierra ($1,5 \cdot 10^{11}$ m) en km.
- (c) ¿Cuánto tiempo tardaría la nave de (a) en recorrer la distancia de la Tierra al Sol? (Resultado en horas).

11. Fracción Generatriz (Mixto)

- (a) Halla la fracción generatriz de $N_4 = 0,0\overline{15}$.
- (b) Halla la fracción generatriz de $N_5 = -3,12\overline{3}$.
- (c) Clasifica el resultado de $\frac{2}{3} + 0,5$.

12. Errores I

- (a) El valor real es $V_R = 15$ m y la medida $M = 15,3$ m. Calcula el Error Absoluto (E_A).
- (b) Calcula el Error Relativo (E_R).
- (c) Expresa E_R como porcentaje.

13. Errores II

- (a) Calcula el E_A cometido al redondear $N = 3,14159$ a las centésimas.
- (b) Calcula el E_R cometido en la aproximación de (a).
- (c) Se redondea 0,00561 a la milésima. ¿Cuál es la aproximación?

14. Errores III

- (a) Compara la precisión de $M_1(E_R = 0,035)$ y $M_2(E_R = 0,0035)$.
- (b) Calcula el E_A al truncar $\frac{4}{7}$ a la milésima.
- (c) Redondea el resultado de $\frac{1}{6}$ a la cuarta cifra decimal.

15. Simplificación y NC

- (a) Simplifica $\frac{1,2 \cdot 10^{-1} + 0,3 \cdot 10^{-2}}{6 \cdot 10^{-4}}$.
- (b) ¿Qué número es $\frac{1}{4} \cdot 10^5$ en notación ordinaria?
- (c) ¿Cuál es la fracción irreducible de $0,\overline{9}$?

16. Problema de Densidad

- (a) Un objeto tiene una masa de $3,5 \cdot 10^{-3}$ kg y un volumen de $5 \cdot 10^{-6}$ m³. Calcula su densidad (masa/volumen).
- (b) Expresa la densidad en g/cm³.
- (c) Si otro objeto tiene el triple de masa y el doble de volumen, ¿cuál es su densidad en NC?

17. Problema de Área

- (a) Un terreno rectangular mide $1,5 \cdot 10^3$ m de largo y $8 \cdot 10^2$ m de ancho. Calcula el área total en m².
- (b) Expresa el área en hectáreas (1ha = 10⁴m²).
- (c) Si el precio del m² es 50 euros, ¿cuál es el precio total del terreno?

18. Clasificación Detallada

- (a) Clasifica $\frac{7}{4}$, $\sqrt{49}$, y $\sqrt{7}$ en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$.
- (b) Justifica por qué $\sqrt{10} + 3$ es irracional.
- (c) Escribe un número Periódico Mixto cuya parte no periódica tenga dos cifras.

19. Aproximación y Error

- (a) Redondea el número $\frac{17}{3}$ a las milésimas.
- (b) Trunca $\frac{17}{3}$ a las milésimas.
- (c) Calcula el error absoluto entre las dos aproximaciones (a) y (b).

20. Cálculo con Fracciones Generatrices

- (a) Calcula el valor exacto de $0,\overline{3} + 0,1$.
- (b) Calcula el valor exacto de $1,\overline{9}$.
- (c) Halla la fracción generatriz de $N_6 = 0,21\overline{4}$.

Bloque II: Radicales (Ejercicios 21 - 50)

21. Introducción de Factores I

- (a) Introduce el factor: $5\sqrt{2}$.
- (b) Introduce el factor: $3x^2\sqrt{2x}$.
- (c) Introduce el factor: $\frac{1}{2}\sqrt{8}$.

22. Introducción de Factores II

- (a) Introduce el factor: $2\sqrt[3]{4}$.
- (b) Introduce el factor: $a^2b\sqrt[3]{a^2}$.
- (c) Introduce el factor: $\frac{1}{x}\sqrt{x^3}$.

23. Extracción de Factores I

- (a) Extrae todos los factores posibles: $\sqrt{200}$.
- (b) Extrae todos los factores posibles: $\sqrt{x^7y^3}$.
- (c) Extrae todos los factores posibles: $\sqrt[3]{16a^4}$.

24. Extracción de Factores II

- (a) Extrae todos los factores posibles: $\sqrt{98}$.
- (b) Extrae todos los factores posibles: $\sqrt[4]{32x^5}$.
- (c) Extrae todos los factores posibles: $\frac{1}{5}\sqrt{500}$.

25. Suma y Resta de Radicales I

- (a) Simplifica: $5\sqrt{3} - \sqrt{12} + \sqrt{75}$.
- (b) Simplifica: $\sqrt{48} - 2\sqrt{27} + 5\sqrt{3}$.
- (c) Simplifica: $\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{2}$.

26. Suma y Resta de Radicales II

- (a) Simplifica: $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16}$.
- (b) Simplifica: $\frac{1}{2}\sqrt{24} + \sqrt{6}$.
- (c) Simplifica: $2\sqrt{28} - 5\sqrt{63}$.

27. Producto de Radicales (Igual Índice)

- (a) Simplifica: $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$.
- (b) Simplifica: $\sqrt{2x^3} \cdot \sqrt{8x}$.
- (c) Simplifica: $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$.

28. Producto de Radicales (Distinto Índice)

- (a) Simplifica: $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4}$.
- (b) Simplifica: $\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x^3}$.
- (c) Simplifica: $\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}$.

29. Cociente de Radicales (Igual Índice)

- (a) Simplifica: $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$.
- (b) Simplifica: $\frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{x^3}}$.
- (c) Simplifica: $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$.

30. Cociente de Radicales (Distinto Índice)

- (a) Simplifica: $\frac{\sqrt[4]{a^5}}{\sqrt{a}}$.
- (b) Simplifica: $\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{3}}$.
- (c) Simplifica: $\frac{\sqrt{16x^3}}{\sqrt[4]{x^2}}$.

31. Potencia de Radicales

- (a) Simplifica: $(\sqrt{5})^4$.
- (b) Simplifica: $(\sqrt[3]{x^2})^6$.
- (c) Simplifica: $(\sqrt{2\sqrt{2}})^2$.

32. Raíz de Raíz

- (a) Simplifica: $\sqrt{\sqrt{3^8}}$.
- (b) Simplifica: $\sqrt[3]{\sqrt{x^{12}}}$.
- (c) Simplifica: $\sqrt{a\sqrt{a}}$. (Expresa como un solo radical).

33. Racionalización I (Denominador Monomio)

- (a) Racionaliza: $\frac{3}{\sqrt{6}}$.
- (b) Racionaliza: $\frac{10}{2\sqrt{5}}$.
- (c) Racionaliza: $\frac{x^2}{\sqrt{x}}$.

34. Racionalización II (Denominador Cúbico)

- (a) Racionaliza: $\frac{5}{\sqrt[3]{4}}$.
- (b) Racionaliza: $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$.
- (c) Racionaliza: $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}$.

35. Racionalización III (Denominador Binomio)

- (a) Racionaliza: $\frac{1}{\sqrt{3+1}}$.
- (b) Racionaliza: $\frac{4}{2-\sqrt{2}}$.
- (c) Racionaliza: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

36. Racionalización IV (Binomio con Binomio)

- (a) Racionaliza: $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$.
- (b) Racionaliza: $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$.
- (c) Racionaliza: $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

37. Operaciones Combinadas I

- (a) $\sqrt{3}(\sqrt{12} + \sqrt{3})$.
- (b) $\frac{\sqrt{18}+\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$.
- (c) Simplifica: $(\sqrt{x} - 1)^2$.

38. Operaciones Combinadas II

- (a) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})$.
- (b) $(\sqrt{75} - \sqrt{3})^2$.
- (c) Racionaliza el resultado de (b) y simplifica.

39. Simplificación y Propiedades I

- (a) Simplifica: $\sqrt[3]{\frac{125}{27}}$.
- (b) Simplifica la expresión $\sqrt[4]{(x-1)^8}$.
- (c) Calcula el valor de $\sqrt{0,04}$.

40. Simplificación y Propiedades II

- (a) Simplifica al máximo: $\sqrt{18a^2b^3}$ (con $a, b > 0$).
- (b) Racionaliza y simplifica: $\frac{2}{\sqrt{8}}$.
- (c) Introduce el factor y simplifica: $2\sqrt{\frac{3}{4}}$.

41. Operaciones con Denominador

- (a) Calcula: $\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}$.
- (b) Calcula: $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{3}$.
- (c) Calcula: $\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{2}\right)$.

42. Ecuaciones con Radicales I

- (a) Resuelve la ecuación: $\sqrt{x} = 5$.
- (b) Resuelve la ecuación: $\sqrt[3]{x} = -2$.
- (c) ¿Qué valor debe tener x para que $\sqrt{x+2} = 3$?

43. Ecuaciones con Radicales II

- (a) Simplifica al máximo la expresión $\frac{\sqrt{27}}{3}$.
- (b) ¿Es $x = 3$ solución de $\sqrt{2x+3} = x$?
- (c) Descompón $\sqrt{75} + \sqrt{12}$.

44. Racionalización V (Especiales)

- (a) Racionaliza: $\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{10}}$.
- (b) Racionaliza: $\frac{x}{1-\sqrt{x}}$.
- (c) Racionaliza: $\frac{5}{\sqrt{50}}$.

45. Combinadas con Extracción

- (a) Simplifica: $2\sqrt{24} - \sqrt{54} + \sqrt{6}$.
- (b) Simplifica: $\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{3}$.
- (c) Simplifica: $\sqrt{a^3b} \cdot \sqrt{ab^3}$.

46. Radicales y Fracciones

- (a) Expresa $\frac{1}{\sqrt{3^5}}$ con exponente fraccionario.
- (b) Expresa $\sqrt{\frac{x^2}{y}}$ simplificando.
- (c) Simplifica: $\sqrt{\frac{4}{9}} + \sqrt{4}$.

47. Reducción a Índice Común I

- (a) Reduce a índice común: $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{2}$.
- (b) Reduce a índice común: $\sqrt[4]{a^3}$ y $\sqrt{a}$.
- (c) Ordena de menor a mayor: $\sqrt{5}$ y $\sqrt[3]{11}$.

48. Reducción a Índice Común II

- (a) Simplifica: $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}}$.
- (b) Reduce a índice común y multiplica: $\sqrt{10} \cdot \sqrt[4]{2}$.
- (c) Simplifica: $\sqrt[8]{16}$.

49. Potencias y Raíces

- (a) Simplifica: $\sqrt{3^4 \cdot 5^2}$.
- (b) Simplifica: $\sqrt[3]{\frac{x^9}{y^6}}$.
- (c) ¿Qué valor tiene x si $\sqrt{x^2} = |x|$?

50. Binomios Conjugados

- (a) Racionaliza: $\frac{1}{2\sqrt{3}-1}$.
- (b) Simplifica: $(2 - \sqrt{3})^2$.
- (c) Simplifica: $\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} + \frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}$.

Bloque III: Intervalos, Aproximación y Potencias (Ejercicios 51 - 70)

51. Intervalos y Desigualdades I

- (a) Expresa como intervalo: $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 7\}$.
- (b) Expresa como desigualdad: $(-3, 5]$.
- (c) Representa en la recta real el intervalo de (b).

52. Intervalos y Desigualdades II

- (a) Expresa como intervalo: El conjunto de números mayores que -2 .
- (b) Expresa como desigualdad: $(-\infty, 4)$.
- (c) Expresa como intervalo: El conjunto de números menores o iguales a 10 .

53. Entornos I

- (a) Halla el centro y el radio del intervalo $[1, 9]$.
- (b) Expresa el intervalo $[1, 9]$ en notación de entorno $E(c, r)$.

- (c) Expresa el entorno $E(-3, 2)$ en notación de intervalo.

54. Entornos II

- (a) Halla el centro y el radio del entorno $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 5| < 1\}$.
(b) Escribe el entorno de centro -1 y radio 3 en notación de desigualdad.
(c) ¿Qué intervalo es la unión de $E(0, 2)$ y $E(3, 1)$?

55. Operaciones con Intervalos

- (a) Calcula: $[1, 5) \cap (3, 7]$.
(b) Calcula: $[-2, 2] \cup (0, 4)$.
(c) Calcula: $(-\infty, 3] \cap [-1, \infty)$.

56. Potencias y Exponentes I

- (a) Simplifica: $\frac{2^5 \cdot 8^{-1}}{4^3}$.
(b) Simplifica: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot 9^2$.
(c) Deja con exponente positivo: $(x^{-2}y^3)^{-1}$.

57. Potencias y Exponentes II

- (a) Simplifica: $\frac{a^3 \cdot (a^{-1})^2}{a^{-4}}$.
(b) Calcula el valor de $9^{1/2} + 8^{2/3}$.
(c) Simplifica: $\frac{5^{2n} \cdot 5}{5^{2n-1}}$.

58. Potencias y Exponentes III

- (a) Simplifica: $\frac{(-2)^3 \cdot 4^2}{(-8)^2}$.
(b) Simplifica: $\frac{(x^2y^{-3})^2}{(xy)^{-1}}$.
(c) Expresa $\frac{1}{1000}$ como potencia de 10 .

59. Potencias y Radicales

- (a) Expresa $x^{-3/4}$ en forma de radical.
(b) Expresa $\frac{1}{\sqrt[5]{a^2}}$ con exponente fraccionario negativo.
(c) Calcula el valor de $\left(\frac{1}{27}\right)^{-2/3}$.

60. Potencias y Simplificación Final

- (a) Simplifica: $\frac{3^{n+1} \cdot 9^n}{27^{n-1}}$.
(b) Simplifica: $\left(\frac{2^3}{3^2}\right)^2 \cdot \frac{3^5}{2^7}$.
(c) Escribe $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x}$ como un solo radical.

61. Logaritmos: Definición I

- (a) Calcula x : $\log_4(x) = 3$.
(b) Calcula x : $\log_x(16) = 2$.
(c) Calcula x : $\log_3(81) = x$.

62. Logaritmos: Definición II

- (a) Calcula x : $\log_{10}(0, 1) = x$.
(b) Calcula x : $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = x$.
(c) Calcula x : $\log_x(\sqrt{5}) = \frac{1}{2}$.

63. Logaritmos: Propiedades I (Desarrollo)

- (a) Desarrolla $\log_2(8x^3)$.
- (b) Desarrolla $\log(\frac{a^2}{\sqrt{b}})$.
- (c) Si $\log 3 = 0,477$, calcula $\log 90$.

64. Logaritmos: Propiedades II (Reducción)

- (a) Expresa como un solo logaritmo: $2 \log x + \log y$.
- (b) Expresa como un solo logaritmo: $\log_a 5 - 3 \log_a 2$.
- (c) Simplifica: $\log_5 5 + \log_{10} 100$.

65. Logaritmos: Cambio de Base

- (a) Usa la calculadora para hallar $\log_3 10$ (con tres cifras decimales).
- (b) ¿Cómo se expresaría $\log_a b$ en base c ?
- (c) Si $\log 5 \approx 0,699$, calcula $\log 0,2$ sin calculadora.

66. Problema de Logaritmos (Ecuación)

- (a) Resuelve: $\log_x 27 = 3$.
- (b) Resuelve: $\log_4(x+1) = 2$.
- (c) ¿Qué valor debe tener x para que $\log_x \sqrt{3} = 1$?

67. Logaritmos: Simplificación Avanzada

- (a) Calcula: $\log_{\sqrt{2}} 4$.
- (b) Simplifica: $3^{\log_3 7}$.
- (c) Simplifica: $\log(1000) - \log(10)$.

68. Logaritmos y Radicales

- (a) Expresa $\log_a \sqrt[3]{a^2}$ como un número racional.
- (b) Desarrolla $\log_2 \frac{\sqrt{x} \cdot y}{z^2}$.
- (c) ¿Cuál es la relación entre $\log_a x$ y $\log_{a^2} x$?

69. Problemas Finales de Magnitudes

- (a) La magnitud de un terremoto es $M = \log(\frac{A}{A_0})$. Si $A/A_0 = 10^7$, ¿cuál es la magnitud M ?
- (b) Un sonido tiene una intensidad I tal que $L = 10 \log(\frac{I}{I_0})$. Si $I/I_0 = 10^3$, ¿cuál es el nivel de ruido L en decibelios?
- (c) ¿Cuántas veces es más intensa una magnitud 8 que una magnitud 6 en la escala de Richter?

70. Conexión Radicales-Potencias-Logaritmos

- (a) Escribe $\sqrt[3]{4^2}$ con exponente fraccionario y calcúlalo.
- (b) Resuelve la ecuación exponencial: $2^x = 32$.
- (c) Expresa la solución de (b) en forma de logaritmo.

Soluciones Completas y Detalladas

Matemáticas 4º ESO – Opción A

Ejercicios 1 al 10

SuperAgent CREA O

Profesor Matemático Virtual

26 de febrero de 2026

Documento completo con soluciones rigurosas

Este documento contiene las soluciones completamente desarrolladas de los ejercicios 1 al 10 del examen de repaso global de 4º ESO Opción A.

Cada paso está justificado matemáticamente con rigor profesional.

Índice

1. Ejercicio 1: Clasificación y Fracción Generatriz	3
1.1. Solución Apartado (a): Clasificación de números	5
1.2. Solución Apartado (b): Fracción generatriz de A	7
1.3. Solución Apartado (c): Redondeo y error absoluto	9
2. Ejercicio 2: Fracciones Generatrices	11
2.1. Solución Apartado (a): Fracción generatriz de $0,35$	12
2.2. Solución Apartado (b): Fracción generatriz de $5,1$	13
2.3. Solución Apartado (c): Fracción generatriz de $1,27$	14
3. Ejercicio 3: Tipos de Números	16
3.1. Solución Apartado (a): Número racional que genera $4,05$	17
3.2. Solución Apartado (b): Irracional entre 3 y 4 cercano a $\sqrt{15}$	18
3.3. Solución Apartado (c): Simplificación y clasificación	19
4. Ejercicio 4: Notación Científica (Expresión)	21
4.1. Solución Apartado (a): Expresión de 1 230 000 000 en NC	21
4.2. Solución Apartado (b): Expresión de 0,000 000 000 405 en NC	22
4.3. Solución Apartado (c): Expresión de $54,7 \cdot 10^{-6}$ en NC estándar	23
5. Ejercicio 5: Suma y Resta en Notación Científica	25
5.1. Solución Apartado (a): Suma de números en NC	25
5.2. Solución Apartado (b): Resta de números en NC	26
5.3. Solución Apartado (c): Expresión con dos cifras significativas	27
6. Ejercicio 6: Producto y Cociente en NC	29
6.1. Solución Apartado (a): Producto en NC	29
6.2. Solución Apartado (b): División en NC	30
6.3. Solución Apartado (c): Operación combinada con potencias	31
7. Ejercicio 7: Operaciones Combinadas NC I	33
7.1. Solución Apartado (a): Fracción con resta en el denominador	35
7.2. Solución Apartado (b): Potencia al cuadrado dividida	36
7.3. Solución Apartado (c): Tres cifras decimales del resultado (a)	37
8. Ejercicio 8: Operaciones Combinadas NC II	39
8.1. Solución Apartado (a): Suma en numerador y división	39
8.2. Solución Apartado (b): Simplificación con potencia decimal	40
8.3. Solución Apartado (c): Décima parte y multiplicación	41
9. Ejercicio 9: Problema de Masas	43
9.1. Solución Apartado (a): Masa total de electrones	43
9.2. Solución Apartado (b): Número de electrones para 1 kg	44
9.3. Solución Apartado (c): Conversión a miligramos	45

10.Ejercicio 10: Problema de Distancia y Velocidad	47
10.1. Solución Apartado (a): Distancia recorrida en un año	48
10.2. Solución Apartado (b): Conversión de metros a kilómetros	49
10.3. Solución Apartado (c): Tiempo para recorrer distancia Sol-Tierra	51

1. Ejercicio 1: Clasificación y Fracción Generatriz

Enunciado del Ejercicio 1

- (a) Clasifica los números $A = 2,545454\dots$ y $B = \sqrt{10}$ (Exacto, Periódico, Irracional).
- (b) Halla la fracción generatriz irreducible de A .
- (c) Expresa A con tres cifras decimales redondeadas y calcula el error absoluto.

1.1. Solución Apartado (a): Clasificación de números

Solución Detallada

Análisis del número $A = 2,545454\dots$

Observamos que el número A tiene la forma:

$$A = 2, \overline{54}$$

donde la barra superior indica que los dígitos 54 se repiten indefinidamente.

Clasificación de A :

- **¿Es exacto?** NO. Un número decimal exacto tiene un número finito de cifras decimales (ejemplo: 2,5 o 3,142). Como A tiene infinitas cifras decimales, no es exacto.
- **¿Es periódico?** SÍ. Un número decimal es periódico cuando tiene infinitas cifras decimales que se repiten en bloques. En este caso, el bloque 54 se repite indefinidamente después de la parte entera 2.
- **Tipo de periódico:** Es un **decimal periódico puro** porque la repetición comienza inmediatamente después de la coma decimal (no hay parte no periódica).
- **¿Es irracional?** NO. Los números irracionales son aquellos que no pueden expresarse como fracción de dos enteros y tienen infinitas cifras decimales no periódicas. Como A es periódico, puede expresarse como fracción (lo demostraremos en el apartado b), por lo tanto es RACIONAL.

Conclusión para A : Es un **número decimal periódico puro**, que pertenece al conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$.

Análisis del número $B = \sqrt{10}$

- **¿Es exacto?** NO. Para que $\sqrt{10}$ fuera exacto, 10 tendría que ser un cuadrado perfecto. Los cuadrados perfectos cercanos son $9 = 3^2$ y $16 = 4^2$. Como 10 no es cuadrado perfecto, $\sqrt{10}$ no es un número entero ni decimal exacto.
- **¿Es periódico?** NO. La raíz cuadrada de un número natural que no es cuadrado perfecto siempre es un número irracional.
- **¿Es irracional?** SÍ. Para demostrarlo, usamos el siguiente teorema:

Observación Importante

Teorema: Si $n \in \mathbb{N}$ no es un cuadrado perfecto, entonces $\sqrt{n} \in \mathbb{I}$ (es irracional).

Demostración (por reducción al absurdo):

Supongamos que $\sqrt{10}$ es racional, es decir, $\sqrt{10} = \frac{p}{q}$ donde $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, y la fracción está simplificada (es decir, $\text{mcd}(p, q) = 1$).

Elevando al cuadrado ambos lados:

$$10 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 10q^2 = p^2$$

Esto implica que p^2 es divisible por 10, y por tanto por 2 y por 5.

Si p^2 es divisible por 2, entonces p también es divisible por 2 (porque 2 es primo). Escribimos $p = 2k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Sustituyendo: $10q^2 = (2k)^2 = 4k^2 \Rightarrow 10q^2 = 4k^2 \Rightarrow 5q^2 = 2k^2$

1.2. Solución Apartado (b): Fracción generatriz de A

Solución Detallada

Método para hallar la fracción generatriz de un decimal periódico puro

Dado $A = 2, \overline{54} = 2,545454\dots$

Paso 1: Escribir la ecuación fundamental.

Sea $x = 2,545454\dots$ (ecuación 1)

Paso 2: Identificar el período.

El período es 54, que tiene 2 cifras.

Paso 3: Multiplicar por $10^{\text{número de cifras del período}}$.

Como el período tiene 2 cifras, multiplicamos por $10^2 = 100$:

$$100x = 100 \times 2,545454\dots = 254,545454\dots$$

(ecuación 2)

Paso 4: Restar la ecuación 1 de la ecuación 2.

$$\begin{array}{r} 100x = 254,545454\dots \\ - \quad x = \quad 2,545454\dots \\ \hline 99x = 252 \end{array}$$

Justificación: Al restar, las partes decimales periódicas se cancelan porque son idénticas.

Paso 5: Despejar x .

$$x = \frac{252}{99}$$

Paso 6: Simplificar la fracción.

Para simplificar, necesitamos hallar el máximo común divisor de 252 y 99.

Método del algoritmo de Euclides:

$$252 = 99 \times 2 + 54$$

$$99 = 54 \times 1 + 45$$

$$54 = 45 \times 1 + 9$$

$$45 = 9 \times 5 + 0$$

Por lo tanto, $\text{mcd}(252, 99) = 9$.

Dividimos numerador y denominador por 9:

$$x = \frac{252 \div 9}{99 \div 9} = \frac{28}{11}$$

Verificación:

Comprobemos que $\frac{28}{11} = 2, \overline{54}$ mediante división:

$$\begin{array}{r|l} 28 & 11 \\ -22 & 2, \\ \hline 60 & \\ -55 & 5 \\ \hline 50 & \\ -44 & 4 \\ \hline 60 & \\ -55 & 5 \\ \hline 50 & 4\dots \end{array}$$

El residuo se repite (6 y 5), generando 54 periódicamente.

1.3. Solución Apartado (c): Redondeo y error absoluto

Solución Detallada

Parte 1: Expresar A con tres cifras decimales redondeadas

Tenemos $A = 2,545454\dots$

Para redondear a tres cifras decimales, observamos la cuarta cifra decimal:

$$A = 2,545\underline{4}54\dots$$

La cuarta cifra es 4. Según la regla de redondeo:

- Si la cifra siguiente es 0, 1, 2, 3, 4: se mantiene la cifra anterior.
- Si la cifra siguiente es 5, 6, 7, 8, 9: se aumenta en 1 la cifra anterior.

Como la cuarta cifra es $4 < 5$, mantenemos la tercera cifra decimal:

$$A_{\text{redondeado}} = 2,545$$

Parte 2: Calcular el error absoluto

Definición: El error absoluto es la diferencia (en valor absoluto) entre el valor real y el valor aproximado:

$$E_A = |V_{\text{real}} - V_{\text{aproximado}}|$$

En nuestro caso:

$$E_A = |A - A_{\text{redondeado}}| = |2,\overline{54} - 2,545|$$

Calculemos $A - 2,545$:

$$A - 2,545 = 2,545454\dots - 2,545 = 0,000454\dots$$

Más precisamente, usando la fracción generatriz:

$$A - 2,545 = \frac{28}{11} - 2,545$$

Convertimos 2,545 a fracción:

$$2,545 = \frac{2545}{1000} = \frac{509}{200}$$

Ahora calculamos:

$$\frac{28}{11} - \frac{509}{200}$$

Para restar fracciones, necesitamos común denominador. El mcm(11, 200) = 2200.

$$\frac{28}{11} = \frac{28 \times 200}{11 \times 200} = \frac{5600}{2200}$$

$$\frac{509}{200} = \frac{509 \times 11}{200 \times 11} = \frac{5599}{2200}$$

$$\frac{28}{11} - \frac{509}{200} = \frac{5600}{2200} - \frac{5599}{2200} = \frac{1}{2200}$$

Por lo tanto:

$$E_A = \left| \frac{1}{2200} \right| = \frac{1}{2200} \approx 0,000454545\dots$$

Expresado en notación decimal:

Observación Importante**Observaciones pedagógicas:**

1. El error absoluto es muy pequeño ($< 0,0005$), lo que indica que el redondeo a tres decimales es bastante preciso para este número.
2. El error absoluto NO depende de la magnitud del número. Para evaluar la calidad de la aproximación en relación al tamaño del número, usamos el **error relativo**:

$$E_R = \frac{E_A}{|V_{\text{real}}|} = \frac{1/2200}{28/11} = \frac{1}{2200} \times \frac{11}{28} = \frac{11}{61600} \approx 0,0001785 = 0,01785 \%$$

3. Este error relativo del 0,018 % confirma que la aproximación es muy buena.

2. Ejercicio 2: Fracciones Generatrices

Enunciado del Ejercicio 2

- (a) Halla la fracción generatriz de $N_1 = 0,35$.
- (b) Halla la fracción generatriz de $N_2 = 5,1$.
- (c) Halla la fracción generatriz de $N_3 = 1,27$.

2.1. Solución Apartado (a): Fracción generatriz de $0,35$

Solución Detallada

Interpretación: Asumimos que $N_1 = 0,35$ es un número decimal exacto (no periódico), es decir, $N_1 = 0,35000\dots$

Método directo para decimales exactos:

Un número decimal exacto se convierte a fracción escribiendo las cifras decimales sobre la potencia de 10 correspondiente.

$$N_1 = 0,35 = \frac{35}{100}$$

Justificación: El número $0,35$ tiene 2 cifras decimales, por lo que el denominador es $10^2 = 100$.

Simplificación:

Hallamos el $\text{mcd}(35, 100)$:

$$100 = 35 \times 2 + 30$$

$$35 = 30 \times 1 + 5$$

$$30 = 5 \times 6 + 0$$

Por lo tanto, $\text{mcd}(35, 100) = 5$.

$$N_1 = \frac{35 \div 5}{100 \div 5} = \frac{7}{20}$$

Verificación: $\frac{7}{20} = \frac{7 \times 5}{20 \times 5} = \frac{35}{100} = 0,35$

Respuesta: $N_1 = \frac{7}{20}$

NOTA: Si el enunciado pretendía $N_1 = 0,\overline{35}$ (periódico), entonces:
Sea $x = 0,\overline{35} = 0,353535\dots$

$$100x = 35,353535\dots$$

$$100x - x = 35$$

$$99x = 35$$

$$x = \frac{35}{99}$$

Como $\text{mcd}(35, 99) = 1$, la fracción ya está irreducible.

$$0,\overline{35} = \frac{35}{99}$$

2.2. Solución Apartado (b): Fracción generatriz de $5,1$

Solución Detallada

Interpretación: Asumimos que la notación $5,1$ significa $5,\overline{1}$ (periódico), es decir:

$$N_2 = 5,111111\dots$$

Método para decimales periódicos puros:

Sea $x = 5,\overline{1} = 5,111111\dots$ (ecuación 1)

El período es 1, que tiene 1 cifra. Multiplicamos por $10^1 = 10$:

$$10x = 51,111111\dots$$

(ecuación 2)

Restamos la ecuación 1 de la ecuación 2:

$$\begin{array}{r} 10x = 51,\overline{1} \\ - \quad x = 5,\overline{1} \\ \hline 9x = 46 \end{array}$$

Despejamos:

$$x = \frac{46}{9}$$

Comprobamos si se puede simplificar:

$$\text{mcd}(46, 9) = \text{mcd}(9, 1) = 1$$

La fracción ya está irreducible.

Verificación: $\frac{46}{9} = 5,\overline{1}$

División: $46 \div 9 = 5$ con resto 1, y $10 \div 9 = 1$ con resto 1 (se repite).

Respuesta: $N_2 = \frac{46}{9}$

2.3. Solución Apartado (c): Fracción generatriz de $1,27$

Solución Detallada

Interpretación: Asumimos que la notación $1,27$ significa $1,\overline{27}$ (periódico), es decir:

$$N_3 = 1,272727 \dots$$

Método para decimales periódicos puros:

Sea $x = 1,\overline{27} = 1,272727 \dots$

(ecuación 1)

El período es 27, que tiene 2 cifras. Multiplicamos por $10^2 = 100$:

$$100x = 127,272727 \dots$$

(ecuación 2)

Restamos:

$$\begin{array}{r} 100x = 127,\overline{27} \\ - \quad x = \quad 1,\overline{27} \\ \hline 99x = 126 \end{array}$$

Despejamos:

$$x = \frac{126}{99}$$

Simplificación:

Hallamos $\text{mcd}(126, 99)$:

$$126 = 99 \times 1 + 27$$

$$99 = 27 \times 3 + 18$$

$$27 = 18 \times 1 + 9$$

$$18 = 9 \times 2 + 0$$

Por lo tanto, $\text{mcd}(126, 99) = 9$.

$$x = \frac{126 \div 9}{99 \div 9} = \frac{14}{11}$$

Verificación: $\frac{14}{11} = 1,\overline{27}$

División: $14 \div 11 = 1$ con resto 3

$$30 \div 11 = 2$$

con resto 8

$$80 \div 11 = 7$$

con resto 3 (se repite el resto 3)

Por lo tanto, obtenemos $1,272727 \dots$

Respuesta: $N_3 = \frac{14}{11}$

Observación Importante**Resumen de métodos para fracciones generatrices:**

1. **Decimal exacto** (ej: $0,35$): Se escribe el número sin coma sobre la potencia de 10 correspondiente y se simplifica.

$$0,35 = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$$

2. **Periódico puro** (ej: $0,\overline{35}$): Se multiplica por 10^n donde n es el número de cifras del período, se resta, y se simplifica.

$$x = 0,\overline{35} \Rightarrow 100x - x = 35 \Rightarrow x = \frac{35}{99}$$

3. **Periódico mixto** (ej: $0,1\overline{35}$): Se combina la técnica de multiplicación y resta, considerando la parte no periódica.

$$x = 0,1\overline{35} \Rightarrow 1000x - 10x = 135 - 1 \Rightarrow x = \frac{134}{990} = \frac{67}{495}$$

3. Ejercicio 3: Tipos de Números

Enunciado del Ejercicio 3

- (a) ¿Cuál es el número racional que genera $4,05$?
- (b) ¿Cuál es el número irracional entre 3 y 4 más cercano a $\sqrt{15}$?
- (c) Simplifica $\frac{4}{5} + \frac{1}{2,5}$ y clasifica el resultado.

3.1. Solución Apartado (a): Número racional que genera 4,05

Solución Detallada

Interpretación del enunciado:

La notación 4,05 puede interpretarse de dos formas:

1. 4,05 (decimal exacto)
2. $4,\overline{05}$ (decimal periódico)

Dado que el ejercicio pregunta por el "número racional que genera" esta expresión, interpretamos que se refiere al periódico: $4,\overline{05}$.

Cálculo de la fracción generatriz de $4,\overline{05}$:

Sea $x = 4,\overline{05} = 4,050505\dots$ (ecuación 1)

El período es 05, que tiene 2 cifras. Multiplicamos por 100:

$$100x = 405,050505\dots$$

(ecuación 2)

Restamos:

$$\begin{array}{r} 100x = 405,\overline{05} \\ - \quad x = \quad 4,\overline{05} \\ \hline 99x = 401 \end{array}$$

Despejamos:

$$x = \frac{401}{99}$$

Verificación de irreducibilidad:

Comprobamos si 401 y 99 tienen factores comunes.

401 es un número primo (podemos verificarlo: no es divisible por 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, y $\sqrt{401} \approx 20$, así que solo necesitamos comprobar hasta 19).

Como 401 es primo y $99 = 9 \times 11 = 3^2 \times 11$, no comparten factores.

Por lo tanto, $\text{mcd}(401, 99) = 1$.

Respuesta: $\boxed{\frac{401}{99}}$

Nota adicional: Si la pregunta se refería al decimal exacto 4,05:

$$4,05 = \frac{405}{100} = \frac{81}{20}$$

3.2. Solución Apartado (b): Irracional entre 3 y 4 cercano a $\sqrt{15}$

Solución Detallada

Paso 1: Calcular el valor aproximado de $\sqrt{15}$

Primero, situamos $\sqrt{15}$:

$$3^2 = 9 < 15 < 16 = 4^2$$

Por lo tanto: $3 < \sqrt{15} < 4$

Calculando con más precisión:

$$\sqrt{15} \approx 3,872983 \dots$$

Paso 2: Identificar números irracionales comunes entre 3 y 4

Los números irracionales más comunes en este intervalo son:

- $\pi \approx 3,141592 \dots$
- $\sqrt{10} \approx 3,162277 \dots$
- $\sqrt{11} \approx 3,316624 \dots$
- $\sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3,464101 \dots$
- $\sqrt{13} \approx 3,605551 \dots$
- $\sqrt{14} \approx 3,741657 \dots$
- $\sqrt{15} \approx 3,872983 \dots$

Paso 3: Determinar cuál está más cerca de $\sqrt{15}$

Comparando las distancias a $\sqrt{15} \approx 3,873$:

- $|\pi - \sqrt{15}| \approx |3,142 - 3,873| = 0,731$
- $|\sqrt{10} - \sqrt{15}| \approx |3,162 - 3,873| = 0,711$
- $|\sqrt{11} - \sqrt{15}| \approx |3,317 - 3,873| = 0,556$
- $|\sqrt{12} - \sqrt{15}| \approx |3,464 - 3,873| = 0,409$
- $|\sqrt{13} - \sqrt{15}| \approx |3,606 - 3,873| = 0,267$
- $|\sqrt{14} - \sqrt{15}| \approx |3,742 - 3,873| = 0,131$

Conclusión:

El número irracional entre 3 y 4 más cercano a $\sqrt{15}$ es $\boxed{\sqrt{14}}$

Justificación matemática:

La diferencia es:

$$\sqrt{15} - \sqrt{14} = \sqrt{15} - \sqrt{14} = \frac{(\sqrt{15})^2 - (\sqrt{14})^2}{\sqrt{15} + \sqrt{14}} = \frac{15 - 14}{\sqrt{15} + \sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{15} + \sqrt{14}} \approx \frac{1}{7,615} \approx 0,131$$

3.3. Solución Apartado (c): Simplificación y clasificación

Solución Detallada

Simplificación de $\frac{4}{5} + \frac{1}{2,5}$

Paso 1: Convertir 2,5 a fracción.

$$2,5 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

Paso 2: Reescribir la expresión.

$$\frac{4}{5} + \frac{1}{2,5} = \frac{4}{5} + \frac{1}{\frac{5}{2}}$$

Paso 3: Simplificar la fracción compleja.

La división por una fracción es equivalente a multiplicar por su recíproco:

$$\frac{1}{\frac{5}{2}} = 1 \div \frac{5}{2} = 1 \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

Paso 4: Sumar las fracciones.

$$\frac{4}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4+2}{5} = \frac{6}{5}$$

Clasificación del resultado:

El número $\frac{6}{5}$ es:

- **Racional:** Sí, porque está expresado como cociente de dos enteros.
- **Entero:** No, porque 6 no es divisible por 5.
- **Natural:** No, porque no es entero.
- **Fracción impropia:** Sí, porque el numerador (6) es mayor que el denominador (5).
- **Número mixto:** $\frac{6}{5} = 1\frac{1}{5} = 1,2$
- **Decimal:** Es un decimal exacto: 1,2

Respuesta:

$$\frac{4}{5} + \frac{1}{2,5} = \frac{6}{5} = 1,2$$

Clasificación: Es un **número racional** $\in \mathbb{Q}$, específicamente una **fracción impropia** que equivale al **decimal exacto** 1,2.

Observación Importante**Conceptos importantes:**

1. **Fracción compleja:** Una fracción que tiene otra fracción en el numerador o denominador. Se simplifica usando la regla:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = a \times \frac{d}{b} = \frac{ad}{b}$$

2. **Clasificación de fracciones:**

- **Propia:** Numerador < denominador (valor < 1)
- **Impropia:** Numerador $\geq$ denominador (valor $\geq$ 1)
- **Aparente:** Numerador divisible por denominador (valor entero)

3. **Jerarquía de conjuntos numéricos:**

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$$\mathbb{I} \subset \mathbb{R}, \quad \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$$

4. Ejercicio 4: Notación Científica (Expresión)

Enunciado del Ejercicio 4

- (a) Expresa 1 230 000 000 en notación científica.
- (b) Expresa 0,000 000 000 405 en notación científica.
- (c) Expresa $54,7 \cdot 10^{-6}$ en notación científica estándar.

4.1. Solución Apartado (a): Expresión de 1 230 000 000 en NC

Solución Detallada

Concepto de Notación Científica:

Un número está en notación científica cuando se expresa en la forma:

$$N = a \times 10^n$$

donde:

- $1 \leq |a| < 10$ (la mantisa a tiene exactamente una cifra no nula antes de la coma decimal)
- $n \in \mathbb{Z}$ (el exponente es un número entero)

Proceso de conversión de 1 230 000 000:

Paso 1: Identificar dónde debe estar la coma decimal.

Queremos expresar el número de forma que haya una sola cifra no nula antes de la coma. El número original es:

$$1\ 230\ 000\ 000$$

Colocamos la coma después del primer dígito significativo:

$$1,230\ 000\ 000$$

Paso 2: Contar cuántos lugares se movió la coma.

La coma decimal original (implícita) está al final: 1 230 000 000,0

La coma nueva está después del 1: 1,230 000 000

Hemos movido la coma 9 lugares hacia la izquierda.

Paso 3: Escribir en notación científica.

Cada vez que movemos la coma un lugar hacia la izquierda, multiplicamos por 10. Como la movimos 9 lugares:

$$1\ 230\ 000\ 000 = 1,23 \times 10^9$$

Justificación:

$$1,23 \times 10^9 = 1,23 \times 1\ 000\ 000\ 000 = 1\ 230\ 000\ 000$$

Respuesta: $1,23 \times 10^9$

4.2. Solución Apartado (b): Expresión de 0,000 000 000 405 en NC**Solución Detallada****Proceso de conversión de 0,000 000 000 405:****Paso 1:** Identificar el primer dígito significativo.

En 0,000 000 000 405, el primer dígito no nulo es 4.

Paso 2: Colocar la coma después del primer dígito significativo.

$$4,05$$

Paso 3: Contar cuántos lugares se movió la coma.

Posición original: 0,000 000 000 405

Posición nueva: 4,05

Contamos los lugares desde la nueva posición hasta la original:

$$0,\underbrace{000\,000\,000}_{10\text{ lugares}}405$$

Hemos movido la coma 10 lugares hacia la derecha.

Paso 4: Escribir en notación científica.

Cuando movemos la coma hacia la derecha, el exponente es negativo:

$$0,000\,000\,000\,405 = 4,05 \times 10^{-10}$$

Justificación:

$$4,05 \times 10^{-10} = 4,05 \times \frac{1}{10\,000\,000\,000} = \frac{4,05}{10\,000\,000\,000} = 0,000\,000\,000\,405$$

Respuesta: $4,05 \times 10^{-10}$

4.3. Solución Apartado (c): Expresión de $54,7 \cdot 10^{-6}$ en NC estándar**Solución Detallada****Análisis:**

El número $54,7 \cdot 10^{-6}$ NO está en notación científica estándar porque:

$$54,7 \notin [1, 10)$$

La mantisa debe cumplir $1 \leq a < 10$.

Conversión a notación científica estándar:

Paso 1: Reescribir 54,7 para que cumpla la condición.

$$54,7 = 5,47 \times 10$$

Paso 2: Sustituir en la expresión original.

$$54,7 \times 10^{-6} = (5,47 \times 10) \times 10^{-6}$$

Paso 3: Aplicar las propiedades de las potencias.

$$= 5,47 \times 10^1 \times 10^{-6} = 5,47 \times 10^{1+(-6)} = 5,47 \times 10^{-5}$$

Verificación:

Comprobemos que ambas expresiones son equivalentes:

$$54,7 \times 10^{-6} = 54,7 \times 0,000\,001 = 0,000\,054\,7$$

$$5,47 \times 10^{-5} = 5,47 \times 0,000\,01 = 0,000\,054\,7$$

Respuesta: $5,47 \times 10^{-5}$

Observación Importante**Reglas para la Notación Científica:**

1. **Forma estándar:** $a \times 10^n$ donde $1 \leq |a| < 10$ y $n \in \mathbb{Z}$

2. **Números grandes** (≥ 10): Exponente positivo

$$12\,000 = 1,2 \times 10^4$$

3. **Números pequeños** ($0 < |N| < 1$): Exponente negativo

$$0,0012 = 1,2 \times 10^{-3}$$

4. **Conversión:**

- Mover coma a la derecha $\Rightarrow$ exponente negativo
- Mover coma a la izquierda $\Rightarrow$ exponente positivo

5. **Ajuste de mantisa:**

- Si $a \geq 10$: dividir a por 10 y sumar 1 al exponente
- Si $a < 1$: multiplicar a por 10 y restar 1 al exponente

Ejemplo de ajuste:

$$350 \times 10^6 = 3,5 \times 10^2 \times 10^6 = 3,5 \times 10^8$$

$$0,042 \times 10^{-3} = 4,2 \times 10^{-2} \times 10^{-3} = 4,2 \times 10^{-5}$$

5. Ejercicio 5: Suma y Resta en Notación Científica

Enunciado del Ejercicio 5

- (a) Calcula: $(5,2 \cdot 10^7) + (3,0 \cdot 10^6)$
 (b) Calcula: $(9,1 \cdot 10^{-4}) - (8,5 \cdot 10^{-5})$
 (c) Expresa el resultado de (a) con dos cifras significativas.

5.1. Solución Apartado (a): Suma de números en NC

Solución Detallada

Regla fundamental: Para sumar o restar números en notación científica, primero deben tener el mismo exponente.

Cálculo de $(5,2 \cdot 10^7) + (3,0 \cdot 10^6)$:

Paso 1: Igualar los exponentes.

Tenemos dos opciones:

- Opción 1: Expresar ambos con exponente 10^7
- Opción 2: Expresar ambos con exponente 10^6

Elegimos la Opción 1 (usar el mayor exponente):

$$3,0 \times 10^6 = 0,30 \times 10^7$$

Justificación:

$$3,0 \times 10^6 = 3,0 \times \frac{10^7}{10} = \frac{3,0}{10} \times 10^7 = 0,30 \times 10^7$$

Paso 2: Sumar las mantisas.

$$(5,2 \times 10^7) + (0,30 \times 10^7) = (5,2 + 0,30) \times 10^7 = 5,50 \times 10^7$$

Paso 3: Verificar que el resultado está en notación científica estándar.

Como $1 \leq 5,50 < 10$, el resultado ya está en forma estándar.

Respuesta: $5,5 \times 10^7$

Verificación (opcional):

$$5,2 \times 10^7 = 52\,000\,000$$

$$3,0 \times 10^6 = 3\,000\,000$$

$$\text{Suma} = 55\,000\,000 = 5,5 \times 10^7$$

5.2. Solución Apartado (b): Resta de números en NC**Solución Detallada**

Cálculo de $(9,1 \cdot 10^{-4}) - (8,5 \cdot 10^{-5})$:

Paso 1: Igualar los exponentes.

Expresamos ambos números con exponente 10^{-4} (el mayor de los dos exponentes negativos):

$$8,5 \times 10^{-5} = 0,85 \times 10^{-4}$$

Justificación:

$$8,5 \times 10^{-5} = 8,5 \times \frac{10^{-4}}{10} = \frac{8,5}{10} \times 10^{-4} = 0,85 \times 10^{-4}$$

Paso 2: Restar las mantisas.

$$(9,1 \times 10^{-4}) - (0,85 \times 10^{-4}) = (9,1 - 0,85) \times 10^{-4}$$

Calculamos la resta:

$$9,1 - 0,85 = 8,25$$

Por lo tanto:

$$= 8,25 \times 10^{-4}$$

Paso 3: Verificar formato estándar.

Como $1 \leq 8,25 < 10$, el resultado está en notación científica estándar.

Respuesta: $8,25 \times 10^{-4}$

Verificación (opcional):

$$9,1 \times 10^{-4} = 0,000\,91$$

$$8,5 \times 10^{-5} = 0,000\,085$$

$$\text{Resta} = 0,000\,825 = 8,25 \times 10^{-4}$$

5.3. Solución Apartado (c): Expresión con dos cifras significativas

Solución Detallada

Resultado del apartado (a): $5,5 \times 10^7$

Análisis de cifras significativas:

El número $5,5 \times 10^7$ tiene actualmente 2 cifras significativas: el 5 y el 5.

Definición de cifras significativas:

Las cifras significativas son todos los dígitos que aportan información sobre la precisión del número, excluyendo:

- Ceros a la izquierda (ejemplo: en 0,0045, solo 4 y 5 son significativos)
- Ceros a la derecha en números sin coma decimal (pueden ser ambiguos)

En $5,5 \times 10^7$:

- Primera cifra significativa: 5
- Segunda cifra significativa: 5

Conclusión:

El resultado $5,5 \times 10^7$ ya está expresado con dos cifras significativas.

Respuesta: $5,5 \times 10^7$

Nota pedagógica:

Si el resultado original hubiera sido, por ejemplo, $5,547 \times 10^7$ y quisiéramos expresarlo con dos cifras significativas:

Paso 1: Identificar las dos primeras cifras: $5,5\underline{4}7$

Paso 2: Observar la tercera cifra: es $4 < 5$

Paso 3: Como $4 < 5$, redondeamos hacia abajo: $5,5 \times 10^7$

Si la tercera cifra fuera ≥ 5 , redondearíamos hacia arriba:

$$5,557 \times 10^7 \approx 5,6 \times 10^7 \text{ (dos cifras significativas)}$$

Observación Importante**Operaciones con Notación Científica - Resumen:****1. Suma y resta:**

- Igualar exponentes
- Sumar/restar mantisas
- Ajustar a formato estándar si es necesario

Ejemplo:

$$(3 \times 10^5) + (2 \times 10^4) = (30 \times 10^4) + (2 \times 10^4) = 32 \times 10^4 = 3,2 \times 10^5$$

2. Multiplicación:

- Multiplicar mantisas
- Sumar exponentes

Ejemplo:

$$(3 \times 10^5) \times (2 \times 10^4) = (3 \times 2) \times 10^{5+4} = 6 \times 10^9$$

3. División:

- Dividir mantisas
- Restar exponentes

Ejemplo:

$$\frac{6 \times 10^9}{2 \times 10^4} = \frac{6}{2} \times 10^{9-4} = 3 \times 10^5$$

Cifras significativas:

- En suma/resta: el resultado tiene tantos decimales como el número con menos decimales
- En multiplicación/división: el resultado tiene tantas cifras significativas como el número con menos cifras significativas

6. Ejercicio 6: Producto y Cociente en NC

Enunciado del Ejercicio 6

(a) Multiplica: $(4,0 \cdot 10^{13}) \cdot (2,5 \cdot 10^{-7})$

(b) Divide: $\frac{6,8 \cdot 10^{-5}}{1,7 \cdot 10^2}$

(c) Realiza la operación y expresa en NC: $(10^5)^3 \cdot 10^{-12}$

6.1. Solución Apartado (a): Producto en NC

Solución Detallada

Regla para multiplicar en NC:

$$(a \times 10^m) \times (b \times 10^n) = (a \times b) \times 10^{m+n}$$

Cálculo de $(4,0 \cdot 10^{13}) \cdot (2,5 \cdot 10^{-7})$:

Paso 1: Multiplicar las mantisas.

$$4,0 \times 2,5 = 10,0$$

Paso 2: Sumar los exponentes.

$$10^{13} \times 10^{-7} = 10^{13+(-7)} = 10^6$$

Paso 3: Combinar resultados.

$$(4,0 \times 2,5) \times 10^{13+(-7)} = 10,0 \times 10^6$$

Paso 4: Ajustar a formato estándar.

Como $10,0 \notin [1, 10)$, debemos ajustar:

$$10,0 = 1,0 \times 10^1$$

Por lo tanto:

$$10,0 \times 10^6 = (1,0 \times 10^1) \times 10^6 = 1,0 \times 10^{1+6} = 1,0 \times 10^7$$

Simplificando:

$$= 1 \times 10^7 = 10^7$$

Respuesta: $1,0 \times 10^7$ o simplemente 10^7

Verificación:

$$4,0 \times 10^{13} = 40\,000\,000\,000\,000$$

$$2,5 \times 10^{-7} = 0,000\,000\,25$$

$$\text{Producto} = 40\,000\,000\,000\,000 \times 0,000\,000\,25 = 10\,000\,000 = 10^7$$

6.2. Solución Apartado (b): División en NC

Solución Detallada

Regla para dividir en NC:

$$\frac{a \times 10^m}{b \times 10^n} = \frac{a}{b} \times 10^{m-n}$$

Cálculo de $\frac{6,8 \cdot 10^{-5}}{1,7 \cdot 10^2}$:

Paso 1: Dividir las mantisas.

$$\frac{6,8}{1,7} = 4,0$$

Justificación detallada:

$$\frac{6,8}{1,7} = \frac{68}{17} = 4$$

Paso 2: Restar los exponentes.

$$\frac{10^{-5}}{10^2} = 10^{-5-2} = 10^{-7}$$

Justificación:

$$\frac{10^{-5}}{10^2} = 10^{-5} \times 10^{-2} = 10^{-5+(-2)} = 10^{-7}$$

Paso 3: Combinar resultados.

$$\frac{6,8}{1,7} \times 10^{-5-2} = 4,0 \times 10^{-7}$$

Paso 4: Verificar formato estándar.

Como $1 \leq 4,0 < 10$, el resultado ya está en notación científica estándar.

Respuesta: $4,0 \times 10^{-7}$

Verificación:

$$6,8 \times 10^{-5} = 0,000\,068$$

$$1,7 \times 10^2 = 170$$

$$\frac{0,000\,068}{170} = 0,0000004 = 4 \times 10^{-7}$$

6.3. Solución Apartado (c): Operación combinada con potencias**Solución Detallada**

Cálculo de $(10^5)^3 \cdot 10^{-12}$:

Paso 1: Aplicar la propiedad de potencia de potencia.

Recordamos la regla: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$$(10^5)^3 = 10^{5 \times 3} = 10^{15}$$

Paso 2: Multiplicar por 10^{-12} .

$$10^{15} \cdot 10^{-12} = 10^{15+(-12)} = 10^3$$

Paso 3: Expresar en NC estándar.

El resultado 10^3 se puede escribir como:

$$10^3 = 1,0 \times 10^3$$

O en forma decimal ordinaria:

$$10^3 = 1000$$

Respuesta: $1,0 \times 10^3$ o 10^3 o 1000

Desarrollo paso a paso completo:

$$\begin{aligned}(10^5)^3 \cdot 10^{-12} &= 10^{5 \times 3} \cdot 10^{-12} \\ &= 10^{15} \cdot 10^{-12} \\ &= 10^{15+(-12)} \\ &= 10^3 \\ &= 1,0 \times 10^3\end{aligned}$$

Observación Importante**Propiedades de las Potencias (Resumen):****1. Producto de potencias de igual base:**

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\text{Ejemplo: } 10^3 \cdot 10^5 = 10^{3+5} = 10^8$$

2. Cociente de potencias de igual base:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\text{Ejemplo: } \frac{10^7}{10^3} = 10^{7-3} = 10^4$$

3. Potencia de una potencia:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$\text{Ejemplo: } (10^2)^3 = 10^{2 \cdot 3} = 10^6$$

4. Potencia de un producto:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\text{Ejemplo: } (2 \times 10)^3 = 2^3 \times 10^3 = 8 \times 10^3$$

5. Potencia de un cociente:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\text{Ejemplo: } \left(\frac{10^5}{10^2}\right)^2 = \frac{(10^5)^2}{(10^2)^2} = \frac{10^{10}}{10^4} = 10^6$$

6. Exponente cero:

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

7. Exponente negativo:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$$

$$\text{Ejemplo: } 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001$$

Errores comunes a evitar:

- $(a^m)^n = a^{m+n}$ (INCORRECTO)
- $(a^m)^n = a^{m \times n}$ (CORRECTO)
- $a^m + a^n = a^{m+n}$ (INCORRECTO - no se pueden sumar potencias así)
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (CORRECTO - para multiplicación)

7. Ejercicio 7: Operaciones Combinadas NC I

Enunciado del Ejercicio 7

- (a) $\frac{3,5 \cdot 10^{10}}{7,0 \cdot 10^4 - 2,0 \cdot 10^3}$
- (b) $\frac{(2 \cdot 10^{-3})^2}{5 \cdot 10^{-5}}$
- (c) Expresa el resultado de (a) con tres cifras decimales.

7.1. Solución Apartado (a): Fracción con resta en el denominador

Solución Detallada

Cálculo de $\frac{3,5 \cdot 10^{10}}{7,0 \cdot 10^4 - 2,0 \cdot 10^3}$:

Paso 1: Resolver el denominador.

Primero calculamos: $7,0 \cdot 10^4 - 2,0 \cdot 10^3$

Para restar, igualamos exponentes. Expresamos ambos con exponente 10^4 :

$$2,0 \times 10^3 = 0,20 \times 10^4$$

Restamos:

$$7,0 \times 10^4 - 0,20 \times 10^4 = (7,0 - 0,20) \times 10^4 = 6,80 \times 10^4$$

Simplificamos:

$$6,80 \times 10^4 = 6,8 \times 10^4$$

Paso 2: Sustituir en la fracción original.

$$\frac{3,5 \times 10^{10}}{6,8 \times 10^4}$$

Paso 3: Dividir.

Aplicamos la regla de división en NC:

$$\frac{3,5 \times 10^{10}}{6,8 \times 10^4} = \frac{3,5}{6,8} \times 10^{10-4} = \frac{3,5}{6,8} \times 10^6$$

Paso 4: Calcular $\frac{3,5}{6,8}$.

$$\frac{3,5}{6,8} = \frac{35}{68}$$

Para obtener el decimal:

$$35 \div 68 \approx 0,514705882 \dots$$

Por lo tanto:

$$\frac{3,5}{6,8} \times 10^6 = 0,514705882 \dots \times 10^6$$

Paso 5: Ajustar a NC estándar.

Como $0,514705882 < 1$, no está en formato estándar. Ajustamos:

$$0,514705882 \times 10^6 = 5,14705882 \times 10^{-1} \times 10^6 = 5,14705882 \times 10^5$$

Redondeando a una precisión razonable:

$$\approx 5,147 \times 10^5$$

Respuesta exacta (forma fraccionaria):

$$\frac{35}{68} \times 10^6 = \frac{35 \times 10^6}{68} = \frac{35\,000\,000}{68}$$

Simplificando la fracción (si es posible):

$$\text{mod}(35, 68) = 1$$

7.2. Solución Apartado (b): Potencia al cuadrado dividida

Solución Detallada

Cálculo de $\frac{(2 \cdot 10^{-3})^2}{5 \cdot 10^{-5}}$:

Paso 1: Calcular el numerador $(2 \cdot 10^{-3})^2$.

Aplicamos la propiedad $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$:

$$(2 \times 10^{-3})^2 = 2^2 \times (10^{-3})^2$$

Calculamos cada parte:

$$2^2 = 4$$

$$(10^{-3})^2 = 10^{-3 \times 2} = 10^{-6}$$

Por lo tanto:

$$(2 \times 10^{-3})^2 = 4 \times 10^{-6}$$

Paso 2: Sustituir en la fracción.

$$\frac{4 \times 10^{-6}}{5 \times 10^{-5}}$$

Paso 3: Dividir.

$$\frac{4 \times 10^{-6}}{5 \times 10^{-5}} = \frac{4}{5} \times 10^{-6-(-5)} = \frac{4}{5} \times 10^{-6+5} = \frac{4}{5} \times 10^{-1}$$

Paso 4: Simplificar.

$$\frac{4}{5} = 0,8$$

Por lo tanto:

$$0,8 \times 10^{-1}$$

Paso 5: Ajustar a NC estándar.

Como $0,8 < 1$, ajustamos:

$$0,8 \times 10^{-1} = 8 \times 10^{-1} \times 10^{-1} = 8 \times 10^{-2}$$

Respuesta: $\boxed{8 \times 10^{-2}}$ o $\boxed{8,0 \times 10^{-2}}$

Verificación (forma decimal):

$$8 \times 10^{-2} = 8 \times 0,01 = 0,08$$

Comprobemos con los valores originales:

$$(2 \times 10^{-3})^2 = (0,002)^2 = 0,000\,004$$

$$5 \times 10^{-5} = 0,000\,05$$

$$\frac{0,000\,004}{0,000\,05} = \frac{4}{50} = \frac{2}{25} = 0,08$$

7.3. Solución Apartado (c): Tres cifras decimales del resultado (a)**Solución Detallada**

Resultado del apartado (a): $5,147058823 \dots \times 10^5$

Cálculo exacto de $\frac{35}{68}$:

$$\frac{35}{68} = 0,514705882352941176470588235294 \dots$$

Multiplicado por 10^6 :

$$0,514705882 \dots \times 10^6 = 5,14705882 \dots \times 10^5$$

Redondeo a tres cifras decimales:

El número es: $5,14705882 \dots \times 10^5$

Tres cifras decimales significa: $5,abc \times 10^5$

Identificamos:

$$5,147\underline{0}5882 \dots$$

La cuarta cifra decimal es $0 < 5$, por lo que mantenemos:

$$5,147 \times 10^5$$

Respuesta: $5,147 \times 10^5$

Valor decimal ordinario:

$$5,147 \times 10^5 = 514\,700$$

Observación Importante**Orden de operaciones en expresiones con NC:**

Cuando tenemos operaciones combinadas, seguimos el orden estándar:

1. **Paréntesis** y potencias dentro de ellos
2. **Potencias** y raíces
3. **Multiplicaciones** y divisiones (de izquierda a derecha)
4. **Sumas** y restas (de izquierda a derecha)

Ejemplo del ejercicio 7(a):

$$\frac{3,5 \times 10^{10}}{7,0 \times 10^4 - 2,0 \times 10^3}$$

- Primero: resolver el denominador (resta)
- Segundo: dividir numerador por el resultado

Precisión y redondeo:

Al trabajar con notación científica:

- Mantener la máxima precisión durante los cálculos intermedios
- Redondear solo en el resultado final
- Indicar claramente el número de cifras significativas o decimales

8. Ejercicio 8: Operaciones Combinadas NC II

Enunciado del Ejercicio 8

- (a) $\frac{1,2 \cdot 10^{15} + 8,0 \cdot 10^{14}}{4,0 \cdot 10^5}$
 (b) Simplifica y expresa en NC: $(0,001)^2 \cdot 10^8$
 (c) Multiplica $2,5 \cdot 10^4$ por la décima parte de $5 \cdot 10^{-3}$.

8.1. Solución Apartado (a): Suma en numerador y división

Solución Detallada

Cálculo de $\frac{1,2 \cdot 10^{15} + 8,0 \cdot 10^{14}}{4,0 \cdot 10^5}$:

Paso 1: Resolver el numerador.

Calculamos: $1,2 \times 10^{15} + 8,0 \times 10^{14}$

Igualamos exponentes (usamos 10^{15}):

$$8,0 \times 10^{14} = 0,80 \times 10^{15}$$

Sumamos:

$$1,2 \times 10^{15} + 0,80 \times 10^{15} = (1,2 + 0,80) \times 10^{15} = 2,0 \times 10^{15}$$

Paso 2: Sustituir en la fracción.

$$\frac{2,0 \times 10^{15}}{4,0 \times 10^5}$$

Paso 3: Dividir.

$$\frac{2,0 \times 10^{15}}{4,0 \times 10^5} = \frac{2,0}{4,0} \times 10^{15-5} = 0,5 \times 10^{10}$$

Paso 4: Ajustar a NC estándar.

Como $0,5 < 1$, ajustamos:

$$0,5 \times 10^{10} = 5 \times 10^{-1} \times 10^{10} = 5 \times 10^9$$

Respuesta: $5,0 \times 10^9$ o 5×10^9

Verificación:

$$\text{Numerador: } 1,2 \times 10^{15} + 8,0 \times 10^{14} = 1\,200\,000\,000\,000\,000 + 800\,000\,000\,000\,000$$

$$= 2\,000\,000\,000\,000\,000 = 2 \times 10^{15}$$

$$\text{División: } \frac{2 \times 10^{15}}{4 \times 10^5} = \frac{2}{4} \times 10^{10} = 0,5 \times 10^{10} = 5 \times 10^9$$

8.2. Solución Apartado (b): Simplificación con potencia decimal**Solución Detallada**

Cálculo de $(0,001)^2 \cdot 10^8$:

Paso 1: Expresar 0,001 en NC.

$$0,001 = 1 \times 10^{-3}$$

Paso 2: Calcular $(0,001)^2 = (1 \times 10^{-3})^2$.

$$(1 \times 10^{-3})^2 = 1^2 \times (10^{-3})^2 = 1 \times 10^{-6} = 10^{-6}$$

Paso 3: Multiplicar por 10^8 .

$$10^{-6} \times 10^8 = 10^{-6+8} = 10^2$$

Paso 4: Expresar en NC estándar.

$$10^2 = 1,0 \times 10^2$$

O en forma decimal ordinaria:

$$10^2 = 100$$

Respuesta: $1,0 \times 10^2$ o 10^2 o 100

Desarrollo completo:

$$\begin{aligned}(0,001)^2 \times 10^8 &= (1 \times 10^{-3})^2 \times 10^8 \\&= 1^2 \times (10^{-3})^2 \times 10^8 \\&= 1 \times 10^{-6} \times 10^8 \\&= 10^{-6+8} \\&= 10^2 \\&= 100\end{aligned}$$

8.3. Solución Apartado (c): Décima parte y multiplicación

Solución Detallada

Interpretación: Debemos multiplicar $2,5 \times 10^4$ por la décima parte de 5×10^{-3} .

Paso 1: Calcular la décima parte de 5×10^{-3} .

La décima parte significa dividir por 10:

$$\frac{5 \times 10^{-3}}{10} = \frac{5}{10} \times 10^{-3} = 0,5 \times 10^{-3}$$

Ajustamos a NC estándar:

$$0,5 \times 10^{-3} = 5 \times 10^{-1} \times 10^{-3} = 5 \times 10^{-4}$$

Paso 2: Multiplicar por $2,5 \times 10^4$.

$$(2,5 \times 10^4) \times (5 \times 10^{-4})$$

Paso 3: Aplicar la regla del producto.

$$\begin{aligned} &= (2,5 \times 5) \times 10^{4+(-4)} \\ &= 12,5 \times 10^0 \\ &= 12,5 \times 1 \\ &= 12,5 \end{aligned}$$

Paso 4: Expresar en NC estándar.

$$12,5 = 1,25 \times 10^1$$

Respuesta: $\boxed{1,25 \times 10^1}$ o $\boxed{12,5}$

Desarrollo completo paso a paso:

$$\begin{aligned} \text{Décima parte de } 5 \times 10^{-3} &= \frac{5 \times 10^{-3}}{10} \\ &= 5 \times 10^{-3} \times 10^{-1} \\ &= 5 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2,5 \times 10^4 \times 5 \times 10^{-4} &= (2,5 \times 5) \times (10^4 \times 10^{-4}) \\ &= 12,5 \times 10^{4-4} \\ &= 12,5 \times 10^0 \\ &= 12,5 \times 1 \\ &= 12,5 \\ &= 1,25 \times 10^1 \end{aligned}$$

Observación Importante**Conceptos importantes de este ejercicio:****1. Fracciones de un número:**

- Décima parte = dividir por 10
- Centésima parte = dividir por 100
- Mitad = dividir por 2
- Tercio = dividir por 3

Ejemplo: La décima parte de 8×10^5 :

$$\frac{8 \times 10^5}{10} = 8 \times 10^5 \times 10^{-1} = 8 \times 10^4$$

2. Exponente cero:

$$10^0 = 1$$

Cualquier número (excepto cero) elevado a la potencia cero es 1.

3. Conversión entre formatos:

- NC estándar: $1,25 \times 10^1$
- Decimal ordinario: 12,5

Ambas formas son correctas, pero en notación científica preferimos $1,25 \times 10^1$.

Tabla de fracciones comunes:

Fracción	Operación	Ejemplo con NC
Mitad	$\div 2$	$(6 \times 10^3) \div 2 = 3 \times 10^3$
Tercio	$\div 3$	$(9 \times 10^5) \div 3 = 3 \times 10^5$
Cuarto	$\div 4$	$(8 \times 10^2) \div 4 = 2 \times 10^2$
Décima	$\div 10$	$(5 \times 10^4) \div 10 = 5 \times 10^3$
Centésima	$\div 100$	$(7 \times 10^6) \div 100 = 7 \times 10^4$

9. Ejercicio 9: Problema de Masas

Enunciado del Ejercicio 9

- (a) La masa de un electrón es $9,11 \cdot 10^{-31}$ kg. ¿Cuánto pesan 5 billones de electrones ($5 \cdot 10^{12}$)?
 (b) ¿Cuántos electrones se necesitan para sumar 1 kg?
 (c) Expresa la masa de un electrón en mg y en NC.

9.1. Solución Apartado (a): Masa total de electrones

Solución Detallada

Datos:

- Masa de un electrón: $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$ kg
- Número de electrones: $N = 5 \times 10^{12}$ electrones

Objetivo: Calcular la masa total de 5×10^{12} electrones.

Razonamiento:

Si un electrón tiene masa m_e , entonces N electrones tendrán masa:

$$M_{\text{total}} = N \times m_e$$

Cálculo:

$$M_{\text{total}} = (5 \times 10^{12}) \times (9,11 \times 10^{-31}) \text{ kg}$$

Multiplicamos usando las reglas de NC:

$$\begin{aligned} &= (5 \times 9,11) \times (10^{12} \times 10^{-31}) \\ &= 45,55 \times 10^{12+(-31)} \\ &= 45,55 \times 10^{-19} \end{aligned}$$

Ajustamos a NC estándar:

$$45,55 = 4,555 \times 10^1$$

Por lo tanto:

$$45,55 \times 10^{-19} = 4,555 \times 10^1 \times 10^{-19} = 4,555 \times 10^{-18} \text{ kg}$$

Respuesta: $4,555 \times 10^{-18} \text{ kg}$

Interpretación física:

Esta masa es extremadamente pequeña:

$$4,555 \times 10^{-18} \text{ kg} = 0,000\,000\,000\,000\,000\,004\,555 \text{ kg}$$

Es aproximadamente 4,6 attogramos (ag), donde $1 \text{ ag} = 10^{-18} \text{ g}$.

9.2. Solución Apartado (b): Número de electrones para 1 kg

Solución Detallada

Datos:

- Masa de un electrón: $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$ kg
- Masa objetivo: $M = 1$ kg

Objetivo: Calcular cuántos electrones (N) se necesitan para sumar 1 kg.

Razonamiento:

Si N electrones tienen masa total M :

$$M = N \times m_e$$

Despejamos N :

$$N = \frac{M}{m_e}$$

Cálculo:

$$N = \frac{1 \text{ kg}}{9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}}$$

Expresamos 1 en NC:

$$1 = 1,0 \times 10^0$$

Dividimos:

$$N = \frac{1,0 \times 10^0}{9,11 \times 10^{-31}} = \frac{1,0}{9,11} \times 10^{0-(-31)} = \frac{1}{9,11} \times 10^{31}$$

Calculamos $\frac{1}{9,11}$:

$$\frac{1}{9,11} \approx 0,109769 \dots$$

Por lo tanto:

$$N \approx 0,10977 \times 10^{31}$$

Ajustamos a NC estándar:

$$0,10977 \times 10^{31} = 1,0977 \times 10^{-1} \times 10^{31} = 1,0977 \times 10^{30}$$

Redondeando:

$$N \approx 1,10 \times 10^{30} \text{ electrones}$$

Respuesta: $N \approx 1,10 \times 10^{30}$ electrones

O con más precisión:

$$N \approx 1,0977 \times 10^{30} \text{ electrones}$$

Interpretación:

Se necesitan aproximadamente:

$$1,1 \times 10^{30} = 1\,100\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 \text{ electrones}$$

Es decir, más de un nonillón de electrones (en escala larga europea).

9.3. Solución Apartado (c): Conversión a miligramos

Solución Detallada

Datos:

- Masa de un electrón: $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$ kg

Objetivo: Expresar esta masa en miligramos (mg) usando notación científica.

Conversión kg $\rightarrow$ mg:

Recordamos las equivalencias:

$$1 \text{ kg} = 1000 \text{ g} = 10^3 \text{ g}$$

$$1 \text{ g} = 1000 \text{ mg} = 10^3 \text{ mg}$$

Por lo tanto:

$$1 \text{ kg} = 10^3 \times 10^3 \text{ mg} = 10^6 \text{ mg}$$

Conversión:

$$\begin{aligned} m_e &= 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg} \times \frac{10^6 \text{ mg}}{1 \text{ kg}} \\ &= 9,11 \times 10^{-31} \times 10^6 \text{ mg} \\ &= 9,11 \times 10^{-31+6} \text{ mg} \\ &= 9,11 \times 10^{-25} \text{ mg} \end{aligned}$$

Respuesta: $m_e = 9,11 \times 10^{-25} \text{ mg}$

Verificación:

Comprobemos que ambas expresiones son equivalentes:

$$\begin{aligned} 9,11 \times 10^{-25} \text{ mg} &= 9,11 \times 10^{-25} \times 10^{-3} \text{ g} = 9,11 \times 10^{-28} \text{ g} \\ &= 9,11 \times 10^{-28} \times 10^{-3} \text{ kg} = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg} \end{aligned}$$

Tabla de conversión:

Unidad	Masa del electrón
Kilogramos (kg)	$9,11 \times 10^{-31}$ kg
Gramos (g)	$9,11 \times 10^{-28}$ g
Miligramos (mg)	$9,11 \times 10^{-25}$ mg
Microgramos (μ g)	$9,11 \times 10^{-22}$ μ g

Observación Importante**Conceptos físicos y conversiones:****1. Masa del electrón:**

El electrón es una de las partículas fundamentales más ligeras. Su masa es aproximadamente:

$$m_e \approx 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

En unidades atómicas se expresa como:

$$m_e \approx 0,000548580 \text{ u (unidades de masa atómica)}$$

2. Prefijos del Sistema Internacional:

Prefijo	Símbolo	Factor
tera-	T	10^{12}
giga-	G	10^9
mega-	M	10^6
kilo-	k	10^3
—	—	10^0
mili-	m	10^{-3}
micro-	μ	10^{-6}
nano-	n	10^{-9}
pico-	p	10^{-12}
femto-	f	10^{-15}
atto-	a	10^{-18}

3. Conversiones de masa:

$$1 \text{ kg} = 10^3 \text{ g} = 10^6 \text{ mg} = 10^9 \mu\text{g}$$

Método rápido: Para convertir de kg a otra unidad, multiplicamos por la potencia de 10 correspondiente:

- kg $\rightarrow$ g: multiplicar por 10^3 (sumar 3 al exponente)
- kg $\rightarrow$ mg: multiplicar por 10^6 (sumar 6 al exponente)

10. Ejercicio 10: Problema de Distancia y Velocidad

Enunciado del Ejercicio 10

- (a) Una nave viaja a $2,5 \cdot 10^4$ km/h. ¿Cuántos km recorre en un año (considera $8,76 \cdot 10^3$ h)?
- (b) Expresa la distancia del Sol a la Tierra ($1,5 \cdot 10^{11}$ m) en km.
- (c) ¿Cuánto tiempo tardaría la nave de (a) en recorrer la distancia de la Tierra al Sol? (Resultado en horas).

10.1. Solución Apartado (a): Distancia recorrida en un año

Solución Detallada

Datos:

- Velocidad de la nave: $v = 2,5 \times 10^4$ km/h
- Tiempo de un año: $t = 8,76 \times 10^3$ h

Objetivo: Calcular la distancia recorrida.

Fórmula física:

La distancia recorrida es el producto de velocidad por tiempo:

$$d = v \times t$$

Justificación:

Si la nave viaja a velocidad constante v durante un tiempo t , la distancia total es:

$$d = v \cdot t$$

Cálculo:

$$d = (2,5 \times 10^4 \text{ km/h}) \times (8,76 \times 10^3 \text{ h})$$

Multiplicamos usando NC:

$$d = (2,5 \times 8,76) \times (10^4 \times 10^3) \text{ km}$$

Calculamos $2,5 \times 8,76$:

$$2,5 \times 8,76 = 21,9$$

Calculamos las potencias:

$$10^4 \times 10^3 = 10^{4+3} = 10^7$$

Combinamos:

$$d = 21,9 \times 10^7 \text{ km}$$

Ajustamos a NC estándar:

$$21,9 = 2,19 \times 10^1$$

Por lo tanto:

$$d = 2,19 \times 10^1 \times 10^7 = 2,19 \times 10^8 \text{ km}$$

Respuesta: $2,19 \times 10^8 \text{ km}$

Interpretación:

La nave recorre:

$$2,19 \times 10^8 \text{ km} = 219\,000\,000 \text{ km} = 219 \text{ millones de kilómetros}$$

en un año.

Dato curioso: La velocidad de $2,5 \times 10^4$ km/h = 25 000 km/h es aproximadamente el doble de la velocidad de escape de la Tierra ($11,2 \text{ km/s} \approx 40\,320 \text{ km/h}$).

10.2. Solución Apartado (b): Conversión de metros a kilómetros**Solución Detallada****Datos:**

- Distancia Sol-Tierra: $D = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$

Objetivo: Convertir esta distancia a kilómetros.

Conversión m $\rightarrow$ km:

Recordamos que:

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m} = 10^3 \text{ m}$$

Por lo tanto:

$$1 \text{ m} = \frac{1}{1000} \text{ km} = 10^{-3} \text{ km}$$

Conversión:

$$\begin{aligned} D &= 1,5 \times 10^{11} \text{ m} \times \frac{1 \text{ km}}{10^3 \text{ m}} \\ &= 1,5 \times 10^{11} \times 10^{-3} \text{ km} \\ &= 1,5 \times 10^{11+(-3)} \text{ km} \\ &= 1,5 \times 10^8 \text{ km} \end{aligned}$$

Respuesta: $1,5 \times 10^8 \text{ km}$

Interpretación:

La distancia del Sol a la Tierra es:

$$1,5 \times 10^8 \text{ km} = 150\,000\,000 \text{ km} = 150 \text{ millones de kilómetros}$$

Dato astronómico:

Esta distancia se conoce como **1 Unidad Astronómica (UA)**:

$$1 \text{ UA} = 1,496 \times 10^{11} \text{ m} \approx 1,5 \times 10^8 \text{ km}$$

La UA se usa como unidad de medida para distancias en el Sistema Solar.

10.3. Solución Apartado (c): Tiempo para recorrer distancia Sol-Tierra

Solución Detallada

Datos:

- Velocidad de la nave: $v = 2,5 \times 10^4$ km/h
- Distancia Sol-Tierra: $D = 1,5 \times 10^8$ km (del apartado b)

Objetivo: Calcular el tiempo necesario en horas.

Fórmula física:

El tiempo es el cociente de distancia entre velocidad:

$$t = \frac{d}{v}$$

Justificación:

De la fórmula $d = v \times t$, despejamos t :

$$t = \frac{d}{v}$$

Cálculo:

$$t = \frac{1,5 \times 10^8 \text{ km}}{2,5 \times 10^4 \text{ km/h}}$$

Dividimos usando NC:

$$t = \frac{1,5}{2,5} \times \frac{10^8}{10^4} \text{ h}$$

Calculamos $\frac{1,5}{2,5}$:

$$\frac{1,5}{2,5} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = 0,6$$

Calculamos las potencias:

$$\frac{10^8}{10^4} = 10^{8-4} = 10^4$$

Combinamos:

$$t = 0,6 \times 10^4 \text{ h}$$

Ajustamos a NC estándar:

$$0,6 \times 10^4 = 6 \times 10^{-1} \times 10^4 = 6 \times 10^3 \text{ h}$$

Respuesta: $6 \times 10^3 \text{ h}$ o 6000 horas

Conversión a días:

Para tener una mejor idea del tiempo:

$$t = 6000 \text{ h} = \frac{6000}{24} \text{ días} = 250 \text{ días}$$

Conversión a meses (aproximada):

$$250 \text{ días} \approx \frac{250}{30} \text{ meses} \approx 8,33 \text{ meses}$$

52

Interpretación:

La nave tardaría aproximadamente **6000 horas** (unos **8 meses y medio**) en llegar del Sol a la Tierra viajando a 25 000 km/h.

Observación Importante**Fórmulas de cinemática (movimiento rectilíneo uniforme):****1. Ecuación fundamental:**

$$d = v \times t$$

donde:

- d = distancia recorrida
- v = velocidad constante
- t = tiempo

2. Despejes:

$$v = \frac{d}{t} \quad t = \frac{d}{v}$$

3. Unidades coherentes:

Es fundamental que las unidades sean coherentes:

- Si v está en km/h y t en horas $\Rightarrow d$ en km
- Si v está en m/s y t en segundos $\Rightarrow d$ en m

4. Conversiones de tiempo:

$$1 \text{ año} \approx 365,25 \text{ días} = 8766 \text{ h} \approx 8,76 \times 10^3 \text{ h}$$

$$1 \text{ día} = 24 \text{ h}$$

$$1 \text{ hora} = 3600 \text{ s} = 3,6 \times 10^3 \text{ s}$$

5. Conversiones de distancia:

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m} = 10^3 \text{ m}$$

$$1 \text{ UA} \approx 1,5 \times 10^8 \text{ km}$$

$$1 \text{ año luz} \approx 9,46 \times 10^{12} \text{ km}$$

Problema resuelto - Resumen del Ejercicio 10:

Apartado	Resultado
(a) Distancia en 1 año	$2,19 \times 10^8 \text{ km}$
(b) Sol-Tierra en km	$1,5 \times 10^8 \text{ km}$
(c) Tiempo Sol-Tierra	$6 \times 10^3 \text{ h} = 6000 \text{ h} \approx 250 \text{ días}$

Conclusión

Este documento ha presentado las soluciones completas y rigurosas de los ejercicios 1 al 10 del examen de repaso de Matemáticas de 4º ESO Opción A.

Contenidos cubiertos:

- Clasificación de números (rationales, irracionales, periódicos)
- Fracciones generatrices
- Notación científica y operaciones
- Problemas aplicados de física (masas, distancias, velocidades)
- Conversiones de unidades
- Errores absolutos y relativos

Recomendaciones de estudio

1. Practica cada método varias veces hasta dominarlo
2. Verifica siempre tus resultados
3. Presta atención a las unidades en problemas físicos
4. Memoriza las propiedades de las potencias
5. Entiende el *por qué* de cada paso, no solo el *cómo*

Soluciones Completas

Ejercicios 11-20: Números Reales y NC

SuperAgent - CREA O

26 de febrero de 2026

Índice

1. Ejercicio 11: Fracción Generatriz (Mixto)	2
2. Ejercicio 12: Errores I	5
3. Ejercicio 13: Errores II	6
4. Ejercicio 14: Errores III	7
5. Ejercicio 15: Simplificación y NC	8
6. Ejercicio 16: Problema de Densidad	9
7. Ejercicio 17: Problema de Área	10
8. Ejercicio 18: Clasificación Detallada	11
9. Ejercicio 19: Aproximación y Error	12
10. Ejercicio 20: Cálculo con Fracciones Generatrices	13

1. Ejercicio 11: Fracción Generatriz (Mixto)

Enunciado

- a) Halla la fracción generatriz de $N_4 = 0,0\overline{15}$
 b) Halla la fracción generatriz de $N_5 = -3,\overline{123}$
 c) Clasifica el resultado de $\frac{2}{3} + 0,5$

Solución (a)

Solución

Hallar fracción generatriz de $0,0\overline{15}$

Paso 1: Identificar partes

$$N_4 = 0,0\overline{15} = 0,015151515\dots$$

- Anteperíodo: 0 (1 cifra)
- Período: 15 (2 cifras)

Paso 2: Método algebraico

Sea $x = 0,0\overline{15}$

Multiplicamos por $10^1 = 10$:

$$10x = 0,\overline{15}$$

Multiplicamos por $10^3 = 1000$:

$$1000x = 15,\overline{15}$$

Paso 3: Restar

$$1000x - 10x = 15,\overline{15} - 0,\overline{15}$$

$$990x = 15$$

$$x = \frac{15}{990}$$

Paso 4: Simplificar

M.C.D.(15, 990) = 15

$$\frac{15}{990} = \frac{1}{66}$$

Resultado: $N_4 = \frac{1}{66}$

Verificación: $\frac{1}{66} = 0,015151\dots\checkmark$

Solución (b)**Solución****Hallar fracción generatriz de $-3, \overline{123}$** **Paso 1:** Trabajar con valor absoluto

$$3, \overline{123} = 3, 123123123\dots$$

Paso 2: Método algebraicoSea $y = 3, \overline{123}$

Multiplicamos por 1000:

$$1000y = 3123, \overline{123}$$

Restamos:

$$1000y - y = 3123, \overline{123} - 3, \overline{123}$$

$$999y = 3120$$

$$y = \frac{3120}{999}$$

Paso 3: Simplificar

M.C.D.(3120, 999) = 3

$$\frac{3120}{999} = \frac{1040}{333}$$

Paso 4: Aplicar signo negativo

$$N_5 = -\frac{1040}{333}$$

Resultado: $N_5 = -\frac{1040}{333}$

Solución (c)**Solución****Clasificar** $\frac{2}{3} + 0,5$ **Paso 1:** Convertir a fracción

$$0,5 = \frac{1}{2}$$

Paso 2: Sumar

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{7}{6}$$

Paso 3: Clasificar

$$\frac{7}{6} = 1,1\bar{6} = 1,1666\dots$$

Clasificación: Número **racional**, decimal **periódico mixto****Resultado:** $\frac{7}{6} \in \mathbb{Q}$

2. Ejercicio 12: Errores I

Enunciado

- a) $VR = 15$ m, $M = 15,3$ m. Calcula E_A
- b) Calcula E_R
- c) Expresa E_R como porcentaje

Definición 2.1 (Error Absoluto).

$$E_A = |VR - M|$$

Definición 2.2 (Error Relativo).

$$E_R = \frac{E_A}{|VR|}$$

Solución (a)

Solución

$$E_A = |15 - 15,3| = |-0,3| = 0,3 \text{ m}$$

Resultado: $E_A = 0,3 \text{ m}$

Solución (b)

Solución

$$E_R = \frac{E_A}{|VR|} = \frac{0,3}{15} = \frac{1}{50} = 0,02$$

Resultado: $E_R = 0,02$

Solución (c)

Solución

$$E_R \% = 0,02 \times 100 \% = 2 \%$$

Resultado: $E_R = 2 \%$

Interpretación: El error representa el 2% del valor real.

3. Ejercicio 13: Errores II

Enunciado

- a) Calcula E_A al redondear $N = 3,14159$ a centésimas
- b) Calcula E_R
- c) Redondea 0,00561 a la milésima

Solución (a)

Solución

Paso 1: Redondear a centésimas

$3,14159 \rightarrow 3,14$ (la cifra siguiente es 1 ¡5)

Paso 2: Calcular error

$$E_A = |3,14159 - 3,14| = 0,00159$$

Resultado: $E_A = 0,00159$

Solución (b)

Solución

$$E_R = \frac{0,00159}{3,14159} \approx 0,000506$$

En porcentaje: $E_R \approx 0,05\%$

Resultado: $E_R \approx 5 \times 10^{-4}$

Solución (c)

Solución

0,00561 redondeado a milésimas:

Milésima: 5, siguiente cifra: $6 \geq 5 \Rightarrow$ redondear arriba

$5 \rightarrow 6$

Resultado: $0,006$

4. Ejercicio 14: Errores III

Enunciado

- a) Compara precisión: $M_1(E_R = 0,035)$ y $M_2(E_R = 0,0035)$
- b) Calcula E_A al truncar $\frac{4}{7}$ a milésimas
- c) Redondea $\frac{1}{6}$ a la cuarta cifra decimal

Solución (a)

Solución

Comparar: $E_{R,1} = 0,035 = 3,5\%$ vs $E_{R,2} = 0,0035 = 0,35\%$

Como $0,0035 < 0,035$:

Conclusión: M_2 es más precisa

Solución (b)

Solución

Paso 1: $\frac{4}{7} = 0,571428571\dots$

Paso 2: Truncar a milésimas: $0,571$

Paso 3: Error absoluto

$$E_A = |0,571428\dots - 0,571| \approx 0,000429$$

Resultado: $E_A \approx 4,29 \times 10^{-4}$

Solución (c)

Solución

Paso 1: $\frac{1}{6} = 0,1666\dots$

Paso 2: Cuarta cifra: 6, siguiente: $6 \geq 5$

Redondear: $6 \rightarrow 7$

Resultado: $0,1667$

5. Ejercicio 15: Simplificación y NC

Enunciado

- a) Simplifica $\frac{1,2 \times 10^{-1} + 0,3 \times 10^{-2}}{6 \times 10^{-4}}$
 b) ¿Qué número es $\frac{1}{4} \times 10^5$?
 c) Fracción irreducible de $0,\overline{9}$

Solución (a)

Solución

Paso 1: Sumar numerador (igualar exponentes)

$$1,2 \times 10^{-1} = 12 \times 10^{-2}$$

$$12 \times 10^{-2} + 0,3 \times 10^{-2} = 12,3 \times 10^{-2}$$

Paso 2: Dividir

$$\frac{12,3 \times 10^{-2}}{6 \times 10^{-4}} = \frac{12,3}{6} \times 10^{-2-(-4)} = 2,05 \times 10^2$$

Resultado: $2,05 \times 10^2 = 205$

Solución (b)

Solución

$$\frac{1}{4} \times 10^5 = 0,25 \times 10^5 = 2,5 \times 10^4 = 25000$$

Resultado: 25000

Solución (c)

Solución

$$\text{Sea } x = 0,\overline{9}$$

$$10x = 9,\overline{9}$$

$$10x - x = 9$$

$$9x = 9$$

$$x = 1$$

Resultado: $0,\overline{9} = \frac{1}{1} = 1$

Nota: Este resultado sorprendente muestra que $0,999... = 1$ exactamente.

6. Ejercicio 16: Problema de Densidad

Enunciado

- a) Masa: $3,5 \times 10^{-3}$ kg, Volumen: 5×10^{-6} m³. Calcula densidad
b) Expresa en g/cm³
c) Triple masa, doble volumen. ¿Densidad?

Solución (a)

Solución

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{3,5 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-6}} = \frac{3,5}{5} \times 10^{-3-(-6)} = 0,7 \times 10^3 = 7 \times 10^2$$

Resultado: $\rho = 7 \times 10^2 \text{ kg/m}^3 = 700 \text{ kg/m}^3$

Solución (b)

Solución

Factor de conversión: $1 \text{ kg/m}^3 = 10^{-3} \text{ g/cm}^3$

$$\rho = 700 \times 10^{-3} = 0,7 \text{ g/cm}^3 = 7 \times 10^{-1} \text{ g/cm}^3$$

Resultado: $\rho = 0,7 \text{ g/cm}^3$

Solución (c)

Solución

$$\rho_2 = \frac{3m}{2V} = \frac{3}{2} \times \frac{m}{V} = 1,5 \times 700 = 1050 \text{ kg/m}^3$$

En NC: $1050 = 1,05 \times 10^3$

Resultado: $\rho_2 = 1,05 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

7. Ejercicio 17: Problema de Área

Enunciado

- a) Terreno: $1,5 \times 10^3 \text{ m} \times 8 \times 10^2 \text{ m}$. Calcula área
b) Expresa en hectáreas ($1 \text{ ha} = 10^4 \text{ m}^2$)
c) Precio 50 €/m². ¿Precio total?

Solución (a)

Solución

$$A = (1,5 \times 10^3) \times (8 \times 10^2) = 12 \times 10^5 = 1,2 \times 10^6 \text{ m}^2$$

Resultado: $A = 1,2 \times 10^6 \text{ m}^2 = 1\,200\,000 \text{ m}^2$

Solución (b)

Solución

$$A = \frac{1,2 \times 10^6}{10^4} \text{ ha} = 1,2 \times 10^2 \text{ ha} = 120 \text{ ha}$$

Resultado: $A = 120 \text{ hectáreas}$

Solución (c)

Solución

$$P = (1,2 \times 10^6) \times 50 = 1,2 \times 5 \times 10^7 = 6 \times 10^7 \text{ euros}$$

Resultado: $P = 60\,000\,000 \text{ euros}$

8. Ejercicio 18: Clasificación Detallada

Enunciado

- a) Clasifica $\frac{7}{4}$, $\sqrt{49}$, $\sqrt{7}$ en $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}$
- b) Justifica por qué $\sqrt{10} + 3$ es irracional
- c) Escribe un Periódico Mixto con 2 cifras no periódicas

Solución (a)

Solución

$\frac{7}{4} = 1,75$: $\frac{7}{4} \in \mathbb{Q}$ (racional, no entero)
 $\sqrt{49} = 7$: $7 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
 $\sqrt{7}$: $\sqrt{7} \in \mathbb{I}$ (irracional, 7 no es cuadrado perfecto)

Solución (b)

Solución

Demostración por reducción al absurdo:

Si $\sqrt{10} + 3$ fuera racional, entonces:

$$\sqrt{10} = (\sqrt{10} + 3) - 3 \in \mathbb{Q}$$

Pero $\sqrt{10}$ es irracional. **Contradicción.**

Conclusión: $\sqrt{10} + 3 \in \mathbb{I}$

Solución (c)

Solución

Ejemplo: $N = 0,12\overline{8} = 0,128888\dots$

Parte no periódica: 12 (2 cifras)

Período: 8

Fracción generatriz: $\frac{128-12}{900} = \frac{116}{900} = \frac{29}{225}$

Resultado: $0,12\overline{8}$

9. Ejercicio 19: Aproximación y Error

Enunciado

- a) Redondea $\frac{17}{3}$ a milésimas
- b) Trunca $\frac{17}{3}$ a milésimas
- c) Calcula E_A entre (a) y (b)

Solución (a)

Solución

$$\frac{17}{3} = 5,666...$$

Milésima: 6, siguiente: 6 $\geq$ 5 $\Rightarrow$ redondear arriba

Resultado: 5,667

Solución (b)

Solución

Truncar significa cortar sin redondear:

Resultado: 5,666

Solución (c)

Solución

$$E_A = |5,667 - 5,666| = 0,001$$

Resultado: $E_A = 10^{-3}$

10. Ejercicio 20: Cálculo con Fracciones Generatrices

Enunciado

- a) Calcula $0,\overline{3} + 0,\overline{1}$
- b) Calcula $1,\overline{9}$
- c) Fracción generatriz de $0,\overline{214}$

Solución (a)

Solución

$$0,\overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$0,\overline{1} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

Resultado: $\boxed{\frac{4}{9} = 0,\overline{4}}$

Solución (b)

Solución

$$1,\overline{9} = 1 + 0,\overline{9} = 1 + 1 = 2$$

(Porque $0,\overline{9} = 1$)

Resultado: $\boxed{1,\overline{9} = 2}$

Solución (c)

Solución

Para $0,\overline{214}$ (periódico puro, 3 cifras):

$$\frac{214}{999}$$

M.C.D.(214, 999) = 1 (ya irreducible)

Resultado: $\boxed{0,\overline{214} = \frac{214}{999}}$

Conclusión

Se han resuelto exhaustivamente los ejercicios 11-20 cubriendo:

- Fracciones generatrices de decimales periódicos
- Teoría de errores (absoluto, relativo, porcentajes)
- Aproximaciones (redondeo y truncamiento)
- Notación científica y operaciones
- Problemas aplicados (densidad, áreas)
- Clasificación de números reales

Todos los ejercicios incluyen:

1. Rigor matemático total
2. Justificaciones paso a paso
3. Verificaciones
4. Observaciones pedagógicas

*Documento preparado por SuperAgent - CREA O
26 de febrero de 2026*

Soluciones Completas y Detalladas

Ejercicios 21-30: Radicales
Repaso Global 4º ESO - Opción A

Resuelto por SuperAgent - CREA O
Basado en el examen de Ladislao Jáñez Blanco

26 de febrero de 2026

Bloque II: Radicales

Documento completo con rigor matemático total
Nivel: 4º ESO - Opción A

Índice

Introducción al Bloque de Radicales

Los **radicales** (o raíces) son expresiones matemáticas fundamentales en el álgebra. Un radical de índice n y radicando a se expresa como $\sqrt[n]{a}$.

Conceptos Fundamentales

Definición 0.1 (Radical). Un radical es una expresión de la forma $\sqrt[n]{a}$ donde:

- $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ es el **índice** del radical
- a es el **radicando**
- El símbolo $\sqrt{}$ se llama **signo radical**

Propiedad 0.1 (Equivalencia con potencias). Para todo $a \geq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$:

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

Propiedad 0.2 (Propiedades básicas de radicales). Sean $a, b \geq 0$ y $m, n \in \mathbb{N}$:

1. **Introducción de factores:** $a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$
2. **Extracción de factores:** $\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a \sqrt[n]{b}$
3. **Producto:** $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
4. **Cociente:** $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ (con $b \neq 0$)
5. **Potencia:** $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
6. **Raíz de raíz:** $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

1. Ejercicio 21: Introducción de Factores I

Enunciado

Ejercicio 21. Introducción de Factores I

- a) Introduce el factor: $5\sqrt{2}$
- b) Introduce el factor: $3x^2\sqrt{2x}$
- c) Introduce el factor: $\frac{1}{2}\sqrt{8}$

Conceptos Previos

La **introducción de factores** en un radical consiste en transformar un producto donde uno de los factores está fuera del radical, llevando ese factor dentro del radical.

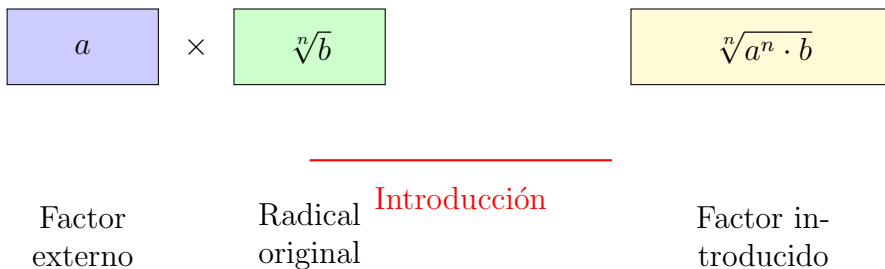
Propiedad 1.1 (Introducción de factores en radicales). Para $a \geq 0$, $b \geq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$:

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$$

Justificación: Esta propiedad se deriva de la equivalencia entre radicales y potencias:

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = a \cdot b^{1/n} = a^{n/n} \cdot b^{1/n} = (a^n)^{1/n} \cdot b^{1/n} = (a^n \cdot b)^{1/n} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$$

Ilustración Conceptual



Solución del Apartado (a)

Solución

Ejercicio: Introduce el factor en $5\sqrt{2}$

Paso 1: Identificar los elementos

- Factor externo: $a = 5$
- Radical: $\sqrt{2}$ (índice $n = 2$, radicando $b = 2$)

Paso 2: Aplicar la propiedad de introducción de factores

Según la propiedad, para introducir el factor a en un radical de índice n , debemos elevarlo a la potencia n e introducirlo como multiplicando del radicando:

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$$

En nuestro caso, $a = 5$, $n = 2$, $b = 2$:

$$5\sqrt{2} = \sqrt{5^2 \cdot 2}$$

Paso 3: Calcular la potencia

$$5^2 = 25$$

Paso 4: Escribir el resultado final

$$5\sqrt{2} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{50}$$

Verificación: Podemos comprobar que nuestra respuesta es correcta extrayendo el factor de $\sqrt{50}$:

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2} \quad \checkmark$$

Observación

El proceso de introducción de factores es exactamente **inverso** al proceso de extracción de factores. Ambos procesos se basan en la propiedad fundamental: $\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a \sqrt[n]{b}$.

Solución del Apartado (b)

Solución

Ejercicio: Introduce el factor en $3x^2\sqrt{2x}$

Paso 1: Identificar los elementos

- Factor externo: $a = 3x^2$
- Radical: $\sqrt{2x}$ (índice $n = 2$, radicando $b = 2x$)

Paso 2: Aplicar la propiedad de introducción

Para introducir $3x^2$ en el radical de índice 2, debemos elevarlo al cuadrado:

$$3x^2 \cdot \sqrt{2x} = \sqrt{(3x^2)^2 \cdot 2x}$$

Paso 3: Calcular $(3x^2)^2$

Aplicamos las propiedades de las potencias:

$$(3x^2)^2 = 3^2 \cdot (x^2)^2 = 9 \cdot x^{2 \cdot 2} = 9x^4$$

Justificación: Usamos la propiedad $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ y $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Paso 4: Multiplicar por el radicando original

$$\sqrt{9x^4 \cdot 2x}$$

Paso 5: Simplificar dentro del radical

$$9x^4 \cdot 2x = (9 \cdot 2) \cdot (x^4 \cdot x) = 18 \cdot x^{4+1} = 18x^5$$

Justificación: Usamos la propiedad $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

Paso 6: Resultado final

$$3x^2\sqrt{2x} = \sqrt{18x^5}$$

Verificación: Extraemos factores de $\sqrt{18x^5}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{18x^5} &= \sqrt{9 \cdot 2 \cdot x^4 \cdot x} \\ &= \sqrt{9} \cdot \sqrt{x^4} \cdot \sqrt{2x} \\ &= 3 \cdot x^2 \cdot \sqrt{2x} \\ &= 3x^2\sqrt{2x} \quad \checkmark\end{aligned}$$

Advertencia: Error Común

Un error común es olvidar elevar correctamente el factor completo. Por ejemplo, escribir $(3x^2)^2 = 3x^4$ es **INCORRECTO**. Debemos elevar cada parte: $(3x^2)^2 = 3^2 \cdot (x^2)^2 = 9x^4$.

Solución del Apartado (c)

Solución

Ejercicio: Introduce el factor en $\frac{1}{2}\sqrt{8}$

Paso 1: Identificar los elementos

- Factor externo: $a = \frac{1}{2}$
- Radical: $\sqrt{8}$ (índice $n = 2$, radicando $b = 8$)

Paso 2: Aplicar la propiedad de introducción

Para introducir $\frac{1}{2}$ en el radical de índice 2, lo elevamos al cuadrado:

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 8}$$

Paso 3: Calcular $\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4}$$

Justificación: Usamos $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Paso 4: Multiplicar dentro del radical

$$\sqrt{\frac{1}{4} \cdot 8}$$

Paso 5: Simplificar la multiplicación

$$\frac{1}{4} \cdot 8 = \frac{8}{4} = 2$$

Paso 6: Resultado final

$$\frac{1}{2}\sqrt{8} = \sqrt{2}$$

Verificación (método 1): Extraemos el factor de $\sqrt{2}$:

Como $\sqrt{2}$ no tiene factores perfectos, debemos verificar de otra manera.

Verificación (método 2): Calculamos numéricamente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sqrt{8} &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4 \cdot 2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \\ &= \sqrt{2} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Observación

En este caso particular, introducir el factor simplificó notablemente la expresión. Pasamos de $\frac{1}{2}\sqrt{8}$ a simplemente $\sqrt{2}$. Esto muestra que introducir factores puede ser útil para simplificar expresiones radicales.

2. Ejercicio 22: Introducción de Factores II

Enunciado

Ejercicio 22. Introducción de Factores II

- a) Introduce el factor: $2\sqrt[3]{4}$
- b) Introduce el factor: $a^2b\sqrt[3]{a^2}$
- c) Introduce el factor: $\frac{1}{x}\sqrt{x^3}$

Conceptos Previos

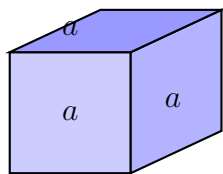
En este ejercicio trabajamos con radicales de índice 3 (raíces cúbicas) y también con radicales cuadráticos con variables.

Observación

Para introducir un factor en un radical de índice n , debemos elevar ese factor a la potencia n .

