PROYECTO SABER HACER

BIBLIOTECA DEL PROFESORADO

Matemáticas

Enseñanzas académicas

SERIE **RESUELVE**

SOLUCIONARIO

4 ESO

El Solucionario de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, del proyecto Saber hacer, para 4.º curso de ESO es una obra colectiva concebida, diseñada y creada en el Departamento de Ediciones Educativas de Santillana Educación, S. L., dirigido por **Teresa Grence Ruiz**.

En su elaboración ha participado el siguiente equipo:
María del Rocío Rodríguez Tilve
Cintia Rúa Pérez
Lorena Saavedra López
Ana Mariña Vila Iglesias

EDICIÓN
José Antonio Almodóvar Herráiz
Ana de la Cruz Fayos
Silvia Marín García
Virgilio Nieto Barrera
Laura Sánchez Fernández

EDITOR EJECUTIVO
Carlos Pérez Saavedra

DIRECCIÓN DEL PROYECTO
Domingo Sánchez Figueroa

SANTILLANA

Presentación

El nombre de la serie, **Saber Hacer**, responde al planteamiento de presentar un proyecto de Matemáticas centrado en la adquisición de los contenidos y procedimientos necesarios para que los alumnos puedan desenvolverse en la vida real. El saber matemático, dentro de esta etapa de la enseñanza, debe garantizar no solo la interpretación y la descripción de la realidad, sino también la actuación sobre ella.

En este sentido, y considerando las Matemáticas a estos niveles como una materia esencialmente procedimental, recogemos en este material la **resolución de todos los ejercicios y problemas** formulados en el libro del alumno.

Pretendemos que esta resolución no sea solo un instrumento sino que pueda entenderse como una propuesta didáctica para enfocar la adquisición de los distintos conceptos y procedimientos que se presentan en el libro del alumno.

Índice

Números reales. Porcentajes

1

CLAVES PARA EMPEZAR

1. Página 6

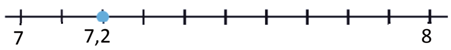
a) $35{,}47 = \dfrac{3547}{100}$

b) $13{,}\widehat{46} = \dfrac{1346-13}{99} = \dfrac{1333}{99}$

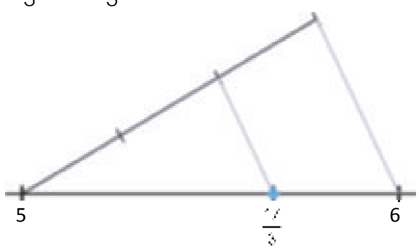
c) $5{,}2\widehat{31} = \dfrac{5231-52}{990} = \dfrac{5179}{990}$

2. Página 6

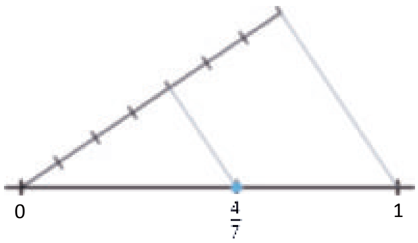
a) 7,2



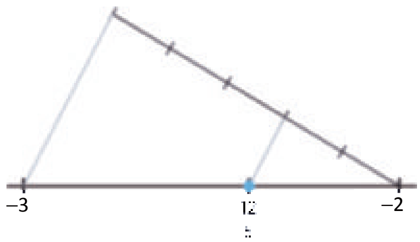
c) $\dfrac{17}{3} = 5 + \dfrac{2}{3}$



b) $\dfrac{4}{7}$



d) $-\dfrac{12}{5} = -2 - \dfrac{2}{5}$



VIDA COTIDIANA

LA BANCA. Página 7

Nos hemos gastado $\dfrac{480}{1440} = \dfrac{1}{3}$ de nuestros ahorros.

Ese gasto representa $\dfrac{1}{3} = 0{,}\widehat{3} = \dfrac{33{,}\widehat{3}}{100} = 33{,}\widehat{3}\,\%$.

RESUELVE EL RETO

RETO 1. Página 9

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $0{,}001 < 0{,}001000100001\ldots < 0{,}\widehat{001}$

b) $0{,}12131415\ldots < 0{,}1214 < 2{,}12141618\ldots$

RETO 2. Página 12

Es por defecto si el número es positivo, y por exceso si es negativo.

El redondeo es por defecto si el número es positivo y la primera cifra que eliminamos es menor que 5,
o bien si el número es negativo y la primera cifra que eliminamos es mayor que 5; y por exceso en caso contrario.

RETO 3. Página 16

$$\frac{100+a}{100}\cdot\frac{100-10}{100}\cdot C=C \rightarrow \frac{100+a}{100}\cdot\frac{100-10}{100}=\frac{100+a}{100}\cdot\frac{90}{100}=\frac{(100+a)\cdot 90}{10\,000}=1$$

$$\rightarrow (100+a)\cdot 90=10\,000 \rightarrow 9000+90\cdot a=10\,000 \rightarrow 90\cdot a=10\,000-9000=1000$$

El aumento porcentual que habrá que aplicar para obtener la cantidad inicial es:

$$a=\frac{1000}{90}=11,\widehat{1}\,\%$$

RETO 4. Página 19

Si decide sacar el dinero a los seis meses, como todavía no ha finalizado el período de inversión,
no se trata de un interés compuesto.

Si aplicamos el interés simple:

$$I=\frac{C\cdot r\cdot t}{100}=\frac{1000\cdot 2\cdot \frac{6}{12}}{100}=10\,€$$

Por tanto, saca del banco:

$$1\,000+10=1\,010\text{ €}$$

Si lo hace al año y medio, habrá finalizado un período de inversión, pero no el segundo período.

Primer período (1 año):

$$C_f=C_i\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^t=1000\cdot\left(1+\frac{2}{100}\right)^1=1020\,€$$

Segundo período (6 meses):

$$I=\frac{C\cdot r\cdot t}{100}=\frac{1020\cdot 2\cdot \frac{6}{12}}{100}=10,2\,€$$

Por tanto, saca del banco:

$$1\,020+10,2=1\,030,20\text{ €}$$

ACTIVIDADES

1. Página 8

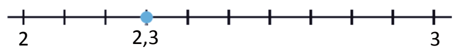
$\frac{3}{40}$ y $0,075 \rightarrow$ Es un número decimal exacto.

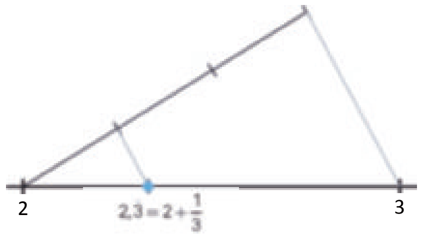
$3,\widehat{6}$, $3,666...$ y $\frac{11}{3} \rightarrow$ Es un número decimal periódico puro.

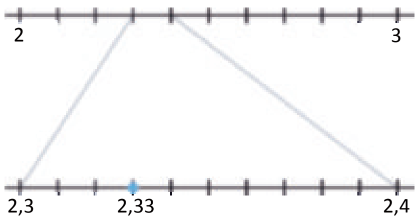
$0,01$ y $\frac{5}{500} \rightarrow$ Es un número decimal exacto.

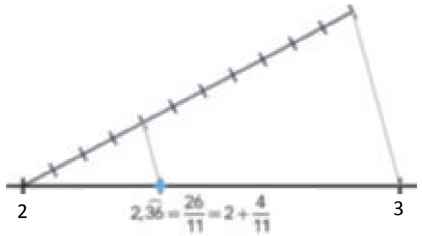
2. Página 8

a) $2{,}3 < 2{,}33 < 2{,}\widehat{3} < 2{,}\widehat{36}$

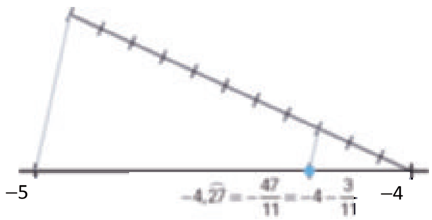


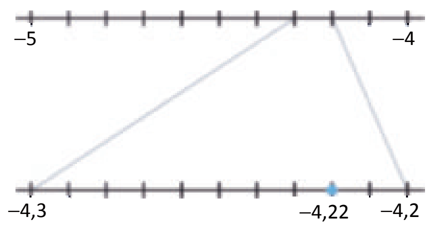


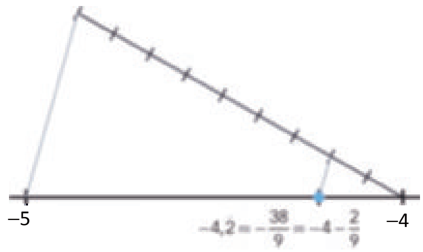


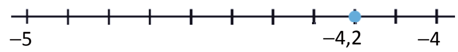


b) $-4{,}\widehat{27} < -4{,}\widehat{2} < -4{,}22 < -4{,}2$

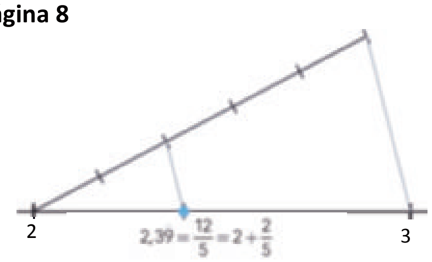


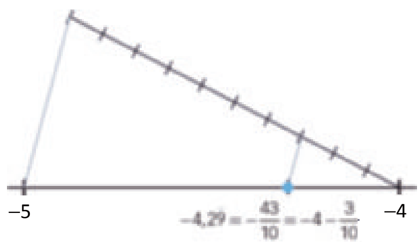






3. Página 8





4. Página 9

a) $\sqrt{4} = 2$

b) $\sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

c) $\sqrt{9} + \sqrt{4} = 3 + 2 = 5$

d) $\sqrt{14+2} = \sqrt{16} = 4$

e) $\sqrt{5}$

f) $\sqrt{4} + \sqrt{1} = 2 + 1 = 3$

No son irracionales los números de los apartados a), c), d) y f).

5. Página 9

$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$

Respuesta abierta, por ejemplo: $\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$ $\qquad$ $\sqrt{9}+\sqrt{4}=3+2=5$

6. Página 9

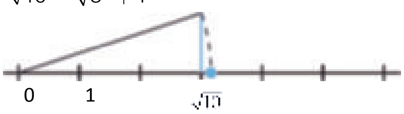
Racionales $\rightarrow$ 3,123123123... $\sqrt{\dfrac{256}{25}}$ 3,444... 3,121212... 3,04

Irracionales $\rightarrow$ 3,121122111222... 3,48163264... $\sqrt[3]{31}$ $\sqrt{10}$ 2π

$$2\pi > 3{,}48163264\ldots > 3{,}444\ldots > \sqrt{\frac{256}{25}} > \sqrt{10} > \sqrt[3]{31} > 3{,}123123123\ldots > 3{,}121212\ldots > 3{,}121122111222\ldots$$

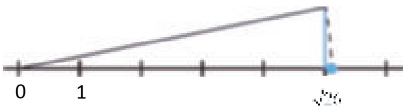
7. Página 10

a) $\sqrt{10}=\sqrt{3^2+1^2}$



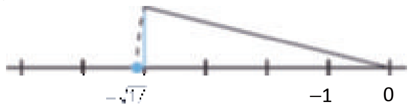
b) $\sqrt{17}=\sqrt{4^2+1^2}$

c) $\sqrt{26}=\sqrt{5^2+1^2}$

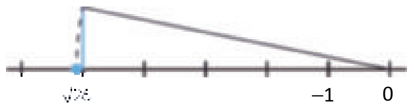


d) $-\sqrt{10}=-\sqrt{3^2+1^2}$

e) $-\sqrt{17}=-\sqrt{4^2+1^2}$

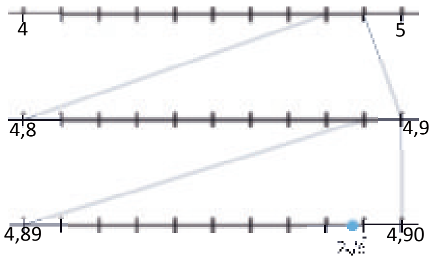


f) $-\sqrt{26}=-\sqrt{5^2+1^2}$

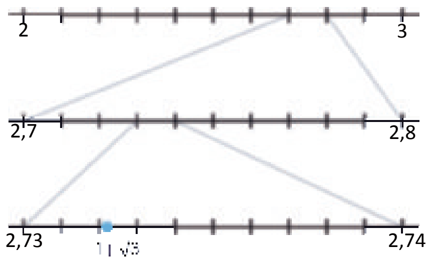


8. Página 10

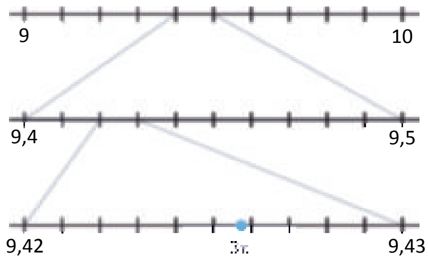
a) $2\sqrt{6}=4{,}898979486\ldots$



b) $1+\sqrt{3}=2{,}732050808$

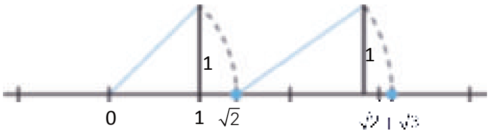


c) $3\pi=9{,}424777961$



9. Página 10

Como $2 = 1^2 + 1^2$ y $3 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ se puede representar de la siguiente manera:



10. Página 11

a) $-5 \longrightarrow$ Es un número entero.

b) $\sqrt{2} = 1{,}414213562...\longrightarrow$ Es un número irracional.

c) $\frac{3}{5} \longrightarrow$ Es un número racional.

d) $\sqrt{625} = 25 \longrightarrow$ Es un número natural.

e) $3\pi = 9{,}42477796... \longrightarrow$ Es un número irracional.

f) $-37 \longrightarrow$ Es un número entero.

g) $\sqrt{\frac{1125}{5}} = \sqrt{225} = 15 \longrightarrow$ Es número natural.

h) $21{,}4\widehat{63} = \frac{21463-214}{990} = \frac{2361}{110} \longrightarrow$ Es un número racional.

11. Página 11

a) $5{,}0100200030004... \rightarrow$ Irracional y real.

$-25 \rightarrow$ Entero, racional y real.

$\sqrt{47} = 6{,}8556546 \rightarrow$ Irracional y real.

$e = 2{,}718281828... \rightarrow$ Irracional y real.

b) $-\frac{14}{2} \rightarrow$ Entero, racional y real.

$\sqrt{16} = 4 \rightarrow$ Natural, entero, racional y real.

$54{,}97\widehat{2} = \frac{1979}{36} \rightarrow$ Racional y real.

$93 \rightarrow$ Natural, entero, racional y real.

c) $\frac{5}{3} \rightarrow$ Racional y real.

$7{,}42 = \frac{742}{100} = \frac{371}{50} \rightarrow$ Racional y real.

$\sqrt{7+2} = \sqrt{9} = 3 \rightarrow$ Natural, entero, racional y real.

$2{,}21221222122221... \rightarrow$ Irracional y real.

d) $\sqrt{6+\sqrt{9}} = 3 \rightarrow$ Natural, entero, racional y real.

$\sqrt{6+9} = \sqrt{15} = 3{,}872983... \rightarrow$ Irracional y real.

$\sqrt{9+\sqrt{6}} = 3{,}383709... \rightarrow$ Irracional y real.

$\sqrt{\frac{9}{6}} = 1{,}224744871... \rightarrow$ Irracional y real.

12. Página 12

Si introducimos $\sqrt{8}$ en la calculadora, obtenemos $\sqrt{8} = 2{,}828427125...$

Redondeo a las milésimas: $2{,}828 \rightarrow$ Es una aproximación por defecto.

Truncamiento a las milésimas: $2{,}828 \rightarrow$ Es una aproximación por defecto.

13. Página 12

$$\begin{cases} 0{,}121212\ldots \xrightarrow{\text{Por exceso}} 0{,}13 \\ 0{,}121212\ldots \xrightarrow{\text{Por defecto}} 0{,}12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{11}{9} = 1{,}2222\ldots \xrightarrow{\text{Por exceso}} 1{,}23 \\ \dfrac{11}{9} = 1{,}2222\ldots. \xrightarrow{\text{Por defecto}} 1{,}22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5{,}23888\ldots \xrightarrow{\text{Por exceso}} 5{,}24 \\ 5{,}23888\ldots \xrightarrow{\text{Por defecto}} 5{,}23 \end{cases}$$

14. Página 12

$$1{,}\widehat{9} \xrightarrow{\text{Redondeo a las centésimas}} 2{,}00$$

15. Página 13

$$4{,}7569 \xrightarrow{\text{Redondeo a las centésimas}} 4{,}76$$

$$E_a = |4{,}7569 - 4{,}76| = 0{,}0031$$

16. Página 13

$$2{,}\widehat{3} \xrightarrow{\text{Redondeo a las décimas}} 2{,}3$$

$$E_a = \left|2{,}\widehat{3} - 2{,}3\right| = 0{,}0\widehat{3} \qquad E_r = \frac{0{,}0\widehat{3}}{2{,}\widehat{3}} = 0{,}014285\ldots$$

17. Página 13

$$1{,}468 \xrightarrow{\text{Aproximación}} 1{,}5$$

$$E_a = |1{,}468 - 1{,}5| = 0{,}032 \qquad E_r = \frac{E_a}{1{,}468} = \frac{0{,}032}{1{,}468} = 0{,}021798365\ldots$$

$$1{,}468 \xrightarrow{\text{Aproximación}} 1{,}4$$

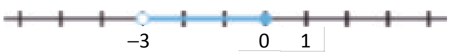
$$E_a = |1{,}468 - 1{,}4| = 0{,}068 \qquad E_r = \frac{E_a}{1{,}468} = \frac{0{,}068}{1{,}468} = 0{,}04632\ldots$$

La mejor aproximación es la primera porque los errores obtenidos son menores.

18. Página 14

a) $(4, 8) \rightarrow 4 < x < 8$

d) $(-3, 0] \rightarrow -3 < x \leq 0$



b) $(-\infty, 2) \rightarrow x < 2$

e) $(-\infty, 4) \rightarrow x < 4$

c) $[1, 5) \rightarrow 1 \leq x < 5$

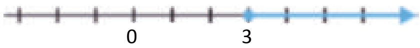
f) $[-1, +\infty) \rightarrow x \geq -1$

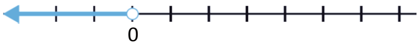
19. Página 14

a) $-4 < x \leq 0 \rightarrow (-4, 0]$ b) $1 \leq x \leq 2 \rightarrow [1, 2]$ c) $10 > x > 4 \rightarrow (4, 10)$

20. Página 14

a) 

b) 

c) 

21. Página 15

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$(2, 5) \cup [3, 6] = (2, 6]$.

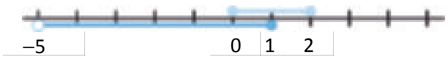
22. Página 15

Respuesta abierta. Por ejemplo:

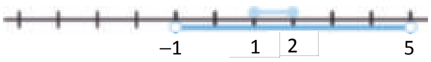
$(-4, 2) \cap (-2, 5] = (-2, 2)$.

23. Página 15

a) $(-5, 1] \cup [0, 2] = (-5, 2]$ $\quad (-5, 1] \cap [0, 2] = [0, 1]$

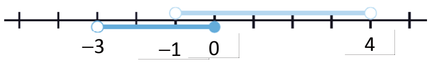


b) $(-1, 5) \cup [1, 2] = (-1, 5)$ $\quad (-1, 5) \cap [1, 2] = [1, 2]$



c) $[2, 4] \cup (3, 5) = [2, 5)$ $\quad [2, 4] \cap (3, 5) = (3, 4]$

d) $(-3, 0] \cup (-1, 4) = (-3, 4)$ $\quad (-3, 0] \cap (-1, 4) = (-1, 0]$



24. Página 16

a) 5% de $1000 = \dfrac{5}{100} \cdot 1000 = 50$

b) 38% de $800 = \dfrac{38}{100} \cdot 800 = 304$

c) $12,3\%$ de $500 = \dfrac{12,3}{100} \cdot 500 = 61,5$

d) 122% de $300 = \dfrac{122}{100} \cdot 300 = 366$

e) 112% de $750 = \dfrac{112}{100} \cdot 750 = 840$

f) $0,6\%$ de $1430 = \dfrac{0,6}{100} \cdot 1430 = 8,58$

g) 89% de $645 = \dfrac{89}{100} \cdot 645 = 574,05$

h) 43% de $529 = \dfrac{43}{100} \cdot 529 = 227,47$

25. Página 16

a) Es un aumento $\longrightarrow (100 + a)\%$ de $10 = \dfrac{100 + a}{100} \cdot 10 = 12 \rightarrow a = \dfrac{200}{10} = 20\%$

b) Es una disminución $\longrightarrow (100 - a)\%$ de $12 = \dfrac{100 - a}{100} \cdot 12 = 10 \rightarrow a = \dfrac{200}{12} = 16,67\%$

c) Es una disminución $\longrightarrow (100 - a)\%$ de $80 = \dfrac{100 - a}{100} \cdot 80 = 60 \rightarrow a = \dfrac{2000}{80} = 25\%$

d) Es un aumento $\longrightarrow (100 + a)\%$ de $60 = \dfrac{100 + a}{100} \cdot 60 = 80 \rightarrow a = \dfrac{100}{3} = 33,33\%$

26. Página 16

$$12\%\text{ de }115\%\text{ de }1575=\frac{12}{100}\cdot\frac{115}{100}\cdot 1575=217{,}35$$

27. Página 17

C: cantidad de personas fallecidas el año pasado

La mortalidad ha descendido un 12,5 % $\longrightarrow$ 100 % − 12,5 % = 87,5 %

$\frac{87{,}5}{100}\cdot C=98\rightarrow C=\frac{98\cdot 100}{87{,}5}=112$ personas murieron el año pasado.

28. Página 17

C: cantidad inicial $\left(\frac{112}{100}\cdot\frac{20}{100}\right)\cdot C=112\rightarrow C=\frac{112}{0{,}224}=500$

29. Página 17

Descuento del 20 % $\longrightarrow$ 100 − 20 = 80 %. Aumento de 21 % de IVA $\longrightarrow$ 100 + 21 = 121 %.

Precio final $=\left(\frac{80}{100}\cdot\frac{121}{100}\right)\cdot$ 18 000 = 17 424 € pagó finalmente por el coche.

30. Página 17

a) $\frac{94}{100}\cdot 26\,000=24\,440$ estudiantes pasarán las pruebas.

b) $\frac{25}{100}\cdot 24\,440=6\,110$ estudiantes abandonan la carrera el primer año.

c) $\frac{90}{100}\cdot(24\,440-6\,110)=16\,497$ estudiantes terminan la carrera.

31. Página 18

a) $I=\frac{C\cdot r\cdot t}{100}\xrightarrow{C=2000,\,r=3,\,t=5}I=\frac{2000\cdot 3\cdot 5}{100}=300\,€$

Si ingresamos 2 000 €, al cabo de 5 años recibiremos 2 000 + 300 = 2 300 €.

b) $I=\frac{C\cdot r\cdot t}{100}\xrightarrow{C=30,\,r=3,\,t=7}I=\frac{30\cdot 3\cdot 7}{100}=6{,}30\ €$

Si ingresamos 30 €, al cabo de 7 años recibiremos 30 + 6,30 = 36,30 €.

c) $I=\frac{C\cdot r\cdot t}{100}\xrightarrow{C=4500,\,r=3,\,t=\frac{8}{12}}I=\frac{4500\cdot 3\cdot\frac{8}{12}}{100}=90\ €$

Si ingresamos 4 500 €, al cabo de 8 meses recibiremos 4 500 + 90 = 4 590 €.

d) $I=\frac{C\cdot r\cdot t}{100}\xrightarrow{C=670,\,r=3,\,t=\frac{30}{12}}I=\frac{670\cdot 3\cdot\frac{30}{12}}{100}=50{,}25\ €$

Si ingresamos 670 €, al cabo de 30 meses recibiremos 670 + 50,25 = 720,25 €.

32. Página 18

$$I=\frac{C\cdot r\cdot t}{100}\xrightarrow{I=490,\,r=3,6;\,t=5}490=\frac{C\cdot 3,6\cdot 5}{100}\rightarrow C=\frac{490}{0,18}=2\,722,22\text{ €}$$

El capital inicial es 2 722,22 €.

33. Página 18

$$I=\frac{C\cdot r\cdot t}{100}\xrightarrow{C=20000,\,I=2400,\,t=3}2400=\frac{20000\cdot r\cdot 3}{100}\rightarrow r=\frac{2400}{600}=4\%$$

34. Página 19

a) $C_f=C_i\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^t\xrightarrow{C_i=600,\,r=3,4;\,t=5}C_f=600\cdot\left(1+\frac{3,4}{100}\right)^5=709,18\text{ €}$

b) $C_f=C_i\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^t\xrightarrow{C_i=3400,\,r=3,4;\,t=2}C_f=3400\cdot\left(1+\frac{3,4}{100}\right)^2=3635,13\text{ €}$

c) $C_f=C_i\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^t\xrightarrow{C_i=5400,\,r=3,4;\,t=3}C_f=5400\cdot\left(1+\frac{3,4}{100}\right)^3=5969,74\text{ €}$

d) $C_f=C_i\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^t\xrightarrow{C_i=40000,\,r=3,4;\,t=2}C_f=40000\cdot\left(1+\frac{3,4}{100}\right)^2=42766,24\text{ €}$

35. Página 19

Fernando:

$$C_f=C_i\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^t\xrightarrow{C_i=1000,\,r=2,\,t=5}C_f=1000\cdot\left(1+\frac{2}{100}\right)^5=1104,08\text{ €}$$

El beneficio que obtiene Fernando es $C_f-C_i=1\,104,08-1\,000=$ **104,08 €.**

Esther:

El beneficio de Esther es $I=\frac{C\cdot r\cdot t}{100}\xrightarrow{C=1000,\,r=2,\,t=5}I=\frac{1\,000\cdot 2\cdot 5}{100}=100$ €.

Es mayor el beneficio de Fernando que el de Esther.

36. Página 19

$$C_f-C_i=1\,576,25\rightarrow C_f=1\,576,25+C_i$$

$$C_f=C_i\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^t\xrightarrow{C_f=1576,26+C_i,\ r=5,\ t=3}1\,576,25+C_i=C_i\cdot\left(1+\frac{5}{100}\right)^3\rightarrow C_i=10000\text{ €}$$

ACTIVIDADES FINALES

37. Página 20

a) 2,333... $\longrightarrow$ Es periódico puro.

b) 2,345 $\longrightarrow$ Es decimal exacto.

c) 6,00999... $\longrightarrow$ Es periódico mixto.

d) 2,435555... $\longrightarrow$ Es periódico mixto.

e) –45 $\longrightarrow$ Es entero negativo.

f) 123,0 $\longrightarrow$ Es natural.

g) $8,\widehat{91}$ $\longrightarrow$ Es periódico puro.

h) $57,4\widehat{32}$ $\longrightarrow$ Es periódico mixto.

38. Página 20

$\frac{2}{3}=0,666...$ Periódico puro. $\qquad \frac{29}{4}=7,25$ Decimal exacto.

$\frac{37}{15}=2,4666...$ Periódico mixto. $\qquad \frac{\sqrt{196}}{2}=7$ Natural.

39. Página 20

Respuesta abierta, por ejemplo:

a) 2 y 3 b) 2,33333... y 4,515151... c) 2,4 y 6,25 d) −2 y −4 e) $\frac{3}{2}$ y $\frac{5}{7}$

40. Página 20

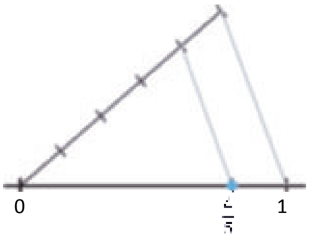
5,556 < 5,565 < 5,665 < 5,69 < 5,96 < 5,966

41. Página 20

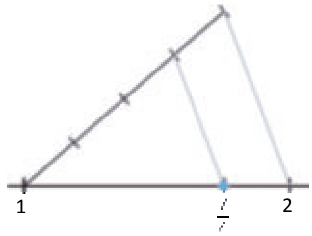
$0,4\widehat{12}>0,4\widehat{1}>0,\widehat{14}>0,14>0,\widehat{1}$

42. Página 20

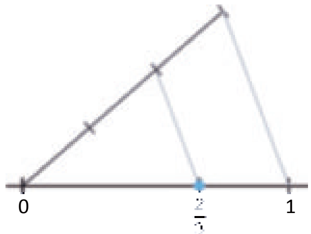
a) $\frac{4}{5}$



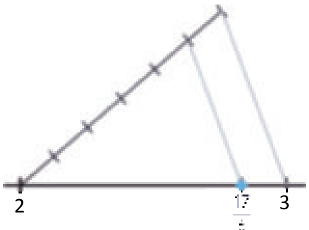
d) $\frac{7}{4}=1+\frac{3}{4}$



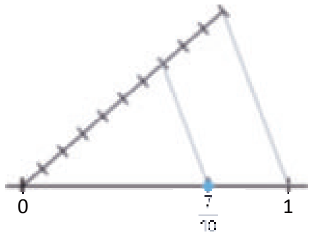
g) $\frac{2}{3}$



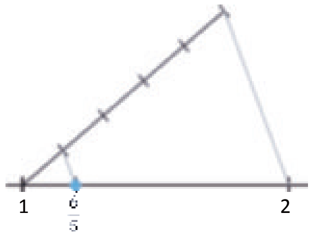
b) $\frac{17}{6}=2+\frac{5}{6}$



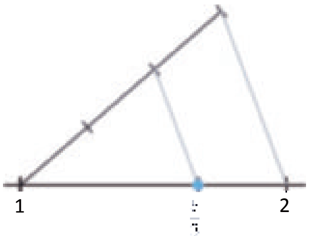
e) $\frac{7}{10}$



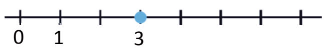
h) $\frac{6}{5}=1+\frac{1}{5}$



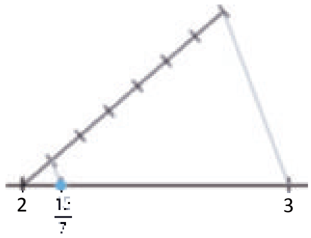
c) $\frac{5}{3}=1+\frac{2}{3}$



f) $\frac{48}{16}=3$

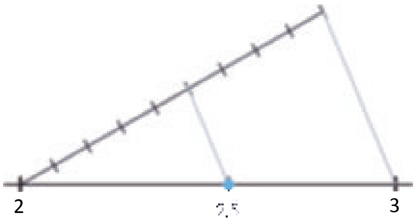


i) $\frac{15}{7}=2+\frac{1}{7}$

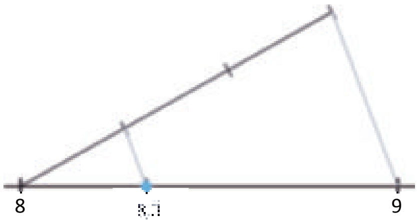


43. Página 20

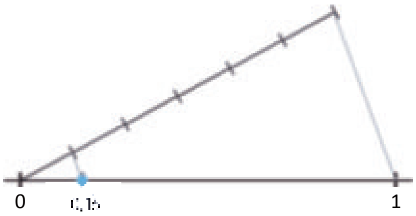
a) $2,\widehat{5}=\dfrac{23}{9}=2+\dfrac{5}{9}$



d) $8,\widehat{3}=\dfrac{25}{3}=8+\dfrac{1}{3}$

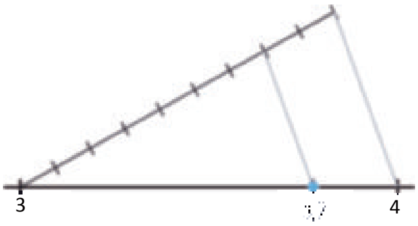


b) $0,1\widehat{6}=\dfrac{15}{90}=\dfrac{1}{6}$

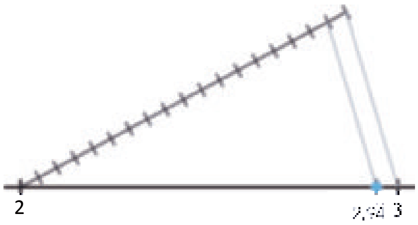


e) $1,\widehat{9}=\dfrac{18}{9}=2$

c) $3,\widehat{7}=\dfrac{34}{9}=3+\dfrac{7}{9}$



f) $2,9\widehat{4}=\dfrac{53}{18}=2+\dfrac{17}{18}$



44. Página 20

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\dfrac{5}{4}<\dfrac{21}{16}<\dfrac{22}{16}<\dfrac{23}{16}<\dfrac{6}{4}$

d) $\dfrac{4}{5}<\dfrac{97}{120}<\dfrac{98}{120}<\dfrac{99}{120}<\dfrac{5}{6}$

b) $7,16<7,1611<7,1612<7,1613<7,\widehat{16}$

e) $0,6\widehat{3}<0,6324<0,6325<0,6326<0,6\widehat{32}$

c) $\dfrac{2}{3}<\dfrac{5}{6}<1<\dfrac{7}{6}<\dfrac{3}{2}$

f) $\dfrac{8}{11}<\dfrac{85}{110}<\dfrac{86}{110}<\dfrac{87}{110}<\dfrac{9}{10}$

45. Página 20

Todas son irracionales salvo $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$ y $\sqrt{16}$, que son racionales.

46. Página 20

a) $24,232323...=\dfrac{2423-24}{99}=\dfrac{2399}{99}\rightarrow$ Racional.

d) $2\sqrt[4]{4}=2,828427125...\rightarrow$ Irracional.

b) $1+\sqrt{8}=3,828427125...\rightarrow$ Irracional.

e) $\left(\sqrt[4]{4}\right)^2=2=\dfrac{2}{1}\rightarrow$ Racional.

c) $\sqrt{1+8}=\sqrt{9}=3=\dfrac{3}{1}\rightarrow$ Racional.

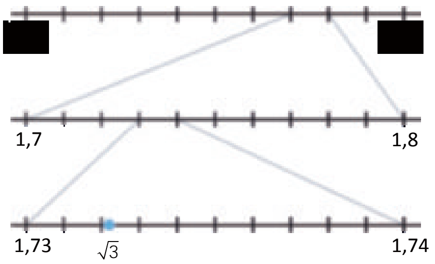
f) $\pi^2=9,869604401...\rightarrow$ Irracional.

47. Página 20

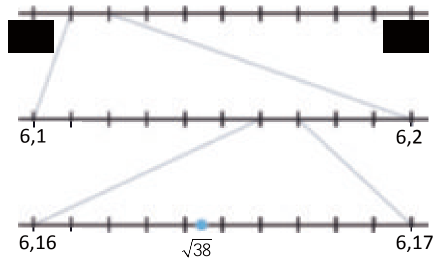
a) $\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{\sqrt{6}}{2} < \sqrt{3}$ b) $\sqrt{65} < \frac{\sqrt{265}}{2} < 5\sqrt{3}$

49. Página 20

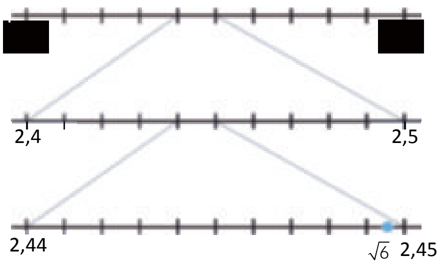
a) $\sqrt{3} = 1{,}732050807...$



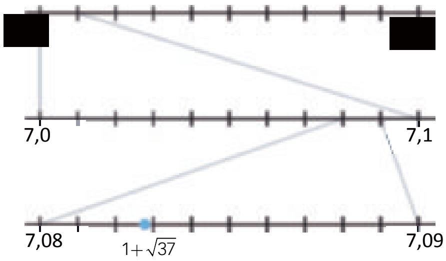
c) $\sqrt{38} = 6{,}164414003...$



b) $\sqrt{6} = 2{,}449489743...$

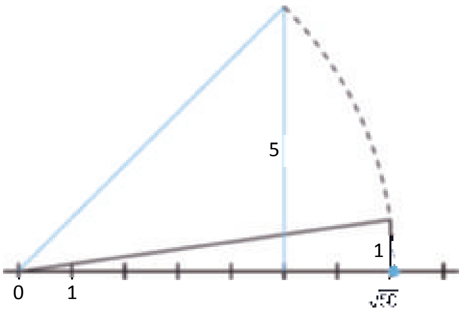


d) $1+\sqrt{37} = 7{,}08276253...$

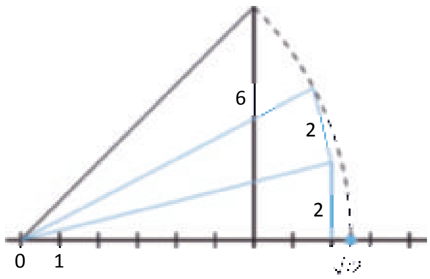


50. Página 21

a) $\sqrt{50} = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{7^2+1^2}$



b) $\sqrt{72} = \sqrt{6^2+6^2} = \sqrt{68+2^2} = \sqrt{8^2+2^2+2^2}$



51. Página 21

a) $h^2+5^2=10^2 \rightarrow h^2+25=100 \rightarrow h^2=100-25=75 \rightarrow h=\sqrt{75}$ $\sqrt{75}=5\sqrt{3}$ $\rightarrow$ Es un número irracional.

b) $h^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=3^2 \rightarrow h^2+\frac{9}{4}=9 \rightarrow h^2=9-\frac{9}{4}=\frac{27}{4} \rightarrow h=\sqrt{\frac{27}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$

$A=\frac{b\cdot h}{2} \rightarrow A=\frac{3\cdot\frac{3}{2}\sqrt{3}}{2}=\frac{9}{4}\sqrt{3}$ $\rightarrow$ Es un número irracional.

c) $h^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2 \rightarrow h^2+\frac{3}{4}=3 \rightarrow h=\frac{3}{2}$ $\rightarrow$ Es un número racional.

$A=\frac{b\cdot h}{2} \rightarrow A=\frac{\sqrt{3}\cdot\frac{3}{2}}{2} \rightarrow A=\frac{3}{4}\sqrt{3}$ $\rightarrow$ Es un número irracional.

52. Página 21

a) Falsa, por ejemplo:
$\pi + (-\pi) = \pi - \pi = 0 \longrightarrow$ Es racional.

b) Falsa, por ejemplo:
$\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \longrightarrow$ Es racional.

53. Página 21

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $1 < \sqrt{2} < 2$, porque $\sqrt{2} = 1{,}414213562...$

b) $1{,}\widehat{5} < \frac{\pi}{2} < 1{,}6$, porque $\frac{\pi}{2} = 1{,}570796327...$

c) $1{,}2 < \sqrt{2} < 1{,}6$, porque $\sqrt{2} = 1{,}414213562...$

d) $1{,}\widehat{5} < \sqrt{\frac{12}{5}} < 1{,}5\widehat{3}$, porque $\sqrt{\frac{12}{5}} = 1{,}549193338...$

54. Página 21

a) $25{,}37 \rightarrow$ Es un número racional, decimal exacto.

b) $-\frac{6}{17} \rightarrow$ Es un número racional, decimal periódico puro.

c) $\frac{2}{5} = 0{,}4 \rightarrow$ Es un número racional, decimal exacto.

d) $-\sqrt{12} = 3{,}464101... \rightarrow$ Es un número irracional (decimal con infinitas cifras decimales que no se repiten).

e) $\pi = 3{,}141592... \rightarrow$ Es un número irracional (decimal con infinitas cifras decimales que no se repiten).

f) $\frac{7}{90} = 0{,}0\widehat{7} \rightarrow$ Es un número racional, decimal periódico mixto.

g) $\sqrt{64} = 8 \rightarrow$ Es un número natural.

h) $-5 \rightarrow$ Es un número entero.

55. Página 21

a) $2054{,}3 = \frac{20\,543}{10} \rightarrow$ Es un número racional.

b) $-27{,}3\widehat{5} = -\frac{2462}{90} = -\frac{1031}{45} \rightarrow$ Es un número racional.

c) $\sqrt{256} = 16 \rightarrow$ Es un número natural.

d) $\frac{\pi}{5} = 0{,}628318531... \rightarrow$ Es un número irracional.

e) $-47 \rightarrow$ Es un número entero.

f) $\sqrt{31} = 5{,}567764363... \rightarrow$ Es un número irracional.

g) $\sqrt{20-4} = \sqrt{16} = 4 \rightarrow$ Es un número natural.

56. Página 21

a) $\sqrt{17}+8=12{,}123105626\ldots \rightarrow$ Es un número irracional y real.

b) $\sqrt{17+8}=\sqrt{25}=5 \rightarrow$ Es un número natural, entero, racional y real.

c) $8-\sqrt{17}=3{,}876894374\ldots \rightarrow$ Es un número irracional y real.

d) $\sqrt{17-8}=\sqrt{9}=3 \rightarrow$ Es un número natural, entero, racional y real.

e) $4-\sqrt{20}=-0{,}472135955\ldots \rightarrow$ Es un número irracional y real.

f) $20-\sqrt{4}=20-2=18 \rightarrow$ Es un número natural, entero, racional y real.

g) $\sqrt{20-4}=\sqrt{16} \rightarrow$ Es un número natural, entero, racional y real.

h) $4+\sqrt{20}=8{,}472135955\ldots \rightarrow$ Es un número irracional y real.

57. Página 21

a) Racionales $\longrightarrow 5, \frac{7}{3}, \frac{7}{9}, \frac{8}{5}$ Irracionales $\longrightarrow 2\sqrt{5}$ $\frac{7}{9}<\frac{8}{5}<\frac{7}{3}<2\sqrt{5}<5$

b) Racionales $\longrightarrow \frac{35}{90}$ Irracionales $\longrightarrow \sqrt{8}, 6-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{12}}{2}$ $\frac{35}{90}<\frac{\sqrt{12}}{2}<\sqrt{8}<6-\sqrt{3}$

58. Página 21

a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}>\sqrt{8}>\sqrt{6}$

b) $3\sqrt{2}>5-\sqrt{12}>\frac{\sqrt{16}}{3}>\frac{\sqrt{5}}{2}$

59. Página 21

Como a es un número racional $\longrightarrow a=\frac{b}{c}$, donde b y c son números enteros.

a) $2a=2\cdot\frac{b}{c}=\frac{2\cdot b}{c} \rightarrow$ Se puede expresar en forma de fracción. Es racional.

b) $\frac{a}{2}=\frac{\frac{b}{c}}{2}=\frac{b}{2\cdot c} \rightarrow$ Se puede expresar en forma de fracción. Es racional.

c) $\sqrt{2}a=\sqrt{2}\cdot\frac{b}{c} \rightarrow$ Es un número decimal con infinitas cifras que no se repiten. Es un número irracional.

d) $\pi a=\pi\cdot a \rightarrow$ Es un número decimal con infinitas cifras que no se repiten. Es un número irracional.

60. Página 21

a) $2a \rightarrow$ Como a es un número decimal con infinitas cifras que no se repiten, al multiplicarlo por 2 seguirá siendo un número decimal con infinitas cifras que no se repiten. Por tanto, es irracional.

b) $\frac{a}{2} \rightarrow$ Como a es un número decimal con infinitas cifras que no se repiten, al dividirlo por 2 seguirá siendo un número decimal con infinitas cifras que no se repiten. Por tanto, es irracional.

c) $\pi a \rightarrow$ Puede ser racional o irracional. Por ejemplo:

- Si $a=\pi \rightarrow \pi a=\pi^2 \rightarrow$ Es irracional.
- Si $a=\frac{1}{\pi} \rightarrow \pi a=\pi\cdot\frac{1}{\pi}=1 \rightarrow$ Es racional.

d) $\frac{1}{a} \rightarrow$ Si a es un número decimal con infinitas cifras que no se repiten, su inverso también lo es. Es irracional.

61. Página 21

$d=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}=1{,}732050808\ldots \rightarrow$ Es un número irracional.

62. Página 21

a) Falsa: todos los números enteros son racionales, ya que se pueden expresar como fracciones de denominador 1.

b) Falsa: el conjunto de los números irracionales está contenido en el conjunto de los números reales.

c) Verdadera: el conjunto de los números reales está formado por el conjunto de los números racionales y por el conjunto de los números irracionales.

d) Verdadera: un número decimal es racional o irracional. Y los números racionales o irracionales son reales.

63. Página 21

a) Falso. Los números irracionales son números decimales que no se pueden escribir en forma de fracción.

b) Falso. Los números irracionales son números reales que no son racionales.

c) Verdadero. El conjunto de los números irracionales está contenido en el conjunto de los números reales.

d) Falso. Todos los números enteros se pueden escribir como fracciones de denominador 1, es decir, son números racionales.

e) Verdadero. Todos los números racionales son reales.

f) Falso. Los números irracionales son números decimales que no se pueden escribir en forma de fracción. Es decir, no son racionales.

g) Falso. Por ejemplo, $\frac{1}{2}$ es un número racional que no es entero.

h) Verdadero. Los números irracionales son números decimales con infinitas cifras que no se repiten.

i) Falso. Un número entero es un número racional que no tiene cifras decimales.

j) Verdadero. Por definición, un número es racional si se puede expresar en forma de fracción.

64. Página 22

a) Verdadero, porque $d=\sqrt{l^2+l^2}=\sqrt{2\cdot l^2}=\sqrt{2}\cdot l \rightarrow$ Si el lado es racional, $\sqrt{2}l$ es irracional.

b) Falso. Por ejemplo, si el lado mide $\pi \rightarrow A=\pi^2=9{,}869604401\ldots \rightarrow$ Es irracional.

c) Verdadero, porque $d=\sqrt{l^2+l^2}=\sqrt{2\cdot l^2}=\sqrt{2}\cdot l=\frac{a}{b}\rightarrow l=\frac{a}{\sqrt{2}\cdot b}\rightarrow A=l^2=\left(\frac{a}{\sqrt{2}\cdot b}\right)^2=\frac{a^2}{2b^2}\rightarrow$ Es racional.

65. Página 22

a) $\sqrt{2{,}\overline{7}}=\sqrt{\frac{27-2}{9}}=\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{5}{3}\rightarrow$ Se puede expresar en forma de fracción. Es racional.

b) $4{,}0\overset{\frown}{9}-1{,}3\overset{\frown}{9}=\frac{409-40}{90}-\frac{139-13}{90}=\frac{243}{90}=\frac{27}{10}\rightarrow$ Se puede expresar en forma de fracción. Es racional.

c) $5{,}4\overset{\frown}{3}\cdot 1{,}\overset{\frown}{2}=\frac{543-54}{90}\cdot\frac{12-1}{9}=\frac{1793}{270}\rightarrow$ Se puede expresar en forma de fracción. Es racional.

d) $\sqrt{\frac{1{,}\overline{3}}{3}}=\sqrt{\frac{\frac{13-1}{9}}{3}}=\sqrt{\frac{12}{27}}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}\rightarrow$ Se puede expresar en forma de fracción. Es racional.

66. Página 22

$$\sqrt{3}=1{,}732050\ldots\begin{cases}\xrightarrow{\text{Por defecto}}1{,}7321\\ \xrightarrow{\text{Por exceso}}1{,}7320\end{cases}$$

67. Página 22

$$\sqrt{10}=3{,}162277\ldots\xrightarrow{\text{Redondeo}}3{,}1623$$

$$\xrightarrow{\text{Aproximaciones}}\begin{cases}\xrightarrow{\text{Por defecto}}3{,}1622\\ \xrightarrow{\text{Por exceso}}3{,}1623\end{cases}$$

La aproximación por exceso coincide con la aproximación por redondeo.

68. Página 22

a) 11,87967575 → Con 4 decimales: 11,8797 Con 5 decimales: 11,87968

b) 0,666663 → Con 4 decimales: 0,6667 Con 5 decimales: 0,66666

c) 8,987656 → Con 4 decimales: 8,9877 Con 5 decimales: 8,98766

d) 25,6543678 → Con 4 decimales: 25,6544 Con 5 decimales: 25,65437

e) 18,010109 → Con 4 decimales: 18,0101 Con 5 decimales: 18,01011

f) 15,908009 → Con 4 decimales: 15,9080 Con 5 decimales: 15,90801

69. Página 22

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $5{,}\widehat{67}$ b) $0{,}9\widehat{7}$ c) $\dfrac{\sqrt{5{,}2}}{1000}=0{,}0022803$

70. Página 22

Las aproximaciones por exceso y por defecto coinciden cuando el número decimal es exacto y aproximamos a un orden tal que todas las cifras, distintas de cero, del número son de órdenes superiores.

El redondeo siempre coincide con la aproximación por exceso o por defecto; por tanto, puede coincidir con uno o con los dos.

71. Página 22

a) $3{,}253+8{,}45=11{,}713\rightarrow 11{,}7$ Error absoluto: $E_a=|11{,}713-11{,}7|=0{,}013$

$3{,}3+8{,}5=11{,}8$ Error absoluto: $E_a=|11{,}713-11{,}8|=0{,}087$

Se comete menos error redondeando el resultado.

b) $53{,}32-18{,}93=34{,}39\rightarrow 34{,}4$ Error absoluto: $E_a=|34{,}39-34{,}4|=0{,}01$

$53{,}3-18{,}9=34{,}4$ Error absoluto: $E_a=|34{,}39-34{,}4|=0{,}01$

Se comete el mismo error por los dos métodos.

c) $13{,}5\cdot 2{,}7=36{,}45\rightarrow 36{,}5$ Error absoluto: $E_a=|36{,}45-36{,}5|=0{,}05$

$13{,}5\cdot 2{,}7=36{,}45$ Error absoluto: $E_a=|36{,}45-36{,}45|=0$

Se comete menos error redondeando los factores.

d) $40{,}92:5{,}3=7{,}72075\ldots\rightarrow 7{,}7$ Error absoluto: $E_a=|7{,}72075\ldots-7{,}7|=0{,}02075\ldots$

$40{,}9:5{,}3=7{,}71698\ldots$ Error absoluto: $E_a=|7{,}72075\ldots-7{,}71698\ldots|=0{,}00377\ldots$

Se comete menos error redondeando los factores.

72. Página 22

a) $E_a = |3{,}59 - 3{,}5| = 0{,}09$ $\quad E_r = \dfrac{E_a}{3{,}59} = \dfrac{0{,}09}{3{,}59} = 0{,}025069638...$

b) $E_a = |59{,}91 - 60| = 0{,}09$ $\quad E_r = \dfrac{E_a}{59{,}91} = \dfrac{0{,}09}{59{,}91} = 0{,}001502253...$

73. Página 22

a) 10,4798

Redondeo $\longrightarrow$ 10,480 $\quad E_a = |10{,}4798 - 10{,}480| = 0{,}0002$ $\quad E_r = \dfrac{0{,}0002}{10{,}4798} = 0{,}000019084...$

Truncamiento $\longrightarrow$ 10,479 $\quad E_a = |10{,}4798 - 10{,}479| = 0{,}0008$ $\quad E_r = \dfrac{0{,}0008}{10{,}4798} = 0{,}000076336...$

b) $\sqrt{12} = 3{,}464101...$

Redondeo $\longrightarrow$ 3,4641 $\quad E_a = \left|\sqrt{12} - 3{,}4641\right| = 0{,}00000161...$ $\quad E_r = \dfrac{0{,}00000161...}{\sqrt{12}} = 0{,}000000466...$

Truncamiento $\longrightarrow$ 3,4641 $\quad E_a = \left|\sqrt{12} - 3{,}4641\right| = 0{,}00000161...$ $\quad E_r = \dfrac{0{,}00000161...}{\sqrt{12}} = 0{,}000000466...$

c) $\dfrac{2}{3} = 0{,}\widehat{6}$

Redondeo: 0,7 $\quad E_a = \left|0{,}\widehat{6} - 0{,}7\right| = 0{,}0\widehat{3}$ $\quad E_r = \dfrac{E_a}{0{,}\widehat{6}} = \dfrac{0{,}0\widehat{3}}{0{,}\widehat{6}} = 0{,}05$

Truncamiento $\longrightarrow$ 0,6 $\quad E_a = \left|0{,}\widehat{6} - 0{,}6\right| = 0{,}0\widehat{6}$ $\quad E_r = \dfrac{E_a}{0{,}\widehat{6}} = \dfrac{0{,}0\widehat{6}}{0{,}\widehat{6}} = 0{,}1$

d) 3,125

Redondeo $\longrightarrow$ 3,125 $\quad E_a = 0$ $\quad E_r = 0$

Truncamiento $\longrightarrow$ 3,125 $\quad E_a = 0$ $\quad E_r = 0$

74. Página 22

a) $E_a = |3{,}78496 - 3{,}7| = 0{,}08496$ $\quad E_r = \dfrac{0{,}08496}{3{,}78496} = 0{,}022446737...$

b) $E_a = \left|\sqrt{7} - 2{,}65\right| = 0{,}004248...$ $\quad E_r = \dfrac{0{,}004248}{\sqrt{7}} = 0{,}0016058...$

75. Página 22

La cota de error es 0,001 y, por tanto, debemos aproximar a las milésimas $\longrightarrow$ 8,976.

76. Página 22

a) Indica que el error relativo al aproximar la cantidad de antibiótico por 1,5 g es como mucho $\dfrac{0{,}2}{100} = 0{,}002$.

b) $E_r = \dfrac{\left|V_{\text{Real}} - V_{\text{Aproximación}}\right|}{V_{\text{Real}}} = \dfrac{\left|V_{\text{Real}} - 1{,}5\right|}{V_{\text{Real}}} = 0{,}002$.

- Si la cantidad es mayor que 1,5 g:
$\dfrac{V_{\text{Real}} - 1{,}5}{V_{\text{Real}}} = 0{,}002 \rightarrow V_{\text{Real}} = \dfrac{1{,}5}{0{,}998} = 1{,}503006...$

- Si la cantidad es menor que 1,5 g:
$\dfrac{1{,}5 - V_{\text{Real}}}{V_{\text{Real}}} = 0{,}002 \rightarrow V_{\text{Real}} = \dfrac{1{,}5}{1{,}002} = 1{,}4970059...$

Por lo tanto, la cantidad de antibiótico estará entre $1{,}4970059...$ y $1{,}503006...$ gramos.

77. Página 22

$1{,}45 \rightarrow 1{,}5$ $\qquad$ $1{,}45 \rightarrow 1{,}4$

El error absoluto en ambos casos es 0,05, y por tanto, el error relativo es el mismo.

78. Página 22

$\pi = 3{,}14159265358979...$ y $\dfrac{355}{113} = 3{,}14159292035398...$

$E_a = |3{,}14159265358979... - 3{,}14159292035398...| = 0{,}00000026676418896...$

El error cometido es del orden de las diezmillonésimas; por tanto, la aproximación es buena y podemos escribir $\pi = \dfrac{355}{113}$.

79. Página 22

x_1: primera aproximación $\qquad$ x_2: segunda aproximación

$E_r(x_1) = E_r(x_2) \rightarrow \dfrac{E_a(x_1)}{V_{Real}} = \dfrac{E_a(x_2)}{V_{Real}}$

Si los valores reales coinciden, los errores absolutos coinciden también.

Si los valores reales no coinciden, se puede afirmar que los errores absolutos son diferentes.

80. Página 23

a) $[0, 5)$

b) $2{,}8 = [0; 2{,}8]$

c) $(40, +\infty)$

d) $[30, 60]$

e) $[0, 12) \cup (65, +\infty)$

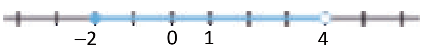
f) $[-2, 6]$

81. Página 23

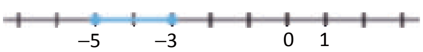
a) $0 < x < 7$

b) $3 \leq x < 7$

c) $-2 \leq x < 4$



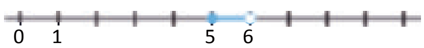
d) $-5 \leq x \leq -3$



e) $-4 < x < -2$

f) $-7 \leq x < -3$

g) $5 \leq x < 6$



h) $4 \leq x \leq 6$

82. Página 23

a) $[-1, 5)$

b) $(-5, -1]$

c) $(-3, +\infty)$

d) $(-\infty, 3)$

e) $[-1, 0]$

f) $(-5, 0)$

g) $(-\infty, -4]$

h) $[5, +\infty)$

83. Página 23

a) $(3, +\infty)$ b) $(1, 5)$ c) $(-\infty, -2]$ d) $(-4, +\infty)$

84. Página 23

a) $\frac{1}{3} < 1 \rightarrow$ Falso.

b) $1 + \sqrt{8} > 3 \rightarrow$ Falso.

c) $1 > \frac{-5}{4} > -2 \rightarrow$ Verdadero.

d) $-1 < \frac{4}{9} < \frac{1}{2} \rightarrow$ Verdadero.

e) $-1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \rightarrow$ Verdadero.

f) $\frac{-3}{2} < \frac{-5}{4} \rightarrow$ Falso.

85. Página 23

a) $A \cup B = (-\infty, 3]$

b) $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = (-\infty, 5)$

c) $A \cap C = [2, 3]$

d) $A \cap B \cap C = (A \cap C) \cap B = \emptyset$.

86. Página 23

a) Falso. b) Falso. c) Falso. d) Verdadero.

87. Página 23

a) $[0, 2) \cap [-2, 1) = [0, 1)$

b) $(1, 2] \cup [-2, 1] = [-2, 2]$

c) $(-3, -1) \cup [-1, 4) = (-3, 4)$

d) $[-4, 1) \cap [-2, 3) = [-2, 1)$

88. Página 23

a) $A \cup B = [0, 5)$ $A \cap B = [1, 3)$

b) $A \cup B = (-2, 4]$ $A \cap B = (-1, 2]$

c) $A \cup B = (-5, 0)$ $A \cap B = \{-3\}$

d) $A \cup B = [-7, -2)$ $A \cap B = (-7, -6)$

e) $A \cup B = (-1, 0) \cup (0, 1)$ $A \cap B = \emptyset$

f) $A \cup B = (-4, 3]$ $A \cap B = \emptyset$

g) $A \cup B = (-\infty, 2] \cup (3, 4)$ $A \cap B = \emptyset$

h) $A \cup B = (-5, +\infty) - \{-1\}$ $A \cap B = \emptyset$

i) $A \cup B = (-\infty, -3] \cup (0, +\infty)$ $A \cap B = \emptyset$

j) $A \cup B = \mathbb{R}$ $A \cap B = [-1, 0]$

89. Página 23

$-1 < x < 3 \quad 0 \leq y \leq 2 \quad \rightarrow \quad 1 > -x > -3 \quad 0 \geq -y \geq -2$

a) $-1 = -1 + 0 < x + y < 3 + 2 = 5 \rightarrow (-1, 5)$

b) $-3 = -1 - 2 < x - y < 3 + 0 = 3 \rightarrow (-3, 3)$

c) $-3 = 0 - 3 < y - x < 2 + 1 = 3 \rightarrow (-3, 3)$

d) Si $x \geq 0 \rightarrow \quad 0 = 0 \cdot 0 < x \cdot y < 3 \cdot 2 = 6$

Si $x < 0 \rightarrow \quad 0 = 0 \cdot 0 > x \cdot y > 2 \cdot (-1) = -2$

$-2 < x \cdot y < 6 \rightarrow (-2, 6)$

90. Página 23

a) $(-3, 3)$

b) Intervalo vacío, ø.

c) Toda la recta real, $\mathbb{R}$.

91. Página 23

a) $\frac{16}{100}\cdot 220=0{,}16\cdot 220=35{,}2$

b) $\frac{8{,}5}{100}\cdot 48=0{,}085\cdot 48=4{,}08$

c) $\frac{42{,}6}{100}\cdot 1\,245=0{,}426\cdot 1\,245=530{,}37$

d) $\frac{13}{100}\cdot 349=0{,}13\cdot 349=45{,}37$

e) $\frac{0{,}54}{100}\cdot 78=0{,}0054\cdot 78=0{,}4212$

f) $\frac{98}{100}\cdot 980=0{,}98\cdot 980=960{,}4$

92. Página 23

a) $\frac{20}{100}\cdot\frac{6}{100}\cdot 400=4{,}8$

b) $\frac{8{,}2}{100}\cdot\frac{2{,}8}{100}\cdot 678=1{,}5567$

c) $\frac{46}{100}\cdot\frac{17}{100}\cdot 3\,400=265{,}88$

d) $\frac{35}{100}\cdot\frac{25}{100}\cdot 6\,700=586{,}25$

93. Página 23

a) $\frac{25}{100}\rightarrow$ **25 %**

b) $\frac{25}{1\,000}=0{,}025=\frac{2{,}5}{100}\rightarrow$ **2,5 %**

c) $\frac{25}{200}=0{,}125=\frac{12{,}5}{100}\rightarrow$ **12,5 %**

d) $\frac{25}{300}=0{,}08\widehat{3}=\frac{8{,}\widehat{3}}{100}\rightarrow 8{,}\widehat{3}\,\%$

e) $\frac{25}{500}=0{,}05=\frac{5}{100}\rightarrow$ **5 %**

f) $\frac{25}{250}=0{,}1=\frac{10}{100}\rightarrow$ **10 %**

g) $\frac{25}{750}=0{,}0\widehat{3}=\frac{3{,}\widehat{3}}{100}\rightarrow 3{,}\widehat{3}\,\%$

h) $\frac{25}{150}=0{,}1\widehat{6}=\frac{16{,}\widehat{6}}{100}\rightarrow 16{,}\widehat{6}\,\%$

94. Página 23

a) $\frac{6}{24}=0{,}25=\frac{25}{100}\rightarrow$ **25 %**

b) $\frac{24}{30}=0{,}8=\frac{80}{100}\rightarrow$ **80 %**

c) $\frac{3}{5}=0{,}6=\frac{60}{100}\rightarrow$ **60 %**

d) $\frac{60}{80}=0{,}75=\frac{75}{100}\rightarrow$ **75 %**

e) $\frac{0{,}03}{1}=0{,}03=\frac{3}{100}\rightarrow$ **3 %**

f) $\frac{20}{50}=0{,}4=\frac{40}{100}\rightarrow$ **40 %**

95. Página 24

«NS/NC» $\longrightarrow$ $860-(301+172)=387$

El porcentaje que representa es $\frac{387}{860}=0{,}45=\frac{45}{100}\rightarrow$ **45 %.**

96. Página 24

$$2464=\frac{56}{100}\cdot C=0{,}56\cdot C\rightarrow C=\frac{2464}{0{,}56}=4\,400$$

97. Página 24

a) $\frac{3}{20}=0{,}15=\frac{15}{100}\rightarrow$ **15 %**

b) $\frac{8}{12}=0{,}\widehat{6}=\frac{66{,}\widehat{6}}{100}\rightarrow 66{,}\widehat{6}\ \%$

c) $\frac{9}{14}=0{,}6\widehat{428571}=\frac{64{,}\widehat{285714}}{100}\rightarrow 64{,}\widehat{285714}\ \%$

d) $\frac{1}{6}=0{,}1\widehat{6}=\frac{16{,}\widehat{6}}{100}\rightarrow 16{,}\widehat{6}\ \%$

e) $\frac{7}{40}=0{,}175=\frac{17{,}5}{100}\rightarrow$ **17,5 %**

f) $\frac{2}{7}=0{,}\widehat{285714}=\frac{28{,}\widehat{571428}}{100}\rightarrow 28{,}\widehat{571428}\ \%$

98. Página 24

$$\frac{34}{100}\cdot C=646\rightarrow\frac{17}{100}\cdot C=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{34}{100}\cdot C\right)=\frac{646}{2}=323$$

$$\frac{34}{100}\cdot C=646\rightarrow\frac{68}{100}\cdot C=2\cdot\left(\frac{34}{100}\cdot C\right)=2\cdot 646=1\,292$$

99. Página 24

$$90=\frac{42}{100}\cdot\frac{C}{2}=0{,}21\cdot C\rightarrow C=\frac{90}{0{,}21}=428{,}\widehat{571428}$$

100. Página 24

$$15=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{100}\cdot C\right)=0{,}015\cdot C\rightarrow C=\frac{15}{0{,}015}=1\,000$$

101. Página 24

a) Calculamos el (100 + 20,5) % de 1 200: $1200\cdot\frac{100+20{,}5}{100}=1200\cdot\frac{120{,}5}{100}=1446$

b) Calculamos el (100 – 35) % de 1 200: $1200\cdot\frac{100-35}{100}=1200\cdot\frac{65}{100}=780$

c) Calculamos el (100 + 75) % de 1 200: $1200\cdot\frac{100+75}{100}=1200\cdot\frac{175}{100}=2\,100$

d) Calculamos el (100 – 15,75) % de 1 200: $1200\cdot\frac{100-15{,}75}{100}=1200\cdot\frac{84{,}25}{100}=1011$

102. Página 24

a) $(100+32)\%$ **de** $C=\dfrac{132}{100}\cdot C=240\rightarrow C=\dfrac{240}{1{,}32}=181{,}\widehat{81}$

b) $(100-2{,}4)\%$ **de** $C=\dfrac{97{,}6}{100}\cdot C=240\rightarrow C=\dfrac{240}{0{,}976}=245{,}9016\ldots$

c) $(100+16{,}8)\%$ **de** $C=\dfrac{116{,}8}{100}\cdot C=240\rightarrow C=\dfrac{240}{1{,}168}=205{,}\widehat{47945205}$

d) $(100-48)\%$ **de** $C=\dfrac{52}{100}\cdot C=240\rightarrow C=\dfrac{240}{0{,}52}=461{,}\widehat{538461}$

103. Página 24

a) $(100+24)\%$ **de 0,60** $=\dfrac{124}{100}\cdot 0{,}60=0{,}744\rightarrow 0{,}744-0{,}60=0{,}144$ **€/unidad.**

b) $(100+24)\%$ **de 1,10** $=\dfrac{124}{100}\cdot 1{,}10=1{,}364\rightarrow 1{,}364-1{,}10=0{,}264$ **€/ℓ.**

c) $(100+24)\%$ **de 10,45** $=\dfrac{124}{100}\cdot 10{,}45=12{,}958\rightarrow 12{,}958-10{,}45=2{,}508$ **€/kg.**

d) $(100+24)\%$ **de 1,42** $=\dfrac{124}{100}\cdot 1{,}42=1{,}7608\rightarrow 1{,}7608-1{,}42=0{,}3208$ **€/docena.**

e) $(100+24)\%$ **de 2,30** $=\dfrac{124}{100}\cdot 2{,}30=2{,}852\rightarrow 2{,}852-2{,}30=0{,}552$ **€/kg.**

104. Página 24

a) $\dfrac{25}{100}\cdot 200=50=\dfrac{50}{100}\cdot 100\longrightarrow$ Verdadera

b) $\dfrac{40}{100}\cdot 48=19{,}2\neq 4{,}8=\dfrac{20}{100}\cdot 24\longrightarrow$ Falsa

c) $\dfrac{20}{100}\cdot 50=10=\dfrac{50}{100}\cdot 20\longrightarrow$ Verdadera

d) $\dfrac{20}{100}\cdot 70+\dfrac{30}{100}\cdot 70=\dfrac{50}{100}\cdot 70=\dfrac{25}{100}\cdot 140\longrightarrow$ Falsa

105. Página 24

$\dfrac{400}{320}=1{,}25\rightarrow$ Subida del 25 %

$\dfrac{1\,500}{1\,200}=1{,}25\rightarrow$ Subida del 25 %

$\dfrac{55}{45}=1{,}2222\ldots\rightarrow$ Subida del 22,22 %

$\dfrac{28}{20}=1{,}4\rightarrow$ Subida del 40 %

Los aumentos ordenados de menor a mayor son:

Subida de 45 a 55 < Subida de 320 a 400 = Subida de 1 200 a 1 500 < Subida de 20 a 28

106. Página 24

$\dfrac{80}{100}\cdot C=24\rightarrow C=\dfrac{24}{0{,}8}=30\rightarrow 30-24=6$ días ha disminuido la lista de espera.

107. Página 24

$\dfrac{100+36}{100}\cdot 34=\dfrac{136}{100}\cdot 34=1{,}36\cdot 34=46{,}24$ **€** debe ser el precio final de cada artículo.

108. Página 24

Aumento del 30 % $\rightarrow (100+30)\% = 130\%$

Disminución del 15 % $\rightarrow (100-15)\% = 85\%$

$\frac{130}{100} \cdot \frac{85}{100} \cdot 45 = 1{,}3 \cdot 0{,}85 \cdot 45 = 49{,}725$ € costará el artículo.

$\frac{130}{100} \cdot \frac{85}{100} = \frac{130 \cdot 85}{100 \cdot 100} = \frac{11\,050}{10\,000} = 1{,}105 = \frac{110{,}5}{100} \rightarrow$ 110,5 % es el porcentaje sobre el precio inicial.

109. Página 24

$\frac{75}{100} \cdot \frac{70}{100} \cdot C = 125 \rightarrow 0{,}525 \cdot C = 125 \rightarrow C = 238{,}10$ € valía el producto.

110. Página 24

$\frac{121}{100} \cdot \frac{118}{100} \cdot C = 120 \rightarrow 1{,}4278 \cdot C = 120 \rightarrow C = 84{,}05$ € era el precio del abrigo.

111. Página 24

No es lo mismo.

En el primer caso: $\frac{125}{100} \cdot \frac{125}{100} \cdot C = \frac{125 \cdot 125}{100 \cdot 100} \cdot C = 1{,}5625 \cdot C \rightarrow$ Corresponde a un aumento del 56,25 %.

En el segundo caso: $\frac{125}{100} \cdot 2C = \frac{250}{100} \cdot C = 2{,}5 \cdot C \rightarrow$ Corresponde a un aumento del 150 %.

112. Página 24

No es lo mismo.

$\frac{130}{100} \cdot \frac{130}{100} \cdot C = \frac{169}{100} \cdot C \rightarrow$ Corresponde a un aumento del 69 %, no a uno del 60 %.

113. Página 24

$\frac{100-a}{100} \cdot \frac{110}{100} \cdot C = C \rightarrow \frac{(100-a) \cdot 110}{10\,000} = 1 \rightarrow \quad a = 100 - \frac{1\,000}{11} \rightarrow a = 9{,}09\ \%$

El porcentaje de disminución es del 9,09 %.

114. Página 24

$\frac{116}{100} \cdot \frac{40}{100} \cdot C = \frac{4\,640}{10\,000} \cdot C = \frac{46{,}4}{100} \cdot C \rightarrow$ El resultado es el 46,4 % de la cantidad inicial.

115. Página 24

$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} \xrightarrow{C=20\,000,\ r=2{,}75,\ t=4} I = \frac{20\,000 \cdot 2{,}75 \cdot 4}{100} = 2\,200$ €

116. Página 24

a) $I=\frac{C\cdot r\cdot t}{100}\xrightarrow{C=800,\ r=1{,}8,\ t=2{,}5} I=\frac{800\cdot 1{,}8\cdot 2{,}5}{100}=36$ €

b) $I=\frac{C\cdot r\cdot t}{100}\xrightarrow{C=1\,200,\ r=1{,}8,\ t=2{,}5} I=\frac{1\,200\cdot 1{,}8\cdot 2{,}5}{100}=54$ €

c) $I=\frac{C\cdot r\cdot t}{100}\xrightarrow{C=24\,000,\ r=1{,}8,\ t=2{,}5} I=\frac{24\,000\cdot 1{,}8\cdot 2{,}5}{100}=1\,080$ €

d) $I=\frac{C\cdot r\cdot t}{100}\xrightarrow{C=5\,750,\ r=1{,}8,\ t=2{,}5} I=\frac{5\,750\cdot 1{,}8\cdot 2{,}5}{100}=258{,}75$ €

117. Página 25

$I=\frac{C\cdot r\cdot t}{100}\xrightarrow{C=100,\ r=3{,}5,\ t=2{,}5} I=\frac{100\cdot 3{,}5\cdot 2{,}5}{100}=8{,}75$ €

118. Página 25

$I=11760-10\,000=1760$

$I=\frac{C\cdot r\cdot t}{100}\xrightarrow{C=10\,000,\ I=1760,\ t=2} 1760=\frac{10\,000\cdot r\cdot 2}{100}=r\cdot 200\rightarrow r=\frac{1760}{200}=8{,}8$ % de rédito

119. Página 25

$I=5080-4\,000=1080$

$I=\frac{C\cdot r\cdot t}{100}\xrightarrow{C=4\,000,\ I=1080,\ t=3} 1080=\frac{4\,000\cdot r\cdot 3}{100}=r\cdot 120\rightarrow r=\frac{1080}{120}=9$ % de rédito

120. Página 25

$I=\frac{C\cdot r\cdot t}{100}\xrightarrow{C=3\,000,\ I=225,\ r=3} 225=\frac{3\,000\cdot 3\cdot t}{100}=t\cdot 90\rightarrow r=\frac{225}{90}=2{,}5$ años

121. Página 25

a) $C_f=C_i\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^t\xrightarrow{C_i=750,\ r=1{,}25;\ t=3} C_f=750\cdot\left(1+\frac{1{,}25}{100}\right)^3=778{,}48$ €

b) $C_f=C_i\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^t\xrightarrow{C_i=53\,000,\ r=1{,}25;\ t=2} C_f=53\,000\cdot\left(1+\frac{1{,}25}{100}\right)^2=54\,333{,}28$ €

c) $C_f=C_i\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^t\xrightarrow{C_i=9400,\ r=1{,}25;\ t=5} C_f=9400\cdot\left(1+\frac{1{,}25}{100}\right)^5=10\,002{,}37$ €

d) $C_f=C_i\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^t\xrightarrow{C_i=62\,000,\ r=1{,}25;\ t=4} C_f=62\,000\cdot\left(1+\frac{1{,}25}{100}\right)^4=65\,158{,}61$ €

122. Página 25

$C_f=C_i\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^t\xrightarrow{C_i=500,\ r=3;\ t=5} C_f=500\cdot\left(1+\frac{3}{100}\right)^5=579{,}64$ €

$I=C_f-C_i=579{,}64-500=79{,}64$ € de interés.

123. Página 25

$$C_f = C_i \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right)^t \xrightarrow{C_i=2\,000,\ r=2{,}75;\ t=10} C_f = 2000 \cdot \left(1+\frac{2{,}75}{100}\right)^{10} = 2623{,}30\ €$$

$I = C_f - C_i = 2\,623{,}30 - 2\,000 = 623{,}30$ € de interés.

124. Página 25

$$C_f = C_i \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right)^t \xrightarrow{C_f=200,\ r=5;\ t=2} 200 = C_i \cdot \left(1+\frac{5}{100}\right)^2 = C_i \cdot 1{,}1025$$

$\rightarrow C_i = \dfrac{200}{1{,}1025} = 181{,}41$ € de capital invertido.

126. Página 25

$C_f = C_i \cdot \left(1+\dfrac{r}{100}\right)^t \xrightarrow{C_f=C_i+244,\ r=4\ \ t=5} C_i + 244 = C_i \cdot \left(1+\dfrac{4}{100}\right)^5 \rightarrow C_i = 1126{,}23$ € es el capital invertido.

127. Página 25

Para que se conviertan en 5 500 €:

$$C_f = C_i \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right)^t \xrightarrow{C_f=5\,500,\ r=10;\ C_i=5\,000} 5\,500 = 5\,000 \cdot \left(1+\frac{10}{100}\right)^t \rightarrow t = 1$$

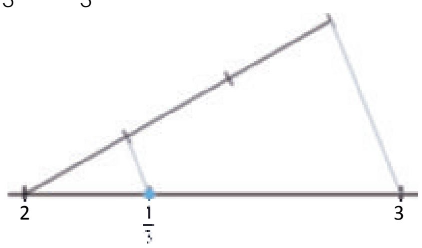
Para que se conviertan en 6 050 €:

$$C_f = C_i \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right)^t \xrightarrow{C_f=6\,050,\ r=10;\ C_i=5\,000} 6\,050 = 5\,000 \cdot \left(1+\frac{10}{100}\right)^t \rightarrow t = 2$$

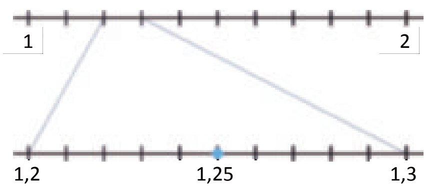
DEBES SABER HACER

1. Página 25

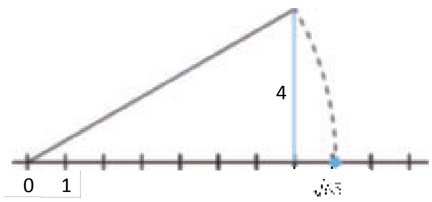
a) $\dfrac{7}{3} = 2 + \dfrac{1}{3}$



b) 1,25



c) $\sqrt{65} = \sqrt{7^2 + 4^2}$



2. Página 25

$41 \rightarrow$ Es un número natural.

$\sqrt{17} = 4{,}123105626... \rightarrow$ Es un número irracional.

$\dfrac{8}{49} \rightarrow$ Es un número racional.

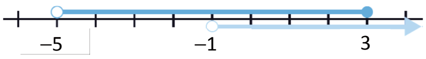
$-87 \rightarrow$ Es un número entero.

3. Página 25

$\dfrac{17}{3} = 5{,}\widehat{6} \xrightarrow{\text{Redondeo}} 5{,}7$ $\quad E_a = \left|5{,}\widehat{6} - 5{,}7\right| = 0{,}0\widehat{3}$ $\quad E_r = \dfrac{0{,}0\widehat{3}}{5{,}\widehat{6}} = 0{,}0058823529...$

$\dfrac{17}{3} = 5{,}\widehat{6} \xrightarrow{\text{Truncamiento}} 5{,}6$ $\quad E_a = \left|5{,}\widehat{6} - 5{,}6\right| = 0{,}0\widehat{6}$ $\quad E_r = \dfrac{0{,}0\widehat{6}}{5{,}\widehat{6}} = 0{,}0117647059...$

4. Página 25



$A \cup B = (-5, +\infty)$ $\qquad A \cap B = (-1, 3]$

5. Página 25

$\dfrac{85}{100} \cdot \dfrac{121}{100} \cdot 120 = 123{,}42$ € tendrá que pagar por el artículo.

6. Página 25

a) $I = \dfrac{C \cdot r \cdot t}{100} \xrightarrow{C=1000,\ r=7,\ t=5} I = \dfrac{1\,000 \cdot 7 \cdot 5}{100} = 350\text{ €} \rightarrow C_f = C + I = 1000 + 350 = 1\,350\text{ €}$

b) $C_f = C_i \cdot \left(1 + \dfrac{r}{100}\right)^t \xrightarrow{C_i=1000,\ r=7\ t=5} C_f = 1000 \cdot \left(1 + \dfrac{7}{100}\right)^5 = 1402{,}55\text{ €}$

COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

128. Página 26

a) Final del primer año $\rightarrow \dfrac{100 + 1{,}90}{100} \cdot 480 - 3 \cdot 12 = 489{,}12 - 36 = 453{,}12\text{ €}$

Final del segundo año $\rightarrow \dfrac{100 + 1{,}9}{100} \cdot 453{,}12 - 3 \cdot 12 = 461{,}73 - 36 = 425{,}73\text{ €}$

No tendré dinero suficiente.

b) Si decidimos comprar la tableta a pesar de no tener dinero suficiente en el banco, tendremos que ingresar:

- El saldo negativo $\rightarrow 510 - 425{,}73 = 84{,}27\text{ €}$
- Un 4,58 % de esta cantidad $\rightarrow \dfrac{4{,}58}{100} \cdot 84{,}27 = 3{,}86\text{ €}$
- 39 € por quedarnos en números rojos.

Es decir, el total que tendremos que ingresar será $84{,}27 + 3{,}86 + 39 = 127{,}13\text{ €}$

FORMAS DE PENSAR. Razonamiento matemático.

129. Página 26

Suponemos que $\sqrt{2}$ es racional, es decir, se puede expresar en forma de fracción irreducible:

$$\sqrt{2}=\frac{a}{b}\text{, con } \frac{a}{b} \text{ fracción irreducible}$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad, y llegamos a una contradicción:

$$\sqrt{2}=\frac{a}{b}\rightarrow 2=\frac{a^2}{b^2}\rightarrow b^2 \text{ es divisor de } a^2$$

Pero esto no es posible, pues a y b son primos entre sí, por ser $\frac{a}{b}$ irreducible. Por tanto, $\sqrt{2}$ es irracional.

130. Página 26

Si $\frac{a}{b}=\frac{3}{5} \longrightarrow \frac{a+b}{a\cdot b}=\frac{3+5}{3\cdot 5}=\frac{8}{15}$ y $\frac{a-b}{a\cdot b}=\frac{3-5}{3\cdot 5}=\frac{-2}{15}$ son fracciones irreducibles.

Intentamos ahora extraer una regla general:

Supongamos que $\frac{a+b}{a\cdot b}$ no es fracción irreducible, es decir, $\frac{a+b}{a\cdot b}=\frac{c}{d}$ con $d<a\cdot b$.

Así:

$$\frac{a+b}{a\cdot b}=\frac{c}{d}\rightarrow(a+b)\cdot d=(a\cdot b)\cdot c\rightarrow\frac{b}{a}\cdot d=b\cdot c-d$$

Como $\frac{a}{b}$ es una fracción irreducible y $b\cdot c-d$ es un número entero:

$$d=a\cdot x\rightarrow\frac{a+b}{a\cdot b}=\frac{c}{d}=\frac{c}{a\cdot x}\text{, con } x \text{ un número entero.}$$

$$d<a\cdot b\rightarrow x<b\rightarrow d+\frac{b}{a}\cdot d=a\cdot x+b\cdot x=a\cdot c\rightarrow b\cdot x=a\cdot(c-x)\rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c-x}{x}\text{, con } x<b$$

Por tanto, $\frac{a}{b}$ no puede ser una fracción irreducible. $\longrightarrow$ $\frac{a+b}{a\cdot b}$ es una fracción irreducible.

Del mismo modo, supongamos que $\frac{a-b}{a\cdot b}$ no es fracción irreducible, es decir, $\frac{a-b}{a\cdot b}=\frac{c}{d}$ con $d<a\cdot b$.

Así:

$$\frac{a-b}{a\cdot b}=\frac{c}{d}\rightarrow(a-b)\cdot d=(a\cdot b)\cdot c\rightarrow d-\frac{b}{a}\cdot d=b\cdot c\rightarrow\frac{b}{a}\cdot d=d-b\cdot c$$

Como $\frac{a}{b}$ es una fracción irreducible y $d-b\cdot c$ es un número entero:

$$d=a\cdot x\rightarrow\frac{a-b}{a\cdot b}=\frac{c}{d}=\frac{c}{a\cdot x}\text{, con } x \text{ un número entero.}$$

$$d<a\cdot b\rightarrow x<b\rightarrow d-\frac{b}{a}\cdot d=a\cdot x-b\cdot x=a\cdot c\rightarrow b\cdot x=a\cdot(x-c)\rightarrow\frac{a}{b}=\frac{x-c}{x}\text{, con } x<b$$

Por tanto, $\frac{a}{b}$ no puede ser una fracción irreducible. $\longrightarrow$ $\frac{a-b}{a\cdot b}$ es una fracción irreducible.

131. Página 26

a) 6,325 b) 6,356 c) 6,32 d) 6

132. Página 26

a) $2,\widehat{3} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$ $\qquad 2,3\widehat{3} = \frac{210}{90} = \frac{7}{3}$

b) $0,\widehat{325} = \frac{325}{999}$ $\qquad 0,32\widehat{532} = \frac{32\,500}{99\,900} = \frac{325}{999}$

c) $1,\widehat{9} = \frac{18}{9} = 2$

En los apartados a) y b) se produce este resultado porque el anteperíodo puede integrarse en el período.

El resultado del apartado c) se obtiene porque considerar 1,999... con infinitas cifras decimales es equivalente al número 2.

Sí, son resultados correctos.

133. Página 26

Para que el error absoluto por redondeo fuera menor que una millonésima, tendremos que tomar un redondeo a las millonésimas. En este caso la cota de error absoluto será de media millonésima, pero si tomásemos el redondeo a las cienmilésimas la cota de error sería de 5 millonésimas, que es mayor que una millonésima.

PRUEBAS PISA

134. Página 27

a)
- Es falsa: al pagar de forma proporcional al tamaño del piso, todos los inquilinos están pagando el metro cuadrado al mismo precio.
- Es verdadera: si conocemos la superficie de un piso, *S,* y su precio, *P,* podemos establecer el precio del metro cuadrado, $\frac{S}{P}$. Multiplicando este valor por la superficie del segundo piso, obtendremos el precio del segundo piso.
- Es verdadera si conocemos la superficie total del edificio, ya que podemos calcular el precio del metro cuadrado y después, con el precio de cada piso, podemos obtener su superficie.
  Si no conocemos la superficie total del edificio la afirmación es falsa.
- Es verdadera: si se reduce el precio total del edificio en un 10 %, se reduce de forma proporcional el precio del metro cuadrado. Por tanto, el precio de cada piso se reduce en un 10 %.

b) $95 + 85 + 70 = 250$ m^2 es la superficie total del edificio.

Por tanto, al propietario del piso 2 le corresponde pagar $\frac{85}{250} = \frac{17}{50}$ del total. Es decir: $\frac{17}{50} \cdot 300\,000 = 102\,000$ zeds

Potencias y radicales. Logaritmos

2

CLAVES PARA EMPEZAR

1. Página 28

a) $3^4 = 81$

b) $\left(\frac{5}{-2}\right)^5 = \frac{5^5}{(-2)^5} = \frac{3125}{-32} = -\frac{3125}{32}$

c) $(-2)^6 = 64$

d) $\left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{5^2}{7^2} = \frac{25}{49}$

e) $\left(\frac{-3}{5}\right)^3 = \frac{(-3)^3}{5^3} = \frac{-27}{125} = -\frac{27}{125}$

f) $(-5)^7 = -78\,125$

g) $\left(-\frac{4}{9}\right)^3 = \frac{(-4)^3}{9^3} = \frac{-64}{729} = -\frac{64}{729}$

h) $2^5 = 32$

2. Página 28

a) $\frac{5^7 \cdot 3^3 \cdot 6^4}{6^2 \cdot 3 \cdot 5^4} = 5^3 \cdot 3^2 \cdot 6^2$

b) $2^7 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2^3}{3^2} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{2^7 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 2^6} = \frac{2^{10} \cdot 3^3}{2^8 \cdot 3^2} = 2^2 \cdot 3$

VIDA COTIDIANA

EL SISMÓGRAFO. Página 29

Un terremoto de intensidad 2 es 10^4 veces inferior que uno de intensidad 6.

RESUELVE EL RETO

RETO 1. Página 30

$$\frac{1}{\frac{2}{4}} = \frac{4}{2} = 2$$

RETO 2. Página 33

$$\sqrt[-3]{b} = a \rightarrow b^{-\frac{1}{3}} = a \rightarrow b = a^{-3}$$

RETO 3. Página 38

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}\sqrt{6}}{\sqrt[3]{5}\sqrt{6}\sqrt[3]{5^2}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}\sqrt{6}}{30}$$

RETO 4. Página 41

$\log_2(-2) = x \rightarrow 2^x = -2 \;\longrightarrow$ No existe x que cumpla la igualdad.

$\log_{-2} 2 = x \rightarrow (-2)^x = 2 \;\longrightarrow$ No existe x que cumpla la igualdad.

RETO 5. Página 42

El error está en el paso de la tercera a la cuarta ecuación.

Como no existe el logaritmo de un número negativo, un requisito para utilizar la ecuación $\log_a b^n = n\cdot\log_a b$ es que *b* sea mayor que 0.

ACTIVIDADES

1. Página 30

a) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

b) $(-3)^3 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = -27$

c) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{4}$

d) $\left(-\frac{2}{4}\right)^{-4} = \left(-\frac{4}{2}\right)^4 = (-2)^4 = 16$

e) $(-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25}$

f) $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

g) $\left(-\frac{4}{7}\right)^{-1} = -\frac{7}{4}$

h) $\left(\frac{10}{7}\right)^2 = \frac{10^2}{7^2} = \frac{100}{49}$

2. Página 30

a) $\frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

b) $-5^2 = -5\cdot 5 = -25$

c) $(-3)^2 = (-3)\cdot(-3) = 9$

d) $(-1)^5 = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = -1$

3. Página 30

a) $\frac{4}{9} = \frac{2^2}{3^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$

b) $\frac{-8}{27} = \frac{-2^3}{3^3} = \left(-\frac{3}{2}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$

4. Página 31

a) $3^{-4}\cdot 3^7 : 3^{-2} = 3^{-4+7+2} = 3^5$

b) $(-2)^8 : (-2)^{-4}\cdot(-2) = (-2)^{8+4+1} = -2^{13}$

c) $-7^{-2}\cdot 7^3\cdot 7^4 = -7^{-2+3+4} = -7^5$

d) $(-50)^7\cdot(-2)^7 : 4^7 = (-2\cdot 5^2)^7\cdot(-2)^7 : (2^2)^7 = (-2)^7\cdot 5^{14}\cdot(-2)^7 : 2^{14} = (-2)^{14}\cdot 5^{14} : 2^{14} = 5^{14}$

5. Página 31

a) $-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}\cdot(-4^{-3})\cdot(-3^{-3}) = -(-2)^3\cdot(-(2^2)^{-3})\cdot(-3^{-3}) = 2^3\cdot(-2^{-6})\cdot(-3^{-3}) = 2^{3-6}\cdot 3^{-3} = \frac{1}{2^3\cdot 3^3} = \frac{1}{6^3}$

b) $(-3)^8\cdot 5^8 : (-1)^8 = 3^8\cdot 5^8 = 15^8$

6. Página 31

a) $2^3\cdot 3^3 : (-6)^4 = 2^3\cdot 3^3 : (-2\cdot 3)^4 = 2^3\cdot 3^3 : (2^4\cdot 3^4) = 2^{-1}\cdot 3^{-1} = \frac{1}{6}$

b) $40^4 : (-5)^4 : 8^3 = (2^3\cdot 5)^4 : 5^4 : (2^3)^3 = 2^{12}\cdot 5^4 : 5^4 : 2^9 = 2^3$

7. Página 32

a) Índice 6 y radicando 3.

b) Índice 7 y radicando −3.

c) Índice 9 y radicando 5.

d) Índice 5 y radicando −2.

e) Índice 2 y radicando 33.

f) Índice 4 y radicando 25.

8. Página 32

a) $\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=\pm 3$

b) $\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2$

c) $\sqrt[5]{-100\,000}=\sqrt[5]{(-10)^5}=-10$

d) $\sqrt[4]{-256}=\sqrt[4]{-2^8}=4\cdot\sqrt[4]{-1}$ ⟶ No existe raíz real.

e) $\sqrt[4]{625}=\sqrt[4]{5^4}=\pm 5$

f) $\sqrt[4]{1296}=\sqrt[4]{6^4}=\pm 6$

9. Página 32

Sí, siempre será la opuesta, porque para tenga dos raíces el índice debe ser par y el radicando positivo.

10. Página 33

a) $5^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{5}$

b) $3^{\frac{4}{5}}=\sqrt[5]{3^4}$

c) $7^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{7^2}$

d) $3^{\frac{7}{8}}=\sqrt[8]{3^7}$

e) $2^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{2}$

f) $8^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{(2^3)^4}=\sqrt[3]{2^{12}}=\sqrt{2^4}$

11. Página 33

a) $\sqrt[3]{3^2}=3^{\frac{2}{3}}$

b) $\sqrt[9]{(-6)^7}=(-6)^{\frac{7}{9}}$

c) $\sqrt[4]{3^3}=3^{\frac{3}{4}}$

d) $\sqrt[3]{5^{-2}}=5^{-\frac{2}{3}}$

e) $\sqrt[3]{7^2}=7^{\frac{2}{3}}$

12. Página 33

Conocidas las raíces de un radical no podemos saber a ciencia cierta las raíces de otro radical equivalente a él. Por ejemplo:

$$\sqrt[3]{(-1)}=-1 \qquad \sqrt[6]{(-1)^2}=\pm 1$$

13. Página 34

a) $$\left.\begin{array}{l}\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}\\ \sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{m.c.m.}(2,\,3)=6}\left.\begin{array}{l}\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{6}}\\ \sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{6}}\end{array}\right\}\to\sqrt[6]{2^3}\text{ y }\sqrt[6]{3^2}$$

b) $$\left.\begin{array}{l}\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}\\ \sqrt[4]{2}=2^{\frac{1}{4}}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{m.c.m.}(2,\,4)=4}\left.\begin{array}{l}\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{2}{4}}\\ \sqrt[4]{2}=2^{\frac{1}{4}}\end{array}\right\}\to\sqrt[4]{3^2}\text{ y }\sqrt[4]{2}$$

c) $$\left.\begin{array}{l}\sqrt[3]{5}=5^{\frac{1}{3}}\\ \sqrt[4]{3}=3^{\frac{1}{4}}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{m.c.m.}(3,\,4)=12}\left.\begin{array}{l}\sqrt[3]{5}=5^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{4}{12}}\\ \sqrt[4]{3}=3^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{3}{12}}\end{array}\right\}\to\sqrt[12]{5^4}\text{ y }\sqrt[12]{3^3}$$

d) $$\left.\begin{array}{l}\sqrt[3]{7}=7^{\frac{1}{3}}\\ \sqrt[5]{3}=3^{\frac{1}{5}}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{m.c.m.}(3,\,5)=15}\left.\begin{array}{l}\sqrt[3]{7}=7^{\frac{1}{3}}=7^{\frac{5}{15}}\\ \sqrt[5]{3}=3^{\frac{1}{5}}=3^{\frac{3}{15}}\end{array}\right\}\to\sqrt[15]{7^5}\text{ y }\sqrt[15]{3^3}$$

e) $$\left.\begin{array}{l}\sqrt[4]{10}=10^{\frac{1}{4}}\\ \sqrt[5]{3}=3^{\frac{1}{5}}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{m.c.m.}(4,\,5)=20}\left.\begin{array}{l}\sqrt[4]{10}=10^{\frac{1}{4}}=10^{\frac{5}{20}}\\ \sqrt[5]{3}=3^{\frac{1}{5}}=3^{\frac{4}{20}}\end{array}\right\}\to\sqrt[20]{10^5}\text{ y }\sqrt[20]{3^4}$$

f) $$\left.\begin{array}{l}\sqrt[5]{7}=7^{\frac{1}{5}}\\ \sqrt[7]{6}=6^{\frac{1}{7}}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{m.c.m.}(7,\,5)=35}\left.\begin{array}{l}\sqrt[5]{7}=7^{\frac{1}{5}}=7^{\frac{7}{35}}\\ \sqrt[7]{6}=6^{\frac{1}{7}}=6^{\frac{5}{35}}\end{array}\right\}\to\sqrt[35]{7^7}\text{ y }\sqrt[35]{6^5}$$

14. Página 34

a) $\sqrt[6]{5^2}=5^{\frac{2}{6}}=5^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{5}$ b) $\sqrt[10]{3^4}=3^{\frac{4}{10}}=3^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{3^2}$ c) $\sqrt[21]{3^7}=3^{\frac{7}{21}}=3^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{3}$ d) $\sqrt[6]{7^3}=7^{\frac{3}{6}}=7^{\frac{1}{2}}=\sqrt{7}$

15. Página 34

a) El índice no es divisor del exponente del radicando; no es radical. $\sqrt[3]{2^6}=2^{\frac{6}{3}}=2^2=4$

b) El índice es divisor del exponente del radicando; es radical. $\sqrt[14]{2^6}=2^{\frac{6}{14}}=2^{\frac{3}{7}}$

16. Página 35

a) $\sqrt{2^5}=2^2\sqrt{2}$

b) $\sqrt{3^7}=3^3\sqrt{3}$

c) $\sqrt{5^5}=5^2\sqrt{5}$

d) $\sqrt[3]{7^4}=7\sqrt[3]{7}$

e) $\sqrt[3]{11^8}=11^2\sqrt[3]{11^2}$

f) $\sqrt[3]{3^5}=3\sqrt[3]{3^2}$

g) $\sqrt[4]{6^6}=6\sqrt[4]{6^2}$

h) $\sqrt[4]{14^{11}}=14^2\sqrt[4]{14^3}$

17. Página 35

a) $\sqrt{24}=\sqrt{2^3\cdot 3}=2\sqrt{2\cdot 3}$

b) $\sqrt{98}=\sqrt{2\cdot 7^2}=7\sqrt{2}$

c) $\sqrt{1620}=\sqrt{2^2\cdot 3^4\cdot 5}=2\cdot 3^2\sqrt{5}$

d) $\sqrt[3]{48}=\sqrt[3]{2^4\cdot 3}=2\sqrt[3]{2\cdot 3}$

e) $\sqrt[3]{104}=\sqrt[3]{2^3\cdot 13}=2\sqrt[3]{13}$

f) $\sqrt[3]{3\,240}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3^4\cdot 5}=2\cdot 3\sqrt[3]{3\cdot 5}$

g) $\sqrt[4]{405}=\sqrt[4]{3^4\cdot 5}=3\sqrt[4]{5}$

h) $\sqrt[4]{176}=\sqrt[4]{2^4\cdot 11}=2\sqrt[4]{11}$

18. Página 35

a) $\sqrt{2^{17}\cdot 5^{20}\cdot 13^{15}} = 2^{8}\cdot 5^{10}\cdot 13^{7}\sqrt{2\cdot 13}$

b) $\sqrt[3]{3^{30}\cdot 11^{54}\cdot 17^{14}} = 3^{10}\cdot 11^{18}\cdot 17^{4}\sqrt[3]{17^{2}}$

c) $\sqrt[3]{2^{30}\cdot 17^{2}\cdot 23^{5}} = 2^{10}\cdot 23\sqrt[3]{17^{2}\cdot 23^{2}}$

d) $\sqrt[4]{2^{14}\cdot 7^{21}\cdot 11^{54}} = 2^{3}\cdot 7^{5}\cdot 11^{13}\sqrt[4]{2^{2}\cdot 7\cdot 11^{2}}$

e) $\sqrt[15]{2^{27}\cdot 3^{54}\cdot 5^{14}} = 2\cdot 3^{3}\sqrt[15]{2^{12}\cdot 3^{9}\cdot 5^{14}}$

f) $\sqrt[18]{3^{5}\cdot 7^{4}\cdot 11^{27}} = 11\cdot\sqrt[18]{3^{5}\cdot 7^{4}\cdot 11^{9}}$

g) $\sqrt[21]{2^{32}\cdot 3^{17}\cdot 17^{42}} = 2\cdot 17^{2}\sqrt[21]{2^{11}\cdot 3^{17}}$

h) $\sqrt[41]{2^{95}\cdot 5^{82}\cdot 7^{16}} = 2^{2}\cdot 5^{2}\sqrt[41]{2^{13}\cdot 7^{16}}$

19. Página 35

a) $\sqrt{x^{7}\cdot y^{12}\cdot z^{4}} = x^{3}\cdot y^{6}\cdot z^{2}\sqrt{x}$

b) $\sqrt{x^{15}\cdot y\cdot z^{3}} = x^{7}\cdot z\sqrt{x\cdot y\cdot z}$

c) $\sqrt[3]{x^{10}\cdot y^{7}\cdot z^{5}} = x^{3}\cdot y^{2}\cdot z\sqrt[3]{x\cdot y\cdot z^{2}}$

d) $\sqrt[4]{x^{12}\cdot y^{71}\cdot z^{25}} = x^{3}\cdot y^{17}\cdot z^{6}\sqrt[4]{y^{3}\cdot z}$

e) $\sqrt{108\cdot x^{5}\cdot y^{6}\cdot z^{7}} = \sqrt{2^{2}\cdot 3^{3}\cdot x^{5}\cdot y^{6}\cdot z^{7}} = 2\cdot 3\cdot x^{2}\cdot y^{3}\cdot z^{3}\sqrt{3\cdot x\cdot z}$

f) $\sqrt[3]{16\cdot x^{21}\cdot y^{4}\cdot z^{2}} = \sqrt[3]{2^{4}\cdot x^{21}\cdot y^{4}\cdot z^{2}} = 2\cdot x^{7}\cdot y\sqrt[3]{2\cdot y\cdot z^{2}}$

g) $\sqrt[4]{32\cdot x^{16}\cdot y^{21}\cdot z^{35}} = \sqrt[4]{2^{5}\cdot x^{16}\cdot y^{21}\cdot z^{35}} = 2\cdot x^{4}\cdot y^{5}\cdot z^{8}\sqrt[4]{2\cdot y\cdot z^{3}}$

h) $\sqrt[5]{288\cdot x^{2}\cdot y^{17}\cdot z^{27}} = \sqrt[5]{2^{5}\cdot 3^{2}\cdot x^{2}\cdot y^{17}\cdot z^{27}} = 2\cdot y^{3}\cdot z^{5}\sqrt[5]{3^{2}\cdot x^{2}\cdot y^{2}\cdot z^{2}}$