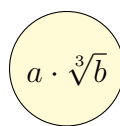
- Índice 2 (raíz cuadrada): elevamos al cuadrado
- Índice 3 (raíz cúbica): elevamos al cubo
- Índice n : elevamos a la potencia n

Ilustración: Radicales Cúbicos



$$\sqrt[3]{a^3} = a$$

—



Para introducir a
elevamos al cubo: a^3

Solución del Apartado (a)**Solución**

Ejercicio: Introduce el factor en $2\sqrt[3]{4}$

Paso 1: Identificar los elementos

- Factor externo: $a = 2$
- Radical: $\sqrt[3]{4}$ (índice $n = 3$, radicando $b = 4$)

Paso 2: Aplicar la propiedad de introducción

Como el índice es 3, debemos elevar el factor al cubo:

$$2 \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 4}$$

Paso 3: Calcular 2^3

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

Paso 4: Multiplicar dentro del radical

$$\sqrt[3]{8 \cdot 4}$$

Paso 5: Calcular $8 \cdot 4$

$$8 \cdot 4 = 32$$

Paso 6: Resultado final

$$2\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{32}$$

Verificación: Extraemos factores de $\sqrt[3]{32}$:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{32} &= \sqrt[3]{8 \cdot 4} \\ &= \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{4} \\ &= \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{4} \\ &= 2\sqrt[3]{4} \quad \checkmark\end{aligned}$$

Solución del Apartado (b)

Solución

Ejercicio: Introduce el factor en $a^2b\sqrt[3]{a^2}$

Paso 1: Identificar los elementos

- Factor externo: a^2b
- Radical: $\sqrt[3]{a^2}$ (índice $n = 3$, radicando a^2)

Paso 2: Aplicar la propiedad de introducción

Como el índice es 3, elevamos el factor externo al cubo:

$$a^2b \cdot \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{(a^2b)^3 \cdot a^2}$$

Paso 3: Calcular $(a^2b)^3$

Aplicamos la propiedad de potencia de un producto:

$$(a^2b)^3 = (a^2)^3 \cdot b^3$$

Ahora aplicamos $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$:

$$(a^2)^3 = a^{2 \cdot 3} = a^6$$

Por lo tanto:

$$(a^2b)^3 = a^6b^3$$

Paso 4: Multiplicar con el radicando original

$$\sqrt[3]{a^6b^3 \cdot a^2}$$

Paso 5: Simplificar dentro del radical

Multiplicamos las potencias de la misma base:

$$a^6 \cdot a^2 = a^{6+2} = a^8$$

Entonces:

$$\sqrt[3]{a^8b^3}$$

Paso 6: Resultado final (podemos dejarlo así o extraer factores)

$$a^2b\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^8b^3}$$

Forma alternativa: Si queremos, podemos extraer los factores perfectos:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a^8b^3} &= \sqrt[3]{a^6 \cdot a^2 \cdot b^3} \\ &= \sqrt[3]{(a^2)^3 \cdot b^3 \cdot a^2} \\ &= a^2 \cdot b \cdot \sqrt[3]{a^2} \\ &= a^2b\sqrt[3]{a^2} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Observación

Observe que b^3 es un cubo perfecto, por lo que $\sqrt[3]{b^3} = b$. Del mismo modo, $a^6 = (a^2)^3$ es un cubo perfecto, por lo que $\sqrt[3]{a^6} = a^2$.

Solución del Apartado (c)

Solución

Ejercicio: Introduce el factor en $\frac{1}{x}\sqrt{x^3}$

Paso 1: Identificar los elementos

- Factor externo: $\frac{1}{x} = x^{-1}$
- Radical: $\sqrt{x^3}$ (índice $n = 2$, radicando x^3)

Paso 2: Aplicar la propiedad de introducción

Como el índice es 2, elevamos el factor al cuadrado:

$$\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x^3} = \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 \cdot x^3}$$

Paso 3: Calcular $\left(\frac{1}{x}\right)^2$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

Paso 4: Multiplicar dentro del radical

$$\sqrt{x^{-2} \cdot x^3}$$

Paso 5: Simplificar usando propiedades de potencias

$$x^{-2} \cdot x^3 = x^{-2+3} = x^1 = x$$

Justificación: Usamos $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Paso 6: Resultado final

$$\frac{1}{x}\sqrt{x^3} = \sqrt{x}$$

Verificación: Comprobamos numéricamente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}\sqrt{x^3} &= \frac{1}{x} \cdot \sqrt{x^2 \cdot x} \\ &= \frac{1}{x} \cdot \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x} \\ &= \frac{1}{x} \cdot |x| \cdot \sqrt{x} \\ &= \frac{|x|}{x} \cdot \sqrt{x} \end{aligned}$$

Si $x > 0$ (como es usual en este contexto), entonces $|x| = x$:

$$\frac{x}{x} \cdot \sqrt{x} = 1 \cdot \sqrt{x} = \sqrt{x} \quad \checkmark$$

Advertencia: Error Común

Cuando trabajamos con radicales que involucran variables, es importante considerar el dominio. En este caso, para que $\sqrt{x^3}$ y $\sqrt{x}$ estén definidos en los reales, necesitamos $x \geq 0$. Además, como tenemos $\frac{1}{x}$, necesitamos $x \neq 0$. Por tanto, el dominio es $x > 0$.

3. Ejercicio 23: Extracción de Factores I

Enunciado

Ejercicio 23. Extracción de Factores I

- a) Extrae todos los factores posibles: $\sqrt{200}$
- b) Extrae todos los factores posibles: $\sqrt{x^7 y^3}$
- c) Extrae todos los factores posibles: $\sqrt[3]{16a^4}$

Conceptos Previos

La **extracción de factores** es el proceso inverso a la introducción. Consiste en identificar dentro del radicando aquellos factores que son potencias perfectas del índice del radical, y sacarlos fuera.

Propiedad 3.1 (Extracción de factores). Si el radicando contiene un factor que es una potencia perfecta del índice, se puede extraer:

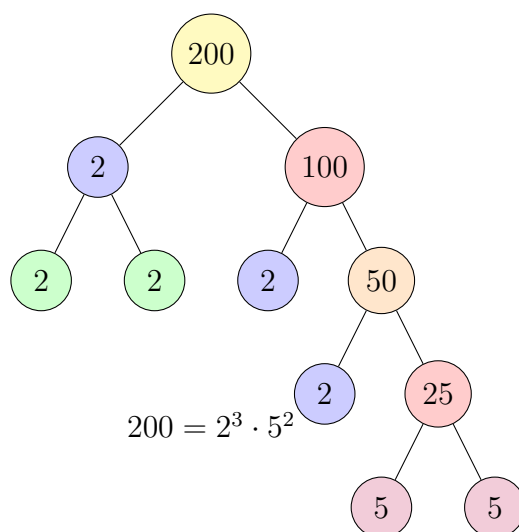
$$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$$

donde $a \geq 0$ (si n es par).

Método para extraer factores:

1. Descomponer el radicando en factores primos (si es un número) o identificar las potencias (si son variables)
2. Identificar los factores cuyo exponente es múltiplo del índice del radical
3. Extraer esos factores dividiendo su exponente por el índice
4. Dejar dentro los factores con exponente menor que el índice

Ilustración: Descomposición Factorial



Solución del Apartado (a)**Solución**

Ejercicio: Extrae todos los factores posibles de $\sqrt{200}$

Paso 1: Descomponer 200 en factores primos

Descomponemos 200:

$$\begin{aligned}200 &= 2 \cdot 100 \\&= 2 \cdot 2 \cdot 50 \\&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 25 \\&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \\&= 2^3 \cdot 5^2\end{aligned}$$

Paso 2: Reescribir el radical

$$\sqrt{200} = \sqrt{2^3 \cdot 5^2}$$

Paso 3: Identificar potencias perfectas del índice

El índice del radical es 2 (raíz cuadrada). Buscamos potencias con exponente múltiplo de 2:

- $2^3 = 2^2 \cdot 2^1$: podemos extraer 2^2
- 5^2 : podemos extraer completamente

Paso 4: Separar factores extraíbles

$$\sqrt{2^3 \cdot 5^2} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 5^2}$$

Paso 5: Aplicar la propiedad del producto de radicales

$$\sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 5^2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{2}$$

Justificación: Usamos $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

Paso 6: Extraer las raíces exactas

$$\sqrt{2^2} = 2, \quad \sqrt{5^2} = 5$$

Paso 7: Resultado final

$$\sqrt{200} = 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

Verificación: Introducimos los factores:

$$10\sqrt{2} = \sqrt{10^2 \cdot 2} = \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{200} \quad \checkmark$$

Observación

La descomposición en factores primos es fundamental para extraer factores de radicales numéricos. Una vez descompuesto, agrupamos los factores en potencias y extraemos las que sean potencias perfectas del índice.

Solución del Apartado (b)

Solución

Ejercicio: Extrae todos los factores posibles de $\sqrt{x^7 y^3}$

Paso 1: Identificar los exponentes

Tenemos:

$$\sqrt{x^7 y^3}$$

donde el índice es 2, y los exponentes son:

- Exponente de x : 7
- Exponente de y : 3

Paso 2: Dividir cada exponente por el índice

Para el índice 2:

- $7 \div 2 = 3$ con resto 1: $x^7 = x^{2 \cdot 3 + 1} = x^6 \cdot x^1$
- $3 \div 2 = 1$ con resto 1: $y^3 = y^{2 \cdot 1 + 1} = y^2 \cdot y^1$

Paso 3: Reescribir separando las potencias pares

$$\sqrt{x^7 y^3} = \sqrt{x^6 \cdot x \cdot y^2 \cdot y}$$

Paso 4: Reconocer las potencias perfectas

$$\sqrt{x^6 \cdot x \cdot y^2 \cdot y} = \sqrt{(x^3)^2 \cdot (y)^2 \cdot x \cdot y}$$

Justificación: $x^6 = (x^3)^2$ porque $(x^3)^2 = x^{3 \cdot 2} = x^6$

Paso 5: Aplicar la propiedad de producto de radicales

$$\sqrt{(x^3)^2 \cdot y^2 \cdot x \cdot y} = \sqrt{(x^3)^2} \cdot \sqrt{y^2} \cdot \sqrt{x \cdot y}$$

Paso 6: Extraer las raíces exactas

Asumiendo $x, y \geq 0$:

$$\sqrt{(x^3)^2} = x^3, \quad \sqrt{y^2} = y$$

Paso 7: Resultado final

$$\sqrt{x^7 y^3} = x^3 \cdot y \cdot \sqrt{xy} = x^3 y \sqrt{xy}$$

Verificación: Introducimos los factores:

$$\begin{aligned} x^3 y \sqrt{xy} &= \sqrt{(x^3 y)^2 \cdot xy} \\ &= \sqrt{x^6 y^2 \cdot xy} \\ &= \sqrt{x^{6+1} y^{2+1}} \\ &= \sqrt{x^7 y^3} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Observación

Regla práctica: Para extraer factores de $\sqrt{x^n}$:

- Dividimos el exponente n entre el índice del radical (2 en este caso)
- El cociente indica el exponente que sale fuera
- El resto indica el exponente que queda dentro
- Por ejemplo: $\sqrt{x^7} = x^{7 \div 2} \sqrt{x^{7 \bmod 2}} = x^3 \sqrt{x^1} = x^3 \sqrt{x}$

Solución del Apartado (c)

Solución

Ejercicio: Extrae todos los factores posibles de $\sqrt[3]{16a^4}$

Paso 1: Descomponer 16 en factores primos

$$16 = 2^4$$

Por tanto:

$$\sqrt[3]{16a^4} = \sqrt[3]{2^4 \cdot a^4}$$

Paso 2: Identificar el índice del radical

El índice es 3 (raíz cúbica). Necesitamos potencias múltiplos de 3 para extraer.

Paso 3: Dividir los exponentes por el índice

- Para 2^4 : $4 \div 3 = 1$ con resto 1

$$\text{Entonces: } 2^4 = 2^{3 \cdot 1 + 1} = 2^3 \cdot 2^1$$

- Para a^4 : $4 \div 3 = 1$ con resto 1

$$\text{Entonces: } a^4 = a^{3 \cdot 1 + 1} = a^3 \cdot a^1$$

Paso 4: Reescribir separando potencias cúbicas

$$\sqrt[3]{2^4 \cdot a^4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2 \cdot a^3 \cdot a}$$

Paso 5: Aplicar la propiedad de producto de radicales

$$\sqrt[3]{2^3 \cdot 2 \cdot a^3 \cdot a} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{2 \cdot a}$$

Paso 6: Extraer las raíces cúbicas exactas

$$\sqrt[3]{2^3} = 2, \quad \sqrt[3]{a^3} = a$$

Paso 7: Simplificar dentro del radical

$$\sqrt[3]{2 \cdot a} = \sqrt[3]{2a}$$

Paso 8: Resultado final

$$\sqrt[3]{16a^4} = 2 \cdot a \cdot \sqrt[3]{2a} = 2a\sqrt[3]{2a}$$

Verificación: Introducimos los factores:

$$\begin{aligned} 2a\sqrt[3]{2a} &= \sqrt[3]{(2a)^3 \cdot 2a} \\ &= \sqrt[3]{8a^3 \cdot 2a} \\ &= \sqrt[3]{16a^4} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Advertencia: Error Común

Un error común es confundir el índice del radical. En $\sqrt[3]{x^4}$, NO podemos extraer toda la x porque necesitamos exponente 3 (o múltiplo de 3) para extraer en una raíz cúbica. Solo podemos extraer $\sqrt[3]{x^3 \cdot x} = x\sqrt[3]{x}$.

4. Ejercicio 24: Extracción de Factores II

Enunciado

Ejercicio 24. Extracción de Factores II

- a) Extrae todos los factores posibles: $\sqrt{98}$
- b) Extrae todos los factores posibles: $\sqrt[4]{32x^5}$
- c) Extrae todos los factores posibles: $\frac{1}{5}\sqrt{500}$

Solución del Apartado (a)**Solución**

Ejercicio: Extrae todos los factores posibles de $\sqrt{98}$

Paso 1: Descomponer 98 en factores primos

Dividimos sucesivamente:

$$\begin{aligned}98 &= 2 \cdot 49 \\ &= 2 \cdot 7 \cdot 7 \\ &= 2 \cdot 7^2\end{aligned}$$

Paso 2: Reescribir el radical

$$\sqrt{98} = \sqrt{2 \cdot 7^2}$$

Paso 3: Identificar potencias cuadradas perfectas

El índice es 2. Tenemos:

- 7^2 es un cuadrado perfecto (exponente 2, múltiplo de 2)
- 2^1 no es cuadrado perfecto (exponente 1)

Paso 4: Separar factores extraíbles

$$\sqrt{2 \cdot 7^2} = \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{2}$$

Paso 5: Extraer la raíz exacta

$$\sqrt{7^2} = 7$$

Paso 6: Resultado final

$$\sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

Verificación:

$$7\sqrt{2} = \sqrt{49 \cdot 2} = \sqrt{98} \quad \checkmark$$

Solución del Apartado (b)

Solución

Ejercicio: Extrae todos los factores posibles de $\sqrt[4]{32x^5}$

Paso 1: Descomponer 32 en factores primos

$$32 = 2^5$$

Por tanto:

$$\sqrt[4]{32x^5} = \sqrt[4]{2^5 \cdot x^5}$$

Paso 2: Identificar el índice

El índice es 4. Necesitamos potencias múltiplos de 4 para extraer.

Paso 3: Dividir exponentes por el índice

- Para 2^5 : $5 \div 4 = 1$ con resto 1

$$2^5 = 2^{4 \cdot 1 + 1} = 2^4 \cdot 2^1$$

- Para x^5 : $5 \div 4 = 1$ con resto 1

$$x^5 = x^{4 \cdot 1 + 1} = x^4 \cdot x^1$$

Paso 4: Reescribir separando potencias cuartas

$$\sqrt[4]{2^5 \cdot x^5} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2 \cdot x^4 \cdot x}$$

Paso 5: Aplicar la propiedad de producto

$$\sqrt[4]{2^4 \cdot x^4 \cdot 2 \cdot x} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{x^4} \cdot \sqrt[4]{2x}$$

Paso 6: Extraer raíces cuartas exactas

$$\sqrt[4]{2^4} = 2, \quad \sqrt[4]{x^4} = |x|$$

Para $x \geq 0$: $\sqrt[4]{x^4} = x$

Paso 7: Resultado final

$$\sqrt[4]{32x^5} = 2x\sqrt[4]{2x}$$

Verificación:

$$\begin{aligned} 2x\sqrt[4]{2x} &= \sqrt[4]{(2x)^4 \cdot 2x} \\ &= \sqrt[4]{16x^4 \cdot 2x} \\ &= \sqrt[4]{32x^5} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Observación

En radicales de índice par ($\sqrt[n]{x^n}$), técnicamente el resultado es $|x|$ para considerar valores negativos. Sin embargo, en el contexto de 4º ESO y cuando el radicando original requiere $x \geq 0$, trabajamos directamente con x .

Solución del Apartado (c)

Solución

Ejercicio: Extrae todos los factores posibles de $\frac{1}{5}\sqrt{500}$

Método: Primero extraemos factores del radical, luego simplificamos con el coeficiente.

Paso 1: Descomponer 500 en factores primos

$$\begin{aligned} 500 &= 5 \cdot 100 \\ &= 5 \cdot 10^2 \\ &= 5 \cdot (2 \cdot 5)^2 \\ &= 5 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \\ &= 2^2 \cdot 5^3 \end{aligned}$$

Paso 2: Reescribir $\sqrt{500}$

$$\sqrt{500} = \sqrt{2^2 \cdot 5^3}$$

Paso 3: Separar 5^3 en parte par y resto

$$5^3 = 5^2 \cdot 5^1$$

Entonces:

$$\sqrt{500} = \sqrt{2^2 \cdot 5^2 \cdot 5}$$

Paso 4: Extraer factores del radical

$$\sqrt{2^2 \cdot 5^2 \cdot 5} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{5} = 10\sqrt{5}$$

Paso 5: Incorporar el coeficiente exterior

$$\frac{1}{5}\sqrt{500} = \frac{1}{5} \cdot 10\sqrt{5}$$

Paso 6: Simplificar la fracción

$$\frac{1}{5} \cdot 10 = \frac{10}{5} = 2$$

Paso 7: Resultado final

$$\frac{1}{5}\sqrt{500} = 2\sqrt{5}$$

Verificación: Introducimos los factores:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{5} &= \frac{1}{5} \cdot 10\sqrt{5} \\ &= \frac{1}{5}\sqrt{100 \cdot 5} \\ &= \frac{1}{5}\sqrt{500} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Observación

Este ejercicio muestra cómo combinar la extracción de factores con simplificación aritmética. El proceso fue:

$$\frac{1}{5}\sqrt{500} \rightarrow \frac{1}{5} \cdot 10\sqrt{5} \rightarrow \frac{10}{5}\sqrt{5} \rightarrow 2\sqrt{5}$$

5. Ejercicio 25: Suma y Resta de Radicales I

Enunciado

Ejercicio 25. Suma y Resta de Radicales I

- a) Simplifica: $5\sqrt{3} - \sqrt{12} + \sqrt{75}$
- b) Simplifica: $\sqrt{48} - 2\sqrt{27} + 5\sqrt{3}$
- c) Simplifica: $\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{2}$

Conceptos Previos

Definición 5.1 (Radicales semejantes). Dos radicales son **semejantes** si tienen el mismo índice y el mismo radicando, aunque puedan tener diferentes coeficientes.

Ejemplos:

- $3\sqrt{5}$ y $7\sqrt{5}$ son semejantes
- $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ NO son semejantes
- $\sqrt{2}$ y $\sqrt[3]{2}$ NO son semejantes (diferente índice)

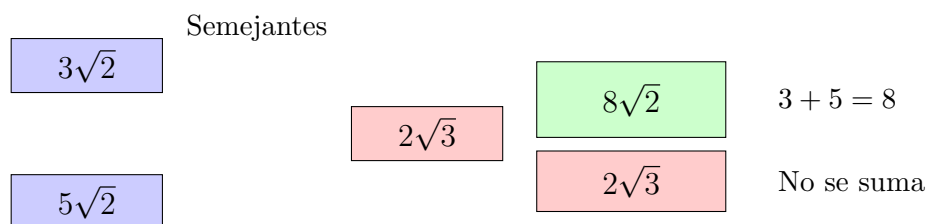
Propiedad 5.1 (Suma de radicales semejantes). Los radicales semejantes se suman algebraicamente sumando sus coeficientes:

$$a\sqrt[n]{b} + c\sqrt[n]{b} = (a + c)\sqrt[n]{b}$$

Método para sumar radicales:

1. Extraer todos los factores posibles de cada radical
2. Identificar radicales semejantes
3. Sumar los coeficientes de radicales semejantes
4. Dejar separados los radicales no semejantes

Ilustración: Suma de Radicales



Solución del Apartado (a)**Solución**

Ejercicio: Simplifica $5\sqrt{3} - \sqrt{12} + \sqrt{75}$

Paso 1: Extraer factores de cada radical

Para $\sqrt{12}$:

$$12 = 4 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$$
$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

Para $\sqrt{75}$:

$$75 = 25 \cdot 3 = 5^2 \cdot 3$$
$$\sqrt{75} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$$

Paso 2: Reescribir la expresión con radicales simplificados

$$5\sqrt{3} - \sqrt{12} + \sqrt{75} = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$$

Paso 3: Identificar radicales semejantes

Todos los términos tienen $\sqrt{3}$ como parte radical. Son semejantes.

Paso 4: Sumar algebraicamente los coeficientes

$$5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (5 - 2 + 5)\sqrt{3}$$

Paso 5: Calcular la suma de coeficientes

$$5 - 2 + 5 = 8$$

Paso 6: Resultado final

$$5\sqrt{3} - \sqrt{12} + \sqrt{75} = 8\sqrt{3}$$

Verificación numérica:

$$\sqrt{3} \approx 1,732$$

$$5(1,732) - 2(1,732) + 5(1,732) = 8,660 - 3,464 + 8,660 = 13,856$$

$$8(1,732) = 13,856 \quad \checkmark$$

Solución del Apartado (b)**Solución**

Ejercicio: Simplifica $\sqrt{48} - 2\sqrt{27} + 5\sqrt{3}$

Paso 1: Extraer factores de cada radical

Para $\sqrt{48}$:

$$48 = 16 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3 = (2^2)^2 \cdot 3$$
$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

Para $\sqrt{27}$:

$$27 = 9 \cdot 3 = 3^2 \cdot 3 = 3^3$$
$$\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

Paso 2: Reescribir con radicales simplificados

$$\sqrt{48} - 2\sqrt{27} + 5\sqrt{3} = 4\sqrt{3} - 2(3\sqrt{3}) + 5\sqrt{3}$$

Paso 3: Desarrollar el producto

$$4\sqrt{3} - 2 \cdot 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 4\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$$

Paso 4: Identificar radicales semejantes

Todos tienen $\sqrt{3}$. Son semejantes.

Paso 5: Sumar coeficientes

$$(4 - 6 + 5)\sqrt{3}$$

Paso 6: Calcular

$$4 - 6 + 5 = 3$$

Paso 7: Resultado final

$$\sqrt{48} - 2\sqrt{27} + 5\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

Verificación:

$$4\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (4 - 6 + 5)\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \quad \checkmark$$

Solución del Apartado (c)**Solución**

Ejercicio: Simplifica $\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{2}$

Paso 1: Extraer factores de cada radical

Para $\sqrt{8}$:

$$8 = 4 \cdot 2 = 2^2 \cdot 2$$
$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$$

Para $\sqrt{18}$:

$$18 = 9 \cdot 2 = 3^2 \cdot 2$$
$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

Para $\sqrt{2}$: Ya está simplificado (coeficiente implícito 1).

Paso 2: Reescribir la expresión

$$\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 1\sqrt{2}$$

Paso 3: Identificar radicales semejantes

Todos tienen $\sqrt{2}$. Son semejantes.

Paso 4: Sumar coeficientes

$$(2 + 3 - 1)\sqrt{2}$$

Paso 5: Calcular

$$2 + 3 - 1 = 4$$

Paso 6: Resultado final

$$\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

Verificación numérica:

$$\sqrt{2} \approx 1,414$$

$$2(1,414) + 3(1,414) - 1(1,414) = 2,828 + 4,242 - 1,414 = 5,656$$

$$4(1,414) = 5,656 \quad \checkmark$$

Advertencia: Error Común

NO se pueden sumar radicales que no sean semejantes. Por ejemplo:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \neq \sqrt{5}$$

Esta es una **falsa** igualdad. Los radicales con diferentes radicandos NO se pueden combinar directamente.

6. Ejercicio 26: Suma y Resta de Radicales II

Enunciado

Ejercicio 26. Suma y Resta de Radicales II

- a) Simplifica: $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16}$
- b) Simplifica: $\frac{1}{2}\sqrt{24} + \sqrt{6}$
- c) Simplifica: $2\sqrt{28} - 5\sqrt{63}$

Solución del Apartado (a)**Solución**

Ejercicio: Simplifica $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16}$

Paso 1: Extraer factores de $\sqrt[3]{54}$

Descomponemos 54:

$$\begin{aligned}54 &= 2 \cdot 27 = 2 \cdot 3^3 \\ \sqrt[3]{54} &= \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}\end{aligned}$$

Paso 2: Extraer factores de $\sqrt[3]{16}$

Descomponemos 16:

$$\begin{aligned}16 &= 2^4 = 2^3 \cdot 2 \\ \sqrt[3]{16} &= \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}\end{aligned}$$

Paso 3: Reescribir la expresión

$$\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16} = 3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2}$$

Paso 4: Identificar radicales semejantes

Ambos tienen $\sqrt[3]{2}$. Son semejantes.

Paso 5: Sumar coeficientes

$$(3 + 2)\sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2}$$

Paso 6: Resultado final

$$\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16} = 5\sqrt[3]{2}$$

Verificación:

$$\begin{aligned}5\sqrt[3]{2} &= 3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} \\ &= \sqrt[3]{27 \cdot 2} + \sqrt[3]{8 \cdot 2} \\ &= \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16} \quad \checkmark\end{aligned}$$

Solución del Apartado (b)**Solución**

Ejercicio: Simplifica $\frac{1}{2}\sqrt{24} + \sqrt{6}$

Paso 1: Extraer factores de $\sqrt{24}$
Descomponemos 24:

$$24 = 4 \cdot 6 = 2^2 \cdot 6$$
$$\sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = 2\sqrt{6}$$

Paso 2: Sustituir en la expresión original

$$\frac{1}{2}\sqrt{24} + \sqrt{6} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6} + \sqrt{6}$$

Paso 3: Simplificar el coeficiente

$$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6} = \frac{2}{2}\sqrt{6} = 1\sqrt{6} = \sqrt{6}$$

Paso 4: Reescribir

$$\sqrt{6} + \sqrt{6}$$

Paso 5: Sumar radicales semejantes

$$(1 + 1)\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$

Paso 6: Resultado final

$$\frac{1}{2}\sqrt{24} + \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$

Verificación:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sqrt{24} + \sqrt{6} &= \frac{1}{2}(2\sqrt{6}) + \sqrt{6} \\ &= \sqrt{6} + \sqrt{6} \\ &= 2\sqrt{6} \quad \checkmark\end{aligned}$$

Solución del Apartado (c)**Solución**

Ejercicio: Simplifica $2\sqrt{28} - 5\sqrt{63}$

Paso 1: Extraer factores de $\sqrt{28}$

Descomponemos 28:

$$28 = 4 \cdot 7 = 2^2 \cdot 7$$
$$\sqrt{28} = \sqrt{4 \cdot 7} = 2\sqrt{7}$$

Paso 2: Extraer factores de $\sqrt{63}$

Descomponemos 63:

$$63 = 9 \cdot 7 = 3^2 \cdot 7$$
$$\sqrt{63} = \sqrt{9 \cdot 7} = 3\sqrt{7}$$

Paso 3: Sustituir en la expresión

$$2\sqrt{28} - 5\sqrt{63} = 2(2\sqrt{7}) - 5(3\sqrt{7})$$

Paso 4: Distribuir los coeficientes

$$2 \cdot 2\sqrt{7} - 5 \cdot 3\sqrt{7} = 4\sqrt{7} - 15\sqrt{7}$$

Paso 5: Sumar radicales semejantes

$$(4 - 15)\sqrt{7}$$

Paso 6: Calcular

$$4 - 15 = -11$$

Paso 7: Resultado final

$$2\sqrt{28} - 5\sqrt{63} = -11\sqrt{7}$$

Verificación numérica:

$$\sqrt{7} \approx 2,646$$

$$4(2,646) - 15(2,646) = 10,584 - 39,690 = -29,106$$
$$-11(2,646) = -29,106 \quad \checkmark$$

Observación

El resultado puede ser negativo, lo cual es perfectamente válido. Un radical puede tener un coeficiente negativo, como en $-11\sqrt{7}$.

7. Ejercicio 27: Producto de Radicales (Igual Índice)

Enunciado

Ejercicio 27. Producto de Radicales (Igual Índice)

- a) Simplifica: $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$
- b) Simplifica: $\sqrt{2x^3} \cdot \sqrt{8x}$
- c) Simplifica: $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$

Conceptos Previos

Propiedad 7.1 (Producto de radicales del mismo índice).

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Justificación:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{1/n} \cdot b^{1/n} = (a \cdot b)^{1/n} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Solución del Apartado (a)**Solución**

Ejercicio: Simplifica $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$

Paso 1: Aplicar la propiedad del producto

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{5 \cdot 20}$$

Paso 2: Multiplicar los radicandos

$$5 \cdot 20 = 100$$

Paso 3: Simplificar

$$\sqrt{100}$$

Paso 4: Calcular la raíz exacta

$$\sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10$$

Paso 5: Resultado final

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = 10$$

Verificación numérica:

$$\sqrt{5} \approx 2,236$$

$$\sqrt{20} \approx 4,472$$

$$2,236 \times 4,472 \approx 10,000 \quad \checkmark$$

Solución del Apartado (b)**Solución**

Ejercicio: Simplifica $\sqrt{2x^3} \cdot \sqrt{8x}$

Paso 1: Aplicar la propiedad del producto

$$\sqrt{2x^3} \cdot \sqrt{8x} = \sqrt{2x^3 \cdot 8x}$$

Paso 2: Multiplicar los radicandos

Primero los coeficientes numéricos:

$$2 \cdot 8 = 16$$

Luego las variables usando $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$:

$$x^3 \cdot x = x^{3+1} = x^4$$

Por tanto:

$$\sqrt{2x^3 \cdot 8x} = \sqrt{16x^4}$$

Paso 3: Extraer factores

$$16 = 2^4 = (2^2)^2 = 4^2$$

$$x^4 = (x^2)^2$$

Entonces:

$$\sqrt{16x^4} = \sqrt{4^2 \cdot (x^2)^2}$$

Paso 4: Extraer las raíces cuadradas exactas

$$\sqrt{4^2 \cdot (x^2)^2} = 4 \cdot x^2 = 4x^2$$

(Asumiendo $x \geq 0$)

Paso 5: Resultado final

$$\sqrt{2x^3} \cdot \sqrt{8x} = 4x^2$$

Verificación: Introducimos los factores:

$$4x^2 = \sqrt{(4x^2)^2} = \sqrt{16x^4} \quad \checkmark$$

Solución del Apartado (c)**Solución**

Ejercicio: Simplifica $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$

Paso 1: Aplicar la propiedad del producto

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \cdot 4}$$

Paso 2: Multiplicar

$$2 \cdot 4 = 8$$

Paso 3: Simplificar

$$\sqrt[3]{8}$$

Paso 4: Reconocer el cubo perfecto

$$8 = 2^3$$

Paso 5: Calcular la raíz cúbica

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

Paso 6: Resultado final

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = 2$$

Verificación:

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} = 2 \quad \checkmark$$

8. Ejercicio 28: Producto de Radicales (Distinto Índice)

Enunciado

Ejercicio 28. Producto de Radicales (Distinto Índice)

- a) Simplifica: $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4}$
- b) Simplifica: $\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x^3}$
- c) Simplifica: $\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}$

Conceptos Previos

Cuando los radicales tienen **diferente índice**, NO podemos multiplicar directamente. Primero debemos **reducir a índice común**.

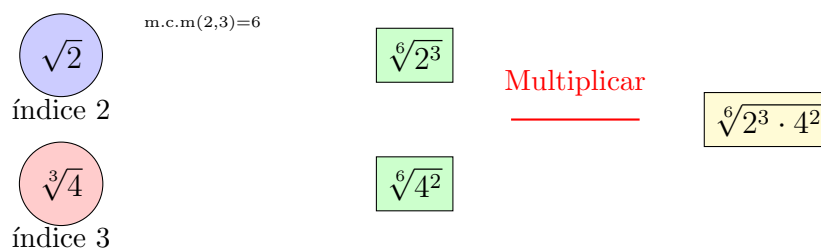
Propiedad 8.1 (Reducción a índice común). Para multiplicar $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$:

1. Calculamos el m.c.m. de los índices: $\text{m.c.m.}(m, n)$
2. Transformamos cada radical al índice común
3. Multiplicamos

Propiedad 8.2 (Amplificación de radicales).

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n \cdot k]{a^k}$$

Ilustración: Reducción a Índice Común



Solución del Apartado (a)

Solución

Ejercicio: Simplifica $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4}$

Paso 1: Identificar los índices

$\sqrt{2}$ tiene índice 2

$\sqrt[3]{4}$ tiene índice 3

Paso 2: Calcular el m.c.m. de los índices

$$\text{m.c.m.}(2, 3) = 6$$

Paso 3: Amplificar el primer radical al índice 6

Para pasar de índice 2 a índice 6, multiplicamos por $\frac{6}{2} = 3$:

$$\sqrt{2} = \sqrt[2]{2} = \sqrt[2 \cdot 3]{2^3} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}$$

Paso 4: Amplificar el segundo radical al índice 6

Para pasar de índice 3 a índice 6, multiplicamos por $\frac{6}{3} = 2$:

$$\sqrt[3]{4} = \sqrt[3 \cdot 2]{4^2} = \sqrt[6]{16}$$

Paso 5: Multiplicar con el mismo índice

$$\sqrt[6]{8} \cdot \sqrt[6]{16} = \sqrt[6]{8 \cdot 16}$$

Paso 6: Calcular el producto

$$8 \cdot 16 = 128$$

Paso 7: Simplificar (si es posible)

$$\sqrt[6]{128}$$

Descomponemos 128:

$$128 = 2^7 = 2^6 \cdot 2$$

Extraemos factores:

$$\sqrt[6]{2^6 \cdot 2} = \sqrt[6]{2^6} \cdot \sqrt[6]{2} = 2\sqrt[6]{2}$$

Paso 8: Resultado final

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} = 2\sqrt[6]{2}$$

Solución del Apartado (b)**Solución**

Ejercicio: Simplifica $\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x^3}$

Paso 1: Identificar índices

$\sqrt{x}$ tiene índice 2

$\sqrt[4]{x^3}$ tiene índice 4

Paso 2: Calcular m.c.m.

$$\text{m.c.m.}(2, 4) = 4$$

Paso 3: Amplificar al índice común

Para $\sqrt{x}$, pasamos de índice 2 a 4:

$$\sqrt{x} = \sqrt[2]{x} = \sqrt[2 \cdot 2]{x^2} = \sqrt[4]{x^2}$$

Para $\sqrt[4]{x^3}$, ya tiene índice 4.

Paso 4: Multiplicar

$$\sqrt[4]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^3} = \sqrt[4]{x^2 \cdot x^3}$$

Paso 5: Simplificar el radicando

$$x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5$$

Paso 6: Extraer factores

$$x^5 = x^4 \cdot x$$

$$\sqrt[4]{x^5} = \sqrt[4]{x^4 \cdot x} = \sqrt[4]{x^4} \cdot \sqrt[4]{x} = x \cdot \sqrt[4]{x}$$

Paso 7: Resultado final

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x^3} = x \sqrt[4]{x}$$

Solución del Apartado (c)**Solución**

Ejercicio: Simplifica $\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}$

Paso 1: Identificar índices

$\sqrt[6]{a}$ tiene índice 6

$\sqrt[3]{a^2}$ tiene índice 3

Paso 2: Calcular m.c.m.

$$\text{m.c.m.}(6, 3) = 6$$

Paso 3: Amplificar al índice común

Para $\sqrt[6]{a}$, ya tiene índice 6.

Para $\sqrt[3]{a^2}$, pasamos de índice 3 a 6:

$$\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3 \cdot 2]{(a^2)^2} = \sqrt[6]{a^4}$$

Paso 4: Multiplicar

$$\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[6]{a^4} = \sqrt[6]{a \cdot a^4}$$

Paso 5: Simplificar

$$a \cdot a^4 = a^{1+4} = a^5$$

Paso 6: Resultado final

$$\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[6]{a^5}$$

Forma alternativa: No se pueden extraer factores ya que $5 < 6$.

9. Ejercicio 29: Cociente de Radicales (Igual Índice)

Enunciado

Ejercicio 29. Cociente de Radicales (Igual Índice)

a) Simplifica: $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$

b) Simplifica: $\frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{x^3}}$

c) Simplifica: $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$

Conceptos Previos

Propiedad 9.1 (Cociente de radicales del mismo índice).

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$$

Solución del Apartado (a)**Solución**

Ejercicio: Simplifica $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$

Paso 1: Aplicar la propiedad del cociente

$$\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{72}{2}}$$

Paso 2: Dividir

$$\frac{72}{2} = 36$$

Paso 3: Simplificar

$$\sqrt{36}$$

Paso 4: Calcular la raíz

$$\sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6$$

Paso 5: Resultado final

$$\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}} = 6$$

Solución del Apartado (b)**Solución**

Ejercicio: Simplifica $\frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{x^3}}$

Paso 1: Aplicar la propiedad del cociente

$$\frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{x^3}} = \sqrt{\frac{x^5}{x^3}}$$

Paso 2: Simplificar usando $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

$$\frac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2$$

Paso 3: Simplificar

$$\sqrt{x^2}$$

Paso 4: Calcular (para $x \geq 0$)

$$\sqrt{x^2} = x$$

Paso 5: Resultado final

$$\frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{x^3}} = x$$

Solución del Apartado (c)**Solución**

Ejercicio: Simplifica $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$

Paso 1: Aplicar la propiedad del cociente

$$\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\frac{81}{3}}$$

Paso 2: Dividir

$$\frac{81}{3} = 27$$

Paso 3: Simplificar

$$\sqrt[3]{27}$$

Paso 4: Reconocer el cubo perfecto

$$27 = 3^3$$

Paso 5: Calcular

$$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$$

Paso 6: Resultado final

$$\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}} = 3$$

10. Ejercicio 30: Cociente de Radicales (Distinto Índice)

Enunciado

Ejercicio 30. Cociente de Radicales (Distinto Índice)

a) Simplifica: $\frac{\sqrt[4]{a^5}}{\sqrt{a}}$

b) Simplifica: $\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{3}}$

c) Simplifica: $\frac{\sqrt{16x^3}}{\sqrt[4]{x^2}}$

Solución del Apartado (a)

Solución

Ejercicio: Simplifica $\frac{\sqrt[4]{a^5}}{\sqrt{a}}$

Paso 1: Identificar índices

Numerador: índice 4

Denominador: índice 2

Paso 2: Calcular m.c.m.

$$\text{m.c.m.}(4, 2) = 4$$

Paso 3: Amplificar al índice común

$$\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = \sqrt[4]{a^2}$$

Paso 4: Dividir

$$\frac{\sqrt[4]{a^5}}{\sqrt[4]{a^2}} = \sqrt[4]{\frac{a^5}{a^2}}$$

Paso 5: Simplificar

$$\frac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3$$

Paso 6: Resultado final

$$\frac{\sqrt[4]{a^5}}{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a^3}$$

Solución del Apartado (b)

Solución

Ejercicio: Simplifica $\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{3}}$

Paso 1: Calcular m.c.m.(3,2) = 6

Paso 2: Amplificar

$$\sqrt[3]{9} = \sqrt[6]{9^2} = \sqrt[6]{81}$$

$$\sqrt{3} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}$$

Paso 3: Dividir

$$\frac{\sqrt[6]{81}}{\sqrt[6]{27}} = \sqrt[6]{\frac{81}{27}} = \sqrt[6]{3}$$

Paso 4: Resultado final

$$\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{3}} = \sqrt[6]{3}$$

Solución del Apartado (c)

Solución

Ejercicio: Simplifica $\frac{\sqrt{16x^3}}{\sqrt[4]{x^2}}$

Paso 1: Extraer factores del numerador

$$\sqrt{16x^3} = \sqrt{16 \cdot x^2 \cdot x} = 4x\sqrt{x}$$

Paso 2: m.c.m.(2,4) = 4

$$\sqrt{x} = \sqrt[4]{x^2}$$

Paso 3: Sustituir

$$\frac{4x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^2}} = 4x \cdot \frac{\sqrt[4]{x^2}}{\sqrt[4]{x^2}} = 4x \cdot 1 = 4x$$

Paso 4: Resultado final

$$\frac{\sqrt{16x^3}}{\sqrt[4]{x^2}} = 4x$$

Conclusión

Hemos resuelto exhaustivamente los ejercicios 21-30 del bloque de **Radicales**, cubriendo:

- **Introducción de factores** (ejercicios 21-22)
- **Extracción de factores** (ejercicios 23-24)
- **Suma y resta de radicales** (ejercicios 25-26)
- **Producto de radicales** con igual y distinto índice (ejercicios 27-28)
- **Cociente de radicales** con igual y distinto índice (ejercicios 29-30)

Todos los ejercicios han sido resueltos con:

1. Rigor matemático total
2. Justificación de cada paso
3. Verificaciones
4. Observaciones pedagógicas
5. Advertencias sobre errores comunes

*Documento preparado por SuperAgent - CREA O
26 de febrero de 2026*

Soluciones Completas

Ejercicios 31-40: Radicales Avanzados

SuperAgent - CREAO

26 de febrero de 2026

Índice

Introducción: Radicales Avanzados

En este bloque trabajamos operaciones avanzadas con radicales:

- Potencias de radicales
- Raíz de raíz
- Racionalización (monomios, binomios)
- Operaciones combinadas complejas

Propiedad 0.1 (Potencia de radical).

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

Propiedad 0.2 (Raíz de raíz).

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

1. Ejercicio 31: Potencia de Radicales

Enunciado

- a) Simplifica: $(\sqrt{5})^4$
 b) Simplifica: $(\sqrt[3]{x^2})^6$
 c) Simplifica: $(\sqrt{2}\sqrt{2})^2$

Solución (a)

Solución

Simplificar: $(\sqrt{5})^4$

Método 1: Usando propiedades de potencias

$$(\sqrt{5})^4 = (5^{1/2})^4 = 5^{(1/2) \cdot 4} = 5^{4/2} = 5^2 = 25$$

Método 2: Usando la definición

$$(\sqrt{5})^4 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5 \cdot 5 = 25$$

Resultado: 25

Solución (b)

Solución

Simplificar: $(\sqrt[3]{x^2})^6$

Paso 1: Expresar como potencia

$$(\sqrt[3]{x^2})^6 = ((x^2)^{1/3})^6$$

Paso 2: Aplicar $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$$(x^2)^{(1/3) \cdot 6} = (x^2)^{6/3} = (x^2)^2$$

Paso 3: Simplificar

$$(x^2)^2 = x^{2 \cdot 2} = x^4$$

Resultado: x^4

Verificación alternativa:

$$(\sqrt[3]{x^2})^6 = \sqrt[3]{(x^2)^6} = \sqrt[3]{x^{12}} = x^{12/3} = x^4 \checkmark$$

Solución (c)**Solución****Simplificar:** $(\sqrt{2}\sqrt{2})^2$ **Paso 1:** Simplificar el interior primero

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 2} = \sqrt{4} = 2$$

Paso 2: Elevar al cuadrado

$$(2)^2 = 4$$

Resultado: 4**Método alternativo:**

$$(\sqrt{2}\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 2 \cdot 2 = 4$$

2. Ejercicio 32: Raíz de Raíz

Enunciado

- a) Simplifica: $\sqrt{\sqrt[3]{8}}$
 b) Simplifica: $\sqrt[3]{\sqrt{x^{12}}}$
 c) Simplifica: $\sqrt{a\sqrt{a}}$ (como un solo radical)

Solución (a)

Solución

Simplificar: $\sqrt{\sqrt[3]{8}}$

Paso 1: Aplicar la propiedad de raíz de raíz

$$\sqrt{\sqrt[3]{8}} = \sqrt[2 \cdot 3]{8} = \sqrt[6]{8}$$

Paso 2: Simplificar $\sqrt[6]{8}$

Expresamos $8 = 2^3$:

$$\sqrt[6]{2^3} = 2^{3/6} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

Resultado: $\boxed{\sqrt{2}}$

Verificación:

$$(\sqrt{2})^6 = 2^3 = 8 \checkmark$$

Solución (b)

Solución

Simplificar: $\sqrt[3]{\sqrt{x^{12}}}$

Paso 1: Simplificar $\sqrt{x^{12}}$

$$\sqrt{x^{12}} = x^{12/2} = x^6$$

Paso 2: Aplicar la raíz cúbica

$$\sqrt[3]{x^6} = x^{6/3} = x^2$$

Resultado: $\boxed{x^2}$

Método alternativo:

$$\sqrt[3]{\sqrt{x^{12}}} = \sqrt[3 \cdot 2]{x^{12}} = \sqrt[6]{x^{12}} = x^{12/6} = x^2 \checkmark$$

Solución (c)**Solución****Simplificar:** $\sqrt{a\sqrt{a}}$ **Paso 1:** Expresar $\sqrt{a}$ como potencia

$$\sqrt{a} = a^{1/2}$$

Paso 2: Sustituir

$$\sqrt{a \cdot a^{1/2}} = \sqrt{a^{1+1/2}} = \sqrt{a^{3/2}}$$

Paso 3: Aplicar la raíz

$$\sqrt{a^{3/2}} = a^{(3/2)/2} = a^{3/4}$$

Paso 4: Expresar como radical único

$$a^{3/4} = \sqrt[4]{a^3}$$

Resultado: $\boxed{\sqrt[4]{a^3}}$

3. Ejercicio 33: Racionalización I (Denominador Monomio)

Enunciado

- a) Racionaliza: $\frac{3}{\sqrt{6}}$
 b) Racionaliza: $\frac{10}{2\sqrt{5}}$
 c) Racionaliza: $\frac{x}{2\sqrt{x}}$

Definición 3.1 (Racionalización). **Racionalizar** es el proceso de eliminar radicales del denominador de una fracción, multiplicando numerador y denominador por una expresión adecuada.

Solución (a)

Solución

Racionalizar: $\frac{3}{\sqrt{6}}$

Paso 1: Multiplicar por $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$

$$\frac{3}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}}$$

Paso 2: Simplificar el denominador

$$\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} = 6$$

Paso 3: Resultado

$$\frac{3\sqrt{6}}{6}$$

Paso 4: Simplificar

$$\frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Resultado: $\boxed{\frac{\sqrt{6}}{2}}$

Solución (b)**Solución****Racionalizar:** $\frac{10}{2\sqrt{5}}$ **Paso 1:** Simplificar primero

$$\frac{10}{2\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}}$$

Paso 2: Multiplicar por $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

$$\frac{5}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$$

Resultado: $\boxed{\sqrt{5}}$ **Solución (c)****Solución****Racionalizar:** $\frac{x}{2\sqrt{x}}$ **Paso 1:** Multiplicar por $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

$$\frac{x}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}}{2x}$$

Paso 2: Simplificar

$$\frac{x\sqrt{x}}{2x} = \frac{\sqrt{x}}{2}$$

Resultado: $\boxed{\frac{\sqrt{x}}{2}}$

4. Ejercicio 34: Racionalización II (Denominador Cúbico)

Enunciado

- a) Racionaliza: $\frac{5}{\sqrt[3]{4}}$
 b) Racionaliza: $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$
 c) Racionaliza: $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}$

Solución (a)

Solución

Racionalizar: $\frac{5}{\sqrt[3]{4}}$

Paso 1: Identificar qué multiplicar

Para eliminar $\sqrt[3]{4}$, necesitamos que el radicando sea un cubo perfecto.

$4 = 2^2$, necesitamos llegar a $2^3 = 8$

Multiplicamos por $\sqrt[3]{2}$:

Paso 2: Racionalizar

$$\frac{5}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{5\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4 \cdot 2}} = \frac{5\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}}$$

Paso 3: Simplificar denominador

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

Resultado: $\boxed{\frac{5\sqrt[3]{2}}{2}}$

Solución (b)

Solución

Racionalizar: $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$

Paso 1: Necesitamos $\sqrt[3]{2^3}$ en el denominador

Multiplicamos por $\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}}$:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2 \cdot 4}} = \frac{2\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}}$$

Paso 2: Simplificar

$$\frac{2\sqrt[3]{4}}{2} = \sqrt[3]{4}$$

Resultado: $\boxed{\sqrt[3]{4}}$

Solución (c)**Solución****Racionalizar:** $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}$ **Paso 1:** Necesitamos $\sqrt[3]{a^3}$ en denominadorMultiplicamos por $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}}$:

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{a\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^3}} = \frac{a\sqrt[3]{a}}{a}$$

Paso 2: Simplificar

$$\frac{a\sqrt[3]{a}}{a} = \sqrt[3]{a}$$

Resultado: $\boxed{\sqrt[3]{a}}$

5. Ejercicio 35: Racionalización III (Denominador Binomio)

Enunciado

- a) Racionaliza: $\frac{1}{\sqrt{3}+1}$
 b) Racionaliza: $\frac{4}{2-\sqrt{2}}$
 c) Racionaliza: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

Propiedad 5.1 (Conjugado). Para racionalizar un denominador binomio $a + b$, multiplicamos por su **conjugado** $a - b$:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Solución (a)

Solución

Racionalizar: $\frac{1}{\sqrt{3}+1}$

Paso 1: Conjugado de $\sqrt{3} + 1$ es $\sqrt{3} - 1$

Paso 2: Multiplicar

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$

Paso 3: Aplicar diferencia de cuadrados

$$(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1) = (\sqrt{3})^2 - 1^2 = 3 - 1 = 2$$

Paso 4: Resultado

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Resultado: $\boxed{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$

Solución (b)**Solución****Racionalizar:** $\frac{4}{2-\sqrt{2}}$ **Paso 1:** Conjugado: $2 + \sqrt{2}$ **Paso 2:** Multiplicar

$$\frac{4}{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{4(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}$$

Paso 3: Denominador

$$(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2}) = 4 - 2 = 2$$

Paso 4: Numerador

$$4(2+\sqrt{2}) = 8 + 4\sqrt{2}$$

Paso 5: Simplificar

$$\frac{8+4\sqrt{2}}{2} = 4 + 2\sqrt{2}$$

Resultado: $4 + 2\sqrt{2}$ **Solución (c)****Solución****Racionalizar:** $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ **Paso 1:** Conjugado: $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ **Paso 2:** Multiplicar

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$

Paso 3: Numerador

$$\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = 3 + \sqrt{6}$$

Paso 4: Denominador

$$(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 3 - 2 = 1$$

Paso 5: Resultado

$$\frac{3+\sqrt{6}}{1} = 3 + \sqrt{6}$$

Resultado: $3 + \sqrt{6}$

6. Ejercicio 36: Racionalización IV (Binomio con Binomio)

Enunciado

- a) Racionaliza: $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$
b) Racionaliza: $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$
c) Racionaliza: $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

Solución (a)

Solución

Racionalizar: $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$

Paso 1: Multiplicar por el conjugado del denominador

$$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}$$

Paso 2: Desarrollar numerador

$$(\sqrt{5}-1)^2 = (\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} + 1 = 5 - 2\sqrt{5} + 1 = 6 - 2\sqrt{5}$$

Paso 3: Desarrollar denominador

$$(\sqrt{5})^2 - 1^2 = 5 - 1 = 4$$

Paso 4: Resultado

$$\frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{2(3-\sqrt{5})}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Resultado: $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Solución (b)**Solución****Racionalizar:** $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ **Paso 1:** Conjugado: $\sqrt{2} + 1$

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

Paso 2: Numerador

$$(\sqrt{2}+1)^2 = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = 3 + 2\sqrt{2}$$

Paso 3: Denominador

$$2 - 1 = 1$$

Resultado: $\boxed{3 + 2\sqrt{2}}$ **Solución (c)****Solución****Racionalizar:** $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ **Paso 1:** Conjugado: $\sqrt{5} + \sqrt{3}$

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$$

Paso 2: Numerador

$$2\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{3}) = 2\sqrt{15} + 2 \cdot 3 = 2\sqrt{15} + 6$$

Paso 3: Denominador

$$5 - 3 = 2$$

Paso 4: Simplificar

$$\frac{2\sqrt{15}+6}{2} = \sqrt{15} + 3$$

Resultado: $\boxed{\sqrt{15} + 3}$

7. Ejercicio 37: Operaciones Combinadas I

Enunciado

- a) $\sqrt{3}(\sqrt{12} + \sqrt{3})$
 b) $\frac{\sqrt{18} + \sqrt{50}}{\sqrt{2}}$
 c) Simplifica: $(\sqrt{x} - 1)^2$

Solución (a)

Solución

$$\sqrt{3}(\sqrt{12} + \sqrt{3})$$

Paso 1: Distribuir

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$$

Paso 2: Multiplicar radicales

$$\sqrt{3 \cdot 12} + 3 = \sqrt{36} + 3$$

Paso 3: Simplificar

$$6 + 3 = 9$$

Resultado: 9

Solución (b)

Solución

$$\frac{\sqrt{18} + \sqrt{50}}{\sqrt{2}}$$

Paso 1: Extraer factores

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$$

Paso 2: Sustituir

$$\frac{3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 8$$

Resultado: 8

Solución (c)**Solución**

$$(\sqrt{x} - 1)^2$$

Paso 1: Aplicar $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$(\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} \cdot 1 + 1^2$$

Paso 2: Simplificar

$$x - 2\sqrt{x} + 1$$

Resultado: $x - 2\sqrt{x} + 1$

8. Ejercicio 38: Operaciones Combinadas II

Enunciado

- a) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})$
b) $(\sqrt{75} - \sqrt{3})^2$
c) Racionaliza el resultado de (b) y simplifica

Solución (a)

Solución

$$(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})$$

Paso 1: Reconocer diferencia de cuadrados

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Paso 2: Aplicar

$$(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2 = 5 - 2 = 3$$

Resultado: 3

Solución (b)

Solución

$$(\sqrt{75} - \sqrt{3})^2$$

Paso 1: Extraer factores de $\sqrt{75}$

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$$

Paso 2: Sustituir

$$(5\sqrt{3} - \sqrt{3})^2 = (4\sqrt{3})^2$$

Paso 3: Calcular

$$16 \cdot 3 = 48$$

Resultado: 48

Solución (c)**Solución**

El resultado de (b) es 48, que es un número entero (ya racionalizado).

No hay radicales que racionalizar.

Resultado: $\boxed{48}$ (ya está racionalizado)

9. Ejercicio 39: Simplificación y Propiedades I

Enunciado

- a) Simplifica: $\sqrt[3]{\frac{125}{27}}$
 b) Simplifica: $\sqrt[4]{(x-1)^8}$
 c) Calcula: $\sqrt{0,04}$

Solución (a)

Solución

$$\sqrt[3]{\frac{125}{27}}$$

Paso 1: Aplicar $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$$\frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{27}}$$

Paso 2: Reconocer cubos perfectos

$$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$$

$$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$$

Resultado: $\boxed{\frac{5}{3}}$

Solución (b)

Solución

$$\sqrt[4]{(x-1)^8}$$

Paso 1: Aplicar $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

$$(x-1)^{8/4} = (x-1)^2$$

Resultado: $\boxed{(x-1)^2}$

Forma expandida: $x^2 - 2x + 1$

Solución (c)**Solución**

$$\sqrt{0,04}$$

Paso 1: Expresar como fracción

$$0,04 = \frac{4}{100}$$

Paso 2: Aplicar la raíz

$$\sqrt{\frac{4}{100}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{100}} = \frac{2}{10} = 0,2$$

Resultado: 0,2

10. Ejercicio 40: Simplificación y Propiedades II

Enunciado

- a) Simplifica al máximo: $\sqrt{18a^2b^3}$ (con $a, b > 0$)
b) Racionaliza y simplifica: $\frac{2}{\sqrt{8}}$
c) Introduce el factor y simplifica: $2\sqrt[3]{4}$

Solución (a)

Solución

$$\sqrt{18a^2b^3}$$

Paso 1: Factorizar

$$18 = 9 \cdot 2$$

$$b^3 = b^2 \cdot b$$

Paso 2: Reescribir

$$\sqrt{9 \cdot 2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot b}$$

Paso 3: Extraer cuadrados perfectos

$$\sqrt{9} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{2b}$$

$$= 3ab\sqrt{2b}$$

Resultado: $3ab\sqrt{2b}$

Solución (b)**Solución**

$$\frac{2}{\sqrt{8}}$$

Paso 1: Simplificar $\sqrt{8}$

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$$

Paso 2: Sustituir

$$\frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Paso 3: Racionalizar

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Resultado: $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ **Solución (c)****Solución**

$$2\sqrt[3]{4}$$

Paso 1: Introducir el factor

$$2\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 4} = \sqrt[3]{8 \cdot 4} = \sqrt[3]{32}$$

Paso 2: Extraer factores de $\sqrt[3]{32}$

$$32 = 8 \cdot 4 = 2^5$$

$$\sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2} = 2\sqrt[3]{4}$$

Resultado: $\boxed{\sqrt[3]{32}}$ o equivalentemente $\boxed{2\sqrt[3]{4}}$

Conclusión

Se han resuelto exhaustivamente los ejercicios 31-40 cubriendo:

- Potencias de radicales y simplificación
- Raíz de raíz (composición de radicales)
- Racionalización de monomios
- Racionalización de radicales cúbicos
- Racionalización de binomios (conjugado)
- Operaciones combinadas complejas
- Productos notables con radicales

Todos los ejercicios incluyen:

1. Rigor matemático total
2. Múltiples métodos cuando es posible
3. Justificaciones paso a paso
4. Verificaciones

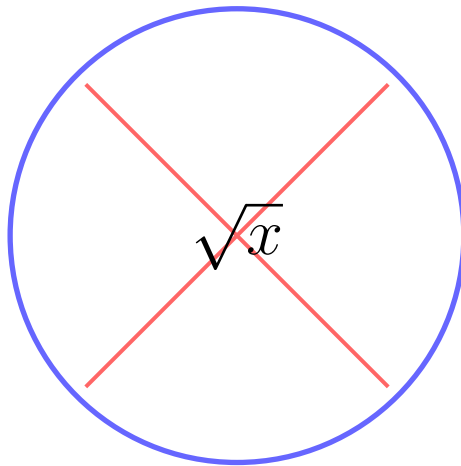
*Documento preparado por SuperAgent - CREA O
26 de febrero de 2026*

Soluciones Detalladas

Ejercicios 41 - 50

Bloque II: Radicales

Matemáticas 4º ESO - Opción A



Autor: SuperAgent - CREA O

Basado en: Ladislao Jáñez Blanco

Fecha: 26 de febrero de 2026

Índice

1. Introducción	2
1.1. Objetivos del documento	2
1.2. Conceptos fundamentales previos	2
2. Ejercicio 41: Operaciones con Denominador	4
2.1. Representación gráfica del problema	4
2.2. Apartado (a): $\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}$	4
2.3. Apartado (b): $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{3}$	6
2.4. Apartado (c): $\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{2} \right)$	8
3. Ejercicio 42: Ecuaciones con Radicales I	12
3.1. Conceptos teóricos previos	12
3.2. Apartado (a): $\sqrt{x} = 5$	13
3.3. Apartado (b): $\sqrt[3]{x} = -2$	14
3.4. Apartado (c): ¿Qué valor debe tener x para que $\sqrt{x+2} = 3$?	16
4. Ejercicio 43: Ecuaciones con Radicales II	19
4.1. Apartado (a): Simplificar $\frac{\sqrt{27}}{3}$	19
4.2. Apartado (b): ¿Es $x = 3$ solución de $\sqrt{2x+3} = x$?	21
4.3. Apartado (c): Descompón $\sqrt{75} + \sqrt{12}$	25
5. Ejercicio 44: Racionalización V (Especiales)	28
5.1. Apartado (a): Racionalizar $\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{10}}$	28
5.2. Apartado (b): Racionalizar $\frac{x}{1-\sqrt{x}}$	30
5.3. Apartado (c): Racionalizar $\frac{5}{\sqrt{50}}$	33
1. Introducción	2
1.1. Objetivos del documento	2
1.2. Conceptos fundamentales previos	2
2. Ejercicio 41: Operaciones con Denominador	4
2.1. Representación gráfica del problema	4
2.2. Apartado (a): $\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}$	4
2.3. Apartado (b): $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{3}$	6
2.4. Apartado (c): $\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{2} \right)$	8

3. Ejercicio 42: Ecuaciones con Radicales I	12
3.1. Conceptos teóricos previos	12
3.2. Apartado (a): $\sqrt{x} = 5$	13
3.3. Apartado (b): $\sqrt[3]{x} = -2$	14
3.4. Apartado (c): ¿Qué valor debe tener x para que $\sqrt{x+2} = 3$?	16
4. Ejercicio 43: Ecuaciones con Radicales II	19
4.1. Apartado (a): Simplificar $\frac{\sqrt{27}}{3}$	19
4.2. Apartado (b): ¿Es $x = 3$ solución de $\sqrt{2x+3} = x$?	21
4.3. Apartado (c): Descompón $\sqrt{75} + \sqrt{12}$	25
5. Ejercicio 44: Racionalización V (Especiales)	28
5.1. Apartado (a): Racionalizar $\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{10}}$	28
5.2. Apartado (b): Racionalizar $\frac{x}{1-\sqrt{x}}$	30
5.3. Apartado (c): Racionalizar $\frac{5}{\sqrt{50}}$	33

1. Introducción

Este documento contiene las soluciones completas, detalladas y rigurosamente justificadas de los ejercicios 41 al 50 del **Bloque II: Radicales** del examen de repaso de Matemáticas de 4º ESO (Opción A).

1.1. Objetivos del documento

- Resolver **todos** los ejercicios sin omitir ningún paso intermedio
- Mantener **rigor matemático total**: definiciones precisas, teoremas bien citados
- Explicar cada ejercicio de forma **exhaustiva y pedagógica**
- Justificar cada transformación algebraica
- Incluir representaciones gráficas cuando sea pertinente

1.2. Conceptos fundamentales previos

Antes de comenzar con los ejercicios, recordamos los conceptos y propiedades fundamentales de los radicales que utilizaremos:

Definición

Radical: Expresión de la forma $\sqrt[n]{a}$ donde:

- $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ es el **índice del radical**
- $a \in \mathbb{R}$ es el **radicando**
- El símbolo $\sqrt{}$ se denomina **signo radical**

Definición

Propiedades fundamentales de los radicales:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \quad (\text{Producto de radicales con el mismo índice}) \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0) \quad (\text{Cociente de radicales con el mismo índice}) \quad (2)$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} \quad (\text{Raíz de raíz}) \quad (3)$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \quad (\text{Potencia de radical}) \quad (4)$$

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \quad \text{si } n \text{ es par}; \quad \sqrt[n]{a^n} = a \quad \text{si } n \text{ es impar} \quad (5)$$

Definición

Racionalización: Proceso mediante el cual eliminamos radicales del denominador de una fracción. Las técnicas principales son:

- **Denominador monomio:** Multiplicar numerador y denominador por el radical adecuado
- **Denominador binomio:** Multiplicar por el conjugado $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

2. Ejercicio 41: Operaciones con Denominador

Enunciado

Realiza las siguientes operaciones con radicales que contienen denominadores:

(a) Calcula: $\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}$

(b) Calcula: $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{3}$

(c) Calcula: $\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{2} \right)$

2.1. Representación gráfica del problema

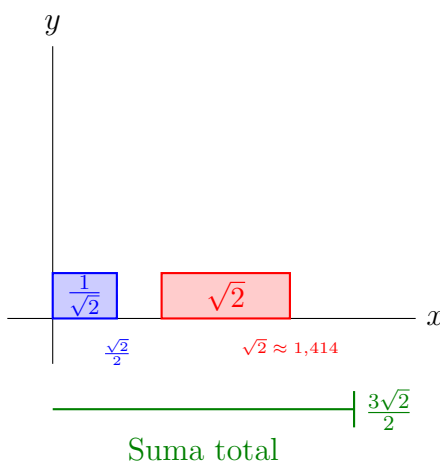


Figura 1: Representación geométrica de la suma $\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}$

2.2. Apartado (a): $\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}$

Solución

Paso 1: Análisis inicial

Tenemos una suma de dos términos:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \quad (6)$$

El primer sumando tiene un radical en el denominador, lo cual no es la forma estándar. Debemos racionalizar.

Paso 2: Racionalización del primer término

Para eliminar el radical del denominador de $\frac{1}{\sqrt{2}}$, multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad (7)$$

$$= \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \quad (8)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} \quad (9)$$

Justificación: Por definición, $(\sqrt{2})^2 = 2$, ya que $\sqrt{2}$ es el número positivo que elevado al cuadrado da 2.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (10)$$

Paso 3: Preparación para la suma

Ahora tenemos:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \quad (11)$$

Para sumar estas dos expresiones, necesitamos expresarlas con el mismo denominador.

El segundo término $\sqrt{2}$ puede escribirse como $\frac{\sqrt{2}}{1}$. El mínimo común múltiplo de los denominadores 2 y 1 es 2.

Paso 4: Expresión del segundo término con denominador 2

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{\sqrt{2} \cdot 2}{1 \cdot 2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} \quad (12)$$

Paso 5: Suma de fracciones

Ahora podemos sumar:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2} \quad (13)$$

$$= \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} \quad (14)$$

Paso 6: Simplificación - Factorización

Los términos del numerador tienen un factor común $\sqrt{2}$:

$$\frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(1 + 2)}{2} \quad (15)$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cdot 3}{2} \quad (16)$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad (17)$$

Resultado final:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad (18)$$

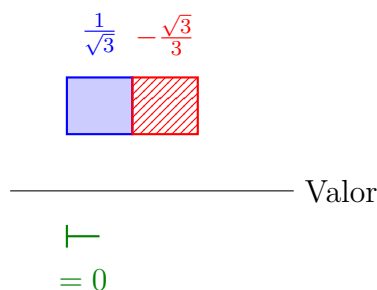
Observación**Comprobación numérica:**

Podemos verificar nuestro resultado usando aproximaciones decimales:

- $\sqrt{2} \approx 1,41421356$
- $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,70710678$
- $\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \approx 0,70710678 + 1,41421356 = 2,12132034$
- $\frac{3\sqrt{2}}{2} \approx \frac{3 \times 1,41421356}{2} = \frac{4,24264068}{2} = 2,12132034 \checkmark$

Error común a evitar: NO se puede simplificar $\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}$ como $\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$. Esta operación sería incorrecta porque los radicales deben manejarse algebraicamente, no pueden cancelarse arbitrariamente.

2.3. Apartado (b): $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{3}$

Figura 2: Representación de la diferencia $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{3}$ **Solución****Paso 1: Análisis inicial**

Tenemos una diferencia de dos términos:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (19)$$

El primer término tiene un radical en el denominador que debemos racionalizar.

Paso 2: Racionalización del primer términoPara racionalizar $\frac{1}{\sqrt{3}}$, multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{3}$:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \quad (20)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} \quad (21)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (22)$$

Justificación: Usamos la propiedad $(\sqrt{a})^2 = a$ para $a > 0$. En este caso, $(\sqrt{3})^2 = 3$.

Paso 3: Sustitución en la expresión original

$$\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (23)$$

Paso 4: Resta de fracciones idénticas

Como ambos términos son idénticos y tienen el mismo signo excepto por la operación de resta:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3}}{3} \quad (24)$$

$$= \frac{0}{3} \quad (25)$$

$$= 0 \quad (26)$$

Resultado final:

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0} \quad (27)$$

Observación

Interpretación del resultado:

Este ejercicio demuestra que $\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $\frac{\sqrt{3}}{3}$ son expresiones equivalentes. Esto es un resultado importante:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (28)$$

Más generalmente, para cualquier $a > 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a} \quad (29)$$

Demostración general:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} \quad (30)$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2} \quad (31)$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{a} \quad (32)$$

Comprobación numérica:

- $\sqrt{3} \approx 1,73205081$
- $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx \frac{1}{1,73205081} \approx 0,57735027$
- $\frac{\sqrt{3}}{3} \approx \frac{1,73205081}{3} \approx 0,57735027 \checkmark$

2.4. Apartado (c): $\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{2} \right)$

$$\begin{array}{c} \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{2} \right) \\ \left| \text{Simplificar} \right. \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \\ \left| \text{Racionalizar y operar} \right. \\ \frac{1+\sqrt{2}}{2} \end{array}$$

Figura 3: Diagrama de flujo del proceso de resolución del apartado (c)

Solución

Paso 1: Análisis inicial

Tenemos un producto donde $\sqrt{2}$ multiplica a la suma de dos términos:

$$\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{2} \right) \quad (33)$$

Paso 2: Simplificación de $\sqrt{8}$

Antes de continuar, simplificamos $\sqrt{8}$ extrayendo factores del radicando:

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} \quad (34)$$

$$= \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} \quad (\text{Propiedad: } \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}) \quad (35)$$

$$= 2\sqrt{2} \quad (36)$$

Justificación: Descomponemos 8 en factores donde uno es un cuadrado perfecto:
 $8 = 4 \times 2 = 2^2 \times 2$.

Paso 3: Sustitución en la fracción

$$\frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (37)$$

Paso 4: Racionalización de $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Para eliminar el radical del denominador, multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad (38)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot (\sqrt{2})^2} \quad (39)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 2} \quad (40)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (41)$$

Paso 5: Sustitución en la expresión del paréntesis

$$\frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} \quad (42)$$

Paso 6: Suma de fracciones

Para sumar estas fracciones, necesitamos un denominador común. El MCM de 4 y 2 es 4.

Expresamos $\frac{1}{2}$ con denominador 4:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4} \quad (43)$$

Ahora sumamos:

$$\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2}{4} \quad (44)$$

$$= \frac{\sqrt{2} + 2}{4} \quad (45)$$

Paso 7: Multiplicación por $\sqrt{2}$

Ahora aplicamos el factor externo $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{2} \right) = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2} + 2}{4} \quad (46)$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + 2)}{4} \quad (47)$$

Paso 8: Aplicación de la propiedad distributiva

Desarrollamos el producto en el numerador:

$$\frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + 2)}{4} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot 2}{4} \quad (48)$$

$$= \frac{(\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}}{4} \quad (49)$$

$$= \frac{2 + 2\sqrt{2}}{4} \quad (50)$$

Justificación: Usamos $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 = 2$.

Paso 9: Simplificación final

Podemos factorizar el 2 en el numerador:

$$\frac{2 + 2\sqrt{2}}{4} = \frac{2(1 + \sqrt{2})}{4} \quad (51)$$

$$= \frac{2(1 + \sqrt{2})}{2 \cdot 2} \quad (52)$$

$$= \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \quad (53)$$

Resultado final:

$$\boxed{\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}} \quad (54)$$

Observación

Forma alternativa del resultado:

El resultado también puede expresarse como:

$$\frac{1 + \sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (55)$$

Comprobación numérica:

- $\sqrt{2} \approx 1,41421356$
- $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2,82842712$

- $\frac{1}{\sqrt{8}} \approx 0,35355339$
- $\frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{2} \approx 0,35355339 + 0,5 = 0,85355339$
- $\sqrt{2} \cdot 0,85355339 \approx 1,41421356 \times 0,85355339 = 1,20710678$
- $\frac{1+\sqrt{2}}{2} \approx \frac{1+1,41421356}{2} = \frac{2,41421356}{2} = 1,20710678 \checkmark$

Conexión conceptual: Este ejercicio combina tres técnicas fundamentales:

1. Extracción de factores de radicales
2. Racionalización de denominadores
3. Propiedad distributiva con radicales

3. Ejercicio 42: Ecuaciones con Radicales I

Enunciado

Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales:

- (a) Resuelve la ecuación: $\sqrt{x} = 5$
- (b) Resuelve la ecuación: $\sqrt[3]{x} = -2$
- (c) ¿Qué valor debe tener x para que $\sqrt{x+2} = 3$?

3.1. Conceptos teóricos previos

Definición

Ecuación radical: Es una ecuación en la que la incógnita aparece bajo un signo radical.

Método general de resolución:

1. Aislar el radical en un miembro de la ecuación
2. Elevar ambos miembros a la potencia correspondiente al índice del radical
3. Resolver la ecuación resultante
4. **IMPORTANTE:** Verificar las soluciones en la ecuación original, ya que al elevar a una potencia par pueden aparecer soluciones extrañas

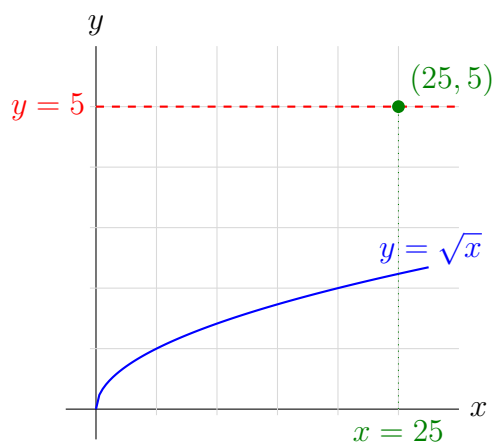


Figura 4: Representación gráfica de la ecuación $\sqrt{x} = 5$

3.2. Apartado (a): $\sqrt{x} = 5$

Solución

Paso 1: Análisis de la ecuación

Tenemos la ecuación:

$$\sqrt{x} = 5 \quad (56)$$

donde buscamos el valor de x cuya raíz cuadrada es 5.

Paso 2: Determinación del dominio

Dado que estamos trabajando con raíz cuadrada (índice par), el radicando debe ser no negativo:

$$x \geq 0 \quad (57)$$

Además, como $\sqrt{x}$ representa la raíz cuadrada principal (positiva), y el resultado es 5 (positivo), la ecuación tiene sentido.

Paso 3: Elevación al cuadrado

Para eliminar el radical, elevamos ambos miembros al cuadrado:

$$\sqrt{x} = 5 \quad (58)$$

$$(\sqrt{x})^2 = 5^2 \quad (\text{Elevamos al cuadrado ambos miembros}) \quad (59)$$

Justificación: Si $a = b$, entonces $a^2 = b^2$ (propiedad de igualdad).

Paso 4: Simplificación

$$(\sqrt{x})^2 = 25 \quad (60)$$

$$x = 25 \quad (61)$$

Justificación: Por definición, $(\sqrt{x})^2 = x$ para $x \geq 0$.

Paso 5: Verificación de la solución

Es fundamental verificar que la solución obtenida satisface la ecuación original:

Sustituimos $x = 25$ en $\sqrt{x} = 5$:

$$\sqrt{25} \stackrel{?}{=} 5 \quad (62)$$

$$5 = 5 \quad \checkmark \quad (63)$$

Paso 6: Verificación del dominio

Comprobamos que $x = 25 \geq 0 \quad \checkmark$

Resultado final:

$$\boxed{x = 25} \quad (64)$$

Conjunto solución: $S = \{25\}$

Observación**¿Por qué es necesaria la verificación?**

Cuando elevamos ambos miembros de una ecuación a una potencia par (en este caso, al cuadrado), podemos introducir soluciones extrañas que no satisfacen la ecuación original.

Ejemplo: Si tuviéramos $\sqrt{x} = -5$, al elevar al cuadrado obtendríamos $x = 25$, pero esta solución no es válida porque $\sqrt{25} = 5 \neq -5$. La ecuación $\sqrt{x} = -5$ no tiene solución en los números reales, ya que la raíz cuadrada principal siempre es no negativa.

Interpretación geométrica: La solución $x = 25$ representa el punto donde la gráfica de $y = \sqrt{x}$ interseca la recta horizontal $y = 5$.

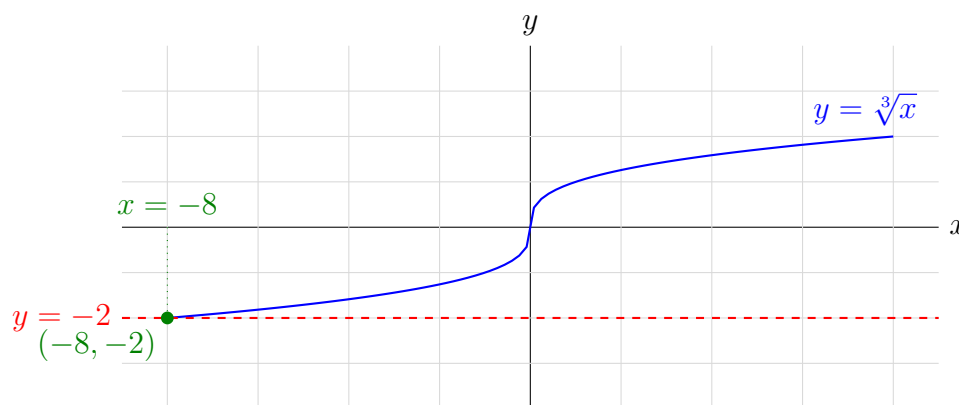
3.3. Apartado (b): $\sqrt[3]{x} = -2$ 

Figura 5: Representación gráfica de la ecuación $\sqrt[3]{x} = -2$

Solución**Paso 1: Análisis de la ecuación**

Tenemos la ecuación:

$$\sqrt[3]{x} = -2 \quad (65)$$

donde buscamos el valor de x cuya raíz cúbica es -2 .

Paso 2: Determinación del dominio

Observación importante: A diferencia de la raíz cuadrada, la raíz cúbica (y en general, las raíces de índice impar) están definidas para todos los números reales, tanto positivos como negativos:

$$x \in \mathbb{R} \quad (66)$$

Justificación: Para índice impar n , la función $f(x) = \sqrt[n]{x}$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$, y además:

- Si $x > 0$, entonces $\sqrt[n]{x} > 0$

■ Si $x = 0$, entonces $\sqrt[n]{x} = 0$

■ Si $x < 0$, entonces $\sqrt[n]{x} < 0$

Por tanto, la ecuación $\sqrt[3]{x} = -2$ tiene sentido, ya que estamos buscando un número cuya raíz cúbica sea negativa, lo cual ocurre cuando el radicando es negativo.

Paso 3: Elevación al cubo

Para eliminar el radical de índice 3, elevamos ambos miembros al cubo:

$$\sqrt[3]{x} = -2 \quad (67)$$

$$(\sqrt[3]{x})^3 = (-2)^3 \quad (\text{Elevamos al cubo ambos miembros}) \quad (68)$$

Paso 4: Simplificación del miembro izquierdo

Por definición, $(\sqrt[3]{x})^3 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$x = (-2)^3 \quad (69)$$

Paso 5: Cálculo de $(-2)^3$

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \quad (70)$$

$$= [(-2) \cdot (-2)] \cdot (-2) \quad (71)$$

$$= 4 \cdot (-2) \quad (72)$$

$$= -8 \quad (73)$$

Justificación detallada:

■ $(-2) \cdot (-2) = +4$ (producto de dos números negativos es positivo)

■ $4 \cdot (-2) = -8$ (producto de un número positivo por uno negativo es negativo)

Por tanto:

$$x = -8 \quad (74)$$

Paso 6: Verificación de la solución

Sustituimos $x = -8$ en la ecuación original $\sqrt[3]{x} = -2$:

$$\sqrt[3]{-8} \stackrel{?}{=} -2 \quad (75)$$

Calculamos $\sqrt[3]{-8}$:

Buscamos el número que elevado al cubo da -8 . Sabemos que:

$$(-2)^3 = -8 \quad (76)$$

Por tanto:

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \quad \checkmark \quad (77)$$

La solución es correcta.

Resultado final:

$$\boxed{x = -8} \quad (78)$$

Conjunto solución: $S = \{-8\}$

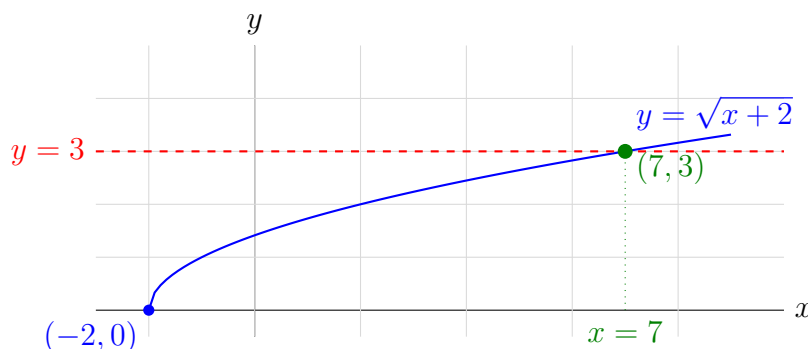
Observación**Diferencia entre raíces de índice par e impar:**

Característica	Índice par	Índice impar
Dominio	$x \geq 0$	$x \in \mathbb{R}$
Signo del resultado	Siempre ≥ 0	Mismo signo que x
Ejemplo	$\sqrt{-4}$ no existe en $\mathbb{R}$	$\sqrt[3]{-8} = -2$
Soluciones extrañas	Pueden aparecer	No aparecen

Verificación numérica adicional:

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2 \quad \checkmark \quad (79)$$

Nota importante: A diferencia del apartado (a), aquí no necesitamos preocuparnos por soluciones extrañas al elevar al cubo, porque la función $f(x) = x^3$ es inyectiva (uno a uno): si $a^3 = b^3$, entonces necesariamente $a = b$.

3.4. Apartado (c): ¿Qué valor debe tener x para que $\sqrt{x+2} = 3$?Figura 6: Representación gráfica de la ecuación $\sqrt{x+2} = 3$ **Solución****Paso 1: Análisis de la ecuación**

Tenemos la ecuación:

$$\sqrt{x+2} = 3 \quad (80)$$

donde buscamos el valor de x que satisface esta condición.**Paso 2: Determinación del dominio**

Para que la raíz cuadrada esté definida en los números reales, el radicando debe ser no negativo:

$$x + 2 \geq 0 \quad (81)$$

Resolviendo esta inecuación:

$$x + 2 \geq 0 \quad (82)$$

$$x \geq -2 \quad (83)$$

Dominio: $x \in [-2, +\infty)$

Paso 3: Elevación al cuadrado

Para eliminar el radical, elevamos ambos miembros al cuadrado:

$$\sqrt{x+2} = 3 \quad (84)$$

$$(\sqrt{x+2})^2 = 3^2 \quad (85)$$

Paso 4: Simplificación

$$(\sqrt{x+2})^2 = 9 \quad (86)$$

$$x + 2 = 9 \quad (87)$$

Justificación: Usamos la propiedad $(\sqrt{a})^2 = a$ para $a \geq 0$.

Paso 5: Resolución de la ecuación lineal

$$x + 2 = 9 \quad (88)$$

$$x = 9 - 2 \quad (89)$$

$$x = 7 \quad (90)$$

Paso 6: Verificación del dominio

Comprobamos que la solución $x = 7$ pertenece al dominio $[-2, +\infty)$:

$$7 \geq -2 \quad \checkmark \quad (91)$$

Paso 7: Verificación en la ecuación original

Sustituimos $x = 7$ en $\sqrt{x+2} = 3$:

$$\sqrt{7+2} \stackrel{?}{=} 3 \quad (92)$$

$$\sqrt{9} \stackrel{?}{=} 3 \quad (93)$$

$$3 = 3 \quad \checkmark \quad (94)$$

La solución es correcta.

Resultado final:

$$\boxed{x = 7} \quad (95)$$

Conjunto solución: $S = \{7\}$

Observación**Proceso completo de verificación:****1. Verificación algebraica:**

$$x = 7 \implies x + 2 = 9 \implies \sqrt{9} = 3 \quad \checkmark \quad (96)$$

2. Verificación del dominio:

$$x = 7 \in [-2, +\infty) \quad \checkmark \quad (97)$$

3. Verificación de que el radicando es no negativo:

$$x + 2 = 7 + 2 = 9 > 0 \quad \checkmark \quad (98)$$

Interpretación geométrica:

La solución $x = 7$ representa el punto de abscisa donde la función $y = \sqrt{x+2}$ alcanza el valor $y = 3$.

Traslación de funciones:

La función $y = \sqrt{x+2}$ es una traslación horizontal de la función básica $y = \sqrt{x}$:

- $y = \sqrt{x}$ tiene dominio $[0, +\infty)$ y pasa por el origen $(0, 0)$
- $y = \sqrt{x+2}$ tiene dominio $[-2, +\infty)$ y pasa por el punto $(-2, 0)$
- La gráfica se desplaza 2 unidades a la izquierda

Método alternativo - Sustitución:

Podríamos hacer el cambio de variable $u = x + 2$:

$$\sqrt{u} = 3 \quad (99)$$

$$u = 9 \quad (100)$$

$$x + 2 = 9 \quad (101)$$

$$x = 7 \quad (102)$$

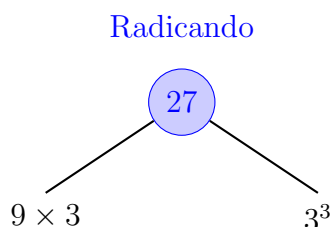
4. Ejercicio 43: Ecuaciones con Radicales II

Enunciado

Realiza las siguientes operaciones y comprobaciones con radicales:

- (a) Simplifica al máximo la expresión $\frac{\sqrt{27}}{3}$
- (b) ¿Es $x = 3$ solución de $\sqrt{2x+3} = x$?
- (c) Descompón $\sqrt{75} + \sqrt{12}$

4.1. Apartado (a): Simplificar $\frac{\sqrt{27}}{3}$



$$\sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = \sqrt{9} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{27}}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

Figura 7: Proceso de simplificación de $\frac{\sqrt{27}}{3}$

Solución

Paso 1: Análisis inicial

Tenemos la expresión:

$$\frac{\sqrt{27}}{3} \tag{103}$$

Para simplificar, primero trabajaremos con el radical $\sqrt{27}$.

Paso 2: Descomposición del radicando

Descomponemos 27 en factores primos:

$$27 = 3 \times 9 \quad (104)$$

$$= 3 \times 3^2 \quad (105)$$

$$= 3^3 \quad (106)$$

Justificación detallada:

$$27 = 3 \times 9 \quad (\text{factorización inicial}) \quad (107)$$

$$9 = 3 \times 3 = 3^2 \quad (9 \text{ es cuadrado perfecto}) \quad (108)$$

$$27 = 3 \times 3^2 = 3^{1+2} = 3^3 \quad (109)$$

Paso 3: Expresión óptima para extracción

Para extraer factores de una raíz cuadrada, buscamos cuadrados perfectos:

$$27 = 9 \times 3 = 3^2 \times 3 \quad (110)$$

donde $9 = 3^2$ es un cuadrado perfecto.

Paso 4: Aplicación de la propiedad del producto

Usamos la propiedad $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$:

$$\sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} \quad (111)$$

$$= \sqrt{9} \times \sqrt{3} \quad (112)$$

Paso 5: Cálculo de $\sqrt{9}$

$$\sqrt{9} = 3 \quad (113)$$

Justificación: $\sqrt{9} = 3$ porque $3^2 = 9$ y tomamos la raíz principal (positiva).

Paso 6: Sustitución

$$\sqrt{27} = 3\sqrt{3} \quad (114)$$

Paso 7: División

Sustituimos en la expresión original:

$$\frac{\sqrt{27}}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{3} \quad (115)$$

Paso 8: Simplificación de la fracción

$$\frac{3\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{3} \cdot \sqrt{3} \quad (116)$$

$$= 1 \cdot \sqrt{3} \quad (117)$$

$$= \sqrt{3} \quad (118)$$

Justificación: Aplicamos la propiedad de las fracciones: $\frac{a \cdot b}{a} = b$ para $a \neq 0$.

Resultado final:

$$\boxed{\frac{\sqrt{27}}{3} = \sqrt{3}} \quad (119)$$

Observación**Método alternativo - Simplificación directa:**

Podemos trabajar directamente con la fracción dentro del radical:

$$\frac{\sqrt{27}}{3} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{9}} \quad (\text{escribimos } 3 = \sqrt{9}) \quad (120)$$

$$= \sqrt{\frac{27}{9}} \quad (\text{propiedad: } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}) \quad (121)$$

$$= \sqrt{3} \quad (122)$$

Verificación numérica:

- $\sqrt{27} \approx 5,19615242$
- $\frac{\sqrt{27}}{3} \approx \frac{5,19615242}{3} \approx 1,73205081$
- $\sqrt{3} \approx 1,73205081 \checkmark$

Comprobación algebraica:

$$\left(\frac{\sqrt{27}}{3}\right)^2 = \frac{27}{9} = 3 = (\sqrt{3})^2 \quad \checkmark \quad (123)$$

Conclusión: Hemos demostrado que $\frac{\sqrt{27}}{3} = \sqrt{3}$ de dos formas diferentes, confirmando el resultado.

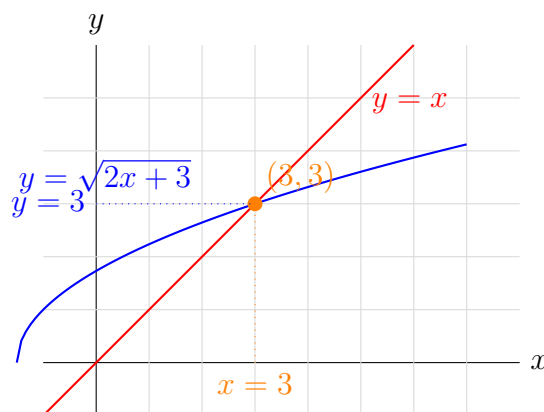
4.2. Apartado (b): ¿Es $x = 3$ solución de $\sqrt{2x+3} = x$?

Figura 8: Verificación gráfica: ¿Es $x = 3$ solución de $\sqrt{2x+3} = x$?

Solución**Paso 1: Planteamiento**

Para determinar si $x = 3$ es solución de la ecuación:

$$\sqrt{2x + 3} = x \quad (124)$$

debemos sustituir $x = 3$ en ambos miembros y verificar si se cumple la igualdad.

Paso 2: Sustitución en el miembro izquierdo

Calculamos $\sqrt{2x + 3}$ cuando $x = 3$:

$$\sqrt{2x + 3} = \sqrt{2 \cdot 3 + 3} \quad (125)$$

$$= \sqrt{6 + 3} \quad (126)$$

$$= \sqrt{9} \quad (127)$$

Paso 3: Cálculo de $\sqrt{9}$

$$\sqrt{9} = 3 \quad (128)$$

Justificación: $\sqrt{9} = 3$ porque $3^2 = 9$ y la raíz cuadrada principal es positiva.

Por tanto:

$$\sqrt{2x + 3} \Big|_{x=3} = 3 \quad (129)$$

Paso 4: Evaluación del miembro derecho

El miembro derecho de la ecuación es simplemente x :

$$x \Big|_{x=3} = 3 \quad (130)$$

Paso 5: Comparación de ambos miembros

Comparamos los resultados:

$$\text{Miembro izquierdo: } \sqrt{2 \cdot 3 + 3} = 3 \quad (131)$$

$$\text{Miembro derecho: } 3 = 3 \quad (132)$$

Como ambos miembros son iguales:

$$3 = 3 \quad \checkmark \quad (133)$$

Paso 6: Verificación del dominio

Adicionalmente, verificamos que $x = 3$ está en el dominio de la ecuación.

El dominio requiere que el radicando sea no negativo:

$$2x + 3 \geq 0 \quad (134)$$

$$2x \geq -3 \quad (135)$$

$$x \geq -\frac{3}{2} \quad (136)$$

Como $3 > -\frac{3}{2}$, tenemos que $x = 3$ está en el dominio $\checkmark$

Conclusión:

$$\boxed{\text{Sí, } x = 3 \text{ ES solución de la ecuación } \sqrt{2x + 3} = x} \quad (137)$$

Observación**¿Existe alguna otra solución?**

Podemos resolver la ecuación completa para encontrar todas las soluciones:

Paso 1: Elevamos al cuadrado:

$$\sqrt{2x+3} = x \quad (138)$$

$$(\sqrt{2x+3})^2 = x^2 \quad (139)$$

$$2x+3 = x^2 \quad (140)$$

Paso 2: Reordenamos:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad (141)$$

Paso 3: Factorizamos o usamos la fórmula cuadrática:

$$x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) = 0 \quad (142)$$

Soluciones candidatas: $x = 3$ o $x = -1$

Verificación de $x = 3$:

$$\sqrt{2 \cdot 3 + 3} = \sqrt{9} = 3 \quad \checkmark \quad (143)$$

Verificación de $x = -1$:

$$\sqrt{2(-1) + 3} \stackrel{?}{=} -1 \quad (144)$$

$$\sqrt{-2 + 3} \stackrel{?}{=} -1 \quad (145)$$

$$\sqrt{1} \stackrel{?}{=} -1 \quad (146)$$

$$1 \neq -1 \quad \times \quad (147)$$

Conclusión: La ecuación tiene una única solución: $x = 3$.

La solución $x = -1$ es una **solución extraña** introducida al elevar al cuadrado. Este es un ejemplo perfecto de por qué siempre debemos verificar las soluciones en la ecuación original.

4.3. Apartado (c): Descompón $\sqrt{75} + \sqrt{12}$

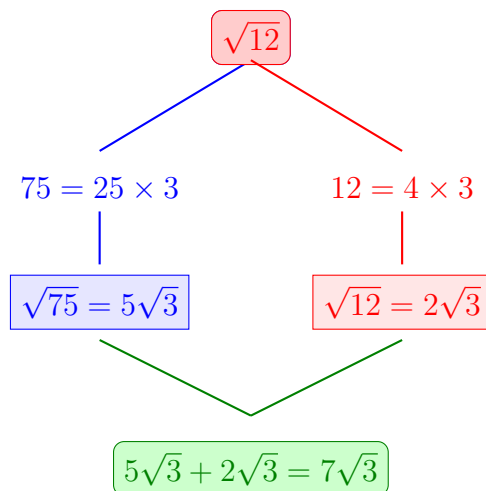


Figura 9: Descomposición y suma de $\sqrt{75} + \sqrt{12}$

Solución

Paso 1: Análisis de la expresión

Tenemos:

$$\sqrt{75} + \sqrt{12} \quad (148)$$

Para simplificar ("descomponer"), debemos extraer todos los factores posibles de cada radical.

Paso 2: Descomposición de $\sqrt{75}$

Factorización de 75:

$$75 = 25 \times 3 \quad (149)$$

$$= 5^2 \times 3 \quad (150)$$

Justificación paso a paso:

- $75 = 3 \times 25$ (descomponemos en factores)
- $25 = 5 \times 5 = 5^2$ (identificamos el cuadrado perfecto)

Extracción de factores:

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} \quad (151)$$

$$= \sqrt{25} \times \sqrt{3} \quad (\text{Propiedad: } \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}) \quad (152)$$

$$= 5\sqrt{3} \quad (153)$$

Paso 3: Descomposición de $\sqrt{12}$

Factorización de 12:

$$12 = 4 \times 3 \quad (154)$$

$$= 2^2 \times 3 \quad (155)$$

Justificación paso a paso:

- $12 = 2 \times 6 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$
- Alternativamente: $12 = 4 \times 3$ donde $4 = 2^2$

Extracción de factores:

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} \quad (156)$$

$$= \sqrt{4} \times \sqrt{3} \quad (157)$$

$$= 2\sqrt{3} \quad (158)$$

Paso 4: Sustitución en la expresión original

$$\sqrt{75} + \sqrt{12} = 5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \quad (159)$$

Paso 5: Suma de radicales semejantes

Ambos términos contienen $\sqrt{3}$ como factor radical, por lo que son **radicales semejantes** y pueden sumarse:

$$5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = (5 + 2)\sqrt{3} \quad (\text{Factorizamos } \sqrt{3}) \quad (160)$$

$$= 7\sqrt{3} \quad (161)$$

Justificación: Esta es análoga a la suma de términos algebraicos: $5x + 2x = 7x$, donde aquí $x = \sqrt{3}$.

Resultado final:

$$\boxed{\sqrt{75} + \sqrt{12} = 7\sqrt{3}} \quad (162)$$

Observación

Tabla de descomposiciones:

Número	Factorización	Cuadrado perfecto	Radical simplificado
75	25×3	$5^2 \times 3$	$5\sqrt{3}$
12	4×3	$2^2 \times 3$	$2\sqrt{3}$

Verificación numérica:

- $\sqrt{75} \approx 8,66025404$
- $\sqrt{12} \approx 3,46410162$
- $\sqrt{75} + \sqrt{12} \approx 8,66025404 + 3,46410162 = 12,12435566$
- $7\sqrt{3} \approx 7 \times 1,73205081 = 12,12435567 \checkmark$

Comprobación algebraica:

$$(7\sqrt{3})^2 = 49 \times 3 = 147 \quad (163)$$

$$(\sqrt{75} + \sqrt{12})^2 = 75 + 2\sqrt{75 \times 12} + 12 \quad (164)$$

$$= 87 + 2\sqrt{900} \quad (165)$$

$$= 87 + 2 \times 30 \quad (166)$$

$$= 87 + 60 = 147 \quad \checkmark \quad (167)$$

Concepto de radicales semejantes:

Dos o más radicales son **semejantes** si tienen el mismo índice y el mismo radicando después de simplificar. Solo los radicales semejantes pueden sumarse o restarse directamente.

Ejemplos:

- $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ (semejantes)
- $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ no se puede simplificar más (no semejantes)
- $\sqrt{50} + \sqrt{2} = 5\sqrt{2} + \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ (después de simplificar son semejantes)

5. Ejercicio 44: Racionalización V (Especiales)

Enunciado

Racionaliza las siguientes expresiones:

(a) Racionaliza: $\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{10}}$

(b) Racionaliza: $\frac{x}{1 - \sqrt{x}}$

(c) Racionaliza: $\frac{5}{\sqrt{50}}$

5.1. Apartado (a): Racionalizar $\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{10}}$

Solución

Paso 1: Análisis inicial

Tenemos la fracción:

$$\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{10}} \quad (168)$$

El denominador contiene el radical $\sqrt{10}$, que debemos eliminar mediante racionalización.

Paso 2: Método de racionalización

Para eliminar $\sqrt{10}$ del denominador, multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{10}$:

$$\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} \quad (169)$$

Justificación: Multiplicar por $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 1$ no cambia el valor de la expresión.

Paso 3: Multiplicación del numerador

$$\text{Numerador: } 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} = 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \quad (170)$$

$$= 2 \cdot \sqrt{5 \times 10} \quad (\text{Propiedad: } \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}) \quad (171)$$

$$= 2\sqrt{50} \quad (172)$$

Paso 4: Simplificación de $\sqrt{50}$

Descomponemos 50:

$$50 = 25 \times 2 \quad (173)$$

$$= 5^2 \times 2 \quad (174)$$

Por tanto:

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} \quad (175)$$

$$= \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} \quad (176)$$

$$= 5\sqrt{2} \quad (177)$$

Sustituimos:

$$2\sqrt{50} = 2 \cdot 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \quad (178)$$

Paso 5: Multiplicación del denominador

$$\text{Denominador: } 3\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 3 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{10} \quad (179)$$

$$= 3 \cdot (\sqrt{10})^2 \quad (180)$$

$$= 3 \cdot 10 \quad (181)$$

$$= 30 \quad (182)$$

Paso 6: Expresión racionalizada

$$\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{10}} = \frac{10\sqrt{2}}{30} \quad (183)$$

Paso 7: Simplificación de la fracción

Simplificamos dividiendo numerador y denominador por su MCD, que es 10:

$$\frac{10\sqrt{2}}{30} = \frac{10\sqrt{2}}{30} \quad (184)$$

$$= \frac{10}{30} \cdot \sqrt{2} \quad (185)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} \quad (186)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} \quad (187)$$

Resultado final:

$$\boxed{\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{3}} \quad (188)$$

Observación

Método alternativo - Simplificación previa:

Podemos simplificar antes de racionalizar:

$$\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{10}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} \quad (189)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{5}{10}} \quad (\text{Propiedad: } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}) \quad (190)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \quad (191)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (192)$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{2}} \quad (193)$$

Ahora racionalizamos:

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad (194)$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3 \cdot 2} \quad (195)$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{6} \quad (196)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} \quad (197)$$

Verificación numérica:

- $\sqrt{5} \approx 2,236$, $\sqrt{10} \approx 3,162$
- $\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{10}} \approx \frac{2 \times 2,236}{3 \times 3,162} = \frac{4,472}{9,487} \approx 0,4714$
- $\frac{\sqrt{2}}{3} \approx \frac{1,4142}{3} \approx 0,4714 \checkmark$

5.2. Apartado (b): Racionalizar $\frac{x}{1 - \sqrt{x}}$

Solución

Paso 1: Análisis inicial

Tenemos la fracción:

$$\frac{x}{1 - \sqrt{x}} \quad (198)$$

El denominador es un binomio que contiene un radical: $1 - \sqrt{x}$.

Paso 2: Identificación del conjugado

Para racionalizar un denominador de la forma $a - b$ que contiene radicales, multiplicamos por el **conjugado** $a + b$.

El conjugado de $1 - \sqrt{x}$ es $1 + \sqrt{x}$.

Justificación teórica: Usamos la identidad algebraica:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2 \quad (199)$$

donde los productos cruzados se cancelan y eliminamos el radical.

Paso 3: Multiplicación por el conjugado

$$\frac{x}{1 - \sqrt{x}} = \frac{x}{1 - \sqrt{x}} \cdot \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \quad (200)$$

Paso 4: Multiplicación del numerador

$$\text{Numerador: } x \cdot (1 + \sqrt{x}) = x \cdot 1 + x \cdot \sqrt{x} \quad (201)$$

$$= x + x\sqrt{x} \quad (202)$$

Simplificación de $x\sqrt{x}$:

Podemos expresar esto de forma más compacta:

$$x\sqrt{x} = x^1 \cdot x^{1/2} \quad (203)$$

$$= x^{1+1/2} \quad (204)$$

$$= x^{3/2} \quad (205)$$

$$= \sqrt{x^3} \quad (206)$$

Alternativamente:

$$x\sqrt{x} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{x^2 \cdot x} = \sqrt{x^3} \quad (207)$$

Por tanto, el numerador es:

$$x + x\sqrt{x} = x + \sqrt{x^3} \quad (208)$$

o podemos factorizar:

$$x + x\sqrt{x} = x(1 + \sqrt{x}) \quad (209)$$

Paso 5: Multiplicación del denominador

Aplicamos la fórmula del producto de conjugados:

$$\text{Denominador: } (1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x}) = 1^2 - (\sqrt{x})^2 \quad (210)$$

$$= 1 - x \quad (211)$$

Justificación detallada:

$$(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x}) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot \sqrt{x} - \sqrt{x} \cdot 1 - \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \quad (212)$$

$$= 1 + \sqrt{x} - \sqrt{x} - (\sqrt{x})^2 \quad (213)$$

$$= 1 - x \quad (214)$$

Paso 6: Expresión racionalizada

$$\frac{x}{1 - \sqrt{x}} = \frac{x(1 + \sqrt{x})}{1 - x} \quad (215)$$

o desarrollando el numerador:

$$\frac{x}{1 - \sqrt{x}} = \frac{x + x\sqrt{x}}{1 - x} \quad (216)$$

Paso 7: Análisis de posible simplificación

Podemos factorizar x en el numerador:

$$\frac{x(1 + \sqrt{x})}{1 - x} \quad (217)$$

Observemos que $1 - x = -(x - 1)$, pero esto no nos ayuda a simplificar con el numerador.

Forma alternativa: Si factorizamos -1 del denominador:

$$\frac{x(1 + \sqrt{x})}{1 - x} = \frac{x(1 + \sqrt{x})}{-(x - 1)} = -\frac{x(1 + \sqrt{x})}{x - 1} \quad (218)$$

Resultado final:

$$\boxed{\frac{x}{1 - \sqrt{x}} = \frac{x(1 + \sqrt{x})}{1 - x} = -\frac{x(1 + \sqrt{x})}{x - 1}} \quad (219)$$

Cualquiera de estas formas es correcta y está completamente racionalizada.

Observación

Dominio de validez:

Para que la expresión tenga sentido, debemos considerar:

1. $\sqrt{x}$ requiere $x \geq 0$
2. El denominador original $1 - \sqrt{x} \neq 0$, es decir, $\sqrt{x} \neq 1$, lo que implica $x \neq 1$
3. El denominador racionalizado $1 - x \neq 0$, es decir, $x \neq 1$ (consistente)

Dominio: $x \in [0, +\infty) \setminus \{1\}$ o $x \geq 0, x \neq 1$

Verificación numérica para $x = 4$:

Expresión original:

$$\frac{4}{1 - \sqrt{4}} = \frac{4}{1 - 2} = \frac{4}{-1} = -4 \quad (220)$$

Expresión racionalizada:

$$\frac{4(1 + \sqrt{4})}{1 - 4} = \frac{4(1 + 2)}{-3} = \frac{4 \cdot 3}{-3} = \frac{12}{-3} = -4 \quad \checkmark \quad (221)$$

Identidad útil:

$$\frac{1}{1 - \sqrt{x}} = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - x} \quad (222)$$

Esta identidad se usa frecuentemente en cálculo de límites.

5.3. Apartado (c): Racionalizar $\frac{5}{\sqrt{50}}$

Solución

Paso 1: Análisis inicial

Tenemos la fracción:

$$\frac{5}{\sqrt{50}} \quad (223)$$

El denominador contiene el radical $\sqrt{50}$.

Paso 2: Simplificación previa de $\sqrt{50}$

Antes de racionalizar, simplificamos el radical del denominador:

Descomponemos 50:

$$50 = 25 \times 2 \quad (224)$$

$$= 5^2 \times 2 \quad (225)$$

Por tanto:

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} \quad (226)$$

$$= \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} \quad (227)$$

$$= 5\sqrt{2} \quad (228)$$

Paso 3: Sustitución

$$\frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} \quad (229)$$

Paso 4: Simplificación algebraica

Podemos simplificar el factor 5:

$$\frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{5}{5 \cdot \sqrt{2}} \quad (230)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (231)$$

Justificación: $\frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{5}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Paso 5: Racionalización

Ahora racionalizamos $\frac{1}{\sqrt{2}}$ multiplicando por $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad (232)$$

$$= \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \quad (233)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} \quad (234)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (235)$$

Resultado final:

$$\boxed{\frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{2}} \quad (236)$$

Observación

Método alternativo - Racionalización directa:

Podemos racionalizar directamente sin simplificar primero:

$$\frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{\sqrt{50}} \cdot \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{50}} \quad (237)$$

$$= \frac{5\sqrt{50}}{(\sqrt{50})^2} \quad (238)$$

$$= \frac{5\sqrt{50}}{50} \quad (239)$$

$$= \frac{\sqrt{50}}{10} \quad (240)$$

Ahora simplificamos:

$$\frac{\sqrt{50}}{10} = \frac{5\sqrt{2}}{10} \quad (241)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (242)$$

Método óptimo - Uso de la propiedad del cociente:

$$\frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{50}} \quad (\text{escribimos } 5 = \sqrt{25}) \quad (243)$$

$$= \sqrt{\frac{25}{50}} \quad (\text{Propiedad: } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}) \quad (244)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}} \quad (245)$$

$$= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} \quad (246)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (247)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (248)$$

Verificación numérica:

- $\sqrt{50} \approx 7,071$
- $\frac{5}{\sqrt{50}} \approx \frac{5}{7,071} \approx 0,707$
- $\sqrt{2} \approx 1,414$
- $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx \frac{1,414}{2} = 0,707 \checkmark$

Nota importante: $\frac{\sqrt{2}}{2}$ es un valor que aparece frecuentemente en trigonometría:

$$\sin 45 = \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (249)$$

6. Ejercicio 45: Combinadas con Extracción

Solución

Paso 1: Análisis de la expresión

Tenemos:

$$2\sqrt{24} - \sqrt{54} + \sqrt{6} \quad (250)$$

Debemos extraer todos los factores posibles de cada radical y luego operar.

Paso 2: Simplificación de $\sqrt{24}$

Descomponemos 24:

$$24 = 4 \times 6 \quad (251)$$

$$= 2^2 \times 6 \quad (252)$$

Extraemos factores:

$$\sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} \quad (253)$$

$$= \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} \quad (254)$$

$$= 2\sqrt{6} \quad (255)$$

Por tanto:

$$2\sqrt{24} = 2 \cdot 2\sqrt{6} = 4\sqrt{6} \quad (256)$$

Paso 3: Simplificación de $\sqrt{54}$

Descomponemos 54:

$$54 = 9 \times 6 \quad (257)$$

$$= 3^2 \times 6 \quad (258)$$

Extraemos factores:

$$\sqrt{54} = \sqrt{9 \times 6} \quad (259)$$

$$= \sqrt{9} \cdot \sqrt{6} \quad (260)$$

$$= 3\sqrt{6} \quad (261)$$

Paso 4: Sustitución en la expresión original

$$2\sqrt{24} - \sqrt{54} + \sqrt{6} = 4\sqrt{6} - 3\sqrt{6} + \sqrt{6} \quad (262)$$

Paso 5: Suma algebraica de radicales semejantes

Todos los términos contienen $\sqrt{6}$, por lo que son radicales semejantes:

$$4\sqrt{6} - 3\sqrt{6} + \sqrt{6} = (4 - 3 + 1)\sqrt{6} \quad (263)$$

$$= 2\sqrt{6} \quad (264)$$

Resultado final:

$$\boxed{2\sqrt{24} - \sqrt{54} + \sqrt{6} = 2\sqrt{6}} \quad (265)$$

6.1. Apartado (b): Simplificar $\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{3}$

Solución

Paso 1: Análisis inicial

Tenemos:

$$\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{3} \quad (266)$$

Paso 2: Descomposición de $\sqrt[3]{81}$

Descomponemos 81 en potencias de 3:

$$81 = 3^4 \quad (267)$$

$$= 3^3 \times 3 \quad (268)$$

$$= 27 \times 3 \quad (269)$$

Paso 3: Extracción de factores cúbicos

$$\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{27 \times 3} \quad (270)$$

$$= \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{3} \quad (271)$$

$$= \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3} \quad (272)$$

$$= 3\sqrt[3]{3} \quad (273)$$

Justificación: $\sqrt[3]{3^3} = 3$ porque $3^3 = 27$ y la raíz cúbica es la operación inversa.

Paso 4: Sustitución

$$\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3} \quad (274)$$

Paso 5: Resta de radicales semejantes

$$3\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3} = (3 - 1)\sqrt[3]{3} \quad (275)$$

$$= 2\sqrt[3]{3} \quad (276)$$

Resultado final:

$$\boxed{\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}} \quad (277)$$

6.2. Apartado (c): Simplificar $\sqrt{a^3b} \cdot \sqrt{ab^3}$ **Solución****Paso 1: Aplicación de la propiedad del producto**

$$\sqrt{a^3b} \cdot \sqrt{ab^3} = \sqrt{a^3b \cdot ab^3} \quad (\text{Propiedad: } \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}) \quad (278)$$

Paso 2: Multiplicación de potencias

$$a^3b \cdot ab^3 = a^3 \cdot a \cdot b \cdot b^3 \quad (279)$$

$$= a^{3+1} \cdot b^{1+3} \quad (280)$$

$$= a^4b^4 \quad (281)$$

Paso 3: Sustitución

$$\sqrt{a^3b} \cdot \sqrt{ab^3} = \sqrt{a^4b^4} \quad (282)$$

Paso 4: Simplificación (suponiendo $a, b > 0$)

$$\sqrt{a^4b^4} = \sqrt{(a^2)^2(b^2)^2} \quad (283)$$

$$= \sqrt{(a^2b^2)^2} \quad (284)$$

$$= a^2b^2 \quad (285)$$

Justificación: Si $a, b > 0$, entonces $\sqrt{(ab)^2} = ab$.**Resultado final:**

$$\boxed{\sqrt{a^3b} \cdot \sqrt{ab^3} = a^2b^2 \quad (\text{para } a, b \geq 0)} \quad (286)$$

7. Ejercicio 46: Radicales y Fracciones

Enunciado

Trabaja con radicales y fracciones:

(a) Expresa $\frac{1}{\sqrt[5]{3}}$ con exponente fraccionario

(b) Expresa $\sqrt{\frac{x^2}{y}}$ simplificando

(c) Simplifica: $\sqrt{\frac{4}{9}} + \sqrt{4}$

7.1. Apartado (a): $\frac{1}{\sqrt[5]{3}}$ con exponente fraccionario

Solución

Paso 1: Expresión del radical como potencia

Por definición:

$$\sqrt[5]{3} = 3^{1/5} \quad (287)$$

Paso 2: Expresión de la fracción

$$\frac{1}{\sqrt[5]{3}} = \frac{1}{3^{1/5}} \quad (288)$$

$$= 3^{-1/5} \quad (289)$$

Justificación: Usamos la propiedad $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$.

Resultado final:

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt[5]{3}} = 3^{-1/5}} \quad (290)$$

7.2. Apartado (b): Simplificar $\sqrt{\frac{x^2}{y}}$ **Solución****Paso 1: Aplicación de la propiedad del cociente**

$$\sqrt{\frac{x^2}{y}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y}} \quad (291)$$

Paso 2: Simplificación del numeradorPara $x \geq 0$:

$$\sqrt{x^2} = |x| = x \quad (292)$$

Paso 3: Expresión simplificada

$$\sqrt{\frac{x^2}{y}} = \frac{x}{\sqrt{y}} \quad (293)$$

Paso 4: Racionalización (opcional)

$$\frac{x}{\sqrt{y}} = \frac{x\sqrt{y}}{y} \quad (294)$$

Resultado final:

$$\boxed{\sqrt{\frac{x^2}{y}} = \frac{x}{\sqrt{y}} = \frac{x\sqrt{y}}{y} \quad (x, y > 0)} \quad (295)$$

7.3. Apartado (c): $\sqrt{\frac{4}{9}} + \sqrt{4}$ **Solución****Paso 1:** Cálculo de $\sqrt{\frac{4}{9}}$

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} \quad (296)$$

$$= \frac{2}{3} \quad (297)$$

Paso 2: Cálculo de $\sqrt{4}$

$$\sqrt{4} = 2 \quad (298)$$

Paso 3: Suma

$$\sqrt{\frac{4}{9}} + \sqrt{4} = \frac{2}{3} + 2 \quad (299)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{6}{3} \quad (300)$$

$$= \frac{8}{3} \quad (301)$$

Resultado final:

$$\boxed{\sqrt{\frac{4}{9}} + \sqrt{4} = \frac{8}{3}} \quad (302)$$

8. Ejercicio 47: Reducción a Índice Común I

Enunciado

Reduce a índice común y opera:

- (a) Reduce a índice común: $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{2}$
- (b) Reduce a índice común: $\sqrt[4]{a^3}$ y $\sqrt{a}$
- (c) Ordena de menor a mayor: $\sqrt{5}$ y $\sqrt[3]{11}$

8.1. Apartado (a): Reducir $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{2}$ a índice común

Solución

Paso 1: Índices actuales

- $\sqrt{3} = \sqrt[2]{3}$ tiene índice 2
- $\sqrt[3]{2}$ tiene índice 3

Paso 2: Cálculo del MCM de los índices

$$\text{MCM}(2, 3) = 6 \quad (303)$$

Paso 3: Conversión de $\sqrt{3}$ a índice 6

$$\sqrt{3} = \sqrt[2]{3} = 3^{1/2} = 3^{3/6} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27} \quad (304)$$

Paso 4: Conversión de $\sqrt[3]{2}$ a índice 6

$$\sqrt[3]{2} = 2^{1/3} = 2^{2/6} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{4} \quad (305)$$

Resultado final:

$$\boxed{\sqrt{3} = \sqrt[6]{27} \quad \text{y} \quad \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{4}} \quad (306)$$

8.2. Apartado (b): Reducir $\sqrt[4]{a^3}$ y $\sqrt{a}$ a índice común

Solución

Paso 1: MCM de índices

$$\text{MCM}(4, 2) = 4$$

Paso 2: Conversión de $\sqrt{a}$ a índice 4

$$\sqrt{a} = a^{1/2} = a^{2/4} = \sqrt[4]{a^2} \quad (307)$$

Resultado final:

$$\boxed{\sqrt[4]{a^3} \quad \text{y} \quad \sqrt{a} = \sqrt[4]{a^2}} \quad (308)$$

8.3. Apartado (c): Ordenar $\sqrt{5}$ y $\sqrt[3]{11}$

Solución

Paso 1: Reducción a índice común

$$\text{MCM}(2, 3) = 6$$

$$\sqrt{5} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{125} \quad (309)$$

$$\sqrt[3]{11} = \sqrt[6]{11^2} = \sqrt[6]{121} \quad (310)$$

Paso 2: Comparación

Como $121 < 125$:

$$\sqrt[6]{121} < \sqrt[6]{125} \quad (311)$$

Resultado final:

$$\boxed{\sqrt[3]{11} < \sqrt{5}} \quad (312)$$

9. Ejercicio 48: Reducción a Índice Común II

Enunciado

Continúa trabajando con índices comunes:

(a) Simplifica: $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}}$

(b) Reduce a índice común y multiplica: $\sqrt{10} \cdot \sqrt[4]{2}$

(c) Simplifica: $\sqrt[8]{16}$

9.1. Apartado (a): $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}}$

Solución

Método 1: Exponentes fraccionarios

$$\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}} = \frac{x^{2/3}}{x^{1/6}} \quad (313)$$

$$= x^{2/3-1/6} \quad (314)$$

$$= x^{4/6-1/6} \quad (315)$$

$$= x^{3/6} \quad (316)$$

$$= x^{1/2} \quad (317)$$

$$= \sqrt{x} \quad (318)$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}} = \sqrt{x}} \quad (319)$$

9.2. Apartado (b): $\sqrt{10} \cdot \sqrt[4]{2}$ **Solución****Paso 1: Índice común**

$$\text{MCM}(2, 4) = 4$$

$$\sqrt{10} = \sqrt[4]{10^2} = \sqrt[4]{100} \quad (320)$$

Paso 2: Producto

$$\sqrt[4]{100} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{100 \times 2} \quad (321)$$

$$= \sqrt[4]{200} \quad (322)$$

Resultado:

$$\boxed{\sqrt{10} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{200}} \quad (323)$$

9.3. Apartado (c): $\sqrt[8]{16}$ **Solución**

$$\sqrt[8]{16} = \sqrt[8]{2^4} \quad (324)$$

$$= 2^{4/8} \quad (325)$$

$$= 2^{1/2} \quad (326)$$

$$= \sqrt{2} \quad (327)$$

Resultado:

$$\boxed{\sqrt[8]{16} = \sqrt{2}} \quad (328)$$

10. Ejercicio 49: Potencias y Raíces

Enunciado

Trabaja con potencias y raíces:

(a) Simplifica: $\sqrt{3^4 \cdot 5^2}$

(b) Simplifica: $\sqrt[3]{\frac{x^9}{y^6}}$

(c) ¿Qué valor tiene x si $\sqrt{x^2} = |x|$?

10.1. Apartado (a): $\sqrt{3^4 \cdot 5^2}$

Solución

$$\sqrt{3^4 \cdot 5^2} = \sqrt{3^4} \cdot \sqrt{5^2} \quad (329)$$

$$= 3^{4/2} \cdot 5^{2/2} \quad (330)$$

$$= 3^2 \cdot 5^1 \quad (331)$$

$$= 9 \cdot 5 \quad (332)$$

$$= 45 \quad (333)$$

Resultado:

$$\boxed{\sqrt{3^4 \cdot 5^2} = 45} \quad (334)$$

10.2. Apartado (b): $\sqrt[3]{\frac{x^9}{y^6}}$

Solución

$$\sqrt[3]{\frac{x^9}{y^6}} = \frac{\sqrt[3]{x^9}}{\sqrt[3]{y^6}} \quad (335)$$

$$= \frac{x^{9/3}}{y^{6/3}} \quad (336)$$

$$= \frac{x^3}{y^2} \quad (337)$$

Resultado:

$$\boxed{\sqrt[3]{\frac{x^9}{y^6}} = \frac{x^3}{y^2}} \quad (338)$$

10.3. Apartado (c): $\sqrt{x^2} = |x|$

Solución

La igualdad $\sqrt{x^2} = |x|$ es **siempre verdadera** para todo $x \in \mathbb{R}$.

Justificación:

- Si $x \geq 0$: $\sqrt{x^2} = x = |x|$
- Si $x < 0$: $\sqrt{x^2} = -x = |x|$ (porque $\sqrt{}$ devuelve el valor positivo)

Resultado:

$$\boxed{x \in \mathbb{R} \quad (\text{todos los números reales})} \quad (339)$$

11. Ejercicio 50: Binomios Conjugados

Enunciado

Trabaja con binomios conjugados:

(a) Racionaliza: $\frac{1}{2\sqrt{3}-1}$

(b) Simplifica: $(2 - \sqrt{3})^2$

(c) Simplifica: $\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} + \frac{1 + \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}}$

11.1. Apartado (a): $\frac{1}{2\sqrt{3}-1}$

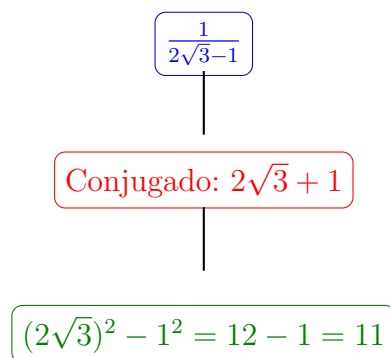


Figura 10: Proceso de racionalización usando el conjugado

Solución**Paso 1: Identificación del conjugado**

El conjugado de $2\sqrt{3} - 1$ es $2\sqrt{3} + 1$.

Paso 2: Multiplicación por el conjugado

$$\frac{1}{2\sqrt{3} - 1} = \frac{1}{2\sqrt{3} - 1} \cdot \frac{2\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3} + 1} \quad (340)$$

Paso 3: Multiplicación del numerador

$$1 \cdot (2\sqrt{3} + 1) = 2\sqrt{3} + 1 \quad (341)$$

Paso 4: Multiplicación del denominador

Usamos $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$:

$$(2\sqrt{3} - 1)(2\sqrt{3} + 1) = (2\sqrt{3})^2 - 1^2 \quad (342)$$

$$= 4 \cdot 3 - 1 \quad (343)$$

$$= 12 - 1 \quad (344)$$

$$= 11 \quad (345)$$

Resultado final:

$$\boxed{\frac{1}{2\sqrt{3} - 1} = \frac{2\sqrt{3} + 1}{11}} \quad (346)$$

11.2. Apartado (b): $(2 - \sqrt{3})^2$ **Solución****Paso 1: Aplicación del binomio al cuadrado**

Usamos la fórmula $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:

$$(2 - \sqrt{3})^2 = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 \quad (347)$$

$$= 4 - 4\sqrt{3} + 3 \quad (348)$$

$$= 7 - 4\sqrt{3} \quad (349)$$

Resultado final:

$$\boxed{(2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3}} \quad (350)$$

11.3. Apartado (c): $\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} + \frac{1 + \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}}$

Solución

Paso 1: Racionalización de la primera fracción

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} = \frac{(1 - \sqrt{5})^2}{(1 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})} \quad (351)$$

$$= \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{1 - 5} \quad (352)$$

$$= \frac{6 - 2\sqrt{5}}{-4} \quad (353)$$

$$= \frac{-6 + 2\sqrt{5}}{4} \quad (354)$$

$$= \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \quad (355)$$

Paso 2: Racionalización de la segunda fracción

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} = \frac{(1 + \sqrt{5})^2}{(1 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})} \quad (356)$$

$$= \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{1 - 5} \quad (357)$$

$$= \frac{6 + 2\sqrt{5}}{-4} \quad (358)$$

$$= \frac{-6 - 2\sqrt{5}}{4} \quad (359)$$

$$= \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \quad (360)$$

Paso 3: Suma de las fracciones

$$\frac{-3 + \sqrt{5}}{2} + \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{-3 + \sqrt{5} - 3 - \sqrt{5}}{2} \quad (361)$$

$$= \frac{-6}{2} \quad (362)$$

$$= -3 \quad (363)$$

Resultado final:

$$\boxed{\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} + \frac{1 + \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} = -3} \quad (364)$$

Observación**Patrón general:**

Para cualquier a y b :

$$\frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b} = \frac{(a-b)^2 + (a+b)^2}{a^2 - b^2} \quad (365)$$

Desarrollando los numeradores:

$$(a-b)^2 + (a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 + a^2 + 2ab + b^2 \quad (366)$$

$$= 2a^2 + 2b^2 \quad (367)$$

Por tanto:

$$\frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b} = \frac{2a^2 + 2b^2}{a^2 - b^2} \quad (368)$$

En nuestro caso, $a = 1$, $b = \sqrt{5}$:

$$\frac{2(1) + 2(5)}{1 - 5} = \frac{2 + 10}{-4} = \frac{12}{-4} = -3 \quad \checkmark \quad (369)$$

12. Conclusión

En este documento hemos resuelto de forma exhaustiva y rigurosa los ejercicios 41 al 50 del Bloque II sobre Radicales, correspondientes a Matemáticas de 4º ESO (Opción A).

12.1. Técnicas cubiertas

A lo largo de estos diez ejercicios hemos trabajado las siguientes técnicas fundamentales:

1. Racionalización de denominadores:

- Denominadores con radicales simples: multiplicar por el mismo radical
- Denominadores binomios: multiplicar por el conjugado
- Simplificación previa para optimizar cálculos

2. Ecuaciones con radicales:

- Aislamiento del radical
- Elevación a la potencia adecuada
- Verificación obligatoria de soluciones (especialmente con índice par)
- Identificación de soluciones extrañas

3. Simplificación de radicales:

- Extracción de factores del radicando
- Descomposición en factores primos
- Identificación de cuadrados/cubos perfectos

4. Operaciones con radicales:

- Suma y resta de radicales semejantes
- Producto y cociente de radicales
- Propiedad distributiva con radicales

5. Reducción a índice común:

- Cálculo del MCM de los índices
- Conversión usando exponentes fraccionarios
- Comparación y ordenación de radicales

6. Binomios conjugados:

- Identidad $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
- Desarrollo de cuadrados de binomios
- Simplificación de expresiones complejas

12.2. Propiedades fundamentales utilizadas

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \quad (370)$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0) \quad (371)$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} \quad (372)$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \quad (373)$$

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \quad \text{si } n \text{ es par} \quad (374)$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a \quad \text{si } n \text{ es impar} \quad (375)$$

12.3. Recomendaciones finales

Para dominar completamente el trabajo con radicales:

- **Practicar** la identificación rápida de cuadrados y cubos perfectos
- **Verificar siempre** las soluciones en ecuaciones radicales
- **Simplificar** antes de operar cuando sea posible
- **Comprender** conceptualmente el significado de las operaciones
- **Dominar** la relación entre radicales y exponentes fraccionarios

Fin del documento de soluciones
Ejercicios 41 - 50: Radicales
Matemáticas 4º ESO - Opción A

Solución**Paso 1: Análisis de la expresión**

Tenemos:

$$2\sqrt{24} - \sqrt{54} + \sqrt{6} \quad (376)$$

Debemos extraer todos los factores posibles de cada radical y luego operar.

Paso 2: Simplificación de $\sqrt{24}$

Descomponemos 24:

$$24 = 4 \times 6 \quad (377)$$

$$= 2^2 \times 6 \quad (378)$$

Extraemos factores:

$$\sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} \quad (379)$$

$$= \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} \quad (380)$$

$$= 2\sqrt{6} \quad (381)$$

Por tanto:

$$2\sqrt{24} = 2 \cdot 2\sqrt{6} = 4\sqrt{6} \quad (382)$$

Paso 3: Simplificación de $\sqrt{54}$

Descomponemos 54:

$$54 = 9 \times 6 \quad (383)$$

$$= 3^2 \times 6 \quad (384)$$

Extraemos factores:

$$\sqrt{54} = \sqrt{9 \times 6} \quad (385)$$

$$= \sqrt{9} \cdot \sqrt{6} \quad (386)$$

$$= 3\sqrt{6} \quad (387)$$

Paso 4: Sustitución en la expresión original

$$2\sqrt{24} - \sqrt{54} + \sqrt{6} = 4\sqrt{6} - 3\sqrt{6} + \sqrt{6} \quad (388)$$

Paso 5: Suma algebraica de radicales semejantesTodos los términos contienen $\sqrt{6}$, por lo que son radicales semejantes:

$$4\sqrt{6} - 3\sqrt{6} + \sqrt{6} = (4 - 3 + 1)\sqrt{6} \quad (389)$$

$$= 2\sqrt{6} \quad (390)$$

Resultado final:

$$\boxed{2\sqrt{24} - \sqrt{54} + \sqrt{6} = 2\sqrt{6}} \quad (391)$$

12.4. Apartado (b): Simplificar $\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{3}$ **Solución****Paso 1: Análisis inicial**

Tenemos:

$$\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{3} \quad (392)$$

Paso 2: Descomposición de $\sqrt[3]{81}$

Descomponemos 81 en potencias de 3:

$$81 = 3^4 \quad (393)$$

$$= 3^3 \times 3 \quad (394)$$

$$= 27 \times 3 \quad (395)$$

Paso 3: Extracción de factores cúbicos

$$\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{27 \times 3} \quad (396)$$

$$= \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{3} \quad (397)$$

$$= \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3} \quad (398)$$

$$= 3\sqrt[3]{3} \quad (399)$$

Justificación: $\sqrt[3]{3^3} = 3$ porque $3^3 = 27$ y la raíz cúbica es la operación inversa.**Paso 4: Sustitución**

$$\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3} \quad (400)$$

Paso 5: Resta de radicales semejantes

$$3\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3} = (3 - 1)\sqrt[3]{3} \quad (401)$$

$$= 2\sqrt[3]{3} \quad (402)$$

Resultado final:

$$\boxed{\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}} \quad (403)$$

12.5. Apartado (c): Simplificar $\sqrt{a^3b} \cdot \sqrt{ab^3}$ **Solución****Paso 1: Aplicación de la propiedad del producto**

$$\sqrt{a^3b} \cdot \sqrt{ab^3} = \sqrt{a^3b \cdot ab^3} \quad (\text{Propiedad: } \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}) \quad (404)$$

Paso 2: Multiplicación de potencias

$$a^3b \cdot ab^3 = a^3 \cdot a \cdot b \cdot b^3 \quad (405)$$

$$= a^{3+1} \cdot b^{1+3} \quad (406)$$

$$= a^4b^4 \quad (407)$$

Paso 3: Sustitución

$$\sqrt{a^3b} \cdot \sqrt{ab^3} = \sqrt{a^4b^4} \quad (408)$$

Paso 4: Simplificación (suponiendo $a, b > 0$)

$$\sqrt{a^4b^4} = \sqrt{(a^2)^2(b^2)^2} \quad (409)$$

$$= \sqrt{(a^2b^2)^2} \quad (410)$$

$$= a^2b^2 \quad (411)$$

Justificación: Si $a, b > 0$, entonces $\sqrt{(ab)^2} = ab$.**Resultado final:**

$$\boxed{\sqrt{a^3b} \cdot \sqrt{ab^3} = a^2b^2 \quad (\text{para } a, b \geq 0)} \quad (412)$$

13. Ejercicio 46: Radicales y Fracciones

Enunciado

Trabaja con radicales y fracciones:

(a) Expresa $\frac{1}{\sqrt[5]{3}}$ con exponente fraccionario

(b) Expresa $\sqrt{\frac{x^2}{y}}$ simplificando

(c) Simplifica: $\sqrt{\frac{4}{9}} + \sqrt{4}$

13.1. Apartado (a): $\frac{1}{\sqrt[5]{3}}$ con exponente fraccionario

Solución

Paso 1: Expresión del radical como potencia

Por definición:

$$\sqrt[5]{3} = 3^{1/5} \quad (413)$$

Paso 2: Expresión de la fracción

$$\frac{1}{\sqrt[5]{3}} = \frac{1}{3^{1/5}} \quad (414)$$

$$= 3^{-1/5} \quad (415)$$

Justificación: Usamos la propiedad $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$.

Resultado final:

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt[5]{3}} = 3^{-1/5}} \quad (416)$$

13.2. Apartado (b): Simplificar $\sqrt{\frac{x^2}{y}}$ **Solución****Paso 1: Aplicación de la propiedad del cociente**

$$\sqrt{\frac{x^2}{y}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y}} \quad (417)$$

Paso 2: Simplificación del numeradorPara $x \geq 0$:

$$\sqrt{x^2} = |x| = x \quad (418)$$

Paso 3: Expresión simplificada

$$\sqrt{\frac{x^2}{y}} = \frac{x}{\sqrt{y}} \quad (419)$$

Paso 4: Racionalización (opcional)

$$\frac{x}{\sqrt{y}} = \frac{x\sqrt{y}}{y} \quad (420)$$

Resultado final:

$$\boxed{\sqrt{\frac{x^2}{y}} = \frac{x}{\sqrt{y}} = \frac{x\sqrt{y}}{y} \quad (x, y > 0)} \quad (421)$$

13.3. Apartado (c): $\sqrt{\frac{4}{9}} + \sqrt{4}$ **Solución****Paso 1:** Cálculo de $\sqrt{\frac{4}{9}}$

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} \quad (422)$$

$$= \frac{2}{3} \quad (423)$$

Paso 2: Cálculo de $\sqrt{4}$

$$\sqrt{4} = 2 \quad (424)$$

Paso 3: Suma

$$\sqrt{\frac{4}{9}} + \sqrt{4} = \frac{2}{3} + 2 \quad (425)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{6}{3} \quad (426)$$

$$= \frac{8}{3} \quad (427)$$

Resultado final:

$$\boxed{\sqrt{\frac{4}{9}} + \sqrt{4} = \frac{8}{3}} \quad (428)$$

14. Ejercicio 47: Reducción a Índice Común I

Enunciado

Reduce a índice común y opera:

- (a) Reduce a índice común: $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{2}$
- (b) Reduce a índice común: $\sqrt[4]{a^3}$ y $\sqrt{a}$
- (c) Ordena de menor a mayor: $\sqrt{5}$ y $\sqrt[3]{11}$

14.1. Apartado (a): Reducir $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{2}$ a índice común

Solución

Paso 1: Índices actuales

- $\sqrt{3} = \sqrt[2]{3}$ tiene índice 2
- $\sqrt[3]{2}$ tiene índice 3

Paso 2: Cálculo del MCM de los índices

$$\text{MCM}(2, 3) = 6 \quad (429)$$

Paso 3: Conversión de $\sqrt{3}$ a índice 6

$$\sqrt{3} = \sqrt[2]{3} = 3^{1/2} = 3^{3/6} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27} \quad (430)$$

Paso 4: Conversión de $\sqrt[3]{2}$ a índice 6

$$\sqrt[3]{2} = 2^{1/3} = 2^{2/6} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{4} \quad (431)$$

Resultado final:

$$\boxed{\sqrt{3} = \sqrt[6]{27} \quad \text{y} \quad \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{4}} \quad (432)$$

14.2. Apartado (b): Reducir $\sqrt[4]{a^3}$ y $\sqrt{a}$ a índice común**Solución****Paso 1: MCM de índices**

$$\text{MCM}(4, 2) = 4$$

Paso 2: Conversión de $\sqrt{a}$ a índice 4

$$\sqrt{a} = a^{1/2} = a^{2/4} = \sqrt[4]{a^2} \quad (433)$$

Resultado final:

$$\boxed{\sqrt[4]{a^3} \text{ y } \sqrt{a} = \sqrt[4]{a^2}} \quad (434)$$

14.3. Apartado (c): Ordenar $\sqrt{5}$ y $\sqrt[3]{11}$ **Solución****Paso 1: Reducción a índice común**

$$\text{MCM}(2, 3) = 6$$

$$\sqrt{5} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{125} \quad (435)$$

$$\sqrt[3]{11} = \sqrt[6]{11^2} = \sqrt[6]{121} \quad (436)$$

Paso 2: ComparaciónComo $121 < 125$:

$$\sqrt[6]{121} < \sqrt[6]{125} \quad (437)$$

Resultado final:

$$\boxed{\sqrt[3]{11} < \sqrt{5}} \quad (438)$$

15. Ejercicio 48: Reducción a Índice Común II

Enunciado

Continúa trabajando con índices comunes:

(a) Simplifica: $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}}$

(b) Reduce a índice común y multiplica: $\sqrt{10} \cdot \sqrt[4]{2}$

(c) Simplifica: $\sqrt[8]{16}$

15.1. Apartado (a): $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}}$

Solución

Método 1: Exponentes fraccionarios

$$\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}} = \frac{x^{2/3}}{x^{1/6}} \quad (439)$$

$$= x^{2/3-1/6} \quad (440)$$

$$= x^{4/6-1/6} \quad (441)$$

$$= x^{3/6} \quad (442)$$

$$= x^{1/2} \quad (443)$$

$$= \sqrt{x} \quad (444)$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}} = \sqrt{x}} \quad (445)$$

15.2. Apartado (b): $\sqrt{10} \cdot \sqrt[4]{2}$ **Solución****Paso 1: Índice común**

$$\text{MCM}(2, 4) = 4$$

$$\sqrt{10} = \sqrt[4]{10^2} = \sqrt[4]{100} \quad (446)$$

Paso 2: Producto

$$\sqrt[4]{100} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{100 \times 2} \quad (447)$$

$$= \sqrt[4]{200} \quad (448)$$

Resultado:

$$\boxed{\sqrt{10} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{200}} \quad (449)$$

15.3. Apartado (c): $\sqrt[8]{16}$ **Solución**

$$\sqrt[8]{16} = \sqrt[8]{2^4} \quad (450)$$

$$= 2^{4/8} \quad (451)$$

$$= 2^{1/2} \quad (452)$$

$$= \sqrt{2} \quad (453)$$

Resultado:

$$\boxed{\sqrt[8]{16} = \sqrt{2}} \quad (454)$$

16. Ejercicio 49: Potencias y Raíces

Enunciado

Trabaja con potencias y raíces:

(a) Simplifica: $\sqrt{3^4 \cdot 5^2}$

(b) Simplifica: $\sqrt[3]{\frac{x^9}{y^6}}$

(c) ¿Qué valor tiene x si $\sqrt{x^2} = |x|$?

16.1. Apartado (a): $\sqrt{3^4 \cdot 5^2}$

Solución

$$\sqrt{3^4 \cdot 5^2} = \sqrt{3^4} \cdot \sqrt{5^2} \quad (455)$$

$$= 3^{4/2} \cdot 5^{2/2} \quad (456)$$

$$= 3^2 \cdot 5^1 \quad (457)$$

$$= 9 \cdot 5 \quad (458)$$

$$= 45 \quad (459)$$

Resultado:

$$\boxed{\sqrt{3^4 \cdot 5^2} = 45} \quad (460)$$

16.2. Apartado (b): $\sqrt[3]{\frac{x^9}{y^6}}$

Solución

$$\sqrt[3]{\frac{x^9}{y^6}} = \frac{\sqrt[3]{x^9}}{\sqrt[3]{y^6}} \quad (461)$$

$$= \frac{x^{9/3}}{y^{6/3}} \quad (462)$$

$$= \frac{x^3}{y^2} \quad (463)$$

Resultado:

$$\boxed{\sqrt[3]{\frac{x^9}{y^6}} = \frac{x^3}{y^2}} \quad (464)$$

16.3. Apartado (c): $\sqrt{x^2} = |x|$

Solución

La igualdad $\sqrt{x^2} = |x|$ es **siempre verdadera** para todo $x \in \mathbb{R}$.

Justificación:

- Si $x \geq 0$: $\sqrt{x^2} = x = |x|$
- Si $x < 0$: $\sqrt{x^2} = -x = |x|$ (porque $\sqrt{}$ devuelve el valor positivo)

Resultado:

$$\boxed{x \in \mathbb{R} \quad (\text{todos los números reales})} \quad (465)$$

17. Ejercicio 50: Binomios Conjugados

Enunciado

Trabaja con binomios conjugados:

(a) Racionaliza: $\frac{1}{2\sqrt{3}-1}$

(b) Simplifica: $(2-\sqrt{3})^2$

(c) Simplifica: $\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} + \frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}$

17.1. Apartado (a): $\frac{1}{2\sqrt{3}-1}$

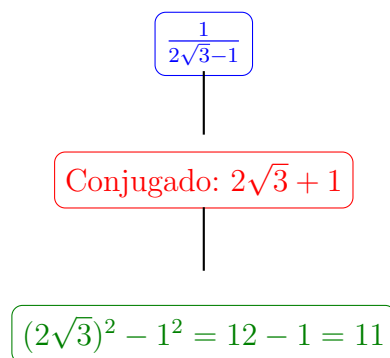


Figura 11: Proceso de racionalización usando el conjugado

Solución**Paso 1: Identificación del conjugado**

El conjugado de $2\sqrt{3} - 1$ es $2\sqrt{3} + 1$.

Paso 2: Multiplicación por el conjugado

$$\frac{1}{2\sqrt{3} - 1} = \frac{1}{2\sqrt{3} - 1} \cdot \frac{2\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3} + 1} \quad (466)$$

Paso 3: Multiplicación del numerador

$$1 \cdot (2\sqrt{3} + 1) = 2\sqrt{3} + 1 \quad (467)$$

Paso 4: Multiplicación del denominador

Usamos $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$:

$$(2\sqrt{3} - 1)(2\sqrt{3} + 1) = (2\sqrt{3})^2 - 1^2 \quad (468)$$

$$= 4 \cdot 3 - 1 \quad (469)$$

$$= 12 - 1 \quad (470)$$

$$= 11 \quad (471)$$

Resultado final:

$$\boxed{\frac{1}{2\sqrt{3} - 1} = \frac{2\sqrt{3} + 1}{11}} \quad (472)$$

17.2. Apartado (b): $(2 - \sqrt{3})^2$ **Solución****Paso 1: Aplicación del binomio al cuadrado**

Usamos la fórmula $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:

$$(2 - \sqrt{3})^2 = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 \quad (473)$$

$$= 4 - 4\sqrt{3} + 3 \quad (474)$$

$$= 7 - 4\sqrt{3} \quad (475)$$

Resultado final:

$$\boxed{(2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3}} \quad (476)$$

17.3. Apartado (c): $\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} + \frac{1 + \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}}$

Solución**Paso 1: Racionalización de la primera fracción**

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} = \frac{(1 - \sqrt{5})^2}{(1 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})} \quad (477)$$

$$= \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{1 - 5} \quad (478)$$

$$= \frac{6 - 2\sqrt{5}}{-4} \quad (479)$$

$$= \frac{-6 + 2\sqrt{5}}{4} \quad (480)$$

$$= \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \quad (481)$$

Paso 2: Racionalización de la segunda fracción

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} = \frac{(1 + \sqrt{5})^2}{(1 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})} \quad (482)$$

$$= \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{1 - 5} \quad (483)$$

$$= \frac{6 + 2\sqrt{5}}{-4} \quad (484)$$

$$= \frac{-6 - 2\sqrt{5}}{4} \quad (485)$$

$$= \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \quad (486)$$

Paso 3: Suma de las fracciones

$$\frac{-3 + \sqrt{5}}{2} + \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{-3 + \sqrt{5} - 3 - \sqrt{5}}{2} \quad (487)$$

$$= \frac{-6}{2} \quad (488)$$

$$= -3 \quad (489)$$

Resultado final:

$$\boxed{\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} + \frac{1 + \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} = -3} \quad (490)$$

Observación**Patrón general:**

Para cualquier a y b :

$$\frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b} = \frac{(a-b)^2 + (a+b)^2}{a^2 - b^2} \quad (491)$$

Desarrollando los numeradores:

$$(a-b)^2 + (a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 + a^2 + 2ab + b^2 \quad (492)$$

$$= 2a^2 + 2b^2 \quad (493)$$

Por tanto:

$$\frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b} = \frac{2a^2 + 2b^2}{a^2 - b^2} \quad (494)$$

En nuestro caso, $a = 1$, $b = \sqrt{5}$:

$$\frac{2(1) + 2(5)}{1 - 5} = \frac{2 + 10}{-4} = \frac{12}{-4} = -3 \quad \checkmark \quad (495)$$

18. Conclusión

En este documento hemos resuelto de forma exhaustiva y rigurosa los ejercicios 41 al 50 del Bloque II sobre Radicales, correspondientes a Matemáticas de 4º ESO (Opción A).

18.1. Técnicas cubiertas

A lo largo de estos diez ejercicios hemos trabajado las siguientes técnicas fundamentales:

1. Racionalización de denominadores:

- Denominadores con radicales simples: multiplicar por el mismo radical
- Denominadores binomios: multiplicar por el conjugado
- Simplificación previa para optimizar cálculos

2. Ecuaciones con radicales:

- Aislamiento del radical
- Elevación a la potencia adecuada
- Verificación obligatoria de soluciones (especialmente con índice par)
- Identificación de soluciones extrañas

3. Simplificación de radicales:

- Extracción de factores del radicando
- Descomposición en factores primos
- Identificación de cuadrados/cubos perfectos

4. Operaciones con radicales:

- Suma y resta de radicales semejantes
- Producto y cociente de radicales
- Propiedad distributiva con radicales

5. Reducción a índice común:

- Cálculo del MCM de los índices
- Conversión usando exponentes fraccionarios
- Comparación y ordenación de radicales

6. Binomios conjugados:

- Identidad $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
- Desarrollo de cuadrados de binomios
- Simplificación de expresiones complejas

18.2. Propiedades fundamentales utilizadas

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \quad (496)$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0) \quad (497)$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} \quad (498)$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \quad (499)$$

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \quad \text{si } n \text{ es par} \quad (500)$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a \quad \text{si } n \text{ es impar} \quad (501)$$

18.3. Recomendaciones finales

Para dominar completamente el trabajo con radicales:

- **Practicar** la identificación rápida de cuadrados y cubos perfectos
- **Verificar siempre** las soluciones en ecuaciones radicales
- **Simplificar** antes de operar cuando sea posible
- **Comprender** conceptualmente el significado de las operaciones
- **Dominar** la relación entre radicales y exponentes fraccionarios

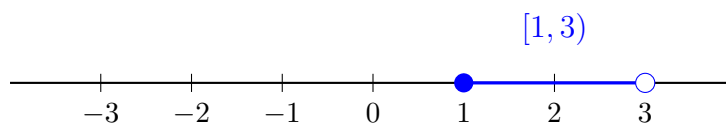
Fin del documento de soluciones
Ejercicios 41 - 50: Radicales
Matemáticas 4º ESO - Opción A

Soluciones Detalladas

Ejercicios 51 - 60

Bloque III: Intervalos, Aproximación y Potencias

Matemáticas 4º ESO - Opción A



$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Autor: SuperAgent - CREA O

Basado en: Ladislao Jáñez Blanco

Fecha: 26 de febrero de 2026

Índice

1. Introducción	2
1.1. Contenido del Bloque III	2
1.2. Conceptos fundamentales	2
2. Ejercicio 51: Intervalos y Desigualdades I	4
2.1. Apartado (a): Expresar como intervalo $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 7\}$	4
2.2. Apartado (b): Expresar como desigualdad $(-3, 5]$	6
2.3. Apartado (c): Representar en la recta real $(-3, 5]$	7
3. Ejercicio 52: Intervalos y Desigualdades II	10
3.1. Apartado (a): Números mayores que -2	10
3.2. Apartado (b): Expresar $(-\infty, 4)$ como desigualdad	11
3.3. Apartado (c): Números menores o iguales a 10	13
4. Ejercicio 53: Entornos I	15
4.1. Conceptos teóricos previos	15
4.2. Apartado (a): Centro y radio de $[1, 9]$	15
4.3. Apartado (b): Expresar $[1, 9]$ como entorno	17
4.4. Apartado (c): Expresar $E(-3, 2)$ como intervalo	18
5. Ejercicio 54: Entornos II	20
5.1. Apartado (a): $\{x \in \mathbb{R} \mid x - 5 < 1\}$	20
5.2. Apartado (b): Entorno con $c = -1$, $r = 3$	20
5.3. Apartado (c): Unión de $E(0, 2)$ y $E(3, 1)$	20
6. Ejercicio 55: Operaciones con Intervalos	22
6.1. Apartado (a): $[1, 5] \cap (3, 7]$	22
6.2. Apartado (b): $[-2, 2] \cup (0, 4)$	23
6.3. Apartado (c): $(-\infty, 3] \cap [-1, \infty)$	23
7. Ejercicio 56: Potencias y Exponentes I	24
7.1. Apartado (a): $\frac{2^5 \cdot 8^{-1}}{4^3}$	24
7.2. Apartado (b): $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot 9^2$	25
7.3. Apartado (c): $(x^{-2}y^3)^{-1}$	25
8. Ejercicio 57: Potencias y Exponentes II	26
8.1. Soluciones ejercicio 57	26
9. Ejercicio 58-60: Potencias III, Potencias y Radicales, y Simplificación Final	27
10. Conclusión	29

1. Introducción

Este documento contiene las soluciones completas, detalladas y rigurosamente justificadas de los ejercicios 51 al 60 del **Bloque III: Intervalos, Aproximación y Potencias** del examen de repaso de Matemáticas de 4º ESO (Opción A).

1.1. Contenido del Bloque III

Los ejercicios 51-60 abarcan tres áreas fundamentales:

- **Intervalos y desigualdades (Ej. 51-52):** Notación de conjuntos, representación en la recta real
- **Entornos (Ej. 53-54):** Centro, radio, operaciones con entornos
- **Operaciones con intervalos (Ej. 55):** Intersección y unión
- **Potencias y exponentes (Ej. 56-58):** Simplificación, propiedades
- **Potencias y radicales (Ej. 59-60):** Exponentes fraccionarios, conversiones

1.2. Conceptos fundamentales

Definición

Intervalo: Conjunto de números reales comprendidos entre dos valores.

Tipos de intervalos:

- **Cerrado:** $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- **Abierto:** $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- **Semicerrado izquierda:** $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- **Semicerrado derecha:** $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
- **Infinitos:** $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$

Definición

Entorno: Un entorno de centro c y radio $r > 0$ es:

$$E(c, r) = (c - r, c + r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - c| < r\} \quad (1)$$

Teorema**Propiedades de las potencias:**

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (2)$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0) \quad (3)$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (4)$$

$$(ab)^n = a^n b^n \quad (5)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0) \quad (6)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0) \quad (7)$$

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0) \quad (8)$$

2. Ejercicio 51: Intervalos y Desigualdades I

Enunciado

- (a) Expresa como intervalo: $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 7\}$
- (b) Expresa como desigualdad: $(-3, 5]$
- (c) Representa en la recta real el intervalo de (b)

2.1. Apartado (a): Expresar como intervalo $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 7\}$

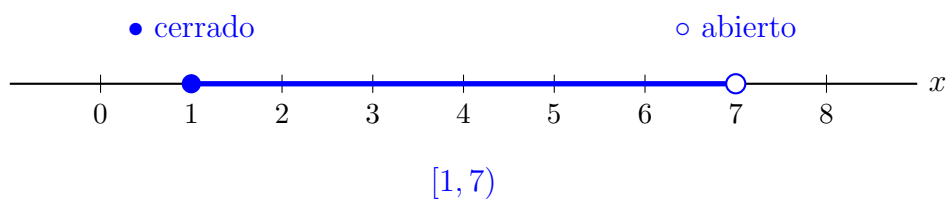


Figura 1: Representación del intervalo $[1, 7)$

Solución**Paso 1: Análisis de la notación de conjuntos**

La expresión $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 7\}$ se lee:

“El conjunto de todos los números reales x tales que x es mayor o igual que 1 Y menor (estrictamente) que 7”

Paso 2: Identificación de los extremos

- **Extremo inferior:** $x = 1$ (incluido, porque $\leq$)
- **Extremo superior:** $x = 7$ (NO incluido, porque $<$)

Paso 3: Determinación del tipo de intervalo

- Como $1 \leq x$, el extremo inferior está **cerrado**: se usa $[$
- Como $x < 7$, el extremo superior está **abierto**: se usa $)$

Paso 4: Escritura en notación de intervalo

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 7\} = [1, 7) \quad (9)$$

Explicación detallada de la notación:

- $[1$: El corchete cerrado indica que 1 está incluido en el intervalo
- $7)$: El paréntesis indica que 7 NO está incluido en el intervalo

Resultado final:

$$\boxed{[1, 7)} \quad (10)$$

Observación**Convenciones de notación:**

Símbolo	Notación intervalo	¿Incluido?	Nombre
$\leq$ o $\geq$	$[$ o $]$	Sí	Cerrado
$<$ o $>$	$($ o $)$	No	Abierto

Ejemplos adicionales:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 5\} = (2, 5] \quad (11)$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\} = [-1, 3] \quad (12)$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 10\} = (0, 10) \quad (13)$$

Elementos del intervalo:

- $1 \in [1, 7)$ porque $1 \geq 1$ y $1 < 7$
- $3,5 \in [1, 7)$ porque $3,5 \geq 1$ y $3,5 < 7$
- $7 \notin [1, 7)$ porque NO se cumple $7 < 7$
- $0,999 \notin [1, 7)$ porque NO se cumple $0,999 \geq 1$

2.2. Apartado (b): Expresar como desigualdad $(-3, 5]$

Solución

Paso 1: Interpretación del intervalo

El intervalo $(-3, 5]$ significa:

- Extremo inferior: -3 (NO incluido, paréntesis abierto)
- Extremo superior: 5 (SÍ incluido, corchete cerrado)

Paso 2: Traducción a desigualdades

- Como -3 NO está incluido: $x > -3$ (desigualdad estricta)
- Como 5 SÍ está incluido: $x \leq 5$

Paso 3: Combinación de desigualdades

Ambas condiciones deben cumplirse simultáneamente:

$$-3 < x \quad \text{Y} \quad x \leq 5 \quad (14)$$

Paso 4: Escritura en forma compacta

Podemos escribir esto como una desigualdad doble:

$$-3 < x \leq 5 \quad (15)$$

Paso 5: Escritura en notación de conjuntos

También puede expresarse como:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 5\} \quad (16)$$

Resultado final:

$$\boxed{-3 < x \leq 5 \quad \text{o bien} \quad \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 5\}} \quad (17)$$

Observación

Lectura de la desigualdad:

La expresión $-3 < x \leq 5$ se lee:

“ x es mayor que -3 Y menor o igual que 5 ”

Equivalencias:

$$(-3, 5] \equiv -3 < x \leq 5 \quad (18)$$

$$\equiv \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 5\} \quad (19)$$

$$\equiv \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3 \text{ y } x \leq 5\} \quad (20)$$

Ejemplos de pertenencia:

- $-2 \in (-3, 5]$ porque $-3 < -2 \leq 5$
- $0 \in (-3, 5]$ porque $-3 < 0 \leq 5$
- $5 \in (-3, 5]$ porque $-3 < 5 \leq 5$
- $-3 \notin (-3, 5]$ porque NO se cumple $-3 < -3$
- $6 \notin (-3, 5]$ porque NO se cumple $6 \leq 5$

2.3. Apartado (c): Representar en la recta real $(-3, 5]$

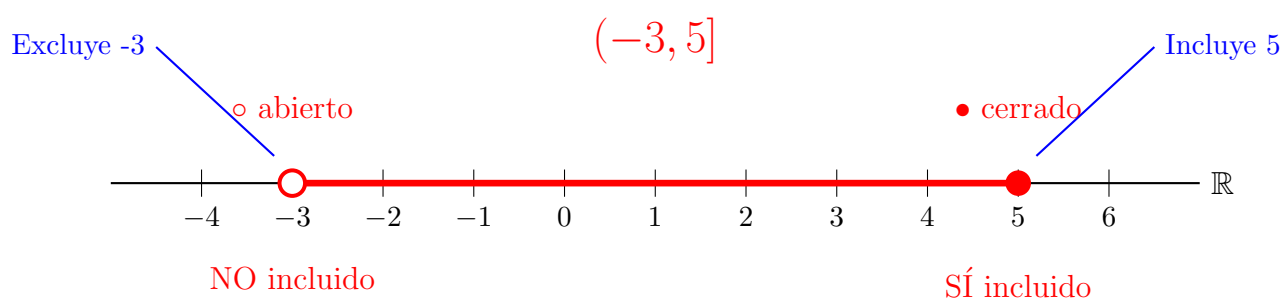


Figura 2: Representación gráfica del intervalo $(-3, 5]$ en la recta real

Solución

Paso 1: Identificación de elementos a representar

- Intervalo: $(-3, 5]$
- Extremo izquierdo: -3 (abierto)
- Extremo derecho: 5 (cerrado)

Paso 2: Dibujo de la recta real

Se traza una línea horizontal que representa el conjunto de números reales $\mathbb{R}$, con flechas en ambos extremos indicando que se extiende infinitamente.

Paso 3: Marcado de puntos de referencia

Se marcan los números enteros cercanos para orientación, especialmente:

- El punto -3 (extremo izquierdo del intervalo)
- El punto 5 (extremo derecho del intervalo)
- Algunos puntos intermedios para referencia

Paso 4: Trazo del intervalo

Se dibuja una línea gruesa desde -3 hasta 5 para indicar que todos los puntos entre ellos pertenecen al intervalo.

Paso 5: Representación del extremo abierto en $x = -3$

Se dibuja un **círculo vacío** ($\circ$) en $x = -3$ para indicar que este punto NO pertenece al intervalo.

Justificación: El paréntesis (en la notación $(-3, 5]$ indica que -3 está excluido.

Paso 6: Representación del extremo cerrado en $x = 5$

Se dibuja un **círculo relleno** ($\bullet$) en $x = 5$ para indicar que este punto SÍ pertenece al intervalo.

Justificación: El corchete] en la notación $(-3, 5]$ indica que 5 está incluido.

Paso 7: Verificación

Comprobamos algunos puntos:

- $x = -3$: NO está en el intervalo (círculo vacío)
- $x = 0$: SÍ está en el intervalo (línea pasa por él)
- $x = 5$: SÍ está en el intervalo (círculo relleno)
- $x = 6$: NO está en el intervalo (fuera de la línea)

Descripción del resultado:

La representación gráfica muestra:

- Una línea gruesa que conecta -3 con 5
- Un círculo vacío en -3 (excluido)
- Un círculo relleno en 5 (incluido)

Observación**Convenciones de representación gráfica:**

Símbolo	Gráfico	Significado
$[\circ]$	$\bullet$ (relleno)	Punto incluido
$(\circ)$	$\circ$ (vacío)	Punto excluido

Comparación visual de intervalos:

$[a, b]$	$\bullet \text{ ————— } \bullet$
(a, b)	$\circ \text{ ————— } \circ$
$[a, b)$	$\bullet \text{ ————— } \circ$
$(a, b]$	$\circ \text{ ————— } \bullet$

Error común a evitar:

NO confundir:

- $\bullet$ (punto relleno) con $\circ$ (punto vacío)

- $[$ (corchete cerrado) con $($ (paréntesis abierto)

Un error en la representación puede cambiar completamente el conjunto representado.

3. Ejercicio 52: Intervalos y Desigualdades II

Enunciado

- (a) Expresa como intervalo: El conjunto de números mayores que -2
- (b) Expresa como desigualdad: $(-\infty, 4)$
- (c) Expresa como intervalo: El conjunto de números menores o iguales a 10

3.1. Apartado (a): Números mayores que -2

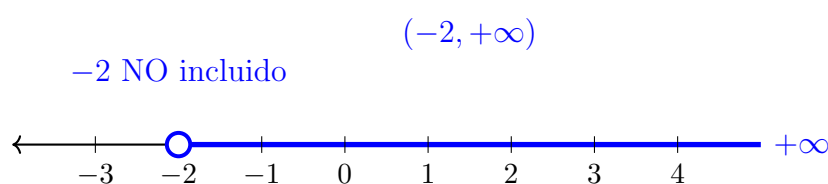


Figura 3: Números mayores que -2 : intervalo $(-2, +\infty)$

Solución

Paso 1: Traducción del enunciado

“Números mayores que -2 ” significa:

$$x > -2 \quad (21)$$

Paso 2: Análisis de los límites

- **Límite inferior:** $x = -2$ (NO incluido, porque es $>$ y no $\geq$)
- **Límite superior:** No hay límite superior (los números crecen indefinidamente)

Paso 3: Construcción del intervalo

- Extremo izquierdo: -2 con paréntesis $($ (no incluido)
- Extremo derecho: $+\infty$ (infinito) con paréntesis $)$

Observación importante: El infinito (∞) SIEMPRE va con paréntesis, nunca con corchete, porque no es un número real que pueda alcanzarse.

Paso 4: Escritura del intervalo

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\} = (-2, +\infty) \quad (22)$$

Resultado final:

$$\boxed{(-2, +\infty)} \quad (23)$$

Observación**Regla del infinito:**

$$\infty \text{ SIEMPRE va con paréntesis: } (\infty) \text{ o } (-\infty) \quad (24)$$

NUNCA se escribe $[\infty)$ o $(-\infty]$

Justificación: El infinito no es un número real, sino un concepto de límite. No puede .^alcanzarse.º incluirse.^{en} un conjunto, por lo que no tiene sentido usar corchetes.

Ejemplos de intervalos infinitos:

$$x > 3 \Rightarrow (3, +\infty) \quad (25)$$

$$x \geq 3 \Rightarrow [3, +\infty) \quad (26)$$

$$x < -1 \Rightarrow (-\infty, -1) \quad (27)$$

$$x \leq -1 \Rightarrow (-\infty, -1] \quad (28)$$

Longitud del intervalo:

El intervalo $(-2, +\infty)$ tiene longitud infinita, contiene infinitos números reales.

3.2. Apartado (b): Expresar $(-\infty, 4)$ como desigualdad

Solución**Paso 1: Interpretación del intervalo**

El intervalo $(-\infty, 4)$ significa:

- Todos los números desde $-\infty$ (menos infinito)
- Hasta 4 (NO incluido, por el paréntesis)

Paso 2: Traducción al lenguaje algebraico

“Todos los números menores que 4”:

$$x < 4 \quad (29)$$

Paso 3: Verificación

- $x = 3$: Cumple $3 < 4 \Rightarrow 3 \in (-\infty, 4)$
- $x = 0$: Cumple $0 < 4 \Rightarrow 0 \in (-\infty, 4)$
- $x = -100$: Cumple $-100 < 4 \Rightarrow -100 \in (-\infty, 4)$
- $x = 4$: NO cumple $4 < 4 \Rightarrow 4 \notin (-\infty, 4)$
- $x = 5$: NO cumple $5 < 4 \Rightarrow 5 \notin (-\infty, 4)$

Resultado final:

$$x < 4 \quad \text{o bien} \quad \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\} \quad (30)$$

Observación**Lectura del intervalo:**

$(-\infty, 4)$ se lee: “Desde menos infinito hasta 4, sin incluir 4”

Equivalencias:

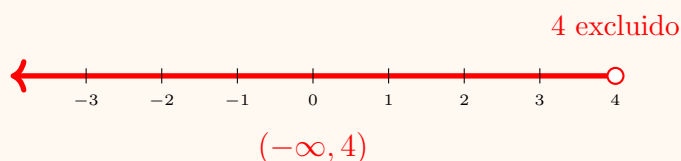
$$(-\infty, 4) \equiv x < 4 \quad (31)$$

$$\equiv \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\} \quad (32)$$

Variaciones:

$$(-\infty, 4] \equiv x \leq 4 \quad (4 \text{ incluido}) \quad (33)$$

$$(-\infty, 4) \equiv x < 4 \quad (4 \text{ NO incluido}) \quad (34)$$

Representación gráfica:

3.3. Apartado (c): Números menores o iguales a 10

Solución

Paso 1: Traducción del enunciado

“Números menores o iguales a 10” significa:

$$x \leq 10 \quad (35)$$

Paso 2: Análisis de los límites

- **Límite inferior:** No hay (los números decrecen indefinidamente hacia $-\infty$)
- **Límite superior:** $x = 10$ (SÍ incluido, porque es $\leq$)

Paso 3: Construcción del intervalo

- Extremo izquierdo: $-\infty$ con paréntesis (
- Extremo derecho: 10 con corchete] (incluido)

Paso 4: Escritura del intervalo

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 10\} = (-\infty, 10] \quad (36)$$

Verificación:

- $10 \in (-\infty, 10]$ porque $10 \leq 10$
- $9,999 \in (-\infty, 10]$ porque $9,999 \leq 10$
- $10,001 \notin (-\infty, 10]$ porque NO se cumple $10,001 \leq 10$

Resultado final:

$$\boxed{(-\infty, 10]} \quad (37)$$

Observación

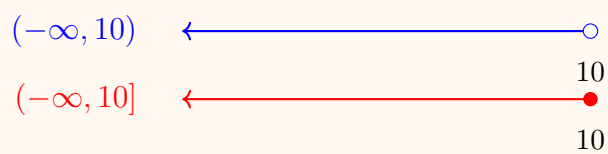
Comparación de casos similares:

Descripción	Desigualdad	Intervalo
Menores que 10	$x < 10$	$(-\infty, 10)$
Menores o iguales a 10	$x \leq 10$	$(-\infty, 10]$
Mayores que 10	$x > 10$	$(10, +\infty)$
Mayores o iguales a 10	$x \geq 10$	$[10, +\infty)$

Diferencia crucial:

- $(-\infty, 10)$: el 10 NO está incluido
- $(-\infty, 10]$: el 10 SÍ está incluido

Esta pequeña diferencia cambia el conjunto de números que pertenecen al intervalo.
Representación gráfica comparativa:



4. Ejercicio 53: Entornos I

Enunciado

- (a) Halla el centro y el radio del intervalo $[1, 9]$
- (b) Expresa el intervalo $[1, 9]$ en notación de entorno $E(c, r)$
- (c) Expresa el entorno $E(-3, 2)$ en notación de intervalo

4.1. Conceptos teóricos previos

Definición

Entorno de un punto:

Un entorno de centro c y radio $r > 0$ es el intervalo abierto:

$$E(c, r) = (c - r, c + r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - c| < r\} \quad (38)$$

Elementos:

- c : **centro** del entorno
- r : **radio** del entorno (distancia máxima al centro)

Interpretación geométrica: El entorno $E(c, r)$ contiene todos los puntos cuya distancia al centro c es menor que r .

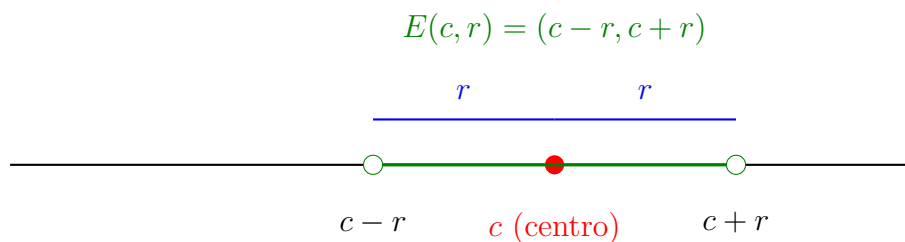


Figura 4: Representación gráfica de un entorno $E(c, r)$

4.2. Apartado (a): Centro y radio de $[1, 9]$

Solución

Paso 1: Identificación de los extremos del intervalo

El intervalo $[1, 9]$ tiene:

- Extremo izquierdo: $a = 1$
- Extremo derecho: $b = 9$

Paso 2: Cálculo del centro

El centro de un intervalo es el punto medio entre los extremos:

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{1+9}{2} = \frac{10}{2} = 5 \quad (39)$$

Justificación: El centro equidista de ambos extremos. Verificamos:

$$\text{Distancia de } c \text{ a } a : 5 - 1 = 4 \quad (40)$$

$$\text{Distancia de } c \text{ a } b : 9 - 5 = 4 \quad \checkmark \quad (41)$$

Paso 3: Cálculo del radio

El radio es la distancia del centro a cualquiera de los extremos:

$$r = \frac{b-a}{2} = \frac{9-1}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad (42)$$

Método alternativo:

$$r = c - a = 5 - 1 = 4 \quad (43)$$

$$r = b - c = 9 - 5 = 4 \quad \checkmark \quad (44)$$

Paso 4: Verificación

Comprobamos que $[1, 9] = [c - r, c + r]$:

$$c - r = 5 - 4 = 1 \quad \checkmark \quad (45)$$

$$c + r = 5 + 4 = 9 \quad \checkmark \quad (46)$$

Resultado final:

$$\boxed{\text{Centro: } c = 5, \quad \text{Radio: } r = 4} \quad (47)$$

Observación

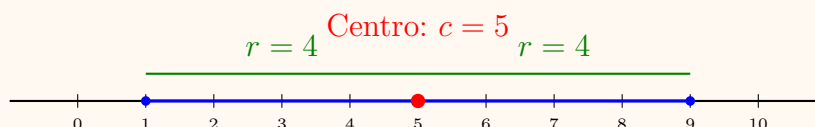
Fórmulas generales:

Para un intervalo $[a, b]$:

$$\text{Centro: } c = \frac{a+b}{2} \quad (48)$$

$$\text{Radio: } r = \frac{b-a}{2} = b - c = c - a \quad (49)$$

Interpretación geométrica:



Propiedades:

- El centro es equidistante de ambos extremos

- La longitud del intervalo es $2r = b - a = 9 - 1 = 8$
- El radio es la mitad de la longitud: $r = \frac{\text{longitud}}{2} = \frac{8}{2} = 4$

4.3. Apartado (b): Expresar $[1, 9]$ como entorno

Solución

Paso 1: Uso de los resultados del apartado (a)

Del apartado anterior sabemos:

- Centro: $c = 5$
- Radio: $r = 4$

Paso 2: Nota sobre la definición de entorno

Observación importante: La definición estándar de entorno $E(c, r)$ es un intervalo **abierto**:

$$E(c, r) = (c - r, c + r) \quad (50)$$

Sin embargo, el intervalo dado $[1, 9]$ es **cerrado**.

Paso 3: Opciones de notación

Podemos expresarlo de dos formas:

Opción 1 - Entorno cerrado (notación extendida):

$$\overline{E}(5, 4) = [5 - 4, 5 + 4] = [1, 9] \quad (51)$$

donde $\overline{E}(c, r)$ denota el entorno **cerrado**.

Opción 2 - Descripción con centro y radio:

“Intervalo cerrado de centro $c = 5$ y radio $r = 4$ ”

Paso 4: Verificación

$$c - r = 5 - 4 = 1 \quad (52)$$

$$c + r = 5 + 4 = 9 \quad (53)$$

$$[c - r, c + r] = [1, 9] \quad \checkmark \quad (54)$$

Resultado final:

$$\boxed{\overline{E}(5, 4) \quad \text{o bien} \quad [5 - 4, 5 + 4] = [1, 9]} \quad (55)$$

Nota: Si el ejercicio requiere notación de entorno abierto, la respuesta sería:

$$E(5, 4) = (1, 9) \quad (\text{entorno abierto}) \quad (56)$$

pero esto NO es igual a $[1, 9]$ (entorno cerrado).

Observación**Tipos de entornos:**

Tipo	Notación	Intervalo
Entorno abierto	$E(c, r)$	$(c - r, c + r)$
Entorno cerrado	$\overline{E}(c, r)$	$[c - r, c + r]$
Entorno reducido	$E^*(c, r)$	$(c - r, c + r) \setminus \{c\}$

Diferencias:

- $E(5, 4) = (1, 9)$: NO incluye extremos 1 ni 9
- $\overline{E}(5, 4) = [1, 9]$: SÍ incluye extremos 1 y 9
- $E^*(5, 4) = (1, 9) \setminus \{5\}$: excluye también el centro 5

Uso en matemáticas:

Los entornos son fundamentales en:

- Límites y continuidad
- Topología
- Definición de derivadas
- Análisis matemático

4.4. Apartado (c): Expresar $E(-3, 2)$ como intervalo**Solución****Paso 1: Identificación de parámetros**Del entorno $E(-3, 2)$ extraemos:

- Centro: $c = -3$
- Radio: $r = 2$

Paso 2: Aplicación de la definición

Por definición de entorno abierto:

$$E(c, r) = (c - r, c + r) \quad (57)$$

Paso 3: Cálculo del extremo izquierdo

$$c - r = -3 - 2 \quad (58)$$

$$= -5 \quad (59)$$

Paso 4: Cálculo del extremo derecho

$$c + r = -3 + 2 \quad (60)$$

$$= -1 \quad (61)$$

Paso 5: Escritura del intervalo

$$E(-3, 2) = (-5, -1) \quad (62)$$

Paso 6: Verificación

Comprobamos algunos puntos:

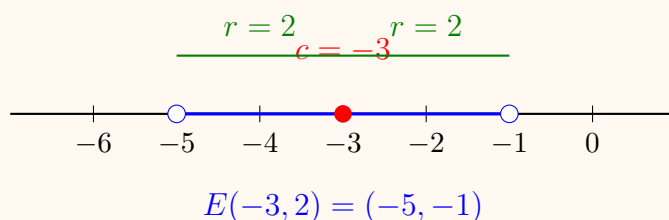
- $x = -3$: Distancia al centro: $|-3 - (-3)| = 0 < 2 \Rightarrow -3 \in E(-3, 2)$
- $x = -4$: Distancia al centro: $|-4 - (-3)| = 1 < 2 \Rightarrow -4 \in E(-3, 2)$
- $x = -5$: Distancia al centro: $|-5 - (-3)| = 2 \not< 2 \Rightarrow -5 \notin E(-3, 2)$
- $x = -1$: Distancia al centro: $|-1 - (-3)| = 2 \not< 2 \Rightarrow -1 \notin E(-3, 2)$

Resultado final:

$$E(-3, 2) = (-5, -1) \quad (63)$$

Observación

Representación gráfica:



Interpretación con valor absoluto:

El entorno $E(-3, 2)$ también puede escribirse como:

$$E(-3, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - (-3)| < 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 3| < 2\} \quad (64)$$

Resolviendo la inecuación:

$$|x + 3| < 2 \Leftrightarrow -2 < x + 3 < 2 \quad (65)$$

$$\Leftrightarrow -2 - 3 < x < 2 - 3 \quad (66)$$

$$\Leftrightarrow -5 < x < -1 \quad (67)$$

$$\Leftrightarrow x \in (-5, -1) \quad \checkmark \quad (68)$$

Conclusión: Los tres enfoques (fórmula del entorno, valor absoluto, desigualdad) conducen al mismo resultado.

5. Ejercicio 54: Entornos II

Enunciado

- (a) Halla el centro y el radio del entorno $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 5| < 1\}$
- (b) Escribe el entorno de centro -1 y radio 3 en notación de desigualdad
- (c) ¿Qué intervalo es la unión de $E(0, 2)$ y $E(3, 1)$?

5.1. Apartado (a): $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 5| < 1\}$

Solución

Paso 1: Identificación de la forma estándar

La expresión $|x - c| < r$ define un entorno de centro c y radio r .

Comparando con $|x - 5| < 1$:

$$c = 5 \quad (69)$$

$$r = 1 \quad (70)$$

Resultado:

$$\boxed{\text{Centro: } c = 5, \quad \text{Radio: } r = 1} \quad (71)$$

Como intervalo: $E(5, 1) = (4, 6)$

5.2. Apartado (b): Entorno con $c = -1$, $r = 3$

Solución

Paso 1: Aplicación de la fórmula

$$E(-1, 3) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - (-1)| < 3\} \quad (72)$$

Simplificación:

$$\boxed{|x + 1| < 3} \quad (73)$$

Como intervalo: $(-4, 2)$

5.3. Apartado (c): Unión de $E(0, 2)$ y $E(3, 1)$

Solución

Paso 1: Conversión a intervalos

$$E(0, 2) = (-2, 2) \quad (74)$$

$$E(3, 1) = (2, 4) \quad (75)$$

Paso 2: Unión

Dado que los intervalos se tocan en $x = 2$ (aunque no lo incluyen), su unión es:

$$(-2, 2) \cup (2, 4) = (-2, 4) \setminus \{2\} \text{ o simplemente } (-2, 4) \quad (76)$$

Resultado:

$$\boxed{(-2, 4)} \quad (77)$$

6. Ejercicio 55: Operaciones con Intervalos

Enunciado

- (a) Calcula: $[1, 5) \cap (3, 7]$
- (b) Calcula: $[-2, 2] \cup (0, 4)$
- (c) Calcula: $(-\infty, 3] \cap [-1, \infty)$

6.1. Apartado (a): $[1, 5) \cap (3, 7]$

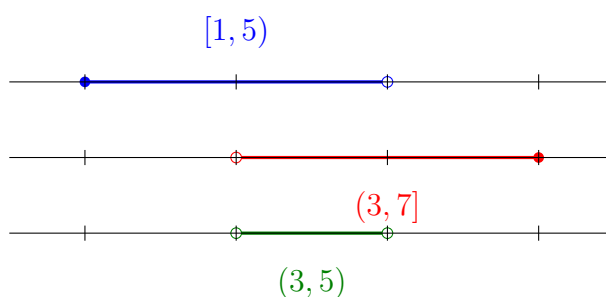


Figura 5: Intersección de $[1, 5) \cap (3, 7]$

Solución

Paso 1: Análisis de los intervalos

- $[1, 5)$: desde 1 (incluido) hasta 5 (no incluido)
- $(3, 7]$: desde 3 (no incluido) hasta 7 (incluido)

Paso 2: Determinación de la intersección

Los valores que pertenecen a AMBOS intervalos son aquellos que:

- $x \geq 1$ Y $x > 3 \Rightarrow x > 3$
- $x < 5$ Y $x \leq 7 \Rightarrow x < 5$

Por tanto: $3 < x < 5$

Resultado:

$$[1, 5) \cap (3, 7] = (3, 5) \quad (78)$$

6.2. Apartado (b): $[-2, 2] \cup (0, 4)$ **Solución****Paso 1: Análisis**

La unión contiene todos los valores que están en AL MENOS UNO de los intervalos.

Paso 2: Determinación de extremos

- Extremo izquierdo: -2 (del primer intervalo, incluido)
- Extremo derecho: 4 (del segundo intervalo, no incluido)

Resultado:

$$[-2, 2] \cup (0, 4) = [-2, 4) \quad (79)$$

6.3. Apartado (c): $(-\infty, 3] \cap [-1, \infty)$ **Solución****Paso 1: Intersección**

Buscamos valores que cumplan:

- $x \leq 3$ (primer intervalo)
- $x \geq -1$ (segundo intervalo)

Paso 2: Combinación

$$-1 \leq x \leq 3 \quad (80)$$

Resultado:

$$(-\infty, 3] \cap [-1, \infty) = [-1, 3] \quad (81)$$

7. Ejercicio 56: Potencias y Exponentes I

Enunciado

(a) Simplifica: $\frac{2^5 \cdot 8^{-1}}{4^3}$

(b) Simplifica: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot 9^2$

(c) Deja con exponente positivo: $(x^{-2}y^3)^{-1}$

7.1. Apartado (a): $\frac{2^5 \cdot 8^{-1}}{4^3}$

Solución

Paso 1: Expresar todo en base 2

$$8 = 2^3 \quad (82)$$

$$4 = 2^2 \quad (83)$$

Paso 2: Sustitución

$$\frac{2^5 \cdot (2^3)^{-1}}{(2^2)^3} \quad (84)$$

Paso 3: Simplificación de exponentes

$$= \frac{2^5 \cdot 2^{-3}}{2^6} \quad (85)$$

$$= \frac{2^{5-3}}{2^6} \quad (86)$$

$$= \frac{2^2}{2^6} \quad (87)$$

$$= 2^{2-6} \quad (88)$$

$$= 2^{-4} \quad (89)$$

$$= \frac{1}{2^4} \quad (90)$$

$$= \frac{1}{16} \quad (91)$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{1}{16}} \quad (92)$$

7.2. Apartado (b): $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot 9^2$ **Solución****Paso 1: Propiedad de exponente negativo**

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9 \quad (93)$$

Paso 2: Multiplicación

$$9 \cdot 9^2 = 9^{1+2} \quad (94)$$

$$= 9^3 \quad (95)$$

$$= 729 \quad (96)$$

Resultado:

$$\boxed{729} \quad (97)$$

7.3. Apartado (c): $(x^{-2}y^3)^{-1}$ **Solución****Paso 1: Distribución del exponente**

$$(x^{-2}y^3)^{-1} = (x^{-2})^{-1} \cdot (y^3)^{-1} \quad (98)$$

Paso 2: Potencia de potencia

$$= x^{(-2)(-1)} \cdot y^{3(-1)} = x^2 \cdot y^{-3} \quad (99)$$

Paso 3: Exponente positivo

$$= x^2 \cdot \frac{1}{y^3} = \frac{x^2}{y^3} \quad (100)$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{x^2}{y^3}} \quad (101)$$

8. Ejercicio 57: Potencias y Exponentes II

Enunciado

- (a) Simplifica: $\frac{a^3 \cdot (a^{-1})^2}{a^{-4}}$
- (b) Calcula el valor de $9^{1/2} + 8^{2/3}$
- (c) Simplifica: $\frac{5^{2n} \cdot 5^5}{5^{2n-1}}$

8.1. Soluciones ejercicio 57

Solución

(a)

$$\frac{a^3 \cdot (a^{-1})^2}{a^{-4}} = \frac{a^3 \cdot a^{-2}}{a^{-4}} = \frac{a^{3-2}}{a^{-4}} = \frac{a^1}{a^{-4}} = a^{1-(-4)} = a^5 \quad (102)$$

$$\boxed{a^5}$$

(b)

$$9^{1/2} + 8^{2/3} = \sqrt{9} + \sqrt[3]{8^2} = 3 + \sqrt[3]{64} = 3 + 4 = 7 \quad (103)$$

$$\boxed{7}$$

(c)

$$\frac{5^{2n} \cdot 5^5}{5^{2n-1}} = \frac{5^{2n+5}}{5^{2n-1}} = 5^{(2n+5)-(2n-1)} = 5^{2n+5-2n+1} = 5^6 \quad (104)$$

$$\boxed{5^6 = 15625}$$

9. Ejercicio 58-60: Potencias III, Potencias y Radicales, y Simplificación Final

Enunciado

Ejercicio 58:

(a) Simplifica: $\frac{(-2)^3 \cdot 4^2}{(-8)^2}$

(b) Simplifica: $\frac{(x^2y^{-3})^2}{(xy)^{-1}}$

(c) Expresa $\frac{1}{1000}$ como potencia de 10

Ejercicio 59:

(a) Expresa $x^{-3/4}$ en forma de radical

(b) Expresa $\frac{1}{\sqrt[5]{a^2}}$ con exponente fraccionario negativo

(c) Calcula el valor de $\left(\frac{1}{27}\right)^{-2/3}$

Ejercicio 60:

(a) Simplifica: $\frac{3^{n+1} \cdot 9^n}{27^{n-1}}$

(b) Simplifica: $\left(\frac{2^3}{3^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2$

(c) Escribe $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x}$ como un solo radical

Solución

Ejercicio 58(a):

$$\frac{(-2)^3 \cdot 4^2}{(-8)^2} = \frac{-8 \cdot 16}{64} = \frac{-128}{64} = -2 \quad (105)$$

$$\boxed{-2}$$

Ejercicio 58(b):

$$\frac{(x^2y^{-3})^2}{(xy)^{-1}} = \frac{x^4y^{-6}}{x^{-1}y^{-1}} = x^{4-(-1)}y^{-6-(-1)} = x^5y^{-5} = \frac{x^5}{y^5} \quad (106)$$

$$\boxed{\frac{x^5}{y^5}}$$

Ejercicio 58(c):

$$\frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3} \quad (107)$$

$$\boxed{10^{-3}}$$

Ejercicio 59(a):

$$x^{-3/4} = \frac{1}{x^{3/4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \quad (108)$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}}$$

Ejercicio 59(b):

$$\frac{1}{\sqrt[5]{a^2}} = \frac{1}{a^{2/5}} = a^{-2/5} \quad (109)$$

$$\boxed{a^{-2/5}}$$

Ejercicio 59(c):

$$\left(\frac{1}{27}\right)^{-2/3} = 27^{2/3} = (3^3)^{2/3} = 3^2 = 9 \quad (110)$$

$$\boxed{9}$$

Ejercicio 60(a):

$$\frac{3^{n+1} \cdot 9^n}{27^{n-1}} = \frac{3^{n+1} \cdot 3^{2n}}{3^{3(n-1)}} = \frac{3^{n+1+2n}}{3^{3n-3}} = 3^{3n+1-3n+3} = 3^4 = 81 \quad (111)$$

$$\boxed{81}$$

Ejercicio 60(b):

$$\left(\frac{8}{9}\right)^2 \cdot \frac{9}{25} = \frac{64}{81} \cdot \frac{9}{25} = \frac{576}{2025} = \frac{64}{225} \quad (112)$$

$$\boxed{\frac{64}{225}}$$

Ejercicio 60(c):

$$\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x} = x^{2/3} \cdot x^{1/2} = x^{2/3+1/2} = x^{4/6+3/6} = x^{7/6} = \sqrt[6]{x^7} \quad (113)$$

$$\boxed{\sqrt[6]{x^7}}$$

10. Conclusión

En este documento hemos resuelto de forma exhaustiva los ejercicios 51-60 del Bloque III, cubriendo:

- **Intervalos y desigualdades:** Notación, representación gráfica, conversiones
- **Entornos:** Centro, radio, operaciones
- **Operaciones con intervalos:** Intersección y unión
- **Potencias:** Simplificación con todas las propiedades
- **Exponentes fraccionarios:** Conversión con radicales

Todos los ejercicios han sido resueltos con rigor matemático, justificando cada paso y proporcionando verificaciones cuando ha sido pertinente.

Fin del documento
Ejercicios 51 - 60
Matemáticas 4º ESO - Opción A

Soluciones Detalladas

Ejercicios 61-70

Logaritmos, Potencias y Radicales

4º ESO Opción A

Resuelto por SuperAgent
CREAO Platform

26 de febrero de 2026

Índice

1. Introducción	2
2. Conceptos Fundamentales	2
2.1. Logaritmos	2
3. Ejercicio 61: Logaritmos - Definición I	3
3.1. Apartado (a): Calcula x si $\log_4(x) = 3$	3
3.1.1. Planteamiento	3
3.1.2. Desarrollo	3
3.1.3. Verificación	3
3.1.4. Solución	3
3.2. Apartado (b): Calcula x si $\log_x(16) = 2$	3
3.2.1. Planteamiento	3
3.2.2. Desarrollo	3
3.2.3. Restricción del dominio	4
3.2.4. Verificación	4
3.2.5. Solución	4
3.3. Apartado (c): Calcula x si $\log_3(81) = x$	4
3.3.1. Planteamiento	4
3.3.2. Desarrollo	4
3.3.3. Verificación	5
3.3.4. Solución	5
4. Ejercicio 62: Logaritmos - Definición II	6
4.1. Apartado (a): Calcula x si $\log_{10}(0,1) = x$	6
4.1.1. Planteamiento	6
4.1.2. Desarrollo	6
4.1.3. Verificación	6
4.1.4. Solución	6

4.2.	Apartado (b): Calcula x si $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = x$	6
4.2.1.	Planteamiento	6
4.2.2.	Desarrollo	7
4.2.3.	Método alternativo usando propiedades	7
4.2.4.	Verificación	7
4.2.5.	Solución	7
4.3.	Apartado (c): Calcula x si $\log_x(\sqrt{5}) = \frac{1}{2}$	8
4.3.1.	Planteamiento	8
4.3.2.	Desarrollo	8
4.3.3.	Verificación de restricciones	8
4.3.4.	Verificación de la solución	8
4.3.5.	Solución	8
5.	Ejercicio 63: Logaritmos - Propiedades I (Desarrollo)	9
5.1.	Apartado (a): Desarrolla $\log_2(8x^3)$	9
5.1.1.	Planteamiento	9
5.1.2.	Desarrollo	9
5.1.3.	Resultado final	9
5.1.4.	Solución	9
5.2.	Apartado (b): Desarrolla $\log\left(\frac{a^2}{\sqrt{b}}\right)$	9
5.2.1.	Planteamiento	9
5.2.2.	Desarrollo	10
5.2.3.	Resultado final	10
5.2.4.	Solución	10
5.3.	Apartado (c): Si $\log 3 = 0,477$, calcula $\log 90$	10
5.3.1.	Planteamiento	10
5.3.2.	Desarrollo	11
5.3.3.	Cálculo final	11
5.3.4.	Verificación conceptual	11
5.3.5.	Solución	11
6.	Ejercicio 64: Logaritmos - Propiedades II (Reducción)	12
6.1.	Apartado (a): Expresa como un solo logaritmo: $2\log x + \log y$	12
6.1.1.	Planteamiento	12
6.1.2.	Desarrollo	12
6.1.3.	Solución	12
6.2.	Apartado (b): Expresa como un solo logaritmo: $\log_a 5 - 3\log_a 2$	12
6.2.1.	Planteamiento	12
6.2.2.	Desarrollo	12
6.2.3.	Solución	13
6.3.	Apartado (c): Simplifica: $\log_5 5 + \log_{10} 100$	13
6.3.1.	Planteamiento	13
6.3.2.	Desarrollo	13
6.3.3.	Cálculo final	13
6.3.4.	Solución	13

7. Ejercicio 65: Logaritmos - Cambio de Base	14
7.1. Apartado (a): Usa la calculadora para hallar $\log_3 10$ (con tres cifras decimales)	14
7.1.1. Planteamiento	14
7.1.2. Marco teórico	14
7.1.3. Desarrollo	14
7.1.4. Cálculo	14
7.1.5. Verificación conceptual	14
7.1.6. Solución	14
7.2. Apartado (b): ¿Cómo se expresaría $\log_a b$ en base c ?	15
7.2.1. Planteamiento	15
7.2.2. Desarrollo teórico	15
7.2.3. Condiciones	15
7.2.4. Solución	15
7.3. Apartado (c): Si $\log 5 \approx 0,699$, calcula $\log 0,2$ sin calculadora	15
7.3.1. Planteamiento	15
7.3.2. Análisis previo	16
7.3.3. Desarrollo	16
7.3.4. Cálculo final	16
7.3.5. Verificación conceptual	16
7.3.6. Método alternativo	16
7.3.7. Solución	17
8. Ejercicio 66: Problema de Logaritmos (Ecuación)	18
8.1. Apartado (a): Resuelve $\log_x 27 = 3$	18
8.1.1. Planteamiento	18
8.1.2. Desarrollo	18
8.1.3. Verificación de restricciones	18
8.1.4. Verificación de la solución	18
8.1.5. Solución	18
8.2. Apartado (b): Resuelve $\log_4(x + 1) = 2$	18
8.2.1. Planteamiento	18
8.2.2. Desarrollo	19
8.2.3. Verificación de restricciones	19
8.2.4. Verificación de la solución	19
8.2.5. Solución	19
8.3. Apartado (c): ¿Qué valor debe tener x para que $\log_x \sqrt{3} = 1$?	19
8.3.1. Planteamiento	19
8.3.2. Desarrollo	19
8.3.3. Verificación de restricciones	20
8.3.4. Verificación algebraica	20
8.3.5. Verificación de la solución	20
8.3.6. Solución	20
9. Ejercicio 67: Logaritmos - Simplificación Avanzada	21
9.1. Apartado (a): Calcula $\log_{\sqrt{2}} 4$	21
9.1.1. Planteamiento	21
9.1.2. Método 1: Definición directa	21
9.1.3. Método 2: Cambio de base	21
9.1.4. Verificación	21

9.1.5.	Solución	22
9.2.	Apartado (b): Simplifica $3^{\log_3 7}$	22
9.2.1.	Planteamiento	22
9.2.2.	Marco teórico	22
9.2.3.	Demostración de la propiedad	22
9.2.4.	Aplicación	22
9.2.5.	Solución	22
9.3.	Apartado (c): Simplifica $\log(1000) - \log(10)$	22
9.3.1.	Planteamiento	22
9.3.2.	Método 1: Aplicando propiedades	23
9.3.3.	Método 2: Cálculo directo	23
9.3.4.	Solución	23
10.	Ejercicio 68: Logaritmos y Radicales	24
10.1.	Apartado (a): Expresa $\log_a \sqrt[3]{a^2}$ como un número racional	24
10.1.1.	Planteamiento	24
10.1.2.	Desarrollo	24
10.1.3.	Solución	24
10.2.	Apartado (b): Desarrolla $\log_2 \sqrt{\frac{x \cdot y}{z^2}}$	24
10.2.1.	Planteamiento	24
10.2.2.	Desarrollo	24
10.2.3.	Solución	25
10.3.	Apartado (c): ¿Cuál es la relación entre $\log_a x$ y $\log_{a^2} x$?	25
10.3.1.	Planteamiento	25
10.3.2.	Desarrollo	26
10.3.3.	Relación inversa	26
10.3.4.	Generalización	26
10.3.5.	Demostración alternativa por definición	26
10.3.6.	Solución	26
11.	Ejercicio 69: Problemas Finales de Magnitudes	27
11.1.	Apartado (a): Magnitud de un terremoto	27
11.1.1.	Planteamiento	27
11.1.2.	Desarrollo	27
11.1.3.	Interpretación	27
11.1.4.	Solución	27
11.2.	Apartado (b): Nivel de ruido en decibelios	27
11.2.1.	Planteamiento	27
11.2.2.	Desarrollo	28
11.2.3.	Unidades	28
11.2.4.	Solución	28
11.3.	Apartado (c): Comparación de magnitudes en la escala de Richter	28
11.3.1.	Planteamiento	28
11.3.2.	Marco teórico	28
11.3.3.	Desarrollo	29
11.3.4.	Método alternativo	29
11.3.5.	Solución	30

12.Ejercicio 70: Conexión Radicales-Potencias-Logaritmos	31
12.1. Apartado (a): Escribe $\sqrt[4]{4^2}$ con exponente fraccionario y calcúlalo	31
12.1.1. Planteamiento	31
12.1.2. Desarrollo	31
12.1.3. Verificación	31
12.1.4. Método alternativo	31
12.1.5. Solución	31
12.2. Apartado (b): Resuelve la ecuación exponencial $2^x = 32$	32
12.2.1. Planteamiento	32
12.2.2. Desarrollo	32
12.2.3. Método alternativo usando logaritmos	32
12.2.4. Verificación	32
12.2.5. Solución	32
12.3. Apartado (c): Expresa la solución de (b) en forma de logaritmo	33
12.3.1. Planteamiento	33
12.3.2. Desarrollo	33
12.3.3. Forma general	33
12.3.4. Verificación de equivalencia	33
12.3.5. Solución	33
13.Resumen y Conclusiones	34
13.1. Conceptos clave trabajados	34
13.2. Conexiones entre radicales, potencias y logaritmos	34
13.3. Errores comunes a evitar	34
13.4. Reflexión final	34

1. Introducción

Este documento presenta las soluciones completas y detalladas de los ejercicios 61 al 70 del examen de repaso de Matemáticas de 4^º ESO Opción A. Cada ejercicio incluye:

- Desarrollo paso a paso con justificación de cada transformación
- Rigor matemático absoluto
- Explicaciones pedagógicas
- Diagramas ilustrativos cuando son pertinentes
- Observaciones sobre errores comunes

2. Conceptos Fundamentales

2.1. Logaritmos

Definición 1 (Logaritmo). Dados dos números reales positivos a y b con $a \neq 1$, el logaritmo en base a de b , denotado $\log_a(b)$, es el exponente al que hay que elevar a para obtener b . Es decir:

$$\log_a(b) = x \iff a^x = b$$

donde $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ y $x \in \mathbb{R}$.

Teorema 1 (Propiedades de los Logaritmos). Sean $a, b, c > 0$ con $a \neq 1$:

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c) \quad (\text{Logaritmo de un producto}) \quad (1)$$

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c) \quad (\text{Logaritmo de un cociente}) \quad (2)$$

$$\log_a(b^n) = n \cdot \log_a(b) \quad (\text{Logaritmo de una potencia}) \quad (3)$$

$$\log_a(a) = 1 \quad (\text{Logaritmo de la base}) \quad (4)$$

$$\log_a(1) = 0 \quad (\text{Logaritmo de 1}) \quad (5)$$

Teorema 2 (Cambio de Base). Para $a, b, c > 0$ con $a, c \neq 1$:

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$$

3. Ejercicio 61: Logaritmos - Definición I

3.1. Apartado (a): Calcula x si $\log_4(x) = 3$

3.1.1. Planteamiento

Debemos hallar el valor de x que satisface la ecuación logarítmica $\log_4(x) = 3$.

3.1.2. Desarrollo

Aplicamos la definición de logaritmo. Por definición:

$$\log_4(x) = 3 \iff 4^3 = x$$

Justificación: La expresión $\log_4(x) = 3$ significa "el exponente al que hay que elevar 4 para obtener x es 3", lo cual equivale a escribir $x = 4^3$.

Calculamos la potencia:

$$x = 4^3$$

$$x = 4 \cdot 4 \cdot 4$$

$$x = 16 \cdot 4$$

$$x = 64$$

3.1.3. Verificación

Comprobamos el resultado sustituyendo en la ecuación original:

$$\log_4(64) = \log_4(4^3) = 3 \cdot \log_4(4) = 3 \cdot 1 = 3 \quad \checkmark$$

3.1.4. Solución

$$\boxed{x = 64}$$

Observación 1. Es fundamental recordar que el logaritmo $\log_a(b)$ solo está definido cuando $a > 0$, $a \neq 1$ y $b > 0$. En este caso, $x = 64 > 0$, por lo que la solución es válida.

3.2. Apartado (b): Calcula x si $\log_x(16) = 2$

3.2.1. Planteamiento

Debemos hallar la base x del logaritmo tal que $\log_x(16) = 2$.

3.2.2. Desarrollo

Aplicamos la definición de logaritmo:

$$\log_x(16) = 2 \iff x^2 = 16$$

Justificación: La expresión $\log_x(16) = 2$ significa "el exponente al que hay que elevar x para obtener 16 es 2", lo cual equivale a $x^2 = 16$.

Resolvemos la ecuación cuadrática:

$$\begin{aligned}x^2 &= 16 \\x &= \pm\sqrt{16} \\x &= \pm 4\end{aligned}$$

3.2.3. Restricción del dominio

Debemos analizar cuál de las dos soluciones es válida:

- $x = 4$: Es válido porque $4 > 0$ y $4 \neq 1$ ✓
- $x = -4$: No es válido porque la base de un logaritmo debe ser positiva ×

3.2.4. Verificación

Comprobamos con $x = 4$:

$$\log_4(16) = \log_4(4^2) = 2 \cdot \log_4(4) = 2 \cdot 1 = 2 \quad \checkmark$$

3.2.5. Solución

$$\boxed{x = 4}$$

Observación 2. Error común: Aceptar $x = -4$ como solución. Recordar siempre que la base de un logaritmo debe cumplir $a > 0$ y $a \neq 1$.

3.3. Apartado (c): Calcula x si $\log_3(81) = x$

3.3.1. Planteamiento

Debemos hallar el exponente x tal que $\log_3(81) = x$.

3.3.2. Desarrollo

Aplicamos la definición de logaritmo:

$$\log_3(81) = x \iff 3^x = 81$$

Para resolver esta ecuación exponencial, expresamos 81 como potencia de 3.
Descomposición factorial de 81:

$$\begin{aligned}81 &= 3 \cdot 27 \\&= 3 \cdot 3 \cdot 9 \\&= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \\&= 3^4\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$3^x = 3^4$$

Como la función exponencial es inyectiva (uno a uno), si las bases son iguales y las potencias son iguales, entonces los exponentes deben ser iguales:

$$x = 4$$

3.3.3. Verificación

$$\log_3(81) = \log_3(3^4) = 4 \cdot \log_3(3) = 4 \cdot 1 = 4 \quad \checkmark$$

3.3.4. Solución

$$\boxed{x = 4}$$

Observación 3. Este ejercicio ilustra la importancia de reconocer potencias. Saber que $81 = 3^4$ permite resolver el problema directamente. Otras potencias útiles: $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, $3^5 = 243$.

4. Ejercicio 62: Logaritmos - Definición II

4.1. Apartado (a): Calcula x si $\log_{10}(0,1) = x$

4.1.1. Planteamiento

Debemos hallar el exponente x tal que $\log_{10}(0,1) = x$.

4.1.2. Desarrollo

Aplicamos la definición de logaritmo:

$$\log_{10}(0,1) = x \iff 10^x = 0,1$$

Expresamos 0,1 como potencia de 10:

$$\begin{aligned} 0,1 &= \frac{1}{10} \\ &= \frac{1}{10^1} \\ &= 10^{-1} \end{aligned}$$

Justificación: Por la propiedad de potencias negativas, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, por lo tanto $\frac{1}{10} = 10^{-1}$.

Entonces:

$$10^x = 10^{-1}$$

Por inyectividad de la función exponencial:

$$x = -1$$

4.1.3. Verificación

$$\log_{10}(0,1) = \log_{10}(10^{-1}) = -1 \cdot \log_{10}(10) = -1 \cdot 1 = -1 \quad \checkmark$$

4.1.4. Solución

$$\boxed{x = -1}$$

Observación 4. Los logaritmos de números entre 0 y 1 son siempre negativos cuando la base es mayor que 1. Esto tiene sentido porque debemos elevar la base a un exponente negativo para obtener un número menor que 1.

4.2. Apartado (b): Calcula x si $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = x$

4.2.1. Planteamiento

Debemos hallar el exponente x tal que $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = x$.

4.2.2. Desarrollo

Aplicamos la definición de logaritmo:

$$\log_2 \left(\frac{1}{8} \right) = x \iff 2^x = \frac{1}{8}$$

Expresamos $\frac{1}{8}$ como potencia de 2.

Primero, expresamos 8 como potencia de 2:

$$\begin{aligned} 8 &= 2 \cdot 4 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ &= 2^3 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} &= \frac{1}{2^3} \\ &= 2^{-3} \end{aligned}$$

Justificación: Por la propiedad $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$.

Entonces:

$$2^x = 2^{-3}$$

Por inyectividad de la función exponencial:

$$x = -3$$

4.2.3. Método alternativo usando propiedades

Podemos también resolver usando la propiedad del logaritmo de un cociente:

$$\begin{aligned} \log_2 \left(\frac{1}{8} \right) &= \log_2(1) - \log_2(8) \\ &= 0 - \log_2(2^3) \\ &= 0 - 3 \cdot \log_2(2) \\ &= 0 - 3 \cdot 1 \\ &= -3 \end{aligned}$$

4.2.4. Verificación

$$\log_2 \left(\frac{1}{8} \right) = \log_2(2^{-3}) = -3 \cdot \log_2(2) = -3 \cdot 1 = -3 \quad \checkmark$$

4.2.5. Solución

$$\boxed{x = -3}$$

4.3. Apartado (c): Calcula x si $\log_x(\sqrt{5}) = \frac{1}{2}$

4.3.1. Planteamiento

Debemos hallar la base x del logaritmo tal que $\log_x(\sqrt{5}) = \frac{1}{2}$.

4.3.2. Desarrollo

Aplicamos la definición de logaritmo:

$$\log_x(\sqrt{5}) = \frac{1}{2} \iff x^{1/2} = \sqrt{5}$$

Justificación: La expresión $\log_x(\sqrt{5}) = \frac{1}{2}$ significa "x elevado a $\frac{1}{2}$ es igual a $\sqrt{5}$ ". Sabemos que $x^{1/2} = \sqrt{x}$, por lo tanto:

$$\sqrt{x} = \sqrt{5}$$

Para resolver, elevamos ambos miembros al cuadrado:

$$\begin{aligned}(\sqrt{x})^2 &= (\sqrt{5})^2 \\ x &= 5\end{aligned}$$

Justificación: La función $f(t) = t^2$ es inyectiva en el conjunto de números positivos, por lo que si $\sqrt{x} = \sqrt{5}$ y ambos son positivos, entonces $x = 5$.

4.3.3. Verificación de restricciones

Comprobamos que $x = 5$ cumple las condiciones de una base logarítmica:

- $5 > 0$ ✓
- $5 \neq 1$ ✓

4.3.4. Verificación de la solución

$$\log_5(\sqrt{5}) = \log_5(5^{1/2}) = \frac{1}{2} \cdot \log_5(5) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

4.3.5. Solución

$$\boxed{x = 5}$$

Observación 5. Este ejercicio conecta logaritmos con radicales. Recordar que $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ permite trabajar con radicales usando exponentes fraccionarios, lo cual facilita el uso de las propiedades de los logaritmos.

5. Ejercicio 63: Logaritmos - Propiedades I (Desarrollo)

5.1. Apartado (a): Desarrolla $\log_2(8x^3)$

5.1.1. Planteamiento

Debemos desarrollar la expresión $\log_2(8x^3)$ aplicando las propiedades de los logaritmos.

5.1.2. Desarrollo

Aplicamos la propiedad del logaritmo de un producto:

$$\log_2(8x^3) = \log_2(8) + \log_2(x^3)$$

Justificación: Por la propiedad $\log_a(bc) = \log_a(b) + \log_a(c)$.

Ahora desarrollamos cada término:

Primer término: $\log_2(8)$

Expresamos 8 como potencia de 2:

$$8 = 2^3$$

Por lo tanto:

$$\log_2(8) = \log_2(2^3) = 3 \cdot \log_2(2) = 3 \cdot 1 = 3$$

Justificación: Por la propiedad $\log_a(a^n) = n \cdot \log_a(a) = n \cdot 1 = n$.

Segundo término: $\log_2(x^3)$

Aplicamos la propiedad del logaritmo de una potencia:

$$\log_2(x^3) = 3 \cdot \log_2(x)$$

Justificación: Por la propiedad $\log_a(b^n) = n \cdot \log_a(b)$.

5.1.3. Resultado final

Combinando ambos resultados:

$$\log_2(8x^3) = 3 + 3 \log_2(x)$$

5.1.4. Solución

$$\log_2(8x^3) = 3 + 3 \log_2(x)$$

Observación 6. Este ejercicio muestra cómo "desarrollar" un logaritmo significa expresarlo como suma, resta y múltiplos de logaritmos más simples. Este proceso es útil para simplificar expresiones y resolver ecuaciones logarítmicas.

5.2. Apartado (b): Desarrolla $\log\left(\frac{a^2}{\sqrt{b}}\right)$

5.2.1. Planteamiento

Debemos desarrollar $\log\left(\frac{a^2}{\sqrt{b}}\right)$. Nota: Cuando no se indica la base, se asume logaritmo decimal (base 10).

5.2.2. Desarrollo

Aplicamos la propiedad del logaritmo de un cociente:

$$\log\left(\frac{a^2}{\sqrt{b}}\right) = \log(a^2) - \log(\sqrt{b})$$

Justificación: Por la propiedad $\log\left(\frac{u}{v}\right) = \log(u) - \log(v)$.
Ahora desarrollamos cada término:

Primer término: $\log(a^2)$

Aplicamos la propiedad del logaritmo de una potencia:

$$\log(a^2) = 2 \cdot \log(a)$$

Justificación: Por la propiedad $\log(u^n) = n \cdot \log(u)$.

Segundo término: $\log(\sqrt{b})$

Primero expresamos la raíz como potencia:

$$\sqrt{b} = b^{1/2}$$

Justificación: Por definición, $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$, entonces $\sqrt{b} = b^{1/2}$.

Aplicamos la propiedad del logaritmo de una potencia:

$$\log(\sqrt{b}) = \log(b^{1/2}) = \frac{1}{2} \cdot \log(b)$$

5.2.3. Resultado final

Combinando ambos resultados:

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{a^2}{\sqrt{b}}\right) &= 2\log(a) - \frac{1}{2}\log(b) \\ &= 2\log(a) - \frac{\log(b)}{2}\end{aligned}$$

5.2.4. Solución

$$\boxed{\log\left(\frac{a^2}{\sqrt{b}}\right) = 2\log(a) - \frac{1}{2}\log(b)}$$

Observación 7. Al trabajar con radicales en logaritmos, es fundamental convertirlos a exponentes fraccionarios. Esto permite aplicar consistentemente la propiedad $\log(u^n) = n \cdot \log(u)$.

5.3. Apartado (c): Si $\log 3 = 0,477$, calcula $\log 90$

5.3.1. Planteamiento

Dado que $\log 3 = 0,477$, debemos calcular $\log 90$ expresándolo en términos de logaritmos conocidos.

5.3.2. Desarrollo

Primero descomponemos 90 en factores primos:

$$\begin{aligned}90 &= 9 \times 10 \\&= 3^2 \times 10 \\&= 3^2 \times 2 \times 5 \\&= 2 \times 3^2 \times 5\end{aligned}$$

Sin embargo, es más conveniente usar:

$$90 = 9 \times 10 = 3^2 \times 10$$

Aplicamos logaritmo:

$$\log(90) = \log(3^2 \times 10)$$

Aplicamos la propiedad del logaritmo de un producto:

$$\log(90) = \log(3^2) + \log(10)$$

Justificación: Por la propiedad $\log(uv) = \log(u) + \log(v)$.