20. Página 36

a) $6\sqrt{3}+7\sqrt{3} = (6+7)\sqrt{3} = 13\sqrt{3}$

b) $5\sqrt{10}-3\sqrt{10} = 2\sqrt{10}$

c) $\sqrt{5}-\dfrac{\sqrt{5}}{2} = \left(1-\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{5} = \dfrac{1}{2}\sqrt{5}$

d) $-\sqrt{7}-3\sqrt{7} = (-1-3)\sqrt{7} = -4\sqrt{7}$

e) $2\sqrt{7}+12\dfrac{\sqrt{7}}{3} = 2\sqrt{7}+4\sqrt{7} = (2+4)\sqrt{7} = 6\sqrt{7}$

f) $\dfrac{2}{3}\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{2} = \left(\dfrac{4-3}{6}\right)\sqrt{2} = \dfrac{1}{6}\sqrt{2}$

21. Página 36

a) $\sqrt{4}\cdot\sqrt[3]{5} = 4^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{3}{6}}\cdot 5^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{4^{3}\cdot 5^{2}}$

b) $\sqrt{9}\cdot\sqrt[6]{4} = 9^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{\frac{1}{6}} = 9^{\frac{3}{6}}\cdot 4^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{9^{3}\cdot 4}$

c) $\sqrt[3]{6}:\sqrt[4]{4} = \sqrt[3]{2\cdot 3}:\sqrt[4]{2^{2}} = (2\cdot 3)^{\frac{1}{3}}:2^{\frac{1}{2}} = (2\cdot 3)^{\frac{2}{6}}:2^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{\dfrac{2^{2}\cdot 3^{2}}{2^{3}}} = \sqrt[6]{\dfrac{3^{2}}{2}}$

d) $\sqrt{5}:\sqrt[6]{9} = 5^{\frac{1}{2}}:9^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{3}{6}}:9^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{\dfrac{5^{3}}{9}}$

22. Página 36

a) $\sqrt{\left(\sqrt[3]{5^2}\right)^6} = \left(\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^6\right)^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{12}{6}} = 5^2$

b) $\sqrt{\left(\sqrt[5]{3^{20}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \left(\left(3^{\frac{20}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{20}{20}} = 3$

23. Página 37

a) $\sqrt{10} - 9\sqrt{10} + 4\sqrt{10} = (1-9+4)\sqrt{10} = -4\sqrt{10}$

b) $12\sqrt{5} - 9\sqrt{5} - \sqrt{5} = (12-9-1)\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

c) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[6]{9}\cdot\sqrt{3} = \sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[6]{3^2}\cdot\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{2}{6}}\cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3+4+6}{12}} = 3^{\frac{13}{12}}$

d) $\sqrt[3]{81} : \sqrt[5]{3} : \sqrt{27} = \sqrt[3]{3^4} : \sqrt[5]{3} : \sqrt{3^3} = 3^{\frac{4}{3}} : 3^{\frac{1}{5}} : 3^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{40}{30}} : 3^{\frac{6}{30}} : 3^{\frac{45}{30}} = 3^{\frac{40-6-45}{30}} = 3^{\frac{-11}{30}} = \sqrt[30]{\frac{1}{3^{11}}}$

e) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{10}}\right)^4 = \left(\left(10^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^4 = 10^{\frac{4}{6}} = 10^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{10^2}$

f) $\left(\sqrt{\left(\sqrt[3]{12}\right)^2}\right)^5 = \left(\left(12^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{2}{2}}\right)^5 = 12^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{12^5}$

24. Página 37

a) $\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = \sqrt{2}\sqrt{3} - 2 = \sqrt{6} - 2$

b) $\sqrt{7}\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{5}) = \sqrt{7\cdot 3} + \sqrt{7\cdot 5} = \sqrt{21} + \sqrt{35}$

c) $\sqrt{3}\cdot\left(3\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{2}}{5}\right) = \sqrt{3}\left(3+\frac{2}{5}\right)\sqrt{2} = \frac{15+2}{5}\sqrt{3\cdot 2} = \frac{17}{5}\sqrt{6}$

d) $-\sqrt{5}\cdot\left(2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\sqrt{5}\left(2-\frac{1}{3}\right)\sqrt{3} = -\frac{6-1}{3}\sqrt{5\cdot 3} = -\frac{5}{3}\sqrt{15}$

e) $\left(\sqrt{\sqrt[9]{16}}\right)^3\cdot\sqrt{10} = \left(\left(2^{\frac{4}{9}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^3\sqrt{2\cdot 5} = 2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{7}{6}}\cdot 5^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{7}{6}}\cdot 5^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{2^7\cdot 5^3}$

f) $\sqrt[6]{(\sqrt{15})^3 : (\sqrt{5})^3} = \sqrt[6]{3^{\frac{3}{2}}\cdot 5^{\frac{3}{2}} : 5^{\frac{3}{2}}} = \sqrt[6]{3^{\frac{3}{2}}} = 3^{\frac{3}{12}} = 3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$

g) $\sqrt[3]{2}\cdot\left(\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[6]{12}} + \frac{\sqrt[6]{3}}{3}\right) = \frac{2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{4}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{6}}\cdot 3^{\frac{1}{6}}} + \frac{2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{6}}}{3} = 2^{\frac{1}{3}}\cdot 2\cdot 3^{\frac{1}{6}} + \frac{1}{3}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{6}} = \frac{7}{3}\cdot 2^{\frac{2}{6}}\cdot 3^{\frac{1}{6}} = \frac{7}{3}\sqrt[6]{2^2\cdot 3}$

h) $\sqrt[2]{4} : \left(\frac{\sqrt[2]{20}}{\sqrt[3]{10}} - \frac{2}{3}\sqrt[6]{80}\right) = 2 : \left(\frac{2\cdot 5^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}} - \frac{2}{3}\cdot 2^{\frac{4}{6}}\cdot 5^{\frac{1}{6}}\right) = 2 : \left(2^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{6}} - \frac{2}{3}\cdot 2^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{6}}\right) =$

$= 2 : \left(2^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{6}}\left(1-\frac{1}{3}\cdot 2\right)\right) = 2 : \left(\frac{1}{3}\cdot 2^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{6}}\right) = \frac{6}{2^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{6}}} = \frac{6\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{5}{6}}}{2^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{5}{6}}} = \frac{3}{5}\cdot 2^{\frac{2}{6}}\cdot 5^{\frac{5}{6}} = \frac{3}{5}\cdot\sqrt[6]{2^2\cdot 5^5}$

25. Página 38

a) $\dfrac{4}{\sqrt{7}}=\dfrac{4\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}=\dfrac{4\sqrt{7}}{7}$

b) $\dfrac{-3}{\sqrt{2}}=-\dfrac{3\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

c) $\dfrac{-6}{\sqrt[3]{2}}=-\dfrac{6\cdot\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}}=-3\cdot\sqrt[3]{2^2}$

d) $\dfrac{10}{\sqrt[8]{5^3}}=\dfrac{10\cdot\sqrt[8]{5^5}}{\sqrt[8]{5^3}\cdot\sqrt[8]{5^5}}=2\cdot\sqrt[8]{5^5}$

26. Página 38

a) $\dfrac{-2}{2+\sqrt{6}}=\dfrac{-2}{2+\sqrt{6}}\cdot\dfrac{2-\sqrt{6}}{2-\sqrt{6}}=\dfrac{-2\cdot(2-\sqrt{6})}{-2}=2-\sqrt{6}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{3-5}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{-2}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$

27. Página 38

$$\frac{2}{3+\sqrt[4]{3}}=\frac{2}{3+\sqrt[4]{3}}\cdot\frac{3-\sqrt[4]{3}}{3-\sqrt[4]{3}}=\frac{6-2\sqrt[4]{3}}{9-\sqrt{3}}\cdot\frac{9+\sqrt{3}}{9+\sqrt{3}}=\frac{27+3\sqrt{3}-9\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{3^3}}{39}$$

28. Página 39

a) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

b) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{10}}=\dfrac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{10}}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}=\dfrac{2}{10}\sqrt{30}=\dfrac{1}{5}\sqrt{30}$

c) $\dfrac{5}{-2\sqrt[5]{4}}=-\dfrac{5\sqrt[5]{2^3}}{2\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt[5]{2^3}}=-\dfrac{5\sqrt[5]{2^3}}{4}$

d) $\dfrac{8-\sqrt{7}}{3\sqrt{7}}=\dfrac{(8-\sqrt{7})\cdot\sqrt{7}}{3\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}=\dfrac{8\sqrt{7}-7}{21}$

29. Página 39

a) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{1-2}=-1-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}$

b) $\dfrac{5}{3-\sqrt{5}}=\dfrac{5}{3-\sqrt{5}}\cdot\dfrac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=\dfrac{15-5\sqrt{5}}{4}$

c) $\dfrac{\sqrt{5}}{3-\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3-\sqrt{7}}\cdot\dfrac{3+\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}=\dfrac{3\sqrt{5}+\sqrt{35}}{9-7}=\dfrac{3\sqrt{5}+\sqrt{35}}{2}$

d) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}\cdot\dfrac{4-\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}=\dfrac{5-3\sqrt{2}}{7}$

30. Página 39

a) $\dfrac{5}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{5}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$

b) $\dfrac{-1+3\sqrt{2}}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}=\dfrac{-1+3\sqrt{2}}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{\sqrt{11}-\sqrt{3}}=\dfrac{-\sqrt{11}+\sqrt{3}+3\sqrt{22}-3\sqrt{6}}{8}$

c) $\dfrac{6+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}=\dfrac{6+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{\sqrt{6}-2\sqrt{3}}=\dfrac{-2\sqrt{6}+5\sqrt{3}}{3}$

d) $\dfrac{-\sqrt{10}}{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}=\dfrac{-\sqrt{10}}{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}=\dfrac{-4\sqrt{5}+2\sqrt{15}}{2}=-2\sqrt{5}+\sqrt{15}$

31. Página 39

a) $\dfrac{8}{3\sqrt[4]{8}}=\dfrac{8}{3\sqrt[4]{2^3}}=\dfrac{8\sqrt[4]{2}}{3\sqrt[4]{2^3}\cdot\sqrt[4]{2}}=\dfrac{8\sqrt[4]{2}}{3\cdot 2}=\dfrac{4\sqrt[4]{2}}{3}$

b) $\dfrac{\sqrt{5}-4}{\sqrt{6}}=\dfrac{(\sqrt{5}-4)\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{30}-4\sqrt{6}}{6}$

c) $\dfrac{4}{\sqrt{3}-5\sqrt{7}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}-5\sqrt{7}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}+5\sqrt{7}}{\sqrt{3}+5\sqrt{7}}=\dfrac{4\sqrt{3}+20\sqrt{7}}{3-175}=\dfrac{-\sqrt{3}-5\sqrt{7}}{43}$

d) $\dfrac{-1}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{5}}{-3}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{3}$

32. Página 40

a) $3{,}84\cdot 10^{5}$ km

b) $4{,}308\cdot 10^{9}$ km

c) $1{,}5\cdot 10^{8}$ km^2

d) $9{,}46\cdot 10^{12}$ km

e) $2{,}5\cdot 10^{10}$ años luz

33. Página 40

a) $3\cdot 10^{-10}$ m

b) $2{,}2\cdot 10^{-9}$ m

c) $5\cdot 10^{-11}$ m

d) $1\cdot 10^{-7}$ g

34. Página 40

La masa de un protón, expresada en notación científica es $1{,}672\cdot 10^{-24}$ g.

35. Página 41

a) $\log_7 49 = 2$ porque $7^2 = 49$

b) $\log_5 125 = 3$ porque $5^3 = 125$

c) $\log_3 243 = 5$ porque $3^5 = 243$

d) $\log_2 32 = 5$ porque $2^5 = 32$

e) $\log_2 512 = 9$ porque $2^9 = 512$

f) $\log_{15} 3\,375 = 3$ porque $15^3 = 3\,375$

g) $\log_4 64 = 3$ porque $4^3 = 64$

h) $\log_3 81 = 4$ porque $3^4 = 81$

36. Página 41

a) $\log 10\,000 = 4$

b) $\log 0{,}000001 = \log \frac{1}{1\,000\,000} = -6$

c) $\ln e^3 = 3$

d) $\ln \frac{1}{e^5} = -5$

37. Página 41

$\log_6 0{,}02\widehat{7} = -2$, ya que $6^{-2} = \frac{1}{36} = 0{,}02\widehat{7}$.

38. Página 42

a) $\log 10 + \ln e = 1 + 1 = 2$

b) $\log_5 1 + \log_5 25 = 0 + \log_5 5^2 = 2$

c) $\log_3 1 + \log_2 2 - \log 10 = 0 + 1 - 1 = 0$

d) $\log_{12} 18 + \log_{12} 4 + \log_{12} 2 = \log_{12}(18 \cdot 4 \cdot 2) = \log_{12} 144 = \log_{12} 12^2 = 2$

e) $\log 2 + \log 25 - \log 5 = \log(2 \cdot 25) - \log 5 = \log\left(\frac{50}{5}\right) = \log 10 = 1$

39. Página 42

a) $3\log_2 5 + \log_2 7 = \log_2 5^3 + \log_2 7 = \log_2 (5^3 \cdot 7)$

b) $\log_4 9 - 2\log_4 5 = \log_4 9 - \log_4 5^2 = \log_4\left(\frac{9}{5^2}\right)$

c) $2\log_5 3 + \log_5 10 = \log_5 3^2 + \log_5 10 = \log_5 (3^2 \cdot 10)$

d) $3\log_7 1 + \log_7 6 = 3 \cdot 0 + \log_7 6 = \log_7 6$

40. Página 42

$\log_5 20 = \frac{\log 20}{\log 5} = \frac{1{,}301}{0{,}699} = 1{,}86123$

41. Página 43

a) $\log_x 25 = 2 \rightarrow x^2 = 25 \rightarrow x^2 = 5^2 \rightarrow x = 5$

b) $\log_x 32 = 5 \rightarrow x^5 = 32 \rightarrow x^5 = 2^5 \rightarrow x = 2$

c) $\log_x \sqrt{5} = \frac{1}{2} \rightarrow x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \rightarrow x^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} \rightarrow x = 5$

d) $\log_x \sqrt[3]{6} = \frac{1}{3} \rightarrow x^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{1}{3}} \rightarrow x = 6$

e) $\log_x 25 = \frac{1}{2} \rightarrow x^{\frac{1}{2}} = 25 \rightarrow x^{\frac{1}{2}} = 5^2 \rightarrow x = 5^4$

f) $\log_x 32 = 10 \rightarrow x^{10} = 32 \rightarrow x^{10} = 2^5 \rightarrow x = 2^{\frac{5}{10}} \rightarrow x = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

g) $\log_x \frac{4}{9} = 2 \rightarrow x^2 = \frac{4}{9} \rightarrow x^2 = \frac{2^2}{3^2} \rightarrow x = \frac{2}{3}$

h) $\log_x \frac{1}{125} = 3 \rightarrow x^3 = \frac{1}{125} \rightarrow x^3 = \frac{1}{5^3} \rightarrow x = \frac{1}{5}$

42. Página 43

a) $\log_3 2\,187 = x \rightarrow 3^x = 2\,187 \rightarrow 3^x = 3^7 \rightarrow x = 7$

b) $\log_2 2048 = x \rightarrow 2^x = 2048 \rightarrow x = 11$

c) $\log_5 \frac{1}{5^3} = x \rightarrow 5^x = \frac{1}{5^3} \rightarrow 5^x = 5^{-3} \rightarrow x = -3$

d) $\log_5 0{,}04 = x \rightarrow 5^x = 0{,}04 \rightarrow 5^x = 5^{-2} \rightarrow x = -2$

e) $\log_8 16 = x \rightarrow 8^x = 16 \rightarrow 2^{3\cdot x} = 2^4 \rightarrow 3\cdot x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{3}$

f) $\log_9 \frac{1}{3^4} = x \rightarrow 9^x = \frac{1}{3^4} \rightarrow 3^{2\cdot x} = 3^{-4} \rightarrow 2\cdot x = -4 \rightarrow x = -2$

43. Página 43

a) $\log_2 x = 4 \rightarrow x = 2^4 \rightarrow x = 16$

b) $\log_5 x = 2 \rightarrow x = 5^2 \rightarrow x = 25$

c) $\log_6 x = 1 \rightarrow x = 6$

d) $\log_4 x = 0 \rightarrow x = 4^0 \rightarrow x = 1$

e) $\log_3 x = -5 \rightarrow x = 3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$

f) $\log_2 x = -3 \rightarrow x = 2^{-3} \rightarrow x = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

g) $\log_8 x = \frac{2}{3} \rightarrow x = 8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 4$

h) $\log_2 x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

i) $\log_{\frac{1}{5}} x = -1 \rightarrow x = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5$

j) $\log_{\frac{2}{3}} x = 3 \rightarrow x = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

44. Página 43

a) $\log x + \log 2 = \log 20 \rightarrow \log(2\cdot x) = \log 20 \rightarrow 2\cdot x = 20 \rightarrow x = 10$

b) $\log x + \log(2x) = \log 50 \rightarrow \log(2\cdot x^2) = \log 50 \rightarrow 2\cdot x^2 = 50 \rightarrow x^2 = 25 \rightarrow x = 5$

c) $\log 2x - 2\log 3 = \log 2 \rightarrow \log\left(\frac{2x}{3^2}\right) = \log 2 \rightarrow \frac{2x}{3^2} = 2 \rightarrow x = 9$

d) $\log_2 x^2 - \log_2 x = 3 \rightarrow \log_2 \rightarrow \log_2\left(\frac{x^2}{x}\right) = 3 \rightarrow \log_2 x = 3 \rightarrow x = 2^3 = 8$

ACTIVIDADES FINALES

45. Página 44

a) $(-3)^3\cdot 7^3 = (-3\cdot 7)^3 = (-21)^3$

b) $5^{-7}\cdot 3^{-7} = (5\cdot 3)^{-7} = 15^{-7}$

c) $17^2\cdot 17^{-3}\cdot 17^{-5} = 17^{2-3-5} = 17^{-6}$

d) $(-6)^{-4}\cdot(-6)^5\cdot(-6)^{-3} = (-6)^{-4+5-3} = (-6)^{-2}$

46. Página 44

a) $\frac{1}{2^5} = 2^{-5}$

b) $-\frac{1}{3^7} = -3^{-7}$

c) $\frac{5}{5^4} = 5^{1-4} = 5^{-3}$

d) $\frac{6}{6^2} = 6^{1-2} = 6^{-1}$

47. Página 44

a) $(-2)^3 \cdot 2^{-4} \cdot (-2)^{-1} = -2^3 \cdot 2^{-4} \cdot (-2^{-1}) = 2^{3-4-1} = 2^{-2}$

b) $(-5)^4 \cdot 5^5 \cdot 5^{-3} = 5^4 \cdot 5^5 \cdot 5^{-3} = 5^{4+5-3} = 5^6$

c) $7^{-3} \cdot 7^{-2} \cdot (-7)^4 = 7^{-3} \cdot 7^{-2} \cdot 7^4 = 7^{-3-2+4} = 7^{-1}$

d) $(-6)^2 : 6^{-2} \cdot (-6)^6 = 6^2 \cdot 6^2 \cdot 6^6 = 6^{2+2+6} = 6^{10}$

48. Página 44

a) $54^2 : 2^2 : 3^2 = (2 \cdot 3^3)^2 : 2^2 : 3^2 = 2^2 \cdot 3^6 : 2^2 : 3^2 = 2^{2-2} \cdot 3^{6-2} = 3^4$

b) $6^{-5} : 2^{-5} \cdot 3^{-1} = (2 \cdot 3)^{-5} : 2^{-5} \cdot 3^{-1} = 2^{-5} \cdot 3^{-5} : 2^{-5} \cdot 3^{-1} = 2^{-5+5} \cdot 3^{-5-1} = 3^{-6}$

c) $5^{-4} \cdot 6^{-4} : 30^{-1} = 30^{-4} : 30^{-1} = 30^{-4+1} = 30^{-3}$

d) $(-12)^{-5} \cdot (-12)^4 : 3^{-1} = -(3 \cdot 2^2)^{-5} \cdot (3 \cdot 2^2)^4 : 3^{-1} = -3^{-5} \cdot 2^{-10} \cdot 3^4 \cdot 2^8 : 3^{-1} = -3^{-5+4+1} \cdot 2^{-10+8} = -2^{-2}$

49. Página 44

a) $\left[9^5 : (-3)^5\right]^{-1} = \left[-\left(\frac{9}{3}\right)^5\right]^{-1} = -\left(\frac{3^2}{3}\right)^{-1} = -3^{-1}$

b) $(6^{-3} \cdot 8^{-3})^2 = \left[(6 \cdot 8)^{-3}\right]^2 = (2 \cdot 3 \cdot 2^3)^{-6} = 3^{-6} \cdot 2^{-24}$

c) $\left[60^4 : (-4)^4\right]^{-3} = \left[\left(\frac{60}{4}\right)^4\right]^{-3} = 15^{-12} = 3^{-12} \cdot 5^{-12}$

d) $\left[45^{-2} : (-3)^{-2}\right]^4 = \left[\left(\frac{45}{3}\right)^{-2}\right]^4 = 15^{-8} = 3^{-8} \cdot 5^{-8}$

50. Página 44

a) $\left(\frac{4}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{-4} : \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{-4} : \left(\frac{4}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{5}\right)^{5-4+2} = \left(\frac{4}{5}\right)^3$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} : \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} : \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3+2-5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = 2^6$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-7} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^7 = \left(\frac{3}{4}\right)^{2+4+7} = \left(\frac{3}{4}\right)^{13}$

d) $\left(\frac{5}{6}\right)^6 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{-2} : \left(\frac{5}{6}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{6}\right)^6 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 : \left(\frac{5}{6}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{6}\right)^{6+2+4} = \left(\frac{5}{6}\right)^{12}$

e) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-1} : \left(\frac{1}{7}\right)^{-5} : \left(\frac{1}{7}\right)^9 = \left(\frac{1}{7}\right)^{-1+5-9} = \left(\frac{1}{7}\right)^{-5} = 7^5$

f) $\left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \left(\frac{3}{5}\right)^{3-5+4} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$

51. **Página 44**

a) $\left(\frac{5}{12}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{60}\right)^2 = \left(\frac{5}{2^2 \cdot 3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{2^2 \cdot 3 \cdot 5}\right)^2 = \frac{5^3 \cdot 2^2}{2^6 \cdot 3^3 \cdot 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2} = \frac{5}{2^8 \cdot 3^5}$

b) $\left(\frac{16}{9}\right)^{-6} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{-2} = \left(\frac{3^2}{2^4}\right)^6 \cdot \left(\frac{2^3}{3^3}\right)^2 = \frac{3^{12} \cdot 2^6}{2^{24} \cdot 3^6} = \frac{3^6}{2^{18}}$

c) $\left(\frac{10}{7}\right)^4 : \left(\frac{14}{40}\right)^{-5} = \left(\frac{2 \cdot 5}{7}\right)^4 : \left(\frac{2^3 \cdot 5}{2 \cdot 7}\right)^5 = \frac{2^4 \cdot 5^4 \cdot 2^5 \cdot 7^5}{7^4 \cdot 2^{15} \cdot 5^5} = \frac{7}{2^6 \cdot 5}$

d) $\left(\frac{16}{25}\right)^{-2} : \left(\frac{125}{64}\right)^4 = \left(\frac{5^2}{2^4}\right)^2 : \left(\frac{5^3}{2^6}\right)^4 = \frac{5^4 \cdot 2^{24}}{2^8 \cdot 5^{12}} = \frac{2^{16}}{5^8}$

e) $\left(\frac{32}{15}\right)^3 \cdot \left(\frac{20}{75}\right)^{-2} = \left(\frac{2^5}{3 \cdot 5}\right)^3 \cdot \left(\frac{5^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 5}\right)^2 = \frac{2^{15} \cdot 5^4 \cdot 3^2}{3^3 \cdot 5^3 \cdot 2^4 \cdot 5^2} = \frac{2^{11}}{3 \cdot 5}$

f) $\left(\frac{42}{25}\right)^{-3} : \left(\frac{49}{125}\right)^{-1} = \left(\frac{5^2}{2 \cdot 3 \cdot 7}\right)^3 : \left(\frac{5^3}{7^2}\right)^1 = \frac{5^6 \cdot 7^2}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^3 \cdot 5^3} = \frac{5^3}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 7}$

52. **Página 44**

a) $[(-3) \cdot 8]^{-3} = (-24)^{-3} = -\frac{1}{24^3}$ $\qquad [(-3) \cdot 8]^{-3} = \frac{1}{[(-3) \cdot 8]^3} = -\frac{1}{24^3}$

b) $[4 : (-2)^3]^{-4} = (-2^{-1})^{-4} = 2^4$ $\qquad [4 : (-2)^3]^{-4} = \frac{1}{[4 : (-2)^3]^4} = \frac{1}{2^{-4}} = 2^4$

c) $[(-10)^2 : (-5)]^{-5} = (-20)^{-5} = -\frac{1}{20^5}$ $\qquad [(-10)^2 : (-5)]^{-5} = \frac{1}{[(-10)^2 : (-5)]^5} = -\frac{1}{20^5}$

d) $[9^2 : (-3)^5]^{-1} = (-3^{-1})^{-1} = -3$ $\qquad [9^2 : (-3)^5]^{-1} = \frac{1}{9^2 : (-3)^5} = -\frac{1}{3^{-1}} = 3$

e) $(25^{-1} \cdot 10^3)^{-2} = 40^{-2} = \frac{1}{40^2}$ $\qquad (25^{-1} \cdot 10^3)^{-2} = \frac{1}{(25^{-1} \cdot 10^3)^2} = \frac{1}{40^2}$

f) $(36^{-2} \cdot 2^5)^{-4} = \left(\frac{2}{81}\right)^{-4} = \frac{81^4}{2^4}$ $\qquad (36^{-2} \cdot 2^5)^{-4} = \frac{1}{(36^{-2} \cdot 2^5)^4} = \frac{81^4}{2^4}$

53. **Página 44**

a) $\frac{1}{5} : 5^4 : \frac{1}{5^3} = \frac{5^3}{5^5} = 5^{-2}$

b) $\left(\frac{-1}{6}\right)^4 \cdot 6^{-5} : \frac{1}{6^{-7}} = \frac{6^{-5} \cdot 6^{-7}}{6^4} = 6^{-16}$

c) $-2^{-5} \cdot \frac{1}{2^7} \cdot 2^{-2} = -\frac{2^{-5} \cdot 2^{-2}}{2^7} = -2^{-14}$

d) $(-3)^8 : \left(\frac{-1}{3}\right)^4 : 3^5 = \frac{3^8 \cdot 3^4}{3^5} = 3^7$

54. **Página 44**

a) $\frac{(5^{-2} : 5^4) \cdot 5^8}{5^{-3}} = \frac{5^{-6} \cdot 5^8}{5^{-3}} = 5^5$

b) $\frac{(2^6 \cdot 2^{-5}) : 2^{-2}}{2^{-4} : 2^{-9}} = \frac{2 : 2^{-2}}{2^5} = 2^{-2}$

c) $\frac{3^4 : (3^{-6} : 3^5)}{3^{-2} \cdot 3^7} = \frac{3^4 : 3^{-11}}{3^5} = 3^{10}$

d) $\frac{(7^4 \cdot 7^{-2}) : (7^{-3} \cdot 7^5)}{7^8 \cdot 7^2} = \frac{7^2 : 7^2}{7^{10}} = 7^{-10}$

55. Página 44

a) $\dfrac{3^{-4}\cdot 9^2}{27^{-5}}=\dfrac{3^{-4}\cdot(3^2)^2}{(3^3)^{-5}}=\dfrac{3^{-4}\cdot 3^4}{3^{-15}}=3^{15}$

b) $\dfrac{5^{-2}:5^{-3}}{25^6}=\dfrac{5}{(5^2)^6}=\dfrac{5}{5^{12}}=5^{-11}$

c) $\dfrac{7^4\cdot 7^{-6}}{49^3}=\dfrac{7^{-2}}{(7^2)^3}=\dfrac{7^{-2}}{7^6}=7^{-8}$

d) $\dfrac{4^9:2^{-2}}{8^{-7}}=\dfrac{(2^2)^9:2^{-2}}{(2^3)^{-7}}=\dfrac{2^{18}:2^{-2}}{2^{-21}}=2^{41}$

56. Página 44

a) $\dfrac{3^6\cdot 2^8\cdot 5^3}{9^3\cdot 25^2\cdot 4^4}=\dfrac{3^6\cdot 2^8\cdot 5^3}{3^6\cdot 5^4\cdot 2^8}=5^{-1}$

b) $\dfrac{3^{-4}\cdot 16\cdot 9^{-1}}{8^2\cdot 3^{-5}\cdot 2^{-3}}=\dfrac{3^{-4}\cdot 2^4\cdot 3^{-2}}{2^6\cdot 3^{-5}\cdot 2^{-3}}=2\cdot 3^{-1}$

c) $\dfrac{(-5)^3\cdot(-8)^4\cdot 9^{-2}}{(-3)^{-4}\cdot 2^7\cdot 25^5}=-\dfrac{5^3\cdot 2^{12}\cdot 3^{-4}}{3^{-4}\cdot 2^7\cdot 5^{10}}=-5^{-7}\cdot 2^5$

d) $\dfrac{32^{-1}\cdot 36^{-2}\cdot 18^{-2}}{8^{-5}\cdot 6^{-3}\cdot 9^4}=\dfrac{2^{-5}\cdot 2^{-2}\cdot 3^{-4}\cdot 2^{-4}\cdot 3^{-4}}{2^{-15}\cdot 2^{-3}\cdot 3^{-3}\cdot 3^8}=2^7\cdot 3^{-13}$

57. Página 44

a) $\left(\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\dfrac{-7}{2}\right)^{-1}+2:\left(\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{6}\right)^{-2}=\left(\dfrac{15}{14}\right)^2\cdot\left(\dfrac{-2}{7}\right)+2:\left(\dfrac{3}{7}\right)^2=-\dfrac{5^2\cdot 3^2}{7^3\cdot 2}+\dfrac{2\cdot 7^2}{3^2}=\dfrac{65\,203}{6\,174}$

b) $\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{4}\right)^{-2}-\left(\dfrac{1}{3}-1\right)^{-1}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2}-\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-1}=16+\dfrac{3}{2}=\dfrac{35}{2}$

c) $\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{3}{10}\right)^{-1}:\left(1-\dfrac{2}{5}\right)-\left(\dfrac{-3}{2}\right)^{-2}=\left(\dfrac{-1}{10}\right)^{-1}:\dfrac{3}{5}-\dfrac{2^2}{3^2}=-\dfrac{50}{3}-\dfrac{4}{9}=-\dfrac{154}{9}$

58. Página 44

a) Falsa $\longrightarrow \dfrac{a^3\cdot b^{-4}\cdot c^4}{a^{-3}\cdot b^4\cdot c^{-4}}=a^6\cdot b^{-8}\cdot c^8\neq 1$

b) Falsa $\longrightarrow \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}\cdot 3^{-3}\cdot\left(\dfrac{-1}{3}\right)^5=-\dfrac{3^2}{3^3\cdot 3^5}=-3^{-6}\neq 1$

c) Falsa $\longrightarrow \dfrac{3^{-3}\cdot 2^{-4}\cdot 5^{-2}}{3^{-4}\cdot 2^{-5}\cdot 5^{-3}}=3\cdot 2\cdot 5\neq\dfrac{1}{3\cdot 2\cdot 5}$

d) Verdadera $\longrightarrow \left[\left(\dfrac{-2}{3}\right)^{-2}\right]^{-3}=\left(\dfrac{-2}{3}\right)^6=\left(\dfrac{2}{3}\right)^6=\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\right]^3$

59. Página 44

a) $\dfrac{14^{-3}:7^{-3}}{2^{-2}}=\dfrac{2^{-3}\cdot 7^{-3}:7^{-3}}{2^{-2}}=2^{-1}$

b) $\dfrac{9^4:3^4}{3^{-5}}=\dfrac{3^8:3^4}{3^{-5}}=3^9$

c) $\dfrac{8^2:(-4)^2}{2^4}=\dfrac{2^6:2^4}{2^4}=2^{-2}$

d) $\dfrac{30^5:(-6)^5}{25^{-2}}=-\dfrac{6^5\cdot 5^5:6^5}{5^{-4}}=-5^9$

60. Página 44

a) $\frac{14^{-3}:2^3\cdot 3^4}{21^{-5}}=\frac{2^{-3}\cdot 7^{-3}\cdot 3^4}{7^{-5}\cdot 3^{-5}\cdot 2^3}=\frac{7^2\cdot 3^9}{2^6}$

b) $\frac{32^{-1}:18^2}{9^{-3}\cdot 16^{-4}}=\frac{2^{-5}}{2^2\cdot 3^4\cdot 3^{-6}\cdot 2^{-16}}=2^9\cdot 3^2$

61. Página 45

a) $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^6\right]^{-1}=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{13}\right]^{-1}=\left(\frac{3}{2}\right)^{13}$

b) $\left[\left(\frac{-1}{4}\right)^{-4}:4^3:\left(\frac{1}{4}\right)^{-5}\right]^{-2}=(4^{-4})^{-2}=4^8$

c) $\left[2^{-2}:\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^7=(2^0)^7=1$

d) $\left[\left(\frac{5}{6}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^5\right]^3=\left[\left(\frac{6}{5}\right)^9\right]^3=\left(\frac{6}{5}\right)^{27}$

e) $\left[\left(\frac{25}{2}\right)^{-2}:\left(\frac{25}{2}\right)^{-6}\cdot\left(\frac{2}{25}\right)^8\right]^2=\left[\left(\frac{2}{25}\right)^4\right]^2=\left(\frac{2}{25}\right)^8$

f) $\left[9^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2:2\right]^{-2}=\left(\frac{3^2}{2}\right)^{-2}=\left(\frac{2}{9}\right)^2$

62. Página 45

a) $\frac{21^4\cdot 2\cdot 196^{-2}\cdot 49^{-1}}{7^{-5}\cdot 3\cdot 14^{-2}\cdot 63\cdot 21^2}=\frac{3^4\cdot 7^4\cdot 2\cdot 7^5\cdot 2^2\cdot 7^2}{7^4\cdot 2^4\cdot 7^2\cdot 3\cdot 3^2\cdot 7\cdot 7^2\cdot 3^2}=\frac{2^3\cdot 3^4\cdot 7^{11}}{2^4\cdot 3^5\cdot 7^9}=\frac{7^2}{2\cdot 3}$

b) $\frac{25^2\cdot 15^{-2}:125^3}{50^4\cdot 625^{-2}}=\frac{25^2\cdot 15^{-2}}{125^3\cdot 50^4\cdot 625^{-5}}=\frac{25^2\cdot 625^5}{125^3\cdot 50^4\cdot 15^2}=\frac{5^4\cdot 5^{20}}{5^9\cdot 5^8\cdot 2^4\cdot 3^2\cdot 5^2}=\frac{5^5}{2^4\cdot 3^2}$

63. Página 45

a) $\sqrt[3]{-125}$ $\left.\begin{matrix}a<0\\ n \text{ impar}\end{matrix}\right\}\rightarrow$ Tiene una raíz negativa: $\sqrt[3]{-125}=-5$

b) $\sqrt[4]{81}$ $\left.\begin{matrix}a>0\\ n \text{ par}\end{matrix}\right\}\rightarrow$ Tiene dos raíces, una positiva y su opuesta: $\sqrt[4]{81}=\pm 3$

c) $\sqrt[4]{-16}$ $\left.\begin{matrix}a<0\\ n \text{ par}\end{matrix}\right\}\rightarrow$ No tiene raíz real.

d) $\sqrt[5]{1024}$ $\left.\begin{matrix}a>0\\ n \text{ impar}\end{matrix}\right\}\rightarrow$ Tiene una raíz positiva: $\sqrt[5]{1024}=4$

64. Página 45

a) $\sqrt[17]{2489}\rightarrow$ $\left.\begin{matrix}\text{Radicando: } 2489>0\\ \text{Índice: 17 (impar)}\end{matrix}\right\}\rightarrow$ Tiene una raíz positiva.

b) $\sqrt[22]{356}\rightarrow$ $\left.\begin{matrix}\text{Radicando: } 356>0\\ \text{Índice: 22 (par)}\end{matrix}\right\}\rightarrow$ Tiene dos raíces, una positiva y su opuesta.

c) $\sqrt[15]{-1458}\rightarrow$ $\left.\begin{matrix}\text{Radicando: } -1458<0\\ \text{Índice: 15 (impar)}\end{matrix}\right\}\rightarrow$ Tiene una raíz negativa.

d) $\sqrt[98]{-3566}\rightarrow$ $\left.\begin{matrix}\text{Radicando: } -3566<0\\ \text{Índice: 98 (par)}\end{matrix}\right\}\rightarrow$ No tiene ninguna raíz real.

65. Página 45

a) $4^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^{-2}}$ b) $3^{\frac{5}{2}} = \sqrt{3^5}$ c) $(-2)^{\frac{9}{4}} = \sqrt[4]{(-2)^9}$ d) $(-7)^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{(-7)^7}$

66. Página 45

a) $\sqrt[5]{2^4} = 2^{\frac{4}{5}}$

c) $\sqrt{7^{-3}} = 7^{-\frac{3}{2}}$

b) $\sqrt[7]{(-3)^2} = 3^{\frac{2}{7}}$

d) $\sqrt[6]{(-5)^5} = (-5)^{\frac{5}{6}}$

67. Página 45

Respuesta abierta, por ejemplo:

a) $\sqrt[3]{5^4} = 5^{\frac{4}{3}} \longrightarrow \sqrt[6]{5^8}$ y $\sqrt[9]{5^{12}}$, ya que $5^{\frac{4}{3}} = 5^{\frac{8}{6}}$ y $5^{\frac{4}{3}} = 5^{\frac{12}{9}}$.

b) $\sqrt[10]{3^{12}} = 3^{\frac{12}{10}} \longrightarrow \sqrt[5]{3^6}$ y $\sqrt[20]{3^{24}}$, ya que $3^{\frac{12}{10}} = 3^{\frac{6}{5}}$ y $3^{\frac{12}{10}} = 3^{\frac{24}{20}}$.

c) $\sqrt[4]{x^7} = x^{\frac{7}{4}} \longrightarrow \sqrt[8]{x^{14}}$ y $\sqrt[12]{x^{21}}$, ya que $x^{\frac{7}{4}} = x^{\frac{14}{8}}$ y $x^{\frac{7}{4}} = x^{\frac{21}{12}}$.

d) $\sqrt[9]{y^4} = y^{\frac{4}{9}} \longrightarrow \sqrt[18]{y^8}$ y $\sqrt[27]{y^{12}}$, ya que $y^{\frac{4}{9}} = y^{\frac{8}{18}}$ y $y^{\frac{4}{9}} = 5^{\frac{12}{27}}$.

68. Página 45

a) $\left.\begin{array}{l} \sqrt[3]{-27} = (-27)^{\frac{1}{3}} \\ \sqrt[6]{(-27)^2} = (-27)^{\frac{2}{6}} \end{array}\right\} \xrightarrow{\frac{1}{3}=\frac{2}{6}}$ Son equivalentes. $\sqrt[3]{-27} = -3$ $\sqrt[6]{(-27)^2} = \pm 3$

b) $\left.\begin{array}{l} \sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{25^2} = 25^{\frac{2}{4}} \\ \sqrt[8]{25^4} = 25^{\frac{4}{8}} \end{array}\right\} \xrightarrow{\frac{2}{4}=\frac{4}{8}}$ Son equivalentes. $\sqrt[4]{625} = \pm 5$ $\sqrt[8]{25^4} = \pm 5$

c) $\left.\begin{array}{l} \sqrt[3]{-1000} = \sqrt[3]{(-10)^3} = -10 \\ \sqrt{(-100)^2} = \sqrt{(-2^2 \cdot 5^2)^2} = (-10)^2 \end{array}\right\} \xrightarrow{1 \neq 2}$ No son equivalentes. $\sqrt[3]{-1000} = -10$ $\sqrt{(-100)^2} = \pm 100$

d) $\left.\begin{array}{l} \sqrt[3]{16} = 2^{\frac{4}{3}} \\ \sqrt[6]{(-2)^8} = 2^{\frac{8}{6}} = 2^{\frac{4}{3}} \end{array}\right\} \xrightarrow{\frac{4}{3}=\frac{4}{3}}$ Son equivalentes. $\sqrt[3]{16} = 2^{\frac{4}{3}}$ $\sqrt[6]{(-2)^8} = \pm 2^{\frac{4}{3}} \longrightarrow$ No tienen soluciones enteras.

69. Página 45

a) $\sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 5^2} = 5\sqrt{3}$

c) $\sqrt{540} = \sqrt{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5} = 6\sqrt{15}$

b) $\sqrt{175} = \sqrt{5^2 \cdot 7} = 5\sqrt{7}$

d) $\sqrt{352} = \sqrt{2^5 \cdot 11} = 4\sqrt{22}$

70. Página 45

a) $\sqrt{8000} = \sqrt{2^6 \cdot 5^3} = 2^3 \cdot 5\sqrt{5}$

c) $\sqrt[3]{200} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5^2} = 2\sqrt[3]{5^2}$

b) $\sqrt{1183} = \sqrt{7 \cdot 13^2} = 13\sqrt{7}$

d) $\sqrt[3]{6615} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 5 \cdot 7^2} = 3\sqrt[3]{5 \cdot 7^2}$

71. Página 45

a) $\sqrt[3]{a^8 \cdot b^3 \cdot c^5} = a^2 \cdot b \cdot c\sqrt[3]{a^2 \cdot c^2}$

b) $\sqrt[5]{a^{17} \cdot b^{14} \cdot c^{25}} = a^3 \cdot b^2 \cdot c^5\sqrt[5]{a^2 \cdot b^4}$

c) $\sqrt[10]{a^{27} \cdot b^{14} \cdot c^{33}} = a^2 \cdot b \cdot c^3\sqrt[10]{a^7 \cdot b^4 \cdot c^3}$

d) $\sqrt[8]{a^{42} \cdot b^{25} \cdot c^{18}} = a^5 \cdot b^3 \cdot c^2\sqrt[8]{a^2 \cdot b \cdot c^2}$

72. Página 45

a) $5^2 \cdot 3^3\sqrt[3]{7^2} = \sqrt[3]{7^2 \cdot 5^6 \cdot 3^9}$

b) $3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \sqrt[5]{2^{12}} = \sqrt[5]{\frac{2^{12} \cdot 3^5}{2^{15}}} = \sqrt[5]{\frac{3^5}{2^3}}$

c) $\left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot 25^2\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^6} = \sqrt[4]{\frac{3^8 \cdot 5^{16}}{5^8 \cdot 3^6}} = \sqrt[4]{3^2 \cdot 5^8}$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \frac{2}{5}\sqrt[4]{\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}} = \sqrt[4]{\frac{2^{-8} \cdot 2^4 \cdot 3^{-3}}{3^{-8} \cdot 5^4 \cdot 5^{-3}}} = \sqrt[4]{\frac{3^5}{2^4 \cdot 5}}$

73. Página 45

a) $16\sqrt{2} + \sqrt{2} - \frac{8}{7}\sqrt{2} = \frac{112 + 7 - 8}{7}\sqrt{2} = \frac{111}{7}\sqrt{2}$

b) $5\sqrt{2} + \frac{7}{2}\sqrt{2} - \sqrt{2} = \frac{10 + 7 - 2}{2}\sqrt{2} = \frac{15}{2}\sqrt{2}$

c) $\frac{6}{5}\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 9\sqrt{3} = \frac{6 - 20 - 45}{5}\sqrt{3} = -\frac{59}{5}\sqrt{3}$

d) $-3\sqrt{5} + \frac{9}{4}\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = \frac{-12 + 9 - 24}{4}\sqrt{5} = -\frac{27}{4}\sqrt{5}$

74. Página 45

a) $3\sqrt{12} + 5\sqrt{27} - 3\sqrt{243} - \sqrt{75} = 3\sqrt{2^2 \cdot 3} + 5\sqrt{3^3} - 3\sqrt{3^5} - \sqrt{3 \cdot 5^2} =$
$= 6\sqrt{3} + 15\sqrt{3} - 27\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = -11\sqrt{3}$

b) $-8\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{16} + 9\sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{54} = -8\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{2^4} + 9\sqrt[3]{2^7} - \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} =$
$= -8\sqrt[3]{2} + 12\sqrt[3]{2} + 36\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} = 37\sqrt[3]{2}$

c) $-\sqrt{8} + 5\sqrt{50} - \frac{4}{5}\sqrt{18} + \sqrt{98} = -\sqrt{2^3} + 5\sqrt{2 \cdot 5^2} - \frac{4}{5}\sqrt{2 \cdot 3^2} + \sqrt{2 \cdot 7^2} =$
$= -2\sqrt{2} + 25\sqrt{2} - \frac{12}{5}\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = \frac{138}{5}\sqrt{2}$

d) $14\sqrt[4]{48} + 3\sqrt[4]{80} - \sqrt[4]{243} - 9\sqrt[4]{5} = 14\sqrt[4]{2^4 \cdot 3} + 3\sqrt[4]{2^4 \cdot 5} - \sqrt[4]{3^5} - 9\sqrt[4]{5} =$
$= 28\sqrt[4]{3} + 6\sqrt[4]{5} - 3\sqrt[4]{3} - 9\sqrt[4]{5} = 25\sqrt[4]{3} - 3\sqrt[4]{5}$

75. Página 45

a) $\sqrt[4]{16} = \pm 2$

b) $\sqrt[3]{125} = 5$

c) $\sqrt[5]{(3)^5} = 3$

76. Página 46

a) $\sqrt[7]{256}=2\sqrt[7]{2}$ b) $\sqrt[5]{729}=3\sqrt[5]{3}$ c) $\sqrt[4]{3\,125}=5\sqrt[4]{5}$

77. Página 46

a) $3\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{5})=3\sqrt{2}+3\sqrt{5}$

b) $-6\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{7})=-6\sqrt{3}-6\sqrt{7}$

c) $(\sqrt{7}+\sqrt{5})\cdot(-5)=-5\sqrt{7}-5\sqrt{5}$

d) $(\sqrt{6}+\sqrt{13})\cdot 2=2\sqrt{6}+2\sqrt{13}$

78. Página 46

$25^{\frac{3}{4}}=5^{\frac{6}{4}}\longrightarrow D$ $16^{\frac{5}{2}}=4^{\frac{10}{2}}\longrightarrow B$ $32^{-3}=\left(\frac{1}{2^3}\right)^5\longrightarrow B$ $\left(\frac{1}{27}\right)^2=3^{-6}\longrightarrow D$

79. Página 46

a) $4\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{11})=4\cdot 3+4\sqrt{3}\sqrt{11}=12+4\sqrt{33}$

b) $(\sqrt{2}+\sqrt{5})\cdot 9\sqrt{5}=9\sqrt{2}\sqrt{5}+9\cdot 5=9\sqrt{10}+45$

c) $-\sqrt{2}\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})=-\sqrt{2}\sqrt{6}-2=-\sqrt{12}-2=-2\sqrt{3}-2$

d) $(\sqrt{13}+\sqrt{3})\cdot(-\sqrt{3})=-\sqrt{13}\sqrt{3}-3=-\sqrt{39}-3$

80. Página 46

a) $(5\sqrt{2}+\sqrt{3})\cdot(3\sqrt{3}-\sqrt{2})=15\sqrt{6}-10+9-\sqrt{6}=14\sqrt{6}-1$

b) $(-\sqrt{5}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{6}+2\sqrt{5})=-\sqrt{30}-10-2\sqrt{3}-2\sqrt{10}$

c) $(6\sqrt{7}+\sqrt{11})\cdot(\sqrt{11}+5\sqrt{2})=6\sqrt{77}+30\sqrt{14}+11+5\sqrt{22}$

d) $(-3\sqrt{10}-\sqrt{5})\cdot(7\sqrt{5}-\sqrt{10})=-105\sqrt{2}+30-35+5\sqrt{2}=-100\sqrt{2}-5$

81. Página 46

a) $(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2=2+2\sqrt{10}+5=7+2\sqrt{10}$

b) $(3\sqrt{3}-\sqrt{7})^2=27-6\sqrt{21}+7=34-6\sqrt{21}$

c) $(2\sqrt{6}-8\sqrt{10})^2=24-32\sqrt{60}+640=664-64\sqrt{15}$

d) $(\sqrt{11}+5\sqrt{6})^2=11+10\sqrt{66}+150=161+10\sqrt{66}$

82. Página 46

a) $(5\sqrt{3}+\sqrt{6})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{6})^2=75+30\sqrt{2}+6+2-4\sqrt{3}+6=30\sqrt{2}-4\sqrt{3}+89$

b) $(-\sqrt{3}-\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{6}+2-12-4\sqrt{6}-2=-2\sqrt{6}-9$

c) $(3\sqrt{5}-\sqrt{10})^2-(\sqrt{10}+\sqrt{2})^2=45-30\sqrt{2}+10-10-4\sqrt{5}-2=-30\sqrt{2}-4\sqrt{5}+43$

d) $(\sqrt{7}+5\sqrt{2})^2+(4\sqrt{2}-\sqrt{7})^2=7+10\sqrt{14}+50+32-8\sqrt{14}+7=2\sqrt{14}+96$

83. Página 46

a) $\sqrt{12}:\sqrt[4]{\sqrt{2}}=\dfrac{3^{\frac{1}{2}}\cdot 2}{2^{\frac{1}{8}}}=3^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{7}{8}}$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{4}}:\sqrt{\sqrt{3}}=\dfrac{2^{\frac{2}{6}}}{3^{\frac{1}{4}}}=2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{-\frac{1}{4}}$

c) $\sqrt{5}\cdot\sqrt[5]{\sqrt{2}}=5^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{10}}$

d) $\sqrt[6]{\sqrt{8}}:\sqrt{2}=\dfrac{2^{\frac{3}{12}}}{2^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{2^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{2}}}=2^{-\frac{1}{4}}$

84. Página 46

$$\sqrt[6]{576}-\frac{\sqrt[3]{3000}}{\sqrt{400}}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[6]{1024}+2\sqrt[3]{\sqrt{6561}}=2\sqrt[6]{3^2}-\frac{10\sqrt[3]{3}}{20}+3\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{6}\cdot 2\sqrt[6]{2^4}+6\sqrt[3]{3}=\frac{13}{2}\sqrt[3]{3}$$

85. Página 46

a) $\sqrt{1+\sqrt{3+\sqrt{30+\sqrt{16}+\sqrt{4}}}}=\sqrt{1+\sqrt{3+\sqrt{30+6}}}=\sqrt{1+\sqrt{3+6}}=\sqrt{1+3}=2$

b) $\sqrt{\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{400+\sqrt{625}+10\sqrt{400}}}}-\dfrac{1}{25}}=\sqrt{\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{400+25+200}}}-\dfrac{1}{25}}=\sqrt{\sqrt{\dfrac{1}{25}}-\dfrac{1}{25}}=\sqrt{\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{25}}=\sqrt{\dfrac{4}{25}}=\dfrac{2}{5}$

87. Página 46

a) $\dfrac{7^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{35}\cdot 15^{-5}}{21^4\sqrt{7^{-1}}}=\dfrac{7^{\frac{3}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}\cdot 7^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{-5}\cdot 5^{-5}}{3^4\cdot 7^4\cdot 7^{-\frac{1}{2}}}=3^{-9}\cdot 5^{\frac{-9}{2}}\cdot 7^{\frac{-3}{2}}$

b) $\dfrac{12^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[3]{16}\cdot(\sqrt{18})^{-5}}{\sqrt[3]{96^2}\cdot 27^{-2}}=\dfrac{2^3\cdot 3^{\frac{3}{2}}\cdot 2^{\frac{4}{3}}\cdot 2^{-\frac{5}{2}}\cdot 3^{-\frac{10}{2}}}{2^{\frac{10}{3}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{-6}}=2^{-\frac{9}{6}}\cdot 3^{\frac{11}{6}}=2^{-\frac{3}{2}}\cdot 3^{\frac{11}{6}}$

c) $\dfrac{\sqrt[5]{10}\cdot 15^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[4]{30^3}}{(\sqrt{20})^{-4}\cdot 27^{-2}}=\dfrac{2^{\frac{1}{5}}\cdot 5^{\frac{1}{5}}\cdot 3^{\frac{3}{2}}\cdot 5^{\frac{3}{2}}\cdot 2^{\frac{3}{4}}\cdot 3^{\frac{3}{4}}\cdot 5^{\frac{3}{4}}}{2^{-\frac{8}{2}}\cdot 5^{-\frac{4}{2}}\cdot 3^{-6}}=2^{\frac{99}{20}}\cdot 5^{\frac{89}{20}}\cdot 3^{\frac{33}{4}}$

d) $\dfrac{(\sqrt{14})^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[3]{98^{-2}}\cdot\sqrt{7^3}}{16^{-\frac{6}{5}}\cdot\sqrt[5]{14^2}}=\dfrac{2^{\frac{3}{4}}\cdot 7^{\frac{3}{4}}\cdot 2^{-\frac{2}{3}}\cdot 7^{-\frac{4}{3}}\cdot 7^{\frac{3}{2}}}{2^{-\frac{24}{5}}\cdot 2^{\frac{2}{5}}\cdot 7^{\frac{2}{5}}}=2^{\frac{269}{60}}\cdot 7^{\frac{31}{60}}$

88. Página 47

a) $\dfrac{5}{\sqrt{7}}=\dfrac{5\sqrt{7}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}=\dfrac{5}{7}\sqrt{7}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt{17}}=\dfrac{2\cdot\sqrt{17}}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{17}}=\dfrac{2}{17}\sqrt{17}$

c) $\dfrac{-25}{\sqrt{2}}=-\dfrac{25}{2}\sqrt{2}$

d) $\dfrac{-8}{\sqrt{5}}=\dfrac{-8}{5}\sqrt{5}$

89. Página 47

a) $\dfrac{-3}{7\sqrt{2}}=\dfrac{-3\cdot\sqrt{2}}{7\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=-\dfrac{3}{14}\sqrt{2}$

b) $\dfrac{6}{2\sqrt[3]{3}}=\dfrac{6\cdot\sqrt[3]{3^2}}{2\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3^2}}=\sqrt[3]{3^2}$

c) $\dfrac{-15}{4\sqrt[5]{9}}=\dfrac{-15\cdot\sqrt[5]{3^3}}{4\cdot\sqrt[5]{3^2}\cdot\sqrt[5]{3^3}}=-\dfrac{5}{4}\sqrt[5]{3^3}$

d) $\dfrac{5}{3\sqrt[7]{4}}=\dfrac{5\cdot\sqrt[7]{2^5}}{3\cdot\sqrt[7]{2^2}\cdot\sqrt[7]{2^5}}=\dfrac{5}{6}\sqrt[7]{2^5}$

90. **Página 47**

a) $\frac{6+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{(6+\sqrt{5})\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}$

b) $\frac{-7+8\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{(-7+8\sqrt{2})\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{-7\sqrt{3}+8\sqrt{6}}{3}$

c) $\frac{4-\sqrt{6}}{\sqrt{5}}=\frac{(4-\sqrt{6})\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}-\sqrt{30}}{5}$

d) $\frac{-2-\sqrt{7}}{\sqrt{13}}=\frac{(-2-\sqrt{7})\cdot\sqrt{13}}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}}=\frac{-2\sqrt{13}-\sqrt{91}}{13}$

91. **Página 47**

a) $\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}=\frac{2\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2}-\sqrt{5})\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{5})}=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{2-5}=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{-3}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{15}+\sqrt{10}}{3-2}=\sqrt{15}+\sqrt{10}$

c) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{3+2\sqrt{6}+2}{3-2}=5+2\sqrt{6}$

d) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})\cdot(\sqrt{7}+\sqrt{5})}=\frac{7+2\sqrt{35}+5}{7-5}=6+\sqrt{35}$

92. **Página 47**

a) $\frac{3}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}+\sqrt{2}=\frac{5}{2}\sqrt{2}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}-\sqrt{5}=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{5}-\sqrt{5}=\left(\frac{\sqrt{3}-3}{3}\right)\sqrt{5}$

c) $\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{15}}+4\sqrt{5}=\frac{5\sqrt{3}\sqrt{15}}{15}+4\sqrt{5}=\frac{15}{15}\sqrt{5}+4\sqrt{5}=5\sqrt{5}$

d) $\frac{-9}{5\sqrt{8}}-8\sqrt{2}=\frac{-9\sqrt{8}}{40}-8\sqrt{2}=\frac{-18}{40}\sqrt{2}-8\sqrt{2}=\frac{-9-160}{20}\sqrt{2}=\frac{-169}{20}\sqrt{2}$

93. **Página 47**

a) $\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{3\sqrt{5}}{5}=\frac{10\sqrt{3}-9\sqrt{5}}{15}$

b) $\frac{-4}{\sqrt{6}}+\frac{5}{2\sqrt{2}}=\frac{-4\sqrt{6}}{6}+\frac{5\sqrt{2}}{4}=\frac{-8\sqrt{6}+15\sqrt{2}}{12}$

c) $\frac{4}{\sqrt{7}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}=\frac{4\sqrt{7}}{7}-\frac{\sqrt{33}}{11}=\frac{44\sqrt{7}-7\sqrt{33}}{77}$

d) $\frac{-1}{3\sqrt{5}}+\frac{8}{\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{5}}{15}+\frac{8\sqrt{3}}{3}=\frac{-\sqrt{5}+40\sqrt{3}}{15}$

94. **Página 47**

a) $\frac{\sqrt{32}}{5}-\frac{3\sqrt{50}}{2}+\frac{5}{\sqrt{18}}=\frac{4\sqrt{2}}{5}-\frac{15\sqrt{2}}{2}+\frac{5\sqrt{2}}{6}=\frac{24\sqrt{2}-225\sqrt{2}+25\sqrt{2}}{30}=-\frac{88\sqrt{2}}{15}$

b) $\frac{3\sqrt{8}+\sqrt{18}-2\sqrt{72}}{4\sqrt{8}+\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}+3\sqrt{2}-12\sqrt{2}}{8\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{-3\sqrt{2}}{9\sqrt{2}}=-\frac{1}{3}$

c) $\frac{-\sqrt{27}+\sqrt{48}+5\sqrt{75}}{2\sqrt{75}-\sqrt{3}}=\frac{-3\sqrt{3}+4\sqrt{3}+25\sqrt{3}}{10\sqrt{3}-\sqrt{3}}=\frac{26\sqrt{3}}{9\sqrt{3}}=\frac{26}{9}$

95. Página 47

a) $\frac{2}{3\sqrt{3}+4}+\frac{1}{\sqrt{3}-2}=\frac{2\cdot(3\sqrt{3}-4)}{(3\sqrt{3}+4)\cdot(3\sqrt{3}-4)}+\frac{\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3}-2)\cdot(\sqrt{3}+2)}=\frac{6\sqrt{3}-8}{27-16}+\frac{\sqrt{3}+2}{3-4}=\frac{-5\sqrt{3}-30}{11}$

b) $\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}-\frac{6}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{2(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{-1}-\frac{6(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{-2}=-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+3\sqrt{3}+3\sqrt{5}=-2\sqrt{2}+5\sqrt{3}+3\sqrt{5}$

c) $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}+4\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{5}\cdot(\sqrt{3}-4\sqrt{2})}{3-32}+\frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{2-6}=\frac{-4\sqrt{15}+16\sqrt{10}-29-29\sqrt{3}}{58}$

d) $\frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{11}}-\frac{5}{2+\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{6}\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{11})}{-8}-\frac{5(2-\sqrt{3})}{1}=\frac{\sqrt{18}+\sqrt{66}-80+40\sqrt{3}}{8}$

96. Página 47

a) $15\,000\,000\,000=1{,}5\cdot 10^{10}$ $\rightarrow$ Orden de magnitud: 10

b) $0{,}00000051=5{,}1\cdot 10^{-7}$ $\rightarrow$ Orden de magnitud: –7

c) $31\,940\,000=3{,}194\cdot 10^{7}$ $\rightarrow$ Orden de magnitud: 7

d) $0{,}0000000009=9\cdot 10^{-10}$ $\rightarrow$ orden de magnitud: –10

e) $4\,598\,000\,000=4{,}598\cdot 10^{9}$ $\rightarrow$ Orden de magnitud: 9

f) $0{,}0967254=9{,}67254\cdot 10^{-2}$ $\rightarrow$ Orden de magnitud: –2

g) $329\,000\,000=3{,}29\cdot 10^{8}$ $\rightarrow$ Orden de magnitud: 8

h) $111\,000=1{,}11\cdot 10^{5}$ $\rightarrow$ Orden de magnitud: 5

97. Página 47

Únicamente está escrito en notación científica el número del apartado e) $\rightarrow$ $7{,}2\cdot 10^{-2}$

99. Página 48

a) $1{,}32\cdot 10^{4}+2{,}57\cdot 10^{4}=3{,}89\cdot 10^{4}$

b) $8{,}75\cdot 10^{2}+9{,}46\cdot 10^{3}=8{,}75\cdot 10^{2}+94{,}6\cdot 10^{2}=103{,}35\cdot 10^{2}=1{,}0335\cdot 10^{4}$

c) $3{,}62\cdot 10^{4}+5{,}85\cdot 10^{-3}=3{,}62\cdot 10^{4}+0{,}000000585\cdot 10^{4}=3{,}620000585\cdot 10^{4}$

d) $2{,}3\cdot 10^{2}+3{,}5\cdot 10^{-1}+4{,}75\cdot 10^{-2}=2{,}3\cdot 10^{2}+0{,}0035\cdot 10^{2}+0{,}000475\cdot 10^{2}=2{,}303975\cdot 10^{2}$

e) $3{,}46\cdot 10^{-2}+5{,}9\cdot 10^{4}+3{,}83\cdot 10^{2}=0{,}00000346\cdot 10^{4}+5{,}9\cdot 10^{4}+0{,}0383\cdot 10^{4}=5{,}93830346\cdot 10^{4}$

100. Página 48

a) $9{,}5\cdot 10^{4}-3{,}72\cdot 10^{4}=5{,}78\cdot 10^{4}$

b) $8{,}6\cdot 10^{3}-5{,}45\cdot 10^{2}=8{,}6\cdot 10^{3}-0{,}545\cdot 10^{3}=8{,}055\cdot 10^{3}$

c) $7{,}9\cdot 10^{-4}-1{,}3\cdot 10^{-6}=7{,}9\cdot 10^{-4}-0{,}013\cdot 10^{-4}=7{,}887\cdot 10^{-4}$

d) $4{,}6\cdot 10^{6}+5{,}3\cdot 10^{4}-3{,}9\cdot 10^{2}=4{,}6\cdot 10^{6}+0{,}053\cdot 10^{6}-0{,}00039\cdot 10^{6}=4{,}65261\cdot 10^{6}$

e) $5\cdot 10^{2}-3\cdot 10^{-1}+7\cdot 10^{-2}=5\cdot 10^{2}-0{,}003\cdot 10^{2}+0{,}0007\cdot 10^{2}=4{,}9977\cdot 10^{2}$

102. Página 48

a) $7{,}3\cdot 10^4\cdot 5{,}25\cdot 10^{-3}=38{,}325\cdot 10=3{,}8325\cdot 10^2$

b) $8{,}91\cdot 10^{-5}\cdot 5{,}7\cdot 10^{14}=50{,}787\cdot 10^9=5{,}0787\cdot 10^{10}$

c) $8{,}3\cdot 10^6:5{,}37\cdot 10^2=1{,}5456\cdot 10^4$

d) $9{,}5\cdot 10^{-6}:3{,}2\cdot 10^3=2{,}9688\cdot 10^{-9}$

103. Página 48

a) $\dfrac{6{,}147\cdot 10^{-2}\cdot 4{,}6\cdot 10^3}{7{,}9\cdot 10^8\cdot 6{,}57\cdot 10^{-5}}=0{,}5448\cdot 10^{-2}=5{,}448\cdot 10^{-3}$

b) $\dfrac{3{,}92\cdot 10^4\cdot 5{,}86\cdot 10^{-6}}{7\cdot 10^{-8}\cdot 9{,}2\cdot 10^{13}}=0{,}3567\cdot 10^{-7}=3{,}567\cdot 10^{-8}$

104. Página 48

a) $2{,}3\cdot 10^3\cdot(1{,}3\cdot 10^{-4}-2{,}4\cdot 10^{-5})=2{,}3\cdot 10^3\cdot(1{,}3\cdot 10^{-4}-0{,}24\cdot 10^{-4})=2{,}3\cdot 10^3\cdot 1{,}06\cdot 10^{-4}=2{,}438\cdot 10^{-1}$

b) $3{,}2\cdot 10^{-7}:(2{,}8\cdot 10^3-3{,}5\cdot 10^4)=3{,}2\cdot 10^{-7}:(0{,}28\cdot 10^4-3{,}5\cdot 10^4)=3{,}2\cdot 10^{-7}:(-3{,}22)\cdot 10^4=$
$=-0{,}9938\cdot 10^{-11}=-9{,}938\cdot 10^{-12}$

c) $(2{,}3\cdot 10^3)^2\cdot(2{,}55\cdot 10^{-8}-3{,}21\cdot 10^{-9})=5{,}29\cdot 10^6\cdot(2{,}55\cdot 10^{-8}-0{,}321\cdot 10^{-8})=5{,}29\cdot 10^6\cdot 2{,}229\cdot 10^{-8}=$
$=11{,}7914\cdot 10^{-2}=1{,}17914\cdot 10^{-1}$

d) $(1{,}7\cdot 10^6-1{,}3\cdot 10^5):(6{,}5\cdot 10^5-1{,}6\cdot 10^6)=(1{,}7\cdot 10^6-0{,}13\cdot 10^6):(0{,}65\cdot 10^6-1{,}6\cdot 10^6)=$
$=1{,}57\cdot 10^6:(-0{,}95)\cdot 10^6=-1{,}6526$

105. Página 48

Llamando l a la longitud de la arista del cubo:

$V_{\text{Cubo}}=l^3=6\text{ m}^3\rightarrow l=\sqrt[3]{6}\text{ m}$

106. Página 48

Llamando l a la longitud de la arista del cubo:

$V_{\text{Cubo}}=l^3=9\text{ cm}^3\rightarrow l=\sqrt[3]{9}\text{ cm}$

$A_{\text{Cara}}=(\sqrt[3]{9})^2=\sqrt[3]{81}=3\sqrt[3]{3}=3^{\frac{4}{3}}\text{ m}^2$

107. Página 48

Llamando l a la longitud de la arista del cubo:

$V_{\text{Cubo}}=l^3=20\text{ cm}^3\rightarrow l=\sqrt[3]{20}\text{ cm}$

Como un cubo tiene un total de 12 aristas, la suma de todas ellas es de $12\sqrt[3]{20}$ cm.

108. Página 48

Llamando l a la longitud de la arista del cubo:

$V_{\text{Cubo}}=l^3=20\text{ cm}^3\rightarrow l=\sqrt[3]{20}\text{ cm}$

Como un cubo tiene 4 caras laterales, $A_{\text{Lateral}}=4\sqrt[3]{20^2}=8\sqrt[3]{50}\text{ cm}^2$.

109. Página 48

a) $120\,\text{Gb}\cdot\dfrac{2^{10}\,\text{Mb}}{1\,\text{Gb}}\cdot\dfrac{2^{10}\,\text{Kb}}{1\,\text{Mb}}\cdot\dfrac{2^{10}\,\text{bytes}}{1\,\text{Kb}}=120\cdot 2^{30}\,\text{bytes}=1{,}2885\cdot 10^{11}\,\text{bytes}$

$120\cdot 2^{30}\,\text{bytes}\cdot\dfrac{2^{3}\,\text{bits}}{1\,\text{byte}}=120\cdot 2^{33}\,\text{bits}=1{,}0308\cdot 10^{12}\,\text{bits}$

b) $512\text{Mb}\cdot\dfrac{2^{10}\text{Kb}}{1\text{Mb}}\cdot\dfrac{2^{10}\text{bytes}}{1\text{Kb}}=512\cdot 2^{20}\text{byte}=5{,}3687\cdot 10^{8}\,\text{bytes}$

$512\cdot 2^{20}\text{byte}\cdot\dfrac{2^{3}\text{bits}}{1\,\text{byte}}=512\cdot 2^{23}\text{bits}=4{,}2949\cdot 10^{9}\text{bits}$

c) $1{,}44\text{Mb}\cdot\dfrac{2^{10}\text{Kb}}{1\text{Mb}}\cdot\dfrac{2^{10}\text{bytes}}{1\text{Kb}}=1{,}44\cdot 2^{20}\text{byte}=1{,}5099\cdot 10^{6}\text{bytes}$

$1{,}44\cdot 2^{20}\text{byte}\cdot\dfrac{2^{3}\text{bits}}{1\text{byte}}=1{,}44\cdot 2^{23}\text{bits}=1{,}2079\cdot 10^{7}\text{bits}$

d) $650\,\text{Mb}\cdot\dfrac{2^{10}\text{Kb}}{1\text{Mb}}\cdot\dfrac{2^{10}\text{bytes}}{1\text{Kb}}=650\cdot 2^{20}\text{byte}=6{,}8157\cdot 10^{8}\text{bytes}$

$650\cdot 2^{20}\text{byte}\cdot\dfrac{2^{3}\text{bits}}{1\text{byte}}=650\cdot 2^{23}\text{bits}=5{,}4526\cdot 10^{9}\text{bits}$

110. Página 48

Masa del Sol $=6\cdot 10^{24}\cdot 3{,}3\cdot 10^{6}=19{,}8\cdot 10^{30}=1{,}98\cdot 10^{31}$ kg.

Masa de Plutón $=1{,}98\cdot 10^{31}\cdot 6{,}6\cdot 10^{-9}=13{,}098\cdot 10^{22}=1{,}3098\cdot 10^{23}$ kg.

111. Página 49

a) $\log_2 64=6$ porque $2^6=64$

b) $\log_3 9=2$ porque $3^2=9$

c) $\ln e^7=7$

d) $\log_{25} 125=\dfrac{3}{2}$ porque $25^{\frac{3}{2}}=125$

e) $\log_{16} 4=\dfrac{1}{2}$ porque $16^{\frac{1}{2}}=4$

f) $\log_{100} 10=\dfrac{1}{2}$ porque $100^{\frac{1}{2}}=10$

113. Página 49

$$C_f=C_i\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^t\rightarrow 14\,071=10\,000\left(1+\frac{5}{100}\right)^t\rightarrow \log 1{,}4071=\log\left(1+\frac{5}{100}\right)^t\rightarrow t=\frac{\log 1{,}4071}{\log 1{,}05}=7$$

114. Página 49

$$C_f=8\,000\cdot\left(1+\frac{2}{100}\right)^t\rightarrow \log\left(\frac{C_f}{8\,000}\right)=t\cdot\log(1{,}02)\rightarrow t=\frac{\log\left(\dfrac{C_f}{8\,000}\right)}{\log(1{,}02)}$$

a) $t=\dfrac{\log\left(\dfrac{8\,323{,}20}{8\,000}\right)}{\log(1{,}02)}=2$ años.

b) $t=\dfrac{\log\left(\dfrac{8\,832{,}65}{8\,000}\right)}{\log(1{,}02)}=5$ años.

c) $t=\dfrac{\log\left(\dfrac{9\,009{,}30}{8\,000}\right)}{\log(1{,}02)}=6$ años.

d) $t=\dfrac{\log\left(\dfrac{8\,489{,}66}{8\,000}\right)}{\log(1{,}02)}=3$ años.

115. Página 49

a) $\log_2 0{,}125 = \log_2 \frac{125}{1000} = \log_2 \frac{5^3}{2^3 \cdot 5^3} = \log_2 2^{-3} = -3$

b) $\log_2 0{,}25 = \log_2 \frac{25}{100} = \log_2 \frac{5^2}{2^2 \cdot 5^2} = \log_2 2^{-2} = -2$

c) $\log_5 0{,}2 = \log_5 \frac{2}{10} = \log_5 5^{-1} = -1$

d) $\log_5 0{,}008 = \log_5 \frac{8}{1000} = \log_5 \frac{2^3}{2^3 \cdot 5^3} = \log_5 5^{-3} = -3$

116. Página 49

a) $\log_x 125 = 3 \rightarrow x^3 = 125 \rightarrow x^3 = 5^3 \rightarrow x = 5$

b) $\log_2 x = 1 \rightarrow 2^1 = x \rightarrow x = 2$

c) $\log_x 100 = 2 \rightarrow x^2 = 100 \rightarrow x^2 = 10^2 \rightarrow x = 10$

d) $\log_3 x = -2 \rightarrow 3^{-2} = x \rightarrow x = \frac{1}{3^2}$

e) $\log_x 81 = 3 \rightarrow x^3 = 81 \rightarrow x^3 = 3^4 \rightarrow x = 3^{\frac{4}{3}}$

f) $\log_3 (x+2) = 4 \rightarrow 3^4 = x + 2 \rightarrow 81 = x + 2 \rightarrow x = 79$

117. Página 49

a) $\log_{15} 9 + \log_{15} 25 = \log_{15} 225 = \log_{15} 15^2 = 2$

b) $\log_6 108 - \log_6 3 = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$

c) $3\log_4 2 + \log_4 2 = \log_4 2^3 + \log_4 2 = \log_4 2^4 = \log_4 4^2 = 2$

d) $\log 5 + 2\log 5 + \log 8 = \log\left(5^3 \cdot 2^3\right) = \log 10^3 = 3$

e) $\log_2 18 + 2\log_2 3 - \log_2 81 = \log_2\left(\frac{2 \cdot 3^2 \cdot 3^2}{3^4}\right) = \log_2 2 = 1$

f) $2 - \log_3 27 + 3\log_5 1 = 2 - 3 + 0 = -1$

118. Página 49

$\log 0{,}7 = -0{,}1549 \rightarrow \log \frac{7}{10} = -0{,}1549 \rightarrow \log 7 - \log 10 = -0{,}1549 \rightarrow \log 7 = 1 - 0{,}1549 \rightarrow \log 7 = 0{,}8451$

119. Página 49

a) $\log_3 8 \cdot \log_2 3 = \frac{\log_2 8}{\log_2 3} \cdot \log_2 3 = \log_2 2^3 = 3$

b) $\log_3 5 \cdot \log_5 27 = \log_3 5 \cdot \frac{\log_3 27}{\log_3 5} = \log_3 3^3 = 3$

c) $\log 8 \cdot \log_2 100 = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 10} \cdot 2\log_2 10 = 3 \cdot 2 = 6$

d) $\log_4 81 \cdot \log_3 16 = 4\log_4 3 \cdot \frac{\log_4 4^2}{\log_4 3} = 4 \cdot 2 = 8$

DEBES SABER HACER

1. Página 49

a) $(-5)^{-2}\cdot\frac{15^{-2}}{5}=5^{-2}\cdot\frac{5^{-2}\cdot 3^{-2}}{5}=3^{-2}\cdot 5^{-5}$

b) $-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}:\left(\frac{2^2}{3}\right)^{-1}=-\frac{1}{2^{-2}}:\frac{2^{-2}}{3^{-1}}=\frac{3^{-1}}{2^{-4}}=\frac{2^4}{3}$

2. Página 49

a) $\sqrt{27}-2(2\sqrt{12}+\sqrt{75})=3\sqrt{3}-8\sqrt{3}-10\sqrt{3}=-15\sqrt{3}$

b) $(\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{15})^{\frac{1}{2}}=\left(3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(3^{\frac{5}{6}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{5}{12}}\cdot 5^{\frac{1}{6}}=\sqrt[12]{3^5\cdot 5^2}$

3. Página 49

a) $\frac{2}{\sqrt[7]{5^2}}=\frac{2\sqrt[7]{5^5}}{\sqrt[7]{5^2}\sqrt[7]{5^5}}=\frac{2}{5}\sqrt[7]{5^5}$

b) $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}=\frac{(1+\sqrt{2})(\sqrt{3}+2\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-2\sqrt{2})(\sqrt{3}+2\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}+\sqrt{6}+4}{3-8}=-\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}+\sqrt{6}+4}{5}$

4. Página 49

a) $1{,}272\cdot 10^5+3{,}47\cdot 10^6-5\cdot 10^4=12{,}72\cdot 10^4+347\cdot 10^4-5\cdot 10^4=354{,}72\cdot 10^4=3{,}5472\cdot 10^6$

b) $\frac{5{,}125\cdot 10^{-1}}{2\cdot 10^4}\cdot 3{,}2\cdot 10^5=8{,}2\cdot 10^0=8{,}2$

5. Página 49

a) $\log_x 36=2\rightarrow x^2=6^2\rightarrow x=6$

b) $\log_5 x=-3\rightarrow 5^{-3}=x\rightarrow x=\frac{1}{125}$

c) $\log_4 32=x\rightarrow 4^x=32\rightarrow 4^x=4^{\frac{5}{2}}\rightarrow x=\frac{5}{2}$

COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

120. Página 50

a) Un terremoto de escala 7 es 10^7 mayor que un terremoto de escala 1. Por tanto, si hace dos años se produjo un terremoto de escala 3 (10^3 mayor a un terremoto de escala 1), el de esta madrugada fue $10^7 : 10^3 = 10^4$ veces mayor que el anterior.

b) Tendrá 2 réplicas hasta llegar a ser un terremoto menor, de escala 3, ya que $10^7\cdot 10^{-2}\cdot 10^{-2}=10^3$.

c) El volumen de un camión es $2{,}5\cdot 3\cdot 15=112{,}5$ m^3.

Por otro lado, si una tonelada de TNT ocupa 0,6 m^3, entonces $1{,}5\cdot 10^{43}$ toneladas de TNT ocupan $1{,}5\cdot 10^{43}\cdot 0{,}6=9\cdot 10^{42}$ m^3.

Por tanto: $\frac{9\cdot 10^{42}}{112{,}5}=8\cdot 10^{40}$ camiones son necesarios para cargar toda la dinamita.

FORMAS DE PENSAR. Razonamiento matemático

121. Página 50

a) $2^{-30} = 0{,}000000000931322 = 9{,}31322 \cdot 10^{-10}$

b) $5^{-10} = 0{,}0000001024 = 1{,}024 \cdot 10^{-7}$

c) $3^{-20} = 2{,}867972 \cdot 10^{-10}$

d) $7^{-15} = 2{,}106344 \cdot 10^{-13}$

122. Página 50

a) $\sqrt{a} < a$, cuando $a > 1$.

b) $\sqrt{a} > a$, cuando $0 < a < 1$.

123. Página 50

a) $$\frac{1}{1+\sqrt[3]{a}} = \frac{1-\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}{(1+\sqrt[3]{a})\cdot(1-\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2})} = \frac{1-\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}{1-\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a^3}} = \frac{1-\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}{1+a}$$

b) $$\frac{1}{1-\sqrt[3]{a}} = \frac{1+\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}{(1-\sqrt[3]{a})\cdot(1+\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2})} = \frac{1+\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}{1+\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a^3}} = \frac{1+\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}{1-a}$$

124. Página 50

$$\frac{1}{\sqrt[2^n]{a}-\sqrt[2^n]{b}} = \frac{(\sqrt[2^n]{a}+\sqrt[2^n]{b})}{(\sqrt[2^n]{a}-\sqrt[2^n]{b})\cdot(\sqrt[2^n]{a}+\sqrt[2^n]{b})} = \frac{(\sqrt[2^n]{a}+\sqrt[2^n]{b})}{\sqrt[2^n-2]{a}-\sqrt[2^n-2]{b}}$$

Volvemos a racionalizar *n* veces, hasta que eliminemos totalmente todas las raíces del denominador:

$$\frac{1}{\sqrt[2^n]{a}-\sqrt[2^n]{b}} = \frac{(\sqrt[2^n]{a}+\sqrt[2^n]{b})}{\sqrt[2^n-2]{a}-\sqrt[2^n-2]{b}} = \frac{(\sqrt[2^n]{a}+\sqrt[2^n]{b})\cdot(\sqrt[2^n-2]{a}+\sqrt[2^n-2]{b})}{\sqrt[2^n-4]{a}-\sqrt[2^n-4]{b}} = \frac{(\sqrt[2^n]{a}+\sqrt[2^n]{b})\cdot(\sqrt[2^n-2]{a}+\sqrt[2^n-2]{b})\cdot\ldots\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$$

125. Página 50

a) $0{,}8^x = 0{,}512 \rightarrow \left(\frac{8}{10}\right)^x = \left(\frac{512}{10^3}\right) \rightarrow \left(\frac{2^3}{2\cdot 5}\right)^x = \left(\frac{2^9}{2^3\cdot 5^3}\right) \rightarrow \left(\frac{2^3}{2\cdot 5}\right)^x = \left(\frac{2^3}{2\cdot 5}\right)^3 \rightarrow x = 3$

b) $x^{0{,}25} = 2 \rightarrow x = 2^{\frac{1}{0{,}25}} = 2^4 = 16$

c) $0{,}36^{\frac{1}{x}} = 0{,}046656 \rightarrow \left(\frac{36}{10^2}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{46\,656}{10^6}\right) \rightarrow \left(\frac{2^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 5^2}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{2^6\cdot 3^6}{2^6\cdot 5^6}\right) \rightarrow \left(\frac{2^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 5^2}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{2^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 5^2}\right)^3 \rightarrow x = \frac{1}{3}$

d) $0{,}03125^x = 32 \rightarrow \left(\frac{3\,125}{10^5}\right)^x = 2^5 \rightarrow \left(\frac{5^5}{2^5\cdot 5^5}\right)^x = 2^5 \rightarrow (2^{-5})^x = 2^5 \rightarrow x = -1$

e) $x^{\frac{1}{3}} = 20 \rightarrow x = 20^3 = 8\,000$

f) $x^{\frac{1}{4}} = 3 \rightarrow x = 3^4 = 81$

126. **Página 50**

a) Por el teorema de Pitágoras:

$$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{16^2+16^2}=\sqrt{512}=\sqrt{2^9}=16\sqrt{2}\text{ cm}$$

$$BM=BG=\frac{1}{2}AB=8 \;\rightarrow\; MG=\sqrt{BG^2+BM^2}=\sqrt{8^2+8^2}=\sqrt{2^7}=8\sqrt{2}\text{ cm}$$

b) $DE=\frac{1}{2}AC=\frac{16}{2}\sqrt{2}=8\sqrt{2}\text{ cm}$ $\qquad HE=\frac{1}{2}DE=4\sqrt{2}\text{ cm}$

$$HD=HE+DE=4\sqrt{2}+8\sqrt{2}=12\sqrt{2}\text{ cm}$$

c) $GH=HE=4\sqrt{2}\text{ cm}$ $\qquad FH=\sqrt{EH^2+EF^2}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2+(4\sqrt{2})^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}\text{ cm}$

d) Triángulo *CED* $\rightarrow A=\dfrac{CE\cdot ED}{2}=\dfrac{8\sqrt{2}\cdot 8\sqrt{2}}{2}=64\text{ cm}^2$

Triángulo *DEA* $\rightarrow A=\dfrac{DE\cdot EA}{2}=\dfrac{8\sqrt{2}\cdot 8\sqrt{2}}{2}=64\text{ cm}^2$

Triángulo *CIG* $\rightarrow A=\dfrac{CI\cdot IG}{2}=\dfrac{4\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}}{2}=16\text{ cm}^2$

Triángulo *HEF* $\rightarrow A=\dfrac{HE\cdot EF}{2}=\dfrac{4\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}}{2}=16\text{ cm}^2$

Triángulo *GBM* $\rightarrow A=\dfrac{GB\cdot BM}{2}=\dfrac{8\cdot 8}{2}=32\text{ cm}^2$

Cuadrado *HEIG* $\rightarrow A=EH\cdot HG=4\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}=32\text{ cm}^2$

Romboide *HFAM* $\rightarrow A=AM\cdot\dfrac{BG}{2}=8\cdot 4=32\text{ cm}^2$

e) Todas las figuras tienen lados expresados por radicales.

f) No hay ninguna figura cuya área venga expresada por un radical de índice 2.

PRUEBAS PISA

a) $C=C_0\cdot 2{,}72^{-0{,}12094\cdot 5{,}73}=0{,}5\cdot C_0$

b) $C=\frac{1}{4}C_0 \rightarrow \frac{1}{4}=2{,}72^{-0{,}12094\cdot t}\rightarrow -\log 4=-0{,}12094\cdot t\cdot\log 2{,}72\rightarrow t=11{,}45542$ años.

c) $C=\frac{1}{3}C_0 \rightarrow \frac{1}{3}=2{,}72^{-0{,}12094\cdot t}\rightarrow -\log 3=-0{,}12094\cdot t\cdot\log 2{,}72\rightarrow t=9{,}078208$ años.

Polinomios y fracciones algebraicas

3

CLAVES PARA EMPEZAR

1. Página 52

$2x^3y \longrightarrow$ Coeficiente: 2 Parte literal: x^3y

$3yx^3 \longrightarrow$ Coeficiente: 3 Parte literal: yx^3

$yx \longrightarrow$ Coeficiente: 1 Parte literal: yx

$-x^3y \longrightarrow$ Coeficiente: –1 Parte literal: x^3y

$x^3yz \longrightarrow$ Coeficiente: 1 Parte literal: x^3yz

Son semejantes $2x^3y$, $-x^3y$ y $3yx^3$ porque tienen la misma parte literal.

2. Página 52

a) $x^2+7x^2=8x^2$

b) $-5x^3+4x^3=-x^3$

c) $x^2-3x^2=-2x^2$

d) $-6x^3-x^3=-7x^3$

e) $x^2\cdot 3x^2=3x^4$

f) $-2x^3\cdot 4x=-8x^4$

g) $4x^5:x^2=4x^3$

h) $-6x^2:3x^2=-2$

i) $8x^3:x^2=8x$

VIDA COTIDIANA

LA SIERRA. Página 53

El volumen de un cilindro es $V_C=\pi\cdot r^2\cdot h$.

Como $h=5r$, tenemos que el volumen es $V=5\pi r^3$.

RESUELVE EL RETO

RETO 1. Página 54

Polinomio reducido $P(x)=5$

Grado: 0

Coeficiente principal: 5

RETO 2. Página 57

$$\sqrt{\frac{8}{3}}+\frac{2}{x^2}+\frac{x^2}{3} \qquad a^2=\frac{2}{x^2}\rightarrow a=\frac{\sqrt{2}}{x} \qquad b^2=\frac{x^2}{3}\rightarrow b=\frac{x}{\sqrt{3}}$$

Lo comprobamos: $(a+b)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{x}+\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^2+2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2=$

$$=\frac{2}{x^2}+2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{x^2}{3}=\frac{2}{x^2}+\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}+\frac{x^2}{3}=\frac{2}{x^2}+\sqrt{\frac{8}{3}}+\frac{x^2}{3}$$

RETO 3. Página 58

$-6x^2 - 6x = -6x(x+1)$ $\qquad$ $3x + 3 = 3(x+1)$

El polinomio cociente es $-6x : 3 = -2x$, y el resto es 0.

Lo comprobamos: $(3x+3)\cdot(-2x)+0=-6x^2-6x$.

RETO 4. Página 64

Un polinomio ciclotómico es un polinomio cuyo coeficiente principal es 1 y cuyas raíces son las raíces *n*–ésimas de la unidad.

$$\frac{x^2-1}{x^{997}-1}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(1+x+\ldots+x^{996})}=\frac{x+1}{1+x+\ldots+x^{996}}$$

ACTIVIDADES

1. Página 54

a) Grado: 2 $\qquad$ Coeficiente principal: 5 $\qquad$ Término independiente: –4

b) Grado: 3 $\qquad$ Coeficiente principal: 3 $\qquad$ Término independiente: 0

2. Página 54

$P(1)=1^3-2\cdot 1^2+1=0$

3. Página 54

a) $(3x^3+2x-4)+(-2x+5)=3x^3+1$

b) $(3x^3+2x-4)\cdot(-2x+5)=-6x^4-4x^2+8x+15x^3+10x-20=-6x^4+15x^3-4x^2+18x-20$

4. Página 55

a) $4x+8y=4(x+2y)$

b) $3x+6y-9z=3(x+2y-3z)$

c) $x^3-x^2+x^5=x^2(x-1+x^3)$

d) $x^5-2x^4+x^3=x^3(x^2-2x+1)$

e) $2x^2-6x+4x^3=2x(x-3+2x^2)$

f) $3x^3-6x^4+9x^2=3x^2(x-2x^2+3)$

g) $12x+6x^2+3=3(4x+2x^2+1)$

h) $12x^3+6x^2+6x=6x(2x^2+x+1)$

i) $xy-5xyz^2+2xz=x(y-5yz^2+2z)$

j) $5x^2y-10x+15xz=5x(xy-2+3z)$

5. Página 55

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $P(x,y)=4x^3y+8x^2y+2xy$, $Q(x,y)=8xy+22x^2y^2+6xy^3$

b) $P(x)=-6x^2+3x^4$, $Q(x)=27x+3x^4$

c) $P(x)=5x^4+3x^3$, $Q(x)=8x^3+9x^4$

d) $P(x,y)=2x^2y^2-4xy^3$, $Q(x,y,z)=8xy^2z+10xy^2$

6. Página 55

a) $(x-3)$

b) $(x-1)\cdot(x-2)$

c) $2(x-2)$

d) $(x-1)$

e) $2(x+2)$

f) $3(x+1)$

g) $(x-2)$

7. Página 56

a) x^2+6x+9

b) $9x^2-30x+25$

c) $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$

d) $x^4-8x^3+24x^2-32x+16$

e) $16x^4-32x^3y+24x^2y^2-8xy^3+y^4$

f) $243y^5-405y^4x+270y^3x^2-90y^2x^3+15yx^4-x^5$

8. Página 56

Escribe el triángulo de Tartaglia hasta la potencia 8 y desarrolla el binomio $(x+y)^8$.

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

$$(x+y)^8=x^8+8x^7y+28x^6y^2+56x^5y^3+70x^4y^4+56x^3y^5+28x^2y^6+8xy^7+y^8$$

9. Página 56

$$27x^6-135x^4+225x^2-125=(3x^2-5)^3$$

Por tanto, $n=3$ y el binomio es $(3x^2-5)$.

10. Página 57

a) $(x+3y)^2=x^2+6xy+9y^2$

b) $(3x+2)\cdot(3x-2)=9x^2-4$

c) $(5x-1)^2=25x^2-10x+1$

d) $(x+5y)\cdot(x-5y)=x^2-25y^2$

e) $(-3x+y)^2=9x^2-6xy+y^2$

f) $(-2x-y)^2=4x^2+4xy+y^2$

11. Página 57

$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$, $a^2=4x^2\rightarrow a=2x$ y $b^2=16y^2\rightarrow b=4y$

Por tanto, $4x^2-16y^2=(2x+4y)\cdot(2x-4y)$.

12. Página 57

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 = \frac{1}{x^2} \rightarrow a = \frac{1}{x}$ $\qquad$ $b^2 = \frac{x^2}{y^2} \rightarrow b = \frac{x}{y}$

Lo comprobamos: $\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y}\right)^2 = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{y} + \frac{x^2}{y^2}$

13. Página 58

a) Cociente: $5x-8$ Resto: 21

b) Cociente: x^2-x+1 Resto: 0

c) Cociente: $2x^2-3x-4$ Resto: $11x+12$

d) Cociente: $-3x^2+2x-12$ Resto: $7x-38$

14. Página 58

a) $(5x-8)\cdot(x+3)+21 = 5x^2+7x-3$ Grados: $1+1=2$

b) $(x^2-x+1)\cdot(x-1)+0 = x^3-2x^2+2x-1$ Grados: $2+1=3$

c) $(2x^2-3x-4)\cdot(x^2+2)+(11x+12) = 2x^4-3x^3+5x+4$ Grados: $2+2=4$

d) $(-3x^2+2x-12)\cdot(x^2-3)+(7x-38) = -3x^4+2x^3-3x^2+x-2$ Grados: $2+2=4$

15. Página 58

$(3x^4-m) = (3x^2-3)\cdot(x^2+1)+(3-m)$ $\rightarrow$ Resto: $3-m=5$.

Por tanto, $m=-2$.

16. Página 59

a)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -4 & -6 & 8 \\ -1 & & -2 & 6 & 0 \\ \hline & 2 & -6 & 0 & \boxed{8} \end{array}$$

$C(x) = 2x^2-6x$ $\qquad R(x)=8$

b)

$$\begin{array}{r|rrrr} & -5 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & & -10 & -16 & -34 \\ \hline & -5 & -8 & -17 & \boxed{-31} \end{array}$$

$C(x) = -5x^2-8x-17$ $\qquad R(x)=-31$

c)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 3 & -5 & 1 & -7 \\ -3 & & -3 & 0 & 15 & -48 \\ \hline & 1 & 0 & -5 & 16 & \boxed{-55} \end{array}$$

$C(x) = x^3-5x+16$ $\qquad R(x)=-55$

d)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -1 & 6 & -3 & 1 \\ -2 & & -4 & 10 & -32 & 70 \\ \hline & 2 & -5 & 16 & -35 & \boxed{71} \end{array}$$

$C(x)=2x^3-5x^2+16x-35 \qquad R(x)=71$

e)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 & \boxed{1} \end{array}$$

$C(x)=x^3+x \qquad R(x)=1$

f)

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & -1 & 2 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & & -3 & -3 & -12 & -30 & -93 \\ \hline & -1 & -1 & -4 & -10 & -31 & \boxed{-94} \end{array}$$

$C(x)=-x^4-x^3-4x^2-10x-31 \qquad R(x)=-94$

17. Página 59

a) $C(x)=5x^3-5x^2+5x-2 \qquad R(x)=-3$

b) $C(x)=-3x^2-13x-64 \qquad R(x)=-316$

c) $C(x)=2x^4+2x^3+x^2+x+1 \qquad R(x)=2$

d) $C(x)=2x^2-7x+19 \qquad R(x)=-38$

18. Página 59

$$\begin{array}{r|rrrr} & 7 & 0 & -5m & -2 \\ -1 & & -7 & 7 & 5m-7 \\ \hline & 7 & -7 & -5m+7 & \boxed{5m-9} \end{array}$$

Si el resto es $-4 \rightarrow 5m-9=-4$. Por tanto, $m=1$.

19. Página 60

a)

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 3 & -4 \\ 5 & & 5 & 40 \\ \hline & 1 & 8 & \boxed{36} \end{array}$$

$P(5)=5^2+3\cdot 5-4=36$

b)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & -5 & 7 \\ 2 & & 4 & 8 & 6 \\ \hline & 2 & 4 & 3 & \boxed{13} \end{array}$$

$P(2)=2\cdot 2^3-5\cdot 2+7=13$

c)

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & & 1 & -1 & -1 \\ \hline & -1 & 1 & 1 & \boxed{-2} \end{array}$$

$P(-1) = -(-1)^3 + 2(-1) - 1 = -2$

20. Página 60

$P(1) = 1^3 + 3 \cdot 1 - 4 = 0 \rightarrow$ El resto es 0.

21. Página 60

$P(2) = 2^3 + 2m - 3 = 5 \rightarrow m = 0$

22. Página 61

a) $P(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 2 + 2 = 0 \rightarrow$ 2 es una raíz de $P(x)$.

b) $P(-1) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 - (-1) + 2 = 0 \rightarrow -1$ es una raíz de $P(x)$.

c) $P(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 1 + 2 = 0 \rightarrow$ 1 es raíz de $P(x)$.

d) $P(-5) = (-5)^3 - 2 \cdot (-5)^2 - (-5) + 2 = -168 \neq 0 \rightarrow -5$ no es una raíz de $P(x)$.

23. Página 61

Calculamos el valor numérico de $P(x)$ para los divisores de 2: Div(2)= $\pm 1, \pm 2$.

$P(1) = 1^3 + 1^2 - 2 \cdot 1 - 2 = -2 \neq 0 \rightarrow$ 1 no es raíz de $P(x)$.

$P(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 2 = 0 \rightarrow -1$ sí es raíz de $P(x)$.

$P(2) = 2^3 + 2^2 - 2 \cdot 2 - 2 = 6 \neq 0 \rightarrow$ 2 no es raíz de $P(x)$.

$P(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 2 = -2 \neq 0 \rightarrow -1$ no es raíz de $P(x)$.

24. Página 61

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$P_1(x) = x^2 - 6x + 5 \rightarrow P_1(1) = 1^2 - 6 \cdot 1 + 5 = 0$

$P_2(x) = x^3 + x^2 + x - 3 \rightarrow P_2(1) = 1^3 + 1^2 + 1 - 3 = 0$

25. Página 62

a) $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$

b) $5x^3 - 5x = 5x(x - 1)(x + 1)$

c) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$

d) $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = (x + 1)^2(x + 2)$

e) $x^4 - 3x^2 + 2x = x(x - 1)^2(x + 2)$

f) $x^5 - 5x^3 + 4x = x(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$

g) $x^3 - 4x^2 + 4x - 16 = (x - 4)(x^2 + 4)$

h) $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$

26. Página 62

a) $x=-\frac{1}{2}$ y $x=2$

b) $x=3$ y $x=-5$

c) $x=0$, $x=\pm\sqrt{2}i$ y $x=-3$

d) $x=1$, $x=-\frac{2}{3}$ y $x=-4$

27. Página 62

$P_1(x)=(6x+6)\cdot(x+2)=6x^2+18x+12$

$P_2(x)=(x+1)\cdot(6x+12)=6x^2+18x+12$

28. Página 63

a) $x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$

b) $x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)$

c) $x^3-7x-6=(x+1)(x+2)(x-3)$

d) $x^3-x^2-14x+24=(x-2)(x-3)(x+4)$

e) $x^4-20x^2+64=(x-2)(x+2)(x-4)(x+4)$

f) $x^4+6x^3+13x^2+12x+4=(x+1)^2(x+2)^2$

g) $x^4+6x^3-54x-81=(x-3)(x+3)^3$

29. Página 63

a) $30x^2+x-1=(6x-1)(5x+1)$

b) $5x^2-25x+30=5(x-2)(x-3)$

c) $2x^3+11x^2+12x=x(2x+3)(x+4)$

d) $75x^3-3x=3x(5x-1)(5x+1)$

e) $(-3x^2+x+2)^2=(3x+2)^2(x-1)^2$

f) $18x^3+6x^2-52x+16=2(3x-1)(3x-4)(x+2)$

30. Página 64

a) $\frac{2}{x+1}$ $\longrightarrow$ Es una fracción algebraica.

b) $\frac{x+1}{2}$ $\longrightarrow$ No es una fracción algebraica.

c) $\frac{-2x+5}{3}$ $\longrightarrow$ No es una fracción algebraica.

d) $\frac{-2x+5}{3x}$ $\longrightarrow$ Es una fracción algebraica.

31. Página 64

a) $(2x+1)\cdot(2x+1)=4x^2+4x+1$ y $(x-3)\cdot(x-3)=x^2-6x+9$ $\longrightarrow$ No son equivalentes.

b) $(x+2)\cdot(x^2+4x+3)=x^3+6x^2+11x+6$ y $(x+1)\cdot(x+5x^2+6)=5x^3+6x^2+7x+6$ $\longrightarrow$ No son equivalentes.