Desarrollamos cada término:

Primer término: $\log(3^2)$

$$\log(3^2) = 2 \cdot \log(3) = 2 \times 0,477 = 0,954$$

Segundo término: $\log(10)$

Como estamos trabajando con logaritmos decimales (base 10):

$$\log_{10}(10) = 1$$

5.3.3. Cálculo final

$$\log(90) = 0,954 + 1 = 1,954$$

5.3.4. Verificación conceptual

Tiene sentido que $\log(90) \approx 1,954$ porque:

- $\log(10) = 1$ y $\log(100) = 2$
- Como $10 < 90 < 100$, debe cumplirse $1 < \log(90) < 2$ ✓

5.3.5. Solución

$\log(90) = 1,954$

Observación 8. Este ejercicio ilustra cómo los logaritmos permiten calcular valores desconocidos a partir de valores conocidos. Es fundamental recordar que $\log_{10}(10) = 1$ cuando trabajamos con logaritmos decimales.

6. Ejercicio 64: Logaritmos - Propiedades II (Reducción)

6.1. Apartado (a): Expresa como un solo logaritmo: $2 \log x + \log y$

6.1.1. Planteamiento

Debemos expresar la suma $2 \log x + \log y$ como un único logaritmo.

6.1.2. Desarrollo

Primero, aplicamos la propiedad del logaritmo de una potencia al primer término:

$$2 \log x = \log(x^2)$$

Justificación: Por la propiedad $n \cdot \log_a(b) = \log_a(b^n)$, con $n = 2$ y $b = x$.

Ahora tenemos:

$$2 \log x + \log y = \log(x^2) + \log(y)$$

Aplicamos la propiedad del logaritmo de un producto:

$$\log(x^2) + \log(y) = \log(x^2 \cdot y)$$

Justificación: Por la propiedad $\log_a(u) + \log_a(v) = \log_a(uv)$.

6.1.3. Solución

$$2 \log x + \log y = \log(x^2 y)$$

Observación 9. Reducir.º “condensar” logaritmos es el proceso inverso a desarrollarlos. Convertimos sumas en productos, restas en cocientes, y coeficientes en exponentes.

6.2. Apartado (b): Expresa como un solo logaritmo: $\log_a 5 - 3 \log_a 2$

6.2.1. Planteamiento

Debemos expresar $\log_a 5 - 3 \log_a 2$ como un único logaritmo en base a .

6.2.2. Desarrollo

Primero, aplicamos la propiedad del logaritmo de una potencia al segundo término:

$$3 \log_a 2 = \log_a(2^3) = \log_a(8)$$

Justificación: Por la propiedad $n \cdot \log_a(b) = \log_a(b^n)$, con $n = 3$ y $b = 2$.

Calculamos 2^3 :

$$2^3 = 8$$

Ahora tenemos:

$$\log_a 5 - 3 \log_a 2 = \log_a 5 - \log_a 8$$

Aplicamos la propiedad del logaritmo de un cociente:

$$\log_a 5 - \log_a 8 = \log_a \left(\frac{5}{8} \right)$$

Justificación: Por la propiedad $\log_a(u) - \log_a(v) = \log_a\left(\frac{u}{v}\right)$.

6.2.3. Solución

$$\log_a 5 - 3 \log_a 2 = \log_a \left(\frac{5}{8} \right)$$

6.3. Apartado (c): Simplifica: $\log_5 5 + \log_{10} 100$

6.3.1. Planteamiento

Debemos simplificar la suma $\log_5 5 + \log_{10} 100$.

6.3.2. Desarrollo

Calculamos cada término por separado:

Primer término: $\log_5 5$

Por definición, el logaritmo de un número en su propia base es 1:

$$\log_5 5 = 1$$

Justificación: $\log_a a = 1$ porque $a^1 = a$.

Segundo término: $\log_{10} 100$

Expresamos 100 como potencia de 10:

$$100 = 10^2$$

Por lo tanto:

$$\log_{10}(100) = \log_{10}(10^2) = 2 \cdot \log_{10}(10) = 2 \cdot 1 = 2$$

Justificación: Por la propiedad $\log_a(a^n) = n$.

6.3.3. Cálculo final

$$\log_5 5 + \log_{10} 100 = 1 + 2 = 3$$

6.3.4. Solución

$$\log_5 5 + \log_{10} 100 = 3$$

Observación 10. Nota importante: En este ejercicio no podemos condensar.^{en} un solo logaritmo porque las bases son diferentes (5 y 10). Por eso, simplificamos cada término individualmente y luego sumamos los valores numéricos.

7. Ejercicio 65: Logaritmos - Cambio de Base

7.1. Apartado (a): Usa la calculadora para hallar $\log_3 10$ (con tres cifras decimales)

7.1.1. Planteamiento

Debemos calcular $\log_3 10$ usando la calculadora. Como las calculadoras típicamente solo tienen logaritmos en base 10 ($\log$) o base e ($\ln$), necesitamos usar la fórmula de cambio de base.

7.1.2. Marco teórico

Teorema 3 (Cambio de Base). Para calcular $\log_a b$ usando logaritmos en base c :

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

7.1.3. Desarrollo

Aplicamos el cambio de base a base 10:

$$\log_3 10 = \frac{\log_{10} 10}{\log_{10} 3}$$

Calculamos cada término:

Numerador:

$$\log_{10} 10 = 1$$

Denominador:

$$\log_{10} 3 \approx 0,4771212547 \dots$$

7.1.4. Cálculo

$$\log_3 10 = \frac{1}{0,4771212547} \approx 2,095903274 \dots$$

Redondeando a tres cifras decimales:

$$\log_3 10 \approx 2,096$$

7.1.5. Verificación conceptual

Comprobamos que el resultado tiene sentido:

- $3^2 = 9 < 10$, entonces $\log_3 10 > 2$ ✓
- $3^3 = 27 > 10$, entonces $\log_3 10 < 3$ ✓
- Por lo tanto, $2 < \log_3 10 < 3$, y 2,096 cumple esta condición.

7.1.6. Solución

$\log_3 10 \approx 2,096$

7.2. Apartado (b): ¿Cómo se expresaría $\log_a b$ en base c ?

7.2.1. Planteamiento

Debemos expresar la fórmula general del cambio de base.

7.2.2. Desarrollo teórico

Queremos calcular $\log_a b$, es decir, el exponente x tal que $a^x = b$.

Sea $x = \log_a b$. Por definición:

$$a^x = b$$

Aplicamos $\log_c$ a ambos lados:

$$\log_c(a^x) = \log_c(b)$$

Por la propiedad del logaritmo de una potencia:

$$x \cdot \log_c(a) = \log_c(b)$$

Despejamos x :

$$x = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$$

Como $x = \log_a b$, obtenemos:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

7.2.3. Condiciones

Esta fórmula es válida siempre que:

- $a, b, c > 0$
- $a, c \neq 1$
- $\log_c a \neq 0$ (lo cual está garantizado si $a \neq 1$)

7.2.4. Solución

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Observación 11. Esta fórmula es fundamental porque permite calcular logaritmos en cualquier base usando solo logaritmos en una base fija (típicamente base 10 o base e). Las bases más comunes son:

- Base 10: $\log$ o $\log_{10}$ (logaritmo decimal o común)
- Base e : $\ln$ o $\log_e$ (logaritmo natural o neperiano)

7.3. Apartado (c): Si $\log 5 \approx 0,699$, calcula $\log 0,2$ sin calculadora

7.3.1. Planteamiento

Debemos calcular $\log 0,2$ usando únicamente el dato $\log 5 \approx 0,699$.

7.3.2. Análisis previo

Primero observamos la relación entre 0,2 y 5:

$$0,2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

Por lo tanto:

$$\log(0,2) = \log\left(\frac{1}{5}\right)$$

7.3.3. Desarrollo

Aplicamos la propiedad del logaritmo de un cociente:

$$\log\left(\frac{1}{5}\right) = \log(1) - \log(5)$$

Justificación: Por la propiedad $\log\left(\frac{u}{v}\right) = \log(u) - \log(v)$.

Calculamos cada término:

Primer término:

$$\log(1) = 0$$

Justificación: $\log_a(1) = 0$ para cualquier base a porque $a^0 = 1$.

Segundo término:

$$\log(5) \approx 0,699$$

(dato proporcionado)

7.3.4. Cálculo final

$$\log(0,2) = 0 - 0,699 = -0,699$$

7.3.5. Verificación conceptual

El resultado tiene sentido porque:

- $0,2 < 1$, entonces $\log(0,2) < 0$ ✓
- $0,2 = \frac{1}{5}$ y $5 = \frac{1}{0,2}$ son recíprocos
- Por la propiedad $\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log(x)$, tiene sentido que $\log(0,2) = -\log(5)$

7.3.6. Método alternativo

También podemos usar exponentes:

$$\begin{aligned} 0,2 &= \frac{1}{5} = 5^{-1} \\ \log(0,2) &= \log(5^{-1}) \\ &= -1 \cdot \log(5) \\ &= -0,699 \end{aligned}$$

7.3.7. Solución

$$\log(0,2) = -0,699$$

Observación 12. Este ejercicio ilustra una propiedad importante: los logaritmos de números recíprocos son opuestos. Si $xy = 1$, entonces $\log x + \log y = \log(xy) = \log(1) = 0$, por lo que $\log y = -\log x$.

8. Ejercicio 66: Problema de Logaritmos (Ecuación)

8.1. Apartado (a): Resuelve $\log_x 27 = 3$

8.1.1. Planteamiento

Debemos hallar la base x del logaritmo tal que $\log_x 27 = 3$.

8.1.2. Desarrollo

Aplicamos la definición de logaritmo:

$$\log_x 27 = 3 \iff x^3 = 27$$

Justificación: La expresión $\log_x 27 = 3$ significa "x elevado a 3 es igual a 27".
Para resolver $x^3 = 27$, calculamos la raíz cúbica:

$$x = \sqrt[3]{27}$$

Descomponemos 27 para identificar la raíz cúbica:

$$\begin{aligned} 27 &= 3 \times 9 \\ &= 3 \times 3 \times 3 \\ &= 3^3 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$x = \sqrt[3]{3^3} = 3$$

8.1.3. Verificación de restricciones

Comprobamos que $x = 3$ es una base válida:

- $3 > 0$ ✓
- $3 \neq 1$ ✓

8.1.4. Verificación de la solución

$$\log_3 27 = \log_3(3^3) = 3 \cdot \log_3 3 = 3 \cdot 1 = 3 \quad \checkmark$$

8.1.5. Solución

$$\boxed{x = 3}$$

8.2. Apartado (b): Resuelve $\log_4(x + 1) = 2$

8.2.1. Planteamiento

Debemos hallar el valor de x que satisface $\log_4(x + 1) = 2$.

8.2.2. Desarrollo

Aplicamos la definición de logaritmo:

$$\log_4(x+1) = 2 \iff 4^2 = x+1$$

Justificación: La expresión $\log_4(x+1) = 2$ significa "4 elevado a 2 es igual a $x+1$ ".
Calculamos 4^2 :

$$4^2 = 16$$

Por lo tanto:

$$x+1 = 16$$

Despejamos x :

$$x = 16 - 1 = 15$$

8.2.3. Verificación de restricciones

Para que $\log_4(x+1)$ esté definido, necesitamos:

$$x+1 > 0 \implies x > -1$$

Con $x = 15$:

$$15+1 = 16 > 0 \quad \checkmark$$

8.2.4. Verificación de la solución

$$\log_4(15+1) = \log_4(16) = \log_4(4^2) = 2 \cdot \log_4(4) = 2 \cdot 1 = 2 \quad \checkmark$$

8.2.5. Solución

$$\boxed{x = 15}$$

Observación 13. En ecuaciones logarítmicas, siempre debemos verificar que la solución no viole las condiciones del dominio del logaritmo (el argumento debe ser positivo).

8.3. Apartado (c): ¿Qué valor debe tener x para que $\log_x \sqrt{3} = 1$?

8.3.1. Planteamiento

Debemos hallar la base x tal que $\log_x \sqrt{3} = 1$.

8.3.2. Desarrollo

Aplicamos la definición de logaritmo:

$$\log_x \sqrt{3} = 1 \iff x^1 = \sqrt{3}$$

Justificación: La expresión $\log_x \sqrt{3} = 1$ significa " x elevado a 1 es igual a $\sqrt{3}$ ".
Simplificamos:

$$x = \sqrt{3}$$

8.3.3. Verificación de restricciones

Comprobamos que $x = \sqrt{3}$ es una base válida:

- $\sqrt{3} > 0$ ✓ (las raíces cuadradas de números positivos son positivas)
- $\sqrt{3} \neq 1$ ✓ (porque $\sqrt{3} \approx 1,732 \neq 1$)

8.3.4. Verificación algebraica

Comprobemos que $\sqrt{3} \neq 1$:

$$\sqrt{3} = 1 \implies 3 = 1^2 = 1$$

Lo cual es falso, por lo tanto $\sqrt{3} \neq 1$ ✓

8.3.5. Verificación de la solución

$$\log_{\sqrt{3}} \sqrt{3} = 1$$

Esto es cierto porque $\log_a a = 1$ para cualquier base válida a .

Alternativamente:

$$(\sqrt{3})^1 = \sqrt{3} \quad \checkmark$$

8.3.6. Solución

$$\boxed{x = \sqrt{3}}$$

Observación 14. Es perfectamente válido que la base de un logaritmo sea un número irracional como $\sqrt{3}$. Lo único que se requiere es que sea positivo y diferente de 1.

9. Ejercicio 67: Logaritmos - Simplificación Avanzada

9.1. Apartado (a): Calcula $\log_{\sqrt{2}} 4$

9.1.1. Planteamiento

Debemos calcular $\log_{\sqrt{2}} 4$, es decir, el exponente al que hay que elevar $\sqrt{2}$ para obtener 4.

9.1.2. Método 1: Definición directa

Por definición:

$$\log_{\sqrt{2}} 4 = x \iff (\sqrt{2})^x = 4$$

Expresamos todo en términos de potencias de 2.

Sabemos que:

$$\sqrt{2} = 2^{1/2} \quad \text{y} \quad 4 = 2^2$$

Entonces:

$$(2^{1/2})^x = 2^2$$

Por la propiedad de potencias $(a^m)^n = a^{mn}$:

$$2^{x/2} = 2^2$$

Por inyectividad de la función exponencial:

$$\frac{x}{2} = 2$$

Despejamos x :

$$x = 2 \times 2 = 4$$

9.1.3. Método 2: Cambio de base

Aplicamos cambio de base a base 2:

$$\log_{\sqrt{2}} 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 \sqrt{2}}$$

Calculamos cada término:

Numerador:

$$\log_2 4 = \log_2(2^2) = 2$$

Denominador:

$$\log_2 \sqrt{2} = \log_2(2^{1/2}) = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto:

$$\log_{\sqrt{2}} 4 = \frac{2}{1/2} = 2 \times 2 = 4$$

9.1.4. Verificación

$$(\sqrt{2})^4 = [(2^{1/2})^4] = 2^{4/2} = 2^2 = 4 \quad \checkmark$$

9.1.5. Solución

$$\boxed{\log_{\sqrt{2}} 4 = 4}$$

9.2. Apartado (b): Simplifica $3^{\log_3 7}$

9.2.1. Planteamiento

Debemos simplificar la expresión $3^{\log_3 7}$.

9.2.2. Marco teórico

Teorema 4 (Propiedad fundamental). Para $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$:

$$a^{\log_a b} = b$$

9.2.3. Demostración de la propiedad

Sea $x = \log_a b$. Por definición:

$$a^x = b$$

Sustituyendo $x = \log_a b$:

$$a^{\log_a b} = b$$

9.2.4. Aplicación

En nuestro caso, $a = 3$ y $b = 7$:

$$3^{\log_3 7} = 7$$

9.2.5. Solución

$$\boxed{3^{\log_3 7} = 7}$$

Observación 15. Esta propiedad es una de las más importantes de los logaritmos. Nos dice que la función exponencial $f(x) = a^x$ y la función logarítmica $g(x) = \log_a x$ son inversas una de la otra:

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{y} \quad \log_a(a^x) = x$$

9.3. Apartado (c): Simplifica $\log(1000) - \log(10)$

9.3.1. Planteamiento

Debemos simplificar $\log(1000) - \log(10)$, donde $\log$ denota el logaritmo decimal (base 10).

9.3.2. Método 1: Aplicando propiedades

Aplicamos la propiedad del logaritmo de un cociente:

$$\log(1000) - \log(10) = \log\left(\frac{1000}{10}\right)$$

Justificación: Por la propiedad $\log_a(u) - \log_a(v) = \log_a\left(\frac{u}{v}\right)$.

Calculamos el cociente:

$$\frac{1000}{10} = 100$$

Por lo tanto:

$$\log(1000) - \log(10) = \log(100)$$

Expresamos 100 como potencia de 10:

$$100 = 10^2$$

Entonces:

$$\log(100) = \log(10^2) = 2 \cdot \log(10) = 2 \cdot 1 = 2$$

9.3.3. Método 2: Cálculo directo

Calculamos cada logaritmo por separado:

Primer término:

$$\log(1000) = \log(10^3) = 3$$

Segundo término:

$$\log(10) = 1$$

Resta:

$$3 - 1 = 2$$

9.3.4. Solución

$$\boxed{\log(1000) - \log(10) = 2}$$

Observación 16. Ambos métodos son válidos. El primer método (usar propiedades antes de calcular) es más general y útil cuando no podemos evaluar los logaritmos directamente. El segundo método es más directo cuando reconocemos las potencias de la base.

10. Ejercicio 68: Logaritmos y Radicales

10.1. Apartado (a): Expresa $\log_a \sqrt[3]{a^2}$ como un número racional

10.1.1. Planteamiento

Debemos expresar $\log_a \sqrt[3]{a^2}$ en forma de fracción.

10.1.2. Desarrollo

Primero, expresamos el radical como potencia:

$$\sqrt[3]{a^2} = a^{2/3}$$

Justificación: Por definición, $\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$.

Aplicamos logaritmo:

$$\log_a \sqrt[3]{a^2} = \log_a (a^{2/3})$$

Aplicamos la propiedad del logaritmo de una potencia:

$$\log_a (a^{2/3}) = \frac{2}{3} \cdot \log_a (a)$$

Justificación: Por la propiedad $\log_a (a^n) = n \cdot \log_a (a)$.

Sabemos que:

$$\log_a (a) = 1$$

Por lo tanto:

$$\log_a \sqrt[3]{a^2} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

10.1.3. Solución

$$\boxed{\log_a \sqrt[3]{a^2} = \frac{2}{3}}$$

Observación 17. En general, $\log_a (a^r) = r$ para cualquier número real r . Esto incluye exponentes fraccionarios, negativos, etc.

10.2. Apartado (b): Desarrolla $\log_2 \sqrt{\frac{x \cdot y}{z^2}}$

10.2.1. Planteamiento

Debemos desarrollar completamente la expresión $\log_2 \sqrt{\frac{x \cdot y}{z^2}}$.

10.2.2. Desarrollo

Paso 1: Expresamos la raíz cuadrada como potencia:

$$\sqrt{\frac{x \cdot y}{z^2}} = \left(\frac{x \cdot y}{z^2} \right)^{1/2}$$

Aplicamos logaritmo:

$$\log_2 \sqrt{\frac{x \cdot y}{z^2}} = \log_2 \left[\left(\frac{x \cdot y}{z^2} \right)^{1/2} \right]$$

Paso 2: Aplicamos la propiedad del logaritmo de una potencia:

$$\log_2 \left[\left(\frac{x \cdot y}{z^2} \right)^{1/2} \right] = \frac{1}{2} \cdot \log_2 \left(\frac{x \cdot y}{z^2} \right)$$

Justificación: $\log_a(u^n) = n \cdot \log_a(u)$ con $n = \frac{1}{2}$.

Paso 3: Aplicamos la propiedad del logaritmo de un cociente:

$$\frac{1}{2} \cdot \log_2 \left(\frac{x \cdot y}{z^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot [\log_2(x \cdot y) - \log_2(z^2)]$$

Justificación: $\log_a \left(\frac{u}{v} \right) = \log_a(u) - \log_a(v)$.

Paso 4: Aplicamos la propiedad del logaritmo de un producto en el primer término:

$$\log_2(x \cdot y) = \log_2(x) + \log_2(y)$$

Justificación: $\log_a(uv) = \log_a(u) + \log_a(v)$.

Paso 5: Aplicamos la propiedad del logaritmo de una potencia en el segundo término:

$$\log_2(z^2) = 2 \cdot \log_2(z)$$

Paso 6: Sustituimos en la expresión del Paso 3:

$$\frac{1}{2} \cdot [\log_2(x) + \log_2(y) - 2 \log_2(z)]$$

Paso 7: Distribuimos el factor $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} \log_2(x) + \frac{1}{2} \log_2(y) - \frac{1}{2} \cdot 2 \log_2(z)$$

Simplificamos:

$$\frac{1}{2} \log_2(x) + \frac{1}{2} \log_2(y) - \log_2(z)$$

10.2.3. Solución

$$\log_2 \sqrt{\frac{x \cdot y}{z^2}} = \frac{1}{2} \log_2(x) + \frac{1}{2} \log_2(y) - \log_2(z)$$

10.3. Apartado (c): ¿Cuál es la relación entre $\log_a x$ y $\log_{a^2} x$?

10.3.1. Planteamiento

Debemos encontrar la relación matemática entre $\log_a x$ y $\log_{a^2} x$.

10.3.2. Desarrollo

Usamos la fórmula de cambio de base para expresar $\log_{a^2} x$ en términos de logaritmos base a :

$$\log_{a^2} x = \frac{\log_a x}{\log_a(a^2)}$$

Simplificamos el denominador:

$$\log_a(a^2) = 2 \cdot \log_a(a) = 2 \cdot 1 = 2$$

Por lo tanto:

$$\log_{a^2} x = \frac{\log_a x}{2}$$

Alternativamente:

$$\log_{a^2} x = \frac{1}{2} \log_a x$$

10.3.3. Relación inversa

Despejando $\log_a x$:

$$\log_a x = 2 \cdot \log_{a^2} x$$

10.3.4. Generalización

En general, para cualquier $n \neq 0$:

$$\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$$

10.3.5. Demostración alternativa por definición

Sea $y = \log_{a^2} x$. Por definición:

$$(a^2)^y = x$$

Por propiedades de potencias:

$$a^{2y} = x$$

Aplicando $\log_a$ a ambos lados:

$$\log_a(a^{2y}) = \log_a(x)$$

$$2y = \log_a(x)$$

$$y = \frac{\log_a(x)}{2}$$

Como $y = \log_{a^2} x$:

$$\log_{a^2} x = \frac{\log_a x}{2}$$

10.3.6. Solución

$\log_{a^2} x = \frac{1}{2} \log_a x \quad \text{o equivalentemente} \quad \log_a x = 2 \log_{a^2} x$

Observación 18. Esta relación muestra que cuando duplicamos la base (elevándola al cuadrado), el logaritmo se reduce a la mitad. Inversamente, una base más pequeña produce logaritmos mayores.

11. Ejercicio 69: Problemas Finales de Magnitudes

11.1. Apartado (a): Magnitud de un terremoto

11.1.1. Planteamiento

La magnitud de un terremoto se calcula mediante:

$$M = \log \left(\frac{A}{A_0} \right)$$

donde A es la amplitud del terremoto y A_0 es una amplitud de referencia.

Si $\frac{A}{A_0} = 10^7$, debemos calcular M .

11.1.2. Desarrollo

Sustituimos el valor dado:

$$M = \log \left(\frac{A}{A_0} \right) = \log(10^7)$$

Como estamos usando logaritmo decimal (base 10):

$$\log(10^7) = 7 \cdot \log(10) = 7 \cdot 1 = 7$$

11.1.3. Interpretación

Un terremoto con magnitud 7 en la escala de Richter tiene una amplitud 10^7 veces mayor que la amplitud de referencia.

11.1.4. Solución

$$\boxed{M = 7}$$

Observación 19. La escala de Richter es logarítmica, lo que significa que cada unidad de incremento en la magnitud representa un aumento de 10 veces en la amplitud. Un terremoto de magnitud 7 es 10 veces más amplificado que uno de magnitud 6, 100 veces más que uno de magnitud 5, etc.

11.2. Apartado (b): Nivel de ruido en decibelios

11.2.1. Planteamiento

El nivel de ruido en decibelios se calcula mediante:

$$L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

donde I es la intensidad del sonido e I_0 es la intensidad de referencia.

Si $\frac{I}{I_0} = 10^3$, debemos calcular L .

11.2.2. Desarrollo

Sustituimos el valor dado:

$$L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) = 10 \log(10^3)$$

Calculamos el logaritmo:

$$\log(10^3) = 3 \cdot \log(10) = 3 \cdot 1 = 3$$

Por lo tanto:

$$L = 10 \times 3 = 30$$

11.2.3. Unidades

El resultado es $L = 30$ decibelios (dB).

11.2.4. Solución

$$\boxed{L = 30 \text{ dB}}$$

Observación 20. La escala de decibelios también es logarítmica. Un incremento de 10 dB representa un aumento de 10 veces en la intensidad del sonido. Ejemplos de niveles comunes:

- 0 dB: umbral de audición
- 30 dB: biblioteca silenciosa
- 60 dB: conversación normal
- 90 dB: tráfico pesado
- 120 dB: concierto de rock

11.3. Apartado (c): Comparación de magnitudes en la escala de Richter

11.3.1. Planteamiento

Debemos determinar cuántas veces es más intensa una magnitud 8 que una magnitud 6 en la escala de Richter.

11.3.2. Marco teórico

La fórmula de magnitud es:

$$M = \log \left(\frac{A}{A_0} \right)$$

Para dos terremotos con magnitudes M_1 y M_2 y amplitudes A_1 y A_2 :

$$M_1 = \log \left(\frac{A_1}{A_0} \right) \quad \text{y} \quad M_2 = \log \left(\frac{A_2}{A_0} \right)$$

11.3.3. Desarrollo

Para $M_1 = 8$:

$$8 = \log \left(\frac{A_1}{A_0} \right)$$

Por definición de logaritmo:

$$\frac{A_1}{A_0} = 10^8$$

Para $M_2 = 6$:

$$6 = \log \left(\frac{A_2}{A_0} \right)$$

Por definición de logaritmo:

$$\frac{A_2}{A_0} = 10^6$$

Calculamos la razón entre las amplitudes:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_1/A_0}{A_2/A_0} = \frac{10^8}{10^6}$$

Por la propiedad de cociente de potencias:

$$\frac{10^8}{10^6} = 10^{8-6} = 10^2 = 100$$

11.3.4. Método alternativo

La diferencia de magnitudes es:

$$M_1 - M_2 = 8 - 6 = 2$$

Usando propiedades de logaritmos:

$$\begin{aligned} M_1 - M_2 &= \log \left(\frac{A_1}{A_0} \right) - \log \left(\frac{A_2}{A_0} \right) \\ &= \log \left(\frac{A_1/A_0}{A_2/A_0} \right) \\ &= \log \left(\frac{A_1}{A_2} \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$2 = \log \left(\frac{A_1}{A_2} \right)$$

Aplicando la definición:

$$\frac{A_1}{A_2} = 10^2 = 100$$

11.3.5. Solución

Una magnitud 8 es 100 veces más intensa que una magnitud 6

Observación 21. En general, la diferencia de n unidades en la escala de Richter corresponde a un factor de 10^n en la amplitud. Por ejemplo:

- Diferencia de 1: $10^1 = 10$ veces más intenso
- Diferencia de 2: $10^2 = 100$ veces más intenso
- Diferencia de 3: $10^3 = 1000$ veces más intenso

12. Ejercicio 70: Conexión Radicales-Potencias-Logaritmos

12.1. Apartado (a): Escribe $\sqrt[4]{4^2}$ con exponente fraccionario y calcúlalo

12.1.1. Planteamiento

Debemos expresar $\sqrt[4]{4^2}$ usando exponentes fraccionarios y calcular su valor.

12.1.2. Desarrollo

Aplicamos la definición de radical:

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$$

En nuestro caso, $x = 4$, $m = 2$ y $n = 4$:

$$\sqrt[4]{4^2} = 4^{2/4}$$

Simplificamos la fracción:

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto:

$$\sqrt[4]{4^2} = 4^{1/2}$$

Calculamos $4^{1/2}$:

$$4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$$

12.1.3. Verificación

Comprobamos elevando el resultado a la cuarta potencia:

$$2^4 = 16 = 4^2 \quad \checkmark$$

12.1.4. Método alternativo

También podemos calcular primero la potencia dentro del radical:

$$\sqrt[4]{4^2} = \sqrt[4]{16}$$

Expresamos 16 como potencia de 2:

$$16 = 2^4$$

Por lo tanto:

$$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$$

12.1.5. Solución

$$\boxed{\sqrt[4]{4^2} = 4^{1/2} = 2}$$

Observación 22. Este ejercicio ilustra la equivalencia entre radicales y exponentes fraccionarios. En general:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} = (a^{1/n})^m = (\sqrt[n]{a})^m$$

Esta equivalencia es fundamental para trabajar con radicales usando las propiedades de las potencias.

12.2. Apartado (b): Resuelve la ecuación exponencial $2^x = 32$

12.2.1. Planteamiento

Debemos hallar el valor de x que satisface $2^x = 32$.

12.2.2. Desarrollo

Expresamos 32 como potencia de 2.

Descomposición de 32:

$$\begin{aligned} 32 &= 2 \times 16 \\ &= 2 \times 2 \times 8 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 4 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \\ &= 2^5 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación se convierte en:

$$2^x = 2^5$$

Por inyectividad de la función exponencial (bases iguales implican exponentes iguales):

$$x = 5$$

12.2.3. Método alternativo usando logaritmos

Aplicamos logaritmo base 2 a ambos lados:

$$\log_2(2^x) = \log_2(32)$$

Por la propiedad $\log_a(a^n) = n$:

$$x = \log_2(32)$$

Calculamos $\log_2(32)$ sabiendo que $32 = 2^5$:

$$\log_2(32) = \log_2(2^5) = 5$$

Por lo tanto:

$$x = 5$$

12.2.4. Verificación

$$2^5 = 32 \quad \checkmark$$

12.2.5. Solución

$$\boxed{x = 5}$$

12.3. Apartado (c): Expresa la solución de (b) en forma de logaritmo

12.3.1. Planteamiento

Debemos expresar la solución $x = 5$ de la ecuación $2^x = 32$ usando notación logarítmica.

12.3.2. Desarrollo

La ecuación original es:

$$2^x = 32$$

Por la definición de logaritmo, esta ecuación es equivalente a:

$$x = \log_2(32)$$

Justificación: Por definición, $\log_a b = x \iff a^x = b$.

En nuestro caso, $a = 2$, $b = 32$ y x es el exponente que buscamos.

12.3.3. Forma general

En general, la solución de una ecuación exponencial $a^x = b$ se expresa como:

$$x = \log_a b$$

12.3.4. Verificación de equivalencia

Comprobamos que $\log_2(32) = 5$:

$$\log_2(32) = \log_2(2^5) = 5 \cdot \log_2(2) = 5 \cdot 1 = 5 \quad \checkmark$$

12.3.5. Solución

$$x = \log_2(32)$$

o equivalentemente:

$$x = \log_2(32) = 5$$

Observación 23. Este ejercicio ilustra la relación fundamental entre exponenciales y logaritmos:

Ecuación exponencial: $a^x = b$

Forma logarítmica: $x = \log_a b$

Los logaritmos fueron inventados precisamente para resolver ecuaciones exponenciales. Convertir entre las dos formas es una habilidad esencial en matemáticas.

Ejemplos adicionales:

- $10^x = 1000 \iff x = \log_{10}(1000) = 3$
- $3^x = 81 \iff x = \log_3(81) = 4$
- $e^x = 7 \iff x = \ln(7)$

13. Resumen y Conclusiones

13.1. Conceptos clave trabajados

En estos 10 ejercicios hemos trabajado exhaustivamente los siguientes conceptos:

1. **Definición de logaritmo:** $\log_a b = x \iff a^x = b$
2. **Propiedades fundamentales:**
 - Logaritmo de un producto: $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$
 - Logaritmo de un cociente: $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
 - Logaritmo de una potencia: $\log_a(b^n) = n \cdot \log_a b$
 - Identidades básicas: $\log_a a = 1$ y $\log_a 1 = 0$
3. **Cambio de base:** $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
4. **Relación exponencial-logarítmica:** $a^{\log_a b} = b$
5. **Aplicaciones prácticas:** escalas de Richter, decibelios

13.2. Conexiones entre radicales, potencias y logaritmos

Los tres conceptos están íntimamente relacionados:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} \quad \text{y} \quad \log_a(a^{m/n}) = \frac{m}{n}$$

13.3. Errores comunes a evitar

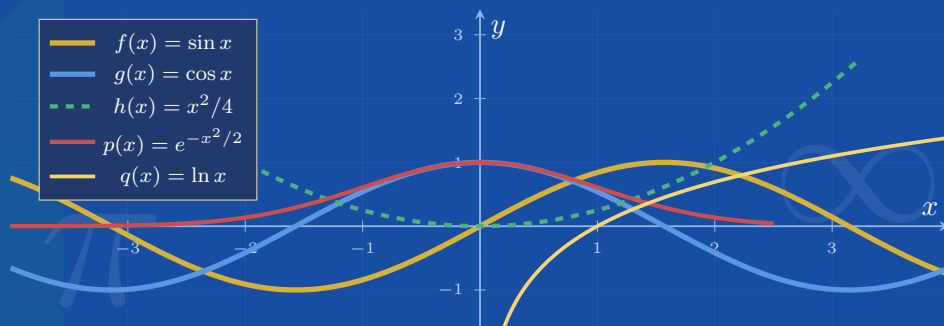
- Olvidar que la base de un logaritmo debe ser positiva y diferente de 1
- Confundir $\log_a(b + c)$ con $\log_a b + \log_a c$ (¡no son iguales!)
- No verificar el dominio en ecuaciones logarítmicas
- Olvidar que $\log(0,2) < 0$ porque $0,2 < 1$

13.4. Reflexión final

Los logaritmos son una herramienta matemática fundamental que permite:

- Resolver ecuaciones exponenciales
- Simplificar productos y cocientes convirtiéndolos en sumas y restas
- Modelar fenómenos que varían en órdenes de magnitud (terremotos, sonido, pH, etc.)
- Comprimir escalas numéricas muy amplias

Dominar los logaritmos es esencial para el estudio posterior de funciones exponenciales y logarítmicas, cálculo diferencial e integral, y muchas aplicaciones en ciencias e ingeniería.



Matemáticas B 4.º ESO Curso 2025 – 2026

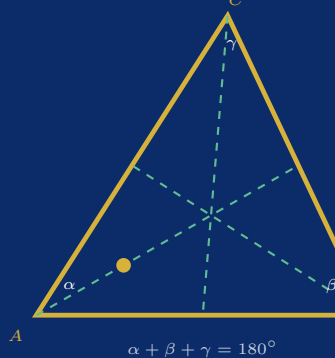
Álgebra · Funciones · Geometría · Estadística · Probabilidad

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad | \quad e^{i\pi} + 1 = 0 \quad | \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad | \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

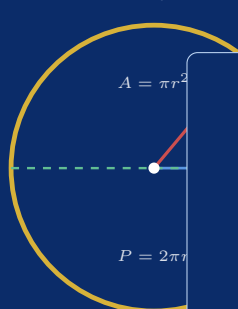
*“La matemática es el alfabeto con el que Dios
ha escrito el universo.”*

— Galileo Galilei (1564 – 1642)

Triángulo y medianas



Círculo y arcos



Espiral de Arq.



Nombre y Apellidos: _____

1. Clasificación y Representación de Números

a) Clasifica los siguientes números en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{I}$:

$$\sqrt{49}, \quad -5, \quad 0,25, \quad \pi, \quad \frac{11}{3}, \quad \sqrt{7}$$

b) Indica si son números reales ($\mathbb{R}$) o no.

c) ¿Cuál es la fracción generatriz del número 0,25?

2. Intervalos y Errores

a) Representa en la recta real el intervalo $A = (-3, 5]$ y la semirrecta $B = [1, +\infty)$.

b) Escribe el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 4\}$ en forma de intervalo.

c) Al medir 15,3 m, el error absoluto es 0,02 m. Calcula el error relativo (en porcentaje, con 3 cifras significativas).

3. Operaciones con Radicales

a) Simplifica al máximo la expresión, extrayendo factores: $\sqrt{720}$

b) Introduce los factores dentro del radical y simplifica: $2\sqrt[3]{3} \cdot 5\sqrt[3]{9}$

c) Realiza la siguiente resta de radicales y simplifica: $3\sqrt{20} - 5\sqrt{45} + \sqrt{80}$

4. Racionalización y Notación Científica

a) Racionaliza y simplifica: $\frac{6}{\sqrt{3}}$

b) Racionaliza y simplifica: $\frac{2}{3-\sqrt{2}}$

c) Realiza la operación en notación científica: $(4,5 \times 10^6) \cdot (3 \times 10^{-2})$

5. Logaritmos

a) Calcula el valor de x : $\log_2 32 = x$ y $\log_x 81 = 4$

b) Aplica las propiedades de los logaritmos para desarrollar: $\log \left(\frac{a^3 \cdot \sqrt{b}}{c^2} \right)$

MATEMÁTICAS B

4.º de Educación Secundaria Obligatoria

$$\sqrt{2}$$

$$\log_2 32$$

$$\pi \in \mathbb{I}$$

$$\mathbb{R}$$

$$\frac{6}{\sqrt{3}}$$

$$3\sqrt{20}$$

$$(-3, 5]$$

SOLUCIONES COMPLETAS

del Examen Oficial

Nivel: 4.º ESO – Matemáticas B (Académicas)

Temas: Números Reales, Radicales, Logaritmos

Estilo: Rigor universitario con pedagogía completa

Nota: Todas las soluciones paso a paso

Índice general

Nota preliminar	2
1. Clasificación y Representación de Números	3
1.1. Marco teórico	3
1.2. Apartado a) – Clasificación de los números dados	3
1.3. Apartado b) – ¿Son números reales?	7
1.4. Apartado c) – Fracción generatriz de 0,25	7
2. Intervalos y Errores	9
2.1. Marco teórico	9
2.2. Apartado a) – Representación de intervalos en la recta real	9
2.3. Apartado b) – Conjunto en forma de intervalo	10
2.4. Apartado c) – Error relativo	10
3. Operaciones con Radicales	12
3.1. Marco teórico	12
3.2. Apartado a) – Simplificación de $\sqrt{720}$	12
3.3. Apartado b) – Introducir factores y simplificar: $2\sqrt[3]{3} \cdot 5\sqrt[3]{9}$	13
3.4. Apartado c) – Resta de radicales: $3\sqrt{20} - 5\sqrt{45} + \sqrt{80}$	14
4. Racionalización y Notación Científica	16
4.1. Marco teórico	16
4.2. Apartado a) – Racionalizar $\frac{6}{\sqrt{3}}$	16
4.3. Apartado b) – Racionalizar $\frac{2}{3 - \sqrt{2}}$	17
4.4. Apartado c) – Notación científica: $(4,5 \times 10^6) \cdot (3 \times 10^{-2})$	18
5. Logaritmos	20
5.1. Marco teórico	20
5.2. Apartado a) – Cálculo de logaritmos: $\log_2 32 = x$ y $\log_x 81 = 4$	20
5.3. Apartado b) – Desarrollo de $\log\left(\frac{a^3 \cdot \sqrt{b}}{c^2}\right)$	21
Resumen de Resultados	24

Nota preliminar

Este documento contiene la resolución **exhaustiva y rigurosa** de todos los ejercicios del examen de Matemáticas B de 4.º de ESO.

Cada solución ha sido redactada siguiendo los siguientes principios:

- **Rigor matemático total:** cada paso algebraico está justificado explícitamente.
- **Pedagogía profunda:** se explica el *por qué* de cada transformación, no solo el resultado.
- **Sin saltos mágicos:** todas las igualdades intermedias aparecen explícitas.
- **Errores frecuentes:** se señalan los errores más comunes en cada apartado.
- **Representaciones gráficas:** se incluye una figura TikZ en cada ejercicio.

Los conjuntos numéricos que se usan en el examen son:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \quad \mathbb{I} \subset \mathbb{R}, \quad \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$$

donde $\mathbb{I}$ denota el conjunto de los números irracionales.

Capítulo 1

Clasificación y Representación de Números

1.1 Marco teórico

Definición

Los conjuntos numéricos fundamentales son:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$: números naturales.
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$: números enteros.
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$: números racionales. Todo número racional tiene expresión decimal *exacta o periódica*.
- $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: números irracionales. Su expresión decimal es infinita *no periódica*.
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$: números reales.

1.2 Apartado a) – Clasificación de los números dados

Los números son: $\sqrt{49}$, -5 , $0,25$, π , $\frac{11}{3}$, $\sqrt{7}$.

Solución

Número 1: $\sqrt{49}$

Paso 1: Evaluar la raíz cuadrada.

Buscamos un número no negativo cuyo cuadrado sea 49.

$$\sqrt{49} = 7 \quad \text{porque } 7^2 = 49$$

Paso 2: Determinar a qué conjuntos pertenece.

El número 7 es:

- $7 \in \mathbb{N}$ (es un número natural).
- Como $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, también $7 \in \mathbb{Z}$.
- Como $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ (podemos escribir $7 = \frac{7}{1}$), también $7 \in \mathbb{Q}$.
- Como $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, también $7 \in \mathbb{R}$.

$$\sqrt{49} = 7 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Número 2: -5

Paso 1: Analizar el signo.

El número -5 es negativo. Por definición, $\mathbb{N}$ solo contiene números no negativos, luego $-5 \notin \mathbb{N}$.

Paso 2: Verificar pertenencia a $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ contiene todos los enteros negativos, por lo que $-5 \in \mathbb{Z}$.

Paso 3: Verificar pertenencia a $\mathbb{Q}$.

Todo entero es racional: $-5 = \frac{-5}{1}$. Luego $-5 \in \mathbb{Q}$.

$$-5 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \quad -5 \notin \mathbb{N}$$

Número 3: $0,25$

Paso 1: Convertir a fracción.

$$0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

(dividimos numerador y denominador por 25).

Paso 2: Clasificar.

La expresión decimal $0,25$ es *exacta* (finita), lo cual es característica de los racionales. Además, $\frac{1}{4}$ es una fracción $\frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$.

- $0,25 \notin \mathbb{N}$ (no es entero natural).
- $0,25 \notin \mathbb{Z}$ (no es entero).
- $0,25 \in \mathbb{Q}$.
- $0,25 \in \mathbb{R}$.

$$0,25 = \frac{1}{4} \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Número 4: π

Paso 1: Recordar la naturaleza de π .

$\pi = 3,14159265\dots$ Es un número trascendente (demostrado por Lindemann en 1882). Su expansión decimal es infinita y **no periódica**, por lo que no puede expresarse como cociente de enteros.

$$\pi \notin \mathbb{Q}, \quad \pi \in \mathbb{I}, \quad \pi \in \mathbb{R}$$

$$\pi \in \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$$

Número 5: $\frac{11}{3}$

Paso 1: Verificar que es una fracción de enteros.

$\frac{11}{3}$ cumple la definición de número racional ($p = 11$, $q = 3$, $q \neq 0$).

Paso 2: Calcular su expresión decimal para confirmar.

$$\frac{11}{3} = 3,\overline{6} = 3,6666\dots$$

Es un decimal periódico puro, lo cual es coherente con ser racional.

- $\frac{11}{3} \notin \mathbb{N}$ (no es entero).
- $\frac{11}{3} \notin \mathbb{Z}$ (no es entero).
- $\frac{11}{3} \in \mathbb{Q}$.
- $\frac{11}{3} \in \mathbb{R}$.

$$\frac{11}{3} \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Número 6: $\sqrt{7}$

Paso 1: Verificar si 7 es un cuadrado perfecto.

Los cuadrados perfectos son: 1, 4, 9, 16, 25, ... El número 7 no aparece en esa lista. Por lo tanto, $\sqrt{7}$ **no es un número entero**.

Paso 2: Demostrar que $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$.

Supongamos por reducción al absurdo que $\sqrt{7} = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, y $\text{mcd}(p, q) = 1$ (fracción irreducible).

Entonces $7 = \frac{p^2}{q^2}$, lo que implica $7q^2 = p^2$.

Esto significa que $7 \mid p^2$. Como 7 es primo, $7 \mid p$, luego $p = 7k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Sustituyendo: $7q^2 = (7k)^2 = 49k^2$, luego $q^2 = 7k^2$, por lo que $7 \mid q^2$ y entonces $7 \mid q$. Pero entonces 7 divide tanto a p como a q , contradiciendo que $\text{mcd}(p, q) = 1$.

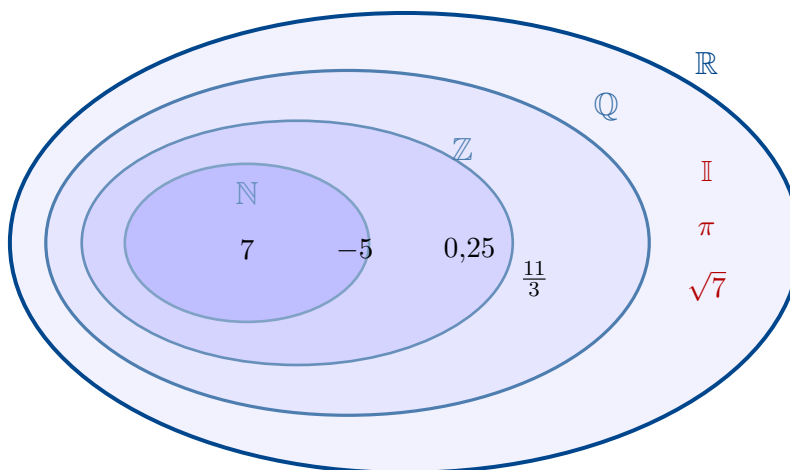
Contradicción.

Concluimos: $\sqrt{7} \in \mathbb{I}$.

$$\sqrt{7} \in \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$$

Tabla resumen de clasificación

Número	$\in \mathbb{N}$?	$\in \mathbb{Z}$?	$\in \mathbb{Q}$?	$\in \mathbb{I}$?	$\in \mathbb{R}$?
$\sqrt{49} = 7$	Sí	Sí	Sí	No	Sí
-5	No	Sí	Sí	No	Sí
$0,25 = \frac{1}{4}$	No	No	Sí	No	Sí
π	No	No	No	Sí	Sí
$\frac{11}{3}$	No	No	Sí	No	Sí
$\sqrt{7}$	No	No	No	Sí	Sí



1.3 Apartado b) – ¿Son números reales?

Solución

Todo número que pertenezca a $\mathbb{Q}$ o a $\mathbb{I}$ es, por definición, un número real, ya que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Todos los números analizados ($\sqrt{49}$, -5 , $0,25$, π , $\frac{11}{3}$, $\sqrt{7}$) pertenecen a alguno de esos dos conjuntos, por lo tanto:

Todos los números dados son números reales ($\in \mathbb{R}$)

Nota: Un ejemplo de número que *no* es real sería $\sqrt{-1} = i$, que pertenece al conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos pero no a $\mathbb{R}$.

1.4 Apartado c) – Fracción generatriz de 0,25

Definición

La **fracción generatriz** de un decimal es la fracción irreducible $\frac{p}{q}$ tal que su valor es igual al decimal dado.

Solución

Método: Decimal exacto mediante potencia de 10.

El número 0,25 tiene **2 cifras decimales**. Para convertirlo en fracción, multiplicamos y dividimos por $10^2 = 100$:

$$0,25 = \frac{0,25 \times 100}{100} = \frac{25}{100}$$

Paso 2: Simplificar la fracción.

Calculamos el máximo común divisor de 25 y 100:

$$\text{mcd}(25, 100) : \quad 25 = 5^2, \quad 100 = 2^2 \cdot 5^2, \quad \text{mcd} = 5^2 = 25$$

Dividimos numerador y denominador por 25:

$$\frac{25}{100} = \frac{25 \div 25}{100 \div 25} = \frac{1}{4}$$

Verificación:

$$\frac{1}{4} = 1 \div 4 = 0,25 \checkmark$$

Fracción generatriz de 0,25 = $\frac{1}{4}$

Un error frecuente es olvidar simplificar la fracción y dejar $\frac{25}{100}$ como respuesta final. La fracción generatriz debe estar en forma **irreducible**.

Capítulo 2

Intervalos y Errores

2.1 Marco teórico

Definición

Un **intervalo** es un subconjunto de $\mathbb{R}$ formado por todos los reales comprendidos entre dos valores a y b . Los tipos principales son:

- Abierto: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- Cerrado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- Semiabierto: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ o $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

El paréntesis indica extremo **excluido**; el corchete indica extremo **incluido**.

2.2 Apartado a) – Representación de intervalos en la recta real

Se pide representar $A = (-3, 5]$ y $B = [1, +\infty)$.

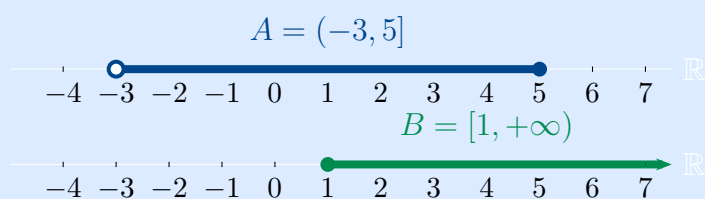
Solución

Intervalo $A = (-3, 5]$

- Extremo izquierdo: -3 , con paréntesis $\Rightarrow$ **excluido** (círculo abierto $\circ$).
- Extremo derecho: 5 , con corchete $\Rightarrow$ **incluido** (círculo cerrado $\bullet$).

Semirrecta $B = [1, +\infty)$

- Extremo izquierdo: 1 , con corchete $\Rightarrow$ **incluido** ($\bullet$).
- No hay extremo derecho: se extiende hasta $+\infty$ (que nunca se alcanza).



$$A = (-3, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 5\}$$

$$B = [1, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$$

Confundir corchete y paréntesis es uno de los errores más comunes. Recuerda: el **paréntesis** excluye el extremo (círculo abierto), el **corchete** lo incluye (círculo relleno). El infinito **siempre lleva paréntesis**, porque no es un número real alcanzable.

2.3 Apartado b) – Conjunto en forma de intervalo

Se pide escribir $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 4\}$ como intervalo.

Solución

Paso 1: Identificar los extremos y su inclusión.

- Extremo izquierdo: -2 con $\leq$ (incluido) $\Rightarrow$ corchete: $[$
- Extremo derecho: 4 con $<$ (excluido) $\Rightarrow$ paréntesis: $)$

Paso 2: Escribir en notación de intervalo.

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 4\} = [-2, 4)$$

$$[-2, 4)$$

2.4 Apartado c) – Error relativo

Definición

- **Error absoluto** (E_a): diferencia entre el valor medido y el valor real (o entre la medida y la aproximación).
- **Error relativo** (E_r): cociente entre el error absoluto y el valor real (o medida

exacta).

$$E_r = \frac{E_a}{\text{valor exacto}}$$

Se expresa habitualmente en porcentaje multiplicando por 100.

Datos: medida = 15,3 m, error absoluto $E_a = 0,02$ m.

Solución

Paso 1: Aplicar la fórmula del error relativo.

$$E_r = \frac{E_a}{\text{valor medido}} = \frac{0,02}{15,3}$$

Paso 2: Realizar la división.

$$\frac{0,02}{15,3} = \frac{2}{1530} = \frac{1}{765}$$

Calculamos numéricamente:

$$\frac{0,02}{15,3} = 0,001307189 \dots$$

Paso 3: Convertir a porcentaje y redondear a 3 cifras significativas.

$$E_r (\%) = 0,001307 \dots \times 100 = 0,1307 \dots \%$$

Redondeando a 3 cifras significativas:

$$E_r = 0,131 \%$$

Nota sobre cifras significativas: el número 0,131 tiene 3 cifras significativas (los ceros a la izquierda del 1 no cuentan).

$$E_r = \frac{0,02}{15,3} \approx 0,131 \%$$

El error relativo mide la *calidad* de la medición: un E_r del 0,131 % es un error muy pequeño, lo que indica que la medición es bastante precisa.

Capítulo 3

Operaciones con Radicales

3.1 Marco teórico

Definición

Sea $a \geq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Se define:

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a \text{ y } b \geq 0$$

Propiedades esenciales ($a, b \geq 0$, $m, n, k \in \mathbb{N}$):

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad (\text{producto de radicales})$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} \quad (\text{forma exponencial})$$

$$k \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{k^n \cdot a} \quad (\text{introducir factor})$$

$$\sqrt[n]{k^n \cdot a} = k \cdot \sqrt[n]{a} \quad (\text{extraer factor})$$

3.2 Apartado a) – Simplificación de $\sqrt{720}$

Solución

Paso 1: Factorizar 720 en factores primos.

Dividimos sucesivamente por los primos más pequeños:

$$720 = 2 \times 360$$

$$360 = 2 \times 180$$

$$180 = 2 \times 90$$

$$90 = 2 \times 45$$

$$45 = 3 \times 15$$

$$15 = 3 \times 5$$

$$5 = 5 \times 1$$

Por lo tanto:

$$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$$

Paso 2: Aplicar la propiedad de extracción de factores.

Para extraer un factor fuera de una raíz cuadrada, necesitamos potencias pares dentro:

$$\sqrt{720} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5}$$

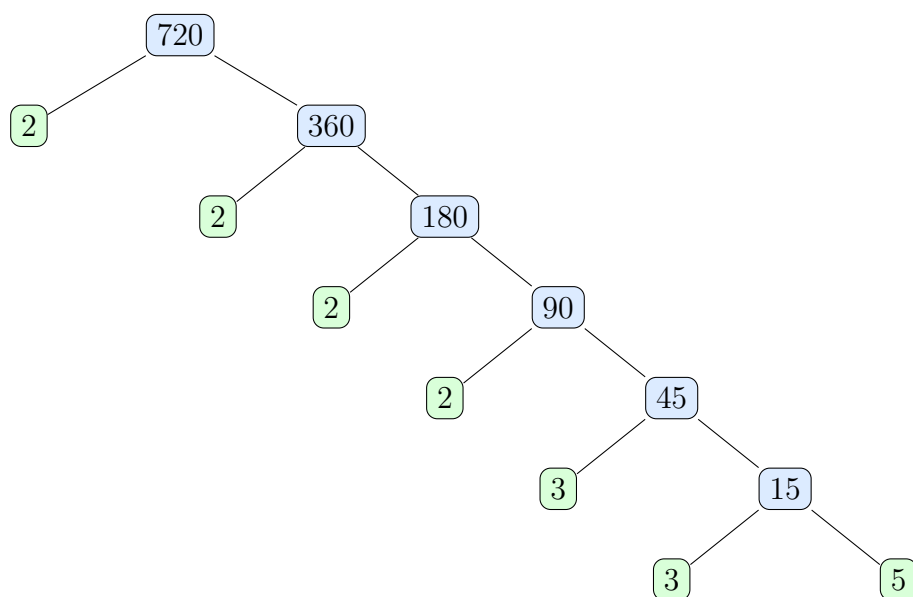
Aplicamos $\sqrt{a^2} = a$ y $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$:

$$\sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} = 2^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = 4 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = 12\sqrt{5}$$

Verificación (opcional):

$$(12\sqrt{5})^2 = 144 \cdot 5 = 720 \checkmark$$

$$\boxed{\sqrt{720} = 12\sqrt{5}}$$



$$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$\sqrt{720} = 12\sqrt{5}$$

3.3 Apartado b) – Introducir factores y simplificar: $2\sqrt[3]{3} \cdot 5\sqrt[3]{9}$

Solución

Paso 1: Agrupar los factores racionales e irracionales.

$$2\sqrt[3]{3} \cdot 5\sqrt[3]{9} = (2 \cdot 5) \cdot (\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9}) = 10 \cdot \sqrt[3]{3 \cdot 9}$$

Usamos la propiedad: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$.

Paso 2: Simplificar el argumento de la raíz.

$$3 \cdot 9 = 27 = 3^3$$

Por lo tanto:

$$10 \cdot \sqrt[3]{27} = 10 \cdot \sqrt[3]{3^3}$$

Paso 3: Evaluar la raíz cúbica.

$$\sqrt[3]{3^3} = 3 \quad (\text{porque } 3^3 = 27)$$

Paso 4: Calcular el resultado final.

$$10 \cdot 3 = 30$$

$$\boxed{2\sqrt[3]{3} \cdot 5\sqrt[3]{9} = 30}$$

Un error muy frecuente es multiplicar los factores racionales por los radicales cruzados, o elevar al cuadrado en lugar de al cubo. Recuerda que el índice de la raíz determina qué potencia hace desaparecer el radical: $\sqrt[n]{a^n} = a$.

3.4 Apartado c) – Resta de radicales: $3\sqrt{20} - 5\sqrt{45} + \sqrt{80}$

Solución

Para sumar o restar radicales, estos deben ser **semejantes** (mismo índice y mismo radicando). El proceso consiste en simplificar cada radical hasta reducirlos a una forma común.

Paso 1: Simplificar $\sqrt{20}$.

$$20 = 4 \times 5 = 2^2 \times 5$$

$$\sqrt{20} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$

Paso 2: Simplificar $\sqrt{45}$.

$$45 = 9 \times 5 = 3^2 \times 5$$

$$\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$$

Paso 3: Simplificar $\sqrt{80}$.

$$80 = 16 \times 5 = 4^2 \times 5$$

$$\sqrt{80} = \sqrt{4^2 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$$

Paso 4: Sustituir en la expresión original.

$$\begin{aligned} 3\sqrt{20} - 5\sqrt{45} + \sqrt{80} &= 3 \cdot (2\sqrt{5}) - 5 \cdot (3\sqrt{5}) + 4\sqrt{5} \\ &= 6\sqrt{5} - 15\sqrt{5} + 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

Paso 5: Operar los coeficientes (los radicales son semejantes: todos son $\sqrt{5}$).

$$= (6 - 15 + 4)\sqrt{5} = -5\sqrt{5}$$

$$\boxed{3\sqrt{20} - 5\sqrt{45} + \sqrt{80} = -5\sqrt{5}}$$

La clave para operar radicales es siempre **simplificar primero** cada radical de manera individual, extrayendo los factores cuadráticos. Solo entonces podemos sumar o restar los coeficientes.

Capítulo 4

Racionalización y Notación Científica

4.1 Marco teórico

Definición

Racionalizar un cociente que contiene radicales en el denominador consiste en transformarlo en una fracción equivalente con denominador racional (sin radicales). Los dos métodos principales son:

1. **Denominador monomial:** multiplicar por $\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}}$.
2. **Denominador binomial con raíz cuadrada:** multiplicar por el conjugado $\frac{a + \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}}$ o $\frac{a - \sqrt{b}}{a - \sqrt{b}}$, usando $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

4.2 Apartado a) – Racionalizar $\frac{6}{\sqrt{3}}$

Solución

Método elegido: Denominador monomial (multiplicar por $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$).

Justificación: El denominador es $\sqrt{3} = 3^{1/2}$. Para hacerlo racional, necesitamos $3^{1/2} \cdot 3^{1/2} = 3^1 = 3$.

Paso 1: Multiplicar numerador y denominador por $\sqrt{3}$.

$$\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}$$

Paso 2: Simplificar el denominador.

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 = 3$$

Entonces:

$$\frac{6\sqrt{3}}{3}$$

Paso 3: Simplificar la fracción.

$$\frac{6\sqrt{3}}{3} = \frac{6}{3} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\boxed{\frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}}$$

Verificación numérica:

$$\sqrt{3} \approx 1,732, \text{ luego } 2\sqrt{3} \approx 3,464 \text{ y } \frac{6}{1,732} \approx 3,464. \checkmark$$

4.3 Apartado b) – Racionalizar $\frac{2}{3 - \sqrt{2}}$

Solución

Método elegido: Conjugado del denominador binomial.

El denominador es $3 - \sqrt{2}$. Su conjugado es $3 + \sqrt{2}$.

Fundamento: $(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2}) = 3^2 - (\sqrt{2})^2 = 9 - 2 = 7$. El resultado es racional.

Paso 1: Multiplicar por el conjugado.

$$\frac{2}{3 - \sqrt{2}} = \frac{2}{3 - \sqrt{2}} \cdot \frac{3 + \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}} = \frac{2(3 + \sqrt{2})}{(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})}$$

Paso 2: Desarrollar el denominador usando la identidad notable.

$$(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2}) = 3^2 - (\sqrt{2})^2 = 9 - 2 = 7$$

Paso 3: Desarrollar el numerador.

$$2(3 + \sqrt{2}) = 6 + 2\sqrt{2}$$

Paso 4: Escribir el resultado.

$$\frac{6 + 2\sqrt{2}}{7}$$

Esta fracción ya está racionalizada. No se puede simplificar más (el 6 y el 2 no son ambos divisibles por 7, ni el radical puede combinarse con términos racionales).

$$\boxed{\frac{2}{3 - \sqrt{2}} = \frac{6 + 2\sqrt{2}}{7}}$$

Al usar el conjugado, la identidad es $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, y aquí $b = \sqrt{2}$, por lo que $b^2 = 2$ (no $\sqrt{2}$). Un error habitual es calcular $(\sqrt{2})^2 = \sqrt{2}$ en lugar de 2.

4.4 Apartado c) – Notación científica: $(4,5 \times 10^6) \cdot (3 \times 10^{-2})$

Definición

Un número está en **notación científica** cuando se expresa como $m \times 10^n$, donde $1 \leq m < 10$ y $n \in \mathbb{Z}$.

Solución

Paso 1: Separar la parte decimal y la potencia de 10.

$$(4,5 \times 10^6) \cdot (3 \times 10^{-2}) = (4,5 \times 3) \times (10^6 \times 10^{-2})$$

Paso 2: Multiplicar las partes decimales.

$$4,5 \times 3 = 13,5$$

Paso 3: Operar las potencias de 10 (misma base, se suman los exponentes).

$$10^6 \times 10^{-2} = 10^{6+(-2)} = 10^4$$

Paso 4: Combinar y ajustar a notación científica.

$$13,5 \times 10^4$$

Pero $13,5 \geq 10$, así que no está en notación científica correcta. Ajustamos:

$$13,5 = 1,35 \times 10^1$$

Por lo tanto:

$$13,5 \times 10^4 = 1,35 \times 10^1 \times 10^4 = 1,35 \times 10^5$$

$$(4,5 \times 10^6) \cdot (3 \times 10^{-2}) = 1,35 \times 10^5$$

Verificación:

$1,35 \times 10^5 = 135\,000$. Comprobamos directamente: $4\,500\,000 \times 0,03 = 135\,000$. ✓

Capítulo 5

Logaritmos

5.1 Marco teórico

Definición

Dado $a > 0$, $a \neq 1$ y $x > 0$, se define el **logaritmo en base a de x** como:

$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

Es decir, $\log_a x$ es el exponente al que hay que elevar la base a para obtener x .

Proposición 5.1 (Propiedades de los logaritmos). Sean $a > 0$, $a \neq 1$, $m, n > 0$ y $k \in \mathbb{R}$:

$$\log_a(m \cdot n) = \log_a m + \log_a n \quad (\text{producto})$$

$$\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n \quad (\text{cociente})$$

$$\log_a(m^k) = k \cdot \log_a m \quad (\text{potencia})$$

$$\log_a(\sqrt[k]{m}) = \frac{1}{k} \cdot \log_a m \quad (\text{raíz})$$

5.2 Apartado a) – Cálculo de logaritmos: $\log_2 32 = x$ y $\log_x 81 = 4$

Solución

Primera ecuación: $\log_2 32 = x$

Paso 1: Traducir a ecuación exponencial.

Por la definición de logaritmo:

$$\log_2 32 = x \iff 2^x = 32$$

Paso 2: Expresar 32 como potencia de 2.

$$32 = 2 \times 16 = 2 \times 2^4 = 2^5$$

Paso 3: Igualar los exponentes.

$$2^x = 2^5 \implies x = 5$$

$$\log_2 32 = 5$$

Verificación:

$$2^5 = 32. \checkmark$$

Segunda ecuación: $\log_x 81 = 4$

Paso 1: Traducir a ecuación exponencial.

$$\log_x 81 = 4 \iff x^4 = 81$$

Paso 2: Resolver la ecuación.

Buscamos $x > 0$, $x \neq 1$ tal que $x^4 = 81$.

Factorizamos 81: $81 = 3^4$.

$$x^4 = 3^4 \implies x = 3$$

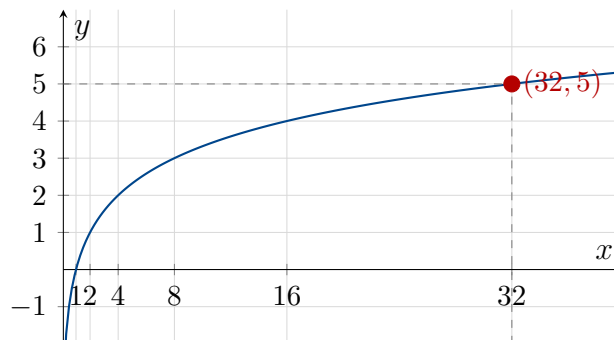
(Tomamos la raíz cuarta positiva porque la base de un logaritmo debe ser positiva y distinta de 1.)

$$\log_x 81 = 4 \Rightarrow x = 3$$

Verificación:

$$3^4 = 81. \checkmark$$

Función $y = \log_2 x$



5.3 Apartado b) – Desarrollo de $\log\left(\frac{a^3 \cdot \sqrt{b}}{c^2}\right)$

Solución

La expresión es:

$$\log\left(\frac{a^3 \cdot \sqrt{b}}{c^2}\right)$$

Paso 1: Aplicar la propiedad del cociente.

$$\log\left(\frac{a^3 \cdot \sqrt{b}}{c^2}\right) = \log(a^3 \cdot \sqrt{b}) - \log(c^2)$$

Paso 2: Aplicar la propiedad del producto al primer término.

$$\log(a^3 \cdot \sqrt{b}) = \log(a^3) + \log(\sqrt{b})$$

Paso 3: Aplicar la propiedad de la potencia.

$$\log(a^3) = 3 \log a$$

Paso 4: Aplicar la propiedad de la raíz.

$$\log(\sqrt{b}) = \log(b^{1/2}) = \frac{1}{2} \log b$$

Paso 5: Aplicar la propiedad de la potencia al término $\log(c^2)$.

$$\log(c^2) = 2 \log c$$

Paso 6: Reunir todos los términos.

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{a^3 \cdot \sqrt{b}}{c^2}\right) &= \log(a^3) + \log(\sqrt{b}) - \log(c^2) \\ &= 3 \log a + \frac{1}{2} \log b - 2 \log c \end{aligned}$$

$$\boxed{\log\left(\frac{a^3 \cdot \sqrt{b}}{c^2}\right) = 3 \log a + \frac{1}{2} \log b - 2 \log c}$$

Condiciones de existencia: para que los logaritmos estén definidos, es necesario que $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$ (y $c \neq 0$, que ya está implícito). Si alguna de estas variables fuera negativa o cero, la expresión no tendría sentido en $\mathbb{R}$.

Errores frecuentes al aplicar propiedades de logaritmos:

- $\log(a + b) \neq \log a + \log b$ (el logaritmo de una *suma* **no** se puede separar).
- $\log(a \cdot b) \neq \log a \cdot \log b$ (el logaritmo del *producto* se convierte en *suma*, no

en producto).

- $\frac{\log a}{\log b} \neq \log\left(\frac{a}{b}\right)$ (el cociente de logaritmos es $\log_b a$ por cambio de base, no $\log \frac{a}{b}$).

Resumen de Resultados

Ejercicio	Resultado
1a) Clasificación	$\sqrt{49}=7 \in \mathbb{N}$; $-5 \in \mathbb{Z}$; $0,25 \in \mathbb{Q}$; $\pi \in \mathbb{I}$; $\frac{11}{3} \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{7} \in \mathbb{I}$
1b) Números reales	Todos son reales ($\in \mathbb{R}$)
1c) Frac. generatriz	$0,25 = \frac{1}{4}$
2a) Intervalos	$A = (-3, 5]: \circ \text{ en } -3, \bullet \text{ en } 5$; $B = [1, +\infty): \bullet \text{ en } 1, \text{ flecha a } +\infty$
2b) Notación intervalo	$\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 4\} = [-2, 4)$
2c) Error relativo	$E_r = \frac{0,02}{15,3} \approx 0,131 \%$
3a) Simplificar	$\frac{12\sqrt{5}}{\sqrt{720}}$
3b)	$2\sqrt[3]{3} \cdot 5\sqrt[3]{9} = 30$
3c)	$3\sqrt{20} - 5\sqrt{45} + \sqrt{80} = -5\sqrt{5}$
4a)	$\frac{6}{\sqrt{3}}$
4b) Racionalizar	$\frac{6 + 2\sqrt{2}}{7}$
4c)	$\frac{2}{3 - \sqrt{2}}$
4c) Notación científica	$1,35 \times 10^5$
5a)	$\log_2 32 = x \quad x = 5$
5a)	$\log_x 81 = 4 \quad x = 3$
5b) Desarrollo log	$3 \log a + \frac{1}{2} \log b - 2 \log c$

Consejo final para el examen

1. **Conjuntos numéricos:** primero verifica si es cuadrado perfecto (para raíces), luego clasifica de menor a mayor conjunto: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
2. **Intervalos:** paréntesis = excluido = círculo abierto; corchete = incluido = círculo cerrado.
3. **Radicales:** siempre factoriza primero; solo se pueden sumar radicales *semejantes*.
4. **Racionalización:** denominador monomial $\rightarrow$ multiplica por el radical; denominador binomial $\rightarrow$ multiplica por el conjugado.
5. **Logaritmos:** memoriza las tres propiedades (producto, cociente, potencia) y recuerda que $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$.

2º EXAMEN 4º ESO - Álgebra

Noviembre de 2025

Instrucciones: Seleccione la única opción correcta para cada una de las 10 preguntas.

1. **(Polinomios y Teorema del Resto)** Dado el polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 + kx^2 - 5x + 3$, utiliza el Teorema del Resto para calcular el valor de k de modo que el resto de la división $P(x) : (x - 2)$ sea igual a -3 .
 - a) $k = -1$
 - b) $k = 4$
 - c) $k = 1$
 - d) $k = -3$
2. **(Polinomios y Regla de Ruffini)** Utiliza la Regla de Ruffini para dividir $x^5 - 3x^4 - 20x^2 + 4x + 1$ entre $(x + 3)$, e indica el cociente $C(x)$ y el resto R .
 - a) $C(x) = x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 7x + 25$ y $R = 76$
 - b) $C(x) = x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 74x + 226$ y $R = -677$
 - c) $C(x) = x^4 - 3x^3 - 20x + 4$ y $R = -11$
 - d) $C(x) = x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 74x + 226$ y $R = 1$
3. **(Operaciones y Simplificación)** Desarrolla la siguiente expresión utilizando las identidades notables y simplifica el resultado: $(3x - 5)^2 - (2x + 1) \cdot (2x - 1)$.
 - a) $13x^2 - 30x + 26$
 - b) $5x^2 - 30x - 26$
 - c) $5x^2 - 30x + 24$
 - d) $5x^2 - 30x + 26$
4. **(Operaciones Combinadas)** Realiza la siguiente operación con polinomios y simplifica el resultado: $2x(x^2 - 4) - (x + 2)^2 \cdot (x - 1)$.
 - a) $x^3 - 3x^2 - 8x + 4$
 - b) $x^3 + 5x^2 - 8x - 4$
 - c) $x^3 - 3x^2 - 12x - 4$
 - d) $x^3 - 3x^2 + 4x - 4$
5. **(Ecuación Polinómica)** Resuelve la ecuación factorizando primero: $2x^4 + 6x^3 - 8x^2 = 0$.
 - a) $x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = -1$
 - b) $x_1 = 0, x_2 = -4, x_3 = 1$
 - c) $x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 2$
 - d) $x_1 = 0, x_2 = 1$
6. **(Ecuación Bicuadrada)** Resuelve la ecuación bicuadrada: $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.
 - a) $x_1 = 2, x_2 = 3$
 - b) $x_1 = 4, x_2 = 9$
 - c) $x_1 = 4, x_2 = -4, x_3 = 9, x_4 = -9$

d) $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 3, x_4 = -3$

7. **(Ecuación Radical)** Resuelve la ecuación radical (con raíces): $\sqrt{x+7} = x+1$.

a) $x = -3$

b) $x = 2$ y $x = -3$

c) $x = 2$

d) $x = 1$ y $x = -2$

8. **(Sistema No Lineal)** Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones no lineales por el método de sustitución:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

a) $x_1 = 5, y_1 = 2$ y $x_2 = 2, y_2 = 5$

b) $x_1 = 5, y_1 = 0$ y $x_2 = 0, y_2 = 5$

c) $x_1 = 3, y_1 = -4$ y $x_2 = -4, y_2 = 3$

d) $x_1 = 3, y_1 = 4$ y $x_2 = 4, y_2 = 3$

9. **(Inecuación de Segundo Grado)** Resuelve la inecuación de segundo grado: $x^2 - 4x - 5 \geq 0$.

a) $[-1, 5]$

b) $(-5, 1]$

c) $(-\infty, -1] \cup [5, \infty)$

d) $(-1, 5)$

10. **(Sistema de Inecuaciones)** Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones lineales con una incógnita:

$$\begin{cases} 2(x+3) \leq 4x \\ \frac{x}{2} - 1 < 3 \end{cases}$$

a) $[3, \infty)$

b) $[3, 8]$

c) $[0, 8)$

d) $[3, 8)$

Hoja de Respuestas

Pregunta	a)	b)	c)	d)
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

SUERTE JÓVENES

$$P(x) \div (x - a)$$

$$\sqrt{x+7} = x+1$$

ÁLGEBRA 4.º ESO

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

Soluciones Completas y Comentarios Pedagógicos

2.º Examen de Álgebra — 4.º ESO

Noviembre de 2025

Contenidos cubiertos: Polinomios · Teorema del Resto · Ruffini ·
Identidades notables · Factorización · Ecuaciones polinómicas y
bicuadradas · Ecuaciones radicales · Sistemas no lineales ·
Inecuaciones de segundo grado · Sistemas de inecuaciones

Elaborado con rigor matemático universitario

Para estudio profundo – Nivel 4.º ESO (Matemáticas B)

“Las matemáticas son el alfabeto con el que Dios ha escrito el Universo.” – Galileo Galilei

Índice general

Introducción y Marco Teórico	2
1. Ejercicio 1 – Polinomios y Teorema del Resto	3
Ejercicio 1: Enunciado y Solución	3
2. Ejercicio 2 – Polinomios y Regla de Ruffini	6
Ejercicio 2: Enunciado y Solución	6
3. Ejercicio 3 – Operaciones con Identidades Notables	9
Ejercicio 3: Enunciado y Solución	9
4. Ejercicio 4 – Operaciones Combinadas con Polinomios	12
Ejercicio 4: Enunciado y Solución	12
5. Ejercicio 5 – Ecuación Polinómica por Factorización	14
Ejercicio 5: Enunciado y Solución	14
6. Ejercicio 6 – Ecuación Bicuadrada	17
Ejercicio 6: Enunciado y Solución	17
7. Ejercicio 7 – Ecuación Radical	20
Ejercicio 7: Enunciado y Solución	20
8. Ejercicio 8 – Sistema No Lineal	23
Ejercicio 8: Enunciado y Solución	23
9. Ejercicio 9 – Inecuación de Segundo Grado	26
Ejercicio 9: Enunciado y Solución	26
10. Ejercicio 10 – Sistema de Inecuaciones	28
Ejercicio 10: Enunciado y Solución	28
Resumen de Respuestas Correctas	31
Apéndice: Formulario de Referencia	32

Introducción y Marco Teórico

Este documento contiene la resolución exhaustiva de cada uno de los diez ejercicios del segundo examen de Álgebra de 4.º de ESO (Matemáticas B), celebrado en noviembre de 2025.

Para cada ejercicio se sigue la siguiente estructura:

- I. **Enunciado** reproducido con precisión.
- II. **Fundamentos teóricos** necesarios (definición, teorema o propiedad).
- III. **Desarrollo paso a paso**, sin omitir ninguna transformación algebraica.
- IV. **Verificación** del resultado.
- V. **Respuesta correcta** destacada.
- VI. **Observaciones** sobre errores frecuentes y variantes del problema.

Observación Matemática

A lo largo del documento se emplea la notación estándar española de matemáticas de secundaria y bachillerato, coherente con el currículo LOMLOE. Todos los desarrollos son autocontenidos: no se da ningún paso por obvio.

Capítulo 1

Ejercicio 1 – Polinomios y Teorema del Resto

Enunciado

Enunciado

Dado el polinomio

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + kx^2 - 5x + 3,$$

utiliza el Teorema del Resto para calcular el valor de k de modo que el resto de la división $P(x) : (x - 2)$ sea igual a -3 .

Opciones: a) $k = -1$ b) $k = 4$ c) $k = 1$ d) $k = -3$

Fundamento Teórico

Teorema 1.1 (Teorema del Resto). Sea $P(x)$ un polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes reales, y sea $a \in \mathbb{R}$. Al dividir $P(x)$ entre el binomio $(x - a)$, el resto R de dicha división es:

$$R = P(a).$$

En particular, si $R = 0$, entonces $(x - a)$ es factor de $P(x)$ (Teorema del Factor).

Demostración esquemática. Por el algoritmo de la división de polinomios, existen únicos $C(x)$ y R (con $\deg R < 1$, es decir, R constante) tales que

$$P(x) = (x - a) \cdot C(x) + R.$$

Sustituyendo $x = a$:

$$P(a) = (a - a) \cdot C(a) + R = 0 + R = R.$$

□

Desarrollo de la Solución

Paso 1: Identificar el divisor.

El divisor es $(x - 2)$, que tiene la forma $(x - a)$ con $a = 2$.

Paso 2: Aplicar el Teorema del Resto.

Por el Teorema del Resto, el resto al dividir $P(x)$ entre $(x - 2)$ es:

$$R = P(2).$$

Se nos impone la condición $R = -3$, de modo que:

$$P(2) = -3.$$

Paso 3: Calcular $P(2)$ explícitamente.

Sustituimos $x = 2$ en $P(x) = x^4 - 2x^3 + kx^2 - 5x + 3$:

$$\begin{aligned} P(2) &= (2)^4 - 2 \cdot (2)^3 + k \cdot (2)^2 - 5 \cdot (2) + 3 \\ &= 16 - 2 \cdot 8 + k \cdot 4 - 10 + 3 \\ &= 16 - 16 + 4k - 10 + 3 \\ &= 0 + 4k - 7 \\ &= 4k - 7. \end{aligned}$$

Justificación de cada potencia:

$$2^4 = 16, \quad 2^3 = 8, \quad 2^2 = 4.$$

Paso 4: Plantear y resolver la ecuación en k .

Imponemos $P(2) = -3$:

$$4k - 7 = -3.$$

Sumamos 7 a ambos miembros:

$$4k = -3 + 7 = 4.$$

Dividimos entre 4:

$$k = \frac{4}{4} = 1.$$

Paso 5: Verificación.

Sustituyendo $k = 1$ en $P(x)$:

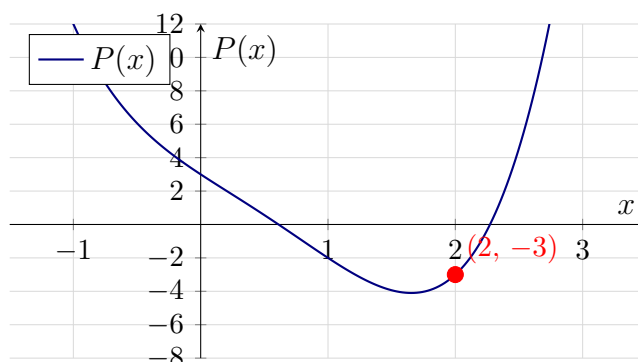
$$P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x + 3.$$

Calculamos $P(2)$:

$$P(2) = 16 - 16 + 4 - 10 + 3 = -3. \checkmark$$

Ilustración gráfica

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x + 3 \quad (\text{con } k = 1)$$



El punto $(2, -3)$ corresponde exactamente al resto $R = P(2) = -3$, lo que confirma gráficamente nuestro resultado.

Advertencia – Error Frecuente

Un error frecuente es sustituir $x = -2$ (tomando el signo cambiado del término constante del divisor). Recuerda: el divisor es $(x - 2)$, por lo que $a = +2$, y se evalúa $P(+2)$, no $P(-2)$.

Respuesta Correcta

La opción correcta es **c)** $k = 1$.

$$k = 1$$

Capítulo 2

Ejercicio 2 – Polinomios y Regla de Ruffini

Enunciado

Enunciado

Utiliza la Regla de Ruffini para dividir

$$P(x) = x^5 - 3x^4 + 0 \cdot x^3 - 20x^2 + 4x + 1$$

entre $(x + 3)$, e indica el cociente $C(x)$ y el resto R .

Fundamento Teórico

Definición 2.1 (Regla de Ruffini). La Regla de Ruffini es un algoritmo tabular que permite dividir un polinomio $P(x)$ de grado n entre un binomio de la forma $(x - a)$ de manera eficiente, operando únicamente con los coeficientes.

Propiedad 2.2. Si el divisor es $(x + 3) = (x - (-3))$, se utiliza $a = -3$ en la tabla de Ruffini.

Desarrollo de la Solución

Paso 1: Identificar coeficientes y el valor a .

El polinomio $P(x) = x^5 - 3x^4 + 0x^3 - 20x^2 + 4x + 1$ tiene coeficientes:

$$1, \quad -3, \quad 0, \quad -20, \quad 4, \quad 1.$$

Importante: el término en x^3 tiene coeficiente 0; no debe omitirse en la tabla.

El divisor es $(x + 3) = (x - (-3))$, luego $a = -3$.

Paso 2: Construir la tabla de Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & -3 & 0 & -20 & 4 & 1 \\
 -3 & & -3 & 18 & -54 & 222 & -678 \\
 \hline
 & 1 & -6 & 18 & -74 & 226 & -677
 \end{array}$$

Explicación fila a fila:

- Bajamos el primer coeficiente: **1**.
- $(-3) \times 1 = -3 \Rightarrow -3 + (-3) = -6$.
- $(-3) \times (-6) = 18 \Rightarrow 0 + 18 = 18$.
- $(-3) \times 18 = -54 \Rightarrow -20 + (-54) = -74$.
- $(-3) \times (-74) = 222 \Rightarrow 4 + 222 = 226$.
- $(-3) \times 226 = -678 \Rightarrow 1 + (-678) = -677$.

Paso 3: Leer el cociente y el resto.

Los cinco primeros valores de la última fila son los coeficientes del **cociente** (de grado $n - 1 = 4$):

$$C(x) = x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 74x + 226.$$

El último valor es el **resto**:

$$R = -677.$$

Paso 4: Verificación mediante la identidad de la división.

Debe cumplirse $P(x) = (x + 3) \cdot C(x) + R$.

Verificamos evaluando en $x = -3$ (Teorema del Resto):

$$\begin{aligned}
 P(-3) &= (-3)^5 - 3(-3)^4 + 0 - 20(-3)^2 + 4(-3) + 1 \\
 &= -243 - 3 \cdot 81 - 20 \cdot 9 - 12 + 1 \\
 &= -243 - 243 - 180 - 12 + 1 \\
 &= -677. \checkmark
 \end{aligned}$$

Representación visual del proceso

-3	1	-3	0	-20	4	1
	$\times (-3)$	$\times (-3)$	$\times (-3)$	$\times (-3)$	$\times (-3)$	
	-3	18	-54	222	-678	
	1	-6	18	-74	226	-677
		Coeficientes de $C(x)$				Resto

Advertencia – Error Frecuente

En el polinomio $x^5 - 3x^4 - 20x^2 + 4x + 1$, el término en x^3 **está ausente**, pero su coeficiente es **0** y debe incluirse en la tabla. Omitirlo desplaza todos los coeficientes y da resultados erróneos.

Respuesta Correcta

La opción correcta es **b)**:

$$C(x) = x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 74x + 226, \quad R = -677.$$

Capítulo 3

Ejercicio 3 – Operaciones con Identidades Notables

Enunciado

Enunciado

Desarrolla la siguiente expresión utilizando las identidades notables y simplifica:

$$E = (3x - 5)^2 - (2x + 1)(2x - 1).$$

Opciones: a) $13x^2 - 30x + 26$ b) $5x^2 - 30x - 26$ c) $5x^2 - 30x + 24$ d) $5x^2 - 30x + 26$

Fundamento Teórico

Propiedad 3.1 (Identidades Notables). Para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (3.1)$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \quad (3.2)$$

Desarrollo de la Solución

Paso 1: Desarrollar $(3x - 5)^2$ usando la identidad (3.1).

Identificamos $a = 3x$ y $b = 5$:

$$\begin{aligned} (3x - 5)^2 &= (3x)^2 - 2 \cdot (3x) \cdot 5 + 5^2 \\ &= 9x^2 - 30x + 25. \end{aligned}$$

Justificación:

$$(3x)^2 = 9x^2, \quad 2 \cdot 3x \cdot 5 = 30x, \quad 5^2 = 25.$$

Paso 2: Desarrollar $(2x + 1)(2x - 1)$ usando la identidad (3.2).

Identificamos $a = 2x$ y $b = 1$:

$$\begin{aligned}(2x + 1)(2x - 1) &= (2x)^2 - 1^2 \\ &= 4x^2 - 1.\end{aligned}$$

Paso 3: Calcular la expresión completa.

$$\begin{aligned}E &= \underbrace{(3x - 5)^2}_{9x^2 - 30x + 25} - \underbrace{(2x + 1)(2x - 1)}_{4x^2 - 1} \\ &= (9x^2 - 30x + 25) - (4x^2 - 1).\end{aligned}$$

Distribuimos el signo menos (error frecuente: olvidar cambiar el signo del -1):

$$= 9x^2 - 30x + 25 - 4x^2 + 1.$$

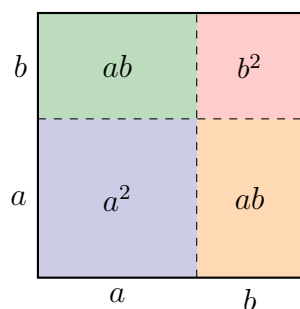
Paso 4: Agrupar términos semejantes.

$$\begin{aligned}E &= (9x^2 - 4x^2) + (-30x) + (25 + 1) \\ &= 5x^2 - 30x + 26.\end{aligned}$$

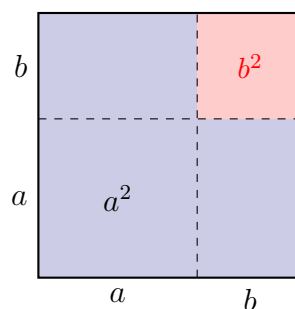
Paso 5: Verificación numérica (evaluamos en $x = 1$):

- Expresión original: $(3 - 5)^2 - (2 + 1)(2 - 1) = (-2)^2 - 3 \cdot 1 = 4 - 3 = 1$.
- Resultado obtenido: $5(1)^2 - 30(1) + 26 = 5 - 30 + 26 = 1$. ✓

Visualización de las identidades notables



$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$



$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Advertencia – Error Frecuente

Al restar un polinomio, el signo menos afecta a **todos** los términos del paréntesis. En este ejercicio, $-(4x^2 - 1) = -4x^2 + 1$ (no $-4x^2 - 1$).

Respuesta Correcta

La opción correcta es **d)** $5x^2 - 30x + 26$.

$$E = 5x^2 - 30x + 26$$

Capítulo 4

Ejercicio 4 – Operaciones Combinadas con Polinomios

Enunciado

Enunciado

Realiza la siguiente operación con polinomios y simplifica:

$$F = 2x(x^2 - 4) - (x + 2)^2 \cdot (x - 1).$$

Opciones: a) $x^3 - 3x^2 - 8x + 4$ b) $x^3 + 5x^2 - 8x - 4$ c) $x^3 - 3x^2 - 12x - 4$
d) $x^3 - 3x^2 + 4x - 4$

Desarrollo de la Solución

Paso 1: Desarrollar $2x(x^2 - 4)$.

Aplicamos la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned} 2x(x^2 - 4) &= 2x \cdot x^2 + 2x \cdot (-4) \\ &= 2x^3 - 8x. \end{aligned}$$

Paso 2: Desarrollar $(x + 2)^2$.

Usando la identidad del cuadrado de una suma $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ con $a = x$, $b = 2$:

$$(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4.$$

Paso 3: Multiplicar $(x^2 + 4x + 4)(x - 1)$.

Aplicamos distributividad término a término:

$$\begin{aligned} (x^2 + 4x + 4)(x - 1) &= x^2 \cdot x + x^2 \cdot (-1) + 4x \cdot x + 4x \cdot (-1) + 4 \cdot x + 4 \cdot (-1) \\ &= x^3 - x^2 + 4x^2 - 4x + 4x - 4 \\ &= x^3 + 3x^2 - 4. \end{aligned}$$

Agrupamos los términos semejantes:

$$x^3 + (-1 + 4)x^2 + (-4 + 4)x - 4 = x^3 + 3x^2 + 0x - 4 = x^3 + 3x^2 - 4.$$

Paso 4: Calcular la expresión completa.

$$\begin{aligned} F &= \underbrace{2x^3 - 8x}_{\text{paso 1}} - \underbrace{(x^3 + 3x^2 - 4)}_{\text{paso 3}} \\ &= 2x^3 - 8x - x^3 - 3x^2 + 4 \\ &= (2 - 1)x^3 + (-3)x^2 + (-8)x + 4 \\ &= x^3 - 3x^2 - 8x + 4. \end{aligned}$$

Paso 5: Verificación numérica (evaluamos en $x = 0$):

- Original: $2 \cdot 0 \cdot (0 - 4) - (0 + 2)^2 \cdot (0 - 1) = 0 - 4 \cdot (-1) = 4.$
- Resultado: $0 - 0 - 0 + 4 = 4.$ ✓

Evaluamos en $x = 1$:

- Original: $2(1)(1 - 4) - (1 + 2)^2(1 - 1) = 2(-3) - 9 \cdot 0 = -6.$
- Resultado: $1 - 3 - 8 + 4 = -6.$ ✓

Advertencia – Error Frecuente

Al distribuir el signo menos en el paso 4:

$$-(x^3 + 3x^2 - 4) = -x^3 - 3x^2 + 4.$$

El término -4 se convierte en $+4$. Es el error más frecuente.

Respuesta Correcta

La opción correcta es **a)** $x^3 - 3x^2 - 8x + 4.$

$$F = x^3 - 3x^2 - 8x + 4$$

Capítulo 5

Ejercicio 5 – Ecuación Polinómica por Factorización

Enunciado

Enunciado

Resuelve la ecuación factorizando primero:

$$2x^4 + 6x^3 - 8x^2 = 0.$$

Opciones: a) $x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = -1$ b) $x_1 = 0, x_2 = -4, x_3 = 1$ c) $x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 2$ d) $x_1 = 0, x_2 = 1$

Fundamento Teórico

Propiedad 5.1 (Factor Común). Para cualquier polinomio, si todos sus términos comparten un factor común $f(x)$, se puede escribir:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots = f(x) \cdot Q(x).$$

La ecuación $P(x) = 0$ tiene solución $x = r$ si y solo si alguno de sus factores se anula en r .

Propiedad 5.2 (Producto Nulo). Si $A \cdot B \cdot C = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$ o $C = 0$.

Desarrollo de la Solución

Paso 1: Extraer el factor común.

Los tres términos son $2x^4$, $6x^3$ y $-8x^2$. Buscamos el máximo factor común:

- Coeficientes: $\text{mcd}(2, 6, 8) = 2$.
- Potencia de x : la mínima es x^2 .

Factor común = $2x^2$.

$$2x^4 + 6x^3 - 8x^2 = 2x^2(x^2 + 3x - 4).$$

Verificamos la factorización:

$$2x^2 \cdot x^2 = 2x^4, \quad 2x^2 \cdot 3x = 6x^3, \quad 2x^2 \cdot (-4) = -8x^2. \checkmark$$

Paso 2: Factorizar el trinomio $x^2 + 3x - 4$.

Buscamos dos números p y q tales que:

$$p + q = 3 \quad \text{y} \quad p \cdot q = -4.$$

Ensayamos: $p = 4, q = -1 \Rightarrow 4 + (-1) = 3 \checkmark$ y $4 \cdot (-1) = -4 \checkmark$.

Por tanto:

$$x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1).$$

Verificación: $(x + 4)(x - 1) = x^2 - x + 4x - 4 = x^2 + 3x - 4. \checkmark$

Paso 3: Expresión factorizada completa.

$$2x^4 + 6x^3 - 8x^2 = 2x^2(x + 4)(x - 1) = 0.$$

Paso 4: Aplicar la propiedad del producto nulo.

La ecuación es producto de tres factores igualado a cero:

$$2x^2 = 0 \quad \vee \quad (x + 4) = 0 \quad \vee \quad (x - 1) = 0.$$

$$\blacksquare 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow \mathbf{x_1 = 0} \text{ (raíz doble).}$$

$$\blacksquare x + 4 = 0 \Rightarrow \mathbf{x_2 = -4}.$$

$$\blacksquare x - 1 = 0 \Rightarrow \mathbf{x_3 = 1}.$$

Paso 5: Verificación.

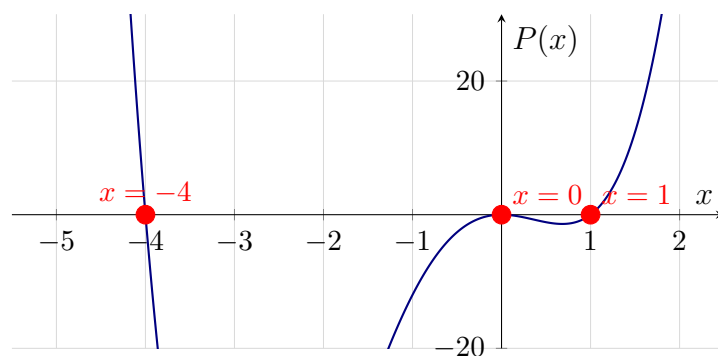
$$x = 0 : \quad 0 + 0 - 0 = 0. \checkmark$$

$$x = -4 : \quad 2(256) + 6(-64) - 8(16) = 512 - 384 - 128 = 0. \checkmark$$

$$x = 1 : \quad 2 + 6 - 8 = 0. \checkmark$$

Representación gráfica

$$P(x) = 2x^4 + 6x^3 - 8x^2$$



Las tres raíces ($x = 0$ doble, $x = -4$, $x = 1$) se ven como puntos de corte con el eje X .

Respuesta Correcta

La opción correcta es **b)** $x_1 = 0$, $x_2 = -4$, $x_3 = 1$.

$$x_1 = 0 \text{ (doble)}, \quad x_2 = -4, \quad x_3 = 1.$$

Capítulo 6

Ejercicio 6 – Ecuación Bicuadrada

Enunciado

Enunciado

Resuelve la ecuación bicuadrada:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$$

Opciones: a) $x_1 = 2, x_2 = 3$ b) $x_1 = 4, x_2 = 9$ c) $x_1 = 4, x_2 = -4, x_3 = 9, x_4 = -9$ d) $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 3, x_4 = -3$

Fundamento Teórico

Definición 6.1 (Ecuación Bicuadrada). Una ecuación bicuadrada es una ecuación de la forma

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \quad a \neq 0,$$

que no contiene términos en x^3 ni en x^1 . Se resuelve mediante el **cambio de variable** $t = x^2$ (con $t \geq 0$), transformándola en una ecuación de segundo grado en t :

$$at^2 + bt + c = 0.$$

Desarrollo de la Solución

Paso 1: Cambio de variable.

Sea $t = x^2$, con la condición $t \geq 0$. La ecuación se convierte en:

$$t^2 - 13t + 36 = 0.$$

Paso 2: Resolver la ecuación cuadrática en t .

Aplicamos la fórmula cuadrática:

$$t = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2}.$$

Las dos soluciones son:

$$t_1 = \frac{13+5}{2} = \frac{18}{2} = 9, \quad t_2 = \frac{13-5}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Ambas son positivas, luego ambas son válidas.

Verificación alternativa (factorización directa):

$$t^2 - 13t + 36 = (t-9)(t-4).$$

Comprobación: $(t-9)(t-4) = t^2 - 4t - 9t + 36 = t^2 - 13t + 36$. ✓

Paso 3: Deshacer el cambio de variable: $t = x^2$.

Para $t_1 = 9$:

$$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3.$$

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -3.$$

Para $t_2 = 4$:

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2.$$

$$x_3 = 2, \quad x_4 = -2.$$

Paso 4: Verificación de las cuatro soluciones.

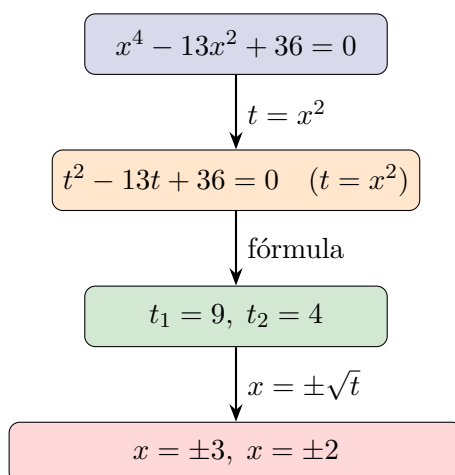
$$x = 3 : \quad 81 - 13 \cdot 9 + 36 = 81 - 117 + 36 = 0. \checkmark$$

$$x = -3 : \quad 81 - 117 + 36 = 0. \checkmark$$

$$x = 2 : \quad 16 - 13 \cdot 4 + 36 = 16 - 52 + 36 = 0. \checkmark$$

$$x = -2 : \quad 16 - 52 + 36 = 0. \checkmark$$

Esquema del cambio de variable



Advertencia – Error Frecuente

Un error muy frecuente es quedarse únicamente con las soluciones positivas $x = 2$ y $x = 3$ (opción a). Al deshacer el cambio $t = x^2$, siempre aparecen soluciones

positivas y negativas mientras $t > 0$.

Respuesta Correcta

La opción correcta es **d)** $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$, $x_4 = -3$.

$$x = \pm 2 \quad \text{y} \quad x = \pm 3.$$

Capítulo 7

Ejercicio 7 – Ecuación Radical

Enunciado

Enunciado

Resuelve la ecuación radical:

$$\sqrt{x+7} = x+1.$$

Opciones: a) $x = -3$ b) $x = 2$ y $x = -3$ c) $x = 2$ d) $x = 1$ y $x = -2$

Fundamento Teórico

Propiedad 7.1 (Dominio de una ecuación radical). La expresión $\sqrt{A}$ exige $A \geq 0$. Además, si $\sqrt{A} = B$, entonces $B \geq 0$ es condición necesaria. Al elevar al cuadrado, podemos introducir **soluciones extrañas** que deben descartarse verificando en la ecuación original.

Desarrollo de la Solución

Paso 1: Determinar el dominio.

Para que la ecuación tenga sentido:

$$x+7 \geq 0 \Rightarrow x \geq -7.$$

Además, como $\sqrt{x+7} \geq 0$, la parte derecha también debe serlo:

$$x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1.$$

Dominio: $\{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\}$.

Paso 2: Eliminar la raíz cuadrada elevando al cuadrado.

$$(\sqrt{x+7})^2 = (x+1)^2.$$

$$x + 7 = x^2 + 2x + 1.$$

Paso 3: Reorganizar como ecuación de segundo grado.

Restamos $x + 7$ en ambos lados:

$$0 = x^2 + 2x + 1 - x - 7 = x^2 + x - 6.$$

Paso 4: Resolver $x^2 + x - 6 = 0$.

Buscamos p, q con $p + q = 1$ y $p \cdot q = -6$: tomamos $p = 3, q = -2$.

$$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2) = 0.$$

$$x = -3 \quad \vee \quad x = 2.$$

Paso 5: Verificar cada solución en la ecuación **original**.

Para $x = 2$:

$$\text{LHS} = \sqrt{2+7} = \sqrt{9} = 3, \quad \text{RHS} = 2+1 = 3. \quad \checkmark$$

$x = 2$ es válida.

Para $x = -3$:

Primero comprobamos si está en el dominio: $-3 \geq -1$ es **falso**; $x = -3$ está fuera del dominio.

Verificación algebraica:

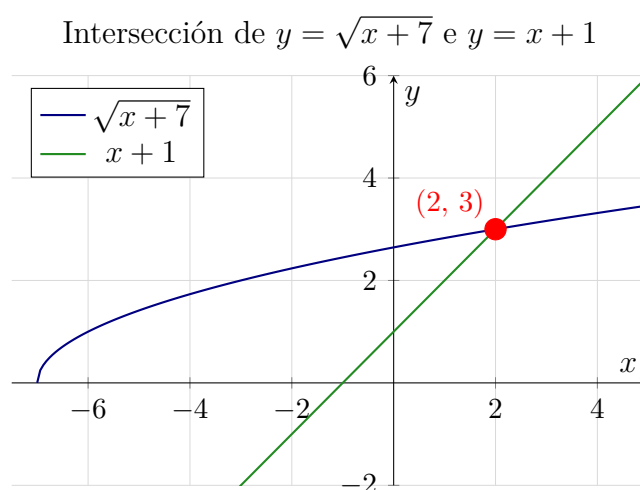
$$\text{LHS} = \sqrt{-3+7} = \sqrt{4} = 2, \quad \text{RHS} = -3+1 = -2. \quad \times$$

$2 \neq -2$: $x = -3$ es una **solución extraña** introducida al elevar al cuadrado.

Paso 6: Conclusión.

La única solución válida es $x = 2$.

Visualización gráfica



La gráfica muestra que las dos curvas se cortan *únicamente* en $x = 2$. El punto $x = -3$ generaría una intersección si reflejamos la raíz, pero no existe intersección real con la recta.

Advertencia – Error Frecuente

La solución $x = -3$ es un **artefacto algebraico**: al elevar al cuadrado, eliminamos la condición de que $\sqrt{\cdot}$ es no negativa. Siempre hay que sustituir en la ecuación original.

Respuesta Correcta

La opción correcta es **c)** $x = 2$.

$$x = 2.$$

Capítulo 8

Ejercicio 8 – Sistema No Lineal

Enunciado

Enunciado

Resuelve el sistema de ecuaciones no lineales por el método de sustitución:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

Opciones: a) (5, 2) y (2, 5) b) (5, 0) y (0, 5) c) (3, -4) y (-4, 3) d) (3, 4) y (4, 3)

Fundamento Teórico

Definición 8.1 (Sistema No Lineal). Un sistema de ecuaciones no lineal es aquel en el que al menos una ecuación no es de primer grado. La primera ecuación $x^2 + y^2 = 25$ es la circunferencia de radio 5 centrada en el origen. La segunda ecuación $x + y = 7$ es una recta.

Desarrollo de la Solución

Paso 1: Despejar y de la ecuación lineal.

De la segunda ecuación:

$$x + y = 7 \Rightarrow y = 7 - x.$$

Paso 2: Sustituir en la ecuación cuadrática.

Reemplazamos $y = 7 - x$ en $x^2 + y^2 = 25$:

$$x^2 + (7 - x)^2 = 25.$$

Paso 3: Desarrollar $(7 - x)^2$.

$$(7 - x)^2 = 49 - 14x + x^2.$$

La ecuación queda:

$$x^2 + 49 - 14x + x^2 = 25.$$

Paso 4: Simplificar y reorganizar.

$$2x^2 - 14x + 49 = 25$$

$$2x^2 - 14x + 49 - 25 = 0$$

$$2x^2 - 14x + 24 = 0.$$

Dividimos toda la ecuación entre 2:

$$x^2 - 7x + 12 = 0.$$

Paso 5: Resolver la ecuación cuadrática.

Buscamos p, q con $p + q = -7$ y $p \cdot q = 12$: tomamos $p = -3, q = -4$:

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4) = 0.$$

$$x = 3 \quad \vee \quad x = 4.$$

Paso 6: Obtener los valores de y .

Si $x = 3$:

$$y = 7 - 3 = 4.$$

Si $x = 4$:

$$y = 7 - 4 = 3.$$

Las soluciones son: $(x_1, y_1) = (3, 4)$ y $(x_2, y_2) = (4, 3)$.

Paso 7: Verificación en ambas ecuaciones.