32. Página 64

$$\frac{5x+1}{2x}\cdot a=\frac{7x+3}{x-1} \longrightarrow a=\frac{7x+3}{x-1}:\frac{5x+1}{2x}=\frac{(7x+3)\cdot 2x}{(x-1)\cdot(5x+1)}=\frac{14x^2+6x}{5x^2-4x-1}$$

33. Página 65

a) $\dfrac{4}{x+1}+\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{4(x+2)+2(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{2(3x+5)}{(x+1)(x+2)}$

b) $\dfrac{1}{x+5}-\dfrac{7}{x-2}=\dfrac{(x-2)-7(x+5)}{(x+5)(x-2)}=\dfrac{-6x-37}{(x+5)(x-2)}$

c) $\dfrac{-3}{x-1}+\dfrac{8}{x-3}=\dfrac{-3(x-3)+8(x-1)}{(x-1)(x-3)}=\dfrac{5x+1}{(x-1)(x-3)}$

d) $\dfrac{-3}{x+6}-\dfrac{9}{x-1}=\dfrac{-3(x-1)-9(x+6)}{(x+6)(x-1)}=\dfrac{-3(4x+17)}{(x+6)(x-1)}$

34. Página 65

a) $\dfrac{4}{x+1}\cdot\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{2(x+2)}{x+1}=\dfrac{2x+4}{x+1}$

b) $\dfrac{-3}{x-1}:\dfrac{x-3}{x}=\dfrac{-3x}{(x-1)(x-3)}=\dfrac{-3x}{x^2-4x+3}$

c) $\dfrac{x-5}{2x^2+x-3}\cdot\dfrac{x^2-1}{3x^2}=\dfrac{(x-5)(x-1)(x+1)}{3x^2(x-1)(2x+3)}=\dfrac{(x-5)(x+1)}{3x^2(2x+3)}=\dfrac{x^2-4x-5}{6x^3+9x^2}$

d) $\dfrac{x}{2x^2+x-1}:\dfrac{x^2}{2x-1}=\dfrac{x(2x-1)}{x^2(x+1)(2x-1)}=\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x^2+x}$

ACTIVIDADES FINALES

35. Página 66

a) $x^3+8x^2+6x+7-(-3x^2+x-2)+2x+5=x^3+11x^2+7x+14$

b) $2x+5-(x^3+8x^2+6x+7-3x^2+x-2)=-x^3-5x^2-5x$

c) $2x+5-[x^3+8x^2+6x+7-(-3x^2+x-2)]=-x^3-11x^2-3x-4$

d) $x^3+8x^2+6x+7-(-3x^2+x-2+2x+5)=x^3+11x^2+3x+4$

36. Página 66

a) $2(2x^3-x^2-5)-x(x^2-8x-1)=3x^3+6x^2+x-10$

b) $x^2-8x-1-3x(3x+4)=-8x^2-20x-1$

c) $4x^2(3x+4)+2x^3-x^2-5=14x^3+15x^2-5$

d) $(x^2-8x-1)(3x+4)-3(2x^3-x^2-5)=-3x^3-17x^2-35x+11$

37. Página 66

a) $x^2 + x \cdot (x-3) - (4x-6) = 2x^2 - 7x + 6$ Grado: 2 Término independiente: 6

b) $3x \cdot (2x+5) - x^2 \cdot (x-1) + 5 = -x^3 + 7x^2 + 15x + 5$ Grado: 3 Término independiente: 5

c) $(3+x) \cdot (4x - x^2) - (x-8) = -x^3 + x^2 + 11x + 8$ Grado: 3 Término independiente: 8

d) $7x - (x+9) - 3x^2 + (x-1) \cdot 4 = -3x^2 + 10x - 13$ Grado: 2 Término independiente: –13

e) $(2-3x) - (x^2 - x + 4) + (x^2 - 1) \cdot x = x^3 - x^2 - 3x - 2$ Grado: 3 Término independiente: –2

f) $-x^2 + 8x \cdot (-3 + x^2) - (x-5) = 8x^3 - x^2 - 25x + 5$ Grado: 3 Término independiente: 5

38. Página 66

a) $P(3) = [5 \cdot 3 \cdot (3+4) - (4 \cdot 3 + 6)] \cdot (-3) = -261$

b) $P(-2) = [5 \cdot (-2) \cdot ((-2)+4) - (4 \cdot (-2) + 6)] \cdot (-(-2)) = -36$

c) $P(5) = [5 \cdot 5 \cdot (5+4) - (4 \cdot 5 + 6)] \cdot (-5) = -995$

d) $P(-4) = [5 \cdot (-4) \cdot ((-4)+4) - (4 \cdot (-4) + 6)] \cdot (4) = 40$

39. Página 66

$P(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 - a(-3) + 5 = 3a + 5$ $P(-3) = -1 \rightarrow 3a + 5 = -1 \rightarrow a = -2$

40. Página 66

$P(2) = 2^3 - (2^2 - a \cdot 2) + a = 4 + 3a$ $P(2) = 7 \rightarrow 4 + 3a = 7 \rightarrow a = 1$

41. Página 66

$P(-1) = -(-1)^3 + a((-1)^2 - a(-1) + 3) + 10 = a^2 + 4a + 11$

$P(-1) = 8 \rightarrow a^2 + 4a + 11 = 8 \rightarrow a = -1$ o $a = -3$

42. Página 66

a) $x^3 + 4 \cdot (x-2) - (5+x) \cdot (8-3x) = x^3 + 3x^2 + 11x - 48$

b) $2x^4 - (x^3 - 5x + 6) \cdot x + x - 4 = x^4 + 5x^2 - 5x - 4$

c) $4 \cdot [(2x+5) - x + 4] - (4x-3) = 39$

d) $(6x+1) \cdot (x-3) - 7 \cdot (9-x) \cdot (-2) = 6x^2 - 31x + 123$

e) $-x^4 + 3 \cdot (7x+2) - (11+5x) - (5-x) = -x^4 + 17x - 10$

43. Página 66

a) $3x + 6xy - 27xz^2 = 3x(1 + 2y - 9z^2)$

b) $5x^3z^2 - 5xyz + 100x^2yz = 5xz(x^2z - y + 20xy)$

c) $4b^2c + 8bc - 32a^2b = 4b(bc + 2c - 8a^2)$

d) $9abc + 6ab - 12b^2c = 3b(3ac + 2a - 4bc)$

44. Página 66

a) $(x+2)+3(x+2)=4(x+2)$

b) $(2x+1)+(3x+1)(2x+1)=(2x+1)(3x+2)$

c) $2(x+4)-(3+x)(x+4)+2(x+4)\cdot 3x=(x+4)(5x-1)$

d) $x+3+2(x+3)+(x+1)(x+3)=(x+3)(x+4)$

45. Página 66

Respuesta abierta. Por ejemplo, $12x^4y$ y $6x^2yz^2$

46. Página 66

a) $(5x+2)^2=25x^2+20x+4$

b) $(3x-1)^2=9x^2-6x+1$

c) $(2-x)^2=x^2-4x+4$

d) $(-x+2)^2=x^2-4x+4$

47. Página 66

a) $(2x+3)^3=8x^3+36x^2+54x+27$

b) $(3-x)^4=x^4-12x^3+54x^2-108x+81$

c) $(x-4)^3=x^3-12x^2+48x-64$

d) $(4x+1)^3=64x^3+48x^2+12x+1$

e) $(-x-5)^3=-x^3-15x^2-75x-125$

f) $(-3x+2)^4=81x^4-216x^3+216x^2-96x+16$

48. Página 66

a) $[(x-2)^2]^2=x^4-8x^3+24x^2-32x+16$

b) $[(3x+2)^2]^2=81x^4+216x^3+216x^2+96x+16$

c) $[(4-5x)^2]^2=625x^4-2000x^3+2400x^2-1280x+256$

d) $[(-x+3)^2]^2=x^4-12x^3+54x^2-108x+81$

e) $[(-4x+1)^2]^2=256x^4-256x^3+96x^2-16x+1$

f) $[(x+2)^2]^2=x^4+8x^3+24x^2+32x+16$

49. Página 66

a) $[(x+1)^2-x]^2=x^4+2x^3+3x^2+2x+1$

b) $[(-x-2)^2+5]^2=x^4+8x^3+34x^2+72x+81$

c) $[(x+2)^2-3x]^2=x^4+2x^3+9x^2+8x+16$

d) $[(-3x+5)^2-6]^2=81x^4-540x^3+1242x^2-1140x+361$

e) $[(2x+7)^2-6x]^2=16x^4+176x^3+876x^2+2\,156x+2401$

f) $[(4-x)^2-4x]^2=x^4-24x^3+176x^2-384x+256$

50. Página 66

a) $(x-2)^2+(4+x)\cdot(3-x)=(x^2-4x+4)+(-x^2-x+12)=-5x+16$

b) $3\cdot(x^2-2x+1)-(3x-2)^2=(3x^2-6x+3)-(9x^2-12x+4)=-6x^2+6x-1$

c) $-(3-x)^2+(x+5)^2=(-x^2+6x-9)+(x^2+10x+25)=16x+16$

d) $[(x^2+8)^2-9x\cdot(x-2)]\cdot x^2=[(x^4+16x^2+64)-9x^2+18x]\cdot x^2=(x^4+7x^2+18x+64)\cdot x^2=x^6+7x^4+18x^3+64x^2$

e) $(-x)^3\cdot[(x-6)^2-(x+5)^2+7]=(-x)^3\cdot[(x^2-12x+36)-(x^2+10x+25)+7]=(-x)^3\cdot(-22x+18)=22x^4-18x^3$

f) $4x^3-((1-5x^2)^2+2)-(x^2+5)^2=4x^3-[(25x^4-10x^2+1)+2]-(x^4+10x^2+25)=$
$=4x^3-(25x^4-10x^2+3)-(x^4+10x^2+25)=-26x^4+4x^3-28$

51. Página 66

a) $x^2+6x+9=(x+3)^2$

b) $4x^2-4x+1=(2x-1)^2$

c) $9x^2-16=(3x+4)\cdot(3x-4)$

d) $9x^2+6x+1=(3x+1)^2$

e) $25x^2-30x+9=(5x-3)^2$

f) $-25+x^4=(x^2+5)\cdot(x^2-5)$

52. Página 66

a) $2x^2+3+2\sqrt{6}x=(\sqrt{2}x+\sqrt{3})^2$

b) $2\sqrt{x}+x+1=(\sqrt{x}+1)^2$

c) $\dfrac{x^2}{4}+x+1=\left(\dfrac{x}{2}+1\right)^2$

d) $3xy+2+\sqrt{24xy}=(\sqrt{3xy}+\sqrt{2})^2$

e) $x-1=(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)$

f) $\dfrac{x^4}{9}+36-4x^2=\left(\dfrac{x^2}{3}-6\right)^2$

53. Página 67

a) $(x^3-3x^2+x-4):(x+2)\longrightarrow$ Cociente: $x^2-5x+11$ Resto: -26

	1	−3	1	−4
−2		−2	10	−22
	1	−5	11	−26

b) $(-x^3+x^2+5x+12):(x-3)\longrightarrow$ Cociente: $-x^2-2x-1$ Resto: 9

	−1	1	5	12
3		−3	−6	−3
	−1	−2	−1	9

c) $(x^4 - x^2 + 3x - 7) : (x - 4) \longrightarrow$ Cociente: $x^3 + 4x^2 + 15x + 63$ Resto: 245

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -1 & 3 & -7 \\ 4 & & 4 & 16 & 60 & 252 \\ \hline & 1 & 4 & 15 & 63 & \boxed{245} \end{array}$$

d) $(x^5 + 6x^2 + 8x - 5) : (x + 1) \longrightarrow$ Cociente: $x^4 - x^3 + x^2 + 5x + 3$ Resto: -8

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & 0 & 6 & 8 & -5 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 & -5 & -3 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & 5 & 3 & \boxed{-8} \end{array}$$

e) $(2x^3 + 5x^2 + 9x - 1) : (x - 1) \longrightarrow$ Cociente: $2x^2 + 7x + 16$ Resto: 15

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 5 & 9 & -1 \\ 1 & & 2 & 7 & 16 \\ \hline & 2 & 7 & 16 & \boxed{15} \end{array}$$

54. Página 67

a) $[(x-3)^2 + (x+4)] : (x+2) = (x^2 - 5x + 13) : (x+2)$

Cociente: $x - 7$ Resto: 27

b) $[(x^2+4)^2 - (2x)^3 + 5] : (x-1) = (x^4 - 8x^3 + 8x^2 + 21) : (x-1)$

Cociente: $x^3 - 7x^2 + x + 1$ Resto: 22

c) $[(-x)\cdot(x^2+5) - (x^2+2x) + 6] : (x+3) = (-x^3 - x^2 - 7x + 6) : (x+3)$

Cociente: $-x^2 + 2x - 13$ Resto: 45

d) $[(x^3+3x)\cdot x^2 + 4\cdot(x+9)] : (x+1) = (x^5 + 3x^3 + 4x + 36) : (x+1)$

Cociente: $x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x + 8$ Resto: 28

e) $[(x^2-5)^2 - x^2\cdot(x-6)] : (x-2) = (x^4 - x^3 - 4x^2 + 25) : (x-2)$

Cociente: $x^3 + x^2 - 2x - 4$ Resto: 17

55. Página 67

a) $P(2) = 2^3 - 2 + 4 = 10 \longrightarrow$ El resto de la división de $P(x)$ entre $Q(x)$ es 10.

b) $P(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 + (-2) - 3 = -21 \longrightarrow$ El resto de la división de $P(x)$ entre $Q(x)$ es -21.

c) $P(-1) = (-1-5)\cdot(-3(-1)+4) + 1 = -41 \longrightarrow$ El resto de la división de $P(x)$ entre $Q(x)$ es -41.

56. Página 67

a) $P(3) = 3^3 + 4\cdot 3^2 - 6\cdot 3 - 5 = 40 \longrightarrow$ El resto es 40.

b) $P = (-2)^3 - (-2)^2 + 5(-2) - 9 = -31 \longrightarrow$ El resto es -31.

c) $P(1) = -1^3 + 3\cdot 1^2 + 1 + 2 = 5 \longrightarrow$ El resto es 5.

d) $P(-1) = 3\cdot(-1)^3 + (-1)^2 + 8(-1) - 20 = -30 \longrightarrow$ El resto es -30.

e) $P(1) = 1^4 + 1^2 - 6 = -4 \longrightarrow$ El resto es -4.

f) $P(2) = 2^4 - 2^3 + 4\cdot 2 = 16 \longrightarrow$ El resto es 16.

57. Página 67

a) Verdadero: $C(x)=x^3+4x^2-6x+9 \qquad R(x)=-10$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 5 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & & -1 & -4 & 6 & -9 \\ \hline & 1 & 4 & -6 & 9 & \boxed{-10} \end{array}$$

b) Falso: $(3x+4)^2+(x-1)^2=10x^2+22x+17$

c) Verdadero: $(x-4)^2-(2x+1)^2=-3x^2-12x+15$

El coeficiente de x^2 es -3 y el de x es -12. Por tanto, $-3+(-12)=-15$.

d) Verdadero: $P(-1)=[(-1)^2+(-1)+4]^5=4^5=2^{10}$

58. Página 67

a)

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -12 & m \\ -4 & & -4 & 64 \\ \hline & 1 & -16 & \boxed{64+m} \end{array}$$

$64+m=0 \;\rightarrow\; m=-64$

b)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & 8 & m \\ 2 & & 2 & 8 & 32 \\ \hline & 1 & 4 & 16 & \boxed{m+32} \end{array}$$

$m+32=0 \;\rightarrow\; m=-32$

c)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 2m & -12 \\ 6 & & 6 & 30 & 180+12m \\ \hline & 1 & 5 & 30+2m & \boxed{168+12m} \end{array}$$

$168+12m=0 \rightarrow m=-14$

d)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2(m+1) & 0 & m \\ -1 & & -1 & 2m+3 & -2m-3 \\ \hline & 1 & -2m-3 & 2m+3 & \boxed{-m-3} \end{array}$$

$-m-3=0 \rightarrow m=-3$

59. Página 67

a)

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 500 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & \boxed{501} \end{array}$$

$R(x)=501$

b)

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 25 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & \boxed{24} \end{array}$$

$R(x)=24$

60. Página 67

a) $P(2)=2^4+2\cdot 2^3-7\cdot 2^2-8\cdot 2+12=0$ $\rightarrow$ 2 es una raíz de $P(x)$.

$P(-3)=(-3)^4+2\cdot(-3)^3-7\cdot(-3)^2-8\cdot(-3)+12=0 \rightarrow -3$ es una raíz de $P(x)$.

b) $P(1)=1^4-4\cdot 1^3+6\cdot 1^2-4\cdot 1+1=0$ $\rightarrow$ 1 es una raíz de $P(x)$.

61. Página 67

a) Las raíces son −2 y 1.

b) Las raíces son 0 y 3.

c) $x^2\cdot(x-2)^3 \rightarrow$ Las raíces son 0 (doble) y 2 (triple).

d) $(x^2-4)\cdot(x^2-1)=(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x+1)\cdot(x-1)$ $\rightarrow$ Las raíces son ± 1 y ± 2.

e) $(x+1)^3\cdot x \rightarrow$ Las raíces son −1 (triple) y 0.

63. Página 67

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $P(x)=(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$

b) $P(x)=\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(x+\frac{3}{5}\right)=x^2+\frac{13}{30}x-\frac{1}{10}$

c) $P(x)=(x+2)(x+1)(x-4)\left(x-\frac{1}{4}\right)=x^4-\frac{5}{4}x^3-\frac{39}{4}x^2-\frac{11}{2}x+2$

d) $P(x)=(x-10)\left(x-\frac{3}{8}\right)(x-5)\left(x+\frac{2}{3}\right)=x^4-\frac{353}{24}x^3+\frac{363}{8}x^2+\frac{55}{3}x-\frac{25}{2}$

64. Página 67

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $P(x)=(x+2)(x+2)=x^2+4x+4$

b) $P(x)=5x^2(x-1)=5x^3-5x^2$

65. Página 68

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $P(x)=x\cdot(x+2)=x^2+2x$

b) $P(x)=(x-5)(x-1)=x^2-6x+5$

c) $P(x)=(x-1)(x+1)=x^2-1$

d) $P(x)=(x-2)(x+3)=x^2+x-6$

66. Página 68

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $P(x)=(x+3)(2x)=2x^2+6x$

b) $P(x)=(x+5)(7x)=7x^2+35x$

c) $P(x)=(x+2)\frac{x}{5}=\frac{x^2}{5}+\frac{2x}{5}$

d) $P(x)=(x-1)(x+3)=x^2+2x-3$

67. Página 68

Las raíces de $P(x)$ son $x_1 = \sqrt{a}, x_2 = -\sqrt{a}, x_3 = -b$.

a) Falso b) Falso c) Verdadero d) Falso e) Falso f) Verdadero

68. Página 68

a) Falso. No tiene por qué. Solo se puede asegurar que el resto de la división $P(x) : (x + 1) = 0$.

b) Falso. $x = 2$ es raíz de $P(x)$ cuando $P(2) = 0$.

c) Verdadero. Si x + 2 es un divisor de *P(x)*, entonces *P(-2) = 0* ⟶ -2 es raíz de *P(x).*

d) Verdadero. Ambos tienen las mismas raíces pero con distinta multiplicidad.

e) Verdadero. *x = a* raíz de *P(x)* ⟶ *-x = a* raíz de *P(-x)* ⟶ *x = -a* raíz de *P(-x).*

69. Página 68

a) $x^3 + x^2 = x^2(x+1)$

b) $2x^3 + 3x^2 - 2x = 2x(x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

c) $x^4 + 4x^3 - 5x^2 = x^2(x+5)(x-1)$

d) $x^4 - 25x^2 = x^2(x-5)(x+5)$

e) $x^4 - 4x^3 - 12x^2 = x^2(x+2)(x-6)$

f) $7x^3 + 5x^2 - 2x = x(7x-2)(x+1)$

70. Página 68

a) $x^4 - 7x^3 - 6x^2 + 72x = x(x+3)(x-4)(x-6)$

b) $x^4 - x^3 - 25x^2 + 25x = x(x-1)(x-5)(x+5)$

c) $x^4 + x^3 - 36x^2 - 36x = x(x+1)(x-6)(x+6)$

d) $x^4 + x^3 - 10x^2 + 8x = x(x-1)(x-2)(x+4)$

e) $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 8x = x(x-1)(x-2)(x-4)$

f) $x^4 + 3x^3 - 4x = x(x-1)(x+2)^2$

71. Página 68

a) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x+1)(x^2 + x + 1)$

b) $x^3 + 4x^2 + 6x + 4 = (x+2)(x^2 + 2x + 2)$

c) $x^3 + x - 2 = (x-1)(x^2 + x + 2)$

d) $x^3 - x - 6 = (x-2)(x^2 + 2x + 3)$

e) $x^4 - 29x^2 + 100 = (x-2)(x+2)(x-5)(x+5)$

f) $x^4 - 24x^2 - 25 = (x^2+1)(x-5)(x+5)$

g) $x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 3x - 5 = (x-1)(x+1)(x^2 - 3x + 5)$

h) $x^4 + 2x^3 + x^2 - 8x - 20 = (x-2)(x+2)(x^2 + 2x + 5)$

72. Página 68

a) $4x^2+4xy+y^2=(2x+y)^2$

b) $9x^2-12xy+4y^2=(3x-2y)^2$

c) $4x^2-9y^2=(2x-3y)(2x+3y)$

d) $16-24x+9x^2=(3x-4)^2$

e) $25+20y+4y^2=(2y+5)^2$

f) $25x^2-1=(5x+1)(5x-1)$

g) $1-8x+16x^2=(4x-1)^2$

h) $4+12y+9y^2=(3y+2)^2$

73. Página 68

a) $x^4-4x^2+4=(x^2-2)^2$

b) $9-y^6=(3+y^3)(3-y^3)$

c) $9x^2+6xy^2+y^4=(3x+y^2)^2$

d) $y^4+2x^2y^2+x^4=(x^2+y^2)^2$

e) $x^4+2x^3+x^2=x^2(x+1)^2$

f) $x^8-25y^2=(x^4-5y)(x^4+5y)$

g) $25y^4-10xy^2+x^2=(x-5y^2)^2$

h) $y^6-2x^2y^3+x^4=(x^2-y^3)^2$

74. Página 68

a) $\dfrac{8x^3y}{2xy}=4x^2$

b) $\dfrac{27x^6y^4}{3^4x^5y}=\dfrac{xy^3}{3}$

c) $\dfrac{-x^3yz^2}{2^{-3}x^3y}=-2^3z^2=-8z^2$

75. Página 68

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{2}{2x-8}=\dfrac{x-1}{x^2-5x+4}$

b) $\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{x^2}{x-x^2}=\dfrac{2x^3}{2(x^2-x^3)}$

c) $\dfrac{-5}{x+2}=\dfrac{5}{-x-2}=\dfrac{-5x}{x^2+2x}$

d) $\dfrac{x-3}{4x+5}=\dfrac{2x-6}{8x+10}=\dfrac{x^2-3x}{4x^2+5x}$

e) $\dfrac{3}{x-1}=\dfrac{6}{2x-2}=\dfrac{3x}{x^2-x}$

f) $\dfrac{-x}{x+5}=\dfrac{-2x}{2x+10}=\dfrac{x}{-x-5}$

76. Página 68

a) $P(x)=\dfrac{(x+1)(x^2-2x)}{x}=(x+1)(x-2)=x^2-x-2$

b) $P(x)=\dfrac{(x-3)(x^3+4x^2-x-4)}{x+4}=(x-3)(x^2-1)=x^3-3x^2-x+3$

77. Página 68

a) $5x\,(2x^2+2x-24)=(2x-6)(5x^2+ax)\longrightarrow a=20$

b) $(x-a)(x^2+7x+10)=(x+2)(x^2-2x-35)\longrightarrow a=7$

78. Página 68

a) $\dfrac{1}{x^2-3x-4}-\dfrac{2}{x-4}+\dfrac{5}{x+1}=\dfrac{3(x-7)}{(x-4)(x+1)}$

b) $\dfrac{x}{2x^2+3x-5}-\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{x}{2x+5}=-\dfrac{x^2+5}{(x-1)(2x+5)}$

c) $\dfrac{x+3}{x^2-5x+4}+\dfrac{2x}{x-4}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2x^2-1}{(x-4)(x-1)}$

d) $\dfrac{x+1}{x^2+5x-14}+\dfrac{x-5}{x-2}-\dfrac{6}{x+7}=\dfrac{x^2-3x-22}{(x-2)(x+7)}$

79. Página 68

a) $\dfrac{9x\cdot(x-1)(x+1)}{3(x-1)3x^2}=\dfrac{x+1}{x}$

b) $\dfrac{2(x-3)(x+2)^2}{(x-2)(x+2)(x-3)^2}=\dfrac{2(x+2)}{(x-2)(x-3)}$

c) $\dfrac{(x-3)x(x+3)}{x(x-3)(x+3)}=1$

d) $\dfrac{(x+5)(x-5)(x+5)}{(x-5)(x^2+25)}=\dfrac{(x+5)^2}{x^2+25}$

80. Página 68

a) $\dfrac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x-2)^2(x+1)^2}=\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$

b) $\dfrac{3(x+3)(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)(x+3)^2}=\dfrac{3}{x+2}$

c) $\dfrac{(2x-1)x^2(x+2)}{x(x+2)4x}=\dfrac{2x-1}{4}$

81. Página 68

a) $\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{x-3}{x^2-4}\right)\cdot\dfrac{x+2}{x}-\dfrac{x}{2}=\dfrac{5}{(x-2)(x+2)}\cdot\dfrac{x+2}{x}-\dfrac{x}{2}=\dfrac{5}{x(x-2)}-\dfrac{x}{2}=\dfrac{10-x^2(x-2)}{2x(x-2)}==\dfrac{10-x^3+2x^2}{2x(x-2)}$

b) $\left(\dfrac{6}{1-x}-\dfrac{5x}{x-1}\right):\dfrac{x^2-1}{2}+\dfrac{3}{x}=\dfrac{-5x-6}{x-1}:\dfrac{x^2-1}{2}+\dfrac{3}{x}=\dfrac{-10x-12}{(x-1)^2(x+1)}+\dfrac{3}{x}=\dfrac{3x^3-13x^2-15x+3}{x(x-1)^2(x+1)}$

c) $\left(x+1+\dfrac{x^2}{1-x}\right):\left(1-\dfrac{x}{1+x}\cdot\dfrac{x+1}{x^3}\right)+\dfrac{4}{x^2-1}=\dfrac{-1}{x-1}:\left(\dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}\right)+\dfrac{4}{(x-1)(x+1)}=$

$$=\dfrac{-x^2}{(x-1)^2(x+1)}+\dfrac{4}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{-x^2+4x-4}{(x-1)^2(x+1)}$$

82. Página 69

La expresión del coste es $10\cdot x^4$.

83. Página 69

a) $h^2 = x^2 + (x+1)^2 = 2x^2 + 2x + 1 \rightarrow h = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$ cm

b) $h^2 = (x-1)^2 + (x+1)^2 = 2x^2 + 2 \rightarrow h = \sqrt{2x^2 + 2}$ cm

c) $h^2 = (2x-1)^2 + (x+3)^2 = 5x^2 + 2x + 10 \rightarrow h = \sqrt{5x^2 + 2x + 10}$ cm

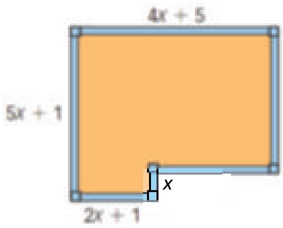
d) $h^2 = (3x)^2 + (x-2)^2 = 10x^2 - 4x + 4 \rightarrow h = \sqrt{10x^2 - 4x + 4}$ cm

84. Página 69

$V(x) = (2x+3)^3 = 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$

$V(5) = (2 \cdot 5 + 3)^3 = 13^3 = 2197$

85. Página 69



Perímetro:

$P = (4x+5) + (5x+1) + (2x+1) + x + (4x+5-2x-1) + (5x+1-x) = 18x + 12$ cm

Área:

$A_B = (4x+5)(5x+1-x) + (2x+1)x = 18x^2 + 25x + 5$ cm²

$A_T = (18x+12) \cdot \dfrac{5x}{4} + 2 \cdot (18x^2 + 25x + 5) = \dfrac{117}{2}x^2 + 65x + 10$ cm²

Volumen:

$V = (18x^2 + 25x + 5) \cdot \dfrac{5x}{4} = \dfrac{45x^3}{2} + \dfrac{125x^2}{4} + \dfrac{25x}{4}$ cm³

86. Página 69

$r = x$

$h = 6x + 5$

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \rightarrow V = \pi \cdot x^2 \cdot (6x+5) = \pi(6x^3 + 5x^2)$ cm³

Si $r = 4 \rightarrow V = \pi(6 \cdot 4^3 + 5 \cdot 4^2) = 464 \cdot \pi$ cm³

87. Página 69

$4x^3 + 3x^2 - 8x - 6 = (x+1) \cdot \mathbf{(4x^2 - x - 7)} + 1 = (x+1) \cdot [(x-2) \cdot \mathbf{(4x+7)} + \mathbf{7}] + 1$

DEBES SABER HACER

1. Página 69

a) $(x^3+3x+1)\cdot(x^2-2)+x^2-2=x^5+x^3+x^2-6x-2+x^2-2=x^5+x^3+2x^2-6x-4$

b) $(x^3+3x+1-x^2+2):(x^2-2)=(x^3-x^2+3x+3):(x^2-2)=(x-1)+\dfrac{5x+1}{x^2-2}$

2. Página 69

$$
\begin{array}{rrrr|lll}
x^3 & & +2x & -1 & x & +3 & \\ \cline{5-7}
-x^3 & -3x^2 & & & x^2 & -3x & +11 \longrightarrow C(x) \\ \cline{1-4}
 & -3x^2 & 2x & -1 & & & \\
 & 3x^2 & 9x & & & & \\ \cline{2-4}
 & & 11x & -1 & & & \\
 & & -11x & -33 & & & \\ \cline{3-4}
 & & & -34 \longrightarrow R(x) & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|rrrl}
 & 1 & 0 & 2 & -1 \\
-3 & & -3 & 9 & -33 \\ \hline
 & 1 & -3 & 11 & \boxed{-34 \longrightarrow R(x)}
\end{array}
$$

3. Página 69

$$
\begin{array}{r|rrrrrl}
 & 1 & 0 & 0 & 0 & -m & 2 \\
2 & & 2 & 4 & 8 & 16 & 32-2m \\ \hline
 & 1 & 2 & 4 & 8 & 16-m & \boxed{34-2m}
\end{array}
$$

$34-2m=5 \longrightarrow m=\dfrac{29}{2}$

4. Página 69

a) $x^3+4x^2-7x-10=(x+1)(x-2)(x+5)$

b) $4x^3+16x^2+9x-9=4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)(x+3)$

c) $2x^3+12x^2+22x+12=2(x+3)(x+2)(x+1)$

5. Página 69

a) $\dfrac{2}{3(x-1)(x+1)}+\dfrac{1}{3(x-1)(x-2)}=\dfrac{3(x-1)}{3(x-1)(x+1)(x-2)}=\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$

b) $\dfrac{3x+3}{x-1}:\dfrac{3x^2-6x-9}{x+2}\cdot\dfrac{x-1}{x-3}=\dfrac{3(x+1)(x+2)(x-1)}{(x-1)3(x+1)(x-3)(x-3)}=\dfrac{x+2}{(x-3)^2}$

COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

88. Página 70

a) La altura de la caja es: $10x + 2 \cdot 4x + \frac{9}{2}x = \frac{45}{2}x$ cm

b) Modelo 1: $x = 1 \longrightarrow$ Altura = $\frac{45}{2} = 22{,}5$ cm

Modelo 2: $x = 1{,}8 \longrightarrow$ Altura = $\frac{45}{2} \cdot 1{,}8 = 40{,}5$ cm

Modelo 3: $x = 2{,}5 \longrightarrow$ Altura = $\frac{45}{2} \cdot 2{,}5 = 56{,}25$ cm

c) Las dimensiones de cada casilla deben ser, al menos, de $2r \times 2r$.

El lado de la base de la caja mediría 2 · 8 + 4 · 1,8 · 2 = 30,4.

Las dimensiones de la caja serán 30,4 × 30,4 × 40,5 cm.

FORMAS DE PENSAR. Razonamiento matemático

89. Página 70

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $[((3 \cdot 5 + 25) : 5) - 3] \cdot 3 = [(40 : 5) - 3] \cdot 3 = 15$

$[((7 \cdot 5 + 25) : 5) - 7] \cdot 3 = [(60 : 5) - 7] \cdot 3 = 15$

b) Con estos cálculos se elimina la *x*. Por lo tanto, para todos los valores de *x* el resultado siempre es el mismo.

$[((x \cdot 5 + 25) : 5) - x] \cdot 3 = [(x + 5) - x] \cdot 3 = 5 \cdot 3 = 15$

90. Página 70

Como el resto de $P(x)$ entre $(x - 2)$ es 12: $P(x) = (x - 2) \cdot A(x) + 12$

Como el resto de $P(x)$ entre $(x + 2)$ es 4: $P(x) = (x + 2) \cdot B(x) + 4$

Por el teorema del resto: $P(2) = 12$

Si sustituimos en la igualdad tenemos:

$P(2) = 12 = (2 + 2) \cdot B(2) + 4 \longrightarrow B(2) = 2$, por tanto, el resto de dividir $B(x)$ entre $(x - 2)$ es 2.

Entonces $B(x) = (x - 2) \cdot C(x) + 2$

Y si sustituimos en la segunda igualdad tenemos:

$P(x) = (x + 2) \cdot B(x) + 4 = (x + 2) \cdot [(x - 2) \cdot C(x) + 2] + 4 =$

$= (x + 2) \cdot (x - 2) \cdot C(x) + 2(x + 2) + 4 = (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot C(x) + (2x + 8)$

Por tanto, el resto de dividir $P(x)$ entre $(x^2 - 4)$ es $(2x + 8)$.

91. Página 70

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 51 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 & 1 & \dots & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \dots & \boxed{50} \end{array}$$

El resto es 50.

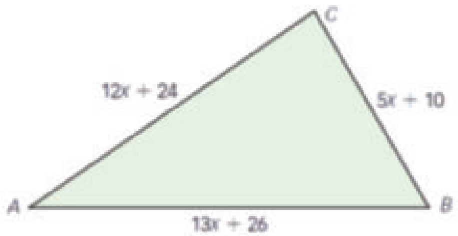
92. Página 70

$P(x) = \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$ → Este polinomio multiplicado por cualquier constante tendrá también estas raíces.

93. Página 70

Sí. Por ejemplo $P(x) = (x-a)(x+a)(x^2-a) = x^4 - ax^2 - a^2x^2 + a^3$.

94. Página 70



$(12x+24)^2 + (5x+10)^2 = 13^2(x+2)^2 = (13x+26)^2$

95. Página 70

$(Ax-7)(5x+B) = Cx^2 - 6x - 14 \longrightarrow 5Ax^2 + ABx - 35x - 7B = Cx^2 - 6x - 14$

$5A = C$ $\quad AB - 35 = -6$ $\quad -7B = -14$

Por tanto, $A = \frac{29}{2}$, $B = 2$ y $C = \frac{145}{2}$.

96. Página 70

$P(x) = Ax^2 + Bx + C$

$P(1) = A + B + C = 0$ $\quad P(-1) = A - B + C = 10 \longrightarrow B = -5$ $\quad P(2) = 4A + 2B + C = 5 \longrightarrow 4A - 10 + C = 5 \longrightarrow 4A + C = 15$

$A + C = 5 \longrightarrow A = \frac{10}{3}$ y $C = \frac{5}{3}$

Por tanto, $P(x) = \frac{10}{3}x^2 - 5x + \frac{5}{3}$.

97. Página 70

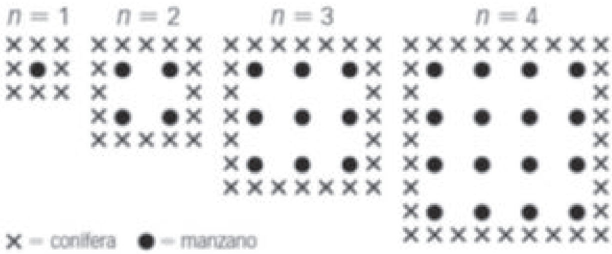
a) $P\left(\frac{1}{2}\right) = 8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$ $\qquad P(x) = 8\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

b) $P\left(\frac{1}{2}\right) = 24\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 22\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) + 3 = 0$ $\qquad P(x) = 24\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)$

c) $P\left(\frac{1}{2}\right) = 18\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 27\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 13\cdot\left(\frac{1}{2}\right) - 2 = 0$ $\qquad P(x) = 18\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)$

PRUEBAS PISA

98. Página 71



a) $n^2 = 8n \rightarrow n^2 - 8n = 0$ si $n = 0$ o $n = 8$, por tanto, el número que buscamos es $n = 8$.

b) Comparamos n^2 y $8n$.

Como $n^2 = n \cdot n$, para que $n \cdot n > 8n$ con n positivo, se deduce que $n > 8$.

A partir de $n = 9$ crecen más rápidamente los manzanos que las coníferas.

Ecuaciones e inecuaciones

4

CLAVES PARA EMPEZAR

1. Página 72

a) $-6(x-2)+5=-2(3x-3)+11$

$-6(x-2)+5=-2(3x-3)+11 \xrightarrow{x=0} 12+5=6+11 \to 17=17$

$-6(x-2)+5=-2(3x-3)+11 \xrightarrow{x=1} 6+5=11 \to 11=11$

$-6(x-2)+5=-2(3x-3)+11 \xrightarrow{x=2} 5=-6+11 \to 5=5$

Si seguimos dando valores a *x*, la igualdad siempre es cierta ⟶ Es una identidad.

b) $6(x-1)=4(x-2)-3(-x-5)$

$6(x-1)=4(x-2)-3(-x-5) \xrightarrow{x=-13} -84=-60-24 \to -84=-84$

$6(x-1)=4(x-2)-3(-x-5) \xrightarrow{x=0} -6=-8+15 \to -6\neq 7$

Existe al menos un valor, $x=0$, para el cual la igualdad no es cierta ⟶ Es una ecuación.

2. Página 72

Respuesta abierta.

a) [4, 6] ⟶ Son todos los números mayores o iguales que 4 y menores o iguales que 6. Por ejemplo: 4, 5 y 6.

b) (–7, –5) ⟶ Todos los números mayores que –7 y menores que –5. Por ejemplo: $\frac{-13}{2}, -6$ y $\frac{-11}{2}$.

c) $(-\infty, -5]$ ⟶ Todos los números menores o iguales que –5. Por ejemplo: $-10, -8$ y -6.

d) [8, 9) ⟶ Todos los números mayores o iguales que 8 y menores que 9. Por ejemplo: $8, \frac{33}{4}$ y $\frac{17}{2}$.

VIDA COTIDIANA

EL TRACTOR. Página 73

$x\cdot x=125 \to x^2=125 \to x=5\sqrt{5}$ ⟶ Cada lado del terreno mide $5\sqrt{5}$ m.

RESUELVE EL RETO

RETO 1. Página 76

Las soluciones de una ecuación de segundo grado del tipo $ax^2+bx+c=0$ son de la forma:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Si $b^2-4ac=0 \to x_1=\frac{-b+0}{2a}, x_2=\frac{-b-0}{2a} \to x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$

Si $b^2-4ac<0$ ⟶ No tiene ninguna solución.

Si $b^2-4ac>0$ ⟶ La raíz cuadrada es un número positivo, digamos *k*, y por eso existen dos raíces diferentes:

$$x_1=\frac{-b+k}{2a}, x_2=\frac{-b-k}{2a}.$$

ACTIVIDADES

1. Página 74

a) $4x-3=5\cdot(x-1)-x+2$

$4x-3=5\cdot(x-1)-x+2 \xrightarrow{x=0} -3=-5+2 \rightarrow -3=-3$

$4x-3=5\cdot(x-1)-x+2 \xrightarrow{x=1} 1=-1+2 \rightarrow 1=1$

$4x-3=5\cdot(x-1)-x+2 \xrightarrow{x=2} 5=5-2+2 \rightarrow 5=5$

Si seguimos dando valores a *x*, la igualdad siempre es cierta → No es una ecuación.

b) $4x-3=5\cdot(x-1)+x-2$

$4x-3=5\cdot(x-1)+x-2 \xrightarrow{x=2} 5=5$

$4x-3=5\cdot(x-1)+x-2 \xrightarrow{x=0} -3=-5-2 \rightarrow -3\neq -7$

Existe al menos un valor, $x=0$, para el cual la igualdad no es cierta → Es una ecuación.

c) $4(x-3)+10=5x-x-2$

$4(x-3)+10=5x-x-2 \xrightarrow{x=0} -2=-2$

$4(x-3)+10=5x-x-2 \xrightarrow{x=1} -8+10=2 \rightarrow 2=2$

$4(x-3)+10=5x-x-2 \xrightarrow{x=2} -4+10=10-4 \rightarrow 6=6$

Si seguimos dando valores a *x*, la igualdad siempre es cierta → No es una ecuación.

d) $4(x-3)=5x-8$

$4(x-3)=5x-8 \xrightarrow{x=-4} -28=-28$

$4(x-3)=5x-8 \xrightarrow{x=0} -12\neq -8$

Existe al menos un valor, x = 0, para el cual la igualdad no es cierta → Es una ecuación.

2. Página 74

a) $2(x-4)-1=-x \xrightarrow{x=3} 2\cdot(-1)-1=-3 \rightarrow -2-1=-3 \rightarrow -3=-3$ → Es solución.

b) $2x+(5x+3)=22 \xrightarrow{x=3} 6+(15+3)=22 \rightarrow 24\neq 22$ → No es solución de la ecuación.

3. Página 74

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Se podrían encontrar infinitas ecuaciones:

$x+y=-1 \xrightarrow{x=2, y=-3} 2-3=-1 \rightarrow -1=-1$ $\qquad$ $x-y=5 \xrightarrow{x=2, y=-3} 2+3=5 \rightarrow 5=5$

4. Página 75

a) $5(x-2)+x-(4x-7)=9 \rightarrow 5x-10+x-4x+7-9=0 \rightarrow 2x-12=0 \rightarrow x=\frac{12}{2}=6$

b) $8-3(x+4)-(2x-5)(-2)=3x \rightarrow 8-3x-12+4x-10-3x=0 \rightarrow -2x-14=0 \rightarrow x=-\frac{14}{2}=-7$

c) $(3x+8)(-2)-(-x+5)5=-1 \rightarrow -6x-16+5x-25+1=0 \rightarrow -x-40=0 \rightarrow x=-40$

d) $9+2x-(3+4x)=-6(1-x) \rightarrow 9+2x-3-4x+6-6x=0 \rightarrow -8x+12=0 \rightarrow x=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$

e) $x+4(-2x+3)-10=1-3(x+5) \rightarrow x-8x+12-10-1+3x+15=0 \rightarrow -4x+16=0 \rightarrow x=4$

5. Página 75

a) $2x\cdot(1-x)=x-6 \rightarrow 2x-2x^2-x+6=0 \rightarrow -2x^2+x+6=0$

Como $a=-2, b=1$ y $c=6$:

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot2\cdot6}}{-2\cdot2}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{-4}=\begin{cases}x_1=\dfrac{6}{-4}=-\dfrac{3}{2}\\ x_2=2\end{cases}$$

b) $(x+2)\cdot2x+(x-1)^2=2 \rightarrow 2x^2+4x+x^2-2x+1-2=0 \rightarrow 3x^2+2x-1=0$

Como $a=3, b=2$ y $c=-1$:

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+4\cdot3\cdot1}}{2\cdot3}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{6}=\begin{cases}x_1=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}\\ x_2=\dfrac{-6}{6}=-1\end{cases}$$

6. Página 75

$x(x-1)=0 \rightarrow$ Sí es una ecuación de segundo grado.

$x(x-2)=x^2 \rightarrow$ No es una ecuación de segundo grado ya que los términos al cuadrado se eliminan.

7. Página 76

a) $x^2+x-20=0$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+80}}{2}=\frac{-1\pm9}{2}=\begin{cases}x_1=4\\ x_2=-5\end{cases}$$

b) $x^2-x-90=0$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+360}}{2}=\frac{1\pm19}{2}=\begin{cases}x_1=-9\\ x_2=10\end{cases}$$

c) $x^2+6x-16=0$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{36+64}}{2}=\frac{-6\pm10}{2}=\begin{cases}x_1=2\\ x_2=-8\end{cases}$$

d) $x^2-4x-21=0$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16+84}}{2}=\frac{4\pm10}{2}=\begin{cases}x_1=7\\ x_2=-3\end{cases}$$

e) $2x^2-13x+6=0$

$$x=\frac{13\pm\sqrt{169-48}}{4}=\frac{13\pm11}{4}=\begin{cases}x_1=6\\ x_2=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

f) $3x^2+14x-24=0$

$$x=\frac{-14\pm\sqrt{196+288}}{6}=\frac{-14\pm22}{6}=\begin{cases}x_1=\dfrac{4}{3}\\ x_2=-6\end{cases}$$

8. Página 76

a) $x^2+x=0 \rightarrow x(x+1)=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-1 \end{cases}$

b) $x^2-16=0 \rightarrow x=\pm\sqrt{16} \rightarrow \begin{cases} x_1=4 \\ x_2=-4 \end{cases}$

c) $2x^2=4x \rightarrow x^2=2x \rightarrow x^2-2x=0$

$x^2-2x=0 \rightarrow x(x-2)=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=2 \end{cases}$

d) $8x^2-x=3x \rightarrow 8x^2-4x=0 \rightarrow 2x^2-x=0$

$2x^2-x=0 \rightarrow x(2x-1)=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

e) $2x^2-6=0 \rightarrow x^2-3=0$

$x^2-3=0 \rightarrow x=\pm\sqrt{3} \rightarrow \begin{cases} x_1=\sqrt{3} \\ x_2=-\sqrt{3} \end{cases}$

f) $3x^2-24=0 \rightarrow x^2-8=0$

$x^2-8=0 \rightarrow x=\pm\sqrt{8} \rightarrow \begin{cases} x_1=2\sqrt{2} \\ x_2=-2\sqrt{2} \end{cases}$

9. Página 76

a) $x^2+x+1=0 \rightarrow \Delta=1^2-4\cdot1\cdot1=1-4<0 \rightarrow$ La ecuación no tiene ninguna solución.

b) $-x^2-3x+5=0 \rightarrow \Delta=(-3)^2-4\cdot5\cdot(-1)=\ 9+20>0 \rightarrow$ La ecuación tiene dos soluciones.

10. Página 77

a) $(x^2-4)(x+5)x=0 \rightarrow$ Ecuación factorizada.

b) $x-\sqrt{x-1}=\sqrt{4x+9} \rightarrow x-\sqrt{x-1}-\sqrt{4x+9}=0 \rightarrow$ Ecuación radical.

c) $\dfrac{x^2}{x+3}-x=2 \rightarrow \dfrac{x^2}{x+3}-x-2=0 \rightarrow$ Ecuación racional.

d) $x^2-x^4=x^4+5x^2 \rightarrow 2x^4+6x^2=0 \rightarrow x^4+3x^2=0 \rightarrow$ Ecuación bicuadrada.

11. Página 77

Respuesta abierta.

a) $0, 1, 2$ y $3 \rightarrow x(x-1)(x-2)(x-3)=0$

b) $\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3} \rightarrow (x^2-2)(x^2-3)=0$

c) $2, -2, 4, -5 \rightarrow (x^2-4)(x-4)(x+5)=0$

d) 0 y 1 dobles $\rightarrow x^2(x-1)^2=0$

12. Página 77

$$\frac{8}{\sqrt{x}}-\frac{12}{x-1}=0$$

$x=2\rightarrow\frac{8}{\sqrt{2}}-12\neq 0$ $\quad$ $x=3\rightarrow\frac{8}{\sqrt{3}}-6\neq 0$ $\quad$ $x=4\rightarrow\frac{8}{2}-\frac{12}{3}=4-4=0$

Por tanto, $x=4$.

13. Página 78

a) $x^4-20x^2+64=0\rightarrow(x^2)^2-20x^2+64=0\xrightarrow{t=x^2}t^2-20t+64=0$

$$t=\frac{20\pm\sqrt{400-256}}{2}=\frac{20\pm 12}{2}=\begin{cases}t_1=16\\ t_2=4\end{cases}$$

Como $t=x^2\rightarrow\begin{cases}\text{si } t_1=16\rightarrow x=\pm 4\\ \text{si } t_2=4\rightarrow x=\pm 2\end{cases}$

Hay cuatro soluciones: $x_1=4, x_2=-4, x_3=2$ y $x_4=-2$

b) $x^4+16=17x^2\rightarrow(x^2)^2-17x^2+16=0\xrightarrow{t=x^2}t^2-17t+16=0$

$$t=\frac{17\pm\sqrt{289-64}}{2}=\frac{17\pm 15}{2}=\begin{cases}t_1=16\\ t_2=1\end{cases}$$

Como $t=x^2\rightarrow\begin{cases}\text{si } t_1=16\rightarrow x=\pm 4\\ \text{si } t_2=1\rightarrow x=\pm 1\end{cases}$

Hay cuatro soluciones: $x_1=4, x_2=-4, x_3=1$ y $x_4=-1$

c) $x^4-26x^2+25=0\rightarrow(x^2)^2-26x^2+25=0\xrightarrow{t=x^2}t^2-26t+25=0$

$$t=\frac{26\pm\sqrt{676-100}}{2}=\frac{26\pm 24}{2}=\begin{cases}t_1=1\\ t_2=25\end{cases}$$

Como $t=x^2\rightarrow\begin{cases}\text{si } t_1=1\rightarrow x=\pm 1\\ \text{si } t_2=25\rightarrow x=\pm 5\end{cases}$

Hay cuatro soluciones: $x_1=1, x_2=-1, x_3=5$ y $x_4=-5$

d) $25x^2-144=x^4\rightarrow(x^2)^2-25x^2+144=0\xrightarrow{t=x^2}t^2-25t+144=0$

$$t=\frac{25\pm\sqrt{625-576}}{2}=\frac{25\pm 7}{2}=\begin{cases}t_1=16\\ t_2=9\end{cases}$$

Como $t=x^2\rightarrow\begin{cases}\text{si } t_1=16\rightarrow x=\pm 4\\ \text{si } t_2=9\rightarrow x=\pm 3\end{cases}$

Hay cuatro soluciones: $x_1=4, x_2=-4, x_3=3$ y $x_4=-3$

e) $x^4-40x^2+144=0\rightarrow(x^2)^2-40x^2+144=0\xrightarrow{t=x^2}t^2-40t+144=0$

$$t=\frac{40\pm\sqrt{1600-576}}{2}=\frac{40\pm 32}{2}=\begin{cases}t_1=36\\ t_2=4\end{cases}$$

Como $t=x^2\rightarrow\begin{cases}\text{si } t_1=36\rightarrow x=\pm 6\\ \text{si } t_2=4\rightarrow x=\pm 2\end{cases}$

Hay cuatro soluciones: $x_1=6, x_2=-6, x_3=2$ y $x_4=-2$

f) $x^2(x^2-36)-x^2=-36 \rightarrow x^4-37x^2+36=0 \rightarrow (x^2)^2-37x^2+36=0 \xrightarrow{t=x^2} t^2-37t+36=0$

$$t=\frac{37\pm\sqrt{1369-144}}{2}=\frac{37\pm 35}{2}=\begin{cases} t_1=36 \\ t_2=1 \end{cases}$$

Como $t=x^2 \rightarrow \begin{cases} \text{si } t_1=36 \rightarrow x=\pm 6 \\ \text{si } t_2=1 \rightarrow x=\pm 1 \end{cases}$

Hay cuatro soluciones: $x_1=6, x_2=-6, x_3=1$ y $x_4=-1$

g) $x^4+9=10x^2 \rightarrow (x^2)^2-10x^2+9=0 \xrightarrow{t=x^2} t^2-10t+9=0$

$$t=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{2}=\frac{10\pm 8}{2}=\begin{cases} t_1=9 \\ t_2=1 \end{cases}$$

Como $t=x^2 \rightarrow \begin{cases} \text{si } t_1=9 \rightarrow x=\pm 3 \\ \text{si } t_2=1 \rightarrow x=\pm 1 \end{cases}$

Hay cuatro soluciones: $x_1=3, x_2=-3, x_3=1$ y $x_4=-1$

h) $x^4-29x^2+100=0 \rightarrow (x^2)^2-29x^2+100=0 \xrightarrow{t=x^2} t^2-29t+100=0$

$$t=\frac{29\pm\sqrt{841-400}}{2}=\frac{29\pm 21}{2}=\begin{cases} t_1=25 \\ t_2=4 \end{cases}$$

Como $t=x^2 \rightarrow \begin{cases} \text{si } t_1=25 \rightarrow x=\pm 5 \\ \text{si } t_2=4 \rightarrow x=\pm 2 \end{cases}$

Hay cuatro soluciones: $x_1=5, x_2=-5, x_3=2$ y $x_4=-2$

i) $13x^2-x^4=36 \rightarrow (x^2)^2-13x^2+36=0 \xrightarrow{t=x^2} t^2-13t+36=0$

$$t=\frac{13\pm\sqrt{169-144}}{2}=\frac{13\pm 5}{2}=\begin{cases} t_1=9 \\ t_2=4 \end{cases}$$

Como $t=x^2 \rightarrow \begin{cases} \text{si } t_1=9 \rightarrow x=\pm 3 \\ \text{si } t_2=4 \rightarrow x=\pm 2 \end{cases}$

Hay cuatro soluciones: $x_1=3, x_2=-3, x_3=2$ y $x_4=-2$

j) $(x^2-25)x^2=(x^2-25)9 \rightarrow (x^2)^2-34x^2+225=0 \xrightarrow{t=x^2} t^2-34t+225=0$

$$t=\frac{34\pm\sqrt{1156-900}}{2}=\frac{34\pm 16}{2}=\begin{cases} t_1=25 \\ t_2=9 \end{cases}$$

Como $t=x^2 \rightarrow \begin{cases} \text{si } t_1=25 \rightarrow x=\pm 5 \\ \text{si } t_2=9 \rightarrow x=\pm 3 \end{cases}$

Hay cuatro soluciones: $x_1=5, x_2=-5, x_3=3$ y $x_4=-3$

14. Página 78

a) $x^4-1=0 \rightarrow (x^2)^2-1=0 \xrightarrow{t=x^2} t^2-1=0 \rightarrow t=\pm\sqrt{1}=\begin{cases} t_1=1 \\ t_2=-1 \end{cases}$

Como $t=x^2 \rightarrow \begin{cases} \text{si } t_1=1 \rightarrow x=\pm 1 \\ \text{si } t_2=-1 \rightarrow x=\pm\sqrt{-1} \rightarrow \text{No existe solución.} \end{cases}$

Hay dos soluciones: $x_1=1$ y $x_2=-1$

b) $x^4-2x^2=8\rightarrow(x^2)^2-2x^2-8=0\xrightarrow{t=x^2}t^2-2t-8=0$

$$t=\frac{2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{2\pm 6}{2}=\begin{cases}t_1=4\\t_2=-2\end{cases}$$

$$\text{Como } t=x^2\rightarrow\begin{cases}\text{si } t_1=4\rightarrow x=\pm 2\\\text{si } t_2=-2\rightarrow x=\pm\sqrt{-2}\rightarrow\text{No existe solución.}\end{cases}$$

Hay dos soluciones: $x_1=2$ y $x_2=-2$

c) $x^4-48=13x^2\rightarrow(x^2)^2-13x^2-48=0\xrightarrow{t=x^2}t^2-13t-48=0$

$$t=\frac{13\pm\sqrt{169+192}}{2}=\frac{13\pm 19}{2}=\begin{cases}t_1=16\\t_2=-3\end{cases}$$

$$\text{Como } t=x^2\rightarrow\begin{cases}\text{si } t_1=16\rightarrow x=\pm 4\\\text{si } t_2=-3\rightarrow x=\pm\sqrt{-3}\rightarrow\text{No existe solución.}\end{cases}$$

Hay dos soluciones: $x_1=4$ y $x_2=-4$

d) $x^4-20x^2=125\rightarrow(x^2)^2-20x^2-125=0\xrightarrow{t=x^2}t^2-20t-125=0$

$$t=\frac{20\pm\sqrt{400+500}}{2}=\frac{20\pm 30}{2}=\begin{cases}t_1=25\\t_2=-5\end{cases}$$

$$\text{Como } t=x^2\rightarrow\begin{cases}\text{si } t_1=25\rightarrow x=\pm 5\\\text{si } t_2=-5\rightarrow x=\pm\sqrt{-5}\rightarrow\text{No existe solución.}\end{cases}$$

Hay dos soluciones: $x_1=5$ y $x_2=-5$

15. Página 78

a) $x^4+3x^2+2=0\xrightarrow{t=x^2}t^2+3t+2=0$

$$t=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{-3\pm 1}{2}=\begin{cases}t_1=-1\\t_2=-2\end{cases}$$

$$\text{Como } t=x^2\rightarrow\begin{cases}\text{si } t_1=-1\rightarrow x=\pm\sqrt{-1}\\\text{si } t_2=-2\rightarrow x=\pm\sqrt{-2}\end{cases}\rightarrow\text{No existe solución.}$$

b) $x^4-15x^2+50=0\xrightarrow{t=x^2}t^2-15t+50=0$

$$t=\frac{15\pm\sqrt{225-200}}{2}=\frac{15\pm 5}{2}=\begin{cases}t_1=10\\t_2=5\end{cases}$$

$$\text{Como } t=x^2\rightarrow\begin{cases}\text{si } t_1=10\rightarrow x=\pm\sqrt{10}\\\text{si } t_2=5\rightarrow x=\pm\sqrt{5}\end{cases}$$

Hay cuatro soluciones: $x_1=\sqrt{10}, x_2=-\sqrt{10}, x_3=\sqrt{5}$ y $x_4=-\sqrt{5}$

c) $x^4+2x^2=8\rightarrow(x^2)^2+2x^2-8=0\xrightarrow{t=x^2}t^2+2t-8=0$

$$t=\frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{-2\pm 6}{2}=\begin{cases}t_1=2\\t_2=-4\end{cases}$$

$$\text{Como } t=x^2\rightarrow\begin{cases}\text{si } t_1=2\rightarrow x=\pm\sqrt{2}\\\text{si } t_2=-4\rightarrow x=\pm\sqrt{-4}\rightarrow\text{No existe solución.}\end{cases}$$

Hay dos soluciones: $x_1=\sqrt{2}$ y $x_2=-\sqrt{2}$

d) $x^4+17x^2+70=0 \xrightarrow{t=x^2} t^2+17t+70=0$

$$t=\frac{-17\pm\sqrt{289-280}}{2}=\frac{-17\pm 3}{2}=\begin{cases} t_1=-7 \\ t_2=-10 \end{cases}$$

Como $t=x^2 \rightarrow \begin{cases} \text{si } t_1=-7 \rightarrow x=\pm\sqrt{-7} \\ \text{si } t_2=-10 \rightarrow x=\pm\sqrt{-10} \end{cases} \rightarrow$ No existe solución.

e) $x^4+18=9x^2 \rightarrow (x^2)^2-9x^2+18=0 \xrightarrow{t=x^2} t^2-9t+18=0$

$$t=\frac{9\pm\sqrt{81-72}}{2}=\frac{9\pm 3}{2}=\begin{cases} t_1=6 \\ t_2=3 \end{cases}$$

Como $t=x^2 \rightarrow \begin{cases} \text{si } t_1=6 \rightarrow x=\pm\sqrt{6} \\ \text{si } t_2=3 \rightarrow x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$

Hay cuatro soluciones: $x_1=\sqrt{6}, x_2=-\sqrt{6}, x_3=\sqrt{3}$ y $x_4=-\sqrt{3}$

16. Página 79

a) $x^3-7x^2-4x+28=0 \rightarrow (x-7)(x+2)(x-2)=0 \rightarrow x_1=2, x_2=-2$ y $x_3=7$

	1	−7	−4	28
2		2	−10	−28
	1	−5	−14	0
−2		−2	14	
	1	−7	0	

b) $x^3-3x^2-36x-32=0 \rightarrow (x+1)(x+4)(x-8)=0 \rightarrow x_1=-1, x_2=-4$ y $x_3=8$

	1	−3	−36	−32
		−1	4	32
−1				
	1	−4	−32	0
−4		−4	32	
	1	−8	0	

c) $x^3+7x+15=7x^2 \rightarrow x^3-7x^2+7x+15=0 \rightarrow (x+1)(x-3)(x-5)=0$

$\rightarrow x_1=-1, x_2=3$ y $x_3=5$

	1	−7	7	15
−1		−1	8	−15
	1	−8	15	0
3		3	−15	
	1	−5	0	

d) $x^3=x^2+24x+36 \rightarrow x^3-x^2-24x-36=0 \rightarrow (x+2)(x+3)(x-6)=0$

$\rightarrow x_1=-2, x_2=-3$ y $x_3=6$

	1	−1	−24	−36
−2		−2	6	36
	1	−3	−18	0
−3		−3	18	
	1	−6	0	

e) $x^3+10x^2=4x+40 \rightarrow x^3+10x^2-4x-40=0 \rightarrow (x+2)(x-2)(x+10)=0$

$\rightarrow x_1=-2, x_2=2$ y $x_3=-10$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 10 & -4 & -40 \\ -2 & & -2 & -16 & 40 \\ \hline & 1 & 8 & -20 & 0 \\ 2 & & 2 & 20 & \\ \hline & 1 & 10 & 0 & \end{array}$$

f) $x^3+x^2=22x+40 \rightarrow x^3+x^2-22x-40=0 \rightarrow (x+2)(x+4)(x-5)=0$

$\rightarrow x_1=-2, x_2=-4$ y $x_3=5$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -22 & -40 \\ -2 & & -2 & 2 & 40 \\ \hline & 1 & -1 & -20 & 0 \\ -4 & & -4 & 20 & \\ \hline & 1 & -5 & 0 & \end{array}$$

g) $x^3+3x^2=16x+48 \rightarrow x^3+3x^2-16x-48=0 \rightarrow (x+3)(x+4)(x-4)=0$

$\rightarrow x_1=-3, x_2=-4$ y $x_3=4$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -16 & -48 \\ -3 & & -3 & 0 & 48 \\ \hline & 1 & 0 & -16 & 0 \\ -4 & & -4 & 16 & \\ \hline & 1 & -4 & 0 & \end{array}$$

h) $x^3+6x^2=25x+150 \rightarrow x^3+6x^2-25x-150=0 \rightarrow (x+5)(x-5)(x+6)=0$

$\rightarrow x_1=-5, x_2=5$ y $x_3=-6$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 6 & -25 & -150 \\ 5 & & 5 & 55 & 150 \\ \hline & 1 & 11 & 30 & 0 \\ -5 & & -5 & -30 & \\ \hline & 1 & 6 & 0 & \end{array}$$

i) $x^3-2x^2+20=19x \rightarrow x^3-2x^2-19x+20=0 \rightarrow (x-1)(x+4)(x-5)=0$

$\rightarrow x_1=1, x_2=-4$ y $x_3=5$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -19 & 20 \\ 1 & & 1 & -1 & -20 \\ \hline & 1 & -1 & -20 & 0 \\ -4 & & -4 & 20 & \\ \hline & 1 & -5 & 0 & \end{array}$$

j) $x^3-12x^2+5x+150=0 \rightarrow (x+3)(x-5)(x-10)=0 \rightarrow x_1=-3, x_2=5$ y $x_3=10$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -12 & 5 & 150 \\ -3 & & -3 & 45 & -150 \\ \hline & 1 & -15 & 50 & 0 \\ 5 & & 5 & -50 & \\ \hline & 1 & -10 & 0 & \end{array}$$

17. Página 79

a) $4x^3+x^2-4x-1=0 \rightarrow (x-1)(x+1)(4x+1)=0 \rightarrow x_1=1, x_2=-1 \text{ y } x_3=-\frac{1}{4}$

	4	1	−4	−1
1		4	5	1
	4	5	1	0
−1		−4	−1	
	4	1	0	

b) $3x^3+5x^2-12x-20=0 \rightarrow (x+2)(x-2)(3x+5)=0 \rightarrow x_1=2, x_2=-2 \text{ y } x_3=-\frac{5}{3}$

	3	5	−12	−20
2		6	22	20
	3	11	10	0
−2		−6	−10	
	3	5	0	

c) $2x^3-5x^2-22x-15=0 \rightarrow (x+1)(x-5)(2x+3)=0 \rightarrow x_1=-1, x_2=5 \text{ y } x_3=-\frac{3}{2}$

	2	−5	−22	−15
−1		−2	7	15
	2	−7	−15	0
5		10	15	
	2	3	0	

d) $3x^3+2x^2-19x+6=0 \rightarrow (x-2)(x+3)(3x-1)=0 \rightarrow x_1=2, x_2=-3 \text{ y } x_3=\frac{1}{3}$

	3	2	−19	6
2		6	16	−6
	3	8	−3	0
−3		−9	3	
	3	−1	0	

e) $10x^3+27x^2-30x-7=0 \rightarrow (x-1)(10x^2+37x+7)=0 \rightarrow x_1=1, x_2=-\frac{1}{5} \text{ y } x_3=\frac{7}{2}$

	10	27	−30	−7
1		10	37	7
	10	37	7	0

$$x=\frac{-37\pm\sqrt{1369-280}}{20}=\frac{-37\pm 33}{20}=\begin{cases} x_1=-\frac{1}{5} \\ x_2=-\frac{7}{2} \end{cases}$$

f) $6x^3+11x^2-3x-2=0 \rightarrow (x+2)(6x^2-x-1)=0 \rightarrow x_1=-2, x_2=-\frac{1}{3} \text{ y } x_3=\frac{1}{2}$

	6	11	−3	−2
−2		−12	2	2
	6	−1	−1	0

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{12}=\frac{1\pm 5}{12}=\begin{cases} x_1=\frac{1}{2} \\ x_2=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

18. Página 79

No es una ecuación factorizada porque no está escrita como productos de factores.

$$(x+1)(x+2)-4(2x-1)=x^2+2x+x+2-8x+4=x^2-5x+6=0$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm1}{2}=\begin{cases}x_1=3\\x_2=2\end{cases}\rightarrow(x-3)(x-2)=0$$

19. Página 80

a) $\frac{1}{x}+\frac{1+x}{4-x}=2\rightarrow\frac{4-x}{x(4-x)}+\frac{x(1+x)}{x(4-x)}=\frac{2x(4-x)}{x(4-x)}\rightarrow 4-x+x+x^2=8x-2x^2$

$$\rightarrow 3x^2-8x+4=0\rightarrow\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{6}=\frac{8\pm4}{6}=\begin{cases}x_1=2\\x_2=\frac{2}{3}\end{cases}$$

Las posibles soluciones son: $x_1=2$ y $x_2=\frac{2}{3}$

$\frac{1}{x}+\frac{1+x}{4-x}=2\xrightarrow{x=2}\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2\rightarrow$ Es solución.

$\frac{1}{x}+\frac{1+x}{4-x}=2\xrightarrow{x=\frac{2}{3}}\frac{3}{2}+\frac{\frac{3+2}{3}}{\frac{12-2}{3}}\rightarrow\frac{10}{5}=2\rightarrow$ Es solución.

b) $\frac{3}{x}-\frac{x-1}{x+2}=\frac{x+2}{x}\rightarrow\frac{3(x+2)}{x(x+2)}-\frac{x(x-1)}{x(x+2)}=\frac{(x+2)^2}{x(x+2)}$

$$\rightarrow 3x+6-x^2+x=x^2+4x+4\rightarrow 2x^2-2=0$$

$$\rightarrow 2x^2=2\rightarrow\begin{cases}x_1=1\\x_2=-1\end{cases}$$

Las posibles soluciones son: $x_1=1$ y $x_2=-1$

$\frac{3}{x}-\frac{x-1}{x+2}=\frac{x+2}{x}\xrightarrow{x=1}\frac{3}{1}-\frac{0}{3}=\frac{3}{1}\rightarrow 3=3\rightarrow$ Es solución.

$\frac{3}{x}-\frac{x-1}{x+2}=\frac{x+2}{x}\xrightarrow{x=-1}-\frac{3}{1}-\frac{-2}{1}=-\frac{1}{1}\rightarrow-3+2=-1\rightarrow-1=-1\rightarrow$ Es solución.

c) $\frac{2}{x+3}+\frac{x-1}{x^2}=\frac{1}{x}\rightarrow\frac{2x^2}{x^2(x+3)}+\frac{(x-1)(x+3)}{x^2(x+3)}=\frac{x(x+3)}{x^2(x+3)}\rightarrow 2x^2+x^2+3x-x-3=x^2+3x$

$$\rightarrow 2x^2-x-3=0\rightarrow\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{4}=\frac{1\pm5}{4}=\begin{cases}x_1=\frac{3}{2}\\x_2=-1\end{cases}$$

Las posibles soluciones son: $x_1=\frac{3}{2}$ y $x_2=-1$

$\frac{2}{x+3}+\frac{x-1}{x^2}=\frac{1}{x}\xrightarrow{x=-1}\frac{2}{2}+\frac{-2}{1}=\frac{1}{-1}\rightarrow-1=-1\rightarrow$ Es solución.

$\frac{2}{x+3}+\frac{x-1}{x^2}=\frac{1}{x}\xrightarrow{x=\frac{3}{2}}\frac{2}{\frac{3+6}{2}}+\frac{\frac{3-2}{2}}{\frac{9}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{2}}\rightarrow\frac{4}{9}+\frac{4}{18}=\frac{2}{3}\rightarrow\frac{6}{9}=\frac{2}{3}\rightarrow$ Es solución.

d) $\frac{x}{1-x}+\frac{2}{x^2-1}=\frac{x-8}{x+1}\rightarrow\frac{-x(x+1)}{x^2-1}+\frac{2}{x^2-1}=\frac{(x-8)(x-1)}{x^2-1}\rightarrow -x^2-x+2=x^2-x-8x+8$

$\rightarrow 2x^2-8x+6=0\rightarrow\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{4}=\frac{8\pm 4}{4}=\begin{cases}x_1=3\\x_2=1\end{cases}$

Las posibles soluciones son: $x_1=3$ y $x_2=1$

$\frac{x}{1-x}+\frac{2}{x^2-1}=\frac{x-8}{x+1}\xrightarrow{x=3}\frac{3}{-2}+\frac{2}{8}=\frac{-5}{4}\rightarrow\frac{-12+2}{8}=-\frac{5}{4}\rightarrow\frac{-10}{8}=-\frac{5}{4}$ $\rightarrow$ Es solución.

$\frac{x}{1-x}+\frac{2}{x^2-1}=\frac{x-8}{x+1}\xrightarrow{x=1}\frac{1}{0}+\frac{2}{0}=\frac{-7}{2}$ $\rightarrow$ No es solución válida.

20. Página 80

a) $\frac{1}{x}=x-\frac{1+x}{4-x}\rightarrow\frac{4-x}{x(4-x)}=\frac{x^2(4-x)}{x(4-x)}-\frac{x(1+x)}{x(4-x)}\rightarrow 4-x=4x^2-x^3-x-x^2\ \rightarrow x^3-3x^2+4=0$

	1	−3	0	4
−1		−1	4	−4
	1	−4	4	0
2		2	−4	
	1	−2	0	

$\rightarrow (x-2)^2(x+1)=0$

Las posibles soluciones son: $x_1=2$ y $x_2=-1$

$\frac{1}{x}=x-\frac{1+x}{4-x}\xrightarrow{x=2}\frac{1}{2}=2-\frac{3}{2}\rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\rightarrow$ Es solución.

$\frac{1}{x}=x-\frac{1+x}{4-x}\xrightarrow{x=-1}-1=-1-\frac{0}{5}\rightarrow -1=-1\rightarrow$ Es solución.

b) $\frac{x^2+x}{3}+\frac{1}{x}=\frac{1}{6}\rightarrow\frac{2x(x^2+x)}{6x}+\frac{6}{6x}=\frac{x}{6x}\rightarrow 2x^3+2x^2+6=x\rightarrow 2x^3+2x^2-x+6=0$

	2	2	−1	6
−2		−4	4	−6
	2	−2	3	0

$\rightarrow (x+2)(2x^2-2x+3)=0$

La única posible solución es $x=-2$.

$\frac{x^2+x}{3}+\frac{1}{x}=\frac{1}{6}\xrightarrow{x=-2}\frac{4-2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{4-3}{6}=\frac{1}{6}\rightarrow$ Es solución.

c) $\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x^2+2x+1}=2x\rightarrow\frac{3(x+1)}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{2x(x+1)^2}{(x+1)^2}\rightarrow 3x+3-1=2x^3+4x^2+2x$

$\rightarrow 2x^3+4x^2-x-2=0$

	2	4	−1	−2
−2		−4	0	2
	2	0	−1	0

$(x+2)(2x^2-1)=0\rightarrow(x+2)\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$

Las posibles soluciones son: $x_1=-2, x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $x_3=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x^2+2x+1}=2x\xrightarrow{x=-2}-3-\frac{1}{4-4+1}=-4\rightarrow-4=-4\rightarrow \text{ Es solución.}$$

$$\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x^2+2x+1}=2x\xrightarrow{x=\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{3}{\frac{1}{\sqrt{2}}+1}-\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}+1}=\frac{2}{\sqrt{2}}\rightarrow$$

$$\frac{3}{\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}-\frac{1}{\frac{\sqrt{2}+4+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}=\sqrt{2}\rightarrow\frac{3\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}-\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+4}=\sqrt{2}\rightarrow\frac{14+10\sqrt{2}}{7\sqrt{2}+10}=\sqrt{2}\rightarrow$$

$$\frac{(14+10\sqrt{2})\cdot(7\sqrt{2}-10)}{(7\sqrt{2}+10)\cdot(7\sqrt{2}-10)}=\sqrt{2}\rightarrow\frac{98\sqrt{2}-140+140-100\sqrt{2}}{-2}=\sqrt{2}\rightarrow\frac{-2\sqrt{2}}{-2}=\sqrt{2}\rightarrow\sqrt{2}=\sqrt{2}\rightarrow \text{ Es solución.}$$

$$\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x^2+2x+1}=2x\xrightarrow{x=-\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{3}{-\frac{1}{\sqrt{2}}+1}-\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{2}{\sqrt{2}}+1}=-\frac{2}{\sqrt{2}}\rightarrow$$

$$\frac{3}{\frac{-1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}-\frac{1}{\frac{\sqrt{2}-4+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}=-\sqrt{2}\rightarrow\frac{3\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}}-\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-4}=-\sqrt{2}\rightarrow\frac{14-10\sqrt{2}}{-7\sqrt{2}+10}=-\sqrt{2}\rightarrow$$

$$\frac{(14-10\sqrt{2})\cdot(7\sqrt{2}+10)}{(-7\sqrt{2}+10)\cdot(7\sqrt{2}+10)}=-\sqrt{2}\rightarrow\frac{98\sqrt{2}+140-140-100\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}\rightarrow\frac{-2\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}\rightarrow-\sqrt{2}=-\sqrt{2}\rightarrow \text{ Es solución.}$$

d) $\frac{2}{3+4x}+\frac{x}{x+1}=\frac{11}{14}\rightarrow\frac{28(x+1)}{14(3+4x)(x+1)}+\frac{14x(3+4x)}{14(3+4x)(x+1)}=\frac{11(3+4x)(x+1)}{14(3+4x)(x+1)}$

$$28x+28+42x+56x^2=33x+33+44x^2+44x\rightarrow12x^2-7x-5=0$$

Las posibles soluciones son: $x_1=1, x_2=-\frac{5}{12}$

$$\frac{2}{3+4x}+\frac{x}{x+1}=\frac{11}{14}\xrightarrow{x=1}\frac{2}{3+4}+\frac{1}{1+1}=\frac{11}{14}\rightarrow\frac{11}{14}=\frac{11}{14}\rightarrow \text{Es solución.}$$

$$\frac{2}{3+4x}+\frac{x}{x+1}=\frac{11}{14}\xrightarrow{x=-\frac{5}{12}}\frac{2}{3+4\left(-\frac{5}{12}\right)}+\frac{\left(-\frac{5}{12}\right)}{\left(-\frac{5}{12}\right)+1}=\frac{11}{14}\rightarrow\frac{3}{2}-\frac{5}{7}=\frac{11}{14}\rightarrow\frac{11}{14}=\frac{11}{14}\rightarrow \text{Es solución.}$$

21. Página 81

a) $\sqrt{x+3}=x-3\rightarrow(\sqrt{x+3})^2=(x-3)^2\rightarrow x+3=x^2-6x+9\rightarrow x^2-7x+6=0\rightarrow$

$$\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{2}=\frac{7\pm5}{2}=\begin{cases}x_1=6\\x_2=1\end{cases}$$

$\sqrt{x+3}=x-3\xrightarrow{x=6}3=3\rightarrow$ Es solución.

$\sqrt{x+3}=x-3\xrightarrow{x=1}2\neq-2\rightarrow$ No es solución.

b) $\sqrt{5-2x}-x=-1\rightarrow\sqrt{5-2x}=x-1\rightarrow(\sqrt{5-2x})^2=(x-1)^2\rightarrow$

$$5-2x=x^2-2x+1\rightarrow x^2-4=0\rightarrow\quad x^2=4\rightarrow\begin{cases}x_1=2\\x_2=-2\end{cases}$$

$\sqrt{5-2x}-x=-1\xrightarrow{x=2}\sqrt{5-4}-2=-1\rightarrow-1=-1\rightarrow$ Es solución.

$\sqrt{5-2x}-x=-1\xrightarrow{x=-2}\sqrt{5+4}+2=-1\rightarrow5\neq-1\rightarrow$ No es solución.

c) $10-4\sqrt{10+x}=x+8 \rightarrow 10-x-8=4\sqrt{10+x} \rightarrow (2-x)^2=(4\sqrt{10+x})^2 \rightarrow$

$4-4x+x^2=160+16x \rightarrow x^2-20x-156=0 \rightarrow$

$\frac{20\pm\sqrt{400+624}}{2}=\frac{20\pm 32}{2}=\begin{cases} x_1=26 \\ x_2=-6 \end{cases}$

$10-4\sqrt{10+x}=x+8 \xrightarrow{x=26} 10-4\sqrt{36}=34 \rightarrow -14\neq 34 \longrightarrow$ No es solución.

$10-4\sqrt{10+x}=x+8 \xrightarrow{x=-6} 10-4\sqrt{4}=2 \rightarrow 2=2 \longrightarrow$ Es solución.

d) $2\sqrt{4x+13}=1+x \rightarrow 16x+52=1+2x+x^2 \rightarrow x^2-14x-51=0 \rightarrow$

$\frac{14\pm\sqrt{196+204}}{2}=\frac{14\pm 20}{2}=\begin{cases} x_1=17 \\ x_2=-3 \end{cases}$

$2\sqrt{4x+13}=1+x \xrightarrow{x=17} 18=18 \longrightarrow$ Es solución.

$2\sqrt{4x+13}=1+x \xrightarrow{x=-3} 2\neq -2 \longrightarrow$ No es solución.

e) $20-\sqrt{5x+1}=5x+1 \rightarrow (19-5x)^2=(\sqrt{5x+1})^2 \rightarrow 361-190x+25x^2=5x+1 \rightarrow$

$25x^2-195x+360=0 \rightarrow 5x^2-39x+72=0 \rightarrow$

$\frac{39\pm\sqrt{1521-1440}}{10}=\frac{39\pm 9}{10}=\begin{cases} x_1=\frac{48}{10}=\frac{24}{5} \\ x_2=3 \end{cases}$

$20-\sqrt{5x+1}=5x+1 \xrightarrow{x=\frac{24}{5}} 20-\sqrt{25}=25 \rightarrow 15\neq 25 \longrightarrow$ No es solución.

$20-\sqrt{5x+1}=5x+1 \xrightarrow{x=3} 20-\sqrt{16}=16 \rightarrow 16=16 \longrightarrow$ Es solución.

f) $45=3x+\sqrt{x-5} \rightarrow (45-3x)^2=(\sqrt{x-5})^2 \rightarrow 2\,025-270x+9x^2=x-5 \rightarrow 9x^2-271x+2\,030=0$

$\frac{271\pm\sqrt{73\,441-73\,080}}{18}=\frac{271\pm 19}{18}=\begin{cases} x_1=\frac{145}{9} \\ x_2=14 \end{cases}$

$45=3x+\sqrt{x-5} \xrightarrow{x=\frac{145}{9}} 45=\frac{145}{3}+\sqrt{\frac{100}{9}} \rightarrow 45\neq\frac{155}{3} \longrightarrow$ No es solución.

$45=3x+\sqrt{x-5} \xrightarrow{x=14} 45=42+3 \rightarrow 45=45 \longrightarrow$ Es solución.

g) $7x=\sqrt{7x+2}+5x \rightarrow (2x)^2=(\sqrt{7x+2})^2 \rightarrow 4x^2-7x-2=0 \rightarrow$

$\frac{7\pm\sqrt{49+32}}{8}=\frac{7\pm 9}{8}=\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=\frac{-2}{8}=-\frac{1}{4} \end{cases}$

$7x=\sqrt{7x+2}+5x \xrightarrow{x=2} 14=\sqrt{14+2}+10 \rightarrow 14=14 \longrightarrow$ Es solución.

$7x=\sqrt{7x+2}+5x \xrightarrow{x=-\frac{1}{4}} -\frac{7}{4}=\sqrt{\frac{-7}{4}+2}-\frac{5}{4} \rightarrow -\frac{7}{4}=\frac{2}{4}-\frac{5}{4} \rightarrow \frac{-7}{4}\neq\frac{-3}{4} \longrightarrow$ No es solución.

h) $x=2\sqrt{4x+9} \rightarrow x^2=4(\sqrt{4x+9})^2 \rightarrow x^2-16x-36=0 \rightarrow$

$\frac{16\pm\sqrt{256+144}}{2}=\frac{16\pm 20}{2}=\begin{cases} x_1=18 \\ x_2=-2 \end{cases}$

$x=2\sqrt{4x+9} \xrightarrow{x=18} 18=2\sqrt{81} \rightarrow 18=18 \longrightarrow$ Es solución.

$x=2\sqrt{4x+9} \xrightarrow{x=-2} -2=2\sqrt{-8+9} \rightarrow -2\neq 2 \longrightarrow$ No es solución.

22. Página 81

a) $\sqrt{2x}-1=\sqrt{x+1}\rightarrow(\sqrt{2x}-1)^2=(\sqrt{x+1})^2\rightarrow 2x-2\sqrt{2x}+1=x+1\rightarrow x^2=(2\sqrt{2x})^2\rightarrow$

$x^2=8x\rightarrow x^2-8x=0\rightarrow x(x-8)=0\rightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=8\end{cases}$

$\sqrt{2x}-1=\sqrt{x+1}\xrightarrow{x=0}-1\neq 1$ → No es solución.

$\sqrt{2x}-1=\sqrt{x+1}\xrightarrow{x=8}\sqrt{16}-1=\sqrt{8+1}\rightarrow 3=3$ → Es solución.

b) $3+\sqrt{3x+10}=\sqrt{x-4}+7\rightarrow(\sqrt{3x+10})^2=(\sqrt{x-4}+4)^2\rightarrow 3x+10=x-4+8\sqrt{x-4}+16\rightarrow$

$2x-2=8\sqrt{x-4}\rightarrow(x-1)^2=(4\sqrt{x-4})^2\rightarrow x^2-2x+1=16x-64\rightarrow x^2-18x+65=0\rightarrow$

$\dfrac{18\pm\sqrt{324-260}}{2}=\dfrac{18\pm 8}{2}=\begin{cases}x_1=13\\x_2=5\end{cases}$

$3+\sqrt{3x+10}=\sqrt{x-4}+7\xrightarrow{x=13}3+7=3+7\rightarrow 10=10$ → Es solución.

$3+\sqrt{3x+10}=\sqrt{x-4}+7\xrightarrow{x=5}3+\sqrt{25}=1+7\rightarrow 8=8$ → Es solución.

c) $8+\sqrt{2x-3}=3\sqrt{x-1}\rightarrow(8+\sqrt{2x-3})^2=(3\sqrt{x-1})^2\rightarrow 64+16\sqrt{2x-3}+2x-3=9x-9\rightarrow$

$(16\sqrt{2x-3})^2=(7x-70)^2\rightarrow 512x-768=49x^2-980x+4900\rightarrow 49x^2-1492x+5668=0\rightarrow$

$\dfrac{1492\pm\sqrt{2226064-1110928}}{98}=\dfrac{1492\pm 1056}{98}=\begin{cases}x_1=26\\x_2=\dfrac{218}{49}\end{cases}$

$8+\sqrt{2x-3}=3\sqrt{x-1}\xrightarrow{x=26}8+7=15\rightarrow 15=15$ → Es solución.

$8+\sqrt{2x-3}=3\sqrt{x-1}\xrightarrow{x=\frac{218}{49}}8+\sqrt{\dfrac{436-147}{49}}=3\sqrt{\dfrac{218-49}{49}}\rightarrow$

$8+\dfrac{17}{7}=\dfrac{39}{7}\rightarrow\dfrac{73}{7}\neq\dfrac{39}{7}$ → No es solución.

d) $\sqrt{7x+1}-\sqrt{x-1}=4\rightarrow(\sqrt{7x+1})^2=(\sqrt{x-1}+4)^2\rightarrow 7x+1=x-1+8\sqrt{x-1}+16\rightarrow$

$(6x-14)^2=(8\sqrt{x-1})^2\rightarrow 36x^2-168x+196=64x-64\rightarrow 36x^2-232x+260=0\rightarrow$

$9x^2-58x+65=0\rightarrow\dfrac{58\pm\sqrt{3364-2340}}{18}=\dfrac{58\pm 32}{18}=\begin{cases}x_1=5\\x_2=\dfrac{13}{9}\end{cases}$

$\sqrt{7x+1}-\sqrt{x-1}=4\xrightarrow{x=5}6-2=4\rightarrow 4=4$ → Es solución.

$\sqrt{7x+1}-\sqrt{x-1}=4\xrightarrow{x=\frac{13}{9}}\sqrt{\dfrac{91+9}{9}}-\sqrt{\dfrac{13-9}{9}}=4\rightarrow\dfrac{10}{3}-\dfrac{2}{3}=4\rightarrow\dfrac{8}{3}\neq 4$ → No es solución.

e) $x-\sqrt{x+3}=\sqrt{x+3}\rightarrow x^2=(2\sqrt{x+3})^2\rightarrow x^2=4x+12\rightarrow x^2-4x-12=0\rightarrow$ $x_1=6$ y $x_2=-2$

$x-\sqrt{x+3}=\sqrt{x+3}\xrightarrow{x=6}6-\sqrt{9}=3\rightarrow 3=3$ → Es solución.

$x-\sqrt{x+3}=\sqrt{x+3}\xrightarrow{x=-2}-2-1=1\rightarrow-3\neq 1$ → No es solución.

f) $7-\sqrt{2x+5}=\sqrt{x-1}-1\rightarrow(8-\sqrt{2x+5})^2=(\sqrt{x-1})^2\rightarrow 64-16\sqrt{2x+5}+2x+5=x-1\rightarrow$

$(70+x)^2=(16\sqrt{2x+5})^2\rightarrow 4900+140x+x^2=512x+1280\rightarrow x^2-372x+3620=0\rightarrow$ $x_1=362$ y $x_2=10$

$7-\sqrt{2x+5}=\sqrt{x-1}-1\xrightarrow{x=362}7-27=19-1\rightarrow-20\neq 18$ → No es solución.

$7-\sqrt{2x+5}=\sqrt{x-1}-1\xrightarrow{x=10}7-5=2\rightarrow 2=2$ → Es solución.

23. Página 81

a) $\sqrt{x+2}+\sqrt{18-x}=\sqrt{10+13x} \rightarrow (\sqrt{x+2}+\sqrt{18-x})^2=(\sqrt{10+13x})^2 \rightarrow$

$x+2+2\sqrt{(x+2)(18-x)}+18-x=10+13x \rightarrow (2\sqrt{-x^2+16x+36})^2=(13x-10)^2 \rightarrow$

$-4x^2+64x+144=169x^2-260x+100 \rightarrow 173x^2-324x-44=0 \rightarrow$

$$\frac{324 \pm \sqrt{104\,976+30\,448}}{346}=\frac{324 \pm 368}{346}=\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-\dfrac{44}{346}=-\dfrac{22}{173} \end{cases}$$

$\sqrt{x+2}+\sqrt{18-x}=\sqrt{10+13x} \xrightarrow{x=2} 2+4=6 \rightarrow 6=6$ $\rightarrow$ Es solución.

$\sqrt{x+2}+\sqrt{18-x}=\sqrt{10+13x} \xrightarrow{x=-\frac{22}{173}} \sqrt{\dfrac{324}{173}}+\sqrt{\dfrac{3\,136}{173}}=\sqrt{\dfrac{1444}{173}} \rightarrow$

$\dfrac{18+56}{\sqrt{173}} \neq \dfrac{38}{\sqrt{173}}$ $\rightarrow$ No es solución.

b) $\sqrt{8-x}=\sqrt{2x+6}+\sqrt{x+2} \rightarrow (\sqrt{8-x})^2=(\sqrt{2x+6}+\sqrt{x+2})^2 \rightarrow$

$8-x=2x+6+2\sqrt{(2x+6)(x+2)}+x+2 \rightarrow (2\sqrt{2x^2+10x+12})^2=(-4x)^2 \rightarrow$

$8x^2+40x+48=16x^2 \rightarrow 8x^2-40x-48=0 \rightarrow$

$$\frac{40 \pm \sqrt{1600+1536}}{16}=\frac{40 \pm 56}{16}=\begin{cases} x_1=6 \\ x_2=-1 \end{cases}$$

$\sqrt{8-x}=\sqrt{2x+6}+\sqrt{x+2} \xrightarrow{x=6} \sqrt{2}=\sqrt{18}+\sqrt{8}$ $\rightarrow$ No es solución.

$\sqrt{8-x}=\sqrt{2x+6}+\sqrt{x+2} \xrightarrow{x=-1} \sqrt{9}=3=\sqrt{4}+\sqrt{1}=2+1$ $\rightarrow$ Es solución.

24. Página 82

a) $2x+8 \geq 20 \rightarrow 2x \geq 12 \rightarrow x \geq 6$ la solución es el intervalo $[6,+\infty)$.

b) $-4x+10 \leq -6x \rightarrow 2x \leq -10 \rightarrow x \leq -5$ la solución es el intervalo $(-\infty,-5]$.

c) $3x+6 \leq -30 \rightarrow 3x \leq -36 \rightarrow x \leq -12$ la solución es el intervalo $(-\infty,-12]$.

d) $6x > 4x+14 \rightarrow 2x > 14 \rightarrow x > 7$ la solución es el intervalo $(7,+\infty)$.

e) $8x-5 \geq 13+4x \rightarrow 4x \geq 18 \rightarrow x \geq \dfrac{9}{2}$ la solución es el intervalo $\left[\dfrac{9}{2},+\infty\right)$.

25. Página 82

a) $x-6 \leq -3+2x \rightarrow -3 \leq x$

b) $5x-9 > -x+3 \rightarrow 6x > 12 \rightarrow x > 2$

26. Página 82

a) $x+2-\dfrac{4x-9}{3} < \dfrac{1}{3} \rightarrow 3(x+2)-4x+9 < 1 \rightarrow -x < -14 \rightarrow x > 14$ $\rightarrow$ La solución es $(14,+\infty)$.

b) $\dfrac{x+3}{4}-\dfrac{5x}{6} \geq 7 \rightarrow \dfrac{3x+9-10x}{12} \geq \dfrac{84}{12} \rightarrow -7x \geq 75 \rightarrow x \leq -\dfrac{75}{7}$ $\rightarrow$ La solución es $\left(-\infty,-\dfrac{75}{7}\right]$.

27. Página 83

a) $(3-x)(x+5)>0 \rightarrow$ Las raíces son $x_1=3$ y $x_2=-5$.

Los intervalos que se forman son: $(-\infty,-5),(-5,3)$ y $(3,+\infty)$

Para $(-\infty,-5)$: si $x=-6 \rightarrow 9\cdot(-1)<0$

Para $(-5,3)$: si $x=0 \rightarrow 3\cdot 5>0$

Para $(3,+\infty)$: si $x=4 \rightarrow -1\cdot 9<0$

La solución es: $(-5,3)$

b) $(x+5)(x-2)\leq 0 \rightarrow$ Las raíces son $x_1=2$ y $x_2=-5$.

Los intervalos que se forman son: $(-\infty,-5],[-5,2]$ y $[2,+\infty)$

Para $(-\infty,-5]$: si $x=-6 \rightarrow (-1)\cdot(-8)>0$

Para $[-5,2]$: si $x=0 \rightarrow 5\cdot(-2)<0$

Para $[2,+\infty)$: si $x=4 \rightarrow 9\cdot 2>0$

La solución es: $[-5,2]$

c) $(x-7)(4+x)<0 \rightarrow$ Las raíces son $x_1=7$ y $x_2=-4$.

Los intervalos que se forman son: $(-\infty,-4),(-4,7)$ y $(7,+\infty)$

Para $(-\infty,-4)$: si $x=-6 \rightarrow (-13)\cdot(-2)>0$

Para $(-4,7)$: si $x=0 \rightarrow (-7)\cdot 4<0$

Para $(7,+\infty)$: si $x=10 \rightarrow 3\cdot 14>0$

La solución es: $(-4,7)$

d) $(4x-1)(x+3)\geq 0 \rightarrow$ Las raíces son $x_1=\frac{1}{4}$ y $x_2=-3$.

Los intervalos que se forman son: $(-\infty,-3],\left[-3,\frac{1}{4}\right]$ y $\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$

Para $(-\infty,-3]$: si $x=-6 \rightarrow (-25)\cdot(-3)>0$

Para $\left[-3,\frac{1}{4}\right]$: si $x=0 \rightarrow (-1)\cdot(3)<0$

Para $\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$: si $x=4 \rightarrow 15\cdot 7>0$

La solución es: $(-\infty,-3]\cup\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$

e) $(2-3x)(1-2x)\geq 0 \rightarrow$ Las raíces son $x_1=\frac{2}{3}$ y $x_2=\frac{1}{2}$.

Los intervalos que se forman son: $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right],\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$ y $\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$

Para $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$: si $x=0 \rightarrow 2\cdot 1>0$ Para $\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$: si $x=\frac{3}{5} \rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)\cdot\left(\frac{-5}{5}\right)<0$ Para $\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$: si $x=1 \rightarrow (-1)\cdot(-1)>0$

La solución es: $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$

f) $(4-x)(2x+3)<0 \rightarrow$ Las raíces son $x_1=-\frac{3}{2}$ y $x_2=4$.

Los intervalos que se forman son: $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right),\left(-\frac{3}{2},4\right)$ y $(4,+\infty)$

Para $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$: si $x=-6 \rightarrow 10\cdot(-9)<0$

Para $\left(-\frac{3}{2},4\right)$: si $x=0 \rightarrow 4\cdot 3>0$

Para $(4,+\infty)$: si $x=10 \rightarrow (-6)\cdot 23<0$

La solución es: $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup(4,+\infty)$

g) $x(x+1)>0 \rightarrow$ Las raíces son $x_1=0$ y $x_2=-1$.

Los intervalos que se forman son: $(-\infty,-1),(-1,0)$ y $(0,+\infty)$

Para $(-\infty,-1)$: si $x=-6 \rightarrow (-6)\cdot(-5)>0$

Para $(-1,0)$: si $x=-\frac{1}{2} \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)<0$

Para $(0,+\infty)$: si $x=10 \rightarrow 10\cdot 11>0$

La solución es: $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$

h) $(x+1)(x-2)\geq 0 \rightarrow$ Las raíces son $x_1=2$ y $x_2=-1$.

Los intervalos que se forman son: $(-\infty,-1],[-1,2]$ y $[2,+\infty)$

Para $(-\infty,-1]$: si $x=-6 \rightarrow (-5)\cdot(-8)>0$

Para $[-1,2]$: si $x=0 \rightarrow 1\cdot(-2)<0$

Para $[2,+\infty)$: si $x=4 \rightarrow 5\cdot 2>0$

La solución es: $(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$

28. Página 83

a) $x^2-x-20\leq 0 \rightarrow$ Las raíces son $x_1=5$ y $x_2=-4$.

Los intervalos que se forman son: $(-\infty,-4],[-4,5]$ y $[5,+\infty)$

Para $(-\infty,-4]$: si $x=-6 \rightarrow 36+6-20>0$

Para $[-4,5]$: si $x=0 \rightarrow -20<0$

Para $[5,+\infty)$: si $x=10 \rightarrow 100-10-20>0$

La solución es: $[-4,5]$

b) $-x^2-2x+8<0 \rightarrow$ Las raíces son $x_1=-4$ y $x_2=2$.

Los intervalos que se forman son: $(-\infty,-4),(-4,2)$ y $(2,+\infty)$

Para $(-\infty,-4)$: si $x=-6 \rightarrow -36+12+8<0$

Para $(-4,2)$: si $x=0 \rightarrow 8>0$

Para $(2,+\infty)$: si $x=10 \rightarrow -100+20+8<0$

La solución es: $(-\infty,-4)\cup(2,+\infty)$

c) $-x^2+5x-4\geq 0 \rightarrow$ Las raíces son $x_1=1$ y $x_2=4$.

Los intervalos que se forman son: $(-\infty,1],[1,4]$ y $[4,+\infty)$

Para $(-\infty,1]$: si $x=0\rightarrow -4<0$

Para $[1,4]$: si $x=2\rightarrow -4+10-4>0$

Para $[4,+\infty)$: si $x=10\rightarrow -100+50-4<0$

La solución es: $[1,4]$

d) $x^2-3x-10>0\rightarrow$ Las raíces son $x_1=5$ y $x_2=-2$.

Los intervalos que se forman son: $(-\infty,-2),(-2,5)$ y $(5,+\infty)$

Para $(-\infty,-2)$: si $x=-6\rightarrow 36+18-10>0$

Para $(-2,5)$: si $x=0\rightarrow -10<0$

Para $(5,+\infty)$: si $x=10\rightarrow 100-30-10>0$

La solución es: $(-\infty,-2)\cup(5,+\infty)$

e) $x^2-5x-6<0\rightarrow$ Las raíces son $x_1=6$ y $x_2=-1$.

Los intervalos que se forman son: $(-\infty,-1),(-1,6)$ y $(6,+\infty)$

Para $(-\infty,-1)$: si $x=-2\rightarrow 4+10-6>0$

Para $(-1,6)$: si $x=0\rightarrow -6<0$

Para $(6,+\infty)$: si $x=10\rightarrow 100-50-6>0$

La solución es: $(-1,6)$

f) $x^2+x-2>0\rightarrow$ Las raíces son $x_1=1$ y $x_2=-2$.

Los intervalos que se forman son: $(-\infty,-2),(-2,1)$ y $(1,+\infty)$

Para $(-\infty,-2)$: si $x=-3\rightarrow 9-3-2>0$

Para $(-2,1)$: si $x=0\rightarrow -2<0$

Para $(1,+\infty)$: si $x=10\rightarrow 100+10-2>0$

La solución es: $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

29. Página 83

a) $x^2\leq x\rightarrow x^2-x\leq 0\rightarrow$ Las raíces son $x_1=0$ y $x_2=1$.

Los intervalos que se forman son: $(-\infty,0],[0,1]$ y $[1,+\infty)$

Para $(-\infty,0]$: si $x=-1\rightarrow 1>-1$

Para $[0,1]$: si $x=\frac{1}{2}\rightarrow \frac{1}{4}<\frac{1}{2}$

Para $[1,+\infty)$: si $x=10\rightarrow 100>10$

La solución es: $[0,1]$

b) $x^2 > 3x \rightarrow x(x-3) > 0 \rightarrow$ Las raíces son $x_1 = 0$ y $x_2 = 3$.

Los intervalos que se forman son: $(-\infty,0),(0,3)$ y $(3,+\infty)$

Para $(-\infty,0)$: si $x=-1 \rightarrow 1>-3$

Para $(0,3)$: si $x=1 \rightarrow 1<3$

Para $(3,+\infty)$: si $x=10 \rightarrow 100>30$

La solución es: $(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$

c) $2x^2 < 4x \rightarrow 2x(x-2) < 0 \rightarrow$ Las raíces son $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$.

Los intervalos que se forman son: $(-\infty,0),(0,2)$ y $(2,+\infty)$

Para $(-\infty,0)$: si $x=-1 \rightarrow 2>-4$

Para $(0,2)$: si $x=1 \rightarrow 2<4$

Para $(2,+\infty)$: si $x=10 \rightarrow 200>40$

La solución es: $(0,2)$

d) $x^2 \geq 4 \rightarrow$ Las raíces son $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$.