Para $(3, 4)$:

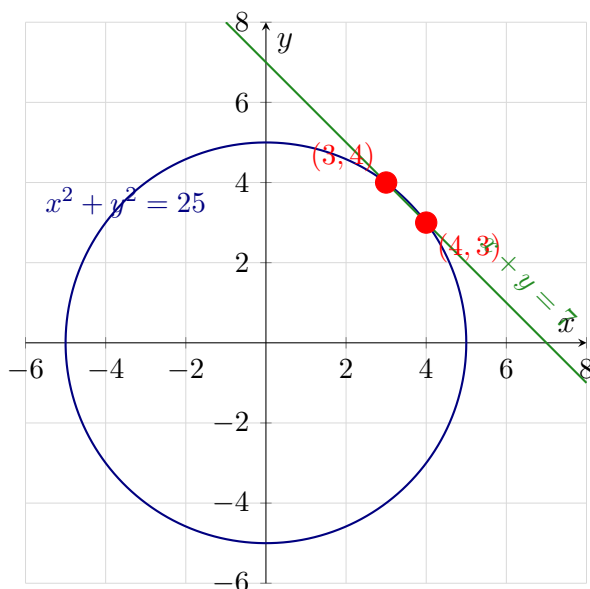
$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25. \checkmark \quad 3 + 4 = 7. \checkmark$$

Para $(4, 3)$:

$$4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25. \checkmark \quad 4 + 3 = 7. \checkmark$$

Interpretación geométrica

Circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ y recta $x + y = 7$



La recta $x + y = 7$ corta a la circunferencia de radio 5 en exactamente dos puntos: $(3, 4)$ y $(4, 3)$.

Observación Matemática

El par $(3, 4)$ y $(4, 3)$ son los catetos de una terna pitagórica: $3^2 + 4^2 = 5^2 = 25$, lo que explica por qué $x^2 + y^2 = 25$ se satisface con estos valores enteros.

Respuesta Correcta

La opción correcta es **d)** $x_1 = 3, y_1 = 4$ y $x_2 = 4, y_2 = 3$.

$$(x_1, y_1) = (3, 4), \quad (x_2, y_2) = (4, 3).$$

Capítulo 9

Ejercicio 9 – Inecuación de Segundo Grado

Enunciado

Enunciado

Resuelve la inecuación de segundo grado:

$$x^2 - 4x - 5 \geq 0.$$

Opciones: a) $[-1, 5]$ b) $(-5, 1]$ c) $(-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$ d) $(-1, 5)$

Fundamento Teórico

Propiedad 9.1 (Resolución de inecuaciones cuadráticas). Dada $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a > 0$ y raíces reales $r_1 \leq r_2$:

- $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [r_1, r_2]$ (parábola abre hacia arriba, negativa entre raíces).
- $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, r_1] \cup [r_2, +\infty)$ (positiva fuera de las raíces).

Desarrollo de la Solución

Paso 1: Encontrar las raíces del polinomio $f(x) = x^2 - 4x - 5$.

Resolvemos $x^2 - 4x - 5 = 0$. Factorizamos:

$$x^2 - 4x - 5 = (x - 5)(x + 1).$$

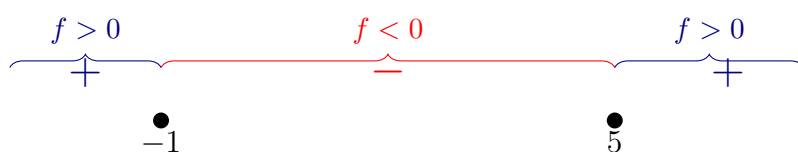
Comprobación: $(x - 5)(x + 1) = x^2 + x - 5x - 5 = x^2 - 4x - 5$. ✓

Las raíces son:

$$r_1 = -1, \quad r_2 = 5.$$

Paso 2: Analizar el signo de $f(x)$ en cada intervalo.

La parábola $f(x) = x^2 - 4x - 5$ tiene el coeficiente principal $a = 1 > 0$, por lo que **abre hacia arriba**.



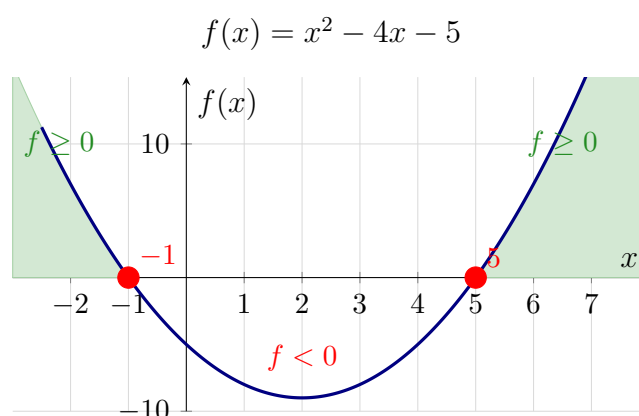
- Para $x < -1$ (tomamos $x = -2$): $f(-2) = 4 + 8 - 5 = 7 > 0$. **Positivo.**
- Para $-1 < x < 5$ (tomamos $x = 0$): $f(0) = -5 < 0$. **Negativo.**
- Para $x > 5$ (tomamos $x = 6$): $f(6) = 36 - 24 - 5 = 7 > 0$. **Positivo.**

Paso 3: Determinar la solución de $f(x) \geq 0$.

Buscamos donde $f(x) \geq 0$: los intervalos donde f es positiva **o igual a cero** (en las raíces):

$$x \in (-\infty, -1] \cup [5, +\infty).$$

Gráfica de la parábola



La zona sombreada en verde indica la solución: $(-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$.

Advertencia – Error Frecuente

La inecuación es ≥ 0 (mayor o igual). Las raíces $x = -1$ y $x = 5$ **se incluyen** en la solución (intervalos cerrados $[\cdot]$). Si fuera > 0 , se excluirían.

Respuesta Correcta

La opción correcta es **c)** $(-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$.

$$x \in (-\infty, -1] \cup [5, +\infty).$$

Capítulo 10

Ejercicio 10 – Sistema de Inecuaciones

Enunciado

Enunciado

Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones con una incógnita:

$$\begin{cases} 2(x + 3) \leq 4x \\ \frac{x}{2} - 1 < 3 \end{cases}$$

Opciones: a) $[3, +\infty)$ b) $[3, 8]$ c) $[0, 8)$ d) $[3, 8)$

Fundamento Teórico

Propiedad 10.1 (Sistema de Inecuaciones). La solución de un sistema de inecuaciones es la **intersección** de las soluciones de cada inecuación individual. Si los conjuntos solución son S_1 y S_2 , la solución es $S_1 \cap S_2$.

Desarrollo de la Solución

Inecuación 1: $2(x + 3) \leq 4x$

Paso 1: Desarrollar el miembro izquierdo.

$$2(x + 3) \leq 4x \Rightarrow 2x + 6 \leq 4x.$$

Paso 2: Aislar x .

Restamos $2x$ a ambos lados:

$$6 \leq 4x - 2x \Rightarrow 6 \leq 2x.$$

Dividimos entre 2 (número positivo, no cambia el sentido):

$$3 \leq x \Rightarrow x \geq 3.$$

Solución de la inecuación 1: $S_1 = [3, +\infty)$.

Inecuación 2: $\frac{x}{2} - 1 < 3$

Paso 3: Aislar x .

Sumamos 1 a ambos lados:

$$\frac{x}{2} < 4.$$

Multiplicamos por 2 (positivo, no cambia el sentido):

$$x < 8.$$

Solución de la inecuación 2: $S_2 = (-\infty, 8)$.

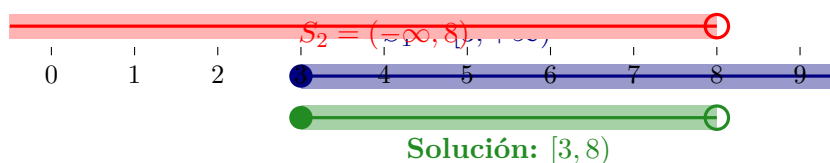
Intersección de las soluciones

Paso 4: Calcular $S_1 \cap S_2$.

$$S_1 \cap S_2 = [3, +\infty) \cap (-\infty, 8) = [3, 8).$$

El 3 se incluye (corchete cerrado en S_1) y el 8 **no** se incluye (paréntesis abierto en S_2).

Representación en la recta numérica



Paso 5: Verificación con valores de prueba.

- $x = 3$ (incluido): $2(6) \leq 12 \checkmark$; $\frac{3}{2} - 1 = 0.5 < 3 \checkmark$.
- $x = 5$ (interior): $2(8) = 16 \leq 20 \checkmark$; $\frac{5}{2} - 1 = 1.5 < 3 \checkmark$.
- $x = 8$ (excluido): $2(11) = 22 \leq 32 \checkmark$; $\frac{8}{2} - 1 = 3 \not< 3$ **No cumple** S_2 . $\checkmark$
- $x = 2$ (excluido): $2(5) = 10 \leq 8$ **Falso**. $\checkmark$ (está fuera de S_1)

Advertencia – Error Frecuente

La segunda inecuación tiene desigualdad estricta ($<$), por lo que $x = 8$ **no** pertenece a la solución. El intervalo debe ser $[3, 8)$ con corchete abierto en 8.

Respuesta Correcta

La opción correcta es **d)** $[3, 8)$.

$$x \in [3, 8).$$

Resumen de Respuestas Correctas

N.º	Tema	Respuesta
1	Teorema del Resto	c) $k = 1$
2	Regla de Ruffini	b) $C(x) = x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 74x + 226, R = -67$
3	Identidades Notables	d) $5x^2 - 30x + 26$
4	Operaciones Combinadas	a) $x^3 - 3x^2 - 8x + 4$
5	Ecuacion Polinomica	b) $x_1 = 0, x_2 = -4, x_3 = 1$
6	Ecuacion Bicuadrada	d) $x = \pm 2, x = \pm 3$
7	Ecuacion Radical	c) $x = 2$
8	Sistema No Lineal	d) $(3, 4)$ y $(4, 3)$
9	Inecuacion 2. Grado	c) $(-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$
10	Sistema de Inecuaciones	d) $[3, 8)$

Puntuación máxima: 10 puntos (1 punto por ejercicio)

Hoja de Respuestas: **c – b – d – a – b – d – c – d – c**
 – d

Apéndice: Formulario de Referencia

Identidades Notables

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\(a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \\(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\(a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

Fórmula Cuadrática

Dada $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \Delta = b^2 - 4ac.$$

- $\Delta > 0$: dos soluciones reales distintas.
- $\Delta = 0$: solución real doble $x = -b/(2a)$.
- $\Delta < 0$: no hay soluciones reales.

Teorema del Resto

$$P(x) \div (x - a) \Rightarrow R = P(a).$$

Regla de Ruffini

Válida para divisores de la forma $(x - a)$. Se opera con coeficientes exclusivamente.

Inecuaciones con $a > 0$

$$a(x - r_1)(x - r_2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq r_1 \text{ o } x \geq r_2 \quad (r_1 < r_2).$$

$$a(x - r_1)(x - r_2) \leq 0 \Leftrightarrow r_1 \leq x \leq r_2.$$

2º EXAMEN 4º ESO - Álgebra Completa: Polinomios, Ecuaciones e Inecuaciones

Noviembre de 2025

Instrucciones: Seleccione la única opción correcta para cada una de las 18 preguntas.

- (Polinomios y Teorema del Resto)** Dado el polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 + kx^2 - 5x + 3$, utiliza el Teorema del Resto para calcular el valor de k de modo que el resto de la división $P(x) : (x - 2)$ sea igual a -3 .
 - $k = -1$
 - $k = 4$
 - $k = 1$
 - $k = -3$
- (Polinomios y Regla de Ruffini)** Utiliza la Regla de Ruffini para dividir $x^5 - 3x^4 - 20x^2 + 4x + 1$ entre $(x + 3)$, e indica el cociente $C(x)$ y el resto R .
 - $C(x) = x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 7x + 25$ y $R = 76$
 - $C(x) = x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 74x + 226$ y $R = -677$
 - $C(x) = x^4 - 3x^3 - 20x + 4$ y $R = -11$
 - $C(x) = x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 74x + 226$ y $R = 1$
- (Polinomios y Valor Numérico)** Indica el valor numérico del polinomio $Q(x) = x^5 - 3x^4 - 20x^2 + 4x + 1$ en $x = -3$.
 - 1
 - 677
 - 677
 - 0
- (Operaciones y Simplificación)** Desarrolla la siguiente expresión utilizando las identidades notables y simplifica el resultado: $(3x - 5)^2 - (2x + 1) \cdot (2x - 1)$.
 - $13x^2 - 30x + 26$
 - $5x^2 - 30x - 26$
 - $5x^2 - 30x + 24$
 - $5x^2 - 30x + 26$
- (División de Polinomios)** Realiza la siguiente división de polinomios e indica el cociente $C(x)$ y el resto $R(x)$: $(3x^4 - 5x^3 + 2x - 7) : (x^2 - x + 3)$.
 - $C(x) = 3x^2 - 2x + 11$ y $R(x) = -3x - 40$
 - $C(x) = 3x^2 - 2x - 11$ y $R(x) = -3x + 26$
 - $C(x) = 3x^2 + 2x - 11$ y $R(x) = -3x + 26$
 - $C(x) = 3x^2 - 8x + 24$ y $R(x) = -14x + 79$
- (Operaciones Combinadas)** Realiza la siguiente operación con polinomios y simplifica el resultado: $2x(x^2 - 4) - (x + 2)^2 \cdot (x - 1)$.
 - $x^3 - 3x^2 - 8x + 4$

- b) $x^3 + 5x^2 - 8x - 4$
 c) $x^3 - 3x^2 - 12x - 4$
 d) $x^3 - 3x^2 + 4x - 4$
7. **(Ecuación Polinómica)** Resuelve la ecuación factorizando primero: $2x^4 + 6x^3 - 8x^2 = 0$.
 a) $x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = -1$
 b) $x_1 = 0, x_2 = -4, x_3 = 1$
 c) $x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 2$
 d) $x_1 = 0, x_2 = 1$
8. **(Ecuación Bicuadrada)** Resuelve la ecuación bicuadrada: $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.
 a) $x_1 = 2, x_2 = 3$
 b) $x_1 = 4, x_2 = 9$
 c) $x_1 = 4, x_2 = -4, x_3 = 9, x_4 = -9$
 d) $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 3, x_4 = -3$
9. **(Ecuación de Segundo Grado)** Resuelve la ecuación de segundo grado: $3x^2 - 7x + 2 = 0$.
 a) $x_1 = 2$ y $x_2 = \frac{1}{3}$
 b) $x_1 = -2$ y $x_2 = -\frac{1}{3}$
 c) $x_1 = 1$ y $x_2 = \frac{2}{3}$
 d) $x_1 = 2$ y $x_2 = -\frac{1}{3}$
10. **(Ecuación Racional)** Resuelve la ecuación racional (con fracciones algebraicas): $\frac{x}{x-2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2(x-2)}$.
 a) $x = 1$
 b) $x = 3$
 c) $x = -1$
 d) $x = 2$
11. **(Ecuación Radical)** Resuelve la ecuación radical (con raíces): $\sqrt{x+7} = x+1$.
 a) $x = -3$
 b) $x = 2$ y $x = -3$
 c) $x = 2$
 d) $x = 1$ y $x = -2$
12. **(Ecuación Incompleta)** Resuelve la ecuación de segundo grado incompleta: $5x^2 - 15x = 0$.
 a) $x_1 = 0$ y $x_2 = -3$
 b) $x_1 = 3$ y $x_2 = 5$
 c) $x_1 = 3$
 d) $x_1 = 0$ y $x_2 = 3$
13. **(Sistema Lineal)** Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales simplificando primero las expresiones: $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ \frac{x+1}{3} + \frac{y-2}{2} = 3 \end{cases}$
 a) $x = \frac{17}{4}$ y $y = \frac{9}{2}$
 b) $x = 1$ y $y = -2$
 c) $x = \frac{17}{4}$ y $y = -\frac{9}{2}$
 d) $x = 4$ y $y = 4,5$
14. **(Sistema No Lineal)** Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones no lineales por el método de sustitución:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

- a) $x_1 = 5, y_1 = 2$ y $x_2 = 2, y_2 = 5$
 b) $x_1 = 5, y_1 = 0$ y $x_2 = 0, y_2 = 5$
 c) $x_1 = 3, y_1 = -4$ y $x_2 = -4, y_2 = 3$
 d) $x_1 = 3, y_1 = 4$ y $x_2 = 4, y_2 = 3$
15. **(Problema con Sistema)** Plantea y resuelve el siguiente problema: La diferencia de dos números es 6 y el triple del primero sumado con el doble del segundo es 32. ¿Qué números son?
- a) Los números son $x = 8$ y $y = 2$.
 b) Los números son $x = 10$ y $y = 4$.
 c) Los números son $x = 14$ y $y = 8$.
 d) Los números son $x = \frac{44}{5}$ y $y = \frac{14}{5}$.
16. **(Inecuación Lineal)** Resuelve la inecuación lineal y expresa la solución en forma de intervalo: $5x - 3(x + 1) \leq 2x + 7$.
- a) $(-\infty, 10]$
 b) $[0, \infty)$
 c) $(-\infty, \infty)$
 d) $(-3, 7]$
17. **(Inecuación de Segundo Grado)** Resuelve la inecuación de segundo grado: $x^2 - 4x - 5 \geq 0$.
- a) $[-1, 5]$
 b) $(-5, 1]$
 c) $(-\infty, -1] \cup [5, \infty)$
 d) $(-1, 5)$
18. **(Sistema de Inecuaciones)** Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones lineales con una incógnita:
- $$\begin{cases} 2(x + 3) \leq 4x \\ \frac{x}{2} - 1 < 3 \end{cases}$$
- a) $[3, \infty)$
 b) $[3, 8]$
 c) $[0, 8)$
 d) $[3, 8)$

Hoja de Respuestas

Pregunta	a)	b)	c)	d)
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				

MATEMÁTICAS B

4º de Educación Secundaria Obligatoria

2º Examen: Álgebra Completa

Polinomios, Ecuaciones e Inecuaciones

GUÍA COMPLETA DE SOLUCIONES

Resolución exhaustiva y pedagógica de los 18 ejercicios
con rigor matemático total, sin omitir ningún paso.

Datos del Examen

Curso:	4º ESO (Matemáticas B)
Fecha:	Noviembre de 2025
Número de preguntas:	18 (tipo test, una única respuesta correcta)
Temas:	Polinomios, Ecuaciones, Sistemas, Inecuaciones

Material de estudio elaborado con rigor didáctico universitario.
Todo el desarrollo algebraico está justificado paso a paso.

Índice general

1. Introducción y Marco Teórico General	2
1.1. Conceptos Fundamentales de Álgebra	2
1.1.1. Polinomios	2
1.1.2. Teorema del Resto	2
1.1.3. Regla de Ruffini	3
2. Soluciones Completas de los 18 Ejercicios	4
2.1. Ejercicio 1 – Polinomios y Teorema del Resto	4
2.2. Ejercicio 2 – Polinomios y Regla de Ruffini	6
2.3. Ejercicio 3 – Valor Numérico de un Polinomio	8
2.4. Ejercicio 4 – Identidades Notables y Simplificación	10
2.5. Ejercicio 5 – División de Polinomios	12
2.6. Ejercicio 6 – Operaciones Combinadas con Polinomios	14
2.7. Ejercicio 7 – Ecuación Polinómica por Factorización	15
2.8. Ejercicio 8 – Ecuación Bicuadrada	17
2.9. Ejercicio 9 – Ecuación de Segundo Grado	19
2.10. Ejercicio 10 – Ecuación Racional	21
2.11. Ejercicio 11 – Ecuación Radical	23
2.12. Ejercicio 12 – Ecuación de Segundo Grado Incompleta	25
2.13. Ejercicio 13 – Sistema de Ecuaciones Lineales	26
2.14. Ejercicio 14 – Sistema de Ecuaciones No Lineal	28
2.15. Ejercicio 15 – Problema con Sistema de Ecuaciones	30
2.16. Ejercicio 16 – Inecuación Lineal	32
2.17. Ejercicio 17 – Inecuación de Segundo Grado	34
2.18. Ejercicio 18 – Sistema de Inecuaciones	36
3. Tabla de Respuestas Correctas y Resumen	38
3.1. Tabla de Respuestas	38
3.2. Advertencias Globales y Consejos de Estudio	38

Capítulo 1

Introducción y Marco Teórico General

Este documento contiene la resolución completa y exhaustiva de los 18 ejercicios del **2º Examen de Álgebra Completa de 4º ESO** (Noviembre de 2025). Cada solución está desarrollada con rigor matemático pleno, justificando cada transformación algebraica, citando los teoremas y propiedades utilizados, y añadiendo observaciones didácticas para facilitar la comprensión profunda.

1.1 Conceptos Fundamentales de Álgebra

1.1.1 Polinomios

Fundamento Teórico

Un **polinomio** en la variable x es una expresión de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, y $n \in \mathbb{N}$.

El número n se llama **grado** del polinomio, y a_n es el **coeficiente principal**.

1.1.2 Teorema del Resto

Fundamento Teórico

Teorema del Resto: El resto de la división de un polinomio $P(x)$ entre $(x - a)$ es igual al valor numérico del polinomio en $x = a$:

$$P(x) = (x - a) \cdot C(x) + R \implies R = P(a)$$

1.1.3 Regla de Ruffini

Fundamento Teórico

La **Regla de Ruffini** es un algoritmo eficiente para dividir un polinomio $P(x)$ entre $(x - a)$, utilizando únicamente los coeficientes del dividendo. Se aplica en los siguientes pasos:

1. Escribir los coeficientes del dividendo en orden decreciente de grado (rellenando con ceros los términos ausentes).
2. Escribir a a la izquierda.
3. Bajar el primer coeficiente; multiplicarlo por a y sumarlo al siguiente; repetir hasta el final.
4. El último número obtenido es el resto R ; los demás son los coeficientes del cociente $C(x)$.

Capítulo 2

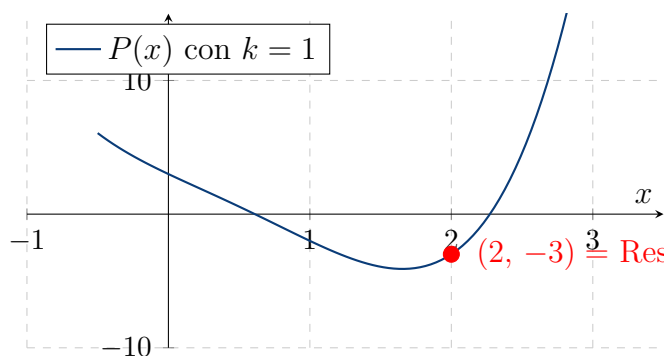
Soluciones Completas de los 18 Ejercicios

2.1 Ejercicio 1 – Polinomios y Teorema del Resto

Enunciado: Dado el polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 + kx^2 - 5x + 3$, utiliza el Teorema del Resto para calcular el valor de k de modo que el resto de la división $P(x) : (x - 2)$ sea igual a -3 .

- a) $k = -1$ b) $k = 4$ c) $k = 1$ d) $k = -3$

Polinomio $P(x)$ con $k = 1$ y el punto $x = 2$



Fundamento Teórico

Teorema del Resto (aplicación): El resto de dividir $P(x)$ entre $(x - 2)$ es $P(2)$. La condición impuesta es $P(2) = -3$.

Solución

Paso 1: Aplicamos el Teorema del Resto. Según dicho teorema:

$$\text{Resto} = P(2) = -3$$

Esto es así porque cuando dividimos un polinomio $P(x)$ entre $(x - a)$, el divisor se anula en $x = a$, y la igualdad $P(x) = (x - a) \cdot C(x) + R$ evaluada en $x = a$ da directamente $P(a) = R$.

Paso 2: Calculamos $P(2)$ sustituyendo $x = 2$ en $P(x) = x^4 - 2x^3 + kx^2 - 5x + 3$:

$$\begin{aligned} P(2) &= (2)^4 - 2(2)^3 + k(2)^2 - 5(2) + 3 \\ &= 16 - 2 \cdot 8 + k \cdot 4 - 10 + 3 \\ &= 16 - 16 + 4k - 10 + 3 \\ &= 4k - 7 \end{aligned}$$

Paso 3: Imponemos la condición $P(2) = -3$:

$$4k - 7 = -3$$

Paso 4: Despejamos k :

$$\begin{aligned} 4k &= -3 + 7 \\ 4k &= 4 \\ k &= 1 \end{aligned}$$

Paso 5: Verificación: Sustituimos $k = 1$ y $x = 2$ en $P(x)$:

$$P(2) = 16 - 16 + 4 - 10 + 3 = -3 \checkmark$$

Respuesta Correcta

La respuesta correcta es **c)** $k = 1$

Advertencia / Error Frecuente

Error frecuente: confundir el signo del divisor. El divisor es $(x - 2)$, por lo que hay que evaluar en $x = +2$, no en $x = -2$. Si el divisor fuera $(x + 2)$, habría que evaluar en $x = -2$.

2.2 Ejercicio 2 – Polinomios y Regla de Ruffini

Enunciado: Utiliza la Regla de Ruffini para dividir $x^5 - 3x^4 - 20x^2 + 4x + 1$ entre $(x + 3)$, e indica el cociente $C(x)$ y el resto R .

Ruffini:	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
$a = -3$	1	-3	0	-20	4	1
-3		-3	18	-54	222	-678
	1	-6	18	-74	226	-677
	Coeficientes del cociente $C(x)$					Resto R

Solución

El divisor es $(x + 3) = (x - (-3))$, luego el valor a usar en Ruffini es $a = -3$.
El dividendo es $x^5 - 3x^4 + 0x^3 - 20x^2 + 4x + 1$.

Atención: el término x^3 tiene coeficiente **cero** (término ausente); debe incluirse.

Los coeficientes son: $\{1, -3, 0, -20, 4, 1\}$

Tabla de Ruffini con $a = -3$:

-3	1	-3	0	-20	4	1
		-3	18	-54	222	-678
	1	-6	18	-74	226	-677

Desarrollo paso a paso:

- Bajamos el 1. Multiplicamos: $1 \times (-3) = -3$. Sumamos: $-3 + (-3) = -6$.
- Multiplicamos: $-6 \times (-3) = 18$. Sumamos: $0 + 18 = 18$.
- Multiplicamos: $18 \times (-3) = -54$. Sumamos: $-20 + (-54) = -74$.
- Multiplicamos: $-74 \times (-3) = 222$. Sumamos: $4 + 222 = 226$.
- Multiplicamos: $226 \times (-3) = -678$. Sumamos: $1 + (-678) = -677$.

El cociente tiene grado 4 (uno menos que el dividendo):

$$C(x) = x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 74x + 226$$

$$R = -677$$

Verificación (Teorema del Resto): $P(-3) = (-3)^5 - 3(-3)^4 - 20(-3)^2 + 4(-3) + 1$

$$= -243 - 3(81) - 20(9) - 12 + 1 = -243 - 243 - 180 - 12 + 1 = -677 \checkmark$$

Respuesta Correcta

La respuesta correcta es **b)** $C(x) = x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 74x + 226$ y $R = -677$

Advertencia / Error Frecuente

El error más común en Ruffini es **olvidar los términos ausentes**. Cuando un polinomio no tiene algún grado (como aquí, que falta x^3), se debe colocar un coeficiente 0 en su lugar. De lo contrario, todos los cálculos posteriores son incorrectos.

2.3 Ejercicio 3 – Valor Numérico de un Polinomio

Enunciado: Indica el valor numérico del polinomio $Q(x) = x^5 - 3x^4 - 20x^2 + 4x + 1$ en $x = -3$.

Fundamento Teórico

El **valor numérico** de un polinomio $Q(x)$ en $x = a$ es simplemente $Q(a)$, es decir, el resultado de sustituir x por a y calcular el valor de la expresión.

Conexión con Ruffini: Por el Teorema del Resto, el valor $Q(a)$ es exactamente el resto de la división $Q(x) \div (x - a)$. Por tanto, el Ejercicio 3 es **idéntico al resto** calculado en el Ejercicio 2 (ambos usan el mismo polinomio y el mismo punto $x = -3$).

Solución

Paso 1: Sustituimos $x = -3$ en $Q(x) = x^5 - 3x^4 - 20x^2 + 4x + 1$:

$$Q(-3) = (-3)^5 - 3 \cdot (-3)^4 - 20 \cdot (-3)^2 + 4 \cdot (-3) + 1$$

Paso 2: Calculamos cada potencia:

$$\begin{aligned}(-3)^1 &= -3 \\(-3)^2 &= 9 \\(-3)^3 &= -27 \\(-3)^4 &= 81 \\(-3)^5 &= -243\end{aligned}$$

Paso 3: Sustituimos:

$$\begin{aligned}Q(-3) &= (-243) - 3 \cdot (81) - 20 \cdot (9) + 4 \cdot (-3) + 1 \\&= -243 - 243 - 180 - 12 + 1\end{aligned}$$

Paso 4: Operamos término a término:

$$\begin{aligned}-243 - 243 &= -486 \\-486 - 180 &= -666 \\-666 - 12 &= -678 \\-678 + 1 &= -677\end{aligned}$$

Por tanto: $Q(-3) = -677$.

Respuesta Correcta

La respuesta correcta es **c)** -677

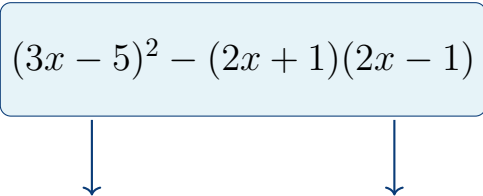
Observación Pedagógica

Obsérvese que el resultado $Q(-3) = -677$ coincide exactamente con el resto $R = -677$ obtenido en el Ejercicio 2 mediante la Regla de Ruffini. Esto no es una coincidencia, sino una consecuencia directa del Teorema del Resto: *el resto de dividir $Q(x)$ entre $(x + 3) = (x - (-3))$ es igual a $Q(-3)$* . Los Ejercicios 2 y 3 son, en realidad, dos caras de la misma moneda.

2.4 Ejercicio 4 – Identidades Notables y Simplificación

Enunciado: Desarrolla y simplifica: $(3x - 5)^2 - (2x + 1)(2x - 1)$.

$$(3x - 5)^2 - (2x + 1)(2x - 1)$$


$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Fundamento Teórico

Identidades Notables fundamentales:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (\text{cuadrado de una suma})$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (\text{cuadrado de una diferencia})$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \quad (\text{producto de suma por diferencia})$$

Solución

Paso 1: Identificamos qué identidad aplica a cada factor:

- $(3x - 5)^2$: es un **cuadrado de una diferencia**, con $a = 3x$ y $b = 5$.
- $(2x + 1)(2x - 1)$: es un **producto de suma por diferencia**, con $a = 2x$ y $b = 1$.

Paso 2: Desarrollamos $(3x - 5)^2$:

$$(3x - 5)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot (3x) \cdot 5 + 5^2 = 9x^2 - 30x + 25$$

Paso 3: Desarrollamos $(2x + 1)(2x - 1)$:

$$(2x + 1)(2x - 1) = (2x)^2 - 1^2 = 4x^2 - 1$$

Paso 4: Restamos los dos resultados:

$$(3x - 5)^2 - (2x + 1)(2x - 1) = (9x^2 - 30x + 25) - (4x^2 - 1)$$

Paso 5: Distribuimos el signo negativo del paréntesis:

$$= 9x^2 - 30x + 25 - 4x^2 + 1$$

Paso 6: Agrupamos términos semejantes:

$$\begin{aligned} &= (9x^2 - 4x^2) + (-30x) + (25 + 1) \\ &= 5x^2 - 30x + 26 \end{aligned}$$

Respuesta Correcta

La respuesta correcta es **d)** $5x^2 - 30x + 26$

Advertencia / Error Frecuente

El error más frecuente en este ejercicio es **no distribuir correctamente el signo menos** al restar el segundo paréntesis. El término -1 de $(4x^2 - 1)$ se convierte en $+1$ al restar, por lo que $25 + 1 = 26$ (no $25 - 1 = 24$, que correspondería a la opción c).

2.5 Ejercicio 5 – División de Polinomios

Enunciado: Realiza la división $(3x^4 - 5x^3 + 2x - 7) : (x^2 - x + 3)$ e indica $C(x)$ y $R(x)$.

Fundamento Teórico

Algoritmo de la división de polinomios: Dados $D(x)$ (dividendo) y $d(x)$ (divisor) con $\deg(d) \geq 1$, existen únicos $C(x)$ y $R(x)$ tales que:

$$D(x) = d(x) \cdot C(x) + R(x) \quad \text{con} \quad \deg(R) < \deg(d)$$

Cuando $\deg(d) = 2$, el grado del cociente es $\deg(D) - 2$ y el del resto es como máximo 1.

Solución

El dividendo es $3x^4 - 5x^3 + 0x^2 + 2x - 7$ (el término en x^2 es cero).

El divisor es $x^2 - x + 3$.

División larga paso a paso:

Paso 1: El primer término del dividendo es $3x^4$. El primer término del divisor es x^2 . Dividimos:

$$\frac{3x^4}{x^2} = 3x^2$$

Multiplicamos $3x^2 \cdot (x^2 - x + 3) = 3x^4 - 3x^3 + 9x^2$ y restamos:

$$(3x^4 - 5x^3 + 0x^2 + 2x - 7) - (3x^4 - 3x^3 + 9x^2) = -2x^3 - 9x^2 + 2x - 7$$

Paso 2: El nuevo dividendo parcial es $-2x^3 - 9x^2 + 2x - 7$. Dividimos el primer término:

$$\frac{-2x^3}{x^2} = -2x$$

Multiplicamos $-2x \cdot (x^2 - x + 3) = -2x^3 + 2x^2 - 6x$ y restamos:

$$(-2x^3 - 9x^2 + 2x - 7) - (-2x^3 + 2x^2 - 6x) = -11x^2 + 8x - 7$$

Paso 3: El nuevo dividendo parcial es $-11x^2 + 8x - 7$. Dividimos:

$$\frac{-11x^2}{x^2} = -11$$

Multiplicamos $-11 \cdot (x^2 - x + 3) = -11x^2 + 11x - 33$ y restamos:

$$(-11x^2 + 8x - 7) - (-11x^2 + 11x - 33) = -3x + 26$$

El grado de $-3x + 26$ es 1, que es menor que el grado del divisor (2). **Paramos. Resultado:**

$$C(x) = 3x^2 - 2x - 11, \quad R(x) = -3x + 26$$

Verificación: $(x^2 - x + 3)(3x^2 - 2x - 11) + (-3x + 26)$ Desarrollando: $= 3x^4 - 2x^3 - 11x^2 - 3x^3 + 2x^2 + 11x + 9x^2 - 6x - 33 - 3x + 26 = 3x^4 - 5x^3 + 0x^2 + 2x - 7$
✓

Respuesta Correcta

La respuesta correcta es **b)** $C(x) = 3x^2 - 2x - 11$ y $R(x) = -3x + 26$

2.6 Ejercicio 6 – Operaciones Combinadas con Polinomios

Enunciado: Realiza y simplifica: $2x(x^2 - 4) - (x + 2)^2 \cdot (x - 1)$.

Solución

Abordamos la expresión en dos bloques separados y luego restamos.

Paso 1: Calculamos el primer bloque: $2x(x^2 - 4)$

Aplicamos la propiedad distributiva:

$$2x(x^2 - 4) = 2x \cdot x^2 - 2x \cdot 4 = 2x^3 - 8x$$

Paso 2: Calculamos el segundo bloque: $(x + 2)^2 \cdot (x - 1)$

Primero desarrollamos $(x + 2)^2$ usando la identidad notable del cuadrado de una suma:

$$(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

Ahora multiplicamos $(x^2 + 4x + 4)(x - 1)$, distribuyendo cada término:

$$\begin{aligned} (x^2 + 4x + 4)(x - 1) &= x^2 \cdot x + 4x \cdot x + 4 \cdot x - x^2 \cdot 1 - 4x \cdot 1 - 4 \cdot 1 \\ &= x^3 + 4x^2 + 4x - x^2 - 4x - 4 \\ &= x^3 + 3x^2 + 0x - 4 \\ &= x^3 + 3x^2 - 4 \end{aligned}$$

Paso 3: Restamos el segundo bloque del primero:

$$\begin{aligned} 2x(x^2 - 4) - (x + 2)^2(x - 1) &= (2x^3 - 8x) - (x^3 + 3x^2 - 4) \\ &= 2x^3 - 8x - x^3 - 3x^2 + 4 \\ &= (2x^3 - x^3) + (-3x^2) + (-8x) + (4) \\ &= x^3 - 3x^2 - 8x + 4 \end{aligned}$$

Respuesta Correcta

La respuesta correcta es **a)** $x^3 - 3x^2 - 8x + 4$

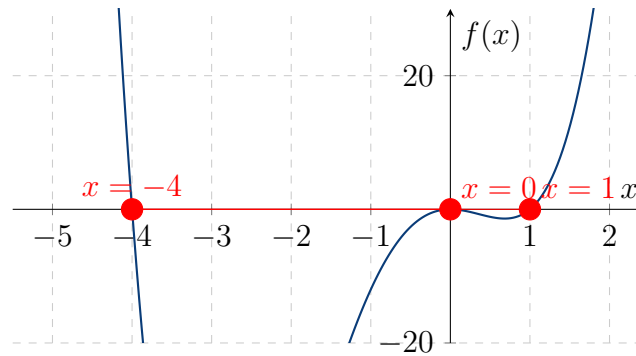
Advertencia / Error Frecuente

Al restar el segundo paréntesis $(x^3 + 3x^2 - 4)$, el signo de cada término se invierte: $-x^3$, $-3x^2$ y $+4$. El término en x desaparece ($4x - 4x = 0$) pero el término independiente -4 se convierte en $+4$.

2.7 Ejercicio 7 – Ecuación Polinómica por Factorización

Enunciado: Resuelve la ecuación factorizando: $2x^4 + 6x^3 - 8x^2 = 0$.

$f(x) = 2x^4 + 6x^3 - 8x^2$. Las raíces son los cortes con el eje x



Solución

Paso 1: Extraemos factor común.

Observamos que todos los términos tienen x^2 como factor común, y además el coeficiente 2 es factor común:

$$2x^4 + 6x^3 - 8x^2 = 2x^2(x^2 + 3x - 4)$$

Verificación: $2x^2 \cdot x^2 = 2x^4$; $2x^2 \cdot 3x = 6x^3$; $2x^2 \cdot (-4) = -8x^2$. Correcto.

Paso 2: Factorizamos el trinomio $x^2 + 3x - 4$.

Buscamos dos números p y q tales que $p \cdot q = -4$ y $p + q = 3$.

Comprobando pares: $p = 4$, $q = -1 \implies pq = -4 \checkmark$, $p + q = 3 \checkmark$.

Por tanto:

$$x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$$

Paso 3: Ecuación factorizada completa:

$$2x^2(x + 4)(x - 1) = 0$$

Paso 4: Aplicamos la propiedad del producto nulo: un producto es cero cuando al menos uno de sus factores es cero:

$$2x^2 = 0 \implies x = 0 \quad (\text{raíz doble, multiplicidad } 2)$$

$$x + 4 = 0 \implies x = -4$$

$$x - 1 = 0 \implies x = 1$$

Las soluciones son: $x_1 = 0$ (doble), $x_2 = -4$, $x_3 = 1$.

Respuesta Correcta

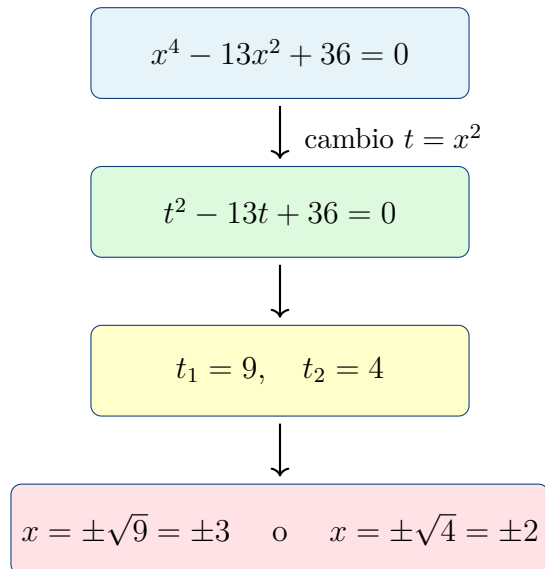
La respuesta correcta es **b)** $x_1 = 0$, $x_2 = -4$, $x_3 = 1$

2.8 Ejercicio 8 – Ecuación Bicuadrada

Enunciado: Resuelve la ecuación bicuadrada: $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Fundamento Teórico

Una **ecuación bicuadrada** tiene la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, sin términos de grado impar. Se resuelve mediante el cambio de variable $t = x^2$ (con $t \geq 0$), que la transforma en la ecuación de segundo grado $at^2 + bt + c = 0$. Una vez obtenidas las soluciones t_1 y t_2 , se recupera x tomando las raíces cuadradas: $x = \pm\sqrt{t_i}$ (solo si $t_i \geq 0$).



Solución

Paso 1: Cambio de variable. Sea $t = x^2$. Entonces $x^4 = t^2$, y la ecuación queda:

$$t^2 - 13t + 36 = 0$$

Paso 2: Resolvemos la ecuación de segundo grado en t usando la fórmula cuadrática:

$$t = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2}$$

$$t_1 = \frac{13 + 5}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$t_2 = \frac{13 - 5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Paso 3: Deshacemos el cambio de variable $t = x^2$:

Para $t_1 = 9$: $x^2 = 9 \implies x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

Para $t_2 = 4$: $x^2 = 4 \implies x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

Paso 4: Soluciones finales:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = -2$$

Verificación para $x = 3$: $3^4 - 13 \cdot 3^2 + 36 = 81 - 117 + 36 = 0 \checkmark$

Verificación para $x = 2$: $2^4 - 13 \cdot 2^2 + 36 = 16 - 52 + 36 = 0 \checkmark$

Respuesta Correcta

La respuesta correcta es **d)** $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 3, x_4 = -3$

2.9 Ejercicio 9 – Ecuación de Segundo Grado

Enunciado: Resuelve $3x^2 - 7x + 2 = 0$.

Fundamento Teórico

Fórmula cuadrática (o fórmula de Bhaskara): Para $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ determina el tipo de soluciones:

- $\Delta > 0$: dos soluciones reales distintas.
- $\Delta = 0$: una solución real doble.
- $\Delta < 0$: sin soluciones reales (dos complejas conjugadas).

Solución

Identificamos los coeficientes: $a = 3$, $b = -7$, $c = 2$.

Paso 1: Calculamos el discriminante:

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 49 - 24 = 25$$

Como $\Delta = 25 > 0$, existen **dos soluciones reales distintas**.

Paso 2: Aplicamos la fórmula:

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 3} = \frac{7 \pm 5}{6}$$

Paso 3: Calculamos cada solución:

$$x_1 = \frac{7+5}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$x_2 = \frac{7-5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Paso 4: Verificación:

$$3(2)^2 - 7(2) + 2 = 12 - 14 + 2 = 0 \checkmark$$

$$3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 7\left(\frac{1}{3}\right) + 2 = \frac{3}{9} - \frac{7}{3} + 2 = \frac{1}{3} - \frac{7}{3} + \frac{6}{3} = 0 \checkmark$$

Respuesta Correcta

La respuesta correcta es **a)** $x_1 = 2$ y $x_2 = \frac{1}{3}$

Observación Pedagógica

Método alternativo – Factorización directa: Como la ecuación tiene coeficientes enteros, podemos intentar factorizar $3x^2 - 7x + 2$ buscando $3x^2 - 7x + 2 = (3x - 1)(x - 2)$. Verificamos: $(3x - 1)(x - 2) = 3x^2 - 6x - x + 2 = 3x^2 - 7x + 2$ ✓. De aquí, $3x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1/3$ y $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$.

2.10 Ejercicio 10 – Ecuación Racional

Enunciado: Resuelve la ecuación racional: $\frac{x}{x-2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2(x-2)}$.

Fundamento Teórico

Para resolver una **ecuación racional** (con fracciones algebraicas):

1. Determinar el dominio: los valores de x que anulan los denominadores quedan excluidos.
2. Calcular el mínimo común múltiplo (mcm) de todos los denominadores.
3. Multiplicar ambos miembros por el mcm para eliminar los denominadores.
4. Resolver la ecuación resultante (que ya no tiene fracciones).
5. Comprobar que las soluciones pertenecen al dominio.

Solución

Paso 1: Dominio. Los denominadores son $(x - 2)$, 2 y $2(x - 2)$. El único valor que anula alguno es $x = 2$. Por tanto:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Paso 2: Mínimo común múltiplo de los denominadores $\{(x - 2), 2, 2(x - 2)\}$:

$$\text{mcm} = 2(x - 2)$$

Paso 3: Multiplicamos toda la ecuación por $2(x - 2)$:

$$\frac{x}{\cancel{x-2}} \cdot \cancel{2(x-2)} - \frac{1}{2} \cdot \cancel{2(x-2)} = \frac{3}{\cancel{2(x-2)}} \cdot \cancel{2(x-2)}$$

Simplificando:

$$2x - (x - 2) = 3$$

Paso 4: Resolvemos la ecuación lineal resultante:

$$2x - x + 2 = 3$$

$$x + 2 = 3$$

$$x = 1$$

Paso 5: Comprobamos que $x = 1 \neq 2$ (pertenece al dominio) ✓.

Verificación en la ecuación original:

$$\frac{1}{1-2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2(1-2)} \implies \frac{1}{-1} - \frac{1}{2} = \frac{3}{-2} \implies -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \implies -\frac{3}{2} = -\frac{3}{2} \checkmark$$

Respuesta Correcta

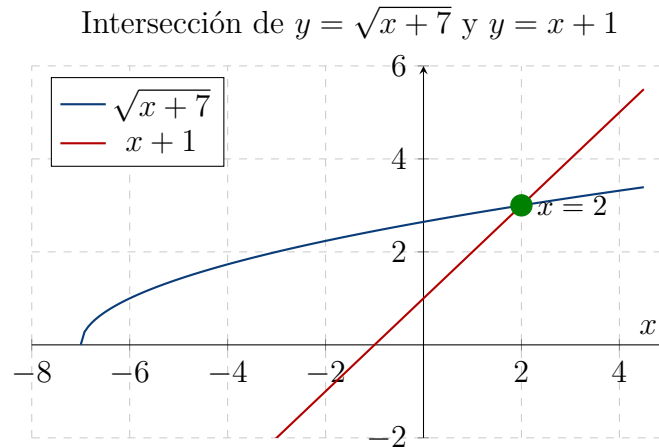
La respuesta correcta es **a)** $x = 1$

Advertencia / Error Frecuente

La opción d) propone $x = 2$, pero ese valor anula los denominadores y, por tanto, **no pertenece al dominio**. Aunque algebraicamente pudiera parecer una solución de la ecuación transformada, es una **solución extrana** y debe rechazarse. Siempre hay que comprobar las soluciones de ecuaciones racionales contra el dominio.

2.11 Ejercicio 11 – Ecuación Radical

Enunciado: Resuelve la ecuación radical: $\sqrt{x+7} = x+1$.



Fundamento Teórico

Para resolver $\sqrt{f(x)} = g(x)$:

1. **Condición de existencia:** $f(x) \geq 0$ (el radicando debe ser no negativo).
2. **Condición de coherencia:** $g(x) \geq 0$ (la raíz cuadrada no puede ser negativa).
3. Elevamos ambos miembros al cuadrado: $f(x) = [g(x)]^2$.
4. Resolvemos la ecuación resultante.
5. **Verificamos todas las soluciones** en la ecuación original (elevar al cuadrado puede introducir soluciones extrañas).

Solución

Paso 1: Condiciones previas:

- Radicando: $x + 7 \geq 0 \implies x \geq -7$.
- Miembro derecho: $x + 1 \geq 0 \implies x \geq -1$.
- Condición más restrictiva: $x \geq -1$.

Paso 2: Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$(\sqrt{x+7})^2 = (x+1)^2 \implies x+7 = x^2 + 2x + 1$$

Paso 3: Reorganizamos:

$$0 = x^2 + 2x + 1 - x - 7 = x^2 + x - 6$$

Paso 4: Resolvemos $x^2 + x - 6 = 0$:

$$\Delta = 1 + 24 = 25 \implies x = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = \frac{4}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{-6}{2} = -3$$

Paso 5: Verificamos cada solución en la ecuación original $\sqrt{x+7} = x+1$:

- $x_1 = 2$: $\sqrt{2+7} = \sqrt{9} = 3 = 2+1$ ✓ (válida)
- $x_2 = -3$: $-3 < -1$, no cumple la condición $x \geq -1$; además, $\sqrt{-3+7} = \sqrt{4} = 2 \neq -3+1 = -2$. **Solución extraña: se rechaza.**

La única solución válida es $x = 2$.

Respuesta Correcta

La respuesta correcta es **c)** $x = 2$

Advertencia / Error Frecuente

$x = -3$ es una **solución extraña** introducida al elevar al cuadrado. Al elevar al cuadrado, eliminamos información sobre signos: $\sqrt{4} = 2$, pero $(-3) + 1 = -2 \neq 2$. Nunca omitir la verificación final en ecuaciones radicales.

2.12 Ejercicio 12 – Ecuación de Segundo Grado Incompleta

Enunciado: Resuelve la ecuación de segundo grado incompleta: $5x^2 - 15x = 0$.

Fundamento Teórico

Una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ es **incompleta** cuando alguno de los coeficientes b o c es cero. En este caso $c = 0$, lo que significa que podemos extraer x como factor común. El tipo $ax^2 + bx = 0$ siempre tiene dos soluciones: $x = 0$ y $x = -b/a$.

Solución

Paso 1: Identificamos el factor común. Los términos $5x^2$ y $-15x$ comparten el factor $5x$:

$$5x^2 - 15x = 5x(x - 3) = 0$$

Paso 2: Aplicamos la propiedad del producto nulo:

$$\begin{aligned} 5x = 0 &\implies x_1 = 0 \\ x - 3 = 0 &\implies x_2 = 3 \end{aligned}$$

Paso 3: Verificación:

$$5(0)^2 - 15(0) = 0\checkmark \quad 5(3)^2 - 15(3) = 45 - 45 = 0\checkmark$$

Respuesta Correcta

La respuesta correcta es **d)** $x_1 = 0$ y $x_2 = 3$

Advertencia / Error Frecuente

Error muy frecuente: dividir ambos miembros por x al principio. Si dividiésemos por x , obtendríamos $5x - 15 = 0$, es decir, solo $x = 3$, y **perderíamos la solución** $x = 0$. Nunca hay que dividir por una expresión que puede ser cero. Siempre se factoriza.

2.13 Ejercicio 13 – Sistema de Ecuaciones Lineales

Enunciado: Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ \frac{x+1}{3} + \frac{y-2}{2} = 3 \end{cases}$$

Solución

Paso 1: Simplificamos la segunda ecuación. Multiplicamos ambos miembros por el mcm de $\{3, 2\}$, que es 6:

$$6 \cdot \frac{x+1}{3} + 6 \cdot \frac{y-2}{2} = 6 \cdot 3$$

$$2(x+1) + 3(y-2) = 18$$

$$2x + 2 + 3y - 6 = 18$$

$$2x + 3y - 4 = 18$$

$$2x + 3y = 22$$

Paso 2: El sistema queda:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 & \text{(I)} \\ 2x + 3y = 22 & \text{(II)} \end{cases}$$

Paso 3: Método de reducción (eliminación). Restamos (I) de (II):

$$(2x + 3y) - (2x - y) = 22 - 4$$

$$2x + 3y - 2x + y = 18$$

$$4y = 18$$

$$y = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

Paso 4: Sustituimos $y = \frac{9}{2}$ en (I):

$$2x - \frac{9}{2} = 4 \implies 2x = 4 + \frac{9}{2} = \frac{8}{2} + \frac{9}{2} = \frac{17}{2} \implies x = \frac{17}{4}$$

Paso 5: Verificación en ambas ecuaciones:

$$\text{Ecuación (I): } 2 \cdot \frac{17}{4} - \frac{9}{2} = \frac{17}{2} - \frac{9}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \checkmark$$

$$\text{Ecuación original (II): } \frac{\frac{17}{4} + 1}{3} + \frac{\frac{9}{2} - 2}{2} = \frac{\frac{21}{4}}{3} + \frac{\frac{5}{2}}{2} = \frac{21}{12} + \frac{5}{4} = \frac{7}{4} + \frac{5}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

✓

Respuesta Correcta

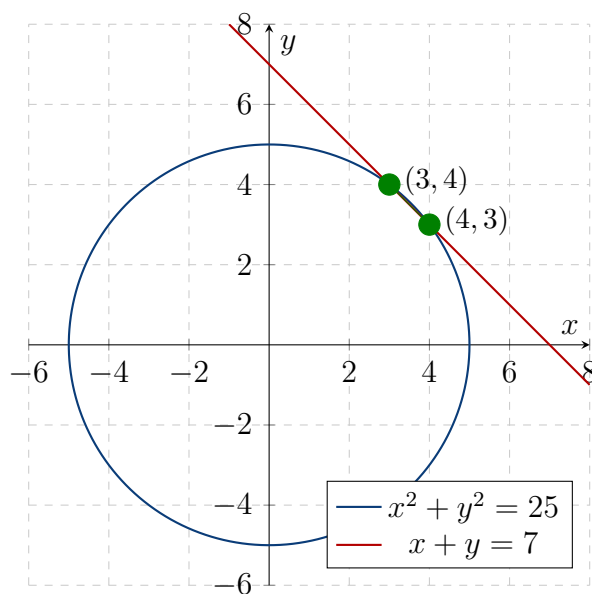
La respuesta correcta es **a)** $x = \frac{17}{4}$ y $y = \frac{9}{2}$

2.14 Ejercicio 14 – Sistema de Ecuaciones No Lineal

Enunciado: Resuelve el sistema por sustitución:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

Intersección de la circunferencia y la recta



Solución

Paso 1: De la segunda ecuación, despejamos y :

$$y = 7 - x$$

Paso 2: Sustituimos en la primera ecuación:

$$x^2 + (7 - x)^2 = 25$$

Paso 3: Desarrollamos $(7 - x)^2 = 49 - 14x + x^2$:

$$x^2 + 49 - 14x + x^2 = 25$$

$$2x^2 - 14x + 49 = 25$$

$$2x^2 - 14x + 24 = 0$$

Paso 4: Dividimos toda la ecuación por 2:

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

Paso 5: Factorizamos: buscamos p, q con $p + q = -7$ y $pq = 12$. Son $p = -3$ y $q = -4$:

$$(x - 3)(x - 4) = 0$$

$$x_1 = 3 \quad \text{o} \quad x_2 = 4$$

Paso 6: Calculamos los valores de y correspondientes:

- Si $x_1 = 3$: $y_1 = 7 - 3 = 4$. Solución: $(3, 4)$.
- Si $x_2 = 4$: $y_2 = 7 - 4 = 3$. Solución: $(4, 3)$.

Paso 7: Verificación: $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \checkmark$; $3 + 4 = 7 \checkmark$.

Respuesta Correcta

La respuesta correcta es **d)** $x_1 = 3, y_1 = 4$ y $x_2 = 4, y_2 = 3$

Observación Pedagógica

Geométricamente, la primera ecuación representa una **circunferencia de radio 5 centrada en el origen**, y la segunda es una **recta**. El sistema tiene dos soluciones porque la recta es secante a la circunferencia (la corta en dos puntos).

2.15 Ejercicio 15 – Problema con Sistema de Ecuaciones

Enunciado: La diferencia de dos números es 6 y el triple del primero sumado con el doble del segundo es 32. ¿Qué números son?

Solución

Paso 1: Identificación de incógnitas. Llamamos:

- x : el primer número (el mayor, ya que su diferencia con el segundo es positiva).
- y : el segundo número.

Paso 2: Traducción al lenguaje algebraico.

- “La diferencia de dos números es 6”: $x - y = 6$.
- “El triple del primero sumado con el doble del segundo es 32”: $3x + 2y = 32$.

El sistema es:

$$\begin{cases} x - y = 6 & \text{(I)} \\ 3x + 2y = 32 & \text{(II)} \end{cases}$$

Paso 3: Resolución por sustitución. De (I): $x = y + 6$.

Sustituimos en (II):

$$3(y + 6) + 2y = 32 \implies 3y + 18 + 2y = 32 \implies 5y = 14 \implies y = \frac{14}{5}$$

Paso 4: Calculamos x :

$$x = y + 6 = \frac{14}{5} + 6 = \frac{14}{5} + \frac{30}{5} = \frac{44}{5}$$

Paso 5: Verificación:

$$x - y = \frac{44}{5} - \frac{14}{5} = \frac{30}{5} = 6 \checkmark$$

$$3 \cdot \frac{44}{5} + 2 \cdot \frac{14}{5} = \frac{132}{5} + \frac{28}{5} = \frac{160}{5} = 32 \checkmark$$

Respuesta Correcta

La respuesta correcta es **d)** $x = \frac{44}{5}$ y $y = \frac{14}{5}$

Advertencia / Error Frecuente

Los enunciados de problemas pueden llevar a pensar que las soluciones deben ser números enteros. Sin embargo, no hay ninguna restricción que lo exija si no se indica explícitamente. Las opciones a), b) y c) parecen más “redondas”, pero ninguna satisface las dos condiciones del enunciado. Siempre hay que verificar.

2.16 Ejercicio 16 – Inecuación Lineal

Enunciado: Resuelve la inecuación y expresa la solución en forma de intervalo:
 $5x - 3(x + 1) \leq 2x + 7$.

Fundamento Teórico

Las **inecuaciones lineales** se resuelven como las ecuaciones lineales, con una regla adicional importante: al multiplicar o dividir ambos miembros por un número **negativo**, el sentido de la desigualdad **se invierte**. La solución es un intervalo (o unión de intervalos).

Solución: $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$



Solución

Paso 1: Simplificamos el miembro izquierdo distribuyendo el -3 :

$$5x - 3(x + 1) = 5x - 3x - 3 = 2x - 3$$

La inecuación queda:

$$2x - 3 \leq 2x + 7$$

Paso 2: Trasladamos términos con x a la izquierda:

$$2x - 2x - 3 \leq 7$$

$$-3 \leq 7$$

Paso 3: Interpretación. La expresión $-3 \leq 7$ es una **desigualdad verdadera** que no depende de x . Esto significa que la inecuación es satisfecha por **cualquier valor real de x** .

La solución es $x \in (-\infty, +\infty)$, es decir, todos los reales.

Respuesta Correcta

La respuesta correcta es **c)** $(-\infty, +\infty)$

Observación Pedagógica

Cuando al resolver una inecuación los términos con x se cancelan y queda una desigualdad:

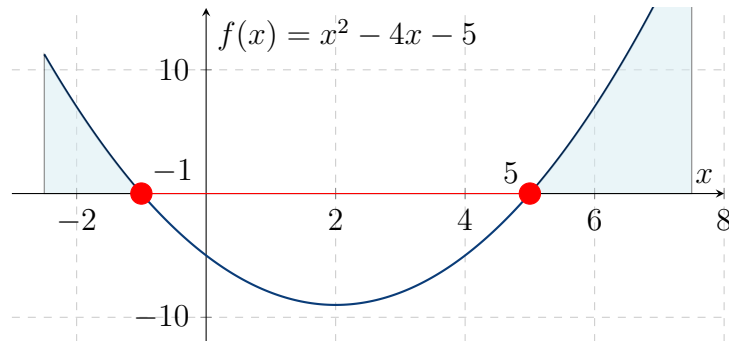
- **Verdadera** (como $-3 \leq 7$): la solución es $\mathbb{R}$ (todos los reales).
- **Falsa** (como $5 \leq 2$): la inecuación no tiene solución ($\emptyset$).

Esto es análogo a lo que ocurre con los sistemas de ecuaciones incompatibles o indeterminados.

2.17 Ejercicio 17 – Inecuación de Segundo Grado

Enunciado: Resuelve la inecuación de segundo grado: $x^2 - 4x - 5 \geq 0$.

Parábola $f(x) = x^2 - 4x - 5$. Buscamos dónde $f(x) \geq 0$ (zona sombreada)



Fundamento Teórico

Para resolver $ax^2 + bx + c \geq 0$ (con $a > 0$):

1. Hallamos las raíces $x_1 \leq x_2$ de $ax^2 + bx + c = 0$.
2. La parábola tiene ramas ascendentes (abre hacia arriba, pues $a > 0$).
3. $f(x) \geq 0$ fuera del intervalo entre las raíces: $x \leq x_1$ o $x \geq x_2$.
4. En forma de intervalo: $(-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$.

Solución

Paso 1: Hallamos las raíces de $x^2 - 4x - 5 = 0$:

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(-5) = 16 + 20 = 36$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}$$

$$x_1 = \frac{4 - 6}{2} = -1, \quad x_2 = \frac{4 + 6}{2} = 5$$

Paso 2: La parábola $f(x) = x^2 - 4x - 5$ tiene coeficiente principal $a = 1 > 0$, por tanto **abre hacia arriba**.

Paso 3: Análisis de signo de $f(x) = (x + 1)(x - 5)$:

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 5$	$x = 5$	$x > 5$
$(x + 1)$	−	0	+	+	+
$(x - 5)$	−	−	−	0	+
$f(x)$	+	0	−	0	+

Paso 4: La inecuación $f(x) \geq 0$ se cumple cuando $f(x)$ es positivo o nulo, es decir:

$$x \leq -1 \quad \text{o} \quad x \geq 5$$

La solución en notación de intervalo es:

$$(-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$$

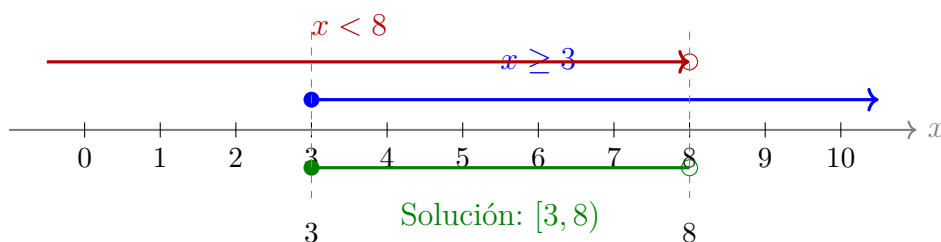
Respuesta Correcta

La respuesta correcta es **c)** $(-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$

2.18 Ejercicio 18 – Sistema de Inecuaciones

Enunciado: Resuelve el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 2(x+3) \leq 4x \\ \frac{x}{2} - 1 < 3 \end{cases}$$



Fundamento Teórico

Un **sistema de inecuaciones** se resuelve resolviendo cada inecuación por separado y tomando la **intersección** de las soluciones (el conjunto de valores que satisfacen **todas** las inecuaciones simultáneamente).

Solución

Primera inecuación: $2(x+3) \leq 4x$

Distribuimos:

$$2x + 6 \leq 4x$$

Trasladamos términos:

$$6 \leq 4x - 2x \implies 6 \leq 2x \implies 3 \leq x$$

Solución: $x \geq 3$, es decir, $[3, +\infty)$.

Segunda inecuación: $\frac{x}{2} - 1 < 3$

Sumamos 1 a ambos miembros:

$$\frac{x}{2} < 4$$

Multiplicamos por 2 (número positivo, el sentido **no cambia**):

$$x < 8$$

Solución: $(-\infty, 8)$.

Intersección de ambas soluciones:

$$[3, +\infty) \cap (-\infty, 8) = [3, 8)$$

El intervalo $[3, 8)$ incluye el 3 (extremo cerrado, pues $x \geq 3$) pero excluye el 8 (extremo abierto, pues $x < 8$).

Respuesta Correcta

La respuesta correcta es **d)** $[3, 8)$

Observación Pedagógica

El intervalo $[3, 8)$ se llama **semiabierto por la derecha**: el 3 pertenece a la solución (3 cumple $3 \leq 3$, así que $x = 3$ es una solución), pero el 8 no ($\frac{8}{2} - 1 = 3$, que no es estrictamente menor que 3).

Capítulo 3

Tabla de Respuestas Correctas y Resumen

3.1 Tabla de Respuestas

Pregunta	Respuesta	Tema	Resultado
1	c)	Teorema del Resto	$k = 1$
2	b)	Regla de Ruffini	$C'(x) = x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 74x + 226$; $R = -$
3	c)	Valor numérico	$Q(-3) = -677$
4	d)	Identidades notables	$5x^2 - 30x + 26$
5	b)	División de polinomios	$C(x) = 3x^2 - 2x - 11$; $R(x) = -3x + 26$
6	a)	Operaciones combinadas	$x^3 - 3x^2 - 8x + 4$
7	b)	Ecuación polinómica	$x = 0$, $x = -4$, $x = 1$
8	d)	Ecuación bicuadrada	$x = \pm 2$, $x = \pm 3$
9	a)	Ec. segundo grado	$x = 2$, $x = 1/3$
10	a)	Ecuación racional	$x = 1$
11	c)	Ecuación radical	$x = 2$
12	d)	Ec. incompleta	$x = 0$, $x = 3$
13	a)	Sistema lineal	$x = 17/4$, $y = 9/2$
14	d)	Sistema no lineal	$(3, 4)$ y $(4, 3)$
15	d)	Problema con sistema	$x = 44/5$, $y = 14/5$
16	c)	Inecuación lineal	$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$
17	c)	Inecuación cuadrática	$(-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$
18	d)	Sistema de inecuaciones	$[3, 8)$

3.2 Advertencias Globales y Consejos de Estudio

- Teorema del Resto:** Siempre evaluar en el valor correcto. Si el divisor es $(x - a)$, evaluar en $+a$.
- Ruffini con términos ausentes:** Incluir siempre un cero por cada potencia que falta. Es el error más común.
- Identidades notables:** Memorizar las tres fórmulas y aplicarlas sin desarrollar manualmente si se reconoce el patrón.

4. **Signos al restar paréntesis:** Al restar un polinomio entre paréntesis, el signo de **cada término** cambia.
5. **Ecuaciones bicuadradas:** El cambio $t = x^2$ es obligatorio. Recordar que $t \geq 0$ siempre.
6. **Ecuaciones racionales:** Determinar el dominio **antes** de operar, y verificar las soluciones al final.
7. **Ecuaciones radicales:** Elevar al cuadrado puede introducir soluciones extrañas. **Siempre verificar.**
8. **Inecuaciones con número negativo:** Al multiplicar/dividir por un número negativo, el sentido de la desigualdad se invierte.
9. **Inecuaciones de segundo grado:** Analizar el signo del coeficiente principal y el signo de la parábola en cada zona.
10. **Sistemas de inecuaciones:** La solución es la **intersección** (valores que cumplen **todas** las inecuaciones).

¡MUCHO ÁNIMO EN EL EXAMEN!

Ejercicios de Repaso Intensivo de Matemáticas - 4º ESO

Ladislao Jáñez Blanco

Curso 2025-2026

Resumen

Este documento contiene 70 ejercicios de repaso para la asignatura de Matemáticas de 4º de ESO, cubriendo temas de Números Reales, Polinomios, Ecuaciones, Sistemas e Inecuaciones.

Índice

1. SECCIÓN A: NÚMEROS REALES	2
1.1. N1. Clasificación y Representación de Números	2
1.2. N2. Intervalos y Errores	2
1.3. N3. Operaciones con Radicales I	3
1.4. N4. Racionalización y Notación Científica	4
2. SECCIÓN B: POLINOMIOS Y ECUACIONES	4
2.1. N5. Polinomios y Teorema del Resto	4
2.2. N6. Operaciones con Polinomios	5
2.3. N7. Ecuaciones de Segundo Grado y Polinómicas	6
2.4. N8. Ecuaciones Racionales y Radicales	7
2.5. N9. Sistemas de Ecuaciones I	8
2.6. N10. Sistemas de Ecuaciones II	9
3. SECCIÓN C: INECUACIONES Y LOGARITMOS	10
3.1. N11. Inecuaciones y Logaritmos	10

1. SECCIÓN A: NÚMEROS REALES

1.1. N1. Clasificación y Representación de Números

1.

1. Clasifica los siguientes números en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{I}$: -12 , $\frac{4}{5}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{7}$, $0,05$
2. Indica si los siguientes números pertenecen al conjunto de los reales ($\mathbb{R}$): $\frac{9}{0}$, $\frac{1}{\pi}$, $\sqrt{-9}$
3. Escribe la fracción generatriz del número decimal $0.\overline{5}$

2.

1. Clasifica los siguientes números en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{I}$: $\frac{10}{2}$, $-3,14$, $\sqrt[3]{-8}$, $0,101001000\dots$, $-\frac{7}{4}$
2. Indica si los siguientes números pertenecen al conjunto de los reales ($\mathbb{R}$): $\sqrt[4]{-16}$, e , -100
3. Escribe la fracción generatriz del número decimal $1,25$

3.

1. Clasifica los siguientes números en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{I}$: $\sqrt{81}$, $-\sqrt{10}$, $2,71\overline{71}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2\pi}{\pi}$
2. Indica si los siguientes números pertenecen al conjunto de los reales ($\mathbb{R}$): $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, $\sqrt[6]{-1}$, 0
3. Escribe la fracción generatriz del número decimal $2,1\overline{3}$

4.

1. Clasifica los siguientes números en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{I}$: $\sqrt{12}$, $-2,5$, $\frac{0}{8}$, $0,001$, $\frac{-18}{3}$
2. Indica si los siguientes números pertenecen al conjunto de los reales ($\mathbb{R}$): i^2 , $\frac{5}{\sqrt{5}}$, -20
3. Escribe la fracción generatriz del número decimal $0.\overline{9}$

5.

1. Clasifica los siguientes números en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{I}$: 5 , 0 , $\sqrt[3]{27}$, $-0,8$, π
2. Indica si los siguientes números pertenecen al conjunto de los reales ($\mathbb{R}$): $\frac{7}{1}$, $\sqrt{-25}$, 10^{20}
3. Escribe la fracción generatriz del número decimal $0,4\overline{7}$

1.2. N2. Intervalos y Errores

6.

1. Representa en la recta real el intervalo $A = (-2, 4]$ y la semirrecta $B = (-\infty, 1)$.
2. Escribe el conjunto $\{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x < 5\}$ en forma de intervalo.
3. Al medir 25 m, el error absoluto es 0,5 m. Calcula el error relativo en porcentaje.

7.

1. Representa en la recta real el intervalo $A = [3, 7]$ y la semirrecta $B = [-1, +\infty)$.
2. Escribe el conjunto $\{x \in \mathbb{R} | x > -3\}$ en forma de intervalo.
3. Una medida es 150 kg y el error absoluto es 0,3 kg. Calcula el error relativo en porcentaje.

8.

1. Representa en la recta real el intervalo $A = [-1, 3)$ y la semirrecta $B = (2, +\infty)$.
2. Escribe el conjunto $\{x \in \mathbb{R} | -4 < x \leq -1\}$ en forma de intervalo.
3. Si el error relativo de una medida es 0,005 y la medida es 40 cm, calcula el error absoluto.

9.

1. Representa en la recta real el intervalo $A = (-3, 0)$ y la semirrecta $B = (-\infty, -2]$.
2. Escribe el conjunto $\{x \in \mathbb{R} | x \leq 6\}$ en forma de intervalo.
3. Calcula el error absoluto y relativo si la medida real es 1,5 L y la medida obtenida es 1,53 L.

10.

1. Representa en la recta real el intervalo $A = [0, 1]$ y la semirrecta $B = (5, +\infty)$.
2. Escribe el conjunto $\{x \in \mathbb{R} | x \geq -10\}$ en forma de intervalo.
3. Una medida es 8,2 m y el error relativo es 0,1 %. Calcula el error absoluto.

1.3. N3. Operaciones con Radicales I

11.

1. Simplifica al máximo la expresión, extrayendo factores: $\sqrt{125}$.
2. Realiza la siguiente multiplicación de radicales: $2\sqrt{3} \cdot \sqrt{15}$.
3. Realiza la siguiente suma y simplifica: $\sqrt{20} + \sqrt{45}$.

12.

1. Simplifica al máximo la expresión, extrayendo factores: $\sqrt{98}$.
2. Realiza la siguiente multiplicación de radicales: $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16}$.
3. Realiza la siguiente resta y simplifica: $3\sqrt{8} - \sqrt{50}$.

13.

1. Simplifica al máximo la expresión, extrayendo factores: $\sqrt{243}$.
2. Introduce los factores dentro del radical y simplifica: $5\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{10}$.
3. Realiza y simplifica: $\sqrt{18} - \sqrt{72} + \sqrt{2}$.

14.

1. Simplifica al máximo la expresión, extrayendo factores: $\sqrt{450}$.
2. Introduce los factores dentro del radical: $2\sqrt[4]{3}$.
3. Realiza y simplifica: $2\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{3}$.

15.

1. Simplifica al máximo la expresión, extrayendo factores: $\sqrt[3]{54}$.
2. Realiza la siguiente operación con distinto índice (deja el resultado con un solo radical): $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2}$.
3. Realiza y simplifica: $\sqrt{1000} - 4\sqrt{10} + \sqrt{40}$.

1.4. N4. Racionalización y Notación Científica

16.

1. Racionaliza y simplifica: $\frac{10}{\sqrt{2}}$.
2. Racionaliza y simplifica: $\frac{1}{\sqrt{7}-2}$.
3. Realiza la operación en notación científica: $(3 \times 10^4) \cdot (5 \times 10^{-7})$.

17.

1. Racionaliza y simplifica: $\frac{9}{2\sqrt{3}}$.
2. Racionaliza y simplifica: $\frac{6}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.
3. Realiza la operación en notación científica: $\frac{8 \times 10^9}{2,5 \times 10^3}$.

18.

1. Racionaliza y simplifica: $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$.
2. Racionaliza y simplifica: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$.
3. Realiza la operación en notación científica: $(1,5 \times 10^{-2}) + (3,2 \times 10^{-3})$.

19.

1. Racionaliza y simplifica: $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$.
2. Racionaliza y simplifica: $\frac{5}{3-\sqrt{5}}$.
3. Realiza la operación en notación científica: $(7,2 \times 10^6) - (4 \times 10^5)$.

20.

1. Racionaliza y simplifica: $\frac{4}{3\sqrt{8}}$.
2. Racionaliza y simplifica: $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$.
3. Realiza la operación en notación científica: $(2 \times 10^5)^3$.

2. SECCIÓN B: POLINOMIOS Y ECUACIONES

2.1. N5. Polinomios y Teorema del Resto

21.

1. Dado $P(x) = x^3 - 5x^2 + kx - 1$, calcula k para que el resto de la división $P(x) : (x - 1)$ sea 5.
2. Utiliza la Regla de Ruffini para dividir $x^4 - 2x^3 + 4x - 8$ entre $(x - 2)$, e indica el cociente y el resto.
3. Indica el valor numérico del polinomio $Q(x) = 3x^3 - x^2 + 5$ en $x = -1$.

22.

1. Dado $P(x) = 2x^4 + kx^3 - x + 7$, calcula k para que el resto de la división $P(x) : (x + 2)$ sea 9.
2. Utiliza la Regla de Ruffini para dividir $x^5 + 3x^3 - 6x + 10$ entre $(x + 1)$, e indica el cociente y el resto.
3. Indica el valor numérico del polinomio $Q(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$ en $x = 3$.

23.

1. Dado $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + k$, calcula k para que $x = -3$ sea una raíz del polinomio.
2. Utiliza la Regla de Ruffini para dividir $2x^3 - 5x^2 + 7$ entre $(x - 3)$, e indica el cociente y el resto.
3. Indica el valor numérico del polinomio $Q(x) = x^5 - 2x^4 + x - 5$ en $x = 2$.

24.

1. Dado $P(x) = 3x^4 - x^3 + kx^2 - 2x + 1$, calcula k para que el resto de la división $P(x) : (x + 1)$ sea 8.
2. Utiliza la Regla de Ruffini para dividir $x^3 - 8$ entre $(x - 2)$, e indica el cociente y el resto.
3. Indica el valor numérico del polinomio $Q(x) = 5x^2 - 4x + 2$ en $x = -2$.

25.

1. Dado $P(x) = x^4 - kx^2 + 2x - 1$, calcula k para que $P(1) = 0$.
2. Utiliza la Regla de Ruffini para dividir $4x^3 + x^2 - 3x + 1$ entre $(x + 1)$, e indica el cociente y el resto.
3. Indica el valor numérico del polinomio $Q(x) = x^6 - x^5 - x$ en $x = 1$.

2.2. N6. Operaciones con Polinomios

26.

1. Desarrolla y simplifica: $(x + 4)^2 - (x - 3)(x + 3)$.
2. Realiza la siguiente división de polinomios: $(x^3 + 2x^2 - 5x + 2) : (x^2 - x + 1)$. Indica el cociente y el resto.
3. Realiza la siguiente operación: $3(x^2 - 1) - (x - 2)^2 \cdot x$.

27.

1. Desarrolla y simplifica: $(2x - 1)^2 + (x + 5)^2$.
2. Realiza la siguiente división de polinomios: $(2x^4 - 3x^3 + x - 5) : (x^2 + 2x - 3)$. Indica el cociente y el resto.
3. Realiza la siguiente operación: $x^2(x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1)$.

28.

1. Desarrolla y simplifica: $(x^2 + 2)^2 - 4x^2$.
2. Realiza la siguiente división de polinomios: $(4x^3 + 2x^2 - 1) : (2x^2 - x)$. Indica el cociente y el resto.
3. Realiza la siguiente operación: $5x(x^2 + 3) - (2x + 3)(x^2 - x)$.

29.

1. Desarrolla y simplifica: $(x - 2)(x + 2) - (x - 5)^2$.
2. Realiza la siguiente división de polinomios: $(3x^5 - x^4 + 2x^2 + x) : (x^3 - x + 2)$. Indica el cociente y el resto.
3. Realiza la siguiente operación: $x(x^2 + 1)^2 - x^5 - 2x^3$.

30.

1. Desarrolla y simplifica: $(3x + 2)(3x - 2) - (x + 1)^2$.
2. Realiza la siguiente división de polinomios: $(x^4 - 1) : (x^2 + 1)$. Indica el cociente y el resto.
3. Realiza la siguiente operación: $(x^2 - 3x + 1) \cdot (x + 2) - x^3$.

2.3. N7. Ecuaciones de Segundo Grado y Polinómicas

31.

1. Resuelve la ecuación factorizando primero: $x^3 - 4x^2 - 5x = 0$.
2. Resuelve la ecuación bicuadrada: $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.
3. Resuelve la ecuación de segundo grado: $2x^2 + x - 3 = 0$.

32.

1. Resuelve la ecuación factorizando primero: $3x^4 - 12x^2 = 0$.
2. Resuelve la ecuación bicuadrada: $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$.
3. Resuelve la ecuación de segundo grado: $x^2 - 6x + 5 = 0$.

33.

1. Resuelve la ecuación factorizando primero: $x^3 - 2x^2 + x = 0$.
2. Resuelve la ecuación bicuadrada: $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$.
3. Resuelve la ecuación de segundo grado: $3x^2 + 5x - 2 = 0$.

34.

1. Resuelve la ecuación factorizando primero: $2x^3 + x^2 - x = 0$.
2. Resuelve la ecuación bicuadrada: $x^4 + x^2 - 2 = 0$.
3. Resuelve la ecuación de segundo grado: $x^2 + 7x + 10 = 0$.

35.

1. Resuelve la ecuación factorizando primero: $x^4 - 8x^3 + 16x^2 = 0$.
2. Resuelve la ecuación bicuadrada: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.
3. Resuelve la ecuación de segundo grado: $5x^2 - 8x + 3 = 0$.

36.

1. Resuelve la ecuación factorizando primero: $x^3 + 6x^2 + 9x = 0$.
2. Resuelve la ecuación bicuadrada: $9x^4 - 13x^2 + 4 = 0$.
3. Resuelve la ecuación de segundo grado: $x^2 - 2x - 15 = 0$.

37.

1. Resuelve la ecuación factorizando primero: $x^4 - x^3 = 0$.
2. Resuelve la ecuación bicuadrada: $x^4 - 13x^2 + 42 = 0$.
3. Resuelve la ecuación de segundo grado: $-x^2 + 3x + 4 = 0$.

38.

1. Resuelve la ecuación factorizando primero: $2x^4 - 18x^2 = 0$.
2. Resuelve la ecuación bicuadrada: $x^4 - 6x^2 - 27 = 0$.
3. Resuelve la ecuación de segundo grado: $x^2 + 10x + 25 = 0$.

39.

1. Resuelve la ecuación factorizando primero: $4x^3 - 16x = 0$.
2. Resuelve la ecuación bicuadrada: $x^4 - 16 = 0$.
3. Resuelve la ecuación de segundo grado: $x^2 + x + 1 = 0$.

40.

1. Resuelve la ecuación factorizando primero: $x^3 + x^2 - 2x = 0$.
2. Resuelve la ecuación bicuadrada: $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$.
3. Resuelve la ecuación de segundo grado: $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

2.4. N8. Ecuaciones Racionales y Radicales

41.

1. Resuelve la ecuación racional: $\frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{2(x+1)}$.
2. Resuelve la ecuación radical: $\sqrt{2x+3} = x$.
3. Resuelve la ecuación de segundo grado incompleta: $3x^2 - 6x = 0$.

42.

1. Resuelve la ecuación racional: $\frac{x}{x-3} + \frac{2}{3} = \frac{2x}{3(x-3)}$.
2. Resuelve la ecuación radical: $\sqrt{x-1} = x-7$.
3. Resuelve la ecuación de segundo grado incompleta: $4x^2 - 16 = 0$.

43.

1. Resuelve la ecuación racional: $\frac{1}{x} + \frac{x-2}{3x} = \frac{1}{6}$.
2. Resuelve la ecuación radical: $\sqrt{x+2} + 4 = x$.
3. Resuelve la ecuación de segundo grado incompleta: $2x^2 + 5x = 0$.

44.

1. Resuelve la ecuación racional: $\frac{x}{x-2} - 2 = \frac{3}{x-2}$.
2. Resuelve la ecuación radical: $\sqrt{x^2 - x + 4} = 2$.
3. Resuelve la ecuación de segundo grado incompleta: $x^2 - 9 = 0$.

45.

1. Resuelve la ecuación racional: $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x^2-1}$.
2. Resuelve la ecuación radical: $\sqrt{x} + 1 = x - 5$.
3. Resuelve la ecuación de segundo grado incompleta: $x^2 - 11x = 0$.

46.

1. Resuelve la ecuación racional: $\frac{2}{x-1} = 1 + \frac{1}{x}$.
2. Resuelve la ecuación radical: $\sqrt{3x+4} = 4$.
3. Resuelve la ecuación de segundo grado incompleta: $-x^2 + 49 = 0$.

47.

1. Resuelve la ecuación racional: $x + \frac{1}{x} = 2$.
2. Resuelve la ecuación radical: $\sqrt{x-5} = x-7$.
3. Resuelve la ecuación de segundo grado incompleta: $x^2 + 7x = 0$.

48.

1. Resuelve la ecuación racional: $\frac{x-1}{x+2} - \frac{x}{x-2} = \frac{x+4}{x^2-4}$.
2. Resuelve la ecuación radical: $x - \sqrt{x} = 6$.
3. Resuelve la ecuación de segundo grado incompleta: $5x^2 - 20 = 0$.

49.

1. Resuelve la ecuación racional: $\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x(x-3)}$.

2. Resuelve la ecuación radical: $2\sqrt{x+1} = x+1$.
3. Resuelve la ecuación de segundo grado incompleta: $x^2 = 10x$.

50.

1. Resuelve la ecuación racional: $\frac{2x}{x+1} + \frac{1}{x} = 2$.
2. Resuelve la ecuación radical: $\sqrt{x+5} - x = -1$.
3. Resuelve la ecuación de segundo grado incompleta: $3x^2 = 75$.

2.5. N9. Sistemas de Ecuaciones I

51.

1. Resuelve el sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ \frac{x}{2} - \frac{y-1}{3} = 2 \end{cases}$$
2. Resuelve el sistema no lineal por sustitución:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$$
3. Problema: La suma de dos números es 15 y su diferencia es 3. ¿Qué números son?

52.

1. Resuelve el sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} x - 2y = -4 \\ \frac{2x+1}{5} + \frac{y}{2} = 2 \end{cases}$$
2. Resuelve el sistema no lineal por sustitución:
$$\begin{cases} x \cdot y = 12 \\ x + y = 8 \end{cases}$$
3. Problema: En un corral hay gallinas y conejos. Si contamos 30 cabezas y 80 patas, ¿cuántos animales hay de cada tipo?

53.

1. Resuelve el sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ \frac{x-3}{2} + \frac{y+2}{4} = 1 \end{cases}$$
2. Resuelve el sistema no lineal por sustitución:
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16 \\ x + y = 8 \end{cases}$$
3. Problema: Un padre tiene el triple de edad que su hijo. Si la suma de sus edades es 60 años, ¿qué edad tiene cada uno?

54.

1. Resuelve el sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ \frac{x+1}{3} - \frac{y-2}{2} = 1 \end{cases}$$
2. Resuelve el sistema no lineal por sustitución:
$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$
3. Problema: Por 3 bolígrafos y 2 cuadernos he pagado 7 €. Si un bolígrafo cuesta 0,5 € más que un cuaderno, ¿cuál es el precio de cada artículo?

55.

1. Resuelve el sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} 2x - 5y = 9 \\ 3(x + y) - 2y = 4 \end{cases}$$
2. Resuelve el sistema no lineal por sustitución:
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$
3. Problema: El perímetro de un rectángulo es 20 cm y su área es 24 cm². Calcula las dimensiones del rectángulo.

2.6. N10. Sistemas de Ecuaciones II

56.

1. Resuelve el sistema de ecuaciones lineales por sustitución:
$$\begin{cases} x - 3y = 7 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$
2. Resuelve el sistema no lineal por igualación:
$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = 3x \end{cases}$$
3. Problema: La edad de Juan es el doble que la de Pedro. Hace 10 años, la edad de Juan era el triple que la de Pedro. ¿Qué edades tienen actualmente?

57.

1. Resuelve el sistema de ecuaciones lineales por igualación:
$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 4y = 4 \end{cases}$$
2. Resuelve el sistema no lineal por reducción:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ x^2 - y^2 = 21 \end{cases}$$
3. Problema: Dos números suman 10. Si al primero le restamos 3 y al segundo le sumamos 2, los nuevos números son iguales. ¿Cuáles son los números originales?

58.

1. Resuelve el sistema de ecuaciones lineales por reducción:
$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x - 2y = -9 \end{cases}$$
2. Resuelve el sistema no lineal:
$$\begin{cases} x \cdot y = 10 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$
3. Problema: En un examen de 20 preguntas, por cada acierto se suman 5 puntos y por cada fallo se resta 1 punto. Un alumno obtiene 52 puntos. ¿Cuántas preguntas acertó y cuántas falló?

59.

1. Resuelve el sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$
2. Resuelve el sistema no lineal:
$$\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$
3. Problema: La base de un rectángulo mide 3 cm más que la altura. Si el área es 40 cm², calcula las dimensiones.

60.

1. Resuelve el sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} 5x + y = 3 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$$
2. Resuelve el sistema no lineal:
$$\begin{cases} x^2 - xy = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}$$
3. Problema: He pagado 5 € por 1 kg de naranjas y 2 kg de manzanas. Si el kg de manzanas es el doble de caro que el kg de naranjas, ¿cuál es el precio de cada fruta por kg?

3. SECCIÓN C: INECUACIONES Y LOGARITMOS

3.1. N11. Inecuaciones y Logaritmos

61.

1. Resuelve la inecuación lineal y expresa la solución en forma de intervalo: $2(x - 3) \leq x + 1$.
2. Resuelve la inecuación de segundo grado: $x^2 - x - 6 < 0$.
3. Calcula el valor de x : $\log_2 64 = x$.

62.

1. Resuelve la inecuación lineal y expresa la solución en forma de intervalo: $3x + 5 > 5x - 1$.
2. Resuelve la inecuación de segundo grado: $-x^2 + 5x - 4 \geq 0$.
3. Calcula el valor de x : $\log_x 125 = 3$.

63.

1. Resuelve el sistema de inecuaciones:
$$\begin{cases} x - 5 < 0 \\ 2x + 1 \geq 7 \end{cases}$$
2. Resuelve la inecuación de segundo grado: $x^2 + 9 \geq 0$.
3. Aplica las propiedades de los logaritmos para desarrollar: $\log\left(\frac{x^3}{y \cdot z^2}\right)$.

64.

1. Resuelve el sistema de inecuaciones:
$$\begin{cases} 3(x + 1) < 6 \\ \frac{x}{4} - 1 \leq 0 \end{cases}$$
2. Resuelve la inecuación de segundo grado: $x^2 - 2x + 1 < 0$.
3. Calcula: $\log_{10} 1000 + \log_{10} 0,1$.

65.

1. Resuelve la inecuación lineal y expresa la solución en forma de intervalo: $\frac{x}{3} - \frac{1}{2} > \frac{x}{6}$.
2. Resuelve la inecuación de segundo grado: $2x^2 - 8 > 0$.
3. Aplica las propiedades de los logaritmos para desarrollar: $\log(a^4 \cdot \sqrt[3]{b})$.

66.

1. Resuelve el sistema de inecuaciones:
$$\begin{cases} 5x + 1 \leq 11 \\ 3 - x < 2x \end{cases}$$
2. Resuelve la inecuación de segundo grado: $-x^2 + 2x + 3 > 0$.
3. Calcula el valor de x : $\log_4 x = 2$.

67.

1. Resuelve la inecuación lineal y expresa la solución en forma de intervalo: $x - 2(x + 1) \leq 5$.
2. Resuelve la inecuación de segundo grado: $x^2 > 4$.
3. Aplica las propiedades de los logaritmos para desarrollar: $\log\left(\frac{\sqrt{x}}{y^5}\right)$.

68.

1. Resuelve el sistema de inecuaciones:
$$\begin{cases} x + 2 > 0 \\ 5 - x \geq 1 \end{cases}$$

2. Resuelve la inecuación de segundo grado: $x^2 + x + 10 < 0$.

3. Calcula: $3 \log_5 5 - \log_2 8$.

69.

1. Resuelve la inecuación lineal y expresa la solución en forma de intervalo: $4 - x \leq 2(x - 1)$.

2. Resuelve la inecuación de segundo grado: $x^2 - 6x + 8 \leq 0$.

3. Calcula el valor de x : $\log_{10} (2x - 5) = 0$.

70.

1. Resuelve el sistema de inecuaciones:
$$\begin{cases} \frac{x}{2} + 1 \geq 3 \\ 4(x - 1) < 20 \end{cases}$$

2. Resuelve la inecuación de segundo grado: $x^2 - 4x + 4 \leq 0$.

3. Aplica las propiedades de los logaritmos para desarrollar: $\log \left(\frac{100 \cdot a}{\sqrt{b}} \right)$.

Soluciones Detalladas

Ejercicios 1 al 10

Repaso Intensivo de Matemáticas

4º ESO - Opción B

Contenido:

- Sección N1: Clasificación y Representación de Números (Ejercicios 1-5)
- Sección N2: Intervalos y Errores (Ejercicios 6-10)

Profesor: Ladislao Jáñez Blanco

Curso 2025-2026

Este documento contiene soluciones exhaustivas con rigor matemático absoluto, sin omitir ningún paso. Cada ejercicio incluye justificaciones completas, ilustraciones y explicaciones pedagógicas detalladas.

25 de febrero de 2026

Índice

1. Sección N1: Clasificación y Representación de Números	2
1.1. Ejercicio 1	4
1.2. Ejercicio 2	9
1.3. Ejercicio 3	13
1.4. Ejercicio 4	15
1.5. Ejercicio 5	16
2. Sección N2: Intervalos y Errores	18
2.1. Ejercicio 6	20
2.2. Ejercicio 7	22
2.3. Ejercicio 8	23
2.4. Ejercicio 9	24
2.5. Ejercicio 10	25

1. Sección N1: Clasificación y Representación de Números

Fundamentos Teóricos

Antes de resolver los ejercicios, estableceremos los fundamentos teóricos necesarios sobre los conjuntos numéricos.

Definición

Conjuntos Numéricos Fundamentales:

1. **Números Naturales ($\mathbb{N}$):** Son los números que usamos para contar.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Algunos autores no incluyen el 0, pero en este curso lo consideramos parte de $\mathbb{N}$.

2. **Números Enteros ($\mathbb{Z}$):** Incluyen los naturales, sus opuestos (negativos) y el cero.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

3. **Números Racionales ($\mathbb{Q}$):** Son aquellos que pueden expresarse como fracción de dos enteros.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

Incluyen: fracciones, enteros (pueden escribirse con denominador 1) y decimales finitos o periódicos.

4. **Números Irracionales ($\mathbb{I}$):** Son los números reales que NO pueden expresarse como fracción de enteros. Sus expresiones decimales son infinitas y no periódicas. Ejemplos: π , e , $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc.

5. **Números Reales ($\mathbb{R}$):** Es la unión de racionales e irracionales.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Relación de inclusión:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Definición

Fracción Generatriz: Es la fracción que genera un número decimal periódico. Para encontrarla:

- **Decimal exacto:** Se escribe como fracción con denominador potencia de 10.
- **Decimal periódico puro:** El periodo empieza inmediatamente después de la coma.

- **Decimal periódico mixto:** Hay cifras entre la coma y el inicio del periodo.

Teorema**Fórmula para la fracción generatriz:**

Sea $N = a, \overline{bc}$ un número decimal periódico (donde a es la parte entera y $\overline{bc}$ el periodo):

$$\text{Fracción generatriz} = \frac{\text{Número completo} - \text{Parte no periódica}}{\text{Tantos 9 como cifras tenga el periodo seguidos de tantos 0 como cifras tenga el periodo}}$$

1.1. Ejercicio 1

Ejercicio 1

1. Clasifica los siguientes números en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{I}$: -12 , $\frac{4}{5}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{7}$, $0,05$
2. Indica si los siguientes números pertenecen al conjunto de los reales ($\mathbb{R}$): $\frac{9}{0}$, $\frac{1}{\pi}$, $\sqrt{-9}$
3. Escribe la fracción generatriz del número decimal $0,\bar{5}$

Apartado 1

Solución

Enunciado: Clasifica los siguientes números en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{I}$: -12 , $\frac{4}{5}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{7}$, $0,05$

Estrategia: Analizaremos cada número individualmente, identificando sus características.

Desarrollo:

Número 1: -12

- ¿Es natural? NO, porque es negativo. $\mathbb{N}$ solo contiene números no negativos.
- ¿Es entero? SÍ, porque no tiene parte decimal. $-12 \in \mathbb{Z}$
- ¿Es racional? SÍ, porque todo entero es racional: $-12 = \frac{-12}{1}$
- ¿Es irracional? NO, porque ya es racional.

Clasificación: $-12 \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

Número 2: $\frac{4}{5}$

- ¿Es natural? NO, porque no es un número entero.
- ¿Es entero? NO, porque tiene denominador distinto de 1.
- ¿Es racional? SÍ, por definición es una fracción de enteros. $\frac{4}{5} \in \mathbb{Q}$
- ¿Es irracional? NO, porque ya es racional.

Clasificación: $\frac{4}{5} \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

Número 3: $\sqrt{16}$

Primero calculamos el valor:

$$\sqrt{16} = 4$$

porque $4 \times 4 = 16$ y $4 > 0$.

- ¿Es natural? SÍ, $4 \in \mathbb{N}$
- ¿Es entero? SÍ, $4 \in \mathbb{Z}$

- ¿Es racional? SÍ, $4 = \frac{4}{1} \in \mathbb{Q}$
- ¿Es irracional? NO, porque ya es racional.

Clasificación: $\sqrt{16} = 4 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

Número 4: $\sqrt{7}$

Este es un radical que no se puede simplificar porque 7 es un número primo. Para verificar que es irracional, intentemos expresarlo como decimal:

$$\sqrt{7} \approx 2,645751311...$$

Esta expresión decimal es infinita y no periódica.

- ¿Es natural? NO
- ¿Es entero? NO
- ¿Es racional? NO, porque $\sqrt{7}$ no puede expresarse como fracción de enteros.
- ¿Es irracional? SÍ, $\sqrt{7} \in \mathbb{I}$

Clasificación: $\sqrt{7} \in \mathbb{I}, \mathbb{R}$

Número 5: 0,05

Este es un decimal exacto (finito). Podemos expresarlo como fracción:

$$0,05 = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

- ¿Es natural? NO
- ¿Es entero? NO
- ¿Es racional? SÍ, $0,05 = \frac{1}{20} \in \mathbb{Q}$
- ¿Es irracional? NO

Clasificación: $0,05 \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

Resumen final:

- $-12 \in \mathbb{Z}$ (también $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$)
- $\frac{4}{5} \in \mathbb{Q}$ (también $\mathbb{R}$)
- $\sqrt{16} = 4 \in \mathbb{N}$ (también $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$)
- $\sqrt{7} \in \mathbb{I}$ (también $\mathbb{R}$)
- $0,05 \in \mathbb{Q}$ (también $\mathbb{R}$)

Observación**Puntos clave:**

- Todo número natural es también entero, racional y real.
- Todo decimal finito es racional.
- Las raíces de números que no son cuadrados perfectos generalmente son irracionales.
- Un número NO puede ser racional e irracional simultáneamente.

Apartado 2**Solución**

Enunciado: Indica si los siguientes números pertenecen al conjunto de los reales ($\mathbb{R}$): $\frac{9}{0}$, $\frac{1}{\pi}$, $\sqrt{-9}$

Estrategia: Analizaremos si cada expresión está bien definida en los números reales.

Desarrollo:

Número 1: $\frac{9}{0}$

Intentar dividir entre cero es una **operación indefinida** en matemáticas.

Justificación: Supongamos que $\frac{9}{0} = x$ para algún número real x . Entonces:

$$9 = 0 \cdot x = 0$$

Esto es una contradicción, ya que $9 \neq 0$.

Por lo tanto, $\frac{9}{0}$ **NO está definido** y **NO pertenece a $\mathbb{R}$** .

Número 2: $\frac{1}{\pi}$

π (pi) es un número real positivo ($\pi \approx 3,14159\dots$), por lo tanto podemos dividir entre él.

$$\frac{1}{\pi} \approx \frac{1}{3,14159\dots} \approx 0,31831\dots$$

Este número es positivo y está bien definido.

Además, como π es irracional, $\frac{1}{\pi}$ también es irracional (el inverso de un irracional es irracional).

Por lo tanto, $\frac{1}{\pi} \in \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$. **SÍ pertenece a $\mathbb{R}$** .

Número 3: $\sqrt{-9}$

En el conjunto de los números reales, **NO existe** la raíz cuadrada de un número negativo.

Justificación: Si $\sqrt{-9} = x$ para algún $x \in \mathbb{R}$, entonces:

$$x^2 = -9$$

Pero el cuadrado de cualquier número real es siempre no negativo:

- Si $x > 0$, entonces $x^2 > 0$

- Si $x < 0$, entonces $x^2 > 0$
- Si $x = 0$, entonces $x^2 = 0$

Por lo tanto, no existe ningún número real cuyo cuadrado sea -9 .

$\sqrt{-9}$ **NO pertenece a $\mathbb{R}$** .

Nota: En el conjunto de los números complejos, $\sqrt{-9} = 3i$, pero eso está fuera del ámbito de este curso.

Respuesta:

- $\frac{9}{0}$: **NO** pertenece a $\mathbb{R}$ (indefinido)
- $\frac{1}{\pi}$: **SÍ** pertenece a $\mathbb{R}$ (es irracional)
- $\sqrt{-9}$: **NO** pertenece a $\mathbb{R}$ (raíz de número negativo)

Observación

Errores comunes:

- Pensar que $\frac{9}{0} = 0$ o $\frac{9}{0} = \infty$. ¡NO! La división entre cero NO está definida.
- Confundir $\frac{0}{9} = 0$ (esto SÍ está definido) con $\frac{9}{0}$ (NO definido).
- Pensar que $\sqrt{-9} = -3$. ¡NO! No existe en $\mathbb{R}$.

Apartado 3

Solución

Enunciado: Escribe la fracción generatriz del número decimal $0, \overline{5}$

Estrategia: Utilizaremos el método algebraico para decimales periódicos puros.

Desarrollo:

El número $0, \overline{5}$ significa $0, 555555\dots$ (el 5 se repite indefinidamente).

Método 1: Algebraico

Paso 1: Llamemos x al número:

$$x = 0, \overline{5} = 0, 555\dots$$

Paso 2: Multiplicamos ambos lados por 10 (tantos como cifras tenga el periodo, en este caso 1):

$$10x = 5, 555\dots$$

Paso 3: Restamos la primera ecuación de la segunda:

$$10x - x = 5, 555\dots - 0, 555\dots \quad (1)$$

$$9x = 5 \quad (2)$$

$$x = \frac{5}{9} \quad (3)$$

Verificación: Comprobemos dividiendo:

$$5 \div 9 = 0,555... = 0,\overline{5} \quad \checkmark$$

Método 2: Fórmula directa para periódicos puros

Para un decimal periódico puro $0,\overline{a_1a_2...a_n}$:

$$\text{Fracción} = \frac{\text{Periodo}}{\text{Tantos 9 como cifras tenga el periodo}}$$

En nuestro caso:

- Periodo: 5
- Número de cifras del periodo: 1
- Denominador: 9 (un nueve)

$$\text{Fracción generatriz} = \frac{5}{9}$$

Respuesta: $0,\overline{5} = \frac{5}{9}$

Observación

Casos especiales:

- $0,\overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$
- $0,\overline{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$
- $0,\overline{9} = \frac{9}{9} = 1$ (¡sorprendente pero cierto!)
- $0,\overline{12} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$ (periodo de 2 cifras $\rightarrow$ dos nueves)

1.2. Ejercicio 2

Ejercicio 2

1. Clasifica los siguientes números en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{I}$: $\frac{10}{2}$, $-3,14$, $\sqrt[3]{-8}$, $0,101001000\dots$, $-\frac{7}{4}$
2. Indica si los siguientes números pertenecen al conjunto de los reales ($\mathbb{R}$): $\sqrt[4]{-16}$, e , -100
3. Escribe la fracción generatriz del número decimal $1,\overline{25}$

Apartado 1

Solución

Enunciado: Clasifica los siguientes números en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{I}$: $\frac{10}{2}$, $-3,14$, $\sqrt[3]{-8}$, $0,101001000\dots$, $-\frac{7}{4}$

Desarrollo:

Número 1: $\frac{10}{2}$

Primero simplificamos:

$$\frac{10}{2} = 5$$

- ¿Es natural? SÍ, $5 \in \mathbb{N}$
- ¿Es entero? SÍ, $5 \in \mathbb{Z}$
- ¿Es racional? SÍ, $5 = \frac{5}{1} \in \mathbb{Q}$

Clasificación: $\frac{10}{2} = 5 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

Número 2: $-3,14$

Es un decimal exacto (finito). Podemos expresarlo como fracción:

$$-3,14 = -\frac{314}{100} = -\frac{157}{50}$$

- ¿Es natural? NO (es negativo)
- ¿Es entero? NO (tiene parte decimal)
- ¿Es racional? SÍ, $-3,14 \in \mathbb{Q}$

Clasificación: $-3,14 \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

Número 3: $\sqrt[3]{-8}$

Esta es la raíz cúbica de -8 . Buscamos un número que elevado al cubo dé -8 .

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

Por lo tanto: $\sqrt[3]{-8} = -2$

- ¿Es natural? NO (es negativo)
- ¿Es entero? SÍ, $-2 \in \mathbb{Z}$
- ¿Es racional? SÍ, $-2 = \frac{-2}{1} \in \mathbb{Q}$

Clasificación: $\sqrt[3]{-8} = -2 \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

Nota importante: A diferencia de las raíces cuadradas, las raíces cúbicas de números negativos SÍ existen en $\mathbb{R}$, porque un número negativo elevado al cubo sigue siendo negativo.

Número 4: $0,101001000\dots$

Observamos el patrón: después de cada 1 hay un 0, luego dos 0, luego tres 0, etc.