Los intervalos que se forman son: $(-\infty,-2],[-2,2]$ y $[2,+\infty)$

Para $(-\infty,-2]$: si $x=-4 \rightarrow 16>4$

Para $[-2,2]$: si $x=0 \rightarrow 0<4$

Para $[2,+\infty)$: si $x=10 \rightarrow 100>4$

La solución es: $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

ACTIVIDADES FINALES

30. Página 84

Ecuación	1.er miembro	2.º miembro	Incógnita y grado
$x(x+1)=2$	$x(x+1)$	2	x, 2
$\frac{x}{3}-\frac{x+4}{9}=0$	$\frac{x}{3}-\frac{x+4}{9}$	0	x, 1
$(x-2)^2=x^2$	$(x-2)^2$	x^2	x, 1
$4x-(2x-5)=11$	$4x-(2x-5)$	11	x, 1
$3x+2y=1$	$3x+2y$	1	x, y, 1

31. Página 84

a) $6x-2=x+8$ — 3) $x=2$

b) $(x+3)^2=0$ — 1) $x=-3$

c) $(x-2)(x+4)=0$ — 2) $x=-4$ — 3) $x=2$

d) $x^2+8x=0$ — 4) $x=0$ — 5) $x=-8$

e) $\frac{x+1}{5}-\frac{x}{2}=\frac{7}{5}$ — 2) $x=-4$

32. Página 84

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $x-5=0$

b) $2(x-1)+\frac{x}{2}=0$

c) $(x-1)(x+2)=0$

d) $x^2-2x=0$

33. Página 84

a) $3(x-2)-12=x-(2x+8)\rightarrow 3x-6-12=x-2x-8\rightarrow 4x=10\rightarrow x=\frac{5}{2}$

b) $\frac{x-4}{8}+\frac{x}{10}-\frac{x+1}{3}=-3\rightarrow\frac{15x-60+12x-40x-40}{120}=-\frac{360}{120}\rightarrow -13x=-260\rightarrow x=20$

c) $\frac{x}{3}-\frac{10-x}{7}=x+8\rightarrow\frac{7x-30+3x}{21}=\frac{21x+168}{21}\rightarrow -198=11x\rightarrow x=-18$

d) $-x+4(-2x+1)=\frac{x}{3}\rightarrow -3x-24x+12=x\rightarrow 12=28x\rightarrow x=\frac{3}{7}$

e) $\frac{x+2}{5}-\frac{1-x}{6}=\frac{x-3}{2}\rightarrow\frac{6x+12-5+5x}{30}=\frac{15x-45}{30}\rightarrow 11x+7=15x-45\rightarrow 52=4x\rightarrow x=13$

f) $\frac{4-x}{2}+3(5+x)=\frac{2-x}{4}\rightarrow\frac{8-2x+60+12x}{4}=\frac{2-x}{4}\rightarrow 68+10x=2-x\rightarrow 66=-11x\rightarrow x=-6$

34. Página 84

a) $x(x+1)=x\rightarrow x^2+x=x\rightarrow x^2=0$ $\longrightarrow$ Grado 2

b) $x(x+2)=-x^2\rightarrow x^2+2x=-x^2\rightarrow 2x^2+2x=0$ $\longrightarrow$ Grado 2

c) $(x-2)(x+1)=x+1\rightarrow x^2-x-2=x+1\rightarrow x^2-2x-3=0$ $\longrightarrow$ Grado 2

d) $(x-2)(x+1)=x^2\rightarrow x^2-x-2=x^2\rightarrow -x-2=0$ $\longrightarrow$ Grado 1

e) $(x+2)(x-1)=x+1\rightarrow x^2+x-2=x+1\rightarrow x^2-3=0$ $\longrightarrow$ Grado 2

f) $(x-1)(x+1)=x^2+x\rightarrow x^2-1=x^2+x\rightarrow x+1=0$ $\longrightarrow$ Grado 1

35. Página 84

a) $x(6x-7)=3\rightarrow 6x^2-7x-3=0\rightarrow\frac{7\pm\sqrt{49+72}}{12}=\frac{7\pm 11}{12}=\begin{cases}x_1=\frac{3}{2}\\ x_2=-\frac{1}{3}\end{cases}$

b) $x(5-4x)=-6\rightarrow 4x^2-5x-6=0\rightarrow\frac{5\pm\sqrt{25+96}}{8}=\frac{5\pm 11}{8}=\begin{cases}x_1=2\\ x_2=-\frac{3}{4}\end{cases}$

c) $x(6x+19)=20\rightarrow 6x^2+19x-20=0\rightarrow\frac{-19\pm\sqrt{361+480}}{12}=\frac{-19\pm 29}{12}=\begin{cases}x_1=\frac{5}{6}\\ x_2=-4\end{cases}$

d) $x(2x-9)=35\rightarrow 2x^2-9x-35=0\rightarrow\frac{9\pm\sqrt{81+280}}{4}=\frac{9\pm 19}{4}=\begin{cases}x_1=7\\ x_2=-\frac{5}{2}\end{cases}$

e) $x(4x+7)=15 \rightarrow 4x^2+7x-15=0 \rightarrow \dfrac{-7\pm\sqrt{49+240}}{8}=\dfrac{-7\pm 17}{8}=\begin{cases} x_1=\dfrac{5}{4} \\ x_2=-3 \end{cases}$

f) $x(11-5x)=2 \rightarrow 5x^2-11x+2=0 \rightarrow \dfrac{11\pm\sqrt{121-40}}{10}=\dfrac{11\pm 9}{10}=\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=\dfrac{1}{5} \end{cases}$

36. Página 84

a) $x(x+1)=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-1 \end{cases}$

b) $x(x+1)=1 \rightarrow x^2+x-1=0 \rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

c) $x(x+1)=x \rightarrow x^2+x=x \rightarrow x^2=0 \rightarrow x=0$

d) $x(x+1)=-x \rightarrow x^2+2x=0 \rightarrow x(x+2)=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-2 \end{cases}$

e) $x(x+1)=x+1 \rightarrow x^2+x=x+1 \rightarrow x^2=1 \rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-1 \end{cases}$

f) $x(x+1)=-x+1 \rightarrow x^2+2x-1=0 \rightarrow x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2}=\dfrac{-2\pm 2\sqrt{2}}{2}=\begin{cases} x_1=-1+\sqrt{2} \\ x_2=-1-\sqrt{2} \end{cases}$

37. Página 84

Todas tienen discriminante positivo, por tanto, tienen dos soluciones.

a) $-6x^2-x+1=0 \rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+24}}{-12}=\dfrac{1\pm 5}{-12}=\begin{cases} x_1=-\dfrac{1}{2} \\ x_2=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

b) $4x^2+3x-7=0 \rightarrow x=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+112}}{8}=\dfrac{-3\pm 11}{8}=\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=\dfrac{-7}{4} \end{cases}$

c) $3x^2-7x-6=0 \rightarrow x=\dfrac{7\pm\sqrt{49+72}}{6}=\dfrac{7\pm 11}{6}=\begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$

d) $-2x^2-x+3=0 \rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+24}}{-4}=\dfrac{1\pm 5}{-4}=\begin{cases} x_1=-\dfrac{3}{2} \\ x_2=1 \end{cases}$

e) $-2x^2-3x+2=0 \rightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{9+16}}{-4}=\dfrac{3\pm 5}{-4}=\begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

f) $6x^2+7x+1=0 \rightarrow x=\dfrac{-7\pm\sqrt{49-24}}{12}=\dfrac{-7\pm 5}{12}=\begin{cases} x_1=-\dfrac{1}{6} \\ x_2=-1 \end{cases}$

g) $5x^2+x-4=0 \rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+80}}{10}=\frac{-1\pm 9}{10}=\begin{cases} x_1=\frac{4}{5} \\ x_2=-1 \end{cases}$

h) $14x^2+5x-1=0 \rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{25+56}}{28}=\frac{-5\pm 9}{28}=\begin{cases} x_1=\frac{1}{7} \\ x_2=-\frac{1}{2} \end{cases}$

i) $-2x^2+x+15=0 \rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+120}}{-4}=\frac{-1\pm 11}{-4}=\begin{cases} x_1=-\frac{5}{2} \\ x_2=3 \end{cases}$

j) $-8x^2-7x+1=0 \rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{49+32}}{-16}=\frac{7\pm 9}{-16}=\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=\frac{1}{8} \end{cases}$

k) $2x^2+x-10=0 \rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+80}}{4}=\frac{-1\pm 9}{4}=\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-\frac{5}{2} \end{cases}$

l) $-7x^2-3x+4=0 \rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9+112}}{-14}=\frac{3\pm 11}{-14}=\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=\frac{4}{7} \end{cases}$

38. Página 84

a) $(x+3)(x-4)+x(x+2)=2-x^2 \rightarrow x^2-x-12+x^2+2x=2-x^2 \rightarrow 3x^2+x-14=0 \rightarrow$

$\frac{-1\pm\sqrt{1+168}}{6}=\frac{-1\pm 13}{6}=\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-\frac{7}{3} \end{cases}$

b) $3x-2(x+1)^2=-3 \rightarrow 3x-2x^2-4x-2=-3 \rightarrow 2x^2+x-1=0 \rightarrow$

$\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{-1\pm 3}{4}=\begin{cases} x_1=\frac{1}{2} \\ x_2=-1 \end{cases}$

c) $x^2+(x+2)(x-3)=0 \rightarrow x^2+x^2-x-6=0 \rightarrow 2x^2-x-6=0 \rightarrow$

$\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{4}=\frac{1\pm 7}{4}=\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-\frac{3}{2} \end{cases}$

d) $4x^2+2(x-6)-(x+2)^2=0 \rightarrow 4x^2+2x-12-x^2-4x-4=0 \rightarrow 3x^2-2x-16=0 \rightarrow$

$\frac{2\pm\sqrt{4+192}}{6}=\frac{2\pm 14}{6}=\begin{cases} x_1=\frac{8}{3} \\ x_2=-2 \end{cases}$

e) $(x-1)(x+2)+3x=4(x-2)-(x-12) \rightarrow x^2+x-2+3x=4x-8-x+12 \rightarrow x^2+x-6=0 \rightarrow$

$\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}=\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-3 \end{cases}$

f) $(x+5)(3-x)=2x(1-x)+12 \rightarrow -x^2-2x+15=2x-2x^2+12 \rightarrow x^2-4x+3=0 \rightarrow$

$\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases} x_1=3 \\ x_2=1 \end{cases}$

g) $x+x(x-3)+3=x(4-2x)+x+1 \rightarrow x+x^2-3x+3=4x-2x^2+x+1 \rightarrow 3x^2-7x+2=0 \rightarrow$

$$\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{6}=\frac{7\pm 5}{6}=\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

h) $2x^2-3(x+2)=x(x+3)-11 \rightarrow 2x^2-3x-6=x^2+3x-11 \rightarrow x^2-6x+5=0 \rightarrow$

$$\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2}=\frac{6\pm 4}{2}=\begin{cases} x_1=5 \\ x_2=1\end{cases}$$

39. Página 84

a) $2x\cdot(1+x)-5=x\cdot(x+1)+x^2 \rightarrow 2x+2x^2-5=x^2+x+x^2 \rightarrow x=5 \rightarrow$ Grado 1.

b) $(x+4)\cdot(x-8)=x\cdot(x+1)-2 \rightarrow x^2-4x-32=x^2+x-2 \rightarrow x=-6 \rightarrow$ Grado 1.

c) $4\cdot(x+1)\cdot x-9+2x\cdot(3+x)\cdot 5-1=7x\cdot(2x+3) \rightarrow 4x^2+4x-9+30x+10x^2-1=14x^2+21x \rightarrow$

$x=\dfrac{10}{13} \rightarrow$ Grado 1.

40. Página 84

a) $-x^2-\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{12}=0 \rightarrow 12x^2+4x-1=0 \rightarrow x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+48}}{24}=\dfrac{-4\pm 8}{24}=\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{6} \\ x_2=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

b) $x^2-\dfrac{5x}{4}-\dfrac{3}{2}=0 \rightarrow 4x^2-5x-6=0 \rightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{25+96}}{8}=\dfrac{5\pm 11}{8}=\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-\dfrac{3}{4}\end{cases}$

c) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{2x}{3}-3=0 \rightarrow x^2+6x-27=0 \rightarrow x=\dfrac{-6\pm\sqrt{36+108}}{2}=\dfrac{-6\pm 12}{2}=\begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-9\end{cases}$

d) $\dfrac{3x^2}{8}+\dfrac{5x}{4}+1=0 \rightarrow 3x^2+10x+8=0 \rightarrow x=\dfrac{-10\pm\sqrt{100-96}}{6}=\dfrac{-10\pm 2}{6}=\begin{cases} x_1=\dfrac{-8}{6}=-\dfrac{4}{3} \\ x_2=\dfrac{-12}{6}=-2\end{cases}$

41. Página 84

a) $x^2-8x+16=0 \rightarrow \Delta=64-64=0 \rightarrow$ La ecuación tiene una única solución doble.

b) $4x^2+4x-1=0 \rightarrow \Delta=16+16>0 \rightarrow$ La ecuación tiene dos soluciones.

c) $x^2-12x+40=0 \rightarrow \Delta=144-160<0 \rightarrow$ La ecuación no tiene ninguna solución.

d) $x^2+3x=0 \rightarrow \Delta=9>0 \rightarrow$ La ecuación tiene dos soluciones.

e) $x=x^2 \rightarrow x^2-x=0 \rightarrow \Delta=1>0 \rightarrow$ La ecuación tiene dos soluciones.

f) $x^2=x-3 \rightarrow x^2-x+3=0 \rightarrow \Delta=1-12<0 \rightarrow$ La ecuación no tiene ninguna solución.

g) $-x^2=5 \rightarrow x^2+5=0 \rightarrow \Delta=-20<0 \rightarrow$ La ecuación no tiene ninguna solución.

h) $x^2=-x \rightarrow x^2+x=0 \rightarrow \Delta=1>0 \rightarrow$ La ecuación tiene dos soluciones.

42. Página 85

a) $a=5, b=10, c=4 \rightarrow \Delta = 100-80>0 \rightarrow$ La ecuación tiene dos soluciones.

b) $a=5, b=-10, c=5 \rightarrow \Delta = 100-100=0 \rightarrow$ La ecuación tiene una única solución doble.

c) $a=1, b=8, c=-9 \rightarrow \Delta = 64+36>0 \rightarrow$ La ecuación tiene dos soluciones.

d) $a=12, b=4, c=1 \rightarrow \Delta = 16-48<0 \rightarrow$ La ecuación no tiene ninguna solución.

43. Página 85

a) $x^2 + \mathbf{4x} + 4 = 0$

b) $x^2 - 6x + \mathbf{9} = 0$

c) $x^2 + \mathbf{8x} + 16 = 0$

d) $\mathbf{9x^2} + 12x + 4 = 0$

e) $4x^2 + \mathbf{12x} + 9 = 0$

f) $\mathbf{4x^2} + 20x + 25 = 0$

g) $9x^2 - \mathbf{30x} + 25 = 0$

h) $x^2 - 2x + \mathbf{1} = 0$

44. Página 85

a) $2x^2 + 3x + \mathbf{2} = 0$

b) $-x^2 + x - \mathbf{1} = 0$

c) $\mathbf{3x^2} - x + 3 = 0$

d) $-2x^2 + \mathbf{5x} - 4 = 0$

e) $x^2 - \mathbf{6x} + 10 = 0$

f) $\mathbf{-2x^2} + 2x - 3 = 0$

45. Página 85

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$x^2+2x+c=0 \rightarrow \Delta = 4-4c>0 \rightarrow c<1$

$x^2+2x-1=0$ $\quad$ $x^2+2x-2=0$ $\quad$ $x^2+2x-3=0$ $\quad$ $x^2+2x-4=0$

b) $x^2+2x+c=0 \rightarrow \Delta = 4-4c=0 \rightarrow c=1$

Solo hay una ecuación que verifica lo pedido: $x^2+2x+1=0$

c) Respuesta abierta. Por ejemplo:

Con dos soluciones reales distintas: $\Delta = b^2-4ac>0 \rightarrow x^2+x-1=0$ y $x^2+x-2=0$

Con una solución real doble: $\Delta = b^2-4ac=0 \rightarrow x^2+x+\frac{1}{4}=0$ y $\frac{1}{4}x^2+x+1=0$

46. Página 85

$a \cdot c = -18 \rightarrow \sqrt{b^2+72} = 11 \rightarrow b^2 = 121-72 \rightarrow b = \pm 7$

Sea $a=\lambda, c=-\frac{18}{\lambda}$, entonces las soluciones son de la forma: $x=\frac{7\pm 11}{2\lambda}$ o $x=\frac{-7\pm 11}{2\lambda}$

47. Página 85

a) Falso. No tiene ninguna solución real.

b) Verdadero. $3x^2=12 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x^2-4=0$

c) Falso. $10^2+2\cdot 10^2+3\cdot 10^2+4\cdot 10^2 \neq 0$

d) Falso. $x^2-x=0 \rightarrow x^2=x$

e) Falso. Sus soluciones son las mismas.

48. Página 85

Una ecuación del tipo $ax^2 + bx + c = 0$ se puede factorizar como $a(x - x_1)(x - x_2)$.

Desarrollando la expresión, se obtiene $a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - ax(x_1 + x_2) + ax_1x_2$.

a) $ax^2 - ax(x_1 + x_2) + x_1x_2 = ax^2 - ax \cdot (-1) + a(-2) = ax^2 + ax - 2a = 0$ para cualquier a real.

b) $ax^2 - ax(x_1 + x_2) + x_1x_2 = ax^2 - ax \cdot 5 + a(-6) = ax^2 - 5ax - 6a = 0$ para cualquier a real.

c) $ax^2 - ax(x_1 + x_2) + x_1x_2 = ax^2 - ax \cdot 3 + a(-4) = ax^2 - 3ax - 4a = 0$ para cualquier a real.

49. Página 85

a) $3x^4 + x^2 - 2 = 0 \xrightarrow{t=x^2} 3t^2 + t - 2 = 0$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{6} = \frac{-1 \pm 5}{6} = \begin{cases} t_1 = \dfrac{2}{3} \\ t_2 = -1 \end{cases}$$

$$t = x^2 \rightarrow \begin{cases} \text{si } t_1 = \dfrac{2}{3} \rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}} \\ \text{si } t_2 = -1 \rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \rightarrow \text{No existe solución.} \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $x_1 = \sqrt{\dfrac{2}{3}}, x_2 = -\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

b) $x^4 - x^2 - 12 = 0 \xrightarrow{t=x^2} t^2 - t - 12 = 0$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} = \begin{cases} t_1 = 4 \\ t_2 = -3 \end{cases}$$

$$t = x^2 \rightarrow \begin{cases} \text{si } t_1 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \\ \text{si } t_2 = -3 \rightarrow x = \pm\sqrt{-3} \rightarrow \text{No existe solución.} \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$

c) $-x^4 - x^2 + 20 = 0 \xrightarrow{t=x^2} -t^2 - t + 20 = 0$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{-2} = \frac{1 \pm 9}{-2} = \begin{cases} t_1 = -5 \\ t_2 = 4 \end{cases}$$

$$t = x^2 \rightarrow \begin{cases} \text{si } t_1 = -5 \rightarrow x = \pm\sqrt{-5} \rightarrow \text{No existe solución.} \\ \text{si } t_2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$

d) $2x^4 + x^2 - 15 = 0 \xrightarrow{t=x^2} 2t^2 + t - 15 = 0$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+120}}{4} = \frac{-1 \pm 11}{4} = \begin{cases} t_1 = \dfrac{5}{2} \\ t_2 = -3 \end{cases}$$

$$t = x^2 \rightarrow \begin{cases} \text{si } t_1 = \dfrac{5}{2} \rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{2}} \\ \text{si } t_2 = -3 \rightarrow x = \pm\sqrt{-3} \rightarrow \text{No existe solución.} \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $x_1 = \sqrt{\dfrac{5}{2}}$ y $x_2 = -\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

e) $x^4-x^2-42=0 \xrightarrow{t=x^2} t^2-t-42=0$

$$t=\frac{1\pm\sqrt{1+168}}{2}=\frac{1\pm 13}{2}=\begin{cases} t_1=7 \\ t_2=-6 \end{cases}$$

$$t=x^2 \to \begin{cases} \text{si } t_1=7 \to x=\pm\sqrt{7} \\ \text{si } t_2=-6 \to x=\pm\sqrt{-6} \to \text{No existe solución.} \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $x_1=\sqrt{7}$ y $x_2=-\sqrt{7}$

f) $-2x^4-x^2+28=0 \xrightarrow{t=x^2} -2t^2-t+28=0$

$$t=\frac{1\pm\sqrt{1+224}}{-4}=\frac{1\pm 15}{-4}=\begin{cases} t_1=-4 \\ t_2=\dfrac{7}{2} \end{cases}$$

$$t=x^2 \to \begin{cases} \text{si } t_1=-4 \to x=\pm\sqrt{-4} \to \text{No existe solución.} \\ \text{si } t_2=\dfrac{7}{2} \to x=\pm\sqrt{\dfrac{7}{2}} \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $x_1=\sqrt{\frac{7}{2}}$ y $x_2=-\sqrt{\frac{7}{2}}$

g) $8x^4+2x^2-1=0 \xrightarrow{t=x^2} 8t^2+2t-1=0$

$$t=\frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{16}=\frac{-2\pm 6}{16}=\begin{cases} t_1=\dfrac{1}{4} \\ t_2=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$t=x^2 \to \begin{cases} \text{si } t_1=\dfrac{1}{4} \to x=\pm\dfrac{1}{2} \\ \text{si } t_2=-\dfrac{1}{2} \to x=\pm\sqrt{-\dfrac{1}{2}} \to \text{No existe solución.} \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $x_1=\frac{1}{2}$ y $x_2=-\frac{1}{2}$

h) $5x^4+3x^2-2=0 \xrightarrow{t=x^2} 5t^2+3t-2=0$

$$t=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{10}=\frac{-3\pm 7}{10}=\begin{cases} t_1=\dfrac{2}{5} \\ t_2=-1 \end{cases}$$

$$t=x^2 \to \begin{cases} \text{si } t_1=\dfrac{2}{5} \to x=\pm\sqrt{\dfrac{2}{5}} \\ \text{si } t_2=-1 \to x=\pm\sqrt{-1} \to \text{No existe solución.} \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $x_1=\sqrt{\frac{2}{5}}$ y $x_2=-\sqrt{\frac{2}{5}}$

i) $5x^4-2x^2-3=0 \xrightarrow{t=x^2} 5t^2-2t-3=0$

$$t=\frac{2\pm\sqrt{4+60}}{10}=\frac{2\pm 8}{10}=\begin{cases} t_1=1 \\ t_2=-\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

$$t=x^2 \to \begin{cases} \text{si } t_1=1 \to x=\pm 1 \\ \text{si } t_2=-\dfrac{3}{5} \to x=\pm\sqrt{-\dfrac{3}{5}} \to \text{No existe solución.} \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $x_1=1$ y $x_2=-1$

j) $-2x^4+3x^2+9=0 \xrightarrow{t=x^2} -2t^2+3t+9=0$

$$t=\frac{-3\pm\sqrt{9+72}}{-4}=\frac{-3\pm 9}{-4}=\begin{cases} t_1=-\dfrac{3}{2} \\ t_2=3 \end{cases}$$

$$t=x^2 \to \begin{cases} \text{si } t_1=-\dfrac{3}{2} \to x=\pm\sqrt{-\dfrac{3}{2}} \to \text{No existe solución.} \\ \text{si } t_2=3 \to x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $x_1=\sqrt{3}$ y $x_2=-\sqrt{3}$

51. Página 85

a) $x^6-7x^3-8=0 \xrightarrow{t=x^3} t^2-7t-8=0 \to t=\dfrac{7\pm\sqrt{49+32}}{2}=\dfrac{7\pm 9}{2}=\begin{cases} t_1=8 \\ t_2=-1 \end{cases}$

$$t=x^3 \to \begin{cases} \text{si } t_1=8 \to x=\sqrt[3]{8}=2 \\ \text{si } t_2=-1 \to x=\sqrt[3]{-1}=-1 \end{cases}$$

b) $x^6-28x^3+27=0 \xrightarrow{t=x^3} t^2-28t+27=0 \to t=\dfrac{28\pm\sqrt{784-108}}{2}=\dfrac{28\pm 26}{2}=\begin{cases} t_1=27 \\ t_2=1 \end{cases}$

$$t=x^3 \to \begin{cases} \text{si } t_1=27 \to x=\sqrt[3]{27}=3 \\ \text{si } t_2=1 \to x=\sqrt[3]{1}=1 \end{cases}$$

c) $x^8-17x^4+16=0 \xrightarrow{t=x^4} t^2-17t+16=0 \to t=\dfrac{17\pm\sqrt{289-64}}{2}=\dfrac{17\pm 15}{2}=\begin{cases} t_1=16 \\ t_2=1 \end{cases}$

$$t=x^4 \to \begin{cases} \text{si } t_1=16 \to x=\sqrt[4]{16}=\pm 2 \\ \text{si } t_2=1 \to x=\sqrt[4]{1}=\pm 1 \end{cases}$$

d) $x^8-79x^4-162=0 \xrightarrow{t=x^4} t^2-79t-162=0 \to t=\dfrac{79\pm\sqrt{6\,241+648}}{2}=\dfrac{79\pm 83}{2}=\begin{cases} t_1=81 \\ t_2=-2 \end{cases}$

$$t=x^4 \to \begin{cases} \text{si } t_1=81 \to x=\sqrt[4]{81}=\pm 3 \\ \text{si } t_2=-2 \to x=\sqrt[4]{-2} \to \text{No existe solución.} \end{cases}$$

52. Página 85

a) $-x^3-3x^2+6x+8=0 \to (x+1)(x-2)(-x-4)=0 \to x_1=-1, x_2=2$ y $x_3=-4$

	−1	−3	6	8
−1		1	2	−8
	−1	−2	8	0
2		−2	−8	
	−1	−4	0	

b) $-8x^3+2x^2+7x-3=0 \to (x+1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(-8x+6)=0 \to x_1=-1, x_2=\dfrac{1}{2}$ y $x_3=\dfrac{3}{4}$

	−8	2	7	−3
−1		8	−10	3
	−8	10	−3	0
1/2		−4	3	
	−8	6	0	

c) $3x^3+10x^2-x-12=0 \rightarrow (x+3)(x-1)(3x+4)=0 \rightarrow x_1=-3,\ x_2=1$ y $x_3=-\frac{4}{3}$

	3	10	−1	−12
1		3	13	12
	3	13	12	0
−3		−9	−12	
	3	4	0	

d) $10x^3-9x^2-3x+2=0 \rightarrow (x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)(10x-4)=0 \rightarrow x_1=1,\ x_2=-\frac{1}{2}$ y $x_3=\frac{2}{5}$

	10	−9	−3	2
1		10	1	−2
	10	1	−2	0
−1/2		−5	2	
	10	−4	0	

e) $3x^3+8x^2-13x-30=0 \rightarrow (x-2)(x+3)(3x+5)=0 \rightarrow x_1=2,\ x_2=-3$ y $x_3=-\frac{5}{3}$

	3	8	−13	−30
2		6	28	30
	3	14	15	0
−3		−9	−15	
	3	5	0	

f) $-4x^3+3x^2+15x-14=0 \rightarrow (x-1)(x+2)(-4x+7)=0 \rightarrow x_1=1,\ x_2=-2$ y $x_3=\frac{7}{4}$

	−4	3	15	−14
1		−4	−1	14
	−4	−1	14	0
−2		8	−14	
	−4	7	0	

53. Página 85

a) $2x(x-1)^2+3=x(4-x) \rightarrow 2x^3-4x^2+2x+3=4x-x^2 \rightarrow 2x^3-3x^2-2x+3=0 \rightarrow$

$(x+1)(x-1)(2x-3)=0 \rightarrow x_1=-1,\ x_2=1$ y $x_3=\frac{3}{2}$

	2	−3	−2	3
−1		−2	5	−3
	2	−5	3	0
1		2	−3	
	2	−3	0	

b) $(x-2)(x+5)x+12=x(5x+1) \rightarrow x^3+3x^2-10x+12=5x^2+x \rightarrow x^3-2x^2-11x+12=0 \rightarrow$

$(x-1)(x+3)(x-4)=0 \rightarrow x_1=1, x_2=-3$ y $x_3=4$

	1	−2	−11	12
1		1	−1	−12
	1	−1	−12	0
−3		−3	12	
	1	−4	0	

54. Página 85

$x(x-2)^2 = 8(x-2) \to x^3 - 4x^2 + 4x - 8x + 16 = 0 \to x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0 \to$ Sí, son equivalentes.

56. Página 86

a) $\sqrt{3-2x} = \sqrt{5-x} \to (\sqrt{3-2x})^2 = (\sqrt{5-x})^2 \to 3-2x = 5-x \to x = -2$

$\sqrt{3-2x} = \sqrt{5-x} \xrightarrow{x=-2} \sqrt{3+4} = \sqrt{5+2} \to \sqrt{7} = \sqrt{7} \to$ Es solución.

b) $\sqrt{2-x^2} = \sqrt{2(x+1)} \to (\sqrt{2-x^2})^2 = (\sqrt{2x+2})^2 \to 2-x^2 = 2x+2 \to x^2+2x = 0 \to$

$x(x+2) = 0 \to \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

$\sqrt{2-x^2} = \sqrt{2(x+1)} \xrightarrow{x=0} \sqrt{2} = \sqrt{2} \to$ Es solución.

$\sqrt{2-x^2} = \sqrt{2(x+1)} \xrightarrow{x=-2} \sqrt{-2} = \sqrt{-2} \to$ El radicando es negativo: no es solución.

c) $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{1-x} \to (\sqrt{x^2-1})^2 = (\sqrt{1-x})^2 \to x^2 - 1 = 1 - x \to x^2 + x - 2 = 0 \to x_1 = 1$ y $x_2 = -2$

$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{1-x} \xrightarrow{x=1} 0 = 0 \to$ Es solución.

$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{1-x} \xrightarrow{x=-2} \sqrt{4-1} = \sqrt{3} \to \sqrt{3} = \sqrt{3} \to$ Es solución.

d) $\sqrt{x^2+2x} = \sqrt{-15-4x} \to (\sqrt{x^2+2x})^2 = (\sqrt{-15-4x})^2 \to x^2+2x = -15-4x \to$

$x^2+6x+15 = 0 \to \dfrac{-6 \pm \sqrt{36-60}}{2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{-24}}{2} \to$ No tiene soluciones reales.

e) $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{3x-1} \to (\sqrt{x^2+1})^2 = (\sqrt{3x-1})^2 \to x^2+1 = 3x-1 \to x^2-3x+2 = 0 \to$

$\dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{3x-1} \xrightarrow{x=2} \sqrt{5} = \sqrt{5} \to$ Es solución.

$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{3x-1} \xrightarrow{x=1} \sqrt{2} = \sqrt{2} \to$ Es solución.

57. Página 86

a) $x - \sqrt{3x+4} = 12 \to (x-12)^2 = (\sqrt{3x+4})^2 \to x^2 - 24x + 144 = 3x + 4 \to x^2 - 27x + 140 = 0$

$\to \dfrac{27 \pm \sqrt{729-560}}{2} = \dfrac{27 \pm 13}{2} = \begin{cases} x_1 = 20 \\ x_2 = 7 \end{cases}$

$x - \sqrt{3x+4} = 12 \xrightarrow{x=20} 20 - \sqrt{60+4} = 12 \to 12 = 12 \to$ Es solución.

$x - \sqrt{3x+4} = 12 \xrightarrow{x=7} 7 - \sqrt{21+4} = 12 \to 7 - 5 \neq 12 \to$ No es solución.

b) $9\sqrt{x-2} = 2x \to (9\sqrt{x-2})^2 = (2x)^2 \to 81x - 162 = 4x^2 \to 4x^2 - 81x + 162 = 0$

$\to \dfrac{81 \pm \sqrt{6\,561 - 2\,592}}{8} = \dfrac{81 \pm 63}{8} = \begin{cases} x_1 = 18 \\ x_2 = \dfrac{9}{4} \end{cases}$

$9\sqrt{x-2} = 2x \xrightarrow{x=18} 9\sqrt{16} = 36 \to 36 = 36 \to$ Es solución.

$9\sqrt{x-2} = 2x \xrightarrow{x=\frac{9}{4}} 9\sqrt{\dfrac{9-8}{4}} = \dfrac{9}{2} \to \dfrac{9}{2} = \dfrac{9}{2} \to$ Es solución.

c) $\sqrt{5x+1}=x-1 \to (\sqrt{5x+1})^2=(x-1)^2 \to 5x+1=x^2-2x+1 \to x^2-7x=0 \to \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=7 \end{cases}$

$\sqrt{5x+1}=x-1 \xrightarrow{x=0} \sqrt{1}=-1 \to 1 \neq -1$ ⟶ No es solución.

$\sqrt{5x+1}=x-1 \xrightarrow{x=7} \sqrt{36}=6 \to 6=6$ ⟶ Es solución.

d) $\sqrt{4-3x}+x=0 \to (\sqrt{4-3x})^2=(-x)^2 \to 4-3x=x^2 \to x^2+3x-4=0 \to$

$\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{-3\pm5}{2}=\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-4 \end{cases}$

$\sqrt{4-3x}+x=0 \xrightarrow{x=1} \sqrt{1}+1=0 \to 2\neq 0$ ⟶ No es solución.

$\sqrt{4-3x}+x=0 \xrightarrow{x=-4} \sqrt{16}-4=0 \to 0=0$ ⟶ Es solución.

e) $-\sqrt{x+7}=x+1 \to (-\sqrt{x+7})^2=(x+1)^2 \to x+7=x^2+2x+1 \to x^2+x-6=0 \to$ $x_1 = 2$ y $x_2 = -3$

$-\sqrt{x+7}=x+1 \xrightarrow{x=2} -\sqrt{9}=3 \to -3\neq 3$ ⟶ No es solución.

$-\sqrt{x+7}=x+1 \xrightarrow{x=-3} -\sqrt{4}=-2 \to -2=-2$ ⟶ Es solución.

f) $6\sqrt{x+7}-x=0 \to (6\sqrt{x+7})^2=x^2 \to 36x+252=x^2 \to x^2-36x-252=0 \to$

$\frac{36\pm\sqrt{1296+1008}}{2}=\frac{36\pm48}{2}=\begin{cases} x_1=42 \\ x_2=-6 \end{cases}$

$6\sqrt{x+7}-x=0 \xrightarrow{x=42} 42-42=0 \to 0=0$ ⟶ Es solución.

$6\sqrt{x+7}-x=0 \xrightarrow{x=-6} 6+6=0 \to 12\neq 0$ ⟶ No es solución.

g) $\sqrt{x+5}=1+\sqrt{x-14} \to (\sqrt{x+5})^2=(1+\sqrt{x-14})^2 \to x+5=1+2\sqrt{x-14}+x-14 \to$

$9^2=(\sqrt{x-14})^2 \to 81=x-14 \to x=95$

$\sqrt{x+5}=1+\sqrt{x-14} \xrightarrow{x=95} \sqrt{100}=1+\sqrt{81} \to 10=10$ ⟶ Es solución.

h) $\sqrt{x+9}=\sqrt{x}+1 \to (\sqrt{x+9})^2=(\sqrt{x}+1)^2 \to x+9=x+2\sqrt{x}+1 \to 4^2=(\sqrt{x})^2 \to x=16$

$\sqrt{x+9}=\sqrt{x}+1 \xrightarrow{x=16} \sqrt{25}=\sqrt{16}+1 \to 5=5$ ⟶ Es solución.

58. Página 86

a) $\frac{5}{x+2}-\frac{x}{2}+\frac{2x-1}{x+1}=0 \xrightarrow{x=-3} \frac{5}{-1}+\frac{3}{2}+\frac{-7}{-2}=\frac{-10+3+7}{2}=\frac{0}{2}=0 \to$ Es solución.

b) $\frac{x}{x+1}+\frac{3x}{x-1}=\frac{x}{4} \xrightarrow{x=-3} \frac{-3}{-2}+\frac{-9}{-4}=\frac{-3}{4} \to \frac{6+9}{4}\neq-\frac{3}{4} \to$ No es solución.

c) $\frac{x}{x+4}+\frac{2}{x+2}=x-2 \xrightarrow{x=-3} \frac{-3}{1}+\frac{2}{-1}=-5 \to -5=-5 \to$ Es solución.

59. Página 86

a) $\sqrt{2x+11}-6=\frac{x}{11} \to 11\sqrt{2x+11}-66=x \to (11\sqrt{2x+11})^2=(x+66)^2 \to$

$242x+1331=x^2+132x+4\,356 \to x^2-110x+3\,025=0 \to$ $x = 55$

$\sqrt{2x+11}-6=\frac{x}{11} \xrightarrow{x=55} \sqrt{110+11}-6=5 \to 5=5$ ⟶ Es solución.

b) $\dfrac{\sqrt{x+6}}{2}+\dfrac{x}{6}=8 \rightarrow \left(\dfrac{\sqrt{x+6}}{2}\right)^2=\left(8-\dfrac{x}{6}\right)^2 \rightarrow \dfrac{x+6}{4}=64-\dfrac{16}{6}x+\dfrac{x^2}{36} \rightarrow$

$9x+54=2\,304-96x+x^2 \rightarrow x^2-105x+2\,250=0 \rightarrow$

$x=\dfrac{105\pm\sqrt{11025-9\,000}}{2}=\dfrac{105\pm 45}{2}=\begin{cases} x_1=75 \\ x_2=30 \end{cases}$

$\dfrac{\sqrt{x+6}}{2}+\dfrac{x}{6}=8 \xrightarrow{x=75} \dfrac{9}{2}+\dfrac{75}{6}=8 \rightarrow \dfrac{27+75}{6}=8 \rightarrow 17 \neq 8$ $\longrightarrow$ No es solución.

$\dfrac{\sqrt{x+6}}{2}+\dfrac{x}{6}=8 \xrightarrow{x=30} 3+5=8 \rightarrow 8=8$ $\longrightarrow$ Es solución.

c) $\sqrt{x-\dfrac{x}{4}}=3 \rightarrow \left(\sqrt{x-\dfrac{x}{4}}\right)^2=9 \rightarrow x-\dfrac{x}{4}=9 \rightarrow 4x-x=36 \rightarrow 3x=36 \rightarrow x=12$

$\sqrt{x-\dfrac{x}{4}}=3 \xrightarrow{x=12} \sqrt{12-3}=3 \rightarrow 3=3$ $\longrightarrow$ Es solución

d) $\sqrt{2x^2-(3x+1)}=x+3 \rightarrow (\sqrt{2x^2-(3x+1)})^2=(x+3)^2 \rightarrow 2x^2-3x-1=x^2+6x+9 \rightarrow$

$x^2-9x-10=0 \rightarrow x=\dfrac{9\pm\sqrt{81+40}}{2}=\dfrac{9\pm 11}{2}=\begin{cases} x_1=10 \\ x_2=-1 \end{cases}$

$\sqrt{2x^2-(3x+1)}=x+3 \xrightarrow{x=10} \sqrt{200-31}=13 \rightarrow 13=13$ $\longrightarrow$ Es solución.

$\sqrt{2x^2-(3x+1)}=x+3 \xrightarrow{x=-1} \sqrt{2+2}=2 \rightarrow 2=2$ $\longrightarrow$ Es solución.

e) $2-\sqrt{3x^2-2}=x \rightarrow (2-x)^2=(\sqrt{3x^2-2})^2 \rightarrow 4-4x+x^2=3x^2-2 \rightarrow$

$2x^2+4x-6=0 \rightarrow x^2+2x-3=0 \rightarrow x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\dfrac{-2\pm 4}{2}=\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-3 \end{cases}$

$2-\sqrt{3x^2-2}=x \xrightarrow{x=1} 2-\sqrt{1}=1 \rightarrow 1=1$ $\longrightarrow$ Es solución.

$2-\sqrt{3x^2-2}=x \xrightarrow{x=-3} 2-\sqrt{25}=-3 \rightarrow -3=-3$ $\longrightarrow$ Es solución.

f) $\sqrt{(x+2)(7x-1)}=x+7 \rightarrow (\sqrt{7x^2+13x-2})^2=(x+7)^2 \rightarrow 7x^2+13x-2=x^2+14x+49 \rightarrow$

$6x^2-x-51=0 \rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+1224}}{12}=\dfrac{1\pm 35}{12}=\begin{cases} x_1=3 \\ x_2=\dfrac{-34}{12}=-\dfrac{17}{6} \end{cases}$

$\sqrt{(x+2)(7x-1)}=x+7 \xrightarrow{x=3} \sqrt{5\cdot 20}=10 \rightarrow 10=10$ $\longrightarrow$ Es solución.

$\sqrt{(x+2)(7x-1)}=x+7 \xrightarrow{x=-\frac{17}{6}} \sqrt{\left(\dfrac{-17+12}{6}\right)\cdot\left(\dfrac{-119-6}{6}\right)}=\dfrac{-17+42}{6} \rightarrow$

$\sqrt{\left(-\dfrac{5}{6}\right)\cdot\left(\dfrac{-125}{6}\right)}=\dfrac{25}{6} \rightarrow \sqrt{\dfrac{625}{36}}=\dfrac{25}{6} \rightarrow \dfrac{25}{6}=\dfrac{25}{6}$ $\longrightarrow$ Es solución.

g) $\sqrt{3x-5}+2=\sqrt{5x+1} \rightarrow (\sqrt{3x-5}+2)^2=(\sqrt{5x+1})^2 \rightarrow 3x-5+4\sqrt{3x-5}+4=5x+1 \rightarrow$

$4\sqrt{3x-5}=2x+2 \rightarrow (2\sqrt{3x-5})^2=(x+1)^2 \rightarrow 12x-20=x^2+2x+1 \rightarrow x^2-10x+21=0 \rightarrow$

$x=\dfrac{10\pm\sqrt{100-84}}{2}=\dfrac{10\pm 4}{2}=\begin{cases} x_1=7 \\ x_2=3 \end{cases}$

$\sqrt{3x-5}+2=\sqrt{5x+1} \xrightarrow{x=7} 4+2=6 \rightarrow 6=6$ $\longrightarrow$ Es solución.

$\sqrt{3x-5}+2=\sqrt{5x+1} \xrightarrow{x=3} \sqrt{4}+2=\sqrt{16} \rightarrow 4=4$ $\longrightarrow$ Es solución.

60. Página 86

a) $\frac{3}{4}-\frac{x}{x-1}+\frac{x}{x+1}=0 \rightarrow 3x^2-3-4x(x+1)+4x(x-1)=0 \rightarrow 3x^2-3-4x^2-4x+4x^2-4x=0 \rightarrow$

$$3x^2-8x-3=0 \rightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{64+36}}{6}=\frac{8\pm 10}{6}=\begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

$\frac{3}{4}-\frac{x}{x-1}+\frac{x}{x+1}=0 \xrightarrow{x=3} \frac{3}{4}-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}=0 \rightarrow \frac{3-6+3}{4}=0 \rightarrow 0=0 \rightarrow$ Es solución.

$\frac{3}{4}-\frac{x}{x-1}+\frac{x}{x+1}=0 \xrightarrow{x=-1/3} \frac{3}{4}+\frac{1}{3\left(\frac{-1}{3}-1\right)}-\frac{1}{3\left(\frac{-1}{3}+1\right)}=0 \rightarrow \frac{3}{4}+\frac{1}{-4}-\frac{1}{2}=0 \rightarrow$

$\frac{3-1-2}{4}=0 \rightarrow 0=0 \rightarrow$ Es solución.

b) $\frac{2}{x}+\frac{x+4}{x^2}-1=0 \rightarrow 2x+x+4-x^2=0 \rightarrow x^2-3x-4=0 \rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\begin{cases} x_1=4 \\ x_2=-1 \end{cases}$

$\frac{2}{x}+\frac{x+4}{x^2}-1=0 \xrightarrow{x=4} \frac{2}{4}+\frac{8}{16}-1=0 \rightarrow \frac{1+1-2}{2}=0 \rightarrow 0=0 \rightarrow$ Es solución.

$\frac{2}{x}+\frac{x+4}{x^2}-1=0 \xrightarrow{x=-1} -2+3-1=0 \rightarrow 0=0 \rightarrow$ Es solución.

61. Página 86

a) $\frac{1}{2}-\frac{x+3}{x}+\frac{8}{x^2}=0 \rightarrow x^2-2x^2-6x+16=0 \rightarrow x^2+6x-16=0 \rightarrow$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{36+64}}{2}=\frac{-6\pm 10}{2}=\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-8 \end{cases}$$

$\frac{1}{2}-\frac{x+3}{x}+\frac{8}{x^2}=0 \xrightarrow{x=-8} \frac{1}{2}-\frac{5}{8}+\frac{8}{64}=0 \rightarrow \frac{4-5+1}{8}=0 \rightarrow 0=0 \rightarrow$ Es solución.

b) $\frac{5}{1-2x}-\frac{1}{x-3}+\frac{x}{2x-1}=0 \rightarrow \frac{5(x-3)-1+2x-x(x-3)}{(1-2x)(x-3)}=0 \rightarrow 5x-15-1+2x-x^2+3x=0 \rightarrow$

$$x=\frac{10\pm\sqrt{100-64}}{2}=\frac{10\pm 6}{2}=\begin{cases} x_1=8 \\ x_2=2 \end{cases}$$

$\frac{5}{1-2x}-\frac{1}{x-3}+\frac{x}{2x-1}=0 \xrightarrow{x=8} \frac{5}{-15}-\frac{1}{5}+\frac{8}{15}=0 \rightarrow \frac{-5-3+8}{15}=0 \rightarrow 0=0 \rightarrow$ Es solución.

63. Página 87

a) $\frac{x}{x^2-4}-\frac{5}{x+2}=0 \rightarrow \frac{x-5x+10}{x^2-4}=0 \rightarrow -4x+10=0 \rightarrow x=\frac{5}{2}$

$\frac{x}{x^2-4}-\frac{5}{x+2}=0 \xrightarrow{x=5/2} \frac{5}{2\left(\frac{25-16}{4}\right)}-\frac{5}{\frac{5+4}{2}}=0 \rightarrow \frac{10}{9}-\frac{10}{9}=0 \rightarrow 0=0 \rightarrow$ Es solución.

b) $\frac{5-x}{x^2-x}+\frac{2}{x-1}=0 \rightarrow \frac{5-x+2x}{x^2-x}=0 \rightarrow 5+x=0 \rightarrow x=-5$

$\frac{5-x}{x^2-x}+\frac{2}{x-1}=0 \xrightarrow{x=-5} \frac{10}{25+5}-\frac{2}{6} \rightarrow \frac{10-10}{30}=0 \rightarrow 0=0 \rightarrow$ Es solución.

c) $\frac{4}{x+1}-\frac{3x}{x^2-1}=0 \to \frac{4x-4-3x}{x^2-1}=0 \to x-4=0 \to x=4$

$\frac{4}{x+1}-\frac{3x}{x^2-1}=0 \xrightarrow{x=4} \frac{4}{5}-\frac{12}{15} \to \frac{12-12}{15}=0 \to 0=0 \to$ Es solución.

d) $\frac{x+2}{x}+\frac{x}{x-2}=0 \to \frac{x^2-4+x^2}{x(x-2)}=0 \to 2x^2-4=0 \to x=\pm\sqrt{2}$

$\frac{x+2}{x}+\frac{x}{x-2}=0 \xrightarrow{x=\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}=0 \to \frac{2-4+2}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-2)}=0 \to 0=0 \to$ Es solución.

$\frac{x+2}{x}+\frac{x}{x-2}=0 \xrightarrow{x=-\sqrt{2}} \frac{-\sqrt{2}+2}{-\sqrt{2}}+\frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}-2}=0 \to \frac{2-4+2}{-\sqrt{2}(-\sqrt{2}-2)}=0 \to 0=0 \to$ Es solución.

64. Página 87

a) $\frac{x}{x+1}-\frac{2}{x+3}=\frac{5}{4x} \to \frac{4x^2(x+3)-8x(x+1)}{4x(x+1)(x+3)}=\frac{5(x+1)(x+3)}{4x(x+1)(x+3)} \to$

$4x^3+12x^2-8x^2-8x=5x^2+20x+15 \to (x-3)(4x^2+11x+5)=0$

	4	−1	−28	−15
3		12	33	15
	4	11	5	0

$x=\frac{-11\pm\sqrt{121-80}}{8}=\frac{-11\pm\sqrt{41}}{8}=\begin{cases} x_1=\frac{-11+\sqrt{41}}{8} \\ x_2=\frac{-11-\sqrt{41}}{8}\end{cases}$

Las posibles soluciones son $x_1=3, x_2=\frac{-11+\sqrt{41}}{8}$ y $x_3=\frac{-11-\sqrt{41}}{8}$.

Se puede comprobar que las tres son soluciones.

b) $\frac{2}{x+2}-\frac{x-1}{3}=\frac{x-6}{x-1} \to \frac{6x-6-(x-1)^2(x+2)}{3(x+2)(x-1)}=\frac{(x-6)(x+2)3}{3(x+2)(x-1)} \to$

$6x-6-x^3+3x-2=3x^2-12x-36 \to x^3+3x^2-21x-28=0 \to$

	1	3	−21	−28
4		4	28	28
	1	7	7	0

$(x-4)(x^2+7x+7)=0 \to x=\frac{-7\pm\sqrt{49-28}}{2}=\frac{-7\pm\sqrt{21}}{2}=\begin{cases} x_1=\frac{-7+\sqrt{21}}{2} \\ x_2=\frac{-7-\sqrt{21}}{2}\end{cases}$

Las posibles soluciones son: $x_1=4, x_2=\frac{-7+\sqrt{21}}{2}$ y $x_3=\frac{-7-\sqrt{21}}{2} \to$ Se comprueba que las tres son soluciones.

c) $\frac{x+1}{x}-\frac{x-2}{x^2}=3x \to \frac{x^2+x-x+2}{x^2}=\frac{3x^3}{x^2} \to 3x^3-x^2-2=0 \to$

	3	−1	0	−2
1		3	2	2
	3	2	2	0

$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-24}}{6} \to$ No tiene solución.