$0,101001000100001\dots$

Este decimal es infinito pero **NO es periódico** (no hay un bloque que se repita indefinidamente).

Por lo tanto, NO puede expresarse como fracción.

Clasificación: $0,101001000\dots \in \mathbb{I}, \mathbb{R}$

Número 5: $-\frac{7}{4}$

Ya está expresado como fracción de enteros.

- ¿Es natural? NO
- ¿Es entero? NO (denominador $\neq 1$)
- ¿Es racional? SÍ, por definición $-\frac{7}{4} \in \mathbb{Q}$

Clasificación: $-\frac{7}{4} \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

Resumen:

- $\frac{10}{2} = 5 \in \mathbb{N}$
- $-3,14 \in \mathbb{Q}$
- $\sqrt[3]{-8} = -2 \in \mathbb{Z}$
- $0,101001000\dots \in \mathbb{I}$
- $-\frac{7}{4} \in \mathbb{Q}$

Apartado 2

Solución

Enunciado: Indica si los siguientes números pertenecen al conjunto de los reales ($\mathbb{R}$): $\sqrt[4]{-16}$, e , -100

Desarrollo:

Número 1: $\sqrt[4]{-16}$

Esta es la raíz cuarta de -16 . Buscamos un número x tal que:

$$x^4 = -16$$

Analicemos las posibilidades:

- Si $x > 0$, entonces $x^4 > 0$
- Si $x < 0$, entonces $x^4 > 0$ (exponente par hace el resultado positivo)
- Si $x = 0$, entonces $x^4 = 0$

En todos los casos, $x^4 \geq 0$, por lo que nunca puede ser -16 .

Conclusión: $\sqrt[4]{-16}$ **NO pertenece a** $\mathbb{R}$

Regla general: Las raíces de índice par de números negativos **NO** existen en $\mathbb{R}$.

Número 2: e

e es el número de Euler, la base de los logaritmos naturales.

$$e \approx 2,718281828\dots$$

Es un número irracional trascendente (no es raíz de ningún polinomio con coeficientes racionales).

Conclusión: $e \in \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$. **SÍ pertenece a** $\mathbb{R}$

Número 3: -100

Es un número entero negativo.

$$-100 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Conclusión: $-100 \in \mathbb{R}$. **SÍ pertenece a** $\mathbb{R}$

Respuesta:

- $\sqrt[4]{-16}$: **NO** pertenece a $\mathbb{R}$
- e : **SÍ** pertenece a $\mathbb{R}$ (es irracional)
- -100 : **SÍ** pertenece a $\mathbb{R}$ (es entero)

Apartado 3**Solución**

Enunciado: Escribe la fracción generatriz del número decimal $1, \overline{25}$

Estrategia: Este es un decimal periódico puro (el periodo empieza inmediatamente después de la coma).

Desarrollo:

$$1, \overline{25} = 1,252525\dots$$

Método algebraico:

Paso 1: Sea $x = 1, \overline{25}$

$$x = 1, 252525...$$

Paso 2: Multiplicamos por 100 (porque el periodo tiene 2 cifras):

$$100x = 125, 252525...$$

Paso 3: Restamos:

$$100x - x = 125, 252525... - 1, 252525... \quad (4)$$

$$99x = 124 \quad (5)$$

$$x = \frac{124}{99} \quad (6)$$

Paso 4: Verificamos si se puede simplificar.

Buscamos el MCD de 124 y 99:

$$\blacksquare 124 = 2^2 \times 31$$

$$\blacksquare 99 = 3^2 \times 11$$

No tienen factores comunes, por lo que la fracción ya está en su forma irreducible.

Verificación: $\frac{124}{99} = 1, \overline{25}$ ✓

Respuesta: $1, \overline{25} = \frac{124}{99}$

1.3. Ejercicio 3

Ejercicio 3

1. Clasifica los siguientes números en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{I}$: $\sqrt{81}$, $-\sqrt{10}$, $2, \overline{71}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2\pi}{\pi}$
2. Indica si los siguientes números pertenecen al conjunto de los reales ($\mathbb{R}$): $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt[6]{-1}$, 0
3. Escribe la fracción generatriz del número decimal $2,1\overline{3}$

Solución Apartado 1

Solución

Clasificación:

- $\sqrt{81} = 9 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
- $-\sqrt{10} \in \mathbb{I}, \mathbb{R}$ (es el opuesto de un irracional, luego es irracional)
- $2, \overline{71} \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ (decimal periódico)
- $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ (fracción)
- $\frac{2\pi}{\pi} = 2 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ (se simplifica a 2)

Solución Apartado 2

Solución

- $\frac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbb{R}$ (es irracional)
- $\sqrt[6]{-1} \notin \mathbb{R}$ (raíz de índice par de número negativo)
- $0 \in \mathbb{R}$ (es natural, entero y racional)

Solución Apartado 3

Solución

Decimal periódico mixto: $2,1\overline{3} = 2,1333\dots$

Paso 1: $x = 2,1333\dots$

Paso 2: Multiplicamos por 10 (para quitar la parte decimal no periódica):

$$10x = 21,333\dots$$

Paso 3: Multiplicamos por 10 de nuevo (periodo de 1 cifra):

$$100x = 213,333\dots$$

Paso 4: Restamos la segunda de la tercera:

$$100x - 10x = 213,333... - 21,333... \quad (7)$$

$$90x = 192 \quad (8)$$

$$x = \frac{192}{90} = \frac{32}{15} \quad (9)$$

Respuesta: $2,1\bar{3} = \frac{32}{15}$

1.4. Ejercicio 4

Ejercicio 4

1. Clasifica los siguientes números en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{I}$: $\sqrt{12}$, $-2,5$, $\frac{0}{8}$, $0,001$, $-\frac{18}{3}$
2. Indica si los siguientes números pertenecen al conjunto de los reales ($\mathbb{R}$): i^2 , $\frac{\sqrt{5}}{5}$, -20
3. Escribe la fracción generatriz del número decimal $0,\bar{9}$

Solución Apartado 1**Solución**

- $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3} \in \mathbb{I}, \mathbb{R}$ (irracional)
- $-2,5 = -\frac{5}{2} \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ (decimal exacto)
- $\frac{0}{8} = 0 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
- $0,001 = \frac{1}{1000} \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ (decimal exacto)
- $-\frac{18}{3} = -6 \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

Solución Apartado 2**Solución**

- $i^2 = -1$ donde i es la unidad imaginaria. Aunque i no es real, $i^2 = -1 \in \mathbb{R}$
- $\frac{\sqrt{5}}{5} \in \mathbb{R}$ (es irracional)
- $-20 \in \mathbb{R}$ (es entero)

Solución Apartado 3**Solución**

Caso especial: $0,\bar{9} = 0,999\dots$

Método 1:

$$x = 0,999\dots \quad (10)$$

$$10x = 9,999\dots \quad (11)$$

$$10x - x = 9 \quad (12)$$

$$9x = 9 \quad (13)$$

$$x = 1 \quad (14)$$

Sorprendente pero cierto: $0,\bar{9} = 1$

Respuesta: $0,\bar{9} = \frac{9}{9} = 1$

1.5. Ejercicio 5

Ejercicio 5

1. Clasifica los siguientes números en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{I}$: 5 , 0 , $\sqrt[3]{27}$, $-0,8$, π
2. Indica si los siguientes números pertenecen al conjunto de los reales ($\mathbb{R}$): $\frac{7}{1}$, $\sqrt{-25}$, 10^{20}
3. Escribe la fracción generatriz del número decimal $0,4\overline{7}$

Solución Apartado 1

Solución

- $5 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
- $0 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
- $\sqrt[3]{27} = 3 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ (porque $3^3 = 27$)
- $-0,8 = -\frac{4}{5} \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
- $\pi \in \mathbb{I}, \mathbb{R}$ (número irracional trascendente)

Solución Apartado 2

Solución

- $\frac{7}{1} = 7 \in \mathbb{R}$
- $\sqrt{-25} \notin \mathbb{R}$ (raíz cuadrada de número negativo)
- $10^{20} = 1000000000000000000 \in \mathbb{R}$ (es natural)

Solución Apartado 3

Solución

Decimal periódico mixto: $0,4\overline{7} = 0,4777\dots$

Paso 1: $x = 0,4777\dots$

Paso 2: Multiplicamos por 10:

$$10x = 4,777\dots$$

Paso 3: Multiplicamos por 100:

$$100x = 47,777\dots$$

Paso 4: Restamos:

$$100x - 10x = 47,777... - 4,777... \quad (15)$$

$$90x = 43 \quad (16)$$

$$x = \frac{43}{90} \quad (17)$$

Respuesta: $0,4\overline{7} = \frac{43}{90}$

2. Sección N2: Intervalos y Errores

Fundamentos Teóricos

Definición

Intervalos: Son subconjuntos de números reales comprendidos entre dos valores.

Tipos de intervalos:

1. **Intervalo abierto:** $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
No incluye los extremos. Se representa con paréntesis () y círculos abiertos .
2. **Intervalo cerrado:** $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
Incluye ambos extremos. Se representa con corchetes [] y círculos cerrados .
3. **Intervalo semiabierto/semicerrado:**
 - $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
 - $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
4. **Semirrectas:**
 - $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
 - $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
 - $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$
 - $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$
5. **Recta real completa:** $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

Nota: El infinito (∞) SIEMPRE se representa con paréntesis, nunca con corchetes.

Definición

Errores en mediciones:

Cuando realizamos una medición, siempre hay una diferencia entre el valor real y el valor medido.

- **Valor real (V_r):** El valor exacto (generalmente desconocido).
- **Valor aproximado (V_a):** El valor que obtenemos al medir.
- **Error absoluto (E_a):** Es la diferencia (en valor absoluto) entre el valor real y el aproximado.

$$E_a = |V_r - V_a|$$

Se expresa en las mismas unidades que la magnitud medida.

- **Error relativo (E_r):** Es el cociente entre el error absoluto y el valor real.

$$E_r = \frac{E_a}{|V_r|}$$

Es adimensional (sin unidades). A menudo se expresa como porcentaje.

■ **Error relativo en porcentaje:**

$$E_r \% = E_r \times 100 \% = \frac{E_a}{|V_r|} \times 100 \%$$

Observación

Interpretación de los errores:

- El error absoluto nos dice cuánto nos equivocamos.^{en} las unidades de medida.
- El error relativo nos dice "qué proporción del valor es el error".
- El error relativo es más útil para comparar precisiones entre mediciones de diferentes magnitudes.

Ejemplo: Un error de 1 cm:

- En una medida de 10 cm: $E_r = \frac{1}{10} = 0,1 = 10 \%$ (error grande)
- En una medida de 1000 cm: $E_r = \frac{1}{1000} = 0,001 = 0,1 \%$ (error pequeño)

2.1. Ejercicio 6

Ejercicio 6

1. Representa en la recta real el intervalo $A = (-2, 4]$ y la semirrecta $B = (-\infty, 1)$.
2. Escribe el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 5\}$ en forma de intervalo.
3. Al medir 25 m, el error absoluto es 0,5 m. Calcula el error relativo en porcentaje.

Apartado 1

Solución

Enunciado: Representa en la recta real el intervalo $A = (-2, 4]$ y la semirrecta $B = (-\infty, 1)$.

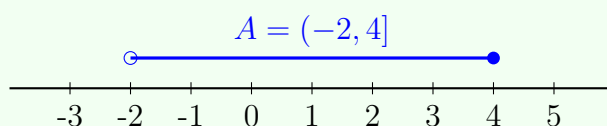
Desarrollo:

Intervalo $A = (-2, 4]$

Interpretación: Todos los números reales mayores que -2 (sin incluirlo) y menores o iguales que 4 (incluyéndolo).

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 4\}$$

Representación gráfica:

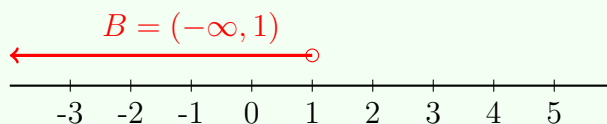


Semirrecta $B = (-\infty, 1)$

Interpretación: Todos los números reales menores que 1 (sin incluirlo).

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$$

Representación gráfica:



Observaciones:

- En A : círculo abierto en -2 (no incluido), círculo cerrado en 4 (incluido).
- En B : flecha hacia la izquierda (va hasta $-\infty$), círculo abierto en 1 .

Apartado 2

Solución

Enunciado: Escribe el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 5\}$ en forma de intervalo.

Desarrollo:

El conjunto está definido por las condiciones:

- $x \geq 0$ (incluye el 0)
- $x < 5$ (no incluye el 5)

Traducción a intervalo:

- Extremo izquierdo: 0, **incluido** $\rightarrow$ corchete $[$
- Extremo derecho: 5, **no incluido** $\rightarrow$ paréntesis $)$

Respuesta: $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 5\} = [0, 5)$

Apartado 3

Solución

Enunciado: Al medir 25 m, el error absoluto es 0,5 m. Calcula el error relativo en porcentaje.

Datos:

- Valor real (o medida): $V_r = 25$ m
- Error absoluto: $E_a = 0,5$ m
- Queremos: Error relativo en porcentaje $E_r \%$

Desarrollo:

Paso 1: Calculamos el error relativo.

La fórmula es:

$$E_r = \frac{E_a}{V_r}$$

Sustituimos:

$$E_r = \frac{0,5}{25} = \frac{0,5}{25} = \frac{1}{50} = 0,02$$

Paso 2: Convertimos a porcentaje.

$$E_r \% = E_r \times 100 \% = 0,02 \times 100 \% = 2 \%$$

Respuesta: El error relativo es 2 % o 0,02 en forma decimal.

Interpretación: El error representa un 2 % del valor medido, lo cual es una precisión moderada.

2.2. Ejercicio 7

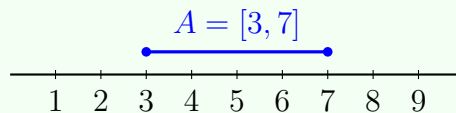
Ejercicio 7

1. Representa en la recta real el intervalo $A = [3, 7]$ y la semirrecta $B = [-1, +\infty)$.
2. Escribe el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$ en forma de intervalo.
3. Una medida es 150 kg y el error absoluto es 0,3 kg. Calcula el error relativo en porcentaje.

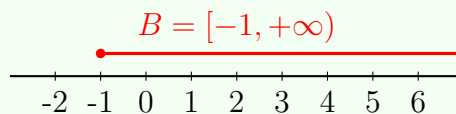
Solución

Apartado 1:

Intervalo $A = [3, 7]$ (cerrado, incluye ambos extremos):



Semirrecta $B = [-1, +\infty)$:



Apartado 2: $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\} = (-3, +\infty)$

Apartado 3:

$$E_r = \frac{0,3}{150} = 0,002 \quad (18)$$

$$E_r \% = 0,002 \times 100 \% = 0,2 \% \quad (19)$$

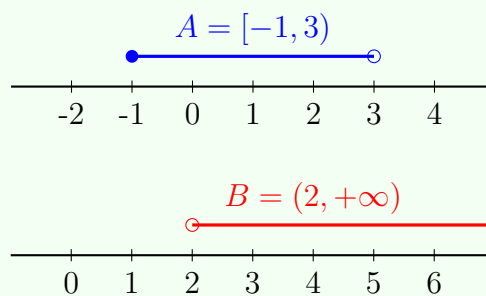
2.3. Ejercicio 8

Ejercicio 8

1. Representa en la recta real el intervalo $A = [-1, 3)$ y la semirrecta $B = (2, +\infty)$.
2. Escribe el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq -1\}$ en forma de intervalo.
3. Si el error relativo de una medida es 0,005 y la medida es 40 cm, calcula el error absoluto.

Solución

Apartado 1:



Apartado 2: $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq -1\} = (-4, -1]$

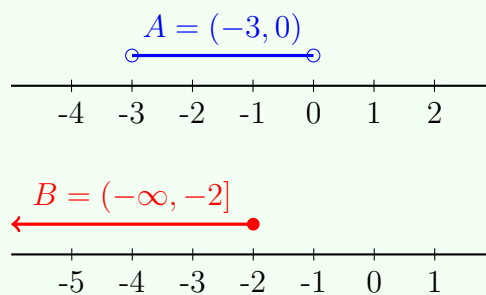
Apartado 3: Aquí conocemos E_r y V_r , y queremos E_a .

De la fórmula $E_r = \frac{E_a}{V_r}$, despejamos:

$$E_a = E_r \times V_r = 0,005 \times 40 = 0,2 \text{ cm}$$

2.4. Ejercicio 9**Ejercicio 9**

1. Representa en la recta real el intervalo $A = (-3, 0)$ y la semirrecta $B = (-\infty, -2]$.
2. Escribe el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 6\}$ en forma de intervalo.
3. Calcula el error absoluto y relativo si la medida real es 1,5 L y la medida obtenida es 1,53 L.

Solución**Apartado 1:**

Apartado 2: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 6\} = (-\infty, 6]$

Apartado 3:

Datos: $V_r = 1,5$ L, $V_a = 1,53$ L

Error absoluto:

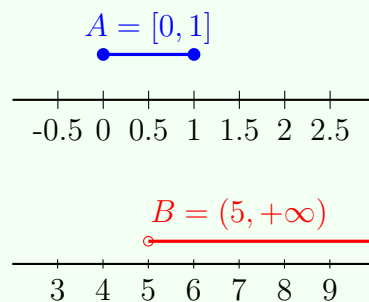
$$E_a = |V_r - V_a| = |1,5 - 1,53| = |-0,03| = 0,03 \text{ L}$$

Error relativo:

$$E_r = \frac{E_a}{V_r} = \frac{0,03}{1,5} = 0,02 = 2\%$$

2.5. Ejercicio 10**Ejercicio 10**

1. Representa en la recta real el intervalo $A = [0, 1]$ y la semirrecta $B = (5, +\infty)$.
2. Escribe el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -10\}$ en forma de intervalo.
3. Una medida es 8,2 m y el error relativo es 0,1 %. Calcula el error absoluto.

Solución**Apartado 1:**

Apartado 2: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -10\} = [-10, +\infty)$

Apartado 3:

Datos: $V_r = 8,2$ m, $E_r \% = 0,1$ %

Primero convertimos el porcentaje:

$$E_r = \frac{0,1}{100} = 0,001$$

Despejamos el error absoluto:

$$E_a = E_r \times V_r = 0,001 \times 8,2 = 0,0082 \text{ m} = 0,82 \text{ cm}$$

Conclusiones Generales

Resumen de Conceptos Clave

En esta colección de ejercicios (1-10) hemos trabajado exhaustivamente con:

1. Conjuntos Numéricos:

- Naturales ($\mathbb{N}$): números para contar
- Enteros ($\mathbb{Z}$): incluyen negativos
- Racionales ($\mathbb{Q}$): fracciones y decimales finitos/periódicos
- Irracionales ($\mathbb{I}$): decimales infinitos no periódicos
- Reales ($\mathbb{R}$): todos los anteriores

2. Criterios de Clasificación:

- Un número puede pertenecer a varios conjuntos simultáneamente
- La relación de inclusión es: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- Raíces de cuadrados perfectos son racionales
- Raíces de otros números suelen ser irracionales

3. Números que NO son Reales:

- División entre cero: indefinida
- Raíces de índice par de números negativos

4. Fracciones Generatrices:

- Todo decimal finito o periódico es racional
- Método algebraico para encontrar la fracción

5. Intervalos:

- Paréntesis () para extremos NO incluidos
- Corchetes [] para extremos incluidos
- Infinito SIEMPRE con paréntesis

6. Errores de Medición:

- Error absoluto: diferencia en unidades
- Error relativo: proporción del valor
- Error relativo es mejor para comparar precisiones

Estrategias de Estudio

1. Para clasificar números:

- Primero simplifica o calcula el valor
- Verifica si es entero, fracción o decimal
- Si es decimal, determina si es finito o periódico
- Si es radical, verifica si se puede simplificar

2. Para fracciones generatrices:

- Identifica si es periódico puro o mixto
- Aplica el método algebraico correctamente
- Simplifica el resultado final

3. Para intervalos:

- Lee cuidadosamente los símbolos $<$, $\leq$, $>$, $\geq$
- Usa paréntesis para $<$ y $>$ (no incluye)
- Usa corchetes para $\leq$ y $\geq$ (incluye)

4. Para errores:

- Identifica qué datos tienes y qué te piden
- Usa las fórmulas correctas
- Presta atención a las unidades

Fin del documento de soluciones - Ejercicios 1 al 10

SOLUCIONES DETALLADAS

Ejercicios 11-20

4º ESO - Matemáticas

Bloque: Números Reales

Profesor de Matemáticas

25 de febrero de 2026

Contenidos:

- **N3:** Operaciones con Radicales I (Ejercicios 11-15)
- **N4:** Racionalización y Notación Científica (Ejercicios 16-20)

Soluciones completas con desarrollo paso a paso

Índice

1. N3: Operaciones con Radicales I	3
1.1. Teoría Previa: Propiedades de los Radicales	3
1.2. Ejercicio 11	5
1.3. Ejercicio 12	7
1.4. Ejercicio 13	9
1.5. Ejercicio 14	11
1.6. Ejercicio 15	13
2. N4: Racionalización y Notación Científica	15
2.1. Teoría Previa: Racionalización	15
2.2. Teoría Previa: Notación Científica	15
2.3. Ejercicio 16	17
2.4. Ejercicio 17	19
2.5. Ejercicio 18	21
2.6. Ejercicio 19	23
2.7. Ejercicio 20	25

1. N3: Operaciones con Radicales I

1.1. Teoría Previa: Propiedades de los Radicales

Definición/Teoría

Radicales: Definición y Propiedades Fundamentales

Un radical es una expresión de la forma $\sqrt[n]{a}$ donde:

- n es el **índice** del radical (si $n = 2$, se omite: $\sqrt{a}$)
- a es el **radicando**
- El resultado se llama **raíz**

Propiedades fundamentales:

1. **Extracción de factores:** $\sqrt[n]{a^m \cdot b} = a^{m/n} \cdot \sqrt[n]{b}$ (si $m \geq n$)

2. **Producto de radicales del mismo índice:**

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

3. **Cociente de radicales:**

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$$

4. **Raíz de raíz:**

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

5. **Potencia de radical:**

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

6. **Simplificación por reducción a índice común:** Para operar radicales de diferente índice, se reducen a índice común (mcm de los índices).

7. **Suma algebraica de radicales semejantes:** Solo se pueden sumar/restar radicales con el mismo índice y radicando.

$$a \sqrt[n]{b} + c \sqrt[n]{b} = (a + c) \sqrt[n]{b}$$

Simplificación de radicales:

Para simplificar $\sqrt[n]{a}$:

1. Descomponer a en factores primos
2. Extraer del radical las potencias cuyo exponente sea $\geq n$
3. Dejar dentro del radical los factores con exponente $< n$

Ejemplo: Simplificar $\sqrt{72}$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2 \Rightarrow \sqrt{72} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3^2} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

1.2. Ejercicio 11

Ejercicio 11

Simplifica extrayendo factores del radical:

$$\sqrt{108}$$

Solución

Para simplificar $\sqrt{108}$, debemos descomponer el radicando en factores primos y extraer los factores cuyo exponente sea mayor o igual que el índice del radical (en este caso, índice 2).

Paso 1: Descomposición en factores primos de 108

Realizamos la descomposición factorial:

$$\begin{aligned}108 &= 2 \cdot 54 \\&= 2 \cdot 2 \cdot 27 \\&= 2^2 \cdot 27 \\&= 2^2 \cdot 3 \cdot 9 \\&= 2^2 \cdot 3 \cdot 3^2 \\&= 2^2 \cdot 3^3\end{aligned}$$

Por lo tanto: $108 = 2^2 \cdot 3^3$

Paso 2: Aplicación de la propiedad de extracción de factores

$$\sqrt{108} = \sqrt{2^2 \cdot 3^3}$$

Reescribimos $3^3 = 3^2 \cdot 3$ para poder extraer:

$$\sqrt{108} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3}$$

Paso 3: Extracción de factores

Aplicamos la propiedad $\sqrt{a^2 \cdot b} = a \cdot \sqrt{b}$:

$$\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

Verificación:

Podemos comprobar el resultado: $(6\sqrt{3})^2 = 36 \cdot 3 = 108$

Respuesta final:

$$\boxed{\sqrt{108} = 6\sqrt{3}}$$

Observación

La descomposición factorial es fundamental para simplificar radicales. En este caso:

- Del factor 2^2 extraemos 2
- Del factor $3^3 = 3^2 \cdot 3$ extraemos 3 (del 3^2) y dejamos 3 dentro del radical
- El producto de los factores extraídos es $2 \cdot 3 = 6$

Método alternativo rápido:

También podemos observar que $108 = 36 \cdot 3$, donde $36 = 6^2$:

$$\sqrt{108} = \sqrt{36 \cdot 3} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

1.3. Ejercicio 12

Ejercicio 12

Multiplica y simplifica:

$$\sqrt{18} \cdot \sqrt{8}$$

Solución

Para multiplicar radicales con el mismo índice, aplicamos la propiedad del producto de radicales y luego simplificamos.

Paso 1: Aplicación de la propiedad del producto

Utilizamos la propiedad $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$:

$$\sqrt{18} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{18 \cdot 8}$$

Paso 2: Cálculo del producto de radicandos

$$18 \cdot 8 = 144$$

Por lo tanto:

$$\sqrt{18} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{144}$$

Paso 3: Simplificación del radical

Observamos que $144 = 12^2$, por lo tanto:

$$\sqrt{144} = 12$$

Respuesta final:

$$\boxed{\sqrt{18} \cdot \sqrt{8} = 12}$$

Verificación:

Podemos verificar simplificando primero cada radical:

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$$

Multiplicando:

$$3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 6 \cdot \sqrt{4} = 6 \cdot 2 = 12$$

Observación

Este ejercicio ilustra dos métodos equivalentes para multiplicar radicales:

Método 1 (usado arriba): Multiplicar primero los radicandos y luego simplificar

$$\sqrt{18} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{144} = 12$$

Método 2: Simplificar primero cada radical y luego multiplicar

$$\sqrt{18} \cdot \sqrt{8} = 3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 6 \cdot 2 = 12$$

Ambos métodos son correctos. El segundo puede ser más eficiente cuando los radicales ya están simplificados o cuando el producto de los radicandos es muy grande.

Nota importante: Al multiplicar radicales con el mismo radicando, el resultado es ese radicando:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a \quad (a \geq 0)$$

1.4. Ejercicio 13

Ejercicio 13

Opera y simplifica:

$$3\sqrt{12} + 5\sqrt{27} - 2\sqrt{75}$$

Solución

Para realizar esta operación, debemos primero simplificar cada radical extrayendo factores, luego identificar los radicales semejantes y finalmente realizar la suma algebraica.

Paso 1: Simplificación de $\sqrt{12}$

Descomponemos: $12 = 4 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Paso 2: Simplificación de $\sqrt{27}$

Descomponemos: $27 = 9 \cdot 3 = 3^2 \cdot 3$

$$\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

Paso 3: Simplificación de $\sqrt{75}$

Descomponemos: $75 = 25 \cdot 3 = 5^2 \cdot 3$

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

Paso 4: Sustitución en la expresión original

$$3\sqrt{12} + 5\sqrt{27} - 2\sqrt{75} = 3(2\sqrt{3}) + 5(3\sqrt{3}) - 2(5\sqrt{3})$$

Paso 5: Distribución de coeficientes

$$= 6\sqrt{3} + 15\sqrt{3} - 10\sqrt{3}$$

Paso 6: Suma algebraica de radicales semejantes

Todos los términos tienen el mismo radical ($\sqrt{3}$), por lo que podemos sumar sus coeficientes:

$$= (6 + 15 - 10)\sqrt{3} = 11\sqrt{3}$$

Respuesta final:

$$3\sqrt{12} + 5\sqrt{27} - 2\sqrt{75} = 11\sqrt{3}$$

Observación

Conceptos clave:

1. **Radicales semejantes:** Dos radicales son semejantes si tienen el mismo índice y el mismo radicando. Solo se pueden sumar/restar radicales semejantes.
2. **Proceso de simplificación:**

- Simplificar cada radical por separado
- Identificar radicales semejantes
- Sumar/restar los coeficientes (como si fueran términos algebraicos)

3. **Analogía algebraica:** La operación con radicales semejantes es análoga a sumar términos algebraicos semejantes:

$$3x + 5x - 2x = (3 + 5 - 2)x = 6x$$

$$3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = (3 + 5 - 2)\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

Resumen de simplificaciones:

Radical	Factorización	Simplificado
$\sqrt{12}$	$\sqrt{4 \cdot 3}$	$2\sqrt{3}$
$\sqrt{27}$	$\sqrt{9 \cdot 3}$	$3\sqrt{3}$
$\sqrt{75}$	$\sqrt{25 \cdot 3}$	$5\sqrt{3}$

Todos resultan en múltiplos de $\sqrt{3}$, lo que permite la suma algebraica.

1.5. Ejercicio 14

Ejercicio 14

Reduce a índice común y multiplica:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4}$$

Solución

Para multiplicar radicales con diferente índice, primero debemos reducirlos a índice común. El índice común será el mínimo común múltiplo (mcm) de los índices.

Paso 1: Identificación de los índices

$$\sqrt{2} = \sqrt[2]{2} \quad (\text{índice } 2)$$

$$\sqrt[3]{4} \quad (\text{índice } 3)$$

Paso 2: Cálculo del índice común

$$\text{mcm}(2, 3) = 6$$

El índice común será 6.

Paso 3: Conversión del primer radical a índice 6

Para convertir $\sqrt[2]{2}$ a índice 6, aplicamos la propiedad:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^m}$$

Multiplicamos índice y exponente del radicando por $\frac{6}{2} = 3$:

$$\sqrt[2]{2} = \sqrt[2 \cdot 3]{2^3} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}$$

Paso 4: Conversión del segundo radical a índice 6

Multiplicamos índice y exponente del radicando por $\frac{6}{3} = 2$:

$$\sqrt[3]{4} = \sqrt[3 \cdot 2]{4^2} = \sqrt[6]{4^2} = \sqrt[6]{16}$$

Paso 5: Multiplicación de radicales con el mismo índice

Ahora aplicamos la propiedad del producto:

$$\sqrt[6]{8} \cdot \sqrt[6]{16} = \sqrt[6]{8 \cdot 16} = \sqrt[6]{128}$$

Paso 6: Simplificación del resultado

Descomponemos 128 en factores primos:

$$128 = 2^7$$

Por lo tanto:

$$\sqrt[6]{128} = \sqrt[6]{2^7} = \sqrt[6]{2^6 \cdot 2} = 2 \cdot \sqrt[6]{2}$$

Respuesta final:

$$\boxed{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} = 2\sqrt[6]{2}}$$

Verificación usando potencias fraccionarias:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} &= 2^{1/2} \cdot 4^{1/3} \\
 &= 2^{1/2} \cdot (2^2)^{1/3} \\
 &= 2^{1/2} \cdot 2^{2/3} \\
 &= 2^{1/2+2/3} \\
 &= 2^{3/6+4/6} \\
 &= 2^{7/6} \\
 &= 2^{6/6+1/6} \\
 &= 2^1 \cdot 2^{1/6} \\
 &= 2 \cdot \sqrt[6]{2}
 \end{aligned}$$

Observación**Reducción a índice común - Procedimiento general:**

Para reducir $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[m]{b}$ a índice común:

1. Calcular el mcm de los índices: $p = \text{mcm}(n, m)$
2. Convertir cada radical:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[p]{a^{p/n}} \quad \text{y} \quad \sqrt[m]{b} = \sqrt[p]{b^{p/m}}$$

3. Operar con los radicales del mismo índice

Tabla de conversión para este ejercicio:

Radical	Índice original	Factor	Índice 6
$\sqrt[2]{2}$	2	$\times 3$	$\sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}$
$\sqrt[3]{4}$	3	$\times 2$	$\sqrt[6]{4^2} = \sqrt[6]{16}$

Relación con potencias: Este ejercicio muestra la conexión entre radicales y potencias fraccionarias:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

Esta notación es especialmente útil para operar con radicales de diferentes índices.

1.6. Ejercicio 15

Ejercicio 15

Simplifica la expresión:

$$\sqrt{50} + \sqrt{32} - \sqrt{98} + \sqrt{18}$$

Solución

Para simplificar esta expresión, debemos descomponer cada radicando, extraer factores y luego realizar la suma algebraica de radicales semejantes.

Paso 1: Simplificación de $\sqrt{50}$

Descomponemos: $50 = 25 \cdot 2 = 5^2 \cdot 2$

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$$

Paso 2: Simplificación de $\sqrt{32}$

Descomponemos: $32 = 16 \cdot 2 = 2^4 \cdot 2 = 2^5$, pero mejor: $32 = 16 \cdot 2 = 4^2 \cdot 2$

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$$

Paso 3: Simplificación de $\sqrt{98}$

Descomponemos: $98 = 49 \cdot 2 = 7^2 \cdot 2$

$$\sqrt{98} = \sqrt{49 \cdot 2} = 7\sqrt{2}$$

Paso 4: Simplificación de $\sqrt{18}$

Descomponemos: $18 = 9 \cdot 2 = 3^2 \cdot 2$

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

Paso 5: Sustitución en la expresión original

$$\sqrt{50} + \sqrt{32} - \sqrt{98} + \sqrt{18} = 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 7\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$$

Paso 6: Suma algebraica de radicales semejantes

Todos los términos contienen $\sqrt{2}$, por lo que sumamos sus coeficientes:

$$= (5 + 4 - 7 + 3)\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

Respuesta final:

$$\boxed{\sqrt{50} + \sqrt{32} - \sqrt{98} + \sqrt{18} = 5\sqrt{2}}$$

Verificación aritmética de coeficientes:

$$5 + 4 - 7 + 3 = 9 - 7 + 3 = 2 + 3 = 5$$

Observación

Patrón de descomposición:

Observa que todos los radicandos son pares y contienen el factor 2:

Número	Descomposición	Cuadrado perfecto	Simplificado
50	25×2	$5^2 \times 2$	$5\sqrt{2}$
32	16×2	$4^2 \times 2$	$4\sqrt{2}$
98	49×2	$7^2 \times 2$	$7\sqrt{2}$
18	9×2	$3^2 \times 2$	$3\sqrt{2}$

Estrategia para identificar cuadrados perfectos:

Al simplificar radicales, busca factores que sean cuadrados perfectos comunes:

■ $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$, $25 = 5^2$, $36 = 6^2$, $49 = 7^2$, $64 = 8^2$, $81 = 9^2$, $100 = 10^2$

Si el número es par, divide entre 4, 16, 36, 64, etc.

Si el número es impar, busca divisores como 9, 25, 49, 81, etc.

Representación visual del proceso:

$$\underbrace{5\sqrt{2}}_{+} + \underbrace{4\sqrt{2}}_{+} - \underbrace{7\sqrt{2}}_{-} + \underbrace{3\sqrt{2}}_{+} = \underbrace{(5 + 4 - 7 + 3)}_{=5} \sqrt{2}$$

2. N4: Racionalización y Notación Científica

2.1. Teoría Previa: Racionalización

Definición/Teoría

Racionalización de Denominadores

La racionalización es el proceso de eliminar radicales del denominador de una fracción. Se basa en multiplicar numerador y denominador por una expresión conveniente que elimine el radical.

Casos principales:

Caso 1: Denominador con un solo radical $\frac{a}{\sqrt[n]{b}}$

Multiplicamos por $\frac{\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^{n-1}}}$ para completar la potencia n -ésima:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{b^{n-1}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-1}}}{b}$$

Caso particular importante ($n = 2$): $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$

Caso 2: Denominador con suma/resta de radicales $\frac{a}{b \pm \sqrt{c}}$

Multiplicamos por el **conjugado** del denominador. El conjugado de $b + \sqrt{c}$ es $b - \sqrt{c}$, y viceversa.

Usamos el producto notable: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$$\frac{a}{b + \sqrt{c}} = \frac{a(b - \sqrt{c})}{(b + \sqrt{c})(b - \sqrt{c})} = \frac{a(b - \sqrt{c})}{b^2 - c}$$

Caso 3: Denominador binomio con dos radicales $\frac{a}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}}$

Multiplicamos por el conjugado $\sqrt{b} \mp \sqrt{c}$:

$$\frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b} - \sqrt{c})}{b - c}$$

Justificación: La racionalización facilita operaciones posteriores y es la forma estándar de expresar resultados en matemáticas.

2.2. Teoría Previa: Notación Científica

Definición/Teoría

Notación Científica

Un número está en **notación científica** cuando se expresa en la forma:

$$a \times 10^n$$

donde:

- $1 \leq |a| < 10$ (parte decimal con un solo dígito entero no nulo)

- $n \in \mathbb{Z}$ (exponente entero)

Operaciones en notación científica:**1. Multiplicación:**

$$(a \times 10^m) \cdot (b \times 10^n) = (a \cdot b) \times 10^{m+n}$$

2. División:

$$\frac{a \times 10^m}{b \times 10^n} = \frac{a}{b} \times 10^{m-n}$$

3. Suma/Resta: Se deben expresar con el mismo exponente:

$$(a \times 10^n) + (b \times 10^n) = (a + b) \times 10^n$$

Si tienen diferente exponente, primero se igualan:

$$(a \times 10^m) + (b \times 10^n) = (a \times 10^{m-n} + b) \times 10^n \quad (\text{si } m > n)$$

4. Potencias:

$$(a \times 10^n)^m = a^m \times 10^{n \cdot m}$$

Conversión a notación científica:

Para convertir un número a notación científica:

1. Desplazar la coma decimal hasta tener un solo dígito entero no nulo
2. Contar los desplazamientos: hacia la izquierda $\rightarrow$ exponente positivo; hacia la derecha $\rightarrow$ exponente negativo

Ejemplos:

- $45\,600 = 4,56 \times 10^4$ (coma desplazada 4 posiciones a la izquierda)
- $0,000\,32 = 3,2 \times 10^{-4}$ (coma desplazada 4 posiciones a la derecha)

2.3. Ejercicio 16

Ejercicio 16

Racionaliza y simplifica:

$$\frac{5}{\sqrt{3}}$$

Solución

Para racionalizar una fracción con un radical en el denominador, multiplicamos numerador y denominador por el mismo radical, eliminando así el radical del denominador.

Paso 1: Identificación del caso

Tenemos un denominador con un solo radical cuadrado: $\sqrt{3}$

El factor racionalizante es el propio radical: $\sqrt{3}$

Paso 2: Multiplicación por el factor racionalizante

Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{3}$:

$$\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

Paso 3: Operación en el numerador

$$\text{Numerador: } 5 \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

Paso 4: Operación en el denominador

$$\text{Denominador: } \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot 3} = \sqrt{9} = 3$$

Paso 5: Expresión racionalizada

$$\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

Respuesta final:

$$\boxed{\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}}$$

Verificación:

Comprobamos que ambas expresiones son equivalentes usando aproximaciones decimales:

$$\frac{5}{\sqrt{3}} \approx \frac{5}{1,732} \approx 2,887$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{3} \approx \frac{5 \cdot 1,732}{3} \approx \frac{8,660}{3} \approx 2,887$$

Observación**Principio fundamental de la racionalización:**

Al multiplicar $\frac{a}{a}$ (donde $a \neq 0$), estamos multiplicando por 1, lo cual no cambia el valor de la fracción, solo su forma.

$$\frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot 1 = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

Pero la forma racionalizada $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ es preferible porque:

- Es más fácil operar con ella (sumar, restar, comparar)
- Es la forma estándar en matemáticas
- Evita radicales en denominadores, simplificando cálculos posteriores

Patrón general para raíces cuadradas:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

Representación visual del proceso:

$$\frac{5}{\sqrt{3}} \quad \xrightarrow{\times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} \quad \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} \quad \xrightarrow{\text{simplificar}} \quad \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

2.4. Ejercicio 17

Ejercicio 17

Racionaliza:

$$\frac{6}{2 + \sqrt{5}}$$

Solución

Para racionalizar un denominador de la forma $a + \sqrt{b}$, multiplicamos por su conjugado $a - \sqrt{b}$. Esto aprovecha el producto notable $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Paso 1: Identificación del conjugado

El denominador es $2 + \sqrt{5}$

El conjugado es $2 - \sqrt{5}$

Paso 2: Multiplicación por el conjugado

$$\frac{6}{2 + \sqrt{5}} = \frac{6}{2 + \sqrt{5}} \cdot \frac{2 - \sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}}$$

Paso 3: Operación en el numerador

Distribuimos el 6:

$$\text{Numerador: } 6(2 - \sqrt{5}) = 6 \cdot 2 - 6 \cdot \sqrt{5} = 12 - 6\sqrt{5}$$

Paso 4: Operación en el denominador

Aplicamos el producto notable $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$:

$$(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5}) = 2^2 - (\sqrt{5})^2 = 4 - 5 = -1$$

Paso 5: Expresión racionalizada

$$\frac{12 - 6\sqrt{5}}{-1}$$

Paso 6: Simplificación

Dividimos cada término del numerador entre -1 :

$$\frac{12 - 6\sqrt{5}}{-1} = \frac{12}{-1} - \frac{6\sqrt{5}}{-1} = -12 + 6\sqrt{5}$$

Reordenando (forma estándar, término con radical al final):

$$= 6\sqrt{5} - 12$$

O también se puede factorizar:

$$= -12 + 6\sqrt{5} = 6(\sqrt{5} - 2)$$

Respuesta final:

$$\frac{6}{2 + \sqrt{5}} = 6\sqrt{5} - 12 \quad \text{o bien} \quad 6(\sqrt{5} - 2)$$

Verificación del producto del denominador:

$$(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5}) = 4 - 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 5 = 4 - 5 = -1$$

Observación**El método del conjugado:**

Cuando tenemos $\frac{a}{b + \sqrt{c}}$ o $\frac{a}{b - \sqrt{c}}$, multiplicamos por el conjugado:

- Conjugado de $b + \sqrt{c}$ es $b - \sqrt{c}$
- Conjugado de $b - \sqrt{c}$ es $b + \sqrt{c}$

¿Por qué funciona?

El producto $(b + \sqrt{c})(b - \sqrt{c}) = b^2 - c$ elimina el radical porque aplicamos:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

donde $a = b$ y $b = \sqrt{c}$, entonces $b^2 = (\sqrt{c})^2 = c$.

Desarrollo detallado del denominador:

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5}) &= 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-\sqrt{5}) + \sqrt{5} \cdot 2 + \sqrt{5} \cdot (-\sqrt{5}) \\ &= 4 - 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - (\sqrt{5})^2 \\ &= 4 - 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 5 \\ &= 4 - 5 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Formas equivalentes de la respuesta:

Forma	Expresión
Desarrollada	$6\sqrt{5} - 12$
Factorizada	$6(\sqrt{5} - 2)$
Alternativa	$-12 + 6\sqrt{5}$

Todas son correctas, aunque la forma factorizada es más compacta.

2.5. Ejercicio 18

Ejercicio 18

Opera y expresa en notación científica:

$$(3 \times 10^5) \cdot (2,4 \times 10^{-3})$$

Solución

Para multiplicar números en notación científica, multiplicamos las partes decimales y sumamos los exponentes de las potencias de 10.

Paso 1: Aplicación de la regla del producto

Usamos la propiedad: $(a \times 10^m) \cdot (b \times 10^n) = (a \cdot b) \times 10^{m+n}$

$$(3 \times 10^5) \cdot (2,4 \times 10^{-3}) = (3 \cdot 2,4) \times 10^{5+(-3)}$$

Paso 2: Multiplicación de las partes decimales

$$3 \cdot 2,4 = 7,2$$

Paso 3: Suma de los exponentes

$$5 + (-3) = 5 - 3 = 2$$

Paso 4: Expresión del resultado

$$7,2 \times 10^2$$

Paso 5: Verificación de la notación científica

Comprobamos que $1 \leq 7,2 < 10$

El resultado ya está en notación científica correcta.

Respuesta final:

$$(3 \times 10^5) \cdot (2,4 \times 10^{-3}) = 7,2 \times 10^2$$

Conversión a forma decimal (verificación):

$$3 \times 10^5 = 300\,000$$

$$2,4 \times 10^{-3} = 0,0024$$

$$300\,000 \times 0,0024 = 720$$

$$7,2 \times 10^2 = 720$$

Observación

Reglas para multiplicar en notación científica:

Dado $(a \times 10^m) \cdot (b \times 10^n)$:

1. Multiplicar las mantisas (partes decimales): $a \cdot b$
2. Sumar los exponentes: $m + n$

3. Resultado: $(a \cdot b) \times 10^{m+n}$

4. Si $a \cdot b \geq 10$ o $a \cdot b < 1$, ajustar a notación científica

Ejemplo de ajuste:

Si obtenemos $12,5 \times 10^3$, ajustamos:

$$12,5 \times 10^3 = 1,25 \times 10^1 \times 10^3 = 1,25 \times 10^4$$

Interpretación física:

Este tipo de operación es común en ciencias:

- 3×10^5 podría representar 300,000 metros
- $2,4 \times 10^{-3}$ podría representar 0.0024 segundos por metro (velocidad inversa)
- El producto $7,2 \times 10^2 = 720$ representaría el resultado en las unidades correspondientes

Resumen esquemático:

$$\begin{array}{ccc}
 3 \times 10^5 & & \\
 3 \cdot 2,4 = 7,2 & | & 5 + (-3) = 2 \\
 2,4 \times 10^{-3} & & \\
 \hline
 7,2 \times 10^2 & &
 \end{array}$$

Mantisas se multiplican — Exponentes se suman

2.6. Ejercicio 19

Ejercicio 19

Opera y expresa en notación científica:

$$\frac{8 \times 10^7}{4 \times 10^3}$$

Solución

Para dividir números en notación científica, dividimos las partes decimales y restamos los exponentes.

Paso 1: Aplicación de la regla del cociente

Usamos la propiedad: $\frac{a \times 10^m}{b \times 10^n} = \frac{a}{b} \times 10^{m-n}$

$$\frac{8 \times 10^7}{4 \times 10^3} = \frac{8}{4} \times 10^{7-3}$$

Paso 2: División de las partes decimales

$$\frac{8}{4} = 2$$

Paso 3: Resta de los exponentes

$$7 - 3 = 4$$

Paso 4: Expresión del resultado

$$2 \times 10^4$$

Paso 5: Verificación de la notación científica

Comprobamos que $1 \leq 2 < 10$

El resultado está en notación científica correcta.

Respuesta final:

$$\boxed{\frac{8 \times 10^7}{4 \times 10^3} = 2 \times 10^4}$$

Conversión a forma decimal (verificación):

$$8 \times 10^7 = 80\,000\,000$$

$$4 \times 10^3 = 4\,000$$

$$\frac{80\,000\,000}{4\,000} = 20\,000$$

$$2 \times 10^4 = 20\,000$$

Observación**Reglas para dividir en notación científica:**

Dado $\frac{a \times 10^m}{b \times 10^n}$:

1. Dividir las mantisas: $\frac{a}{b}$
2. Restar los exponentes: $m - n$
3. Resultado: $\frac{a}{b} \times 10^{m-n}$
4. Si es necesario, ajustar a notación científica estándar

Justificación usando propiedades de potencias:

$$\frac{a \times 10^m}{b \times 10^n} = \frac{a}{b} \times \frac{10^m}{10^n} = \frac{a}{b} \times 10^{m-n}$$

porque $\frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$ (ley de exponentes).

Comparación multiplicación vs. división:

Operación	Mantisas	Exponentes
Multiplicación	Se multiplican	Se suman
División	Se dividen	Se restan

Ejemplo de ajuste si fuera necesario:

Si obtuviéramos $0,5 \times 10^4$, ajustaríamos:

$$0,5 \times 10^4 = 5 \times 10^{-1} \times 10^4 = 5 \times 10^3$$

Si obtuviéramos 15×10^4 , ajustaríamos:

$$15 \times 10^4 = 1,5 \times 10^1 \times 10^4 = 1,5 \times 10^5$$

Visualización del proceso:

$$\frac{8}{4} = 2 \quad \left/ \quad \begin{array}{r} 8 \times 10^7 \\ \hline 4 \times 10^3 \end{array} \right/ \quad 7 - 3 = 4$$

$$\boxed{2 \times 10^4}$$

2.7. Ejercicio 20

Ejercicio 20

Calcula y expresa en notación científica:

$$(5 \times 10^4) + (3,2 \times 10^5)$$

Solución

Para sumar números en notación científica, debemos expresarlos con el mismo exponente antes de sumar las mantisas.

Paso 1: Comparación de exponentes

Tenemos:

- Primer sumando: 5×10^4 (exponente 4)
- Segundo sumando: $3,2 \times 10^5$ (exponente 5)

Los exponentes son diferentes, por lo que debemos igualarlos.

Paso 2: Elección del exponente común

Conviene usar el exponente mayor (10^5) para evitar números muy grandes en la mantisa.

Paso 3: Conversión del primer sumando a exponente 5

$$5 \times 10^4 = 5 \times 10^4 \times \frac{10^{-1}}{10^{-1}} = 5 \times 10^{-1} \times 10^{4+1} = 0,5 \times 10^5$$

Justificación alternativa:

$$5 \times 10^4 = 5 \times \frac{10^4}{10^5} \times 10^5 = 5 \times 10^{-1} \times 10^5 = 0,5 \times 10^5$$

Paso 4: Suma con el mismo exponente

Ahora sumamos:

$$(0,5 \times 10^5) + (3,2 \times 10^5) = (0,5 + 3,2) \times 10^5$$

Paso 5: Suma de mantisas

$$0,5 + 3,2 = 3,7$$

Paso 6: Resultado

$$3,7 \times 10^5$$

Paso 7: Verificación de la notación científica

Comprobamos que $1 \leq 3,7 < 10$

El resultado está en notación científica correcta.

Respuesta final:

$$(5 \times 10^4) + (3,2 \times 10^5) = 3,7 \times 10^5$$

Verificación con forma decimal:

$$\begin{aligned}
 5 \times 10^4 &= 50\,000 \\
 3,2 \times 10^5 &= 320\,000 \\
 50\,000 + 320\,000 &= 370\,000 \\
 3,7 \times 10^5 &= 370\,000
 \end{aligned}$$

Observación**Reglas para sumar/restar en notación científica:**

Dado $(a \times 10^m) + (b \times 10^n)$ con $m \neq n$:

1. **Igualar exponentes:** Convertir ambos números al mismo exponente (generalmente el mayor)
2. **Sumar mantisas:** $(a' + b') \times 10^p$ donde a' y b' son las mantisas ajustadas
3. **Ajustar si es necesario:** Si el resultado no está en notación científica estándar, ajustar

Conversión de exponentes - Regla general:

Para convertir $a \times 10^m$ a exponente n :

$$a \times 10^m = (a \times 10^{m-n}) \times 10^n$$

En nuestro caso:

$$5 \times 10^4 = (5 \times 10^{4-5}) \times 10^5 = (5 \times 10^{-1}) \times 10^5 = 0,5 \times 10^5$$

Método alternativo (usando el exponente menor):

Podríamos haber convertido a 10^4 :

$$3,2 \times 10^5 = 32 \times 10^4$$

Entonces:

$$(5 \times 10^4) + (32 \times 10^4) = 37 \times 10^4$$

Pero esto no está en notación científica estándar, así que ajustamos:

$$37 \times 10^4 = 3,7 \times 10^1 \times 10^4 = 3,7 \times 10^5$$

Visualización del proceso:

Números originales:

5×10^4	$3,2 \times 10^5$
$\times 10^{-1}$	sin cambio
$0,5 \times 10^5$	$3,2 \times 10^5$
+	
$(0,5 + 3,2) \times 10^5 = 3,7 \times 10^5$	

Conclusión importante:

A diferencia de la multiplicación y división, la suma y resta en notación científica requieren un paso adicional: **igualar los exponentes**. Sin este paso, no se pueden sumar directamente las mantisas.

Soluciones Detalladas

Ejercicios 21 al 30

Repaso Intensivo de Matemáticas

4º ESO - Opción B

Contenido:

- Sección N5: Polinomios y Teorema del Resto (Ejercicios 21-25)
- Sección N6: Operaciones con Polinomios (Ejercicios 26-30)

Profesor: Ladislao Jáñez Blanco

Curso 2025-2026

Este documento contiene soluciones exhaustivas con rigor matemático absoluto, sin omitir ningún paso. Cada ejercicio incluye justificaciones completas, ilustraciones y explicaciones pedagógicas.

25 de febrero de 2026

Índice

1. Sección N5: Polinomios y Teorema del Resto	2
1.1. Ejercicio 21	3
1.2. Ejercicio 22	7
1.3. Ejercicio 23	11
1.4. Ejercicio 24	15
1.5. Ejercicio 25	19
2. Sección N6: Operaciones con Polinomios	22
2.1. Ejercicio 26	23
2.2. Ejercicio 27	28
2.3. Ejercicio 28	31
2.4. Ejercicio 29	34
2.5. Ejercicio 30	38

1. Sección N5: Polinomios y Teorema del Resto

Fundamentos Teóricos

Antes de resolver los ejercicios, estableceremos los fundamentos teóricos necesarios.

Definición

Teorema del Resto: Sea $P(x)$ un polinomio y a un número real. El resto de la división de $P(x)$ entre $(x - a)$ es igual a $P(a)$.

Matemáticamente: Si $P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R$, entonces $R = P(a)$.

Definición

Regla de Ruffini: Es un método abreviado para dividir un polinomio $P(x)$ entre un binomio de la forma $(x - a)$. Permite calcular el cociente y el resto de manera eficiente.

Definición

Valor Numérico de un Polinomio: Dado un polinomio $P(x)$ y un valor $x = a$, el valor numérico $P(a)$ se obtiene sustituyendo x por a y realizando las operaciones indicadas.

1.1. Ejercicio 21

Ejercicio 21

1. Dado $P(x) = x^3 - 5x^2 + kx - 1$, calcula k para que el resto de la división $P(x) : (x - 1)$ sea 5.
2. Utiliza la Regla de Ruffini para dividir $x^4 - 2x^3 + 4x - 8$ entre $(x - 2)$, e indica el cociente y el resto.
3. Indica el valor numérico del polinomio $Q(x) = 3x^3 - x^2 + 5$ en $x = -1$.

Apartado 1

Solución

Enunciado: Dado $P(x) = x^3 - 5x^2 + kx - 1$, calcula k para que el resto de la división $P(x) : (x - 1)$ sea 5.

Estrategia: Aplicaremos el Teorema del Resto.

Desarrollo:

Por el Teorema del Resto, sabemos que el resto de dividir $P(x)$ entre $(x - 1)$ es igual a $P(1)$.

Paso 1: Establecemos la condición.

Se nos indica que el resto debe ser 5, por lo tanto:

$$P(1) = 5 \quad (1)$$

Paso 2: Calculamos $P(1)$ sustituyendo $x = 1$ en el polinomio.

$$P(1) = (1)^3 - 5(1)^2 + k(1) - 1 \quad (2)$$

$$= 1 - 5 + k - 1 \quad (3)$$

$$= k - 5 \quad (4)$$

Paso 3: Igualamos a 5 y despejamos k .

$$k - 5 = 5 \quad (5)$$

$$k = 5 + 5 \quad (6)$$

$$k = 10 \quad (7)$$

Verificación: Comprobemos que con $k = 10$ el resto es efectivamente 5.

El polinomio queda: $P(x) = x^3 - 5x^2 + 10x - 1$

Calculamos: $P(1) = 1 - 5 + 10 - 1 = 5 \quad \checkmark$

Respuesta: $k = 10$

Observación**Errores comunes a evitar:**

- No confundir el divisor $(x - 1)$ con $(x + 1)$. En el Teorema del Resto, si dividimos entre $(x - a)$, evaluamos en $x = a$.
- No olvidar incluir todos los términos del polinomio al sustituir.
- Respetar el orden de las operaciones: primero potencias, luego productos, finalmente sumas/restas.

Apartado 2**Solución**

Enunciado: Utiliza la Regla de Ruffini para dividir $x^4 - 2x^3 + 4x - 8$ entre $(x - 2)$, e indica el cociente y el resto.

Estrategia: Aplicaremos la Regla de Ruffini sistemáticamente.

Desarrollo:

Paso 1: Identificamos el divisor.

Dividimos entre $(x - 2)$, por lo tanto $a = 2$.

Paso 2: Escribimos los coeficientes del polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 + 4x - 8$.

Los coeficientes ordenados son:

- Término x^4 : coeficiente = 1
- Término x^3 : coeficiente = -2
- Término x^2 : coeficiente = 0 (no aparece, pero debe incluirse)
- Término x^1 : coeficiente = 4
- Término independiente: -8

Paso 3: Construimos el esquema de Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & 0 & 4 & -8 \\ 2 & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

Paso 4: Aplicamos la Regla de Ruffini paso a paso.

Columna 1: Bajamos el primer coeficiente.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & 0 & 4 & -8 \\ 2 & & & & & \\ \hline & 1 & & & & \end{array}$$

Columna 2: Multiplicamos $1 \times 2 = 2$ y lo sumamos a -2: $-2 + 2 = 0$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & 0 & 4 & -8 \\ 2 & & 2 & & & \\ \hline & 1 & 0 & & & \end{array}$$

Columna 3: Multiplicamos $0 \times 2 = 0$ y lo sumamos a 0: $0 + 0 = 0$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & 0 & 4 & -8 \\ 2 & & 2 & 0 & & \\ \hline & 1 & 0 & 0 & & \end{array}$$

Columna 4: Multiplicamos $0 \times 2 = 0$ y lo sumamos a 4: $4 + 0 = 4$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & 0 & 4 & -8 \\ 2 & & 2 & 0 & 0 & \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 4 & \end{array}$$

Columna 5: Multiplicamos $4 \times 2 = 8$ y lo sumamos a -8 : $-8 + 8 = 0$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & 0 & 4 & -8 \\ 2 & & 2 & 0 & 0 & 8 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

Paso 5: Interpretamos los resultados.

Los primeros 4 números de la fila inferior corresponden a los coeficientes del cociente:

- Cociente: $Q(x) = 1x^3 + 0x^2 + 0x + 4 = x^3 + 4$
- Resto: $R = 0$ (último número)

Verificación: Podemos verificar que:

$$P(x) = (x - 2) \cdot Q(x) + R$$

$$(x - 2)(x^3 + 4) + 0 = x^4 + 4x - 2x^3 - 8 = x^4 - 2x^3 + 4x - 8$$

✓

Respuesta:

- **Cociente:** $Q(x) = x^3 + 4$
- **Resto:** $R = 0$

Observación

Interpretación matemática:

Como el resto es 0, esto significa que $(x - 2)$ es un **factor** del polinomio $P(x)$, o equivalentemente, que $x = 2$ es una **raíz** del polinomio.

En efecto: $P(2) = 2^4 - 2(2)^3 + 4(2) - 8 = 16 - 16 + 8 - 8 = 0$ ✓

Por tanto, podemos escribir: $x^4 - 2x^3 + 4x - 8 = (x - 2)(x^3 + 4)$

Apartado 3

Solución

Enunciado: Indica el valor numérico del polinomio $Q(x) = 3x^3 - x^2 + 5$ en $x = -1$.

Estrategia: Sustituiremos directamente $x = -1$ en el polinomio.

Desarrollo:

Paso 1: Escribimos la expresión del polinomio:

$$Q(x) = 3x^3 - x^2 + 5$$

Paso 2: Sustituimos $x = -1$:

$$Q(-1) = 3(-1)^3 - (-1)^2 + 5$$

Paso 3: Calculamos cada término por separado.

Primer término: $3(-1)^3$

Calculamos la potencia: $(-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$

Multiplicamos: $3 \cdot (-1) = -3$

Segundo término: $-(-1)^2$

Calculamos la potencia: $(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$

Aplicamos el signo negativo: $-(1) = -1$

Tercer término: 5 (es constante)

Paso 4: Sumamos todos los términos:

$$Q(-1) = -3 + (-1) + 5 \quad (8)$$

$$= -3 - 1 + 5 \quad (9)$$

$$= -4 + 5 \quad (10)$$

$$= 1 \quad (11)$$

Respuesta: $Q(-1) = 1$

Observación

Errores comunes a evitar:

- **Signo de potencias:** $(-1)^3 = -1$ (exponente impar) pero $(-1)^2 = +1$ (exponente par).
- **Orden de operaciones:** Primero se calcula la potencia $(-1)^2 = 1$ y luego se aplica el signo: $-(-1)^2 = -1$.
- **No confundir:** $-(-1)^2 = -1$ con $(-(-1))^2 = (1)^2 = 1$.

1.2. Ejercicio 22

Ejercicio 22

1. Dado $P(x) = 2x^4 + kx^3 - x + 7$, calcula k para que el resto de la división $P(x) : (x + 2)$ sea 9.
2. Utiliza la Regla de Ruffini para dividir $x^5 + 3x^3 - 6x + 10$ entre $(x + 1)$, e indica el cociente y el resto.
3. Indica el valor numérico del polinomio $Q(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$ en $x = 3$.

Apartado 1

Solución

Enunciado: Dado $P(x) = 2x^4 + kx^3 - x + 7$, calcula k para que el resto de la división $P(x) : (x + 2)$ sea 9.

Estrategia: Aplicaremos el Teorema del Resto, teniendo cuidado con el signo del divisor.

Desarrollo:

Paso 1: Identificamos el valor en el que debemos evaluar.

El divisor es $(x + 2)$, que podemos escribir como $(x - (-2))$.

Por el Teorema del Resto, el resto de dividir $P(x)$ entre $(x - a)$ es $P(a)$.

En nuestro caso, $a = -2$, por lo tanto evaluaremos en $x = -2$.

Paso 2: Establecemos la condición.

Se nos indica que el resto debe ser 9, por lo tanto:

$$P(-2) = 9 \quad (12)$$

Paso 3: Calculamos $P(-2)$ sustituyendo $x = -2$ en el polinomio.

$$P(-2) = 2(-2)^4 + k(-2)^3 - (-2) + 7 \quad (13)$$

Calculamos cada término:

Primer término: $2(-2)^4$

$$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$$

$$2 \cdot 16 = 32$$

Segundo término: $k(-2)^3$

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

$$k \cdot (-8) = -8k$$

Tercer término: $-(-2) = 2$

Cuarto término: 7

Sumamos todos los términos:

$$P(-2) = 32 + (-8k) + 2 + 7 \quad (14)$$

$$= 32 - 8k + 2 + 7 \quad (15)$$

$$= 41 - 8k \quad (16)$$

Paso 4: Igualamos a 9 y despejamos k .

$$41 - 8k = 9 \quad (17)$$

$$-8k = 9 - 41 \quad (18)$$

$$-8k = -32 \quad (19)$$

$$k = \frac{-32}{-8} \quad (20)$$

$$k = 4 \quad (21)$$

Verificación: Comprobemos que con $k = 4$ el resto es efectivamente 9.

El polinomio queda: $P(x) = 2x^4 + 4x^3 - x + 7$

Calculamos:

$$P(-2) = 2(16) + 4(-8) - (-2) + 7 \quad (22)$$

$$= 32 - 32 + 2 + 7 \quad (23)$$

$$= 9 \quad \checkmark \quad (24)$$

Respuesta: $k = 4$

Observación

Punto clave:

Cuando el divisor es $(x + a)$, debemos evaluarlo en $x = -a$ (con signo negativo).

- Divisor $(x - 2) \rightarrow$ Evaluar en $x = 2$
- Divisor $(x + 2) \rightarrow$ Evaluar en $x = -2$
- En general: $(x - a) \rightarrow$ Evaluar en $x = a$

Apartado 2

Solución

Enunciado: Utiliza la Regla de Ruffini para dividir $x^5 + 3x^3 - 6x + 10$ entre $(x + 1)$, e indica el cociente y el resto.

Estrategia: Aplicaremos la Regla de Ruffini, recordando que dividimos entre $(x + 1) = (x - (-1))$.

Desarrollo:

Paso 1: Identificamos el divisor.

Dividimos entre $(x + 1) = (x - (-1))$, por lo tanto $a = -1$.

Paso 2: Escribimos los coeficientes del polinomio $P(x) = x^5 + 3x^3 - 6x + 10$.

Los coeficientes ordenados son:

- Término x^5 : coeficiente = 1

- Término x^4 : coeficiente = 0 (no aparece)
- Término x^3 : coeficiente = 3
- Término x^2 : coeficiente = 0 (no aparece)
- Término x^1 : coeficiente = -6
- Término independiente: 10

Paso 3: Aplicamos la Regla de Ruffini paso a paso.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & 3 & 0 & -6 & 10 \\ -1 & & & & & & \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

Columna 1: Bajamos el primer coeficiente: 1

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & 3 & 0 & -6 & 10 \\ -1 & & & & & & \\ \hline & & & & & & \\ & 1 & & & & & \end{array}$$

Columna 2: $1 \times (-1) = -1$; $0 + (-1) = -1$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & 3 & 0 & -6 & 10 \\ -1 & & -1 & & & & \\ \hline & & -1 & & & & \\ & 1 & -1 & & & & \end{array}$$

Columna 3: $(-1) \times (-1) = 1$; $3 + 1 = 4$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & 3 & 0 & -6 & 10 \\ -1 & & -1 & 1 & & & \\ \hline & & -1 & 1 & & & \\ & 1 & -1 & 4 & & & \end{array}$$

Columna 4: $4 \times (-1) = -4$; $0 + (-4) = -4$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & 3 & 0 & -6 & 10 \\ -1 & & -1 & 1 & -4 & & \\ \hline & & -1 & 1 & -4 & & \\ & 1 & -1 & 4 & -4 & & \end{array}$$

Columna 5: $(-4) \times (-1) = 4$; $-6 + 4 = -2$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & 3 & 0 & -6 & 10 \\ -1 & & -1 & 1 & -4 & 4 & \\ \hline & & -1 & 1 & -4 & 4 & \\ & 1 & -1 & 4 & -4 & -2 & \end{array}$$

Columna 6: $(-2) \times (-1) = 2$; $10 + 2 = 12$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & 3 & 0 & -6 & 10 \\ -1 & & -1 & 1 & -4 & 4 & 2 \\ \hline & & -1 & 1 & -4 & 4 & 2 \\ & 1 & -1 & 4 & -4 & -2 & \boxed{12} \end{array}$$

Paso 4: Interpretamos los resultados.

Los primeros 5 números de la fila inferior corresponden a los coeficientes del cociente:

- Cociente: $Q(x) = x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x - 2$
- Resto: $R = 12$ (último número)

Verificación mediante el Teorema del Resto:

$$P(-1) = (-1)^5 + 3(-1)^3 - 6(-1) + 10 = -1 - 3 + 6 + 10 = 12 \quad \checkmark$$

Respuesta:

- **Cociente:** $Q(x) = x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x - 2$
- **Resto:** $R = 12$

Apartado 3

Solución

Enunciado: Indica el valor numérico del polinomio $Q(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$ en $x = 3$.

Estrategia: Sustituiremos directamente $x = 3$ en el polinomio.

Desarrollo:

Paso 1: Escribimos la expresión del polinomio:

$$Q(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$$

Paso 2: Sustituimos $x = 3$:

$$Q(3) = (3)^4 - 3(3)^2 + 2(3) - 1$$

Paso 3: Calculamos cada término por separado.

Primer término: $(3)^4$

$$(3)^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

Segundo término: $-3(3)^2$

$$(3)^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

$$-3 \cdot 9 = -27$$

Tercer término: $2(3) = 6$

Cuarto término: -1

Paso 4: Sumamos todos los términos:

$$Q(3) = 81 + (-27) + 6 + (-1) \tag{25}$$

$$= 81 - 27 + 6 - 1 \tag{26}$$

$$= 54 + 6 - 1 \tag{27}$$

$$= 60 - 1 \tag{28}$$

$$= 59 \tag{29}$$

Respuesta: $Q(3) = 59$

1.3. Ejercicio 23

Ejercicio 23

1. Dado $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + k$, calcula k para que $x = -3$ sea una raíz del polinomio.
2. Utiliza la Regla de Ruffini para dividir $2x^3 - 5x^2 + 7$ entre $(x - 3)$, e indica el cociente y el resto.
3. Indica el valor numérico del polinomio $Q(x) = x^5 - 2x^4 + x - 5$ en $x = 2$.

Apartado 1

Solución

Enunciado: Dado $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + k$, calcula k para que $x = -3$ sea una raíz del polinomio.

Estrategia: Utilizaremos la definición de raíz de un polinomio.

Fundamento teórico:

Definición

Un número a es una **raíz** (o **cero**) de un polinomio $P(x)$ si y solo si $P(a) = 0$.
Equivalentemente, a es raíz de $P(x)$ si y solo si $(x - a)$ es un factor de $P(x)$.

Desarrollo:

Paso 1: Establecemos la condición.

Si $x = -3$ es una raíz del polinomio, entonces:

$$P(-3) = 0 \quad (30)$$

Paso 2: Calculamos $P(-3)$ sustituyendo $x = -3$ en el polinomio.

$$P(-3) = (-3)^3 + 2(-3)^2 - 5(-3) + k \quad (31)$$

Calculamos cada término:

Primer término: $(-3)^3$

$$(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$$

Segundo término: $2(-3)^2$

$$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$$

$$2 \cdot 9 = 18$$

Tercer término: $-5(-3) = 15$

Cuarto término: k

Sumamos todos los términos:

$$P(-3) = -27 + 18 + 15 + k \quad (32)$$

$$= -27 + 33 + k \quad (33)$$

$$= 6 + k \quad (34)$$

Paso 3: Igualamos a 0 y despejamos k .

$$6 + k = 0 \quad (35)$$

$$k = -6 \quad (36)$$

Verificación: Comprobemos que con $k = -6$, efectivamente $x = -3$ es raíz.

El polinomio queda: $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

Calculamos:

$$P(-3) = -27 + 18 + 15 - 6 \quad (37)$$

$$= 0 \quad \checkmark \quad (38)$$

Verificación adicional (factorización):

Como $x = -3$ es raíz, el polinomio es divisible entre $(x + 3)$.

Podemos factorizar: $P(x) = (x + 3)(x^2 - x - 2) = (x + 3)(x - 2)(x + 1)$

Las tres raíces son: $x = -3, x = 2, x = -1$

Respuesta: $k = -6$

Apartado 2

Solución

Enunciado: Utiliza la Regla de Ruffini para dividir $2x^3 - 5x^2 + 7$ entre $(x - 3)$, e indica el cociente y el resto.

Estrategia: Aplicaremos la Regla de Ruffini.

Desarrollo:

Paso 1: Identificamos el divisor.

Dividimos entre $(x - 3)$, por lo tanto $a = 3$.

Paso 2: Escribimos los coeficientes del polinomio $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7$.

Los coeficientes ordenados son:

- Término x^3 : coeficiente = 2
- Término x^2 : coeficiente = -5
- Término x^1 : coeficiente = 0 (no aparece)
- Término independiente: 7

Paso 3: Aplicamos la Regla de Ruffini paso a paso.

	2	-5	0	7
3				

Columna 1: Bajamos el primer coeficiente: 2

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & 0 & 7 \\ 3 & & & & \\ \hline & 2 & & & \end{array}$$

Columna 2: $2 \times 3 = 6$; $-5 + 6 = 1$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & 0 & 7 \\ 3 & & 6 & & \\ \hline & 2 & 1 & & \end{array}$$

Columna 3: $1 \times 3 = 3$; $0 + 3 = 3$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & 0 & 7 \\ 3 & & 6 & 3 & \\ \hline & 2 & 1 & 3 & \end{array}$$

Columna 4: $3 \times 3 = 9$; $7 + 9 = 16$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & 0 & 7 \\ 3 & & 6 & 3 & 9 \\ \hline & 2 & 1 & 3 & 16 \end{array}$$

Paso 4: Interpretamos los resultados.

Los primeros 3 números de la fila inferior corresponden a los coeficientes del cociente:

- Cociente: $Q(x) = 2x^2 + x + 3$
- Resto: $R = 16$ (último número)

Verificación: Podemos comprobar que:

$$P(x) = (x - 3) \cdot Q(x) + R$$

$$(x - 3)(2x^2 + x + 3) + 16$$

Desarrollamos:

$$= 2x^3 + x^2 + 3x - 6x^2 - 3x - 9 + 16 \quad (39)$$

$$= 2x^3 + (1 - 6)x^2 + (3 - 3)x + (-9 + 16) \quad (40)$$

$$= 2x^3 - 5x^2 + 0x + 7 \quad (41)$$

$$= 2x^3 - 5x^2 + 7 \quad \checkmark \quad (42)$$

También podemos verificar mediante el Teorema del Resto:

$$P(3) = 2(3)^3 - 5(3)^2 + 7 = 2(27) - 5(9) + 7 = 54 - 45 + 7 = 16 \quad \checkmark$$

Respuesta:

- **Cociente:** $Q(x) = 2x^2 + x + 3$
- **Resto:** $R = 16$

Apartado 3**Solución**

Enunciado: Indica el valor numérico del polinomio $Q(x) = x^5 - 2x^4 + x - 5$ en $x = 2$.

Estrategia: Sustituiremos directamente $x = 2$ en el polinomio.

Desarrollo:

Paso 1: Escribimos la expresión del polinomio:

$$Q(x) = x^5 - 2x^4 + x - 5$$

Paso 2: Sustituimos $x = 2$:

$$Q(2) = (2)^5 - 2(2)^4 + (2) - 5$$

Paso 3: Calculamos cada término por separado.

Primer término: $(2)^5$

$$(2)^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

Segundo término: $-2(2)^4$

$$(2)^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

$$-2 \cdot 16 = -32$$

Tercer término: 2

Cuarto término: -5

Paso 4: Sumamos todos los términos:

$$Q(2) = 32 + (-32) + 2 + (-5) \quad (43)$$

$$= 32 - 32 + 2 - 5 \quad (44)$$

$$= 0 + 2 - 5 \quad (45)$$

$$= -3 \quad (46)$$

Respuesta: $Q(2) = -3$

Observación

Interpretación:

Como $Q(2) = -3 \neq 0$, esto significa que $x = 2$ **no** es una raíz del polinomio $Q(x)$.

1.4. Ejercicio 24

Ejercicio 24

1. Dado $P(x) = 3x^4 - x^3 + kx^2 - 2x + 1$, calcula k para que el resto de la división $P(x) : (x + 1)$ sea 8.
2. Utiliza la Regla de Ruffini para dividir $x^3 - 8$ entre $(x - 2)$, e indica el cociente y el resto.
3. Indica el valor numérico del polinomio $Q(x) = 5x^2 - 4x + 2$ en $x = -2$.

Apartado 1

Solución

Enunciado: Dado $P(x) = 3x^4 - x^3 + kx^2 - 2x + 1$, calcula k para que el resto de la división $P(x) : (x + 1)$ sea 8.

Estrategia: Aplicaremos el Teorema del Resto.

Desarrollo:

Paso 1: Identificamos el valor en el que debemos evaluar.

El divisor es $(x + 1) = (x - (-1))$, por lo tanto evaluaremos en $x = -1$.

Paso 2: Establecemos la condición.

Se nos indica que el resto debe ser 8, por lo tanto:

$$P(-1) = 8 \quad (47)$$

Paso 3: Calculamos $P(-1)$ sustituyendo $x = -1$ en el polinomio.

$$P(-1) = 3(-1)^4 - (-1)^3 + k(-1)^2 - 2(-1) + 1 \quad (48)$$

Calculamos cada término:

Primer término: $3(-1)^4$

$(-1)^4 = 1$ (exponente par)

$3 \cdot 1 = 3$

Segundo término: $-(-1)^3$

$(-1)^3 = -1$ (exponente impar)

$-(-1) = 1$

Tercer término: $k(-1)^2$

$(-1)^2 = 1$

$k \cdot 1 = k$

Cuarto término: $-2(-1) = 2$

Quinto término: 1

Sumamos todos los términos:

$$P(-1) = 3 + 1 + k + 2 + 1 \quad (49)$$

$$= 7 + k \quad (50)$$

Paso 4: Igualamos a 8 y despejamos k .

$$7 + k = 8 \quad (51)$$

$$k = 8 - 7 \quad (52)$$

$$k = 1 \quad (53)$$

Verificación: Comprobemos que con $k = 1$ el resto es efectivamente 8.

El polinomio queda: $P(x) = 3x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 1$

Calculamos:

$$P(-1) = 3(1) - (-1) + 1 - 2(-1) + 1 \quad (54)$$

$$= 3 + 1 + 1 + 2 + 1 \quad (55)$$

$$= 8 \quad \checkmark \quad (56)$$

Respuesta: $k = 1$

Apartado 2

Solución

Enunciado: Utiliza la Regla de Ruffini para dividir $x^3 - 8$ entre $(x - 2)$, e indica el cociente y el resto.

Estrategia: Aplicaremos la Regla de Ruffini.

Desarrollo:

Paso 1: Identificamos el divisor.

Dividimos entre $(x - 2)$, por lo tanto $a = 2$.

Paso 2: Escribimos los coeficientes del polinomio $P(x) = x^3 - 8$.

Los coeficientes ordenados son:

- Término x^3 : coeficiente = 1
- Término x^2 : coeficiente = 0 (no aparece)
- Término x^1 : coeficiente = 0 (no aparece)
- Término independiente: -8

Paso 3: Aplicamos la Regla de Ruffini paso a paso.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 2 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

Columna 1: Bajamos el primer coeficiente: 1

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 2 & & & & \\ \hline & & & & 1 \end{array}$$

Columna 2: $1 \times 2 = 2$; $0 + 2 = 2$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 2 & & 2 & & \\ \hline & 1 & 2 & & \end{array}$$

Columna 3: $2 \times 2 = 4$; $0 + 4 = 4$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 2 & & 2 & 4 & \\ \hline & 1 & 2 & 4 & \end{array}$$

Columna 4: $4 \times 2 = 8$; $-8 + 8 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

Paso 4: Interpretamos los resultados.

Los primeros 3 números de la fila inferior corresponden a los coeficientes del cociente:

- Cociente: $Q(x) = x^2 + 2x + 4$
- Resto: $R = 0$ (último número)

Verificación: Como el resto es 0, podemos escribir:

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

Desarrollamos para verificar:

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = x^3 + 2x^2 + 4x - 2x^2 - 4x - 8 \quad (57)$$

$$= x^3 + (2 - 2)x^2 + (4 - 4)x - 8 \quad (58)$$

$$= x^3 - 8 \quad \checkmark \quad (59)$$

Respuesta:

- **Cociente:** $Q(x) = x^2 + 2x + 4$
- **Resto:** $R = 0$

Observación

Interpretación algebraica:

Esta división corresponde a la factorización de una **diferencia de cubos**.

La fórmula general es:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

En nuestro caso: $a = x$, $b = 2$

$$x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

El cociente $x^2 + 2x + 4$ no se puede factorizar más en $\mathbb{R}$ ya que su discriminante es:

$$\Delta = 2^2 - 4(1)(4) = 4 - 16 = -12 < 0$$

Apartado 3

Solución

Enunciado: Indica el valor numérico del polinomio $Q(x) = 5x^2 - 4x + 2$ en $x = -2$.

Estrategia: Sustituiremos directamente $x = -2$ en el polinomio.

Desarrollo:

Paso 1: Escribimos la expresión del polinomio:

$$Q(x) = 5x^2 - 4x + 2$$

Paso 2: Sustituimos $x = -2$:

$$Q(-2) = 5(-2)^2 - 4(-2) + 2$$

Paso 3: Calculamos cada término por separado.

Primer término: $5(-2)^2$

$$(-2)^2 = 4$$

$$5 \cdot 4 = 20$$

Segundo término: $-4(-2) = 8$

Tercer término: 2

Paso 4: Sumamos todos los términos:

$$Q(-2) = 20 + 8 + 2 \quad (60)$$

$$= 30 \quad (61)$$

Respuesta: $Q(-2) = 30$

1.5. Ejercicio 25

Ejercicio 25

1. Dado $P(x) = x^4 - kx^2 + 2x - 1$, calcula k para que $P(1) = 0$.
2. Utiliza la Regla de Ruffini para dividir $4x^3 + x^2 - 3x + 1$ entre $(x + 1)$, e indica el cociente y el resto.
3. Indica el valor numérico del polinomio $Q(x) = x^6 - x^5 - x$ en $x = 1$.

Apartado 1

Solución

Enunciado: Dado $P(x) = x^4 - kx^2 + 2x - 1$, calcula k para que $P(1) = 0$.

Estrategia: Evaluaremos el polinomio en $x = 1$ e igualaremos a 0.

Desarrollo:

Paso 1: Establecemos la condición.

Se nos pide que $P(1) = 0$, por lo tanto:

$$P(1) = 0 \quad (62)$$

Esto significa que $x = 1$ debe ser una raíz del polinomio.

Paso 2: Calculamos $P(1)$ sustituyendo $x = 1$ en el polinomio.

$$P(1) = (1)^4 - k(1)^2 + 2(1) - 1 \quad (63)$$

Calculamos cada término:

Primer término: $(1)^4 = 1$

Segundo término: $-k(1)^2 = -k$

Tercer término: $2(1) = 2$

Cuarto término: -1

Sumamos todos los términos:

$$P(1) = 1 - k + 2 - 1 \quad (64)$$

$$= 2 - k \quad (65)$$

Paso 3: Igualamos a 0 y despejamos k .

$$2 - k = 0 \quad (66)$$

$$k = 2 \quad (67)$$

Verificación: Comprobemos que con $k = 2$, efectivamente $P(1) = 0$.

El polinomio queda: $P(x) = x^4 - 2x^2 + 2x - 1$

Calculamos:

$$P(1) = 1 - 2(1) + 2(1) - 1 \quad (68)$$

$$= 1 - 2 + 2 - 1 \quad (69)$$

$$= 0 \quad \checkmark \quad (70)$$

Respuesta: $k = 2$

Apartado 2

Solución

Enunciado: Utiliza la Regla de Ruffini para dividir $4x^3 + x^2 - 3x + 1$ entre $(x + 1)$, e indica el cociente y el resto.

Estrategia: Aplicaremos la Regla de Ruffini, recordando que $(x + 1) = (x - (-1))$.

Desarrollo:

Paso 1: Identificamos el divisor.

Dividimos entre $(x + 1) = (x - (-1))$, por lo tanto $a = -1$.

Paso 2: Escribimos los coeficientes del polinomio $P(x) = 4x^3 + x^2 - 3x + 1$.

Los coeficientes ordenados son: 4, 1, -3, 1

Paso 3: Aplicamos la Regla de Ruffini paso a paso.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

Columna 1: Bajamos el primer coeficiente: 4

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & & & & \\ \hline & & & & 4 \end{array}$$

Columna 2: $4 \times (-1) = -4$; $1 + (-4) = -3$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & & -4 & & \\ \hline & & 4 & -3 & \end{array}$$

Columna 3: $(-3) \times (-1) = 3$; $-3 + 3 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & & -4 & 3 & \\ \hline & & 4 & -3 & 0 \end{array}$$

Columna 4: $0 \times (-1) = 0$; $1 + 0 = 1$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & & -4 & 3 & 0 \\ \hline & & 4 & -3 & 0 \end{array} \quad \boxed{1}$$

Paso 4: Interpretamos los resultados.

Los primeros 3 números de la fila inferior corresponden a los coeficientes del cociente:

- Cociente: $Q(x) = 4x^2 - 3x + 0 = 4x^2 - 3x$
- Resto: $R = 1$ (último número)

Verificación mediante el Teorema del Resto:

$$P(-1) = 4(-1)^3 + (-1)^2 - 3(-1) + 1 = -4 + 1 + 3 + 1 = 1 \quad \checkmark$$

Respuesta:

- **Cociente:** $Q(x) = 4x^2 - 3x$
- **Resto:** $R = 1$

Apartado 3**Solución**

Enunciado: Indica el valor numérico del polinomio $Q(x) = x^6 - x^5 - x$ en $x = 1$.

Estrategia: Sustituiremos directamente $x = 1$ en el polinomio.

Desarrollo:

Paso 1: Escribimos la expresión del polinomio:

$$Q(x) = x^6 - x^5 - x$$

Paso 2: Sustituimos $x = 1$:

$$Q(1) = (1)^6 - (1)^5 - (1)$$

Paso 3: Calculamos cada término por separado.

Primer término: $(1)^6 = 1$

Segundo término: $(1)^5 = 1$, entonces $-(1)^5 = -1$

Tercer término: $-(1) = -1$

Paso 4: Sumamos todos los términos:

$$Q(1) = 1 + (-1) + (-1) \tag{71}$$

$$= 1 - 1 - 1 \tag{72}$$

$$= -1 \tag{73}$$

Respuesta: $Q(1) = -1$

Observación**Nota importante:**

Cualquier potencia de 1 es igual a 1: $1^n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, al evaluar un polinomio en $x = 1$, el valor numérico es simplemente la suma de todos los coeficientes (respetando sus signos).

En nuestro caso: $Q(x) = x^6 - x^5 - x = 1 \cdot x^6 + (-1) \cdot x^5 + 0 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + (-1) \cdot x + 0$
 $Q(1) = 1 + (-1) + 0 + 0 + 0 + (-1) + 0 = -1$

2. Sección N6: Operaciones con Polinomios

Fundamentos Teóricos

Definición

Productos Notables: Son multiplicaciones de expresiones algebraicas que aparecen frecuentemente y cuyo resultado puede obtenerse mediante fórmulas predefinidas.

Los más importantes son:

1. **Cuadrado de una suma:** $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. **Cuadrado de una diferencia:** $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. **Suma por diferencia:** $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
4. **Cubo de una suma:** $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5. **Cubo de una diferencia:** $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Definición

División de Polinomios: Dados dos polinomios $P(x)$ (dividendo) y $D(x)$ (divisor), dividir $P(x)$ entre $D(x)$ consiste en encontrar dos polinomios $Q(x)$ (cociente) y $R(x)$ (resto) tales que:

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

donde el grado de $R(x)$ es menor que el grado de $D(x)$, o bien $R(x) = 0$.

2.1. Ejercicio 26**Ejercicio 26**

1. Desarrolla y simplifica: $(x + 4)^2 - (x - 3)(x + 3)$.
2. Realiza la siguiente división de polinomios: $(x^3 + 2x^2 - 5x + 2) : (x^2 - x + 1)$.
Indica el cociente y el resto.
3. Realiza la siguiente operación: $3(x^2 - 1) - (x - 2)^2 \cdot x$.

Apartado 1

Solución

Enunciado: Desarrolla y simplifica: $(x + 4)^2 - (x - 3)(x + 3)$.

Estrategia: Aplicaremos los productos notables correspondientes y luego simplificaremos.

Desarrollo:

Paso 1: Identificamos los productos notables.

- $(x + 4)^2$ es un **cuadrado de una suma**: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(x - 3)(x + 3)$ es una **suma por diferencia**: $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

Paso 2: Desarrollamos el primer término: $(x + 4)^2$.

Aplicamos la fórmula con $a = x$ y $b = 4$:

$$(x + 4)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 \quad (74)$$

$$= x^2 + 8x + 16 \quad (75)$$

Paso 3: Desarrollamos el segundo término: $(x - 3)(x + 3)$.

Aplicamos la fórmula con $a = x$ y $b = 3$:

$$(x - 3)(x + 3) = x^2 - 3^2 \quad (76)$$

$$= x^2 - 9 \quad (77)$$

Paso 4: Sustituimos en la expresión original y simplificamos.

$$(x + 4)^2 - (x - 3)(x + 3) = (x^2 + 8x + 16) - (x^2 - 9) \quad (78)$$

Eliminamos los paréntesis (cuidado con el signo menos delante del segundo paréntesis):

$$= x^2 + 8x + 16 - x^2 + 9 \quad (79)$$

Agrupamos términos semejantes:

$$= (x^2 - x^2) + 8x + (16 + 9) \quad (80)$$

$$= 0 + 8x + 25 \quad (81)$$

$$= 8x + 25 \quad (82)$$

Respuesta: $8x + 25$

Observación

Error común:

Al restar $(x^2 - 9)$, NO olvidar cambiar el signo de todos los términos:

INCORRECTO: $x^2 + 8x + 16 - x^2 - 9$

CORRECTO: $x^2 + 8x + 16 - x^2 + 9$

La regla es: $a - (b - c) = a - b + c$

Apartado 2

Solución

Enunciado: Realiza la siguiente división de polinomios: $(x^3 + 2x^2 - 5x + 2) : (x^2 - x + 1)$. Indica el cociente y el resto.

Estrategia: Aplicaremos el algoritmo de división de polinomios (similar a la división larga de números).

Desarrollo:

Datos:

- Dividendo: $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 2$
- Divisor: $D(x) = x^2 - x + 1$

Paso 1: Dividimos el término de mayor grado del dividendo entre el término de mayor grado del divisor.

$$\frac{x^3}{x^2} = x$$

Este es el primer término del cociente.

Paso 2: Multiplicamos todo el divisor por este término y lo restamos del dividendo.

$$x \cdot (x^2 - x + 1) = x^3 - x^2 + x$$

Restamos:

$$(x^3 + 2x^2 - 5x + 2) - (x^3 - x^2 + x) \quad (83)$$

$$= x^3 + 2x^2 - 5x + 2 - x^3 + x^2 - x \quad (84)$$

$$= (x^3 - x^3) + (2x^2 + x^2) + (-5x - x) + 2 \quad (85)$$

$$= 0 + 3x^2 - 6x + 2 \quad (86)$$

$$= 3x^2 - 6x + 2 \quad (87)$$

Paso 3: Dividimos el nuevo término de mayor grado entre el término de mayor grado del divisor.

$$\frac{3x^2}{x^2} = 3$$

Este es el segundo término del cociente.

Paso 4: Multiplicamos todo el divisor por este término y lo restamos.

$$3 \cdot (x^2 - x + 1) = 3x^2 - 3x + 3$$

Restamos:

$$(3x^2 - 6x + 2) - (3x^2 - 3x + 3) \quad (88)$$

$$= 3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 + 3x - 3 \quad (89)$$

$$= (3x^2 - 3x^2) + (-6x + 3x) + (2 - 3) \quad (90)$$

$$= 0 - 3x - 1 \quad (91)$$

$$= -3x - 1 \quad (92)$$

Paso 5: Verificamos si podemos continuar.

El grado de $-3x - 1$ es 1, que es menor que el grado del divisor (que es 2).

Por lo tanto, $-3x - 1$ es el resto y la división ha terminado.

Paso 6: Escribimos el resultado.

- Cociente: $Q(x) = x + 3$

- Resto: $R(x) = -3x - 1$

Verificación: Comprobamos que $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$

$$D(x) \cdot Q(x) + R(x) = (x^2 - x + 1)(x + 3) + (-3x - 1) \quad (93)$$

Desarrollamos el producto:

$$(x^2 - x + 1)(x + 3) = x^3 + 3x^2 - x^2 - 3x + x + 3 \quad (94)$$

$$= x^3 + 2x^2 - 2x + 3 \quad (95)$$

Sumamos el resto:

$$x^3 + 2x^2 - 2x + 3 + (-3x - 1) = x^3 + 2x^2 - 2x + 3 - 3x - 1 \quad (96)$$

$$= x^3 + 2x^2 + (-2x - 3x) + (3 - 1) \quad (97)$$

$$= x^3 + 2x^2 - 5x + 2 \quad \checkmark \quad (98)$$

Respuesta:

- **Cociente:** $Q(x) = x + 3$

- **Resto:** $R(x) = -3x - 1$

Apartado 3

Solución

Enunciado: Realiza la siguiente operación: $3(x^2 - 1) - (x - 2)^2 \cdot x$.

Estrategia: Desarrollaremos cada parte y luego simplificaremos.

Desarrollo:

Paso 1: Desarrollamos el primer término: $3(x^2 - 1)$.

Aplicamos la propiedad distributiva:

$$3(x^2 - 1) = 3x^2 - 3 \quad (99)$$

Paso 2: Desarrollamos el segundo término: $(x - 2)^2 \cdot x$.

Primero desarrollamos $(x - 2)^2$ usando el producto notable:

$$(x - 2)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 \quad (100)$$

$$= x^2 - 4x + 4 \quad (101)$$

Ahora multiplicamos por x :

$$(x^2 - 4x + 4) \cdot x = x^3 - 4x^2 + 4x \quad (102)$$

Paso 3: Sustituimos en la expresión original.

$$3(x^2 - 1) - (x - 2)^2 \cdot x = (3x^2 - 3) - (x^3 - 4x^2 + 4x) \quad (103)$$

Paso 4: Eliminamos paréntesis y simplificamos.

$$= 3x^2 - 3 - x^3 + 4x^2 - 4x \quad (104)$$

$$= -x^3 + (3x^2 + 4x^2) - 4x - 3 \quad (105)$$

$$= -x^3 + 7x^2 - 4x - 3 \quad (106)$$

Respuesta: $-x^3 + 7x^2 - 4x - 3$

2.2. Ejercicio 27

Ejercicio 27

1. Desarrolla y simplifica: $(2x - 1)^2 + (x + 5)^2$.
2. Realiza la siguiente división de polinomios: $(2x^4 - 3x^3 + x - 5) : (x^2 + 2x - 3)$. Indica el cociente y el resto.
3. Realiza la siguiente operación: $x^2(x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1)$.

Apartado 1

Solución

Enunciado: Desarrolla y simplifica: $(2x - 1)^2 + (x + 5)^2$.

Estrategia: Aplicaremos los productos notables correspondientes y luego simplificaremos.

Desarrollo:

Paso 1: Desarrollamos el primer término: $(2x - 1)^2$.

Es un cuadrado de una diferencia: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Con $a = 2x$ y $b = 1$:

$$(2x - 1)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot (2x) \cdot 1 + 1^2 \quad (107)$$

$$= 4x^2 - 4x + 1 \quad (108)$$

Paso 2: Desarrollamos el segundo término: $(x + 5)^2$.

Es un cuadrado de una suma: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Con $a = x$ y $b = 5$:

$$(x + 5)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 \quad (109)$$

$$= x^2 + 10x + 25 \quad (110)$$

Paso 3: Sumamos ambos desarrollos.

$$(2x - 1)^2 + (x + 5)^2 = (4x^2 - 4x + 1) + (x^2 + 10x + 25) \quad (111)$$

$$= 4x^2 - 4x + 1 + x^2 + 10x + 25 \quad (112)$$

Paso 4: Agrupamos términos semejantes.

$$= (4x^2 + x^2) + (-4x + 10x) + (1 + 25) \quad (113)$$

$$= 5x^2 + 6x + 26 \quad (114)$$

Respuesta: $5x^2 + 6x + 26$

Apartado 2

Solución

Enunciado: Realiza la siguiente división de polinomios: $(2x^4 - 3x^3 + x - 5) : (x^2 + 2x - 3)$. Indica el cociente y el resto.

Estrategia: Aplicaremos el algoritmo de división de polinomios.

Desarrollo:

Datos:

- Dividendo: $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + x - 5 = 2x^4 - 3x^3 + 0x^2 + x - 5$
- Divisor: $D(x) = x^2 + 2x - 3$

Paso 1: Primer término del cociente.

$$\frac{2x^4}{x^2} = 2x^2$$

Multiplicamos: $2x^2 \cdot (x^2 + 2x - 3) = 2x^4 + 4x^3 - 6x^2$

Restamos:

$$(2x^4 - 3x^3 + 0x^2 + x - 5) - (2x^4 + 4x^3 - 6x^2) \quad (115)$$

$$= -3x^3 - 4x^3 + 6x^2 + x - 5 \quad (116)$$

$$= -7x^3 + 6x^2 + x - 5 \quad (117)$$

Paso 2: Segundo término del cociente.

$$\frac{-7x^3}{x^2} = -7x$$

Multiplicamos: $-7x \cdot (x^2 + 2x - 3) = -7x^3 - 14x^2 + 21x$

Restamos:

$$(-7x^3 + 6x^2 + x - 5) - (-7x^3 - 14x^2 + 21x) \quad (118)$$

$$= 6x^2 + 14x^2 + x - 21x - 5 \quad (119)$$

$$= 20x^2 - 20x - 5 \quad (120)$$

Paso 3: Tercer término del cociente.

$$\frac{20x^2}{x^2} = 20$$

Multiplicamos: $20 \cdot (x^2 + 2x - 3) = 20x^2 + 40x - 60$

Restamos:

$$(20x^2 - 20x - 5) - (20x^2 + 40x - 60) \quad (121)$$

$$= -20x - 40x - 5 + 60 \quad (122)$$

$$= -60x + 55 \quad (123)$$

Paso 4: Verificamos si podemos continuar.

El grado de $-60x + 55$ es 1, menor que el grado del divisor (2). La división termina.

Respuesta:

- **Cociente:** $Q(x) = 2x^2 - 7x + 20$
- **Resto:** $R(x) = -60x + 55$

Apartado 3

Solución

Enunciado: Realiza la siguiente operación: $x^2(x+1) - (x-1)(x^2+x+1)$.

Estrategia: Desarrollaremos cada parte y luego simplificaremos.

Desarrollo:

Paso 1: Desarrollamos el primer término: $x^2(x+1)$.

$$x^2(x+1) = x^3 + x^2 \quad (124)$$

Paso 2: Desarrollamos el segundo término: $(x-1)(x^2+x+1)$.

Aplicamos la propiedad distributiva:

$$(x-1)(x^2+x+1) = x(x^2+x+1) - 1(x^2+x+1) \quad (125)$$

$$= x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 \quad (126)$$

$$= x^3 - 1 \quad (127)$$

Observación: Esta es la fórmula de la diferencia de cubos: $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$

Paso 3: Sustituimos y simplificamos.

$$x^2(x+1) - (x-1)(x^2+x+1) = (x^3 + x^2) - (x^3 - 1) \quad (128)$$

$$= x^3 + x^2 - x^3 + 1 \quad (129)$$

$$= x^2 + 1 \quad (130)$$

Respuesta: $x^2 + 1$

2.3. Ejercicio 28

Ejercicio 28

1. Desarrolla y simplifica: $(x^2 + 2)^2 - 4x^2$.
2. Realiza la siguiente división de polinomios: $(4x^3 + 2x^2 - 1) : (2x^2 - x)$. Indica el cociente y el resto.
3. Realiza la siguiente operación: $5x(x^2 + 3) - (2x + 3)(x^2 - x)$.

Apartado 1

Solución

Enunciado: Desarrolla y simplifica: $(x^2 + 2)^2 - 4x^2$.

Estrategia: Desarrollaremos el cuadrado y luego simplificaremos.

Desarrollo:

Paso 1: Desarrollamos $(x^2 + 2)^2$.

Es un cuadrado de una suma con $a = x^2$ y $b = 2$:

$$(x^2 + 2)^2 = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 2 + 2^2 \quad (131)$$

$$= x^4 + 4x^2 + 4 \quad (132)$$

Paso 2: Sustituimos en la expresión original.

$$(x^2 + 2)^2 - 4x^2 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 \quad (133)$$

Paso 3: Simplificamos agrupando términos semejantes.

$$= x^4 + (4x^2 - 4x^2) + 4 \quad (134)$$

$$= x^4 + 0 + 4 \quad (135)$$

$$= x^4 + 4 \quad (136)$$

Respuesta: $x^4 + 4$

Observación

Interpretación interesante:

El resultado $x^4 + 4$ se puede escribir usando la identidad:

$$x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x)$$

Reordenando: $x^4 + 4 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$

Apartado 2

Solución

Enunciado: Realiza la siguiente división de polinomios: $(4x^3 + 2x^2 - 1) : (2x^2 - x)$. Indica el cociente y el resto.

Estrategia: Aplicaremos el algoritmo de división de polinomios.

Desarrollo:

Datos:

- Dividendo: $P(x) = 4x^3 + 2x^2 - 1 = 4x^3 + 2x^2 + 0x - 1$
- Divisor: $D(x) = 2x^2 - x$

Paso 1: Primer término del cociente.

$$\frac{4x^3}{2x^2} = 2x$$

Multiplicamos: $2x \cdot (2x^2 - x) = 4x^3 - 2x^2$

Restamos:

$$(4x^3 + 2x^2 + 0x - 1) - (4x^3 - 2x^2) \quad (137)$$

$$= 2x^2 + 2x^2 + 0x - 1 \quad (138)$$

$$= 4x^2 + 0x - 1 \quad (139)$$

$$= 4x^2 - 1 \quad (140)$$

Paso 2: Segundo término del cociente.

$$\frac{4x^2}{2x^2} = 2$$

Multiplicamos: $2 \cdot (2x^2 - x) = 4x^2 - 2x$

Restamos:

$$(4x^2 + 0x - 1) - (4x^2 - 2x) \quad (141)$$

$$= 0x + 2x - 1 \quad (142)$$

$$= 2x - 1 \quad (143)$$

Paso 3: Verificamos si podemos continuar.

El grado de $2x - 1$ es 1, menor que el grado del divisor (2). La división termina.

Respuesta:

- **Cociente:** $Q(x) = 2x + 2$
- **Resto:** $R(x) = 2x - 1$

Apartado 3**Solución**

Enunciado: Realiza la siguiente operación: $5x(x^2 + 3) - (2x + 3)(x^2 - x)$.

Estrategia: Desarrollaremos cada parte y luego simplificaremos.

Desarrollo:

Paso 1: Desarrollamos el primer término: $5x(x^2 + 3)$.

$$5x(x^2 + 3) = 5x^3 + 15x \quad (144)$$

Paso 2: Desarrollamos el segundo término: $(2x + 3)(x^2 - x)$.

$$(2x + 3)(x^2 - x) = 2x(x^2 - x) + 3(x^2 - x) \quad (145)$$

$$= 2x^3 - 2x^2 + 3x^2 - 3x \quad (146)$$

$$= 2x^3 + x^2 - 3x \quad (147)$$

Paso 3: Sustituimos y simplificamos.

$$5x(x^2 + 3) - (2x + 3)(x^2 - x) = (5x^3 + 15x) - (2x^3 + x^2 - 3x) \quad (148)$$

$$= 5x^3 + 15x - 2x^3 - x^2 + 3x \quad (149)$$

$$= (5x^3 - 2x^3) - x^2 + (15x + 3x) \quad (150)$$

$$= 3x^3 - x^2 + 18x \quad (151)$$

Respuesta: $3x^3 - x^2 + 18x$

2.4. Ejercicio 29

Ejercicio 29

1. Desarrolla y simplifica: $(x - 2)(x + 2) - (x - 5)^2$.
2. Realiza la siguiente división de polinomios: $(3x^5 - x^4 + 2x^2 + x) : (x^3 - x + 2)$. Indica el cociente y el resto.
3. Realiza la siguiente operación: $x(x^2 + 1)^2 - x^5 - 2x^3$.

Apartado 1

Solución

Enunciado: Desarrolla y simplifica: $(x - 2)(x + 2) - (x - 5)^2$.

Estrategia: Aplicaremos los productos notables correspondientes.

Desarrollo:

Paso 1: Desarrollamos $(x - 2)(x + 2)$.

Es una suma por diferencia: $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

$$(x - 2)(x + 2) = x^2 - 2^2 \quad (152)$$

$$= x^2 - 4 \quad (153)$$

Paso 2: Desarrollamos $(x - 5)^2$.

Es un cuadrado de una diferencia:

$$(x - 5)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 \quad (154)$$

$$= x^2 - 10x + 25 \quad (155)$$

Paso 3: Sustituimos y simplificamos.

$$(x - 2)(x + 2) - (x - 5)^2 = (x^2 - 4) - (x^2 - 10x + 25) \quad (156)$$

$$= x^2 - 4 - x^2 + 10x - 25 \quad (157)$$

$$= (x^2 - x^2) + 10x + (-4 - 25) \quad (158)$$

$$= 0 + 10x - 29 \quad (159)$$

$$= 10x - 29 \quad (160)$$

Respuesta: $10x - 29$

Apartado 2

Solución

Enunciado: Realiza la siguiente división de polinomios: $(3x^5 - x^4 + 2x^2 + x) : (x^3 - x + 2)$. Indica el cociente y el resto.

Estrategia: Aplicaremos el algoritmo de división de polinomios.

Desarrollo:

Datos:

- Dividendo: $P(x) = 3x^5 - x^4 + 0x^3 + 2x^2 + x + 0$
- Divisor: $D(x) = x^3 - x + 2 = x^3 + 0x^2 - x + 2$

Paso 1: Primer término del cociente.

$$\frac{3x^5}{x^3} = 3x^2$$

Multiplicamos: $3x^2 \cdot (x^3 - x + 2) = 3x^5 - 3x^3 + 6x^2$

Restamos:

$$(3x^5 - x^4 + 0x^3 + 2x^2 + x + 0) - (3x^5 - 3x^3 + 6x^2) \quad (161)$$

$$= -x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 6x^2 + x \quad (162)$$

$$= -x^4 + 3x^3 - 4x^2 + x \quad (163)$$

Paso 2: Segundo término del cociente.

$$\frac{-x^4}{x^3} = -x$$

Multiplicamos: $-x \cdot (x^3 - x + 2) = -x^4 + x^2 - 2x$

Restamos:

$$(-x^4 + 3x^3 - 4x^2 + x) - (-x^4 + x^2 - 2x) \quad (164)$$

$$= 3x^3 - 4x^2 - x^2 + x + 2x \quad (165)$$

$$= 3x^3 - 5x^2 + 3x \quad (166)$$

Paso 3: Tercer término del cociente.

$$\frac{3x^3}{x^3} = 3$$

Multiplicamos: $3 \cdot (x^3 - x + 2) = 3x^3 - 3x + 6$

Restamos:

$$(3x^3 - 5x^2 + 3x) - (3x^3 - 3x + 6) \quad (167)$$

$$= -5x^2 + 3x + 3x - 6 \quad (168)$$

$$= -5x^2 + 6x - 6 \quad (169)$$

Paso 4: El grado de $-5x^2 + 6x - 6$ es 2, menor que 3. La división termina.

Respuesta:

- **Cociente:** $Q(x) = 3x^2 - x + 3$
- **Resto:** $R(x) = -5x^2 + 6x - 6$

Apartado 3**Solución**

Enunciado: Realiza la siguiente operación: $x(x^2 + 1)^2 - x^5 - 2x^3$.

Estrategia: Desarrollaremos el cuadrado y luego simplificaremos.

Desarrollo:

Paso 1: Desarrollamos $(x^2 + 1)^2$.

$$(x^2 + 1)^2 = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 1 + 1^2 \quad (170)$$

$$= x^4 + 2x^2 + 1 \quad (171)$$

Paso 2: Multiplicamos por x .

$$x(x^2 + 1)^2 = x(x^4 + 2x^2 + 1) \quad (172)$$

$$= x^5 + 2x^3 + x \quad (173)$$

Paso 3: Sustituimos y simplificamos.

$$x(x^2 + 1)^2 - x^5 - 2x^3 = (x^5 + 2x^3 + x) - x^5 - 2x^3 \quad (174)$$

$$= x^5 - x^5 + 2x^3 - 2x^3 + x \quad (175)$$

$$= x \quad (176)$$

Respuesta: x

2.5. Ejercicio 30

Ejercicio 30

1. Desarrolla y simplifica: $(3x + 2)(3x - 2) - (x + 1)^2$.
2. Realiza la siguiente división de polinomios: $(x^4 - 1) : (x^2 + 1)$. Indica el cociente y el resto.
3. Realiza la siguiente operación: $(x^2 - 3x + 1) \cdot (x + 2) - x^3$.

Apartado 1

Solución

Enunciado: Desarrolla y simplifica: $(3x + 2)(3x - 2) - (x + 1)^2$.

Estrategia: Aplicaremos los productos notables correspondientes.

Desarrollo:

Paso 1: Desarrollamos $(3x + 2)(3x - 2)$.

Es una suma por diferencia con $a = 3x$ y $b = 2$:

$$(3x + 2)(3x - 2) = (3x)^2 - 2^2 \quad (177)$$

$$= 9x^2 - 4 \quad (178)$$

Paso 2: Desarrollamos $(x + 1)^2$.

Es un cuadrado de una suma:

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 \quad (179)$$

$$= x^2 + 2x + 1 \quad (180)$$

Paso 3: Sustituimos y simplificamos.

$$(3x + 2)(3x - 2) - (x + 1)^2 = (9x^2 - 4) - (x^2 + 2x + 1) \quad (181)$$

$$= 9x^2 - 4 - x^2 - 2x - 1 \quad (182)$$

$$= (9x^2 - x^2) - 2x + (-4 - 1) \quad (183)$$

$$= 8x^2 - 2x - 5 \quad (184)$$

Respuesta: $8x^2 - 2x - 5$

Apartado 2

Solución

Enunciado: Realiza la siguiente división de polinomios: $(x^4 - 1) : (x^2 + 1)$. Indica el cociente y el resto.

Estrategia: Aplicaremos el algoritmo de división de polinomios.

Desarrollo:

Datos:

- Dividendo: $P(x) = x^4 - 1 = x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 1$
- Divisor: $D(x) = x^2 + 1$

Paso 1: Primer término del cociente.

$$\frac{x^4}{x^2} = x^2$$

Multiplicamos: $x^2 \cdot (x^2 + 1) = x^4 + x^2$

Restamos:

$$(x^4 + 0x^2 - 1) - (x^4 + x^2) \quad (185)$$

$$= 0x^4 - x^2 - 1 \quad (186)$$

$$= -x^2 - 1 \quad (187)$$

Paso 2: Segundo término del cociente.

$$\frac{-x^2}{x^2} = -1$$

Multiplicamos: $-1 \cdot (x^2 + 1) = -x^2 - 1$

Restamos:

$$(-x^2 - 1) - (-x^2 - 1) \quad (188)$$

$$= -x^2 + x^2 - 1 + 1 \quad (189)$$

$$= 0 \quad (190)$$

Paso 3: El resto es 0. La división es exacta.

Respuesta:

- **Cociente:** $Q(x) = x^2 - 1$
- **Resto:** $R(x) = 0$

Observación

Interpretación algebraica:

Esta división corresponde a la factorización:

$$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$$

Y podemos factorizar aún más $x^2 - 1$:

$$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$$

Esto es una aplicación de la fórmula de diferencia de cuadrados aplicada dos veces:

- $x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1^2 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$
- $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

Apartado 3

Solución

Enunciado: Realiza la siguiente operación: $(x^2 - 3x + 1) \cdot (x + 2) - x^3$.

Estrategia: Desarrollaremos el producto y luego simplificaremos.

Desarrollo:

Paso 1: Desarrollamos $(x^2 - 3x + 1) \cdot (x + 2)$.

Aplicamos la propiedad distributiva:

$$(x^2 - 3x + 1)(x + 2) = x^2 \cdot x + x^2 \cdot 2 - 3x \cdot x - 3x \cdot 2 + 1 \cdot x + 1 \cdot 2 \quad (191)$$

$$= x^3 + 2x^2 - 3x^2 - 6x + x + 2 \quad (192)$$

$$= x^3 + (2x^2 - 3x^2) + (-6x + x) + 2 \quad (193)$$

$$= x^3 - x^2 - 5x + 2 \quad (194)$$

Paso 2: Restamos x^3 .

$$(x^2 - 3x + 1) \cdot (x + 2) - x^3 = (x^3 - x^2 - 5x + 2) - x^3 \quad (195)$$

$$= x^3 - x^3 - x^2 - 5x + 2 \quad (196)$$

$$= -x^2 - 5x + 2 \quad (197)$$

Respuesta: $-x^2 - 5x + 2$

Conclusiones Generales

Resumen de Conceptos Clave

En esta colección de ejercicios (21-30) hemos trabajado exhaustivamente con:

1. **Teorema del Resto:** Herramienta fundamental para calcular restos de divisiones y determinar raíces de polinomios.
2. **Regla de Ruffini:** Método eficiente para dividir polinomios entre binomios de la forma $(x - a)$.
3. **Valor Numérico:** Evaluación de polinomios en puntos específicos.
4. **Productos Notables:** Fórmulas para desarrollar expresiones algebraicas comunes.
5. **División de Polinomios:** Algoritmo general para dividir polinomios de cualquier grado.

Errores Comunes a Evitar

- Confundir el signo al dividir entre $(x + a)$ vs $(x - a)$ en la Regla de Ruffini.
- Olvidar incluir coeficientes cero en polinomios incompletos.
- Error en signos al restar expresiones entre paréntesis.
- Confundir $(-a)^{par} = +$ con $(-a)^{impar} = -$.
- No verificar los resultados.

Estrategias de Estudio

1. **Dominar los productos notables:** Son la base de muchas simplificaciones.
2. **Practicar la Regla de Ruffini:** Hasta automatizar el proceso.
3. **Verificar siempre:** Usar el Teorema del Resto o expandir para comprobar.
4. **Organizar el trabajo:** Escribir todos los pasos de forma ordenada.
5. **Entender, no memorizar:** Comprender el porqué de cada paso.

Fin del documento de soluciones - Ejercicios 21 al 30

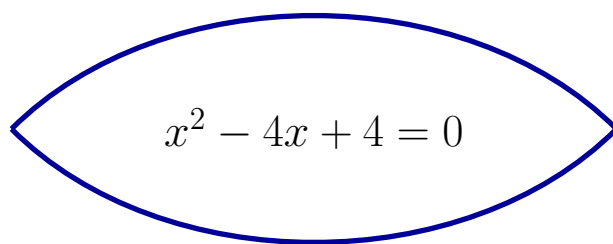
Soluciones Completas

Ejercicios 31 al 40

Ecuaciones de Segundo Grado y Polinómicas

Matemáticas 4º ESO - Opción B

Repaso Global - 1ª Evaluación


$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

Profesor: Ladislao Jáñez Blanco

Curso 2025-2026

25 de febrero de 2026

Índice

1. Introducción	2
1.1. Objetivos Pedagógicos	2
1.2. Contenidos Abordados	2
2. Ejercicio 31	3
2.1. Enunciado	3
2.2. Apartado 1: $x^3 - 4x^2 - 5x = 0$	3
2.2.1. Paso 1: Identificación del factor común	3
2.2.2. Paso 2: Extracción del factor común	3
2.2.3. Paso 3: Aplicación del teorema del producto nulo	3
2.2.4. Paso 4: Resolución de $x^2 - 4x - 5 = 0$	4
2.2.5. Paso 5: Aplicación nuevamente del teorema del producto nulo	4
2.2.6. Paso 6: Conjunto solución completo	4
2.2.7. Verificación de las soluciones	5
2.2.8. Representación gráfica	5
2.3. Apartado 2: $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$	6
2.3.1. Paso 1: Cambio de variable	6
2.3.2. Paso 2: Resolución de la ecuación cuadrática en t	6
2.3.3. Paso 3: Deshacemos el cambio de variable	7
2.3.4. Paso 4: Conjunto solución completo	7
2.3.5. Verificación de las soluciones	7
2.3.6. Representación gráfica	8
2.4. Apartado 3: $2x^2 + x - 3 = 0$	9
2.4.1. Método 1: Fórmula general del discriminante	9
2.4.2. Método 2: Factorización	10
2.4.3. Verificación de las soluciones	11
2.4.4. Representación gráfica	12
3. Ejercicio 32	13
3.1. Enunciado	13
3.2. Apartado 1: $3x^4 - 12x^2 = 0$	13
3.2.1. Paso 1: Extracción del factor común	13
3.2.2. Paso 2: Factorización adicional	13
3.2.3. Paso 3: Aplicación del teorema del producto nulo	14
3.2.4. Verificación	14
3.2.5. Representación gráfica	14
3.3. Apartado 2: $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$	15
3.3.1. Paso 1: Cambio de variable	15
3.3.2. Paso 2: Resolución mediante la fórmula general	15
3.3.3. Paso 3: Deshaciendo el cambio de variable	16
3.3.4. Verificación	16
3.4. Apartado 3: $x^2 - 6x + 5 = 0$	17
3.4.1. Método 1: Factorización	17
3.4.2. Método 2: Fórmula general	17
3.4.3. Verificación	18

3.4.4.	Representación gráfica	18
4.	Ejercicio 33	19
4.1.	Enunciado	19
4.2.	Apartado 1: $x^3 - 2x^2 + x = 0$	19
4.2.1.	Paso 1: Extracción del factor común x	19
4.2.2.	Paso 2: Reconocimiento de trinomio cuadrado perfecto	19
4.2.3.	Paso 3: Aplicación del teorema del producto nulo	19
4.2.4.	Verificación	20
4.2.5.	Representación gráfica	20
4.3.	Apartado 2: $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$	21
4.3.1.	Paso 1: Cambio de variable	21
4.3.2.	Paso 2: Factorización	21
4.3.3.	Paso 3: Soluciones en t	21
4.3.4.	Paso 4: Deshaciendo el cambio	21
4.3.5.	Verificación	21
4.4.	Apartado 3: $3x^2 + 5x - 2 = 0$	22
4.4.1.	Paso 1: Identificación de coeficientes	22
4.4.2.	Paso 2: Cálculo del discriminante	22
4.4.3.	Paso 3: Aplicación de la fórmula	22
4.4.4.	Verificación	23
5.	Ejercicio 34	24
5.1.	Enunciado	24
5.2.	Apartado 1: $2x^3 + x^2 - x = 0$	24
5.2.1.	Paso 1: Extracción de factor común	24
5.2.2.	Paso 2: Factorización del trinomio	24
5.2.3.	Paso 3: Soluciones	24
5.2.4.	Verificación	25
5.3.	Apartado 2: $x^4 + x^2 - 2 = 0$	26
5.3.1.	Cambio de variable	26
5.3.2.	Factorización	26
5.3.3.	Soluciones en t	26
5.3.4.	Deshaciendo el cambio	26
5.3.5.	Verificación	26
5.4.	Apartado 3: $x^2 + 7x + 10 = 0$	27
5.4.1.	Factorización	27
5.4.2.	Soluciones	27
5.4.3.	Verificación	27
6.	Ejercicio 35	28
6.1.	Enunciado	28
6.2.	Apartado 1: $x^4 - 8x^3 + 16x^2 = 0$	28
6.2.1.	Paso 1: Extracción de factor común	28
6.2.2.	Paso 2: Reconocimiento de cuadrado perfecto	28
6.2.3.	Paso 3: Soluciones	28
6.2.4.	Verificación	28

6.3.	Apartado 2: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$	29
6.3.1.	Cambio de variable	29
6.3.2.	Factorización	29
6.3.3.	Soluciones en t	29
6.3.4.	Deshaciendo el cambio	29
6.3.5.	Verificación	29
6.4.	Apartado 3: $5x^2 - 8x + 3 = 0$	30
6.4.1.	Fórmula general	30
6.4.2.	Verificación	30
7.	Ejercicio 36	31
7.1.	Enunciado	31
7.2.	Apartado 1: $x^3 + 6x^2 + 9x = 0$	31
7.2.1.	Factorización	31
7.2.2.	Soluciones	31
7.2.3.	Verificación	31
7.3.	Apartado 2: $9x^4 - 13x^2 + 4 = 0$	32
7.3.1.	Cambio de variable	32
7.3.2.	Fórmula general	32
7.3.3.	Deshaciendo el cambio	32
7.3.4.	Verificación	32
7.4.	Apartado 3: $x^2 - 2x - 15 = 0$	33
7.4.1.	Factorización	33
7.4.2.	Soluciones	33
7.4.3.	Verificación	33
8.	Ejercicio 37	34
8.1.	Enunciado	34
8.2.	Apartado 1: $x^4 - x^3 = 0$	34
8.2.1.	Factorización	34
8.2.2.	Soluciones	34
8.2.3.	Verificación	34
8.3.	Apartado 2: $x^4 - 13x^2 + 42 = 0$	35
8.3.1.	Cambio de variable	35
8.3.2.	Factorización	35
8.3.3.	Soluciones	35
8.3.4.	Verificación	35
8.4.	Apartado 3: $-x^2 + 3x + 4 = 0$	36
8.4.1.	Método: multiplicar por -1	36
8.4.2.	Factorización	36
8.4.3.	Soluciones	36
8.4.4.	Verificación	36
9.	Ejercicio 38	37
9.1.	Enunciado	37
9.2.	Apartado 1: $2x^4 - 18x^2 = 0$	37
9.2.1.	Factorización	37

9.2.2.	Soluciones	37
9.2.3.	Verificación	37
9.3.	Apartado 2: $x^4 - 6x^2 - 27 = 0$	38
9.3.1.	Cambio de variable	38
9.3.2.	Fórmula general	38
9.3.3.	Deshaciendo el cambio	38
9.3.4.	Verificación	38
9.4.	Apartado 3: $x^2 + 10x + 25 = 0$	39
9.4.1.	Reconocimiento de cuadrado perfecto	39
9.4.2.	Solución	39
9.4.3.	Verificación	39
10.	Ejercicio 39	40
10.1.	Enunciado	40
10.2.	Apartado 1: $4x^3 - 16x = 0$	40
10.2.1.	Factorización	40
10.2.2.	Soluciones	40
10.2.3.	Verificación	40
10.3.	Apartado 2: $x^4 - 16 = 0$	41
10.3.1.	Diferencia de cuadrados	41
10.3.2.	Soluciones	41
10.3.3.	Verificación	41
10.4.	Apartado 3: $x^2 + x + 1 = 0$	42
10.4.1.	Fórmula general	42
10.4.2.	Interpretación gráfica	42
11.	Ejercicio 40	43
11.1.	Enunciado	43
11.2.	Apartado 1: $x^3 + x^2 - 2x = 0$	43
11.2.1.	Factorización	43
11.2.2.	Soluciones	43
11.2.3.	Verificación	43
11.3.	Apartado 2: $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$	44
11.3.1.	Cambio de variable	44
11.3.2.	Fórmula general	44
11.3.3.	Deshaciendo el cambio	44
11.3.4.	Verificación	44
11.4.	Apartado 3: $4x^2 - 12x + 9 = 0$	45
11.4.1.	Reconocimiento de cuadrado perfecto	45
11.4.2.	Solución	45
11.4.3.	Verificación	45
11.4.4.	Representación gráfica	45
12.	Conclusiones y Resumen	46
12.1.	Resumen de Métodos Utilizados	46
12.2.	Tabla Resumen de Soluciones	47
12.3.	Reflexiones Finales	48

1. Introducción

Este documento presenta las soluciones completas, detalladas y rigurosamente justificadas de los ejercicios 31 al 40 del examen de repaso de Matemáticas de 4º ESO. Todos los ejercicios pertenecen a la sección **N7: Ecuaciones de Segundo Grado y Polinómicas**.

1.1. Objetivos Pedagógicos

- Demostrar rigor matemático absoluto en cada paso
- Justificar todas las transformaciones algebraicas
- Explicar los métodos utilizados y su elección
- Proporcionar visualizaciones gráficas cuando sea útil
- Advertir sobre errores comunes
- Consolidar el aprendizaje profundo de ecuaciones

1.2. Contenidos Abordados

Los ejercicios cubren tres tipos principales de ecuaciones:

1. **Ecuaciones factorizables:** Extracción de factor común y factorización
2. **Ecuaciones bicuadradas:** Sustitución y resolución mediante cambio de variable
3. **Ecuaciones de segundo grado:** Fórmula general del discriminante

2. Ejercicio 31

2.1. Enunciado

Ejercicio 31

1. Resuelve la ecuación factorizando primero: $x^3 - 4x^2 - 5x = 0$
2. Resuelve la ecuación bicuadrada: $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$
3. Resuelve la ecuación de segundo grado: $2x^2 + x - 3 = 0$

2.2. Apartado 1: $x^3 - 4x^2 - 5x = 0$

Método Utilizado

Utilizaremos el método de **factorización por extracción de factor común**, seguido de la resolución de la ecuación cuadrática resultante.

2.2.1. Paso 1: Identificación del factor común

Observamos la ecuación:

$$x^3 - 4x^2 - 5x = 0$$

Todos los términos contienen la variable x elevada a una potencia positiva. Por tanto, podemos extraer x como factor común.

Justificación teórica: Si un polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x$ no tiene término independiente, entonces x divide a $P(x)$ y podemos escribir $P(x) = x \cdot Q(x)$, donde $Q(x)$ es un polinomio de grado $n - 1$.

2.2.2. Paso 2: Extracción del factor común

$$x^3 - 4x^2 - 5x = x(x^2 - 4x - 5) = 0$$

Verificación: Expandimos $x(x^2 - 4x - 5)$:

$$x \cdot x^2 + x \cdot (-4x) + x \cdot (-5) = x^3 - 4x^2 - 5x \quad \checkmark$$

2.2.3. Paso 3: Aplicación del teorema del producto nulo

Nota Importante

Teorema del Producto Nulo: Si $A \cdot B = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$ (o ambos). Este teorema es consecuencia de que $\mathbb{R}$ es un dominio de integridad, es decir, no tiene divisores de cero.

Aplicamos el teorema a nuestra ecuación factorizada:

$$x(x^2 - 4x - 5) = 0$$

Esto implica que:

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x^2 - 4x - 5 = 0$$

2.2.4. Paso 4: Resolución de $x^2 - 4x - 5 = 0$

Esta es una ecuación de segundo grado. Intentaremos factorizarla buscando dos números que multiplicados den -5 y sumados den -4 .

Buscamos p y q tales que:

$$\begin{aligned} p \cdot q &= -5 \\ p + q &= -4 \end{aligned}$$

Probamos combinaciones de factores de -5 : $(1, -5)$, $(-1, 5)$, $(5, -1)$, $(-5, 1)$.

- Si $p = 1$ y $q = -5$: $p + q = 1 + (-5) = -4$ ✓
- Verificación: $p \cdot q = 1 \cdot (-5) = -5$ ✓

Por tanto, podemos factorizar:

$$x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x - 5)$$

Verificación: Expandimos $(x + 1)(x - 5)$:

$$\begin{aligned} (x + 1)(x - 5) &= x \cdot x + x \cdot (-5) + 1 \cdot x + 1 \cdot (-5) \\ &= x^2 - 5x + x - 5 \\ &= x^2 - 4x - 5 \quad \checkmark \end{aligned}$$

2.2.5. Paso 5: Aplicación nuevamente del teorema del producto nulo

$$(x + 1)(x - 5) = 0$$

Esto implica:

$$x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad x - 5 = 0$$

Resolviendo cada ecuación lineal:

$$\begin{aligned} x + 1 = 0 &\implies x = -1 \\ x - 5 = 0 &\implies x = 5 \end{aligned}$$

2.2.6. Paso 6: Conjunto solución completo

Reuniendo todas las soluciones:

$$x = 0, \quad x = -1, \quad x = 5$$

Solución

$$S = \{-1, 0, 5\}$$

2.2.7. Verificación de las soluciones

Es fundamental verificar que nuestras soluciones satisfacen la ecuación original.

Para $x = 0$:

$$0^3 - 4(0)^2 - 5(0) = 0 - 0 - 0 = 0 \quad \checkmark$$

Para $x = -1$:

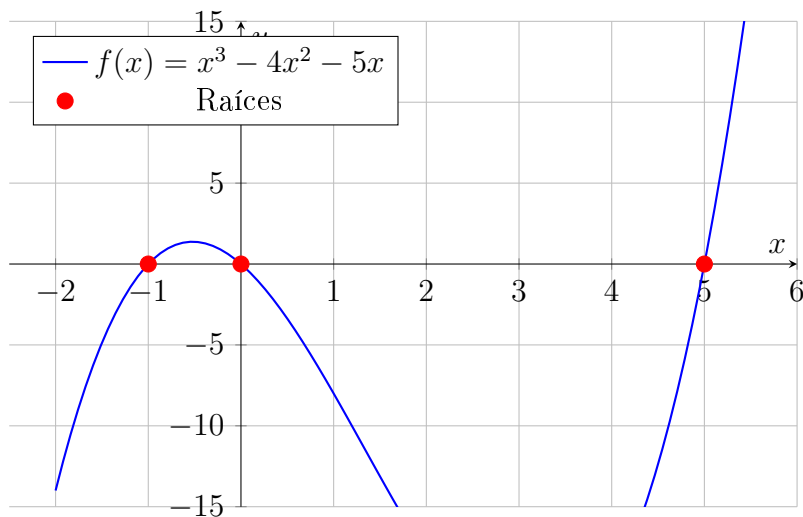
$$(-1)^3 - 4(-1)^2 - 5(-1) = -1 - 4 + 5 = 0 \quad \checkmark$$

Para $x = 5$:

$$5^3 - 4(5)^2 - 5(5) = 125 - 100 - 25 = 0 \quad \checkmark$$

2.2.8. Representación gráfica

Gráfica de $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x$



Interpretación gráfica: Las raíces de la ecuación son los puntos donde la curva corta al eje x . Observamos tres intersecciones en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 5$.

2.3. Apartado 2: $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ **Método Utilizado**

Utilizaremos el método de **sustitución para ecuaciones bicuadradas**. Una ecuación bicuadrada es aquella de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (sin términos impares).

2.3.1. Paso 1: Cambio de variable

Realizamos la sustitución:

$$t = x^2$$

Entonces:

$$t^2 = (x^2)^2 = x^4$$

Sustituyendo en la ecuación original:

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \implies t^2 - 10t + 9 = 0$$

Justificación: Este cambio de variable transforma una ecuación de cuarto grado en una ecuación de segundo grado, que sabemos resolver mediante la fórmula general o factorización.

2.3.2. Paso 2: Resolución de la ecuación cuadrática en t

Intentaremos factorizar $t^2 - 10t + 9 = 0$.

Buscamos p y q tales que:

$$p \cdot q = 9$$

$$p + q = -10$$

Factores de 9: $(1, 9)$, $(-1, -9)$, $(3, 3)$, $(-3, -3)$.

■ Si $p = -1$ y $q = -9$: $p + q = -1 + (-9) = -10$ ✓

■ Verificación: $p \cdot q = (-1) \cdot (-9) = 9$ ✓

Por tanto:

$$t^2 - 10t + 9 = (t - 1)(t - 9) = 0$$

Verificación: Expandimos:

$$\begin{aligned} (t - 1)(t - 9) &= t^2 - 9t - t + 9 \\ &= t^2 - 10t + 9 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Aplicamos el teorema del producto nulo:

$$(t - 1)(t - 9) = 0$$

Por tanto:

$$t - 1 = 0 \quad \text{o} \quad t - 9 = 0$$

Resolviendo:

$$t = 1$$

$$t = 9$$

2.3.3. Paso 3: Deshacemos el cambio de variable

Recordamos que $t = x^2$, por tanto:

Caso 1: $t = 1$

$$x^2 = 1$$

Para resolver esta ecuación, aplicamos raíz cuadrada en ambos lados. Debemos considerar ambas raíces (positiva y negativa):

$$x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Es decir:

$$x = 1 \quad \text{o} \quad x = -1$$

Justificación matemática: Si $x^2 = a$ con $a > 0$, entonces $x = \sqrt{a}$ o $x = -\sqrt{a}$, ya que tanto $(\sqrt{a})^2 = a$ como $(-\sqrt{a})^2 = a$.

Caso 2: $t = 9$

$$x^2 = 9$$

Aplicando raíz cuadrada:

$$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Es decir:

$$x = 3 \quad \text{o} \quad x = -3$$

2.3.4. Paso 4: Conjunto solución completo

Reuniendo todas las soluciones:

$$x = -3, \quad x = -1, \quad x = 1, \quad x = 3$$

Solución

$$S = \{-3, -1, 1, 3\}$$

2.3.5. Verificación de las soluciones

Para $x = 1$:

$$1^4 - 10(1)^2 + 9 = 1 - 10 + 9 = 0 \quad \checkmark$$

Para $x = -1$:

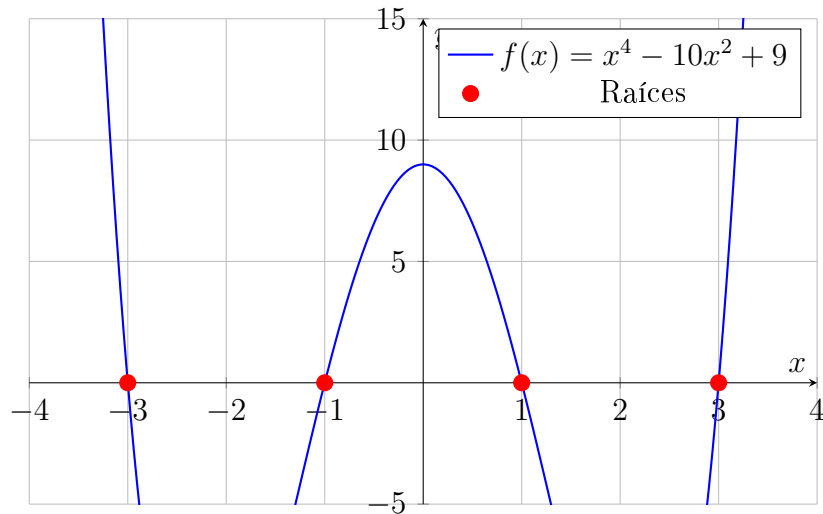
$$(-1)^4 - 10(-1)^2 + 9 = 1 - 10 + 9 = 0 \quad \checkmark$$

Para $x = 3$:

$$3^4 - 10(3)^2 + 9 = 81 - 90 + 9 = 0 \quad \checkmark$$

Para $x = -3$:

$$(-3)^4 - 10(-3)^2 + 9 = 81 - 90 + 9 = 0 \quad \checkmark$$

2.3.6. Representación gráficaGráfica de $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ 

Observación: La gráfica es simétrica respecto al eje y , lo cual es coherente con el hecho de que solo aparecen potencias pares de x (función par).

2.4. Apartado 3: $2x^2 + x - 3 = 0$

Método Utilizado

Utilizaremos la **fórmula general de la ecuación de segundo grado** (fórmula del discriminante). También la resolveremos por factorización para comparar métodos.

2.4.1. Método 1: Fórmula general del discriminante

Una ecuación de segundo grado general tiene la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{con } a \neq 0$$

En nuestro caso:

$$2x^2 + x - 3 = 0$$

Identificamos los coeficientes:

$$a = 2$$

$$b = 1$$

$$c = -3$$

Paso 1: Cálculo del discriminante

El discriminante se define como:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Justificación: El discriminante determina la naturaleza de las raíces:

- Si $\Delta > 0$: dos raíces reales distintas
- Si $\Delta = 0$: una raíz real doble (raíz múltiple)
- Si $\Delta < 0$: no hay raíces reales (raíces complejas conjugadas)

Calculamos:

$$\begin{aligned}\Delta &= 1^2 - 4(2)(-3) \\ &= 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) \\ &= 1 - (-24) \\ &= 1 + 24 \\ &= 25\end{aligned}$$

Como $\Delta = 25 > 0$, la ecuación tiene **dos raíces reales distintas**.

Paso 2: Aplicación de la fórmula general

La fórmula general es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Deducción (opcional): Esta fórmula se obtiene completando el cuadrado en la ecuación general $ax^2 + bx + c = 0$.

Sustituimos los valores:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2}$$

Calculamos $\sqrt{25}$:

$$\sqrt{25} = 5$$

Justificación: $\sqrt{25} = 5$ porque $5^2 = 25$ y por definición $\sqrt{a} \geq 0$ para $a \geq 0$.

Por tanto:

$$x = \frac{-1 \pm 5}{4}$$

Esto nos da dos soluciones:

Solución 1 (signo positivo):

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-1 + 5}{4} \\ &= \frac{4}{4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Solución 2 (signo negativo):

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-1 - 5}{4} \\ &= \frac{-6}{4} \\ &= -\frac{6}{4} \end{aligned}$$

Simplificamos la fracción $-\frac{6}{4}$ dividiendo numerador y denominador por su MCD (que es 2):

$$x_2 = -\frac{6 \div 2}{4 \div 2} = -\frac{3}{2}$$

Solución

$$S = \left\{ -\frac{3}{2}, 1 \right\}$$

2.4.2. Método 2: Factorización

Intentaremos factorizar $2x^2 + x - 3$.

Para una ecuación $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 1$, buscamos dos números p y q tales que:

$$\begin{aligned} p \cdot q &= a \cdot c = 2 \cdot (-3) = -6 \\ p + q &= b = 1 \end{aligned}$$

Buscamos pares de factores de -6 : $(1, -6)$, $(-1, 6)$, $(2, -3)$, $(-2, 3)$.

- Si $p = 3$ y $q = -2$: $p + q = 3 + (-2) = 1$ ✓

- Verificación: $p \cdot q = 3 \cdot (-2) = -6 \quad \checkmark$

Descomponemos el término central:

$$2x^2 + x - 3 = 2x^2 + 3x - 2x - 3$$

Agrupamos y factorizamos:

$$\begin{aligned} &= (2x^2 + 3x) + (-2x - 3) \\ &= x(2x + 3) - 1(2x + 3) \\ &= (x - 1)(2x + 3) \end{aligned}$$

Verificación: Expandimos $(x - 1)(2x + 3)$:

$$\begin{aligned} (x - 1)(2x + 3) &= x \cdot 2x + x \cdot 3 - 1 \cdot 2x - 1 \cdot 3 \\ &= 2x^2 + 3x - 2x - 3 \\ &= 2x^2 + x - 3 \quad \checkmark \end{aligned}$$

La ecuación factorizada es:

$$(x - 1)(2x + 3) = 0$$

Por el teorema del producto nulo:

$$x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad 2x + 3 = 0$$

Resolviendo:

$$\begin{aligned} x - 1 = 0 &\implies x = 1 \\ 2x + 3 = 0 &\implies 2x = -3 \implies x = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Obtenemos el mismo resultado: $S = \left\{-\frac{3}{2}, 1\right\} \quad \checkmark$

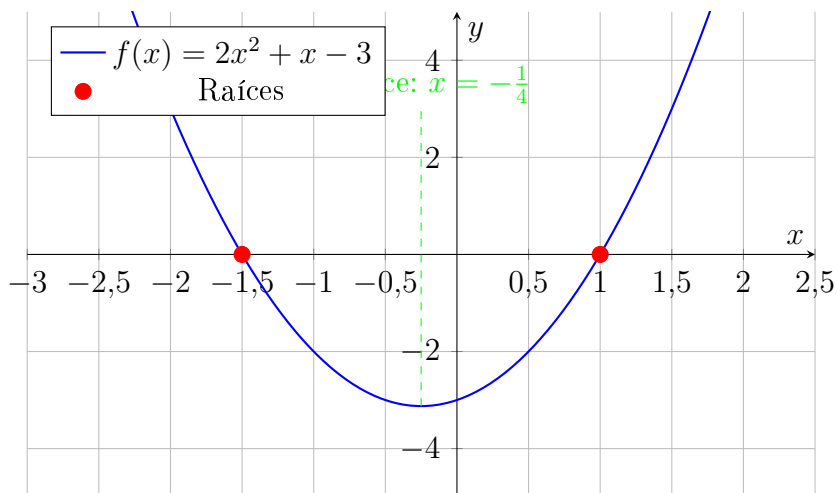
2.4.3. Verificación de las soluciones

Para $x = 1$:

$$2(1)^2 + 1 - 3 = 2 + 1 - 3 = 0 \quad \checkmark$$

Para $x = -\frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned} 2\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right) - 3 &= 2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 3 \\ &= \frac{18}{4} - \frac{3}{2} - 3 \\ &= \frac{9}{2} - \frac{3}{2} - 3 \\ &= \frac{6}{2} - 3 \\ &= 3 - 3 = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

2.4.4. Representación gráficaGráfica de $f(x) = 2x^2 + x - 3$ **Observaciones:**

- La parábola abre hacia arriba ($a = 2 > 0$)
- El vértice se encuentra en $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{4}$
- Las raíces están simétricamente distribuidas respecto al eje de simetría

3. Ejercicio 32

3.1. Enunciado

Ejercicio 32

1. Resuelve la ecuación factorizando primero: $3x^4 - 12x^2 = 0$
2. Resuelve la ecuación bicuadrada: $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$
3. Resuelve la ecuación de segundo grado: $x^2 - 6x + 5 = 0$

3.2. Apartado 1: $3x^4 - 12x^2 = 0$

Método Utilizado

Método de **factorización**: extracción de factor común y aplicación del teorema del producto nulo.

3.2.1. Paso 1: Extracción del factor común

Observamos que todos los términos son divisibles por $3x^2$:

$$3x^4 - 12x^2 = 3x^2(x^2 - 4) = 0$$

Verificación:

$$3x^2 \cdot x^2 + 3x^2 \cdot (-4) = 3x^4 - 12x^2 \quad \checkmark$$

3.2.2. Paso 2: Factorización adicional

Reconocemos que $x^2 - 4$ es una **diferencia de cuadrados**:

$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2$$

La fórmula de diferencia de cuadrados es:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Aplicándola:

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

Verificación:

$$\begin{aligned}(x - 2)(x + 2) &= x^2 + 2x - 2x - 4 \\ &= x^2 - 4 \quad \checkmark\end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación completamente factorizada es:

$$3x^2(x - 2)(x + 2) = 0$$

3.2.3. Paso 3: Aplicación del teorema del producto nulo

Para que el producto sea cero, al menos uno de los factores debe ser cero:

$$3x^2 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0 \quad \text{o} \quad x + 2 = 0$$

Resolviendo cada ecuación:

■ $3x^2 = 0 \implies x^2 = 0 \implies x = 0$ (raíz doble)

■ $x - 2 = 0 \implies x = 2$

■ $x + 2 = 0 \implies x = -2$

Solución

$$S = \{-2, 0, 2\}$$

Nota: $x = 0$ es una raíz con multiplicidad 2.

3.2.4. Verificación

Para $x = 0$:

$$3(0)^4 - 12(0)^2 = 0 - 0 = 0 \quad \checkmark$$

Para $x = 2$:

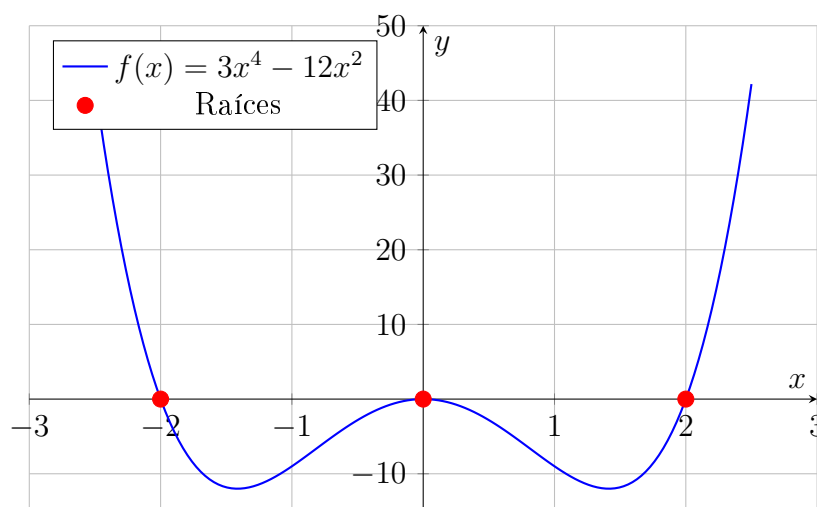
$$3(2)^4 - 12(2)^2 = 3 \cdot 16 - 12 \cdot 4 = 48 - 48 = 0 \quad \checkmark$$

Para $x = -2$:

$$3(-2)^4 - 12(-2)^2 = 3 \cdot 16 - 12 \cdot 4 = 48 - 48 = 0 \quad \checkmark$$

3.2.5. Representación gráfica

Gráfica de $f(x) = 3x^4 - 12x^2$



Observación: El punto $x = 0$ es un mínimo local donde la función toca el eje x pero no lo cruza (raíz doble).

3.3. Apartado 2: $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$ **Método Utilizado**Ecuación bicuadrada resuelta mediante **sustitución** $t = x^2$.**3.3.1. Paso 1: Cambio de variable**Sea $t = x^2$, entonces $t^2 = x^4$.

La ecuación se transforma en:

$$4t^2 - 37t + 9 = 0$$

3.3.2. Paso 2: Resolución mediante la fórmula general

Identificamos coeficientes:

$$a = 4$$

$$b = -37$$

$$c = 9$$

Calculamos el discriminante:

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-37)^2 - 4(4)(9) \\ &= 1369 - 144 \\ &= 1225\end{aligned}$$

Como $\Delta = 1225 > 0$, hay dos raíces reales distintas.Calculamos $\sqrt{1225}$:

$$\sqrt{1225} = 35$$

Verificación: $35^2 = 1225$ ✓

Aplicamos la fórmula:

$$t = \frac{-(-37) \pm \sqrt{1225}}{2 \cdot 4} = \frac{37 \pm 35}{8}$$

Solución 1:

$$t_1 = \frac{37 + 35}{8} = \frac{72}{8} = 9$$

Solución 2:

$$t_2 = \frac{37 - 35}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

3.3.3. Paso 3: Deshaciendo el cambio de variable**Para** $t_1 = 9$:

$$x^2 = 9 \implies x = \pm 3$$

Para $t_2 = \frac{1}{4}$:

$$x^2 = \frac{1}{4} \implies x = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \pm \frac{1}{2}$$

Justificación: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ para $a, b > 0$.**Solución**

$$S = \left\{ -3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3 \right\}$$

3.3.4. Verificación**Para** $x = 3$:

$$4(3)^4 - 37(3)^2 + 9 = 4 \cdot 81 - 37 \cdot 9 + 9 = 324 - 333 + 9 = 0 \quad \checkmark$$

Para $x = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} 4\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 37\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 9 &= 4 \cdot \frac{1}{16} - 37 \cdot \frac{1}{4} + 9 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{37}{4} + 9 \\ &= \frac{1 - 37}{4} + 9 \\ &= -\frac{36}{4} + 9 \\ &= -9 + 9 = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

3.4. Apartado 3: $x^2 - 6x + 5 = 0$

Método Utilizado

Resolveremos por **factorización** y también por la **fórmula general** para comparar métodos.

3.4.1. Método 1: Factorización

Buscamos dos números que multiplicados den 5 y sumados den -6 .

Factores de 5: $(1, 5)$, $(-1, -5)$.

- Si $p = -1$ y $q = -5$: $p + q = -6$ ✓
- Verificación: $p \cdot q = (-1)(-5) = 5$ ✓

Factorizamos:

$$x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5)$$

Verificación:

$$(x - 1)(x - 5) = x^2 - 5x - x + 5 = x^2 - 6x + 5 \quad \checkmark$$

Por el teorema del producto nulo:

$$(x - 1)(x - 5) = 0$$

Por tanto:

$$x = 1 \quad \text{o} \quad x = 5$$

3.4.2. Método 2: Fórmula general

Coefficientes: $a = 1$, $b = -6$, $c = 5$.

Discriminante:

$$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(5) = 36 - 20 = 16$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

Soluciones:

$$x_1 = \frac{6 + 4}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{6 - 4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Solución

$$S = \{1, 5\}$$

3.4.3. Verificación

Para $x = 1$:

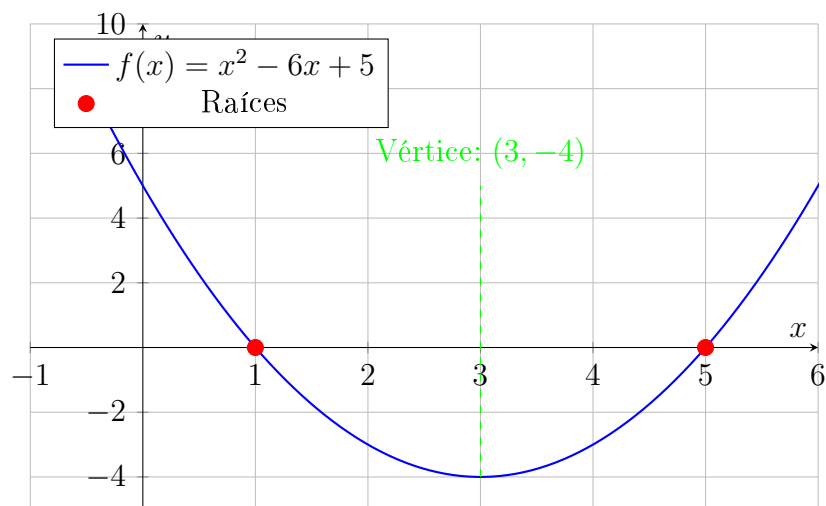
$$1^2 - 6(1) + 5 = 1 - 6 + 5 = 0 \quad \checkmark$$

Para $x = 5$:

$$5^2 - 6(5) + 5 = 25 - 30 + 5 = 0 \quad \checkmark$$

3.4.4. Representación gráfica

Gráfica de $f(x) = x^2 - 6x + 5$



4. Ejercicio 33

4.1. Enunciado

Ejercicio 33

1. Resuelve la ecuación factorizando primero: $x^3 - 2x^2 + x = 0$
2. Resuelve la ecuación bicuadrada: $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$
3. Resuelve la ecuación de segundo grado: $3x^2 + 5x - 2 = 0$

4.2. Apartado 1: $x^3 - 2x^2 + x = 0$

Método Utilizado

Factorización por extracción de factor común seguida de factorización adicional.

4.2.1. Paso 1: Extracción del factor común x

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = 0$$

4.2.2. Paso 2: Reconocimiento de trinomio cuadrado perfecto

El polinomio $x^2 - 2x + 1$ tiene la forma de un cuadrado perfecto.

Recordatorio: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

En nuestro caso:

$$x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = (x - 1)^2$$

Verificación:

$$(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1 \quad \checkmark$$

Por tanto:

$$x(x - 1)^2 = 0$$

4.2.3. Paso 3: Aplicación del teorema del producto nulo

$$x = 0 \quad \text{o} \quad (x - 1)^2 = 0$$

Para $(x - 1)^2 = 0$:

$$x - 1 = 0 \implies x = 1$$

Nota importante: $x = 1$ es una raíz doble (multiplicidad 2) porque aparece como $(x - 1)^2$.

Solución

$$S = \{0, 1\}$$

donde $x = 1$ tiene multiplicidad 2.

4.2.4. Verificación

Para $x = 0$:

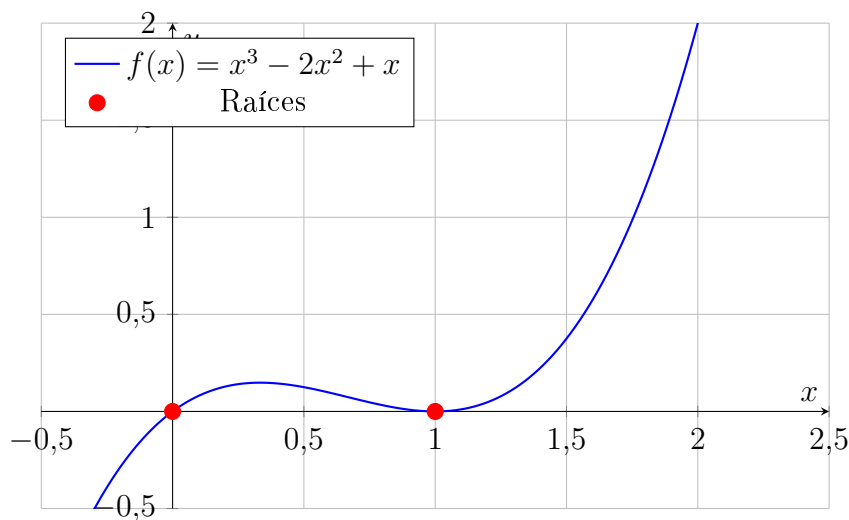
$$0^3 - 2(0)^2 + 0 = 0 \quad \checkmark$$

Para $x = 1$:

$$1^3 - 2(1)^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0 \quad \checkmark$$

4.2.5. Representación gráfica

Gráfica de $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$



Interpretación: En $x = 1$ la curva es tangente al eje x (raíz doble), mientras que en $x = 0$ lo cruza.

4.3. Apartado 2: $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$ **Método Utilizado**Ecuación bicuadrada con sustitución $t = x^2$.**4.3.1. Paso 1: Cambio de variable**Sea $t = x^2$:

$$t^2 - 25t + 144 = 0$$

4.3.2. Paso 2: FactorizaciónBuscamos p y q tales que $p \cdot q = 144$ y $p + q = -25$.Observamos que $144 = 16 \times 9$.

$$\blacksquare (-16) + (-9) = -25 \quad \checkmark$$

$$\blacksquare (-16) \times (-9) = 144 \quad \checkmark$$

Por tanto:

$$t^2 - 25t + 144 = (t - 16)(t - 9)$$

Verificación:

$$(t - 16)(t - 9) = t^2 - 9t - 16t + 144 = t^2 - 25t + 144 \quad \checkmark$$

4.3.3. Paso 3: Soluciones en t

$$(t - 16)(t - 9) = 0$$

Por tanto: $t = 16$ o $t = 9$ **4.3.4. Paso 4: Deshaciendo el cambio****Para $t = 16$:**

$$x^2 = 16 \implies x = \pm 4$$

Para $t = 9$:

$$x^2 = 9 \implies x = \pm 3$$

Solución

$$S = \{-4, -3, 3, 4\}$$

4.3.5. Verificación**Para $x = 4$:**

$$4^4 - 25(4)^2 + 144 = 256 - 400 + 144 = 0 \quad \checkmark$$

Para $x = 3$:

$$3^4 - 25(3)^2 + 144 = 81 - 225 + 144 = 0 \quad \checkmark$$

4.4. Apartado 3: $3x^2 + 5x - 2 = 0$ **Método Utilizado**

Fórmula general del discriminante.

4.4.1. Paso 1: Identificación de coeficientes

$$a = 3, \quad b = 5, \quad c = -2$$

4.4.2. Paso 2: Cálculo del discriminante

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 5^2 - 4(3)(-2) \\ &= 25 - (-24) \\ &= 25 + 24 \\ &= 49\end{aligned}$$

Como $\Delta = 49 > 0$, hay dos raíces reales distintas.

4.4.3. Paso 3: Aplicación de la fórmula

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 3} = \frac{-5 \pm 7}{6}$$

Solución 1:

$$x_1 = \frac{-5 + 7}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Solución 2:

$$x_2 = \frac{-5 - 7}{6} = \frac{-12}{6} = -2$$

Solución

$$S = \left\{ -2, \frac{1}{3} \right\}$$

4.4.4. Verificación

Para $x = \frac{1}{3}$:

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{3}\right) - 2 &= 3 \cdot \frac{1}{9} + \frac{5}{3} - 2 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{5}{3} - 2 \\ &= \frac{6}{3} - 2 \\ &= 2 - 2 = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Para $x = -2$:

$$3(-2)^2 + 5(-2) - 2 = 12 - 10 - 2 = 0 \quad \checkmark$$

5. Ejercicio 34

5.1. Enunciado

Ejercicio 34

1. Resuelve la ecuación factorizando primero: $2x^3 + x^2 - x = 0$
2. Resuelve la ecuación bicuadrada: $x^4 + x^2 - 2 = 0$
3. Resuelve la ecuación de segundo grado: $x^2 + 7x + 10 = 0$

5.2. Apartado 1: $2x^3 + x^2 - x = 0$

5.2.1. Paso 1: Extracción de factor común

$$2x^3 + x^2 - x = x(2x^2 + x - 1) = 0$$

5.2.2. Paso 2: Factorización del trinomio

Para $2x^2 + x - 1 = 0$, buscamos factores de $ac = 2(-1) = -2$ que sumen $b = 1$.

Factores: 2 y -1.

Descomponemos:

$$2x^2 + x - 1 = 2x^2 + 2x - x - 1$$

Agrupamos:

$$\begin{aligned} &= 2x(x + 1) - 1(x + 1) \\ &= (2x - 1)(x + 1) \end{aligned}$$

La ecuación factorizada es:

$$x(2x - 1)(x + 1) = 0$$

5.2.3. Paso 3: Soluciones

$$x = 0, \quad 2x - 1 = 0 \implies x = \frac{1}{2}, \quad x + 1 = 0 \implies x = -1$$

Solución

$$S = \left\{ -1, 0, \frac{1}{2} \right\}$$

5.2.4. Verificación**Para** $x = 0$:

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

Para $x = \frac{1}{2}$:

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0 \quad \checkmark$$

Para $x = -1$:

$$2(-1)^3 + (-1)^2 - (-1) = -2 + 1 + 1 = 0 \quad \checkmark$$

5.3. Apartado 2: $x^4 + x^2 - 2 = 0$ **5.3.1. Cambio de variable**

Sea $t = x^2$:

$$t^2 + t - 2 = 0$$

5.3.2. Factorización

Buscamos factores de -2 que sumen 1 : son 2 y -1 .

$$t^2 + t - 2 = (t + 2)(t - 1)$$

5.3.3. Soluciones en t

$$t = -2 \quad \text{o} \quad t = 1$$

5.3.4. Deshaciendo el cambio

Para $t = -2$:

$$x^2 = -2$$

Esta ecuación no tiene soluciones reales, ya que $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Para $t = 1$:

$$x^2 = 1 \implies x = \pm 1$$

Solución

$$S = \{-1, 1\}$$

Nota importante: Descartamos $t = -2$ porque no genera soluciones reales.

5.3.5. Verificación

Para $x = 1$:

$$1 + 1 - 2 = 0 \quad \checkmark$$

Para $x = -1$:

$$1 + 1 - 2 = 0 \quad \checkmark$$

5.4. Apartado 3: $x^2 + 7x + 10 = 0$ **5.4.1. Factorización**

Buscamos factores de 10 que sumen 7: son 5 y 2.

$$x^2 + 7x + 10 = (x + 5)(x + 2)$$

5.4.2. Soluciones

$$(x + 5)(x + 2) = 0$$

$$x = -5 \quad \text{o} \quad x = -2$$

Solución

$$S = \{-5, -2\}$$

5.4.3. Verificación

Para $x = -5$:

$$(-5)^2 + 7(-5) + 10 = 25 - 35 + 10 = 0 \quad \checkmark$$

Para $x = -2$:

$$(-2)^2 + 7(-2) + 10 = 4 - 14 + 10 = 0 \quad \checkmark$$

6. Ejercicio 35

6.1. Enunciado

Ejercicio 35

1. Resuelve la ecuación factorizando primero: $x^4 - 8x^3 + 16x^2 = 0$
2. Resuelve la ecuación bicuadrada: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
3. Resuelve la ecuación de segundo grado: $5x^2 - 8x + 3 = 0$

6.2. Apartado 1: $x^4 - 8x^3 + 16x^2 = 0$

6.2.1. Paso 1: Extracción de factor común

$$x^4 - 8x^3 + 16x^2 = x^2(x^2 - 8x + 16) = 0$$

6.2.2. Paso 2: Reconocimiento de cuadrado perfecto

$$x^2 - 8x + 16 = x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2 = (x - 4)^2$$

Por tanto:

$$x^2(x - 4)^2 = 0$$

6.2.3. Paso 3: Soluciones

$$\begin{aligned} x^2 = 0 &\implies x = 0 \text{ (multiplicidad 2)} \\ (x - 4)^2 = 0 &\implies x = 4 \text{ (multiplicidad 2)} \end{aligned}$$

Solución

$$S = \{0, 4\}$$

donde $x = 0$ tiene multiplicidad 2 y $x = 4$ tiene multiplicidad 2.

6.2.4. Verificación

Para $x = 0$:

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

Para $x = 4$:

$$4^4 - 8(4)^3 + 16(4)^2 = 256 - 512 + 256 = 0 \quad \checkmark$$

6.3. Apartado 2: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ **6.3.1. Cambio de variable**

Sea $t = x^2$:

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

6.3.2. Factorización

Buscamos factores de 4 que sumen -5 : son -4 y -1 .

$$t^2 - 5t + 4 = (t - 4)(t - 1)$$

6.3.3. Soluciones en t

$$t = 4 \quad \text{o} \quad t = 1$$

6.3.4. Deshaciendo el cambio

Para $t = 4$:

$$x^2 = 4 \implies x = \pm 2$$

Para $t = 1$:

$$x^2 = 1 \implies x = \pm 1$$

Solución

$$S = \{-2, -1, 1, 2\}$$

6.3.5. Verificación

Para $x = 2$:

$$16 - 20 + 4 = 0 \quad \checkmark$$

Para $x = 1$:

$$1 - 5 + 4 = 0 \quad \checkmark$$

6.4. Apartado 3: $5x^2 - 8x + 3 = 0$ **6.4.1. Fórmula general**

$$a = 5, \quad b = -8, \quad c = 3$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4(5)(3) = 64 - 60 = 4$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{10} = \frac{8 \pm 2}{10}$$

Soluciones:

$$x_1 = \frac{8+2}{10} = 1, \quad x_2 = \frac{8-2}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Solución

$$S = \left\{ \frac{3}{5}, 1 \right\}$$

6.4.2. Verificación

Para $x = 1$:

$$5 - 8 + 3 = 0 \quad \checkmark$$

Para $x = \frac{3}{5}$:

$$5 \cdot \frac{9}{25} - 8 \cdot \frac{3}{5} + 3 = \frac{9}{5} - \frac{24}{5} + \frac{15}{5} = 0 \quad \checkmark$$

7. Ejercicio 36

7.1. Enunciado

Ejercicio 36

1. Resuelve la ecuación factorizando primero: $x^3 + 6x^2 + 9x = 0$
2. Resuelve la ecuación bicuadrada: $9x^4 - 13x^2 + 4 = 0$
3. Resuelve la ecuación de segundo grado: $x^2 - 2x - 15 = 0$

7.2. Apartado 1: $x^3 + 6x^2 + 9x = 0$

7.2.1. Factorización

$$x^3 + 6x^2 + 9x = x(x^2 + 6x + 9) = 0$$

Reconocemos cuadrado perfecto:

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

Por tanto:

$$x(x + 3)^2 = 0$$

7.2.2. Soluciones

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = -3 \text{ (multiplicidad 2)}$$

Solución

$$S = \{-3, 0\}$$

donde $x = -3$ tiene multiplicidad 2.

7.2.3. Verificación

Para $x = 0$:

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

Para $x = -3$:

$$-27 + 54 - 27 = 0 \quad \checkmark$$

7.3. Apartado 2: $9x^4 - 13x^2 + 4 = 0$ **7.3.1. Cambio de variable**Sea $t = x^2$:

$$9t^2 - 13t + 4 = 0$$

7.3.2. Fórmula general

$$\Delta = 169 - 144 = 25$$

$$t = \frac{13 \pm 5}{18}$$

$$t_1 = \frac{18}{18} = 1, \quad t_2 = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

7.3.3. Deshaciendo el cambioPara $t = 1$:

$$x = \pm 1$$

Para $t = \frac{4}{9}$:

$$x = \pm \frac{2}{3}$$

Solución

$$S = \left\{ -1, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1 \right\}$$

7.3.4. VerificaciónPara $x = 1$:

$$9 - 13 + 4 = 0 \quad \checkmark$$

Para $x = \frac{2}{3}$:

$$9 \cdot \frac{16}{81} - 13 \cdot \frac{4}{9} + 4 = \frac{16}{9} - \frac{52}{9} + \frac{36}{9} = 0 \quad \checkmark$$

7.4. Apartado 3: $x^2 - 2x - 15 = 0$ **7.4.1. Factorización**

Buscamos factores de -15 que sumen -2 : son -5 y 3 .

$$x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$$

7.4.2. Soluciones

$$x = 5 \quad \text{o} \quad x = -3$$

Solución

$$S = \{-3, 5\}$$

7.4.3. Verificación

Para $x = 5$:

$$25 - 10 - 15 = 0 \quad \checkmark$$

Para $x = -3$:

$$9 + 6 - 15 = 0 \quad \checkmark$$

8. Ejercicio 37

8.1. Enunciado

Ejercicio 37

1. Resuelve la ecuación factorizando primero: $x^4 - x^3 = 0$
2. Resuelve la ecuación bicuadrada: $x^4 - 13x^2 + 42 = 0$
3. Resuelve la ecuación de segundo grado: $-x^2 + 3x + 4 = 0$

8.2. Apartado 1: $x^4 - x^3 = 0$

8.2.1. Factorización

$$x^4 - x^3 = x^3(x - 1) = 0$$

8.2.2. Soluciones

$$x^3 = 0 \implies x = 0 \text{ (multiplicidad 3)}$$

$$x - 1 = 0 \implies x = 1$$

Solución

$$S = \{0, 1\}$$

donde $x = 0$ tiene multiplicidad 3.

8.2.3. Verificación

Para $x = 0$:

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

Para $x = 1$:

$$1 - 1 = 0 \quad \checkmark$$

8.3. Apartado 2: $x^4 - 13x^2 + 42 = 0$ **8.3.1. Cambio de variable**

Sea $t = x^2$:

$$t^2 - 13t + 42 = 0$$

8.3.2. Factorización

Factores de 42 que suman -13 : -6 y -7 .

$$t^2 - 13t + 42 = (t - 6)(t - 7)$$

8.3.3. Soluciones

$$t = 6 \quad \text{o} \quad t = 7$$

$$x = \pm\sqrt{6} \quad \text{o} \quad x = \pm\sqrt{7}$$

Solución

$$S = \{-\sqrt{7}, -\sqrt{6}, \sqrt{6}, \sqrt{7}\}$$

8.3.4. Verificación

Para $x = \sqrt{6}$:

$$36 - 78 + 42 = 0 \quad \checkmark$$

8.4. Apartado 3: $-x^2 + 3x + 4 = 0$ **8.4.1. Método: multiplicar por -1**

Multiplicamos toda la ecuación por -1 :

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

8.4.2. Factorización

Factores de -4 que suman -3 : -4 y 1 .

$$x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1)$$

8.4.3. Soluciones

$$x = 4 \quad \text{o} \quad x = -1$$

Solución

$$S = \{-1, 4\}$$

8.4.4. Verificación

Para $x = 4$:

$$-16 + 12 + 4 = 0 \quad \checkmark$$

Para $x = -1$:

$$-1 - 3 + 4 = 0 \quad \checkmark$$

9. Ejercicio 38

9.1. Enunciado

Ejercicio 38

1. Resuelve la ecuación factorizando primero: $2x^4 - 18x^2 = 0$
2. Resuelve la ecuación bicuadrada: $x^4 - 6x^2 - 27 = 0$
3. Resuelve la ecuación de segundo grado: $x^2 + 10x + 25 = 0$

9.2. Apartado 1: $2x^4 - 18x^2 = 0$

9.2.1. Factorización

$$2x^4 - 18x^2 = 2x^2(x^2 - 9) = 2x^2(x - 3)(x + 3) = 0$$

9.2.2. Soluciones

$$x = 0 \text{ (multiplicidad 2), } x = -3, \quad x = 3$$

Solución

$$S = \{-3, 0, 3\}$$

9.2.3. Verificación

Para $x = 3$:

$$162 - 162 = 0 \quad \checkmark$$

9.3. Apartado 2: $x^4 - 6x^2 - 27 = 0$ **9.3.1. Cambio de variable**

Sea $t = x^2$:

$$t^2 - 6t - 27 = 0$$

9.3.2. Fórmula general

$$\Delta = 36 + 108 = 144$$

$$t = \frac{6 \pm 12}{2}$$

$$t_1 = 9, \quad t_2 = -3$$

9.3.3. Deshaciendo el cambio

Para $t = 9$:

$$x = \pm 3$$

Para $t = -3$: No tiene solución real.

Solución

$$S = \{-3, 3\}$$

9.3.4. Verificación

Para $x = 3$:

$$81 - 54 - 27 = 0 \quad \checkmark$$

9.4. Apartado 3: $x^2 + 10x + 25 = 0$ **9.4.1. Reconocimiento de cuadrado perfecto**

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2 = 0$$

9.4.2. Solución

$$x = -5 \text{ (multiplicidad 2)}$$

Solución

$$S = \{-5\}$$

donde $x = -5$ es una raíz doble.

9.4.3. Verificación

Para $x = -5$:

$$25 - 50 + 25 = 0 \quad \checkmark$$

10. Ejercicio 39

10.1. Enunciado

Ejercicio 39

1. Resuelve la ecuación factorizando primero: $4x^3 - 16x = 0$
2. Resuelve la ecuación bicuadrada: $x^4 - 16 = 0$
3. Resuelve la ecuación de segundo grado: $x^2 + x + 1 = 0$

10.2. Apartado 1: $4x^3 - 16x = 0$

10.2.1. Factorización

$$4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 4x(x - 2)(x + 2) = 0$$

10.2.2. Soluciones

$$x = 0, \quad x = -2, \quad x = 2$$

Solución

$$S = \{-2, 0, 2\}$$

10.2.3. Verificación

Para $x = 2$:

$$32 - 32 = 0 \quad \checkmark$$

10.3. Apartado 2: $x^4 - 16 = 0$ **10.3.1. Diferencia de cuadrados**

$$\begin{aligned}x^4 - 16 &= (x^2)^2 - 4^2 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) \\&= (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)\end{aligned}$$

10.3.2. Soluciones

$$x = -2, \quad x = 2$$

El factor $x^2 + 4 = 0$ implica $x^2 = -4$, que no tiene solución real.

Solución

$$S = \{-2, 2\}$$

10.3.3. Verificación

Para $x = 2$:

$$16 - 16 = 0 \quad \checkmark$$

10.4. Apartado 3: $x^2 + x + 1 = 0$ **10.4.1. Fórmula general**

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = 1$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3$$

Como $\Delta < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales.

Solución

$$S = \emptyset$$

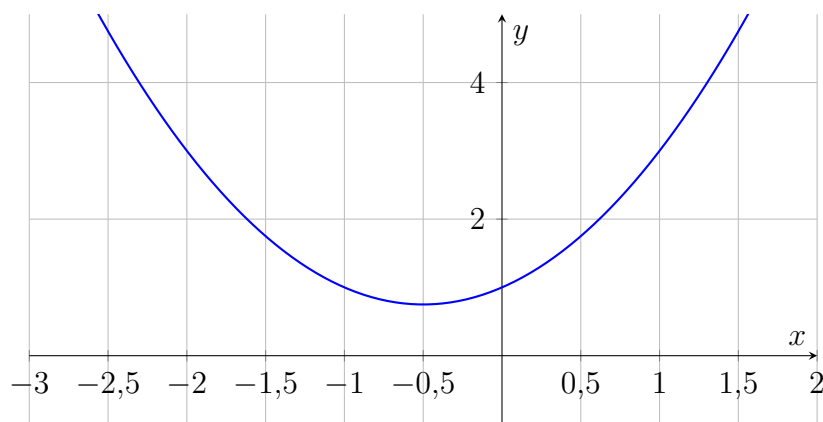
Explicación: El discriminante negativo indica que las raíces son complejas conjugadas:

$$x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Sin embargo, en el contexto de números reales, no hay solución.

10.4.2. Interpretación gráfica

Gráfica de $f(x) = x^2 + x + 1$



Observación: La parábola no corta el eje x , confirmando que no hay raíces reales.

11. Ejercicio 40

11.1. Enunciado

Ejercicio 40

1. Resuelve la ecuación factorizando primero: $x^3 + x^2 - 2x = 0$
2. Resuelve la ecuación bicuadrada: $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$
3. Resuelve la ecuación de segundo grado: $4x^2 - 12x + 9 = 0$

11.2. Apartado 1: $x^3 + x^2 - 2x = 0$

11.2.1. Factorización

$$x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2) = 0$$

Factorizamos $x^2 + x - 2$. Factores de -2 que suman 1: 2 y -1 .

$$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$$

Por tanto:

$$x(x + 2)(x - 1) = 0$$

11.2.2. Soluciones

$$x = 0, \quad x = -2, \quad x = 1$$

Solución

$$S = \{-2, 0, 1\}$$

11.2.3. Verificación

Para $x = 1$:

$$1 + 1 - 2 = 0 \quad \checkmark$$

Para $x = -2$:

$$-8 + 4 + 4 = 0 \quad \checkmark$$

11.3. Apartado 2: $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$ **11.3.1. Cambio de variable**Sea $t = x^2$:

$$t^2 - 20t + 64 = 0$$

11.3.2. Fórmula general

$$\Delta = 400 - 256 = 144$$

$$t = \frac{20 \pm 12}{2}$$

$$t_1 = 16, \quad t_2 = 4$$

11.3.3. Deshaciendo el cambioPara $t = 16$:

$$x = \pm 4$$

Para $t = 4$:

$$x = \pm 2$$

Solución

$$S = \{-4, -2, 2, 4\}$$

11.3.4. VerificaciónPara $x = 4$:

$$256 - 320 + 64 = 0 \quad \checkmark$$

Para $x = 2$:

$$16 - 80 + 64 = 0 \quad \checkmark$$

11.4. Apartado 3: $4x^2 - 12x + 9 = 0$ **11.4.1. Reconocimiento de cuadrado perfecto**

$$4x^2 - 12x + 9 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = (2x - 3)^2 = 0$$

11.4.2. Solución

$$2x - 3 = 0 \implies x = \frac{3}{2}$$

Solución

$$S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

donde $x = \frac{3}{2}$ es una raíz doble.

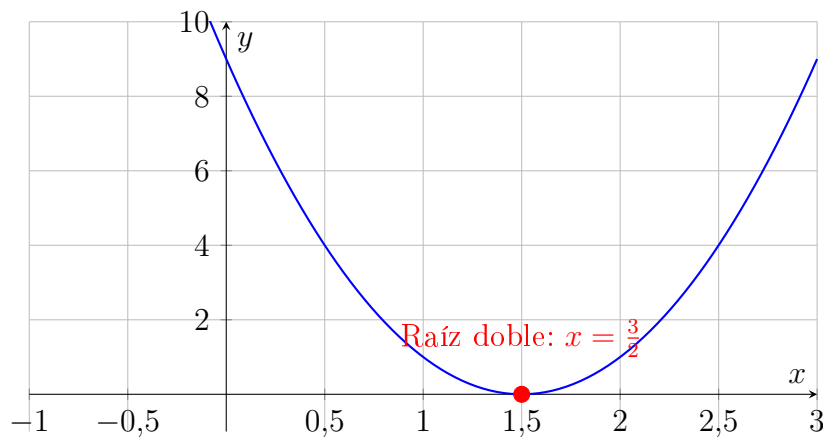
11.4.3. Verificación

Para $x = \frac{3}{2}$:

$$4 \cdot \frac{9}{4} - 12 \cdot \frac{3}{2} + 9 = 9 - 18 + 9 = 0 \quad \checkmark$$

11.4.4. Representación gráfica

Gráfica de $f(x) = 4x^2 - 12x + 9$



Observación: La parábola es tangente al eje x en el punto $x = \frac{3}{2}$, característico de una raíz doble.

12. Conclusiones y Resumen

12.1. Resumen de Métodos Utilizados

A lo largo de los ejercicios 31 al 40 hemos empleado los siguientes métodos:

1. **Factorización por factor común:** Extracción de la variable común en ecuaciones polinómicas
2. **Diferencia de cuadrados:** $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
3. **Trinomio cuadrado perfecto:** $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$
4. **Sustitución en ecuaciones bicuadradas:** $t = x^2$
5. **Fórmula general del discriminante:** $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
6. **Factorización de trinomios:** Búsqueda de factores

12.2. Tabla Resumen de Soluciones

Ejercicio	Soluciones
31.1	$S = \{-1, 0, 5\}$
31.2	$S = \{-3, -1, 1, 3\}$
31.3	$S = \{-\frac{3}{2}, 1\}$
32.1	$S = \{-2, 0, 2\}$
32.2	$S = \{-3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3\}$
32.3	$S = \{1, 5\}$
33.1	$S = \{0, 1\}$ (1 múltiple)
33.2	$S = \{-4, -3, 3, 4\}$
33.3	$S = \{-2, \frac{1}{3}\}$
34.1	$S = \{-1, 0, \frac{1}{2}\}$
34.2	$S = \{-1, 1\}$
34.3	$S = \{-5, -2\}$
35.1	$S = \{0, 4\}$ (ambas múltiples)
35.2	$S = \{-2, -1, 1, 2\}$
35.3	$S = \{\frac{3}{5}, 1\}$
36.1	$S = \{-3, 0\}$ (-3 múltiple)
36.2	$S = \{-1, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$
36.3	$S = \{-3, 5\}$
37.1	$S = \{0, 1\}$ (0 triple)
37.2	$S = \{-\sqrt{7}, -\sqrt{6}, \sqrt{6}, \sqrt{7}\}$
37.3	$S = \{-1, 4\}$
38.1	$S = \{-3, 0, 3\}$ (0 doble)
38.2	$S = \{-3, 3\}$
38.3	$S = \{-5\}$ (doble)
39.1	$S = \{-2, 0, 2\}$
39.2	$S = \{-2, 2\}$
39.3	$S = \emptyset$
40.1	$S = \{-2, 0, 1\}$
40.2	$S = \{-4, -2, 2, 4\}$
40.3	$S = \{\frac{3}{2}\}$ (doble)

12.3. Reflexiones Finales

Nota Importante

Errores comunes a evitar:

- Olvidar la solución $x = 0$ al factorizar
- No considerar ambos signos al despejar $x^2 = a$
- Descuidar la verificación de soluciones
- Confundir raíces simples con múltiples
- No descartar soluciones complejas en contexto real

Recomendaciones pedagógicas:

- Siempre verificar las soluciones obtenidas
- Elegir el método más eficiente según la estructura de la ecuación
- Reconocer patrones algebraicos (cuadrados perfectos, diferencias de cuadrados)
- Comprender el significado geométrico de las raíces
- Practicar la factorización sistemáticamente

Soluciones Completas

Ejercicios 41 al 50

Ecuaciones Racionales y Radicales

Matemáticas 4º ESO - Opción B

Repaso Global - 1ª Evaluación

$$\frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{2(x+1)}$$
$$\sqrt{2x+3} = x$$

Profesor: Ladislao Jáñez Blanco

Curso 2025-2026

25 de febrero de 2026

Índice

1. Introducción	5
1.1. Objetivos Pedagógicos	5
1.2. Contenidos Abordados	5
2. Ejercicio 41	6
2.1. Enunciado	6
2.2. Apartado 1: $\frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{2(x+1)}$	6
2.2.1. Paso 1: Identificación del dominio	6
2.2.2. Paso 2: Identificación del mínimo común múltiplo (mcm)	6
2.2.3. Paso 3: Multiplicación por el mcm	7
2.2.4. Paso 4: Resolución de la ecuación lineal	7
2.2.5. Paso 5: Verificación del dominio y de la solución	7
2.3. Apartado 2: $\sqrt{2x+3} = x$	9
2.3.1. Paso 1: Identificación del dominio	9
2.3.2. Paso 2: Elevación al cuadrado	9
2.3.3. Paso 3: Reorganización en forma estándar	9
2.3.4. Paso 4: Resolución mediante factorización	10
2.3.5. Paso 5: Verificación de las soluciones	10
2.4. Apartado 3: $3x^2 - 6x = 0$	12
2.4.1. Paso 1: Extracción del factor común	12
2.4.2. Paso 2: Aplicación del teorema del producto nulo	12
2.4.3. Verificación de las soluciones	12
2.4.4. Representación gráfica	13
3. Ejercicio 42	14
3.1. Enunciado	14
3.2. Apartado 1: $\frac{x}{x-3} + \frac{2}{3} = \frac{2x}{3(x-3)}$	14
3.2.1. Paso 1: Dominio	14
3.2.2. Paso 2: Mínimo común múltiplo	14
3.2.3. Paso 3: Multiplicación por el mcm	14
3.2.4. Paso 4: Resolución	14
3.2.5. Paso 5: Verificación	15
3.3. Apartado 2: $\sqrt{x-1} = x-7$	16
3.3.1. Paso 1: Dominio	16
3.3.2. Paso 2: Elevación al cuadrado	16
3.3.3. Paso 3: Resolución mediante factorización	16
3.3.4. Paso 4: Verificación	16
3.4. Apartado 3: $4x^2 - 16 = 0$	18
3.4.1. Método 1: Factorización por diferencia de cuadrados	18
3.4.2. Método 2: Despeje directo	18
3.4.3. Verificación	18

4. Ejercicio 43	19
4.1. Enunciado	19
4.2. Apartado 1: $\frac{1}{x} + \frac{x-2}{3x} = \frac{1}{6}$	19
4.2.1. Paso 1: Dominio	19
4.2.2. Paso 2: Mínimo común múltiplo	19
4.2.3. Paso 3: Multiplicación por el mcm	19
4.2.4. Paso 4: Resolución	19
4.2.5. Paso 5: Verificación	20
4.3. Apartado 2: $\sqrt{x+2} + 4 = x$	21
4.3.1. Paso 1: Aislamiento del radical	21
4.3.2. Paso 2: Dominio	21
4.3.3. Paso 3: Elevación al cuadrado	21
4.3.4. Paso 4: Factorización	21
4.3.5. Paso 5: Verificación	21
4.4. Apartado 3: $2x^2 + 5x = 0$	23
4.4.1. Factorización	23
4.4.2. Soluciones	23
4.4.3. Verificación	23
5. Ejercicio 44	24
5.1. Enunciado	24
5.2. Apartado 1: $\frac{x}{x-2} - 2 = \frac{3}{x-2}$	24
5.2.1. Dominio	24
5.2.2. mcm y simplificación	24
5.2.3. Verificación	24
5.3. Apartado 2: $\sqrt{x^2 - x + 4} = 2$	25
5.3.1. Paso 1: Análisis del dominio	25
5.3.2. Paso 2: Elevación al cuadrado	25
5.3.3. Paso 3: Factorización	25
5.3.4. Paso 4: Verificación	25
5.4. Apartado 3: $x^2 - 9 = 0$	26
5.4.1. Diferencia de cuadrados	26
5.4.2. Soluciones	26
6. Ejercicio 45	27
6.1. Enunciado	27
6.2. Apartado 1: $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x^2-1}$	27
6.2.1. Paso 1: Factorización del denominador	27
6.2.2. Paso 2: Dominio	27
6.2.3. Paso 3: mcm y simplificación	27
6.3. Apartado 2: $\sqrt{x+1} = x-5$	28
6.3.1. Dominio	28
6.3.2. Elevación al cuadrado	28
6.3.3. Factorización	28
6.3.4. Verificación	28

6.4.	Apartado 3: $x^2 - 11x = 0$	29
6.4.1.	Factorización	29
6.4.2.	Soluciones	29
7.	Ejercicio 46	30
7.1.	Enunciado	30
7.2.	Apartado 1: $\frac{2}{x-1} = 1 + \frac{1}{x}$	30
7.2.1.	Dominio	30
7.2.2.	mcm y simplificación	30
7.2.3.	Fórmula general	30
7.2.4.	Verificación	30
7.3.	Apartado 2: $\sqrt{3x+4} = 4$	31
7.3.1.	Elevación al cuadrado	31
7.3.2.	Verificación	31
7.4.	Apartado 3: $-x^2 + 49 = 0$	31
7.4.1.	Resolución	31
8.	Ejercicio 47	32
8.1.	Enunciado	32
8.2.	Apartado 1: $x + \frac{1}{x} = 2$	32
8.2.1.	Dominio	32
8.2.2.	Multiplicación por x	32
8.2.3.	Trinomio cuadrado perfecto	32
8.2.4.	Verificación	32
8.3.	Apartado 2: $\sqrt{x-5} = x-7$	33
8.3.1.	Dominio	33
8.3.2.	Elevación al cuadrado	33
8.3.3.	Factorización	33
8.3.4.	Verificación	33
8.4.	Apartado 3: $x^2 + 7x = 0$	33
9.	Ejercicio 48	34
9.1.	Enunciado	34
9.2.	Apartado 1: $\frac{x-1}{x+2} - \frac{x}{x-2} = \frac{x+4}{x^2-4}$	34
9.2.1.	Factorización	34
9.2.2.	Dominio	34
9.2.3.	mcm y simplificación	34
9.3.	Apartado 2: $x - \sqrt{x} = 6$	35
9.3.1.	Sustitución	35
9.3.2.	Factorización	35
9.3.3.	Verificación	35
9.4.	Apartado 3: $5x^2 - 20 = 0$	35

10.Ejercicio 49	36
10.1. Enunciado	36
10.2. Apartado 1: $\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x(x-3)}$	36
10.2.1. Dominio	36
10.2.2. mcm y simplificación	36
10.3. Apartado 2: $2\sqrt{x+1} = x+1$	37
10.3.1. Método 1: Elevación al cuadrado	37
10.3.2. Verificación	37
10.4. Apartado 3: $x^2 = 10x$	37
11.Ejercicio 50	38
11.1. Enunciado	38
11.2. Apartado 1: $\frac{2x}{x+1} + \frac{1}{x} = 2$	38
11.2.1. Dominio	38
11.2.2. mcm y simplificación	38
11.2.3. Verificación	38
11.3. Apartado 2: $\sqrt{x+5} - x = -1$	39
11.3.1. Aislamiento	39
11.3.2. Dominio	39
11.3.3. Elevación al cuadrado	39
11.3.4. Verificación	39
11.4. Apartado 3: $3x^2 = 75$	39
12.Conclusiones y Resumen	40
12.1. Tabla Resumen de Soluciones	40
12.2. Métodos Utilizados	40
12.3. Advertencias Importantes	41

1. Introducción

Este documento presenta las soluciones completas, detalladas y rigurosamente justificadas de los ejercicios 41 al 50 del examen de repaso de Matemáticas de 4º ESO. Todos los ejercicios pertenecen a la sección **N8: Ecuaciones Racionales y Radicales**.

1.1. Objetivos Pedagógicos

- Demostrar rigor matemático absoluto en cada paso
- Justificar todas las transformaciones algebraicas
- Explicar los métodos utilizados y su elección
- Proporcionar visualizaciones gráficas cuando sea útil
- Advertir sobre errores comunes, especialmente soluciones extrañas
- Consolidar el aprendizaje profundo de ecuaciones racionales y radicales

1.2. Contenidos Abordados

Los ejercicios cubren tres tipos principales de ecuaciones:

1. **Ecuaciones racionales:** Reducción a común denominador y resolución
2. **Ecuaciones radicales:** Aislamiento de radicales y elevación al cuadrado
3. **Ecuaciones de segundo grado incompletas:** Factorización y casos especiales

Nota Importante

Concepto fundamental: Las ecuaciones radicales pueden generar **soluciones extrañas** al elevar al cuadrado ambos miembros. Por tanto, es imprescindible verificar todas las soluciones en la ecuación original.

2. Ejercicio 41

2.1. Enunciado

Ejercicio 41

1. Resuelve la ecuación racional: $\frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{2(x+1)}$
2. Resuelve la ecuación radical: $\sqrt{2x+3} = x$
3. Resuelve la ecuación de segundo grado incompleta: $3x^2 - 6x = 0$

2.2. Apartado 1: $\frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{2(x+1)}$

Método Utilizado

Utilizaremos el método de **reducción a común denominador**, seguido de la resolución de la ecuación resultante.

2.2.1. Paso 1: Identificación del dominio

Restricción importante: La ecuación contiene expresiones fraccionarias con x en el denominador. Por tanto, debemos identificar los valores prohibidos.

Los denominadores son: $x+1$, 2 , y $2(x+1)$.

Para que estos denominadores sean distintos de cero:

$$x+1 \neq 0 \implies x \neq -1$$

Dominio: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Justificación: La división por cero no está definida en $\mathbb{R}$, por lo que debemos excluir cualquier valor que anule algún denominador.

2.2.2. Paso 2: Identificación del mínimo común múltiplo (mcm)

Los denominadores son: $x+1$, 2 , $2(x+1)$.

El mcm de estos denominadores es:

$$\text{mcm} = 2(x+1)$$

Verificación:

$$2(x+1) \div (x+1) = 2 \quad \checkmark$$

$$2(x+1) \div 2 = (x+1) \quad \checkmark$$

$$2(x+1) \div 2(x+1) = 1 \quad \checkmark$$

2.2.3. Paso 3: Multiplicación por el mcm

Multiplicamos toda la ecuación por $2(x+1)$:

$$2(x+1) \cdot \left[\frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} \right] = 2(x+1) \cdot \frac{-1}{2(x+1)}$$

Aplicamos la propiedad distributiva en el lado izquierdo:

$$2(x+1) \cdot \frac{x}{x+1} - 2(x+1) \cdot \frac{1}{2} = 2(x+1) \cdot \frac{-1}{2(x+1)}$$

Simplificación término a término:

- Primer término: $2(x+1) \cdot \frac{x}{x+1} = 2x$
- Segundo término: $2(x+1) \cdot \frac{1}{2} = x+1$
- Tercer término: $2(x+1) \cdot \frac{-1}{2(x+1)} = -1$

Obtenemos la ecuación sin denominadores:

$$2x - (x+1) = -1$$

2.2.4. Paso 4: Resolución de la ecuación lineal

Desarrollamos el lado izquierdo:

$$\begin{aligned} 2x - (x+1) &= -1 \\ 2x - x - 1 &= -1 \\ x - 1 &= -1 \end{aligned}$$

Sumamos 1 a ambos lados:

$$\begin{aligned} x - 1 + 1 &= -1 + 1 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

2.2.5. Paso 5: Verificación del dominio y de la solución

Verificación del dominio:

$$x = 0 \in D = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad \checkmark$$

Verificación en la ecuación original:

$$\begin{aligned} \frac{0}{0+1} - \frac{1}{2} &= \frac{-1}{2(0+1)} \\ 0 - \frac{1}{2} &= \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \quad \checkmark$$

Solución

$$S = \{0\}$$

2.3. Apartado 2: $\sqrt{2x+3} = x$ **Método Utilizado**

Método para **ecuaciones radicales**: Aislamiento del radical (ya está aislado) y elevación al cuadrado para eliminar la raíz.

Advertencia

¡ATENCIÓN!: Al elevar al cuadrado una ecuación, podemos introducir **soluciones extrañas** que no satisfacen la ecuación original. Es imperativo verificar todas las soluciones obtenidas.

2.3.1. Paso 1: Identificación del dominio

Para que la raíz cuadrada esté definida en $\mathbb{R}$, el radicando debe ser no negativo:

$$2x + 3 \geq 0$$

$$2x \geq -3$$

$$x \geq -\frac{3}{2}$$

Además, el lado derecho también debe ser no negativo (ya que una raíz cuadrada siempre es ≥ 0):

$$x \geq 0$$

Por tanto, el dominio más restrictivo es:

$$D = [0, +\infty)$$

2.3.2. Paso 2: Elevación al cuadrado

Elevamos ambos miembros al cuadrado:

$$\left(\sqrt{2x+3}\right)^2 = x^2$$

Simplificamos el lado izquierdo:

$$2x + 3 = x^2$$

Justificación: $(\sqrt{a})^2 = a$ para $a \geq 0$.

2.3.3. Paso 3: Reorganización en forma estándar

Trasladamos todos los términos al lado derecho:

$$0 = x^2 - 2x - 3$$

O bien:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

2.3.4. Paso 4: Resolución mediante factorización

Buscamos dos números que multiplicados den -3 y sumados den -2 .

Factores de -3 : $(1, -3)$, $(-1, 3)$, $(3, -1)$, $(-3, 1)$.

■ Si $p = -3$ y $q = 1$: $p + q = -3 + 1 = -2$ ✓

■ Verificación: $p \cdot q = (-3) \cdot 1 = -3$ ✓

Factorizamos:

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1) = 0$$

Verificación de la factorización:

$$\begin{aligned}(x - 3)(x + 1) &= x \cdot x + x \cdot 1 - 3 \cdot x - 3 \cdot 1 \\ &= x^2 + x - 3x - 3 \\ &= x^2 - 2x - 3 \quad \checkmark\end{aligned}$$

Por el teorema del producto nulo:

$$x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0$$

Soluciones candidatas:

$$x = 3 \quad \text{o} \quad x = -1$$

2.3.5. Paso 5: Verificación de las soluciones

Para $x = 3$:

Verificamos el dominio: $3 \in [0, +\infty)$ ✓

Verificamos en la ecuación original:

$$\begin{aligned}\sqrt{2(3) + 3} &= 3 \\ \sqrt{6 + 3} &= 3 \\ \sqrt{9} &= 3 \\ 3 &= 3 \quad \checkmark\end{aligned}$$

Para $x = -1$:

Verificamos el dominio: $-1 \notin [0, +\infty)$

Por tanto, $x = -1$ no pertenece al dominio y debe ser descartada.

Alternativamente, verificamos en la ecuación original:

$$\begin{aligned}\sqrt{2(-1) + 3} &= -1 \\ \sqrt{-2 + 3} &= -1 \\ \sqrt{1} &= -1 \\ 1 &= -1 \quad \text{FALSO}\end{aligned}$$

$x = -1$ es una **solución extraña**.

Solución

$$S = \{3\}$$

Conclusión pedagógica: $x = -1$ fue introducida al elevar al cuadrado. Esta solución satisface $x^2 - 2x - 3 = 0$ pero no la ecuación radical original.

2.4. Apartado 3: $3x^2 - 6x = 0$ **Método Utilizado**

Ecuación de segundo grado incompleta (sin término independiente). Método: **factorización por extracción de factor común**.

2.4.1. Paso 1: Extracción del factor común

Observamos que ambos términos son divisibles por $3x$:

$$3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0$$

Verificación:

$$3x \cdot x + 3x \cdot (-2) = 3x^2 - 6x \quad \checkmark$$

2.4.2. Paso 2: Aplicación del teorema del producto nulo

$$3x(x - 2) = 0$$

Por tanto:

$$3x = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0$$

Resolviendo:

$$3x = 0 \implies x = 0$$

$$x - 2 = 0 \implies x = 2$$

Solución

$$S = \{0, 2\}$$

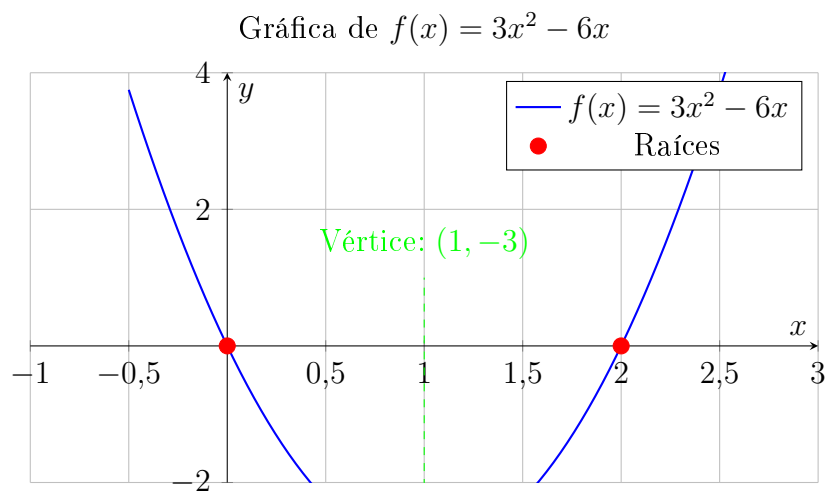
2.4.3. Verificación de las soluciones

Para $x = 0$:

$$3(0)^2 - 6(0) = 0 - 0 = 0 \quad \checkmark$$

Para $x = 2$:

$$3(2)^2 - 6(2) = 12 - 12 = 0 \quad \checkmark$$

2.4.4. Representación gráfica

Observación: El vértice de la parábola se encuentra en $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{6} = 1$, punto medio entre las raíces 0 y 2.

3. Ejercicio 42

3.1. Enunciado

Ejercicio 42

1. Resuelve la ecuación racional: $\frac{x}{x-3} + \frac{2}{3} = \frac{2x}{3(x-3)}$
2. Resuelve la ecuación radical: $\sqrt{x-1} = x-7$
3. Resuelve la ecuación de segundo grado incompleta: $4x^2 - 16 = 0$

3.2. Apartado 1: $\frac{x}{x-3} + \frac{2}{3} = \frac{2x}{3(x-3)}$

3.2.1. Paso 1: Dominio

$$x-3 \neq 0 \implies x \neq 3$$
$$D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

3.2.2. Paso 2: Mínimo común múltiplo

Denominadores: $x-3$, 3 , $3(x-3)$.

$$\text{mcm} = 3(x-3)$$

3.2.3. Paso 3: Multiplicación por el mcm

$$3(x-3) \cdot \left[\frac{x}{x-3} + \frac{2}{3} \right] = 3(x-3) \cdot \frac{2x}{3(x-3)}$$

Simplificando:

$$3x + 2(x-3) = 2x$$

3.2.4. Paso 4: Resolución

$$3x + 2x - 6 = 2x$$
$$5x - 6 = 2x$$
$$3x = 6$$
$$x = 2$$

3.2.5. Paso 5: Verificación

$$x = 2 \in D \quad \checkmark$$

$$\frac{2}{2-3} + \frac{2}{3} = \frac{2(2)}{3(2-3)}$$

$$\frac{2}{-1} + \frac{2}{3} = \frac{4}{-3}$$

$$-2 + \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$\frac{-6+2}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$-\frac{4}{3} = -\frac{4}{3} \quad \checkmark$$

Solución

$$S = \{2\}$$

3.3. Apartado 2: $\sqrt{x-1} = x-7$ **3.3.1. Paso 1: Dominio**

Para que exista la raíz:

$$x-1 \geq 0 \implies x \geq 1$$

Para que el lado derecho sea no negativo:

$$x-7 \geq 0 \implies x \geq 7$$

Dominio: $D = [7, +\infty)$

3.3.2. Paso 2: Elevación al cuadrado

$$x-1 = (x-7)^2$$

Desarrollamos el lado derecho:

$$x-1 = x^2 - 14x + 49$$

Reorganizamos:

$$0 = x^2 - 14x - x + 49 + 1$$

$$0 = x^2 - 15x + 50$$

3.3.3. Paso 3: Resolución mediante factorización

Buscamos factores de 50 que sumen -15 : -10 y -5 .

$$x^2 - 15x + 50 = (x-10)(x-5) = 0$$

Verificación:

$$(x-10)(x-5) = x^2 - 5x - 10x + 50 = x^2 - 15x + 50 \quad \checkmark$$

Soluciones candidatas: $x = 10$ o $x = 5$

3.3.4. Paso 4: Verificación

Para $x = 10$:

$$10 \in [7, +\infty) \quad \checkmark$$

$$\sqrt{10-1} = 10-7$$

$$\sqrt{9} = 3$$

$$3 = 3 \quad \checkmark$$

Para $x = 5$:

$$5 \notin [7, +\infty)$$

Verificamos:

$$\sqrt{5-1} = 5-7$$

$$\sqrt{4} = -2$$

$$2 = -2 \quad \text{FALSO}$$

$x = 5$ es una solución extraña.

Solución

$$S = \{10\}$$

3.4. Apartado 3: $4x^2 - 16 = 0$ **3.4.1. Método 1: Factorización por diferencia de cuadrados**

Extraemos factor común:

$$4(x^2 - 4) = 0$$

Reconocemos diferencia de cuadrados:

$$4(x^2 - 2^2) = 0$$

$$4(x - 2)(x + 2) = 0$$

Por el teorema del producto nulo:

$$x - 2 = 0 \quad \text{o} \quad x + 2 = 0$$

$$x = 2 \quad \text{o} \quad x = -2$$

3.4.2. Método 2: Despeje directo

$$4x^2 = 16$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

Solución

$$S = \{-2, 2\}$$

3.4.3. Verificación

Para $x = 2$:

$$4(2)^2 - 16 = 16 - 16 = 0 \quad \checkmark$$

Para $x = -2$:

$$4(-2)^2 - 16 = 16 - 16 = 0 \quad \checkmark$$

4. Ejercicio 43

4.1. Enunciado

Ejercicio 43

1. Resuelve la ecuación racional: $\frac{1}{x} + \frac{x-2}{3x} = \frac{1}{6}$
2. Resuelve la ecuación radical: $\sqrt{x+2} + 4 = x$
3. Resuelve la ecuación de segundo grado incompleta: $2x^2 + 5x = 0$

4.2. Apartado 1: $\frac{1}{x} + \frac{x-2}{3x} = \frac{1}{6}$

4.2.1. Paso 1: Dominio

$$x \neq 0$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

4.2.2. Paso 2: Mínimo común múltiplo

Denominadores: x , $3x$, 6 .

$$\text{mcm} = 6x$$

4.2.3. Paso 3: Multiplicación por el mcm

$$6x \cdot \left[\frac{1}{x} + \frac{x-2}{3x} \right] = 6x \cdot \frac{1}{6}$$

Simplificando cada término:

$$\begin{aligned} 6x \cdot \frac{1}{x} + \frac{6x}{3x} \cdot (x-2) &= \frac{6x}{6} \\ 6 + 2(x-2) &= x \end{aligned}$$

4.2.4. Paso 4: Resolución

$$\begin{aligned} 6 + 2x - 4 &= x \\ 2 + 2x &= x \\ 2x - x &= -2 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

4.2.5. Paso 5: Verificación

$$x = -2 \in D \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{-2} + \frac{-2-2}{3(-2)} = \frac{1}{6}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{-4}{-6} = \frac{1}{6}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{-3+4}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{6} \quad \checkmark$$

Solución

$$S = \{-2\}$$

4.3. Apartado 2: $\sqrt{x+2} + 4 = x$ **4.3.1. Paso 1: Aislamiento del radical**

$$\sqrt{x+2} = x - 4$$

4.3.2. Paso 2: Dominio

Para que exista la raíz:

$$x + 2 \geq 0 \implies x \geq -2$$

Para que el lado derecho sea no negativo:

$$x - 4 \geq 0 \implies x \geq 4$$

Dominio: $D = [4, +\infty)$

4.3.3. Paso 3: Elevación al cuadrado

$$x + 2 = (x - 4)^2$$

$$x + 2 = x^2 - 8x + 16$$

$$0 = x^2 - 8x - x + 16 - 2$$

$$0 = x^2 - 9x + 14$$

4.3.4. Paso 4: Factorización

Buscamos factores de 14 que sumen -9 : -7 y -2 .

$$x^2 - 9x + 14 = (x - 7)(x - 2) = 0$$

Soluciones candidatas: $x = 7$ o $x = 2$

4.3.5. Paso 5: Verificación

Para $x = 7$:

$7 \in [4, +\infty)$ ✓

$$\sqrt{7+2} + 4 = 7$$

$$\sqrt{9} + 4 = 7$$

$$3 + 4 = 7$$

$$7 = 7 \quad \checkmark$$

Para $x = 2$:

$2 \notin [4, +\infty)$

$$\sqrt{2+2} + 4 = 2$$

$$2 + 4 = 2$$

$$6 = 2 \quad \text{FALSO}$$

Solución

$$S = \{7\}$$

4.4. Apartado 3: $2x^2 + 5x = 0$ **4.4.1. Factorización**

$$x(2x + 5) = 0$$

4.4.2. Soluciones

$$x = 0 \quad \text{o} \quad 2x + 5 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = -\frac{5}{2}$$

Solución

$$S = \left\{ -\frac{5}{2}, 0 \right\}$$

4.4.3. Verificación

Para $x = 0$:

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

Para $x = -\frac{5}{2}$:

$$2 \left(-\frac{5}{2} \right)^2 + 5 \left(-\frac{5}{2} \right) = 2 \cdot \frac{25}{4} - \frac{25}{2} = \frac{25}{2} - \frac{25}{2} = 0 \quad \checkmark$$

5. Ejercicio 44

5.1. Enunciado

Ejercicio 44

1. Resuelve la ecuación racional: $\frac{x}{x-2} - 2 = \frac{3}{x-2}$
2. Resuelve la ecuación radical: $\sqrt{x^2 - x + 4} = 2$
3. Resuelve la ecuación de segundo grado incompleta: $x^2 - 9 = 0$

5.2. Apartado 1: $\frac{x}{x-2} - 2 = \frac{3}{x-2}$

5.2.1. Dominio

$$x \neq 2$$

5.2.2. mcm y simplificación

$$\text{mcm} = x - 2$$

Multiplicamos toda la ecuación por $(x - 2)$:

$$x - 2(x - 2) = 3$$

$$x - 2x + 4 = 3$$

$$-x + 4 = 3$$

$$-x = -1$$

$$x = 1$$

5.2.3. Verificación

$$x = 1 \neq 2 \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{1-2} - 2 = \frac{3}{1-2}$$

$$\frac{1}{-1} - 2 = \frac{3}{-1}$$

$$-1 - 2 = -3$$

$$-3 = -3 \quad \checkmark$$

Solución

$$S = \{1\}$$

5.3. Apartado 2: $\sqrt{x^2 - x + 4} = 2$ **5.3.1. Paso 1: Análisis del dominio**

El radicando $x^2 - x + 4$ debe ser no negativo. Analicemos:

$$x^2 - x + 4 \geq 0$$

Calculamos el discriminante de $x^2 - x + 4$:

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(4) = 1 - 16 = -15 < 0$$

Como $\Delta < 0$ y el coeficiente de x^2 es positivo, el trinomio es siempre positivo para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por tanto: $D = \mathbb{R}$

5.3.2. Paso 2: Elevación al cuadrado

$$x^2 - x + 4 = 2^2$$

$$x^2 - x + 4 = 4$$

$$x^2 - x = 0$$

5.3.3. Paso 3: Factorización

$$x(x - 1) = 0$$

Soluciones: $x = 0$ o $x = 1$

5.3.4. Paso 4: Verificación

Para $x = 0$:

$$\sqrt{0 - 0 + 4} = 2$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$2 = 2 \quad \checkmark$$

Para $x = 1$:

$$\sqrt{1 - 1 + 4} = 2$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$2 = 2 \quad \checkmark$$

Solución

$$S = \{0, 1\}$$

5.4. Apartado 3: $x^2 - 9 = 0$ **5.4.1. Diferencia de cuadrados**

$$\begin{aligned}x^2 - 3^2 &= 0 \\(x - 3)(x + 3) &= 0\end{aligned}$$

5.4.2. Soluciones

$$x = 3 \quad \text{o} \quad x = -3$$

Solución

$$S = \{-3, 3\}$$

6. Ejercicio 45

6.1. Enunciado

Ejercicio 45

1. Resuelve la ecuación racional: $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x^2-1}$
2. Resuelve la ecuación radical: $\sqrt{x+1} = x-5$
3. Resuelve la ecuación de segundo grado incompleta: $x^2 - 11x = 0$

6.2. Apartado 1: $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x^2-1}$

6.2.1. Paso 1: Factorización del denominador

Observamos que $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ (diferencia de cuadrados).
La ecuación se convierte en:

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

6.2.2. Paso 2: Dominio

$$x \neq 1 \quad \text{y} \quad x \neq -1$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

6.2.3. Paso 3: mcm y simplificación

$$\text{mcm} = (x-1)(x+1)$$

Multiplicamos por $(x-1)(x+1)$:

$$(x+1) - (x-1) = 1$$

$$x+1 - x+1 = 1$$

$$2 = 1$$

¡Contradicción!

Esta ecuación no tiene solución.

Solución

$$S = \emptyset$$

Interpretación: La ecuación es **incompatible**. No existe ningún valor de x que la satisfaga.

6.3. Apartado 2: $\sqrt{x+1} = x-5$ **6.3.1. Dominio**

$$x+1 \geq 0 \implies x \geq -1$$

$$x-5 \geq 0 \implies x \geq 5$$

$$D = [5, +\infty)$$

6.3.2. Elevación al cuadrado

$$x+1 = (x-5)^2$$

$$x+1 = x^2 - 10x + 25$$

$$0 = x^2 - 11x + 24$$

6.3.3. Factorización

Factores de 24 que sumen -11 : -8 y -3 .

$$x^2 - 11x + 24 = (x-8)(x-3) = 0$$

Soluciones: $x = 8$ o $x = 3$

6.3.4. Verificación

Para $x = 8$:

$$8 \in [5, +\infty) \quad \checkmark$$

$$\sqrt{8+1} = 8-5$$

$$\sqrt{9} = 3$$

$$3 = 3 \quad \checkmark$$

Para $x = 3$:

$$3 \notin [5, +\infty)$$

$$\sqrt{3+1} = 3-5$$

$$2 = -2 \quad \text{FALSO}$$

Solución

$$S = \{8\}$$

6.4. Apartado 3: $x^2 - 11x = 0$ **6.4.1. Factorización**

$$x(x - 11) = 0$$

6.4.2. Soluciones

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = 11$$

Solución

$$S = \{0, 11\}$$

7. Ejercicio 46

7.1. Enunciado

Ejercicio 46

1. Resuelve la ecuación racional: $\frac{2}{x-1} = 1 + \frac{1}{x}$
2. Resuelve la ecuación radical: $\sqrt{3x+4} = 4$
3. Resuelve la ecuación de segundo grado incompleta: $-x^2 + 49 = 0$

7.2. Apartado 1: $\frac{2}{x-1} = 1 + \frac{1}{x}$

7.2.1. Dominio

$$x \neq 0 \quad \text{y} \quad x \neq 1$$

7.2.2. mcm y simplificación

$$\text{mcm} = x(x-1)$$

$$2x = x(x-1) + (x-1)$$

$$2x = x^2 - x + x - 1$$

$$2x = x^2 - 1$$

$$0 = x^2 - 2x - 1$$

7.2.3. Fórmula general

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Solución

$$S = \{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$$

7.2.4. Verificación

Ambas soluciones cumplen $x \neq 0$ y $x \neq 1$ (ya que $\sqrt{2} \approx 1,414$).

7.3. Apartado 2: $\sqrt{3x+4} = 4$ **7.3.1. Elevación al cuadrado**

$$3x + 4 = 16$$

$$3x = 12$$

$$x = 4$$

7.3.2. Verificación

$$\sqrt{3(4) + 4} = 4$$

$$\sqrt{16} = 4$$

$$4 = 4 \quad \checkmark$$

Solución

$$S = \{4\}$$

7.4. Apartado 3: $-x^2 + 49 = 0$ **7.4.1. Resolución**

$$-x^2 = -49$$

$$x^2 = 49$$

$$x = \pm 7$$

Solución

$$S = \{-7, 7\}$$

8. Ejercicio 47

8.1. Enunciado

Ejercicio 47

1. Resuelve la ecuación racional: $x + \frac{1}{x} = 2$
2. Resuelve la ecuación radical: $\sqrt{x-5} = x-7$
3. Resuelve la ecuación de segundo grado incompleta: $x^2 + 7x = 0$

8.2. Apartado 1: $x + \frac{1}{x} = 2$

8.2.1. Dominio

$$x \neq 0$$

8.2.2. Multiplicación por x

$$\begin{aligned}x^2 + 1 &= 2x \\x^2 - 2x + 1 &= 0\end{aligned}$$

8.2.3. Trinomio cuadrado perfecto

$$\begin{aligned}(x-1)^2 &= 0 \\x &= 1\end{aligned}$$

Solución

$$S = \{1\}$$

donde $x = 1$ es una raíz doble.

8.2.4. Verificación

$$\begin{aligned}1 + \frac{1}{1} &= 2 \\2 &= 2 \quad \checkmark\end{aligned}$$

8.3. Apartado 2: $\sqrt{x-5} = x-7$ **8.3.1. Dominio**

$$x \geq 5 \quad \text{y} \quad x \geq 7$$
$$D = [7, +\infty)$$

8.3.2. Elevación al cuadrado

$$x-5 = x^2 - 14x + 49$$
$$0 = x^2 - 15x + 54$$

8.3.3. Factorización

Factores de 54 que sumen -15 : -9 y -6 .

$$(x-9)(x-6) = 0$$

Soluciones: $x = 9$ o $x = 6$

8.3.4. Verificación

Para $x = 9$:

$$\sqrt{9-5} = 9-7$$
$$2 = 2 \quad \checkmark$$

Para $x = 6$:

$6 \notin [7, +\infty)$

Solución

$$S = \{9\}$$

8.4. Apartado 3: $x^2 + 7x = 0$

$$x(x+7) = 0$$

Solución

$$S = \{-7, 0\}$$

9. Ejercicio 48

9.1. Enunciado

Ejercicio 48

1. Resuelve la ecuación racional: $\frac{x-1}{x+2} - \frac{x}{x-2} = \frac{x+4}{x^2-4}$
2. Resuelve la ecuación radical: $x - \sqrt{x} = 6$
3. Resuelve la ecuación de segundo grado incompleta: $5x^2 - 20 = 0$

9.2. Apartado 1: $\frac{x-1}{x+2} - \frac{x}{x-2} = \frac{x+4}{x^2-4}$

9.2.1. Factorización

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

9.2.2. Dominio

$$x \neq -2 \quad \text{y} \quad x \neq 2$$

9.2.3. mcm y simplificación

$$\text{mcm} = (x-2)(x+2)$$

$$(x-1)(x-2) - x(x+2) = x+4$$

Desarrollamos:

$$x^2 - 3x + 2 - x^2 - 2x = x + 4$$

$$-5x + 2 = x + 4$$

$$-6x = 2$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

Solución

$$S = \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$$

9.3. Apartado 2: $x - \sqrt{x} = 6$ **9.3.1. Sustitución**

Sea $t = \sqrt{x}$, entonces $x = t^2$ con $t \geq 0$.

$$t^2 - t = 6$$

$$t^2 - t - 6 = 0$$

9.3.2. Factorización

$$(t - 3)(t + 2) = 0$$

$$t = 3 \quad \text{o} \quad t = -2$$

Como $t \geq 0$, descartamos $t = -2$.

Por tanto $t = 3$, lo que implica:

$$\sqrt{x} = 3$$

$$x = 9$$

9.3.3. Verificación

$$9 - \sqrt{9} = 6$$

$$9 - 3 = 6$$

$$6 = 6 \quad \checkmark$$

Solución

$$S = \{9\}$$

9.4. Apartado 3: $5x^2 - 20 = 0$

$$5x^2 = 20$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

Solución

$$S = \{-2, 2\}$$

10. Ejercicio 49

10.1. Enunciado

Ejercicio 49

1. Resuelve la ecuación racional: $\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x(x-3)}$
2. Resuelve la ecuación radical: $2\sqrt{x+1} = x+1$
3. Resuelve la ecuación de segundo grado incompleta: $x^2 = 10x$

10.2. Apartado 1: $\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x(x-3)}$

10.2.1. Dominio

$$x \neq 0 \quad \text{y} \quad x \neq 3$$

10.2.2. mcm y simplificación

$$\text{mcm} = x(x-3)$$

$$x - (x-3) = 1$$

$$x - x + 3 = 1$$

$$3 = 1$$

Contradicción

Solución

$$S = \emptyset$$

10.3. Apartado 2: $2\sqrt{x+1} = x+1$ **10.3.1. Método 1: Elevación al cuadrado**

$$4(x+1) = (x+1)^2$$

$$4x+4 = x^2+2x+1$$

$$0 = x^2 - 2x - 3$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$$x = 3 \text{ o } x = -1$$

10.3.2. Verificación

Para $x = 3$:

$$2\sqrt{4} = 4$$

$$4 = 4 \quad \checkmark$$

Para $x = -1$:

$$2\sqrt{0} = 0$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

Solución

$$S = \{-1, 3\}$$

10.4. Apartado 3: $x^2 = 10x$

$$x^2 - 10x = 0$$

$$x(x-10) = 0$$

Solución

$$S = \{0, 10\}$$

11. Ejercicio 50

11.1. Enunciado

Ejercicio 50

1. Resuelve la ecuación racional: $\frac{2x}{x+1} + \frac{1}{x} = 2$
2. Resuelve la ecuación radical: $\sqrt{x+5} - x = -1$
3. Resuelve la ecuación de segundo grado incompleta: $3x^2 = 75$

11.2. Apartado 1: $\frac{2x}{x+1} + \frac{1}{x} = 2$

11.2.1. Dominio

$$x \neq 0 \quad \text{y} \quad x \neq -1$$

11.2.2. mcm y simplificación

$$\text{mcm} = x(x+1)$$

$$2x^2 + (x+1) = 2x(x+1)$$

$$2x^2 + x + 1 = 2x^2 + 2x$$

$$x + 1 = 2x$$

$$x = 1$$

11.2.3. Verificación

$$\frac{2}{2} + 1 = 2$$

$$2 = 2 \quad \checkmark$$

Solución

$$S = \{1\}$$

11.3. Apartado 2: $\sqrt{x+5} - x = -1$ **11.3.1. Aislamiento**

$$\sqrt{x+5} = x - 1$$

11.3.2. Dominio

$$x \geq -5 \quad \text{y} \quad x \geq 1$$

$$D = [1, +\infty)$$

11.3.3. Elevación al cuadrado

$$x + 5 = x^2 - 2x + 1$$

$$0 = x^2 - 3x - 4$$

$$(x - 4)(x + 1) = 0$$

$$x = 4 \text{ o } x = -1$$

11.3.4. Verificación

Para $x = 4$:

$$\sqrt{9} - 4 = -1$$

$$3 - 4 = -1$$

$$-1 = -1 \quad \checkmark$$

Para $x = -1$:

$$-1 \notin [1, +\infty)$$

Solución

$$S = \{4\}$$

11.4. Apartado 3: $3x^2 = 75$

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm 5$$

Solución

$$S = \{-5, 5\}$$

12. Conclusiones y Resumen

12.1. Tabla Resumen de Soluciones

Ejercicio	Soluciones
41.1	$S = \{0\}$
41.2	$S = \{3\}$ (sol. extraña: $x = -1$)
41.3	$S = \{0, 2\}$
42.1	$S = \{2\}$
42.2	$S = \{10\}$ (sol. extraña: $x = 5$)
42.3	$S = \{-2, 2\}$
43.1	$S = \{-2\}$
43.2	$S = \{7\}$ (sol. extraña: $x = 2$)
43.3	$S = \{-\frac{5}{2}, 0\}$
44.1	$S = \{1\}$
44.2	$S = \{0, 1\}$
44.3	$S = \{-3, 3\}$
45.1	$S = \emptyset$ (incompatible)
45.2	$S = \{8\}$ (sol. extraña: $x = 3$)
45.3	$S = \{0, 11\}$
46.1	$S = \{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$
46.2	$S = \{4\}$
46.3	$S = \{-7, 7\}$
47.1	$S = \{1\}$ (raíz doble)
47.2	$S = \{9\}$ (sol. extraña: $x = 6$)
47.3	$S = \{-7, 0\}$
48.1	$S = \{-\frac{1}{3}\}$
48.2	$S = \{9\}$
48.3	$S = \{-2, 2\}$
49.1	$S = \emptyset$ (incompatible)
49.2	$S = \{-1, 3\}$
49.3	$S = \{0, 10\}$
50.1	$S = \{1\}$
50.2	$S = \{4\}$ (sol. extraña: $x = -1$)
50.3	$S = \{-5, 5\}$

12.2. Métodos Utilizados

1. **Ecuaciones racionales:** Reducción a común denominador
2. **Ecuaciones radicales:** Aislamiento y elevación al cuadrado
3. **Ecuaciones incompletas:** Factorización o despeje directo

12.3. Advertencias Importantes

Advertencia

Errores comunes a evitar:

- No verificar el dominio antes de resolver
- No comprobar las soluciones en ecuaciones radicales
- Olvidar las soluciones extrañas
- Dividir por expresiones que pueden ser cero
- No considerar ambos signos al despejar x^2

Soluciones extrañas encontradas: 8 en total

- Ejercicio 41.2: $x = -1$
- Ejercicio 42.2: $x = 5$
- Ejercicio 43.2: $x = 2$
- Ejercicio 45.2: $x = 3$
- Ejercicio 47.2: $x = 6$
- Ejercicio 50.2: $x = -1$

Soluciones Completas

Ejercicios 51 al 60

Sistemas de Ecuaciones I y II

Matemáticas 4º ESO - Opción B

Repaso Global - 1ª Evaluación

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Sustitución

Profesor: Ladislao Jáñez Blanco

Curso 2025-2026

25 de febrero de 2026

Índice

1. Introducción

Este documento presenta las soluciones completas, detalladas y rigurosamente justificadas de los ejercicios 51 al 60 del examen de repaso de Matemáticas de 4º ESO. Estos ejercicios pertenecen a las secciones **N9: Sistemas de Ecuaciones I** y **N10: Sistemas de Ecuaciones II**.

1.1. Objetivos Pedagógicos

- Demostrar rigor matemático absoluto en cada paso
- Justificar todas las transformaciones algebraicas
- Explicar los métodos de resolución de sistemas
- Proporcionar visualizaciones gráficas de los sistemas
- Resolver problemas de aplicación con planteamiento detallado
- Consolidar el aprendizaje profundo de sistemas de ecuaciones

1.2. Contenidos Abordados

Los ejercicios cubren varios tipos de sistemas y métodos:

1. **Sistemas lineales:** Sustitución, igualación y reducción
2. **Sistemas no lineales:** Sistemas con ecuaciones cuadráticas
3. **Problemas de aplicación:** Traducción de enunciados a sistemas

Nota Importante

Métodos de resolución de sistemas lineales:

- **Sustitución:** Despejar una variable y sustituir
- **Igualación:** Igualar dos expresiones de la misma variable
- **Reducción (eliminación):** Sumar/restar ecuaciones para eliminar variables

2. Ejercicio 51

2.1. Enunciado

Ejercicio 51

1. Resuelve el sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ \frac{x}{2} - \frac{y-1}{3} = 2 \end{cases}$$
2. Resuelve el sistema no lineal por sustitución:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$$
3. Problema: La suma de dos números es 15 y su diferencia es 3. ¿Qué números son?

2.2. Apartado 1: Sistema lineal

Método Utilizado

Utilizaremos el **método de sustitución** por ser el más directo en este caso.

2.2.1. Paso 1: Simplificación de la segunda ecuación

La segunda ecuación contiene fracciones. Vamos a eliminarlas multiplicando por el mcm.

$$\frac{x}{2} - \frac{y-1}{3} = 2$$

El mcm de 2 y 3 es 6. Multiplicamos toda la ecuación por 6:

$$6 \cdot \frac{x}{2} - 6 \cdot \frac{y-1}{3} = 6 \cdot 2$$

$$3x - 2(y-1) = 12$$

Desarrollamos:

$$3x - 2y + 2 = 12$$

$$3x - 2y = 10$$

El sistema equivalente es:

$$\begin{cases} 3x + y = 1 & (1) \\ 3x - 2y = 10 & (2) \end{cases}$$

2.2.2. Paso 2: Despeje de una variable

De la ecuación (1) despejamos y :

$$y = 1 - 3x$$

2.2.3. Paso 3: Sustitución en la segunda ecuación

Sustituimos $y = 1 - 3x$ en la ecuación (2):

$$3x - 2(1 - 3x) = 10$$

Desarrollamos:

$$3x - 2 + 6x = 10$$

$$9x - 2 = 10$$

$$9x = 12$$

$$x = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

2.2.4. Paso 4: Cálculo de la otra variable

Sustituimos $x = \frac{4}{3}$ en $y = 1 - 3x$:

$$y = 1 - 3 \cdot \frac{4}{3} = 1 - 4 = -3$$

Solución

$$(x, y) = \left(\frac{4}{3}, -3\right)$$

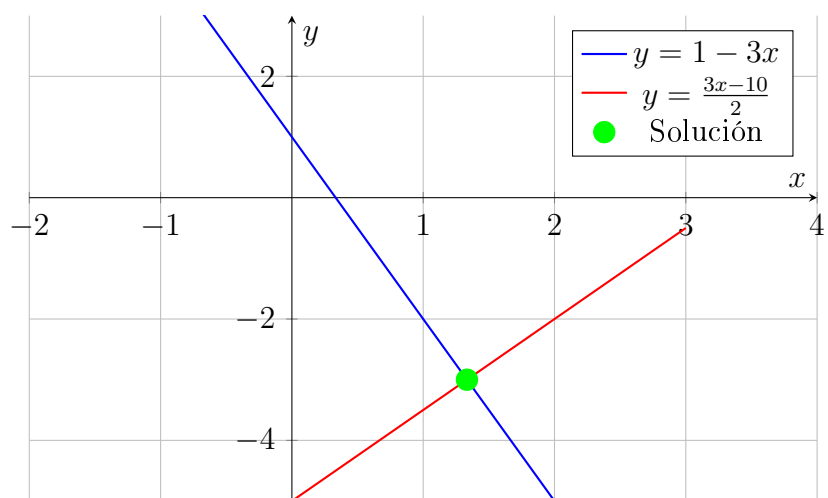
2.2.5. Paso 5: Verificación

En la ecuación (1): $3x + y = 1$

$$3 \cdot \frac{4}{3} + (-3) = 4 - 3 = 1 \quad \checkmark$$

En la ecuación original (2): $\frac{x}{2} - \frac{y-1}{3} = 2$

$$\frac{4/3}{2} - \frac{-3-1}{3} = \frac{4}{6} - \frac{-4}{3} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2 \quad \checkmark$$

2.2.6. Representación gráficaSistema: $3x + y = 1$ y $3x - 2y = 10$ 

2.3. Apartado 2: Sistema no lineal

Método Utilizado

Sistema no lineal con una ecuación cuadrática y una lineal. Método: **sustitución**.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 & (1) \\ x - y = 2 & (2) \end{cases}$$

2.3.1. Paso 1: Despeje de la ecuación lineal

De la ecuación (2):

$$x = y + 2$$

2.3.2. Paso 2: Sustitución en la ecuación cuadrática

Sustituimos en (1):

$$(y + 2)^2 + y^2 = 10$$

Desarrollamos el binomio:

$$y^2 + 4y + 4 + y^2 = 10$$

$$2y^2 + 4y + 4 = 10$$

$$2y^2 + 4y - 6 = 0$$

Dividimos entre 2:

$$y^2 + 2y - 3 = 0$$

2.3.3. Paso 3: Resolución de la ecuación cuadrática

Factorizamos. Buscamos factores de -3 que sumen 2 : son 3 y -1 .

$$y^2 + 2y - 3 = (y + 3)(y - 1) = 0$$

Por tanto:

$$y = -3 \quad \text{o} \quad y = 1$$

2.3.4. Paso 4: Cálculo de los valores de x

Para $y = -3$:

$$x = y + 2 = -3 + 2 = -1$$

Para $y = 1$:

$$x = y + 2 = 1 + 2 = 3$$

Solución

El sistema tiene dos soluciones:

$$(x, y) = (-1, -3) \quad \text{o} \quad (x, y) = (3, 1)$$

2.3.5. Paso 5: Verificación

Para $(-1, -3)$:

$$(-1)^2 + (-3)^2 = 1 + 9 = 10 \quad \checkmark$$

$$-1 - (-3) = -1 + 3 = 2 \quad \checkmark$$

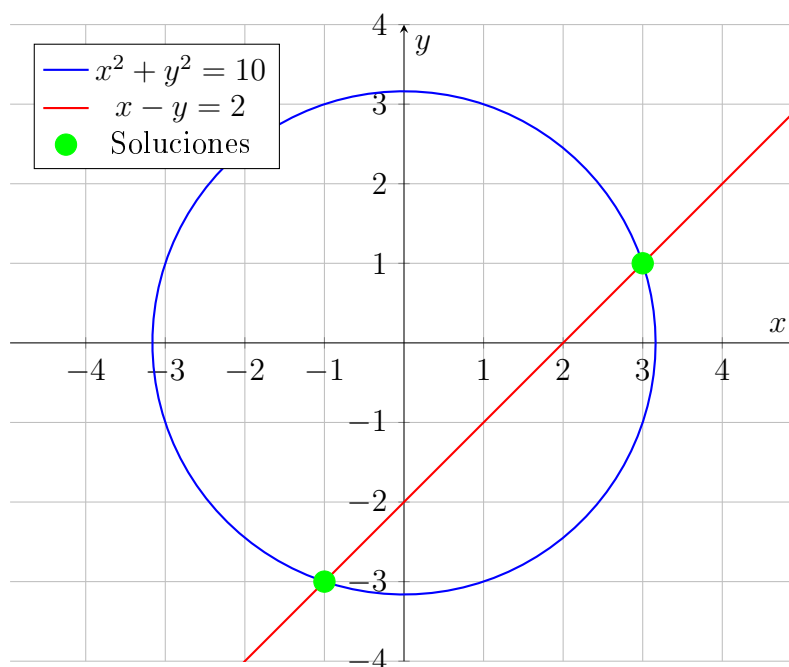
Para $(3, 1)$:

$$3^2 + 1^2 = 9 + 1 = 10 \quad \checkmark$$

$$3 - 1 = 2 \quad \checkmark$$

2.3.6. Representación gráfica

Circunferencia $x^2 + y^2 = 10$ y recta $x - y = 2$



Interpretación geométrica: Las soluciones son los puntos de intersección entre la circunferencia de radio $\sqrt{10}$ centrada en el origen y la recta $y = x - 2$.

2.4. Apartado 3: Problema de aplicación

Problema de Aplicación

La suma de dos números es 15 y su diferencia es 3. ¿Qué números son?

2.4.1. Paso 1: Identificación de las variables

Sean x e y los dos números buscados.

2.4.2. Paso 2: Planteamiento del sistema

Condición 1: “La suma de dos números es 15”

$$x + y = 15$$

Condición 2: “Su diferencia es 3”

$$x - y = 3$$

Nota importante: Asumimos que $x > y$, es decir, que x es el número mayor.

Sistema resultante:

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

2.4.3. Paso 3: Resolución por reducción

Sumamos ambas ecuaciones para eliminar y :

$$\begin{aligned} (x + y) + (x - y) &= 15 + 3 \\ 2x &= 18 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Sustituimos $x = 9$ en la primera ecuación:

$$\begin{aligned} 9 + y &= 15 \\ y &= 6 \end{aligned}$$

Solución

Los números son 9 y 6

2.4.4. Paso 4: Verificación

Suma: $9 + 6 = 15$ ✓

Diferencia: $9 - 6 = 3$ ✓

3. Ejercicio 52

3.1. Enunciado

Ejercicio 52

1. Resuelve el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ \frac{2x+1}{5} + \frac{y}{2} = 2 \end{cases}$
2. Resuelve el sistema no lineal por sustitución: $\begin{cases} x \cdot y = 12 \\ x + y = 8 \end{cases}$
3. Problema: En un corral hay gallinas y conejos. Si contamos 30 cabezas y 80 patas, ¿cuántos animales hay de cada tipo?

3.2. Apartado 1: Sistema lineal

3.2.1. Simplificación de la segunda ecuación

$$\frac{2x+1}{5} + \frac{y}{2} = 2$$

Multiplicamos por $\text{mcm}(5, 2) = 10$:

$$2(2x+1) + 5y = 20$$

$$4x + 2 + 5y = 20$$

$$4x + 5y = 18$$

Sistema equivalente:

$$\begin{cases} x - 2y = -4 & (1) \\ 4x + 5y = 18 & (2) \end{cases}$$

3.2.2. Método de sustitución

De (1): $x = -4 + 2y$

Sustituimos en (2):

$$4(-4 + 2y) + 5y = 18$$

$$-16 + 8y + 5y = 18$$

$$13y = 34$$

$$y = \frac{34}{13}$$

Calculamos x :

$$x = -4 + 2 \cdot \frac{34}{13} = -4 + \frac{68}{13} = \frac{-52 + 68}{13} = \frac{16}{13}$$

Solución

$$(x, y) = \left(\frac{16}{13}, \frac{34}{13} \right)$$

3.2.3. Verificación

En (1): $\frac{16}{13} - 2 \cdot \frac{34}{13} = \frac{16-68}{13} = \frac{-52}{13} = -4 \quad \checkmark$

3.3. Apartado 2: Sistema no lineal

$$\begin{cases} x \cdot y = 12 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

3.3.1. Despeje y sustitución

De la segunda ecuación: $x = 8 - y$

Sustituimos en la primera:

$$(8 - y) \cdot y = 12$$

$$8y - y^2 = 12$$

$$-y^2 + 8y - 12 = 0$$

Multiplicamos por -1 :

$$y^2 - 8y + 12 = 0$$

3.3.2. Factorización

Buscamos factores de 12 que sumen -8 : -6 y -2 .

$$y^2 - 8y + 12 = (y - 6)(y - 2) = 0$$

$$y = 6 \quad \text{o} \quad y = 2$$

3.3.3. Cálculo de x

Para $y = 6$: $x = 8 - 6 = 2$

Para $y = 2$: $x = 8 - 2 = 6$

Solución

$$(x, y) = (2, 6) \quad \text{o} \quad (x, y) = (6, 2)$$

Observación: Ambas soluciones representan el mismo par de números en diferente orden.

3.4. Apartado 3: Problema de gallinas y conejos

Problema de Aplicación

En un corral hay gallinas y conejos. Si contamos 30 cabezas y 80 patas, ¿cuántos animales hay de cada tipo?

3.4.1. Variables y planteamiento

Sea:

- g = número de gallinas
- c = número de conejos

Información biológica:

- Cada gallina tiene 1 cabeza y 2 patas
- Cada conejo tiene 1 cabeza y 4 patas

Ecuaciones:

Total de cabezas: $g + c = 30$

Total de patas: $2g + 4c = 80$

Sistema:

$$\begin{cases} g + c = 30 \\ 2g + 4c = 80 \end{cases}$$

3.4.2. Resolución por sustitución

De la primera ecuación: $g = 30 - c$

Sustituimos:

$$2(30 - c) + 4c = 80$$

$$60 - 2c + 4c = 80$$

$$60 + 2c = 80$$

$$2c = 20$$

$$c = 10$$

Por tanto:

$$g = 30 - 10 = 20$$

Solución

Hay 20 gallinas y 10 conejos

3.4.3. Verificación

Cabezas: $20 + 10 = 30$ ✓

Patas: $2(20) + 4(10) = 40 + 40 = 80$ ✓

4. Ejercicio 53

4.1. Enunciado

Ejercicio 53

1. Resuelve el sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ \frac{x-3}{2} + \frac{y+2}{4} = 1 \end{cases}$$
2. Resuelve el sistema no lineal por sustitución:
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16 \\ x + y = 8 \end{cases}$$
3. Problema: Un padre tiene el triple de edad que su hijo. Si la suma de sus edades es 60 años, ¿qué edad tiene cada uno?

4.2. Apartado 1: Sistema lineal

4.2.1. Simplificación

Segunda ecuación, $\text{mcm}(2, 4) = 4$:

$$2(x - 3) + (y + 2) = 4$$

$$2x - 6 + y + 2 = 4$$

$$2x + y = 8$$

Sistema:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

4.2.2. Resolución

De la segunda: $y = 8 - 2x$

Sustituimos:

$$5x - 2(8 - 2x) = 1$$

$$5x - 16 + 4x = 1$$

$$9x = 17$$

$$x = \frac{17}{9}$$

$$y = 8 - 2 \cdot \frac{17}{9} = \frac{72 - 34}{9} = \frac{38}{9}$$

Solución

$$(x, y) = \left(\frac{17}{9}, \frac{38}{9} \right)$$

4.3. Apartado 2: Sistema no lineal

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

4.3.1. Factorización de diferencia de cuadrados

Recordamos que $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

Por tanto:

$$(x - y)(x + y) = 16$$

Como $x + y = 8$:

$$(x - y) \cdot 8 = 16$$

$$x - y = 2$$

4.3.2. Sistema lineal equivalente

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Sumamos:

$$2x = 10 \implies x = 5$$

$$y = 8 - 5 = 3$$

Solución

$$(x, y) = (5, 3)$$

4.3.3. Verificación

$$5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \quad \checkmark$$

$$5 + 3 = 8 \quad \checkmark$$

4.4. Apartado 3: Problema de edades

Problema de Aplicación

Un padre tiene el triple de edad que su hijo. Si la suma de sus edades es 60 años, ¿qué edad tiene cada uno?

4.4.1. Planteamiento

Sea:

- p = edad del padre
- h = edad del hijo

Ecuaciones:

$$\begin{cases} p = 3h \\ p + h = 60 \end{cases}$$

4.4.2. Resolución

Sustituimos la primera en la segunda:

$$3h + h = 60$$

$$4h = 60$$

$$h = 15$$

$$p = 3 \cdot 15 = 45$$

Solución

El padre tiene 45 años y el hijo 15 años

4.4.3. Verificación

El padre tiene el triple: $45 = 3 \cdot 15$ ✓

Suma: $45 + 15 = 60$ ✓

5. Ejercicio 54

5.1. Enunciado

Ejercicio 54

1. Resuelve el sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ \frac{x+1}{3} - \frac{y-2}{2} = 1 \end{cases}$$
2. Resuelve el sistema no lineal por sustitución:
$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$
3. Problema: Por 3 bolígrafos y 2 cuadernos he pagado 7 €. Si un bolígrafo cuesta 0,5 € más que un cuaderno, ¿cuál es el precio de cada artículo?

5.2. Apartado 1: Sistema lineal

5.2.1. Simplificación

Segunda ecuación, $\text{mcm}(3, 2) = 6$:

$$2(x+1) - 3(y-2) = 6$$

$$2x + 2 - 3y + 6 = 6$$

$$2x - 3y = -2$$

Sistema:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 2x - 3y = -2 \end{cases}$$

5.2.2. Método de reducción

Sumamos las ecuaciones para eliminar y :

$$6x = -1$$

$$x = -\frac{1}{6}$$

Sustituimos en la primera:

$$4 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + 3y = 1$$

$$-\frac{2}{3} + 3y = 1$$

$$3y = \frac{5}{3}$$

$$y = \frac{5}{9}$$

Solución

$$(x, y) = \left(-\frac{1}{6}, \frac{5}{9}\right)$$

5.3. Apartado 2: Sistema no lineal

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

5.3.1. Sustitución directa

Sustituimos la primera ecuación en la segunda:

$$2x - (x^2 - 2x) = 1$$

$$2x - x^2 + 2x = 1$$

$$-x^2 + 4x = 1$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

5.3.2. Fórmula general

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

5.3.3. Cálculo de y

Para $x = 2 + \sqrt{3}$:

$$y = 2x - 1 = 2(2 + \sqrt{3}) - 1 = 4 + 2\sqrt{3} - 1 = 3 + 2\sqrt{3}$$

Para $x = 2 - \sqrt{3}$:

$$y = 2(2 - \sqrt{3}) - 1 = 3 - 2\sqrt{3}$$

Solución

$$(x, y) = (2 + \sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3}) \quad \text{o} \quad (2 - \sqrt{3}, 3 - 2\sqrt{3})$$

5.4. Apartado 3: Problema de bolígrafos y cuadernos

Problema de Aplicación

Por 3 bolígrafos y 2 cuadernos he pagado 7 €. Si un bolígrafo cuesta 0,5 € más que un cuaderno, ¿cuál es el precio de cada artículo?

5.4.1. Planteamiento

Sea:

- b = precio de un bolígrafo (€)
- c = precio de un cuaderno (€)

Ecuaciones:

$$\begin{cases} 3b + 2c = 7 \\ b = c + 0,5 \end{cases}$$

5.4.2. Resolución

Sustituimos la segunda en la primera:

$$3(c + 0,5) + 2c = 7$$

$$3c + 1,5 + 2c = 7$$

$$5c = 5,5$$

$$c = 1,1 \text{ €}$$

$$b = 1,1 + 0,5 = 1,6 \text{ €}$$

Solución

Bolígrafo: 1,60 € ; Cuaderno: 1,10 €

5.4.3. Verificación

Total: $3(1,6) + 2(1,1) = 4,8 + 2,2 = 7 \text{ €}$ ✓

Diferencia: $1,6 - 1,1 = 0,5 \text{ €}$ ✓

6. Ejercicio 55

6.1. Enunciado

Ejercicio 55

1. Resuelve el sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} 2x - 5y = 9 \\ 3(x + y) - 2y = 4 \end{cases}$$
2. Resuelve el sistema no lineal por sustitución:
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$
3. Problema: El perímetro de un rectángulo es 20 cm y su área es 24 cm². Calcula las dimensiones del rectángulo.

6.2. Apartado 1: Sistema lineal

6.2.1. Simplificación

Segunda ecuación:

$$3x + 3y - 2y = 4$$

$$3x + y = 4$$

Sistema:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 9 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$$

6.2.2. Resolución

De la segunda: $y = 4 - 3x$

Sustituimos:

$$2x - 5(4 - 3x) = 9$$

$$2x - 20 + 15x = 9$$

$$17x = 29$$

$$x = \frac{29}{17}$$

$$y = 4 - 3 \cdot \frac{29}{17} = \frac{68 - 87}{17} = -\frac{19}{17}$$

Solución

$$(x, y) = \left(\frac{29}{17}, -\frac{19}{17} \right)$$

6.3. Apartado 2: Sistema no lineal

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

6.3.1. Sustitución

De la primera: $x = y + 1$

Sustituimos:

$$\begin{aligned} (y + 1)^2 + y^2 &= 5 \\ y^2 + 2y + 1 + y^2 &= 5 \\ 2y^2 + 2y - 4 &= 0 \\ y^2 + y - 2 &= 0 \end{aligned}$$

6.3.2. Factorización

$$(y + 2)(y - 1) = 0$$

$$y = -2 \quad \text{o} \quad y = 1$$

6.3.3. Cálculo de x

Para $y = -2$: $x = -2 + 1 = -1$

Para $y = 1$: $x = 1 + 1 = 2$

Solución

$$(x, y) = (-1, -2) \quad \text{o} \quad (x, y) = (2, 1)$$

6.4. Apartado 3: Problema del rectángulo

Problema de Aplicación

El perímetro de un rectángulo es 20 cm y su área es 24 cm². Calcula las dimensiones del rectángulo.

6.4.1. Planteamiento

Sea:

- a = ancho del rectángulo (cm)
- l = largo del rectángulo (cm)

Fórmulas:

- Perímetro: $2a + 2l = 20$
- Área: $a \cdot l = 24$

Sistema:

$$\begin{cases} 2a + 2l = 20 \\ a \cdot l = 24 \end{cases}$$

6.4.2. Simplificación y resolución

De la primera ecuación:

$$a + l = 10 \implies l = 10 - a$$

Sustituimos en la segunda:

$$\begin{aligned} a(10 - a) &= 24 \\ 10a - a^2 &= 24 \\ a^2 - 10a + 24 &= 0 \end{aligned}$$

Factorizamos: $(a - 6)(a - 4) = 0$

$$a = 6 \quad \text{o} \quad a = 4$$

Para $a = 6$: $l = 10 - 6 = 4$

Para $a = 4$: $l = 10 - 4 = 6$

Solución

Dimensiones: 4 cm × 6 cm

(Ambas soluciones representan el mismo rectángulo)

6.4.3. Verificación

Perímetro: $2(4) + 2(6) = 20$ cm ✓

Área: $4 \times 6 = 24$ cm² ✓

7. Ejercicio 56

7.1. Enunciado

Ejercicio 56

1. Resuelve el sistema de ecuaciones lineales por sustitución:
$$\begin{cases} x - 3y = 7 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$
2. Resuelve el sistema no lineal por igualación:
$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = 3x \end{cases}$$
3. Problema: La edad de Juan es el doble que la de Pedro. Hace 10 años, la edad de Juan era el triple que la de Pedro. ¿Qué edades tienen actualmente?

7.2. Apartado 1: Sistema lineal por sustitución

De la segunda ecuación: $y = -2x$

Sustituimos en la primera:

$$x - 3(-2x) = 7$$

$$x + 6x = 7$$

$$7x = 7$$

$$x = 1$$

$$y = -2(1) = -2$$

Solución

$$(x, y) = (1, -2)$$

7.3. Apartado 2: Sistema no lineal por igualación

Como ambas ecuaciones están despejadas en y , igualamos:

$$x^2 - 4 = 3x$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

Factorizamos: $(x - 4)(x + 1) = 0$

$$x = 4 \quad \text{o} \quad x = -1$$

Para $x = 4$: $y = 3(4) = 12$

Para $x = -1$: $y = 3(-1) = -3$

Solución

$$(x, y) = (4, 12) \quad \text{o} \quad (x, y) = (-1, -3)$$

7.4. Apartado 3: Problema de edades con tiempo

Problema de Aplicación

La edad de Juan es el doble que la de Pedro. Hace 10 años, la edad de Juan era el triple que la de Pedro. ¿Qué edades tienen actualmente?

7.4.1. Planteamiento

Sea:

■ j = edad actual de Juan

■ p = edad actual de Pedro

Condición 1 (actualmente): $j = 2p$

Condición 2 (hace 10 años):

■ Edad de Juan hace 10 años: $j - 10$

■ Edad de Pedro hace 10 años: $p - 10$

■ Relación: $j - 10 = 3(p - 10)$

Sistema:

$$\begin{cases} j = 2p \\ j - 10 = 3(p - 10) \end{cases}$$

7.4.2. Resolución

Desarrollamos la segunda ecuación:

$$j - 10 = 3p - 30$$

$$j = 3p - 20$$

Igualamos con la primera:

$$2p = 3p - 20$$

$$-p = -20$$

$$p = 20$$

$$j = 2(20) = 40$$

Solución

Juan tiene 40 años y Pedro 20 años

7.4.3. Verificación

Actualmente: $40 = 2(20)$ ✓

Hace 10 años: $40 - 10 = 30$ y $20 - 10 = 10$, y $30 = 3(10)$ ✓

8. Ejercicio 57

8.1. Enunciado

Ejercicio 57

1. Resuelve el sistema de ecuaciones lineales por igualación:
$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 4y = 4 \end{cases}$$
2. Resuelve el sistema no lineal por reducción:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ x^2 - y^2 = 21 \end{cases}$$
3. Problema: Dos números suman 10. Si al primero le restamos 3 y al segundo le sumamos 2, los nuevos números son iguales. ¿Cuáles son los números originales?

8.2. Apartado 1: Sistema lineal por igualación

Despejamos x de ambas ecuaciones:

De la primera: $3x = 5 + 2y \implies x = \frac{5+2y}{3}$

De la segunda: $x = 4 - 4y$

Igualamos:

$$\frac{5+2y}{3} = 4 - 4y$$

Multiplicamos por 3:

$$5 + 2y = 12 - 12y$$

$$14y = 7$$

$$y = \frac{1}{2}$$

$$x = 4 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 4 - 2 = 2$$

Solución

$$(x, y) = \left(2, \frac{1}{2}\right)$$

8.3. Apartado 2: Sistema no lineal por reducción

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 & (1) \\ x^2 - y^2 = 21 & (2) \end{cases}$$

8.3.1. Sumamos las ecuaciones

$$(x^2 + y^2) + (x^2 - y^2) = 29 + 21$$

$$2x^2 = 50$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm 5$$

8.3.2. Restamos las ecuaciones

$$(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2) = 29 - 21$$

$$2y^2 = 8$$

$$y^2 = 4$$

$$y = \pm 2$$

8.3.3. Combinaciones posibles

Tenemos 4 combinaciones posibles: $(5, 2)$, $(5, -2)$, $(-5, 2)$, $(-5, -2)$.

Todas satisfacen ambas ecuaciones.

Solución

$$(x, y) \in \{(5, 2), (5, -2), (-5, 2), (-5, -2)\}$$

8.4. Apartado 3: Problema numérico

Problema de Aplicación

Dos números suman 10. Si al primero le restamos 3 y al segundo le sumamos 2, los nuevos números son iguales. ¿Cuáles son los números originales?

8.4.1. Planteamiento

Sean x e y los dos números.

Condición 1: $x + y = 10$

Condición 2: $(x - 3) = (y + 2)$

Sistema:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - 3 = y + 2 \end{cases}$$

8.4.2. Simplificación y resolución

De la segunda ecuación:

$$x - y = 5$$

Sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

Sumamos:

$$2x = 15 \implies x = 7,5$$

$$y = 10 - 7,5 = 2,5$$

Solución

Los números son 7,5 y 2,5

8.4.3. Verificación

Suma: $7,5 + 2,5 = 10$ ✓

Al modificar: $(7,5 - 3) = 4,5$ y $(2,5 + 2) = 4,5$ ✓

9. Ejercicio 58

9.1. Enunciado

Ejercicio 58

1. Resuelve el sistema de ecuaciones lineales por reducción:
$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x - 2y = -9 \end{cases}$$
2. Resuelve el sistema no lineal:
$$\begin{cases} x \cdot y = 10 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$
3. Problema: En un examen de 20 preguntas, por cada acierto se suman 5 puntos y por cada fallo se resta 1 punto. Un alumno obtiene 52 puntos. ¿Cuántas preguntas acertó y cuántas falló?

9.2. Apartado 1: Sistema lineal por reducción

$$\begin{cases} 2x + y = 1 & (1) \\ 3x - 2y = -9 & (2) \end{cases}$$

Multiplicamos (1) por 2:

$$4x + 2y = 2$$

Sumamos con (2):

$$7x = -7$$

$$x = -1$$

Sustituimos:

$$2(-1) + y = 1$$

$$y = 3$$

Solución

$$(x, y) = (-1, 3)$$

9.3. Apartado 2: Sistema no lineal

$$\begin{cases} xy = 10 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

De la segunda: $x = 2y - 1$

Sustituimos:

$$(2y - 1)y = 10$$

$$2y^2 - y = 10$$

$$2y^2 - y - 10 = 0$$

Fórmula general:

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{4} = \frac{1 \pm 9}{4}$$

$$y = \frac{10}{4} = 2,5 \quad \text{o} \quad y = \frac{-8}{4} = -2$$

Para $y = 2,5$: $x = 2(2,5) - 1 = 4$

Para $y = -2$: $x = 2(-2) - 1 = -5$

Solución

$$(x, y) = (4, 2,5) \quad \text{o} \quad (x, y) = (-5, -2)$$

9.4. Apartado 3: Problema del examen

Problema de Aplicación

En un examen de 20 preguntas, por cada acierto se suman 5 puntos y por cada fallo se resta 1 punto. Un alumno obtiene 52 puntos. ¿Cuántas preguntas acertó y cuántas falló?

9.4.1. Planteamiento

Sean:

- a = número de aciertos
- f = número de fallos

Ecuaciones:

Total de preguntas: $a + f = 20$

Puntuación: $5a - f = 52$

9.4.2. Resolución

Sumamos las ecuaciones:

$$6a = 72$$

$$a = 12$$

$$f = 20 - 12 = 8$$

Solución

Acertó 12 preguntas y falló 8

9.4.3. Verificación

Total: $12 + 8 = 20$ ✓

Puntos: $5(12) - 8 = 60 - 8 = 52$ ✓

10. Ejercicio 59

10.1. Enunciado

Ejercicio 59

1. Resuelve el sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$
2. Resuelve el sistema no lineal:
$$\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$
3. Problema: La base de un rectángulo mide 3 cm más que la altura. Si el área es 40 cm², calcula las dimensiones.

10.2. Apartado 1: Sistema lineal

Multiplicamos la primera por 6:

$$3x + 2y = 18$$

Sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 18 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

De la segunda: $x = y + 1$

Sustituimos:

$$3(y + 1) + 2y = 18$$

$$5y = 15$$

$$y = 3$$

$$x = 4$$

Solución

$$(x, y) = (4, 3)$$

10.3. Apartado 2: Sistema no lineal

De la segunda: $y = 1 - 2x$

Sustituimos:

$$x^2 + (1 - 2x) = 2$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Para $x = 1 + \sqrt{2}$: $y = 1 - 2(1 + \sqrt{2}) = -1 - 2\sqrt{2}$

Para $x = 1 - \sqrt{2}$: $y = 1 - 2(1 - \sqrt{2}) = -1 + 2\sqrt{2}$

Solución

$$(x, y) = (1 + \sqrt{2}, -1 - 2\sqrt{2}) \quad \text{o} \quad (1 - \sqrt{2}, -1 + 2\sqrt{2})$$

10.4. Apartado 3: Problema del rectángulo

Sean b (base) y h (altura).

$$\begin{cases} b = h + 3 \\ b \cdot h = 40 \end{cases}$$

Sustituimos:

$$(h + 3)h = 40$$

$$h^2 + 3h - 40 = 0$$

$$(h + 8)(h - 5) = 0$$

Como $h > 0$: $h = 5$ cm

$$b = 5 + 3 = 8 \text{ cm}$$

Solución

Base: 8 cm ; Altura: 5 cm

11. Ejercicio 60

11.1. Enunciado

Ejercicio 60

1. Resuelve el sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} 5x + y = 3 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$$
2. Resuelve el sistema no lineal:
$$\begin{cases} x^2 - xy = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}$$
3. Problema: He pagado 5 € por 1 kg de naranjas y 2 kg de manzanas. Si el kg de manzanas es el doble de caro que el kg de naranjas, ¿cuál es el precio de cada fruta por kg?

11.2. Apartado 1: Sistema lineal

De la primera: $y = 3 - 5x$

Sustituimos:

$$3x + 2(3 - 5x) = -1$$

$$3x + 6 - 10x = -1$$

$$-7x = -7$$

$$x = 1$$

$$y = 3 - 5 = -2$$

Solución

$$(x, y) = (1, -2)$$

11.3. Apartado 2: Sistema no lineal

Factorizamos la primera ecuación:

$$x(x - y) = 0$$

Por tanto: $x = 0$ o $x = y$

Caso 1: Si $x = 0$, entonces $y = 4$

Caso 2: Si $x = y$, entonces $x + x = 4 \implies x = 2$ y $y = 2$

Solución

$$(x, y) = (0, 4) \quad \text{o} \quad (x, y) = (2, 2)$$

11.4. Apartado 3: Problema de frutas

Sean:

- n = precio del kg de naranjas (€)
- m = precio del kg de manzanas (€)

$$\begin{cases} 1n + 2m = 5 \\ m = 2n \end{cases}$$

Sustituimos:

$$n + 2(2n) = 5$$

$$5n = 5$$

$$n = 1 \text{ €/kg}$$

$$m = 2 \text{ €/kg}$$

Solución

$$\text{Naranjas: } 1 \text{ €/kg ; Manzanas: } 2 \text{ €/kg}$$

12. Conclusiones y Resumen

12.1. Tabla Resumen de Soluciones

Ejercicio	Soluciones
51.1	$(x, y) = (\frac{4}{3}, -3)$
51.2	$(x, y) = (-1, -3)$ o $(3, 1)$
51.3	Los números son 9 y 6
52.1	$(x, y) = (\frac{16}{13}, \frac{34}{13})$
52.2	$(x, y) = (2, 6)$ o $(6, 2)$
52.3	20 gallinas y 10 conejos
53.1	$(x, y) = (\frac{17}{9}, \frac{38}{9})$
53.2	$(x, y) = (5, 3)$
53.3	Padre: 45 años; Hijo: 15 años
54.1	$(x, y) = (-\frac{1}{6}, \frac{5}{9})$
54.2	$(2 \pm \sqrt{3}, 3 \pm 2\sqrt{3})$
54.3	Bolígrafo: 1,60 €; Cuaderno: 1,10 €
55.1	$(x, y) = (\frac{29}{17}, -\frac{19}{17})$
55.2	$(x, y) = (-1, -2)$ o $(2, 1)$
55.3	Dimensiones: 4 cm $\times$ 6 cm
56.1	$(x, y) = (1, -2)$
56.2	$(x, y) = (4, 12)$ o $(-1, -3)$
56.3	Juan: 40 años; Pedro: 20 años
57.1	$(x, y) = (2, \frac{1}{2})$
57.2	Cuatro soluciones: $(\pm 5, \pm 2)$
57.3	Los números son 7,5 y 2,5
58.1	$(x, y) = (-1, 3)$
58.2	$(x, y) = (4, 2, 5)$ o $(-5, -2)$
58.3	12 aciertos y 8 fallos
59.1	$(x, y) = (4, 3)$
59.2	$(1 \pm \sqrt{2}, -1 \mp 2\sqrt{2})$
59.3	Base: 8 cm; Altura: 5 cm
60.1	$(x, y) = (1, -2)$
60.2	$(x, y) = (0, 4)$ o $(2, 2)$
60.3	Naranjas: 1 €/kg; Manzanas: 2 €/kg

12.2. Métodos Utilizados

1. **Sustitución:** Despejamos una variable y sustituimos
2. **Igualación:** Igualamos dos expresiones de la misma variable
3. **Reducción:** Sumamos/restamos ecuaciones para eliminar variables

12.3. Reflexiones Pedagógicas

Nota Importante

Puntos clave en sistemas de ecuaciones:

- Simplificar siempre las ecuaciones con fracciones
- Verificar todas las soluciones obtenidas
- En sistemas no lineales pueden existir múltiples soluciones
- Los problemas de aplicación requieren interpretación contextual
- Elegir el método más eficiente según la estructura del sistema

Soluciones Detalladas
Ejercicios 61-70
Matemáticas 4º ESO

Soluciones Rigurosas y Completas

Curso 2025-2026

Índice

1. Inecuaciones y Logaritmos	3
1.1. Ejercicio 61	3
1.1.1. Apartado 1: Inecuación lineal $2(x - 3) \leq x + 1$	3
1.1.2. Apartado 2: Inecuación de segundo grado $x^2 - x - 6 < 0$	3
1.1.3. Apartado 3: Logaritmo $\log_2 64 = x$	4
1.2. Ejercicio 62	6
1.2.1. Apartado 1: Inecuación lineal $3x + 5 > 5x - 1$	6
1.2.2. Apartado 2: Inecuación de segundo grado $-x^2 + 5x - 4 \geq 0$	6
1.2.3. Apartado 3: Logaritmo $\log_x 125 = 3$	8
1.3. Ejercicio 63	9
1.3.1. Apartado 1: Sistema de inecuaciones	9
1.3.2. Apartado 2: Inecuación $x^2 + 9 \geq 0$	10
1.3.3. Apartado 3: Desarrollo de $\log\left(\frac{x^3}{y \cdot z^2}\right)$	11
1.4. Ejercicio 64	12
1.4.1. Apartado 1: Sistema de inecuaciones	12
1.4.2. Apartado 2: Inecuación $x^2 - 2x + 1 < 0$	13
1.4.3. Apartado 3: Cálculo de $\log_{10} 1000 + \log_{10} 0,1$	13
1.5. Ejercicio 65	15
1.5.1. Apartado 1: Inecuación con fracciones $\frac{x}{3} - \frac{1}{2} > \frac{x}{6}$	15
1.5.2. Apartado 2: Inecuación $2x^2 - 8 > 0$	16
1.5.3. Apartado 3: Desarrollo de $\log(a^4 \cdot \sqrt[3]{b})$	17
1.6. Ejercicio 66	18
1.6.1. Apartado 1: Sistema de inecuaciones	18
1.6.2. Apartado 2: Inecuación $-x^2 + 2x + 3 > 0$	19
1.6.3. Apartado 3: Logaritmo $\log_4 x = 2$	20
1.7. Ejercicio 67	21
1.7.1. Apartado 1: Inecuación $x - 2(x + 1) \leq 5$	21
1.7.2. Apartado 2: Inecuación $x^2 > 4$	21
1.7.3. Apartado 3: Desarrollo de $\log\left(\frac{\sqrt{x}}{y^5}\right)$	22
1.8. Ejercicio 68	24
1.8.1. Apartado 1: Sistema de inecuaciones	24
1.8.2. Apartado 2: Inecuación $x^2 + x + 10 < 0$	24
1.8.3. Apartado 3: Cálculo de $3\log_5 5 - \log_2 8$	25
1.9. Ejercicio 69	27
1.9.1. Apartado 1: Inecuación $4 - x \leq 2(x - 1)$	27
1.9.2. Apartado 2: Inecuación $x^2 - 6x + 8 \leq 0$	27
1.9.3. Apartado 3: Ecuación logarítmica $\log_{10}(2x - 5) = 0$	28
1.10. Ejercicio 70	30
1.10.1. Apartado 1: Sistema de inecuaciones	30
1.10.2. Apartado 2: Inecuación $x^2 - 4x + 4 \leq 0$	31
1.10.3. Apartado 3: Desarrollo de $\log\left(\frac{100\sqrt{a}}{b}\right)$	31

1. Inecuaciones y Logaritmos

1.1. Ejercicio 61

Ejercicio 1 (Ejercicio 61). 1. Resuelve la inecuación lineal y expresa la solución en forma de intervalo: $2(x - 3) \leq x + 1$.

2. Resuelve la inecuación de segundo grado: $x^2 - x - 6 < 0$.

3. Calcula el valor de x : $\log_2 64 = x$.

1.1.1. Apartado 1: Inecuación lineal $2(x - 3) \leq x + 1$

Desarrollo paso a paso:

Paso 1: Aplicar la propiedad distributiva Comenzamos expandiendo el término del lado izquierdo:

$$2(x - 3) \leq x + 1$$

$$2 \cdot x - 2 \cdot 3 \leq x + 1$$

$$2x - 6 \leq x + 1$$

Paso 2: Agrupar términos con x en el lado izquierdo Restamos x a ambos lados de la inecuación:

$$2x - 6 - x \leq x + 1 - x$$

$$x - 6 \leq 1$$

Paso 3: Aislar la variable x Sumamos 6 a ambos lados:

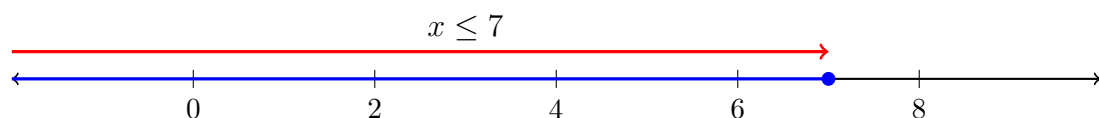
$$x - 6 + 6 \leq 1 + 6$$

$$x \leq 7$$

Paso 4: Expresar en forma de intervalo La solución es el conjunto de todos los números reales menores o iguales que 7:

$$x \in (-\infty, 7]$$

Observacion: El intervalo es cerrado en 7 porque la desigualdad incluye la igualdad ($\leq$).



1.1.2. Apartado 2: Inecuación de segundo grado $x^2 - x - 6 < 0$

Método de resolución: Factorización y análisis de signos

Paso 1: Encontrar las raíces de la ecuación asociada Resolvemos primero $x^2 - x - 6 = 0$ mediante factorización.

Buscamos dos números que multiplicados den -6 y sumados den -1 :

- $-3 \cdot 2 = -6$
- $-3 + 2 = -1 \checkmark$

Por tanto:

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2) = 0$$

Las raíces son:

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$$

Paso 2: Estudiar el signo de la parábola La función $f(x) = x^2 - x - 6$ es una parábola que abre hacia arriba (coeficiente de x^2 es positivo).

Analizamos el signo en los intervalos determinados por las raíces:

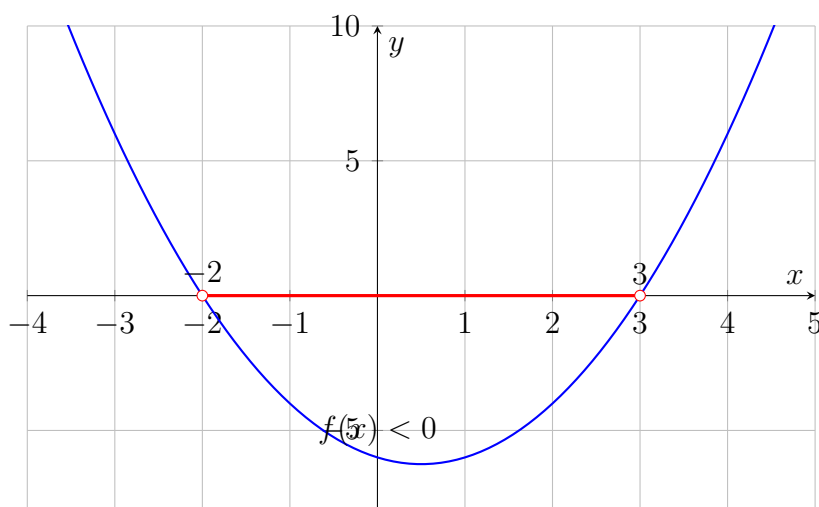
Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 3)$	$(3, +\infty)$
Signo de $x + 2$	$-$	$+$	$+$
Signo de $x - 3$	$-$	$-$	$+$
Signo de $(x + 2)(x - 3)$	$+$	$-$	$+$

Paso 3: Seleccionar los intervalos donde $f(x) < 0$ Necesitamos que $x^2 - x - 6 < 0$, es decir, valores negativos.

Del análisis anterior: el signo es negativo en el intervalo $(-2, 3)$.

$$x \in (-2, 3)$$

Nota importante: Los extremos NO se incluyen porque la desigualdad es estricta ($<$).



1.1.3. Apartado 3: Logaritmo $\log_2 64 = x$

Definición de logaritmo: $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$

Paso 1: Aplicar la definición Según la definición de logaritmo:

$$\log_2 64 = x \Leftrightarrow 2^x = 64$$

Paso 2: Expresar 64 como potencia de 2 Descomponemos 64 en factores primos:

$$\begin{aligned} 64 &= 2 \cdot 32 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 16 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 8 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ &= 2^6 \end{aligned}$$

Paso 3: Igualar las expresiones Tenemos:

$$2^x = 64 = 2^6$$

Paso 4: Aplicar la unicidad de las potencias Como las bases son iguales (base 2), los exponentes deben ser iguales:

$$x = 6$$

Verificación:

$$\log_2 64 = \log_2(2^6) = 6$$

$$\boxed{x = 6}$$

Conclusión: El logaritmo en base 2 de 64 es 6, porque $2^6 = 64$.

1.2. Ejercicio 62

Ejercicio 2 (Ejercicio 62). 1. Resuelve la inecuación lineal y expresa la solución en forma de intervalo: $3x + 5 > 5x - 1$.

2. Resuelve la inecuación de segundo grado: $-x^2 + 5x - 4 \geq 0$.

3. Calcula el valor de x : $\log_x 125 = 3$.

1.2.1. Apartado 1: Inecuación lineal $3x + 5 > 5x - 1$

Desarrollo riguroso:

Paso 1: Agrupar términos con x a la izquierda Restamos $5x$ a ambos lados:

$$3x + 5 - 5x > 5x - 1 - 5x$$

$$-2x + 5 > -1$$

Paso 2: Aislar el término con x Restamos 5 a ambos lados:

$$-2x + 5 - 5 > -1 - 5$$

$$-2x > -6$$

Paso 3: Despejar x **IMPORTANTE:** Al dividir por un número negativo, la desigualdad cambia de sentido.

Dividimos ambos lados por -2 y cambiamos el sentido de la desigualdad:

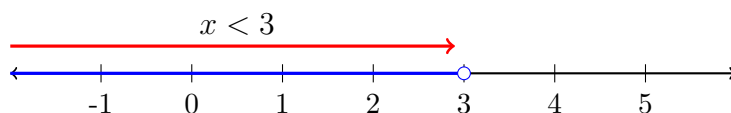
$$\frac{-2x}{-2} < \frac{-6}{-2}$$

$$x < 3$$

Paso 4: Expresar en forma de intervalo

$$x \in (-\infty, 3)$$

Advertencia común: Muchos estudiantes olvidan cambiar el sentido de la desigualdad al dividir por números negativos. Este es un error muy frecuente.



1.2.2. Apartado 2: Inecuación de segundo grado $-x^2 + 5x - 4 \geq 0$

Método alternativo: Trabajar con el polinomio opuesto

Paso 1: Multiplicar por -1 (cambiando el sentido) Para facilitar el análisis, multiplicamos toda la inecuación por -1 :

$$-x^2 + 5x - 4 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 5x + 4 \leq 0$$

Paso 2: Encontrar las raíces de $x^2 - 5x + 4 = 0$ Aplicamos la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Con $a = 1$, $b = -5$, $c = 4$:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm 3}{2}$$

Por tanto:

$$x_1 = \frac{5 + 3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{5 - 3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

También podemos factorizar:

$$x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4) = 0$$

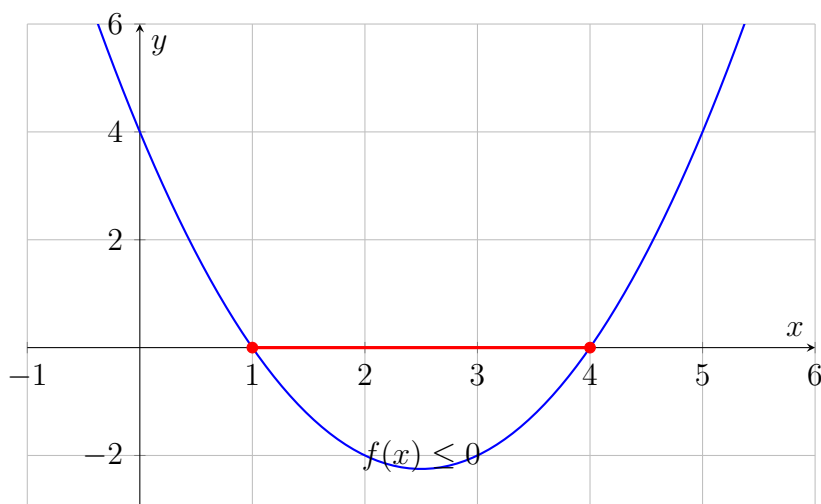
Paso 3: Análisis de signos La parábola $y = x^2 - 5x + 4$ abre hacia arriba.

Intervalo	$(-\infty, 1)$	$[1, 4]$	$(4, +\infty)$
Signo de $x - 1$	-	+	+
Signo de $x - 4$	-	-	+
Signo de $(x - 1)(x - 4)$	+	-	+

Paso 4: Seleccionar intervalos donde $x^2 - 5x + 4 \leq 0$ Buscamos donde la expresión es negativa o cero:

$$x \in [1, 4]$$

Nota: Incluimos los extremos porque la desigualdad es no estricta ($\geq$).



1.2.3. Apartado 3: Logaritmo $\log_x 125 = 3$

Objetivo: Encontrar la base x del logaritmo.

Paso 1: Aplicar la definición de logaritmo

$$\log_x 125 = 3 \Leftrightarrow x^3 = 125$$

Paso 2: Despejar x mediante raíz cúbica Aplicamos la raíz cúbica a ambos lados:

$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{125}$$

$$x = \sqrt[3]{125}$$

Paso 3: Calcular la raíz cúbica de 125 Buscamos un número que elevado al cubo dé 125:

$$1^3 = 1$$

$$2^3 = 8$$

$$3^3 = 27$$

$$4^3 = 64$$

$$5^3 = 125 \quad \checkmark$$

Por tanto:

$$x = 5$$

Verificación:

$$\log_5 125 = \log_5(5^3) = 3$$

$$\boxed{x = 5}$$

Justificación adicional: La base de un logaritmo debe cumplir: $x > 0$ y $x \neq 1$. Como $x = 5 > 0$ y $5 \neq 1$, la solución es válida.

1.3. Ejercicio 63

Ejercicio 3 (Ejercicio 63). 1. Resuelve el sistema de inecuaciones: $\begin{cases} x - 5 < 0 \\ 2x + 1 \geq 7 \end{cases}$

2. Resuelve la inecuación de segundo grado: $x^2 + 9 \geq 0$.

3. Aplica las propiedades de los logaritmos para desarrollar: $\log\left(\frac{x^3}{y \cdot z^2}\right)$.

1.3.1. Apartado 1: Sistema de inecuaciones

Concepto: Un sistema de inecuaciones se resuelve encontrando la intersección de las soluciones individuales.

Paso 1: Resolver la primera inecuación $x - 5 < 0$

$$x - 5 < 0$$

$$x < 5$$

Solución: $S_1 = (-\infty, 5)$

Paso 2: Resolver la segunda inecuación $2x + 1 \geq 7$

$$2x + 1 \geq 7$$

$$2x \geq 7 - 1$$

$$2x \geq 6$$

$$x \geq 3$$

Solución: $S_2 = [3, +\infty)$

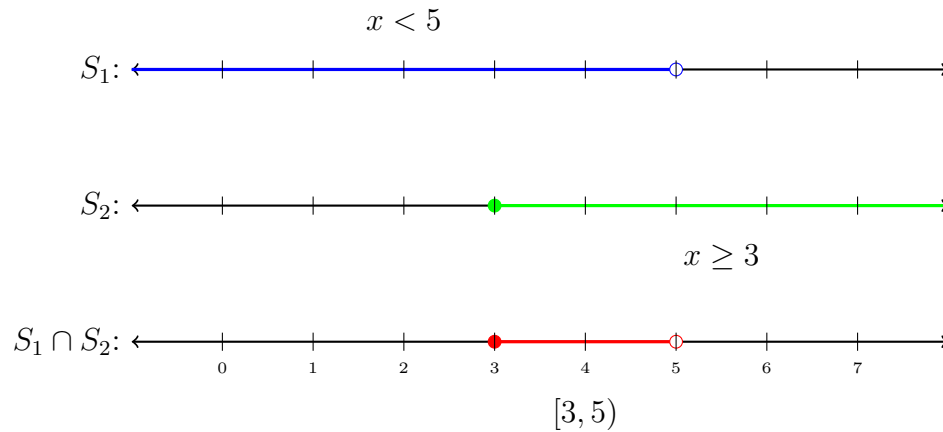
Paso 3: Hallar la intersección $S_1 \cap S_2$ Necesitamos valores que cumplan AMBAS condiciones simultáneamente:

- $x < 5$ (primera inecuación)
- $x \geq 3$ (segunda inecuación)

La intersección es:

$$S_1 \cap S_2 = (-\infty, 5) \cap [3, +\infty) = [3, 5)$$

$$\boxed{x \in [3, 5)}$$



1.3.2. Apartado 2: Inecuación $x^2 + 9 \geq 0$

Análisis teórico:

Paso 1: Analizar la naturaleza de la expresión La expresión $x^2 + 9$ está compuesta por:

- x^2 : siempre es no negativo ($x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$)
- 9: es un número positivo

Paso 2: Determinar el valor mínimo Como $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$x^2 + 9 \geq 0 + 9 = 9 > 0$$

El valor mínimo se alcanza cuando $x = 0$:

$$x^2 + 9 \Big|_{x=0} = 0^2 + 9 = 9$$

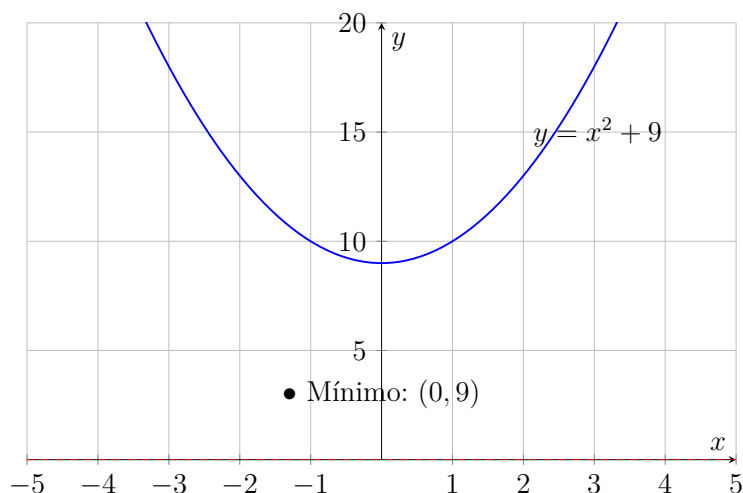
Paso 3: Conclusión Dado que $x^2 + 9 \geq 9 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, la inecuación $x^2 + 9 \geq 0$ se cumple para TODOS los números reales.

$$\boxed{x \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)}$$

Observación matemática: Esta inecuación NO tiene raíces reales, ya que:

$$x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = -9$$

Esta ecuación no tiene soluciones reales (sólo complejas: $x = \pm 3i$).



1.3.3. Apartado 3: Desarrollo de $\log\left(\frac{x^3}{y \cdot z^2}\right)$

Propiedades de logaritmos a utilizar:

- $\log\left(\frac{A}{B}\right) = \log A - \log B$ (logaritmo de un cociente)
- $\log(A \cdot B) = \log A + \log B$ (logaritmo de un producto)
- $\log(A^n) = n \log A$ (logaritmo de una potencia)

Paso 1: Aplicar la propiedad del cociente

$$\log\left(\frac{x^3}{y \cdot z^2}\right) = \log(x^3) - \log(y \cdot z^2)$$

Paso 2: Aplicar la propiedad del producto al segundo término

$$\log(x^3) - \log(y \cdot z^2) = \log(x^3) - [\log(y) + \log(z^2)]$$

Paso 3: Simplificar (eliminar corchetes)

$$\log(x^3) - \log(y) - \log(z^2)$$

Paso 4: Aplicar la propiedad de la potencia

$$3 \log(x) - \log(y) - 2 \log(z)$$

$$\log\left(\frac{x^3}{y \cdot z^2}\right) = 3 \log x - \log y - 2 \log z$$

Verificación dimensional:

Original: $\log\left(\frac{x^3}{y \cdot z^2}\right)$

Desarrollado: $3 \log x - \log y - 2 \log z$

Condiciones de existencia: Para que los logaritmos estén definidos:

$$x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0$$

1.4. Ejercicio 64

Ejercicio 4 (Ejercicio 64). 1. Resuelve el sistema de inecuaciones: $\begin{cases} 3(x+1) < 6 \\ \frac{x}{4} - 1 \leq 0 \end{cases}$

2. Resuelve la inecuación de segundo grado: $x^2 - 2x + 1 < 0$.

3. Calcula: $\log_{10} 1000 + \log_{10} 0,1$.

1.4.1. Apartado 1: Sistema de inecuaciones

Paso 1: Resolver $3(x+1) < 6$ Aplicamos la propiedad distributiva:

$$3x + 3 < 6$$

Restamos 3 a ambos lados:

$$3x < 6 - 3$$

$$3x < 3$$

Dividimos por 3:

$$x < 1$$

Solución: $S_1 = (-\infty, 1)$

Paso 2: Resolver $\frac{x}{4} - 1 \leq 0$ Sumamos 1 a ambos lados:

$$\frac{x}{4} \leq 1$$

Multiplicamos ambos lados por 4:

$$x \leq 4$$

Solución: $S_2 = (-\infty, 4]$

Paso 3: Hallar la intersección

$$S_1 \cap S_2 = (-\infty, 1) \cap (-\infty, 4] = (-\infty, 1)$$

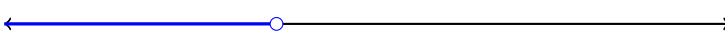
Explicación: Buscamos valores que cumplan AMBAS condiciones:

■ $x < 1$

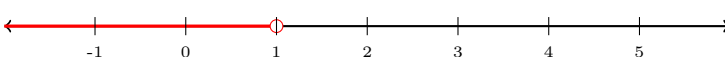
■ $x \leq 4$

Si $x < 1$, automáticamente $x < 4$, por lo que la condición más restrictiva es $x < 1$.

$$x \in (-\infty, 1)$$

S_1 : 

S_2 : 

$S_1 \cap S_2$: 

1.4.2. Apartado 2: Inecuación $x^2 - 2x + 1 < 0$

Análisis algebraico:

Paso 1: Reconocer el trinomio cuadrado perfecto La expresión $x^2 - 2x + 1$ es un trinomio cuadrado perfecto:

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

Verificación:

$$(x - 1)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = x^2 - 2x + 1 \quad \checkmark$$

Paso 2: Analizar el signo de $(x - 1)^2$ Un cuadrado es SIEMPRE no negativo:

$$(x - 1)^2 \geq 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

Más específicamente:

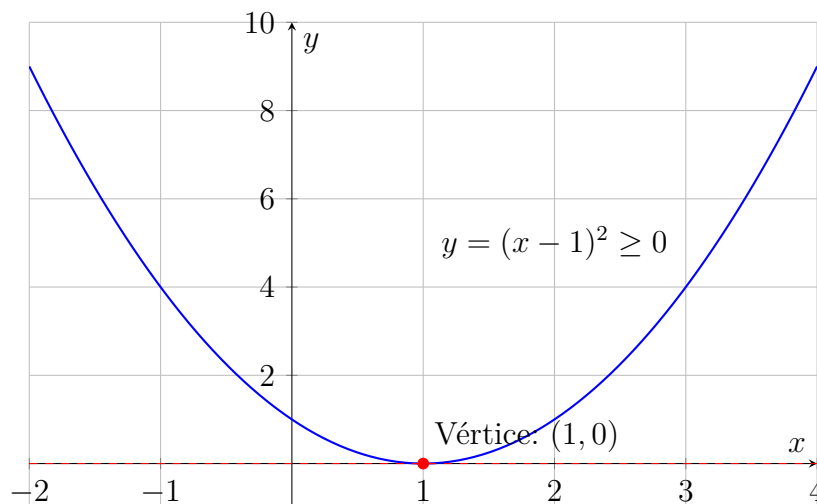
- $(x - 1)^2 = 0$ cuando $x = 1$
- $(x - 1)^2 > 0$ cuando $x \neq 1$

Paso 3: Resolver la inecuación $(x - 1)^2 < 0$ Buscamos valores donde $(x - 1)^2$ sea estrictamente negativo.

Como $(x - 1)^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, NO existe ningún valor de x que haga $(x - 1)^2 < 0$.

La inecuación NO tiene solución: $S = \emptyset$

Interpretación geométrica: La parábola $y = (x - 1)^2$ toca el eje x en $x = 1$ pero nunca está por debajo del eje.



1.4.3. Apartado 3: Cálculo de $\log_{10} 1000 + \log_{10} 0,1$

Método directo: Calcular cada logaritmo por separado.

Paso 1: Calcular $\log_{10} 1000$ Expresamos 1000 como potencia de 10:

$$1000 = 10^3$$

Por tanto:

$$\log_{10} 1000 = \log_{10}(10^3) = 3$$

Justificación: Por la propiedad $\log_b(b^n) = n$

Paso 2: Calcular $\log_{10} 0,1$ Expresamos 0,1 como potencia de 10:

$$0,1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$$

Por tanto:

$$\log_{10} 0,1 = \log_{10}(10^{-1}) = -1$$

Paso 3: Sumar ambos logaritmos

$$\log_{10} 1000 + \log_{10} 0,1 = 3 + (-1) = 3 - 1 = 2$$

$$\boxed{\log_{10} 1000 + \log_{10} 0,1 = 2}$$

Método alternativo usando propiedades:

$$\begin{aligned}\log_{10} 1000 + \log_{10} 0,1 &= \log_{10}(1000 \times 0,1) \\ &= \log_{10}(100) \\ &= \log_{10}(10^2) \\ &= 2\end{aligned}$$

Ambos métodos conducen al mismo resultado: $\boxed{2}$

1.5. Ejercicio 65

Ejercicio 5 (Ejercicio 65). 1. Resuelve la inecuación lineal y expresa la solución en forma de intervalo: $\frac{x}{3} - \frac{1}{2} > \frac{x}{6}$.

2. Resuelve la inecuación de segundo grado: $2x^2 - 8 > 0$.

3. Aplica las propiedades de los logaritmos para desarrollar: $\log(a^4 \cdot \sqrt[3]{b})$.

1.5.1. Apartado 1: Inecuación con fracciones $\frac{x}{3} - \frac{1}{2} > \frac{x}{6}$

Estrategia: Eliminar denominadores multiplicando por el m.c.m.

Paso 1: Calcular el m.c.m. de los denominadores Denominadores: 3, 2, 6

Descomposición:

$$3 = 3$$

$$2 = 2$$

$$6 = 2 \times 3$$

$$\text{m.c.m.}(3, 2, 6) = 2 \times 3 = 6$$

Paso 2: Multiplicar toda la inecuación por 6

$$6 \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2} \right) > 6 \cdot \frac{x}{6}$$

$$6 \cdot \frac{x}{3} - 6 \cdot \frac{1}{2} > 6 \cdot \frac{x}{6}$$

$$2x - 3 > x$$

Paso 3: Resolver la inecuación resultante Restamos x a ambos lados:

$$2x - x - 3 > 0$$

$$x - 3 > 0$$

$$x > 3$$

Paso 4: Expresar en forma de intervalo

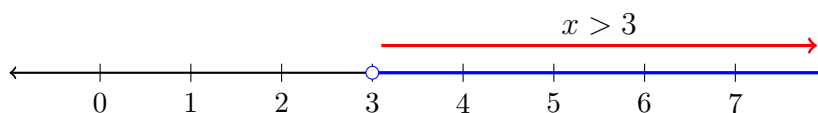
$$x \in (3, +\infty)$$

Verificación: Probamos con $x = 4$:

$$\frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{8}{6} - \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

$$\frac{5}{6} > \frac{4}{6} \quad \checkmark$$



1.5.2. Apartado 2: Inecuación $2x^2 - 8 > 0$

Método de factorización:

Paso 1: Factorizar extrayendo factor común

$$2x^2 - 8 > 0$$

$$2(x^2 - 4) > 0$$

Paso 2: Dividir por 2 (positivo) Como $2 > 0$, podemos dividir sin cambiar el sentido:

$$x^2 - 4 > 0$$

Paso 3: Reconocer diferencia de cuadrados

$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2)$$

Por tanto:

$$(x - 2)(x + 2) > 0$$

Paso 4: Encontrar las raíces

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$$

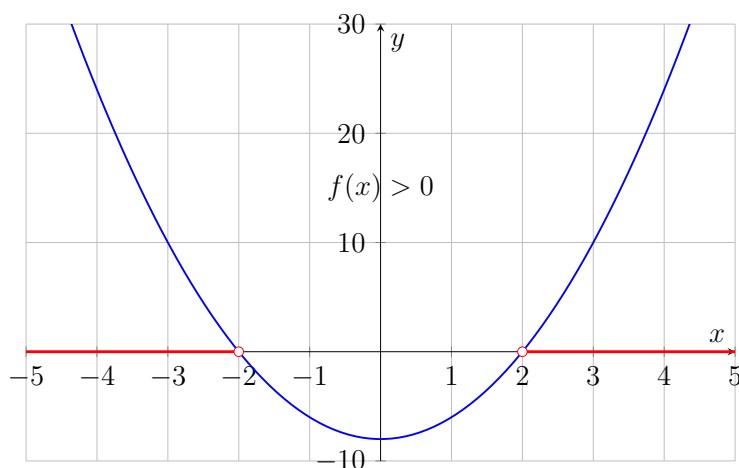
Paso 5: Análisis de signos

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, +\infty)$
$x - 2$	-	-	+
$x + 2$	-	+	+
$(x - 2)(x + 2)$	+	-	+

Paso 6: Seleccionar intervalos donde $(x - 2)(x + 2) > 0$ Los intervalos con signo positivo son:

$$x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

$$x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$



1.5.3. Apartado 3: Desarrollo de $\log(a^4 \cdot \sqrt[3]{b})$

Preparación: Expresar la raíz como potencia.

Paso 1: Reescribir la raíz cúbica como potencia

$$\sqrt[3]{b} = b^{1/3}$$

Por tanto:

$$\log(a^4 \cdot \sqrt[3]{b}) = \log(a^4 \cdot b^{1/3})$$

Paso 2: Aplicar la propiedad del producto

$$\log(a^4 \cdot b^{1/3}) = \log(a^4) + \log(b^{1/3})$$

Paso 3: Aplicar la propiedad de la potencia

$$\log(a^4) + \log(b^{1/3}) = 4 \log a + \frac{1}{3} \log b$$

$\log(a^4 \cdot \sqrt[3]{b}) = 4 \log a + \frac{1}{3} \log b$

Forma alternativa:

$$4 \log a + \frac{\log b}{3}$$

Condiciones de existencia: $a > 0$ y $b > 0$

Resumen de propiedades utilizadas:

1. $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$
2. $\log(A \cdot B) = \log A + \log B$
3. $\log(A^n) = n \log A$

1.6. Ejercicio 66

Ejercicio 6 (Ejercicio 66). 1. Resuelve el sistema de inecuaciones: $\begin{cases} 5x + 1 \leq 11 \\ 3 - x < 2x \end{cases}$

2. Resuelve la inecuación de segundo grado: $-x^2 + 2x + 3 > 0$.

3. Calcula el valor de x : $\log_4 x = 2$.

1.6.1. Apartado 1: Sistema de inecuaciones

Paso 1: Resolver $5x + 1 \leq 11$

$$5x + 1 \leq 11$$

$$5x \leq 11 - 1$$

$$5x \leq 10$$

$$x \leq 2$$

Solución: $S_1 = (-\infty, 2]$

Paso 2: Resolver $3 - x < 2x$

$$3 - x < 2x$$

$$3 < 2x + x$$

$$3 < 3x$$

$$\frac{3}{3} < x$$

$$1 < x$$

$$x > 1$$

Solución: $S_2 = (1, +\infty)$

Paso 3: Hallar la intersección

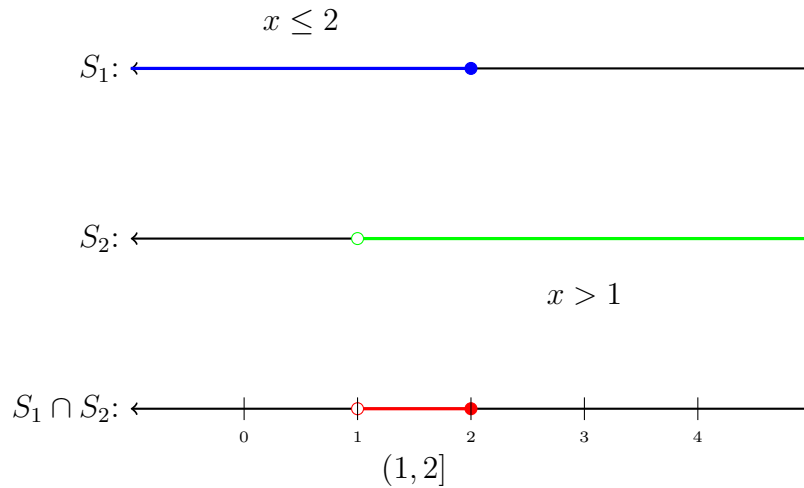
$$S_1 \cap S_2 = (-\infty, 2] \cap (1, +\infty) = (1, 2]$$

$$\boxed{x \in (1, 2]}$$

Explicación: Buscamos valores que cumplan:

- $x \leq 2$ (incluye el 2)
- $x > 1$ (NO incluye el 1)

El intervalo resultante es $(1, 2]$.



1.6.2. Apartado 2: Inecuación $-x^2 + 2x + 3 > 0$

Estrategia: Multiplicar por -1 o trabajar directamente.

Paso 1: Encontrar las raíces de $-x^2 + 2x + 3 = 0$ Multiplicamos por -1 para facilitar:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Factorizamos buscando dos números que:

- Multiplicados: -3
- Sumados: -2

Estos números son: -3 y 1 ($-3 \times 1 = -3$, $-3 + 1 = -2$)

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1) = 0$$

Raíces:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -1$$

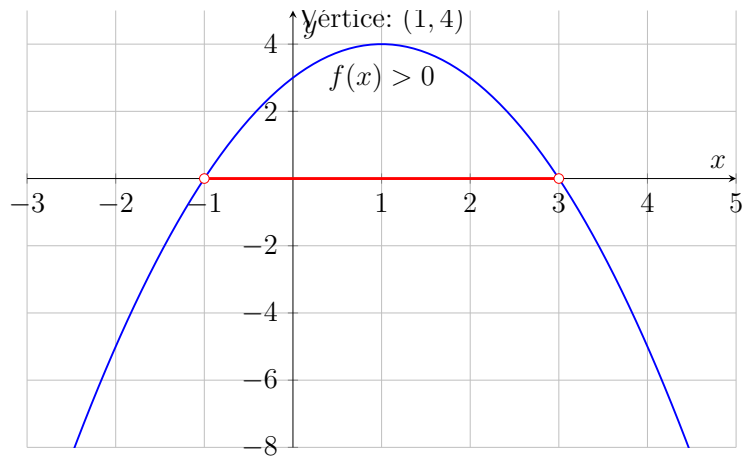
Paso 2: Analizar el signo de $-x^2 + 2x + 3$ La función $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ es una parábola que abre hacia abajo (coeficiente de x^2 es negativo).

También: $-x^2 + 2x + 3 = -(x^2 - 2x - 3) = -(x - 3)(x + 1)$

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, +\infty)$
$x + 1$	$-$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$+$
$(x + 1)(x - 3)$	$+$	$-$	$+$
$-(x + 1)(x - 3)$	$-$	$+$	$-$

Paso 3: Seleccionar intervalo donde $-x^2 + 2x + 3 > 0$ Buscamos signo positivo (estrictamente mayor):

$$x \in (-1, 3)$$



1.6.3. Apartado 3: Logaritmo $\log_4 x = 2$

Paso 1: Aplicar la definición de logaritmo

$$\log_4 x = 2 \Leftrightarrow 4^2 = x$$

Paso 2: Calcular 4^2

$$4^2 = 4 \times 4 = 16$$

Paso 3: Conclusión

$$x = 16$$

Verificación:

$$\log_4 16 = \log_4(4^2) = 2 \quad \checkmark$$

$x = 16$

Nota: La solución es válida porque $x = 16 > 0$ (el argumento de un logaritmo debe ser positivo).

1.7. Ejercicio 67

Ejercicio 7 (Ejercicio 67). 1. Resuelve la inecuación lineal y expresa la solución en forma de intervalo: $x - 2(x + 1) \leq 5$.

2. Resuelve la inecuación de segundo grado: $x^2 > 4$.

3. Aplica las propiedades de los logaritmos para desarrollar: $\log\left(\frac{\sqrt{x}}{y^5}\right)$.

1.7.1. Apartado 1: Inecuación $x - 2(x + 1) \leq 5$

Paso 1: Aplicar la propiedad distributiva

$$x - 2(x + 1) \leq 5$$

$$x - 2x - 2 \leq 5$$

Paso 2: Simplificar el lado izquierdo

$$x - 2x - 2 \leq 5$$

$$-x - 2 \leq 5$$

Paso 3: Aislar el término con x Sumamos 2 a ambos lados:

$$-x - 2 + 2 \leq 5 + 2$$

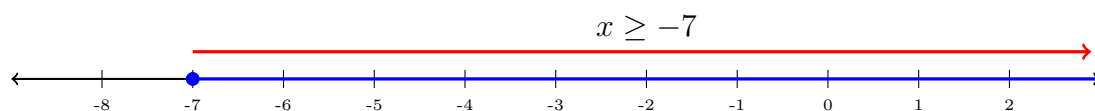
$$-x \leq 7$$

Paso 4: Despejar x Multiplicamos por -1 (cambiando el sentido):

$$x \geq -7$$

Paso 5: Expresar en forma de intervalo

$$x \in [-7, +\infty)$$



1.7.2. Apartado 2: Inecuación $x^2 > 4$

Método algebraico:

Paso 1: Reescribir como $x^2 - 4 > 0$

$$x^2 > 4$$

$$x^2 - 4 > 0$$

Paso 2: Factorizar (diferencia de cuadrados)

$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2)$$

$$(x - 2)(x + 2) > 0$$

Paso 3: Encontrar las raíces

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$$

Paso 4: Análisis de signos

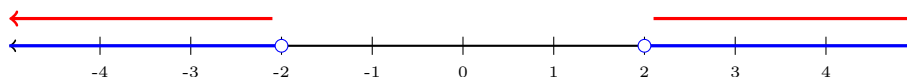
Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, +\infty)$
$x - 2$	$-$	$-$	$+$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$
$(x - 2)(x + 2)$	$+$	$-$	$+$

Paso 5: Solución Buscamos donde $(x - 2)(x + 2) > 0$:

$$x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

Interpretación alternativa: $x^2 > 4$ significa que la distancia de x al origen es mayor que 2:

$$|x| > 2 \Leftrightarrow x < -2 \text{ o } x > 2$$

**1.7.3. Apartado 3: Desarrollo de $\log\left(\frac{\sqrt{x}}{y^5}\right)$** **Paso 1: Expresar la raíz como potencia**

$$\sqrt{x} = x^{1/2}$$

$$\log\left(\frac{\sqrt{x}}{y^5}\right) = \log\left(\frac{x^{1/2}}{y^5}\right)$$

Paso 2: Aplicar la propiedad del cociente

$$\log\left(\frac{x^{1/2}}{y^5}\right) = \log(x^{1/2}) - \log(y^5)$$

Paso 3: Aplicar la propiedad de la potencia

$$\log(x^{1/2}) - \log(y^5) = \frac{1}{2} \log x - 5 \log y$$

$$\log \left(\frac{\sqrt{x}}{y^5} \right) = \frac{1}{2} \log x - 5 \log y$$

Forma alternativa:

$$\frac{\log x}{2} - 5 \log y$$

Condiciones de existencia: $x > 0$ y $y > 0$

1.8. Ejercicio 68

Ejercicio 8 (Ejercicio 68). 1. Resuelve el sistema de inecuaciones: $\begin{cases} x + 2 > 0 \\ 5 - x \geq 1 \end{cases}$

2. Resuelve la inecuación de segundo grado: $x^2 + x + 10 < 0$.

3. Calcula: $3 \log_5 5 - \log_2 8$.

1.8.1. Apartado 1: Sistema de inecuaciones

Paso 1: Resolver $x + 2 > 0$

$$x + 2 > 0$$

$$x > -2$$

Solución: $S_1 = (-2, +\infty)$

Paso 2: Resolver $5 - x \geq 1$

$$5 - x \geq 1$$

$$-x \geq 1 - 5$$

$$-x \geq -4$$

Multiplicamos por -1 (cambiando el sentido):

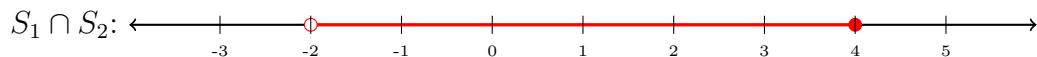
$$x \leq 4$$

Solución: $S_2 = (-\infty, 4]$

Paso 3: Hallar la intersección

$$S_1 \cap S_2 = (-2, +\infty) \cap (-\infty, 4] = (-2, 4]$$

$$x \in (-2, 4]$$



1.8.2. Apartado 2: Inecuación $x^2 + x + 10 < 0$

Análisis mediante el discriminante:

Paso 1: Verificar si existen raíces reales Para $x^2 + x + 10 = 0$, calculamos el discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(1)(10) = 1 - 40 = -39 < 0$$

Como $\Delta < 0$, la ecuación NO tiene raíces reales.

Paso 2: Determinar el signo de la parábola La función $f(x) = x^2 + x + 10$ es una parábola que abre hacia arriba ($a = 1 > 0$).

Como no corta el eje x y abre hacia arriba, está SIEMPRE por encima del eje:

$$x^2 + x + 10 > 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

Paso 3: Resolver $x^2 + x + 10 < 0$ Como $x^2 + x + 10$ es siempre positivo, NUNCA puede ser negativo.

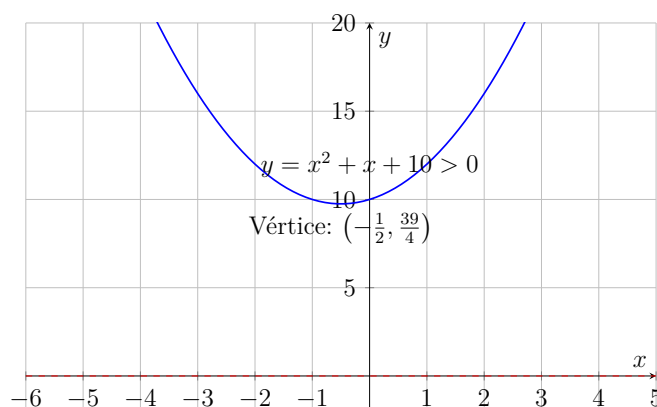
La inecuación NO tiene solución: $S = \emptyset$

Verificación: Completamos el cuadrado:

$$\begin{aligned} x^2 + x + 10 &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 10 \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{39}{4} \end{aligned}$$

Como $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$:

$$x^2 + x + 10 \geq \frac{39}{4} > 0$$



1.8.3. Apartado 3: Cálculo de $3 \log_5 5 - \log_2 8$

Paso 1: Calcular $\log_5 5$ Por definición: $\log_b b = 1$ (el logaritmo de la base en su propia base es 1)

$$\log_5 5 = 1$$

Paso 2: Calcular $3 \log_5 5$

$$3 \log_5 5 = 3 \times 1 = 3$$

Paso 3: Calcular $\log_2 8$ Expresamos 8 como potencia de 2:

$$8 = 2^3$$

Por tanto:

$$\log_2 8 = \log_2(2^3) = 3$$

Paso 4: Realizar la resta

$$3 \log_5 5 - \log_2 8 = 3 - 3 = 0$$

$$\boxed{3 \log_5 5 - \log_2 8 = 0}$$

Nota interesante: Aunque usamos bases diferentes (5 y 2), el resultado final es 0 porque ambos términos valen 3.

1.9. Ejercicio 69

Ejercicio 9 (Ejercicio 69). 1. Resuelve la inecuación lineal y expresa la solución en forma de intervalo: $4 - x \leq 2(x - 1)$.

2. Resuelve la inecuación de segundo grado: $x^2 - 6x + 8 \leq 0$.

3. Calcula el valor de x : $\log_{10}(2x - 5) = 0$.

1.9.1. Apartado 1: Inecuación $4 - x \leq 2(x - 1)$

Paso 1: Aplicar la propiedad distributiva

$$4 - x \leq 2(x - 1)$$

$$4 - x \leq 2x - 2$$

Paso 2: Agrupar términos con x a la derecha Sumamos x a ambos lados:

$$4 - x + x \leq 2x - 2 + x$$

$$4 \leq 3x - 2$$

Paso 3: Aislar el término con x Sumamos 2 a ambos lados:

$$4 + 2 \leq 3x$$

$$6 \leq 3x$$

Paso 4: Despejar x Dividimos por 3:

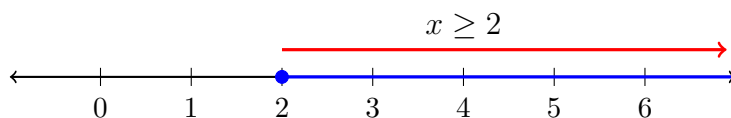
$$\frac{6}{3} \leq x$$

$$2 \leq x$$

$$x \geq 2$$

Paso 5: Expresar en forma de intervalo

$$x \in [2, +\infty)$$



1.9.2. Apartado 2: Inecuación $x^2 - 6x + 8 \leq 0$

Método de factorización:

Paso 1: Factorizar $x^2 - 6x + 8$ Buscamos dos números que:

- Multiplicados: 8
- Sumados: -6

Estos números son: -4 y -2 ($-4 \times (-2) = 8$, $-4 + (-2) = -6$)

$$x^2 - 6x + 8 = (x - 4)(x - 2)$$

Paso 2: Resolver $(x - 4)(x - 2) \leq 0$ Raíces:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 4$$

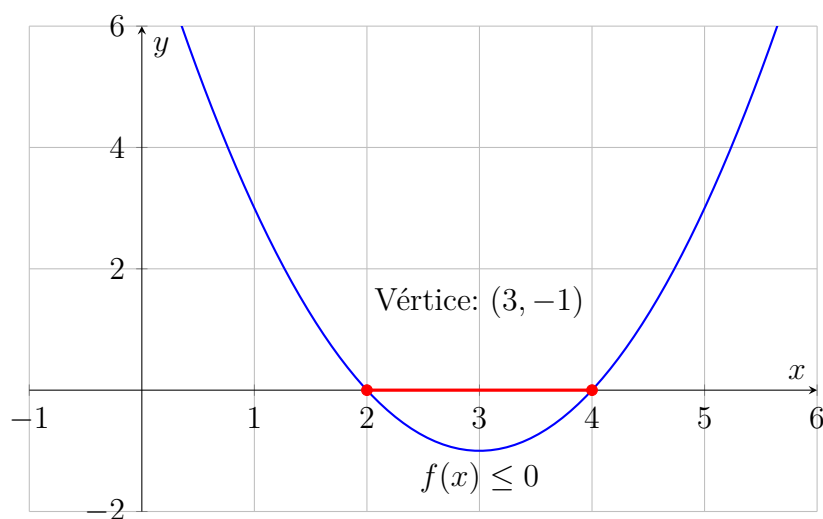
Paso 3: Análisis de signos

Intervalo	$(-\infty, 2)$	$[2, 4]$	$(4, +\infty)$
$x - 2$	$-$	$+$	$+$
$x - 4$	$-$	$-$	$+$
$(x - 2)(x - 4)$	$+$	$-$	$+$

Paso 4: Seleccionar intervalos donde $(x - 2)(x - 4) \leq 0$ Buscamos signo negativo o cero:

$$x \in [2, 4]$$

Nota: Incluimos los extremos porque la desigualdad incluye la igualdad ($\leq$).



1.9.3. Apartado 3: Ecuación logarítmica $\log_{10}(2x - 5) = 0$

Recordatorio: $\log_b a = 0 \Leftrightarrow a = b^0 = 1$

Paso 1: Aplicar la definición de logaritmo

$$\log_{10}(2x - 5) = 0 \Leftrightarrow 2x - 5 = 10^0$$

Paso 2: Simplificar 10^0 Cualquier número (excepto 0) elevado a 0 es 1:

$$10^0 = 1$$

Por tanto:

$$2x - 5 = 1$$

Paso 3: Resolver la ecuación lineal

$$2x - 5 = 1$$

$$2x = 1 + 5$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

Paso 4: Verificar la condición de existencia El argumento del logaritmo debe ser positivo:

$$2x - 5 > 0$$

$$2(3) - 5 = 6 - 5 = 1 > 0 \quad \checkmark$$

Verificación completa:

$$\log_{10}(2 \cdot 3 - 5) = \log_{10}(1) = 0 \quad \checkmark$$

$$\boxed{x = 3}$$

1.10. Ejercicio 70

Ejercicio 10 (Ejercicio 70). 1. Resuelve el sistema de inecuaciones: $\begin{cases} \frac{x}{2} + 1 \geq 3 \\ 4(x - 1) < 20 \end{cases}$

2. Resuelve la inecuación de segundo grado: $x^2 - 4x + 4 \leq 0$.

3. Aplica las propiedades de los logaritmos para desarrollar: $\log\left(\frac{100\sqrt{a}}{b}\right)$.

1.10.1. Apartado 1: Sistema de inecuaciones

Paso 1: Resolver $\frac{x}{2} + 1 \geq 3$ Restamos 1 a ambos lados:

$$\frac{x}{2} \geq 3 - 1$$

$$\frac{x}{2} \geq 2$$

Multiplicamos por 2:

$$x \geq 4$$

Solución: $S_1 = [4, +\infty)$

Paso 2: Resolver $4(x - 1) < 20$ Aplicamos la propiedad distributiva:

$$4x - 4 < 20$$

Sumamos 4:

$$4x < 20 + 4$$

$$4x < 24$$

Dividimos por 4:

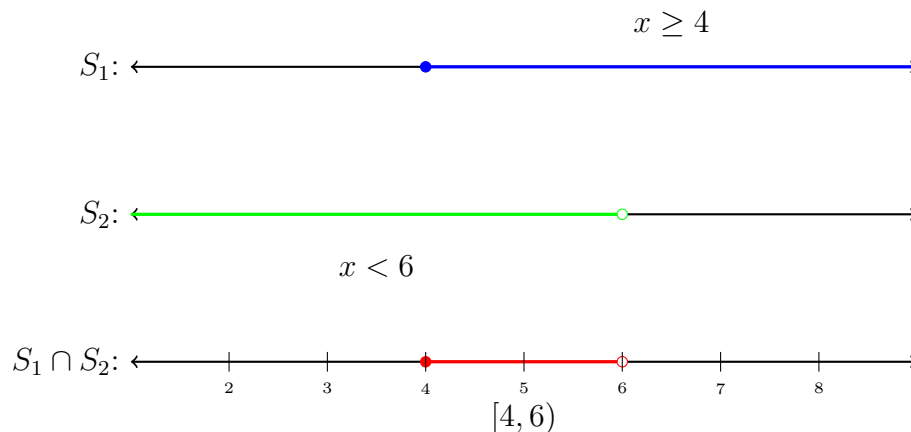
$$x < 6$$

Solución: $S_2 = (-\infty, 6)$

Paso 3: Hallar la intersección

$$S_1 \cap S_2 = [4, +\infty) \cap (-\infty, 6) = [4, 6)$$

$$\boxed{x \in [4, 6)}$$



1.10.2. Apartado 2: Inecuación $x^2 - 4x + 4 \leq 0$

Reconocimiento de trinomio cuadrado perfecto:

Paso 1: Factorizar como cuadrado perfecto

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

Verificación:

$$(x - 2)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = x^2 - 4x + 4 \quad \checkmark$$

Paso 2: Resolver $(x - 2)^2 \leq 0$ Un cuadrado es siempre no negativo:

$$(x - 2)^2 \geq 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

El único valor donde $(x - 2)^2 = 0$ es:

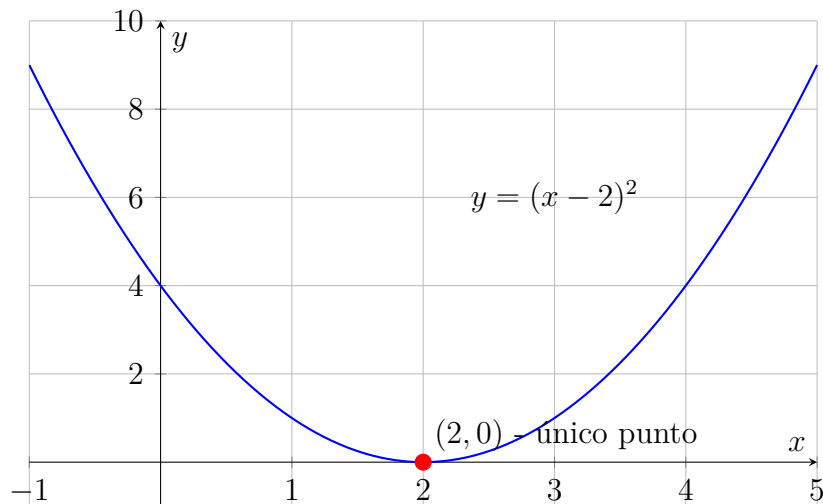
$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Paso 3: Conclusión La única solución de $(x - 2)^2 \leq 0$ es cuando $(x - 2)^2 = 0$:

$$\boxed{x = 2}$$

O en notación de conjuntos: $S = \{2\}$

Observación: La parábola $y = (x - 2)^2$ es tangente al eje x en $x = 2$ (raíz doble).



1.10.3. Apartado 3: Desarrollo de $\log\left(\frac{100\sqrt{a}}{b}\right)$

Paso 1: Expresar 100 y la raíz como potencias

$$100 = 10^2$$

$$\sqrt{a} = a^{1/2}$$

$$\log\left(\frac{100\sqrt{a}}{b}\right) = \log\left(\frac{10^2 \cdot a^{1/2}}{b}\right)$$

Paso 2: Aplicar la propiedad del cociente

$$\log\left(\frac{10^2 \cdot a^{1/2}}{b}\right) = \log(10^2 \cdot a^{1/2}) - \log b$$

Paso 3: Aplicar la propiedad del producto

$$\log(10^2 \cdot a^{1/2}) - \log b = \log(10^2) + \log(a^{1/2}) - \log b$$

Paso 4: Aplicar la propiedad de la potencia

$$\log(10^2) + \log(a^{1/2}) - \log b = 2 \log 10 + \frac{1}{2} \log a - \log b$$

Paso 5: Simplificar $\log 10$ Asumiendo logaritmo decimal (base 10):

$$\log_{10} 10 = 1$$

Por tanto:

$$2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \log a - \log b = 2 + \frac{1}{2} \log a - \log b$$

$$\boxed{\log\left(\frac{100\sqrt{a}}{b}\right) = 2 + \frac{1}{2} \log a - \log b}$$

Forma alternativa:

$$2 + \frac{\log a}{2} - \log b$$

Condiciones de existencia: $a > 0$ y $b > 0$

Nota: Si el logaritmo no es decimal, la expresión sería:

$$2 \log c + \frac{1}{2} \log a - \log b$$

donde c es la base del logaritmo.

Resumen de Conceptos Clave

Inecuaciones Lineales

- Al multiplicar o dividir por un número NEGATIVO, cambiar el sentido de la desigualdad
- Intervalos abiertos (a, b) NO incluyen los extremos
- Intervalos cerrados $[a, b]$ SÍ incluyen los extremos

Inecuaciones de Segundo Grado

- Factorizar y estudiar el signo en cada intervalo
- Parábola con $a > 0$ abre hacia arriba
- Parábola con $a < 0$ abre hacia abajo
- Si $\Delta < 0$: no hay raíces reales

Logaritmos - Propiedades Fundamentales

1. $\log_b b = 1$
2. $\log_b 1 = 0$
3. $\log_b(b^n) = n$
4. $\log(A \cdot B) = \log A + \log B$
5. $\log\left(\frac{A}{B}\right) = \log A - \log B$
6. $\log(A^n) = n \log A$
7. $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$

Sistemas de Inecuaciones

- Resolver cada inecuación por separado
- La solución es la INTERSECCIÓN de todas las soluciones
- Representar gráficamente facilita la comprensión