$(x-1)(3x^2+2x+2)=0 \to$ Se comprueba que $x=1$ es solución.

d) $\frac{3+x}{2}-\frac{1}{x}=\frac{2}{x^2}\to\frac{3x^2+x^3-2x}{2x^2}=\frac{4}{2x^2}\to x^3+3x^2-2x-4=0\to$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -2 & -4 \\ -1 & & -1 & -2 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & -4 & 0 \end{array}$$

$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+16}}{2}=\begin{cases} x_1=-1+\sqrt{5} \\ x_2=-1-\sqrt{5} \end{cases}$

$(x+1)(x^2+2x-4)=0\to$ Las posibles soluciones son $x_1=-1, x_2=-1+\sqrt{5}$ y $x_3=-1-\sqrt{5}$.

Se puede comprobar que las tres son soluciones.

e) $x-\frac{x}{x+1}-\frac{x^2}{x-1}+\frac{4}{3}=0\to\frac{3x^3-3x-3x^2+3x-3x^3-3x^2+4x^2-4}{(x+1)(x-1)3}=0\to-2x^2-4=0\to$

$x=\sqrt{-2}\to$ No existe solución real.

65. Página 87

a) 1 es menor que 5. — 3) $1<5$

b) 2 es mayor que −4. — 1) $2>-4$

c) −13 es menor que −2. — 5) $-13<-2$

d) −4 es mayor que −7. — 4) $-4>-7$

e) 5 es mayor que 3. — 2) $5>3$

66. Página 87

a) $2x>3$

b) $-2x<3$

c) $-2x<-3$

d) $-2x<3x$

e) $2>-3x$

f) $-2>-3x$

g) $4x>1$

h) $3x>-x+3$

67. Página 87

a) $3(x+5)<20\to 3x+15<20\to 3x<5\to x<\frac{5}{3}$ $\to$ La solución es el intervalo $\left(-\infty,\frac{5}{3}\right)$.

b) $-4(2x-1)\geq-36\to 2x-1\leq 9\to x\leq 5$ $\to$ La solución es el intervalo $(-\infty,5]$.

c) $x-(3x+8)>0\to x-3x-8>0\to-2x>8\to x<-4$ $\to$ La solución es el intervalo $(-\infty,-4)$.

d) $6x-(-3)(x+2)\leq 12\to 2x+x+2\leq 4\to 3x\leq 2\to x\leq\frac{2}{3}$ $\to$ La solución es el intervalo $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right]$.

e) $(x-4)2<-10\to x-4<-5\to x<-1$ $\to$ La solución es el intervalo $(-\infty,-1)$.

f) $9+(4-6x)(-1)\leq 13\to 9-4+6x\leq 13\to 6x\leq 8\to x\leq\frac{4}{3}$ $\to$ La solución es el intervalo $\left(-\infty,\frac{4}{3}\right]$.

68. Página 87

a) $x=\frac{1}{2}$ verifica que $1+x\leq\frac{3}{2}\rightarrow$ Verdadera.

b) $x=0$ verifica que $2x+3<3\rightarrow$ Falsa.

c) $x=-3$ verifica que $\frac{4x+5}{2}\leq\frac{14}{4}\rightarrow$ Verdadera.

d) $x=-5$ verifica que $\frac{x+3}{2}\geq-4\rightarrow$ Verdadera.

69. Página 87

a) Números menores que 9 y mayores o iguales que 4: $4\leq x<9\rightarrow[4,9)$

b) Números menores o iguales que 10: $x\leq10\rightarrow(-\infty,10]$

c) Números mayores que –3 y menores que 3: $-3<x<3\rightarrow(-3,3)$

d) Números mayores o iguales que –6: $x\geq-6\rightarrow[-6,+\infty)$

e) Números menores que –5 y mayores que –10: $-10<x<-5\rightarrow(-10,-5)$

f) Números mayores que –8 y menores o iguales que 0: $-8<x\leq0\rightarrow(-8,0]$

g) Años de vida que tiene una persona mayor de edad: $x\geq18\rightarrow[18,+\infty)$

h) Número de la matrícula de un coche: $0\leq x\leq9999\rightarrow[0,9999]$

70. Página 87

a) $-5(x+1) > x+3 \rightarrow -5x-5 > x+3 \rightarrow -8 > 6x \rightarrow x < \frac{-4}{3}$

La solución es el intervalo $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right)$.

b) $4-(7x-1) \geq -x+8 \rightarrow 4-7x+1 \geq -x+8 \rightarrow -3 \geq 6x \rightarrow x \leq \frac{-1}{2}$

La solución es el intervalo $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$.

c) $6-(3x+2) \leq 4x-9 \rightarrow 6-3x-2 \leq 4x-9 \rightarrow 13 \leq 7x \rightarrow x \geq \frac{13}{7}$

La solución es el intervalo $\left[\frac{13}{7}, +\infty\right)$.

d) $x-(-4+x) \leq 12+5x \rightarrow x+4-x \leq 12+5x \rightarrow -8 \leq 5x \rightarrow x \geq \frac{-8}{5}$

La solución es el intervalo $\left[\frac{-8}{5}, +\infty\right)$.

e) $9x+(4-x) < 14x-5 \rightarrow 9 < 6x \rightarrow x > \frac{3}{2}$

La solución es el intervalo $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

f) $1+4(5-6x) < x+7 \rightarrow 1+20-24x < x+7 \rightarrow 14 < 25x \rightarrow x > \frac{14}{25}$

La solución es el intervalo $\left(\frac{14}{25}, +\infty\right)$.

71. Página 86

a) $1-(x+2)2 \leq 4(x-9) \rightarrow 1-2x-4 \leq 4x-36 \rightarrow 33 \leq 6x \rightarrow x \geq \frac{11}{2}$

La solución es el intervalo $\left[\frac{11}{2}, +\infty\right)$.

b) $6(x+5) > x+3(4-x) \rightarrow 6x+30 > x+12-3x \rightarrow 8x > -18 \rightarrow x > \frac{-9}{4}$

La solución es el intervalo $\left(-\frac{9}{4}, +\infty\right)$.

c) $-7(4+x) < 1+5(2-x) \rightarrow -28-7x < 1+10-5x \rightarrow -39 < 2x \rightarrow x > \frac{-39}{2}$

La solución es el intervalo $\left(-\frac{39}{2}, +\infty\right)$.

d) $5(4x-1) \geq (x+3)(-4) \rightarrow 20x-5 \geq -4x-12 \rightarrow 24x \geq -7 \rightarrow x \geq \frac{-7}{24}$

La solución es el intervalo $\left[\frac{-7}{24}, +\infty\right)$.

e) $2-3(9-x) \geq x-(-x+7) \rightarrow 2-27+3x \geq x+x-7 \rightarrow x \geq 18$

La solución es el intervalo $[18, +\infty)$.

f) $x+(7-x)3 < 4x-5(3+x) \rightarrow x+21-3x < 4x-15-5x \rightarrow x > 36$

La solución es el intervalo $(36, +\infty)$.

72. Página 86

a) $\frac{3x-2}{5} \leq x - \frac{1}{2} \rightarrow \frac{6x-4}{10} \leq \frac{10x-5}{10} \rightarrow 1 \leq 4x \rightarrow x \geq \frac{1}{4}$

La solución es el intervalo $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

b) $\frac{x+5}{4} > 2x + \frac{x}{3} \rightarrow \frac{3x+15}{12} > \frac{24x+4x}{3} \rightarrow 15 > 25x \rightarrow x < \frac{3}{5}$

La solución es el intervalo $\left(-\infty, \frac{3}{5}\right)$.

c) $\frac{3+4x}{2} < \frac{x}{4} \rightarrow \frac{6+8x}{4} < \frac{x}{4} \rightarrow 7x < -6 \rightarrow x < \frac{-6}{7}$

La solución es el intervalo $\left(-\infty, \frac{-6}{7}\right)$.

d) $\frac{x-6}{7} \leq \frac{3x-1}{2} \rightarrow \frac{2x-12}{14} \leq \frac{21x-7}{14} \rightarrow -5 \leq 19x \rightarrow x \geq \frac{-5}{19}$

La solución es el intervalo $\left[-\frac{5}{19}, +\infty\right)$.

e) $\frac{3-x}{8} \geq \frac{x+5}{3} \rightarrow \frac{9-3x}{24} \geq \frac{8x+40}{24} \rightarrow -31 \geq 11x \rightarrow x \leq \frac{-31}{11}$

La solución es el intervalo $\left(-\infty, -\frac{31}{11}\right]$.

f) $\frac{4-x}{6} > \frac{5x}{8} \rightarrow \frac{16-4x}{24} > \frac{15x}{24} \rightarrow 16 > 19x \rightarrow x < \frac{16}{19}$

La solución es el intervalo $\left(-\infty, \frac{16}{19}\right)$.

74. Página 88

a) $2x(x-1) \leq 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

Los intervalos que se forman son: $(-\infty, 0], [0, 1]$ y $[1, +\infty)$

Para $(-\infty, 0]$: si $x = -1 \rightarrow -2(-2) > 0$

Para $[0, 1]$: si $x = \frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{1}{2} - 1\right) < 0$

Para $[1, +\infty)$: si $x = 4 \rightarrow 8(4-1) > 0$

La solución es $[0, 1]$.

b) $(x+3)(x+4) \geq 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = -4 \end{cases}$

Los intervalos que se forman son: $(-\infty, -4], [-4, -3]$ y $[-3, +\infty)$

Para $(-\infty, -4]$: si $x = -5 \rightarrow (-2)(-1) > 0$

Para $[-4, -3]$: si $x = -\frac{16}{5} \rightarrow \left(\frac{-16+15}{5}\right)\left(\frac{-16+20}{5}\right) < 0$

Para $[-3, +\infty)$: si $x = 0 \rightarrow 3 \cdot 4 > 0$

La solución es $(-\infty, -4] \cup [-3, +\infty)$.

c) $x(x+5)<0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -5 \end{cases} \rightarrow$ Los intervalos que se forman son: $(-\infty,-5),(-5,0)$ y $(0,+\infty)$

Para $(-\infty,-5)$: si $x=-6 \rightarrow -6\cdot(-1)>0$

Para $(-5,0)$: si $x=-1 \rightarrow -1\cdot 4<0$

Para $(0,+\infty)$: si $x=1 \rightarrow 1\cdot 6>0$

La solución es: $(-5,0)$.

d) $3x(2x+5)\leq 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\dfrac{5}{2} \end{cases} \rightarrow$ Los intervalos que se forman son: $\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right],\left[-\frac{5}{2},0\right]$ y $[0,+\infty)$

Para $\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right]$: si $x=-3 \rightarrow -9(-1)>0$

Para $\left[-\frac{5}{2},0\right]$: si $x=-1 \rightarrow -3\cdot 3<0$

Para $[0,+\infty)$: si $x=1 \rightarrow 3\cdot 7>0$

La solución es $\left[-\frac{5}{2},0\right]$.

75. Página 88

a) $2x^2-3x\leq 14 \rightarrow 2x^2-3x-14\leq 0 \rightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{9+112}}{4}=\dfrac{3\pm 11}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{7}{2} \\ x_2 = -2 \end{cases}$

Los intervalos que se forman son: $(-\infty,-2],\left[-2,\frac{7}{2}\right]$ y $\left[\frac{7}{2},\infty\right)$

Para $(-\infty,-2]$: si $x=-3 \rightarrow 18+9>14$

Para $\left[-2,\frac{7}{2}\right]$: si $x=0 \rightarrow 0<14$

Para $\left[\frac{7}{2},+\infty\right)$: si $x=4 \rightarrow 32-12>14$

La solución es $\left[-2,\frac{7}{2}\right]$.

b) $3x+1<4x^2 \rightarrow 4x^2-3x-1>0 \rightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{9+16}}{8}=\dfrac{3\pm 5}{8}=\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$

Los intervalos que se forman son: $\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right),\left(-\frac{1}{4},1\right)$ y $(1,+\infty)$

Para $\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)$: si $x=-1 \rightarrow -3+1<4$

Para $\left(-\frac{1}{4},1\right)$: si $x=0 \rightarrow 1>0$

Para $(1,+\infty)$: si $x=2 \rightarrow 6+1<16$

La solución es $\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)\cup(1,+\infty)$.

c) $8x^2 \leq 7 - x \rightarrow 8x^2 + x - 7 \leq 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+224}}{16} = \frac{-1 \pm 15}{16} \rightarrow \left\{ x_1 = -1, x_2 = \frac{7}{8} \right.$

Los intervalos que se forman son: $(-\infty, -1], \left[-1, \frac{7}{8}\right]$ y $\left[\frac{7}{8}, +\infty\right)$

Para $(-\infty, -1]$: si $x = -2 \rightarrow 32 > 7 + 2$

Para $\left[-1, \frac{7}{8}\right]$: si $x = 0 \rightarrow 0 < 7$

Para $\left[\frac{7}{8}, +\infty\right)$: si $x = 2 \rightarrow 32 > 7 - 2$

La solución es $\left[-1, \frac{7}{8}\right]$.

d) $2x^2 \geq 3x + 5 \rightarrow 2x^2 - 3x - 5 \geq 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4} \rightarrow \left\{ x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = -1 \right.$

Los intervalos que se forman son: $(-\infty, -1], \left[-1, \frac{5}{2}\right]$ y $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$

Para $(-\infty, -1]$: si $x = -2 \rightarrow 8 > -6 + 5$

Para $\left[-1, \frac{5}{2}\right]$: si $x = 0 \rightarrow 0 < 5$

Para $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$: si $x = 3 \rightarrow 18 > 9 + 5$

La solución es $(-\infty, -1] \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

e) $7 < 5x^2 + 2x \rightarrow 5x^2 + 2x - 7 > 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+140}}{10} = \frac{-2 \pm 12}{10} = \left\{ x_1 = 1, x_2 = -\frac{7}{5} \right.$

Los intervalos que se forman son: $\left(-\infty, -\frac{7}{5}\right), \left(-\frac{7}{5}, 1\right)$ y $(1, +\infty)$

Para $\left(-\infty, -\frac{7}{5}\right)$: si $x = -2 \rightarrow 7 < 20 - 4$

Para $\left(-\frac{7}{5}, 1\right)$: si $x = 0 \rightarrow 7 > 0$

Para $(1, +\infty)$: si $x = 2 \rightarrow 7 < 20 + 4$

La solución es $\left(-\infty, -\frac{7}{5}\right) \cup (1, +\infty)$.

f) $3x^2 > 8 - 2x \rightarrow 3x^2 + 2x - 8 > 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+96}}{6} = \frac{-2 \pm 10}{6} = \left\{ x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = -2 \right.$

Los intervalos que se forman son: $(-\infty, -2), \left(-2, \frac{4}{3}\right)$ y $\left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$

Para $(-\infty, -2)$: si $x = -3 \rightarrow 27 > 8 + 6$

Para $\left(-2, \frac{4}{3}\right)$: si $x = 0 \rightarrow 0 < 8$

Para $\left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$: si $x = 2 \rightarrow 12 > 8 - 4$

La solución es $(-\infty, -2) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$.

g) $x+1\leq 2x^2 \rightarrow 2x^2-x-1\geq 0 \rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\dfrac{1\pm 3}{4}\rightarrow \left\{x_1=1,\ x_2=-\dfrac{1}{2}\right.$

Los intervalos que se forman son: $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right],\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$ y $[1,+\infty)$

Para $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$: si $x=-2\rightarrow -1<8$

Para $\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$: si $x=0\rightarrow 1>0$

Para $[1,+\infty)$: si $x=2\rightarrow 3<8$

La solución es $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty)$.

h) $4x^2+3x>10\rightarrow 4x^2+3x-10>0\rightarrow x=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+160}}{8}=\dfrac{-3\pm 13}{8}=\left\{x_1=\dfrac{5}{4},\ x_2=-2\right.$

Los intervalos que se forman son: $(-\infty,-2),\left(-2,\dfrac{5}{4}\right)$ y $\left(\dfrac{5}{4},+\infty\right)$

Para $(-\infty,-2)$: si $x=-3\rightarrow 36-9>10$

Para $\left(-2,\dfrac{5}{4}\right)$: si $x=0\rightarrow 0<10$

Para $\left(\dfrac{5}{4},+\infty\right)$: si $x=2\rightarrow 16+6>10$

La solución es $(-\infty,-2)\cup\left(\dfrac{5}{4},+\infty\right)$.

76. Página 88

a) $x(2x-1)\leq 21\rightarrow 2x^2-x-21\leq 0\rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+168}}{4}=\dfrac{1\pm 13}{4}\rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{7}{2}\\ x_2=-3\end{cases}$

Los intervalos que se forman son: $(-\infty,-3],\left[-3,\dfrac{7}{2}\right]$ y $\left[\dfrac{7}{2},+\infty\right)$

Para $(-\infty,-3]$: si $x=-4\rightarrow -4\cdot(-9)>21$ Para $\left[-3,\dfrac{7}{2}\right]$: si $x=0\rightarrow 0<21$ Para $\left[\dfrac{7}{2},+\infty\right)$: si $x=4\rightarrow 4\cdot 7>21$

La solución es $\left[-3,\dfrac{7}{2}\right]$.

b) $2(x+8)\geq 3x^2\rightarrow 3x^2-2x-16\leq 0\rightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+192}}{6}=\dfrac{2\pm 14}{6}\rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{8}{3}\\ x_2=-2\end{cases}$

Los intervalos que se forman son: $(-\infty,-2],\left[-2,\dfrac{8}{3}\right]$ y $\left[\dfrac{8}{3},+\infty\right)$

Para $(-\infty,-2]$: si $x=-4\rightarrow 2\cdot 4<48$ Para $\left[-2,\dfrac{8}{3}\right]$: si $x=0\rightarrow 16>0$ Para $\left[\dfrac{8}{3},+\infty\right)$: si $x=3\rightarrow 2\cdot 11<27$

La solución es $\left[-2,\dfrac{8}{3}\right]$.

c) $3x(x-1)+x<1 \rightarrow 3x^2-2x-1<0 \rightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+12}}{6}=\dfrac{2\pm 4}{6}=\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$

Los intervalos que se forman son: $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right),\left(-\dfrac{1}{3},1\right)$ y $(1,+\infty)$

Para $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)$: si $x=-1 \rightarrow -3\cdot(-2)-1>1$

Para $\left(-\dfrac{1}{3},1\right)$: si $x=0 \rightarrow 0<1$

Para $(1,+\infty)$: si $x=2 \rightarrow 6+2>1$

La solución es $\left(-\dfrac{1}{3},1\right)$.

d) $2x(x+1)+1\leq x(6-x) \rightarrow 2x^2+2x+1\leq 6x-x^2 \rightarrow 3x^2-4x+1\leq 0 \rightarrow$

$x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-12}}{6}=\dfrac{4\pm 2}{6} \rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=\dfrac{1}{3}\end{cases}$

Los intervalos que se forman son: $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right],\left[\dfrac{1}{3},1\right]$ y $[1,+\infty)$

Para $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right]$: si $x=0 \rightarrow 1>0$

Para $\left[\dfrac{1}{3},1\right]$: si $x=\dfrac{1}{2} \rightarrow \dfrac{5}{2}<\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{11}{2}$

Para $[1,+\infty)$: si $x=2 \rightarrow 4\cdot 3+1>2\cdot 4$

La solución es $\left[\dfrac{1}{3},1\right]$.

e) $x(x+1)+4<2(2x^2+1) \rightarrow x^2+x+4<4x^2+2 \rightarrow 3x^2-x-2>0 \rightarrow$

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+24}}{6}=\dfrac{1\pm 5}{6}=\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-\dfrac{2}{3}\end{cases}$

Los intervalos que se forman son: $\left(-\infty,-\dfrac{2}{3}\right),\left(-\dfrac{2}{3},1\right)$ y $(1,+\infty)$

Para $\left(-\infty,-\dfrac{2}{3}\right)$: si $x=-1 \rightarrow 4<6$

Para $\left(-\dfrac{2}{3},1\right)$: si $x=0 \rightarrow 4>2$

Para $(1,+\infty)$: si $x=2 \rightarrow 6+4<18$

La solución es $\left(-\infty,-\dfrac{2}{3}\right)\cup(1,+\infty)$.

77. Página 88

$\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{3}(x+1)+\dfrac{1}{4}(x+2)=x+3 \rightarrow 6x+4x+4+3x+6=12x+36 \rightarrow 13x+10=12x+36 \rightarrow$

$x=26 \rightarrow x_1=26,\ x_2=27$ y $x_3=28$

78. Página 88

$$x+\frac{x}{2}+\frac{x}{5}+\frac{x}{10}+10=2x\rightarrow 10x+5x+2x+x+100=20x\rightarrow 2x=100\rightarrow x=50$$

79. Página 88

$$\left.\begin{array}{l}x_1-x_2=1\\x_1+x_2=7\end{array}\right\}\rightarrow x_1=x_2+1\rightarrow 2x_2=6\rightarrow x_2=3 \text{ y } x_1=4\rightarrow x=34 \text{ ó } x=43$$

80. Página 88

$$x+x+1+x+2=15\rightarrow 3x=12\rightarrow x=4\rightarrow 456$$

81. Página 88

$$\left(\frac{x}{2}+3\right)+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x}{2}-3\right)+26=x\rightarrow 3x+18+2x-x-6+156=6x\rightarrow 168=2x\rightarrow x=84$$

82. Página 88

$$\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{2}+\frac{1}{5}\left(x-\frac{x}{2}-\frac{x}{6}\right)+12=x\rightarrow\frac{x}{2}+\frac{x}{6}+\frac{2x}{30}+12=x\rightarrow 15x+5x+2x+360=30x\rightarrow$$

$$22x+360=30x\rightarrow x=45 \text{ km}$$

Carlos recorre un trayecto de 45 km, de los cuales $\frac{1}{5}\left(45-\frac{45}{2}-\frac{45}{6}\right)=3$ km los hace en bici.

83. Página 88

$$x=\frac{30}{100}x+\frac{20}{100}\left(x-\frac{3}{10}x\right)+800\rightarrow 50x=25x-3x+40\,000\rightarrow x=\frac{40\,000}{28}=1428{,}571\text{ €}$$

84. Página 88

$$\left.\begin{array}{l}2x+4y=400\\x=3y\end{array}\right\}\rightarrow 6y+4y=400\rightarrow y=40\rightarrow x=120$$

Los billetes de los menores valen 40 € y los de los padres 120 €.

85. Página 88

Si *x* es el precio de la caja de bombones e *y* el precio de un pastel:

$$\left.\begin{array}{l}x=4y\\3x+2y=21\end{array}\right\}\rightarrow 12y+2y=21\rightarrow y=1{,}50\text{ €},\ x=6\text{ €}$$

86. Página 88

a) $(x+1)^2\geq 16\rightarrow x^2+2x-15\geq 0\rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4+60}}{2}=\frac{-2\pm 8}{2}=\begin{cases}x_1=3\\x_2=-5\end{cases}$

Los intervalos que se forman son: $(-\infty,-5],[-5,3]$ y $[3,+\infty)$

Para $(-\infty,-5]$: si $x=-6\rightarrow 25>16$ Para $[-5,3]$: si $x=0\rightarrow 1<16$ Para $[3,+\infty)$: si $x=4\rightarrow 25>16$

La solución es $(-\infty,-5]\cup[3,+\infty)$.

b) $(x-2)^2 > 9 \rightarrow x^2-4x-5 \geq 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

Los intervalos que se forman son: $(-\infty,-1),(-1,5)$ y $(5,+\infty)$

Para $(-\infty,-1)$: si $x=-6 \rightarrow (-8)^2 > 9$ Para $(-1,5)$: si $x=0 \rightarrow (-2)^2 < 9$ Para $(5,+\infty)$: si $x=6 \rightarrow 4^2 > 9$

La solución es $(-\infty,-1) \cup (5,+\infty)$.

87. Página 89

Sea *x* el lado del cuadrado en cm: $x^2 < 121 \rightarrow 0 < x < 11 \rightarrow x \in (0,11)$

88. Página 89

Sea *x* el precio del ramo tipo *A*. Sea *y* el precio del ramo tipo *B*.

$$\left.\begin{array}{l} 250x+140y=7700 \\ y=\frac{5}{6}x \end{array}\right\} \rightarrow 250x+140\cdot\frac{5}{6}x=7700 \rightarrow 750x+350x=23\,100$$

x = 21 €, *y* = 17,50 €.

89. Página 89

Sea *x* el número de billetes de 20 € e *y* el número de billetes de 50 €.

$$\left.\begin{array}{l} 20x+50y=450 \\ x+y=15 \end{array}\right\} \rightarrow 20(15-y)+50y=450 \rightarrow 300+30y=450$$

$30y=150 \rightarrow y=5$ y $x=10$

90. Página 89

a) El perímetro es 210 cm y *a* = *b* + 15:

$$\left.\begin{array}{l} 2a+2b=210 \\ a=b+15 \end{array}\right\} \rightarrow 2b+30+2b=210 \rightarrow 4b=180$$

b = 45 cm y *a* = 60 cm

b) El área es 1 875cm² y *a* = 3*b*:

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot b=1875 \\ a=3b \end{array}\right\} \rightarrow 3b\cdot b=1875 \rightarrow b^2=625 \rightarrow b=25 \rightarrow a=75$$

a = 75 cm y *b* = 25 cm

c) La diagonal mide 37 cm y *a* = 3*b* – 1:

$$\left.\begin{array}{l} a^2+b^2=37^2 \\ a=3b-1 \end{array}\right\} \rightarrow (3b-1)^2+b^2=1369 \rightarrow 10b^2-6b+1=1369 \rightarrow$$

$$10b^2-6b-1\,368=0 \rightarrow 5b^2-3b-684=0 \rightarrow b=\frac{3 \pm \sqrt{9+13\,680}}{10}=\frac{3 \pm 117}{10}=\begin{cases} b_1=12 \\ b_2=-\frac{114}{10} \end{cases}$$

Descartamos la solución negativa por tratarse de una distancia: *b* = 12 cm y *a* = 35 cm.

91. Página 89

Sea *x* el lado del cuadrado, entonces $2x^2 = 128 \rightarrow x^2 = 64 \rightarrow x = 8$ cm.

92. Página 89

$$\left.\begin{array}{l} 2a+2b=70 \\ a=\dfrac{3}{4}b \end{array}\right\} \rightarrow \frac{3}{2}b+2b=70 \rightarrow 3b+4b=140 \rightarrow 7b=140 \rightarrow b=20 \text{ y } a=15$$

El área del rectángulo es 20 · 15 = 300 cm².

93. Página 89

$$\left.\begin{array}{l} a=\dfrac{2}{3}b \\ \dfrac{a\cdot b}{2}=54 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{b^2}{3}=54 \rightarrow b=\sqrt{162}=9\sqrt{2} \rightarrow a=6\sqrt{2} \rightarrow h=\sqrt{162+72}=3\sqrt{26} \text{ cm}$$

94. Página 89

Sea *x* el lado del cuadrado, entonces $(x+2)^2 - x^2 = 32 \rightarrow 4x+4 = 32 \rightarrow x = 7$ cm.

95. Página 89

Para resolverlo, tenemos en cuenta que Distancia = velocidad × tiempo:

a) $4\cdot 4 \leq d \leq 4\cdot 6 \rightarrow 16\text{km} \leq d \leq 24\text{km}$

b) $5{,}5\cdot 4 \leq d \leq 5{,}5\cdot 6 \rightarrow 22\text{km} \leq d \leq 33\text{km}$

c) $2\cdot 7\cdot 4 \leq d \leq 2\cdot 7\cdot 6 \rightarrow 56\text{km} \leq d \leq 84\text{km}$

96. Página 89

Sea *x* la edad de Carlos, *y* la de Javier, y *z* la de María.

$$\left.\begin{array}{l} 6 \leq x \leq 10 \\ y = x-4 \\ z = y+6 = x+2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 6-4 \leq y \leq 10-4 \\ 6+2 \leq z \leq 10+2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \leq y \leq 6 \\ 8 \leq z \leq 12 \end{array}\right\}$$

97. Página 89

Sea *x* el lado del cuadrado, entonces $0 < x^2 \leq 625 \rightarrow 0 \text{ m} < x \leq 25 \text{ m}$.

98. Página 89

a) $2x+5 < 10 \rightarrow x < \dfrac{5}{2}$

b) $\dfrac{x}{2} - 3 \leq 8 \rightarrow \dfrac{x}{2} \leq 11 \rightarrow x \leq 22$

c) $3x + \dfrac{x}{2} > 7 \rightarrow 6x + x > 14 \rightarrow 7x > 14 \rightarrow x > 2$

d) $2(x+1) \geq 6 \rightarrow 2x + x \geq 6 \rightarrow 3x \geq 6 \rightarrow x \geq 2$

DEBES SABER HACER

1. Página 89

a) $3x-7(x+3)=(-5+x)2-5 \to 3x-7x-21=-10+2x-5 \to -6=6x \to x=-1$

b) $x^2-5x+6=-x^2+5x-6 \to 2x^2-10x+12=0 \to x^2-5x+6=0 \to x=\dfrac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\begin{cases} x_1=3 \\ x_2=2 \end{cases}$

2. Página 89

a) $x^4+x^2-6=0 \xrightarrow{t=x^2} t^2+t-6=0$

$t=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\dfrac{-1\pm 5}{2}=\begin{cases} t_1=2 \\ t_2=-3 \end{cases}$

$t=x^2 \to \begin{cases} \text{si } t_1=2 \to x=\pm\sqrt{2} \\ \text{si } t_2=-3 \to x=\pm\sqrt{-3} \to \text{No existe solución.} \end{cases}$

Hay dos soluciones: $x_1=\sqrt{2}$ y $x_2=-\sqrt{2}$

b) $(x-3)(x+1)(x+\sqrt{2})=0 \to x_1=3, x_2=-1$ y $x_3=-\sqrt{2}$

3. Página 89

a) $\dfrac{2x+1}{2x-1}-\dfrac{5x+1}{x-2}=1 \to \dfrac{(2x+1)(x-2)}{(2x-1)(x-2)}-\dfrac{(5x+1)(2x-1)}{(2x-1)(x-2)}=\dfrac{(2x-1)(x-2)}{(2x-1)(x-2)} \to$

$2x^2-3x-2-10x^2+3x+1=2x^2-5x+2 \to 10x^2-5x+3=0 \to \dfrac{5\pm\sqrt{25-120}}{20}$

No existe solución real.

b) $\sqrt{8x-7}+1=2\sqrt{x+2} \to (\sqrt{8x-7}+1)^2=(2\sqrt{x+2})^2 \to 8x-7+2\sqrt{8x-7}+1=4x+8 \to$

$(2\sqrt{8x-7})^2=(14-4x)^2 \to 32x-28=196-112x+16x^2 \to 16x^2-144x+224=0 \to$

$x^2-9x+14=0 \to \dfrac{9\pm\sqrt{81-56}}{2}=\dfrac{9\pm 5}{2}=\begin{cases} x_1=7 \\ x_2=2 \end{cases}$

$\sqrt{8x-7}+1=2\sqrt{x+2} \xrightarrow{x=7} \sqrt{49}+1=2\sqrt{9} \to 8\neq 6 \to$ No es solución.

$\sqrt{8x-7}+1=2\sqrt{x+2} \xrightarrow{x=2} \sqrt{9}+1=2\sqrt{4} \to 4=4 \to$ Es solución.

4. Página 89

a) $3x-5\geq 2(x+2)+4x \to 3x-5\geq 2x+4+4x \to -9\geq 3x \to x\leq -3$

La solución es el intervalo $(-\infty,-3]$.

b) $-x^2+3x+10<0 \to \dfrac{-3\pm\sqrt{9+40}}{-2}=\dfrac{-3\pm 7}{-2}=\begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=5 \end{cases}$

Los intervalos que se forman son: $(-\infty,-2),(-2,5)$ y $(5,+\infty)$

Para $(-\infty,-2)$: si $x=-3 \to -9-9+10<0$

Para $(-2,5)$: si $x=0 \to 10>0$

Para $(5,+\infty)$: si $x=6 \to -36+18+10<0$

La solución es $(-\infty,-2)\cup(5,+\infty)$.

5. Página 89

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a\cdot b}{2}=60\\ a=2b+2\end{array}\right\}\rightarrow\dfrac{(2b+2)b}{2}=60\rightarrow b^2+b-60=0\rightarrow b=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+240}}{2}=\begin{cases}x_1=\dfrac{-1+\sqrt{241}}{2}=7{,}26\\ x_2=\dfrac{-1-\sqrt{241}}{2}\rightarrow \text{No}\end{cases}$$

$$a=1+\sqrt{241}=16{,}52\rightarrow h=\sqrt{52{,}71+272{,}91}=18{,}04\rightarrow P=7{,}26+16{,}52+18{,}04=41{,}82\ \text{cm.}$$

6. Página 89

Sea x la edad de María e y la de su hermana:

$$\left.\begin{array}{l}x=3y\\ 0\le x+y<20\end{array}\right\}\rightarrow 0\le 4y<20\rightarrow \left.\begin{array}{l}0\le y<5\\ 0\le x<15\end{array}\right\}$$

COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

99. Página 90

a) $\left.\begin{array}{l}x_A=\text{tierra por Modelo } A\\ x_B=\text{tierra por Modelo } B\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x_B=0{,}18x_A+x_A\\ 5x_A+2x_B=60\end{array}\right\}\rightarrow 5x_A+2{,}36x_A=60\rightarrow\begin{cases}x_A=8{,}15\\ x_B=9{,}62\end{cases}$

En 1 día $\rightarrow\begin{cases}x_{A2}=1{,}16\\ x_{B2}=1{,}37\end{cases}$ hectáreas en un día.

b) t = Tractores modelo A: $8{,}15\cdot(5+t)+9{,}62=60\rightarrow 40{,}75+8{,}15t+9{,}62=60\rightarrow$

$8{,}15t=9{,}63\rightarrow t=1{,}18$ tractores.

c) x_C = Tierra por modelo C: $x_C=1{,}82x_{B2}=1{,}82\cdot 1{,}37=2{,}49$ hectáreas en un día.

Si se quiere cubrir las 60 hectáreas en una semana se necesitan $t_C=\dfrac{60}{2{,}49\cdot 7}=3{,}44$ tractores.

FORMAS DE PENSAR. Razonamiento matemático

100. Página 90

a) $\dfrac{3\cdot 2}{2}=3$ apretones.

b) Si hay 4 personas $\rightarrow\dfrac{4\cdot 3}{2}=6$ apretones y si hay 5 personas $\rightarrow\dfrac{5\cdot 4}{2}=10$ apretones.

c) $\dfrac{n(n-1)}{2}$ apretones.

101. Página 90

$ax+b=0\rightarrow x=-\dfrac{b}{a}$ $\qquad$ $cx+d=0\rightarrow x=-\dfrac{d}{c}$

$$-\frac{b}{a}=-\frac{d}{c}\rightarrow ad=bc$$

102. Página 90

Se extrae factor común x^n y resulta $x^n\,(ax^n + b) = 0$.

Una solución es $x = 0$, y la otra se obtiene resolviendo $x=\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$.

103. Página 90

Las soluciones son de la forma $x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4a}}{2a}$.

a) Dos soluciones: $a^2 - 4a > 0 \longrightarrow a\in(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$.

b) Una solución doble: $a^2 - 4a = 0 \longrightarrow a = 0$ o bien $a = 4$.

c) Ninguna solución: $a^2 - 4a < 0 \longrightarrow a\in(0,4)$.

104. Página 90

$$x^2+bx+c=0\rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}$$

La parábola es cóncava, ya que $a = 1 > 0$.

a) Si la parábola corta una sola vez al eje *X* y siempre está por encima de él ($\geq$ 0), tendrá una única solución.

Corta una sola vez: $b^2 - 4c = 0$.

b) Si la parábola no corta al eje *X* y siempre está por encima de él ($\geq$ 0), no existirá solución.

$b^2 - 4c < 0$.

c) Si la parábola corta una única vez al eje *X* y siempre está por debajo de él, la solución será $\mathbb{R}$.

La parábola no puede estar siempre por debajo del eje *X* ya que es cóncava.

105. Página 90

	$(-\infty,-3)$	$(-3,-1)$	$(-1,2)$	$(2,+\infty)$
	$x=-4$	$x=-2$	$x=0$	$x=3$
$(x+3)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x+1)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x-2)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)(x-2)(x+3)$	$-$	$+$	$-$	$+$

$(x + 1)(x - 2)(x + 3) \geq 0 \longrightarrow x\in[-3,-1]\cup[2,+\infty)$.

PRUEBAS PISA

106. Página 91

a) $240\cdot 0{,}20+(350-240)\cdot 0{,}40=92$ zeds.

b) $60+0{,}05x=74\rightarrow 0{,}05x=14\rightarrow x=280$ periódicos.

c) El Gráfico C.

Sistemas de ecuaciones e inecuaciones

5

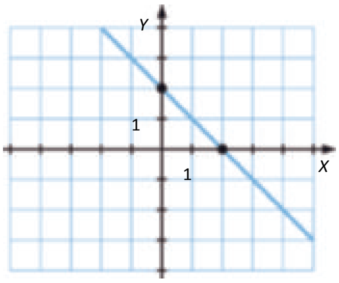
CLAVES PARA EMPEZAR

1. Página 92

a) Obtenemos dos puntos por los que pasa la recta.

$$y = -x + 2 \xrightarrow{x=0} y = 2 \rightarrow (0, 2)$$

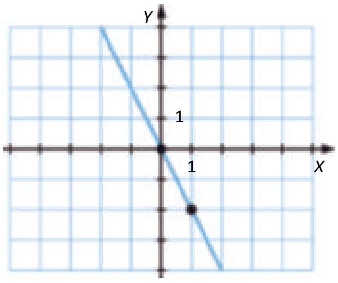
$$y = -x + 2 \xrightarrow{x=2} y = 0 \rightarrow (2, 0)$$



b) Obtenemos dos puntos por los que pasa la recta.

$$y = -2x \xrightarrow{x=0} y = 0 \rightarrow (0, 0)$$

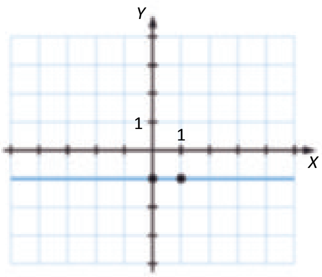
$$y = -2x \xrightarrow{x=1} y = -2 \rightarrow (1, -2)$$



c) Obtenemos dos puntos por los que pasa la recta.

$$y = -1 \xrightarrow{x=0} y = -1 \rightarrow (0, -1)$$

$$y = -1 \xrightarrow{x=1} y = -1 \rightarrow (0, -1)$$

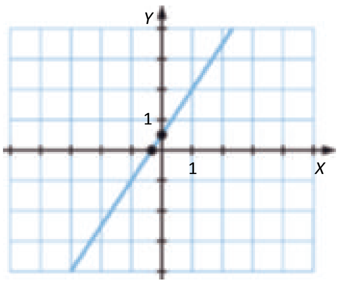


2. Página 92

Obtenemos dos puntos por los que pasa la recta.

$$3x - 2y = -1 \xrightarrow{x=0} y = \frac{1}{2} \rightarrow \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$3x - 2y = -1 \xrightarrow{y=0} x = -\frac{1}{3} \rightarrow \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$$



VIDA COTIDIANA

EL CEPILLO DE DIENTES. Página 93

Sea *x* los cepillos de la primera marca, e *y* los cepillos de la segunda. Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\left.\begin{array}{r} x+y=50 \\ x=\frac{1}{4}y \end{array}\right\} \xrightarrow{x=\frac{1}{4}y} \frac{y}{4}+y=50 \to y+4y=200 \to y=\frac{200}{5}=40$$

$$x=\frac{1}{4}y \xrightarrow{y=40} x=\frac{40}{4}=10$$

Hay 10 cepillos de la primera marca y 40 de la segunda.

RESUELVE EL RETO

RETO 1. Página 100

Analizamos cuándo $3x^2$ es mayor que $6x$.

$$3x^2 \geq 6x \to 3x^2-6x \geq 0 \to 3x^2-6x=0 \to 3x(x-2)=0 \to \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=2 \end{cases}$$

Para $x=0$ o $x=2$, las expresiones son iguales.

Para $x<0$, tomamos un valor, por ejemplo, $x=-1$: $3\cdot(-1)^2>6\cdot(-1) \to 3>-6 \to 3x^2>6x$

Para $0<x<2$, tomamos un valor, por ejemplo, $x=1$: $3\cdot 1^2<6\cdot 1 \to 3<6 \to 3x^2<6x$

Para x > 2, tomamos un valor, por ejemplo, $x=3$: $3\cdot 9^2<6\cdot 3 \to 27>18 \to 3x^2>6x$

Por tanto, $3x^2$ es mayor en el intervalo $[-\infty,0)\cup(2,+\infty]$, y $3x$ es mayor en el intervalo $(0,2)$.

ACTIVIDADES

1. Página 94

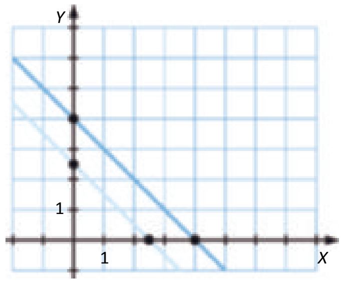
a) Tomamos dos soluciones de cada ecuación.

$x+y=4 \xrightarrow{x=0} y=4 \to$ Solución (0, 4).

$x+y=4 \xrightarrow{y=0} x=4 \to$ Solución (4, 0).

$2x+2y=5 \xrightarrow{x=0} y=\frac{5}{2} \to$ Solución $\left(0,\frac{5}{2}\right)$.

$2x+2y=5 \xrightarrow{y=0} x=\frac{5}{2} \to$ Solución $\left(\frac{5}{2},0\right)$.



Son dos rectas paralelas que no tienen puntos en común. El sistema es incompatible.

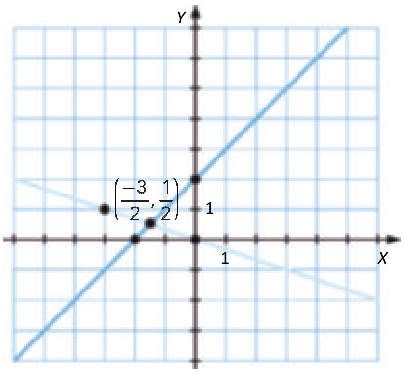
b) Tomamos dos soluciones de cada ecuación.

$x+3y=0 \xrightarrow{x=0} y=0 \rightarrow$ Solución (0, 0).

$x+3y=0 \xrightarrow{y=1} x=-3 \rightarrow$ Solución (–3, 1).

$-x+y=2 \xrightarrow{x=0} y=2 \rightarrow$ Solución (0, 2).

$-x+y=2 \xrightarrow{y=0} x=-2 \rightarrow$ Solución (–2, 0).



La solución del sistema es $x=-\frac{3}{2}$ e $y=\frac{1}{2}$.

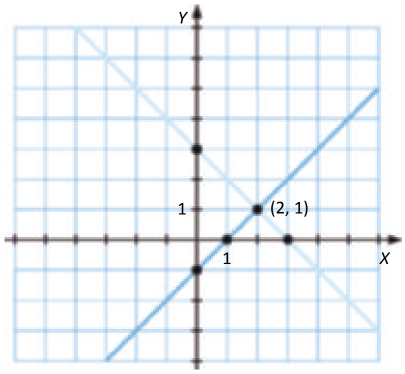
c) Tomamos dos soluciones de cada ecuación.

$x-y=1 \xrightarrow{x=0} y=-1 \rightarrow$ Solución (0, –1).

$x-y=1 \xrightarrow{y=0} x=1 \rightarrow$ Solución (1, 0).

$x+y=3 \xrightarrow{x=0} y=3 \rightarrow$ Solución (0, 3).

$x+y=3 \xrightarrow{y=0} x=3 \rightarrow$ Solución (3, 0).



La solución del sistema es $x=2$ e $y=1$.

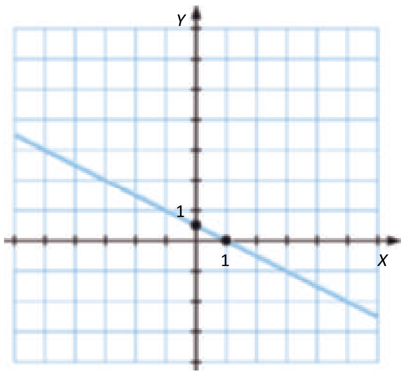
d) Tomamos dos soluciones de cada ecuación.

$x+2y=1 \xrightarrow{x=0} y=\frac{1}{2} \rightarrow$ Solución $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

$x+2y=1 \xrightarrow{y=0} x=1 \rightarrow$ Solución (1, 0).

$3x+6y=3 \xrightarrow{x=0} y=\frac{1}{2} \rightarrow$ Solución $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

$3x+6y=3 \xrightarrow{y=0} x=1 \rightarrow$ Solución (1, 0).



Las dos rectas coinciden, por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones: todos los puntos de las rectas.

2. Página 94

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\left.\begin{array}{r}3\cdot 2+(-1)=5\\ 2+3\cdot(-1)=-1\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}3x+y=5\\ x+3y=-1\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}(-3)+5=2\\ 2\cdot(-3)+4\cdot 5=14\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y=2\\ 2x+4y=14\end{array}\right\}$

3. Página 94

Respuesta abierta.

La ecuación $2x - y = 6$ representa una recta. Si multiplicamos esta ecuación por el mismo número a ambos lados de la igualdad, seguimos obteniendo la misma recta, y el sistema obtenido es compatible indeterminado. Por ejemplo:

$\left.\begin{array}{r}2x-y=6\\ 6x-3y=18\end{array}\right\}$

Para obtener alguna de sus soluciones, es suficiente obtener las soluciones a partir de una de las ecuaciones, ya que las dos pasan por los mismos puntos:

$2x-y=6\xrightarrow{x=0}y=-6\rightarrow$ Solución (0, –6).

$2x-y=6\xrightarrow{x=1}y=-4\rightarrow$ Solución (1, –4).

$2x-y=6\xrightarrow{x=5}y=4\rightarrow$ Solución (5, 4).

4. Página 95

a) Tomamos dos soluciones de cada ecuación.

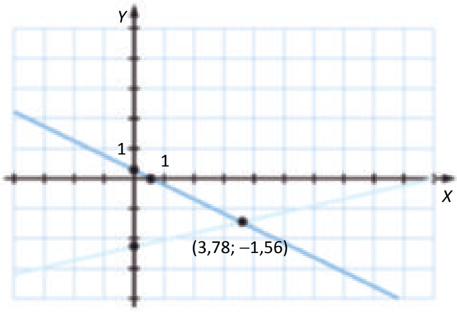
$x-4y=10\xrightarrow{x=0}y=-\dfrac{5}{2}\rightarrow$ Solución $\left(0,-\dfrac{5}{2}\right)$.

$x-4y=10\xrightarrow{y=0}x=10\rightarrow$ Solución (10, 0).

$3x+6y=2\xrightarrow{x=0}y=\dfrac{1}{3}\rightarrow$ Solución $\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$.

$3x+6y=2\xrightarrow{y=0}x=\dfrac{2}{3}\rightarrow$ Solución $\left(\dfrac{2}{3},0\right)$.

El sistema es compatible determinado.



b) Tomamos dos soluciones de cada ecuación.

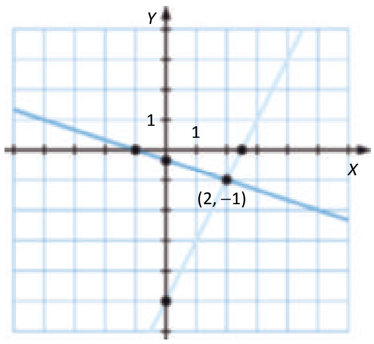
$2x-y=5\xrightarrow{x=0}y=-5\rightarrow$ Solución (0, –5).

$2x-y=5\xrightarrow{y=0}x=\dfrac{5}{2}\rightarrow$ Solución $\left(\dfrac{5}{2},0\right)$.

$x+3y=-1\xrightarrow{x=0}y=-\dfrac{1}{3}\rightarrow$ Solución $\left(0,-\dfrac{1}{3}\right)$.

$x+3y=-1\xrightarrow{y=0}x=-1\rightarrow$ Solución (–1, 0).

El sistema es compatible determinado.



c) Tomamos dos soluciones de cada ecuación.

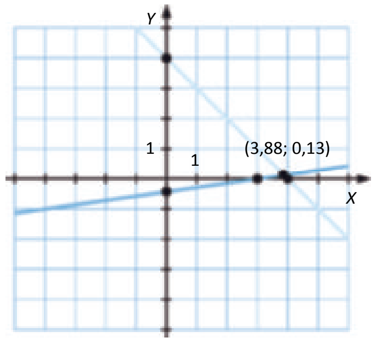
$$x - 7y = 3 \xrightarrow{x=0} y = -\frac{3}{7} \rightarrow \text{Solución } \left(0, -\frac{3}{7}\right).$$

$$x - 7y = 3 \xrightarrow{y=0} x = 3 \rightarrow \text{Solución } (3, 0).$$

$$x + y = 4 \xrightarrow{x=0} y = 4 \rightarrow \text{Solución } (0, 4).$$

$$x + y = 4 \xrightarrow{y=0} x = 4 \rightarrow \text{Solución } (4, 0).$$

El sistema es compatible determinado.



d) Tomamos dos soluciones de cada ecuación.

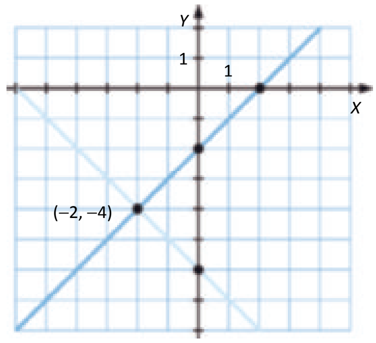
$$x - y = 2 \xrightarrow{x=0} y = -2 \rightarrow \text{Solución } (0,-2).$$

$$x - y = 2 \xrightarrow{y=0} x = 2 \rightarrow \text{Solución } (2, 0).$$

$$x + y = -6 \xrightarrow{x=0} y = -6 \rightarrow \text{Solución } (0, -6).$$

$$x + y = -6 \xrightarrow{y=0} x = -6 \rightarrow \text{Solución } (-6, 0).$$

El sistema es compatible determinado.



e) Tomamos dos soluciones de cada ecuación.

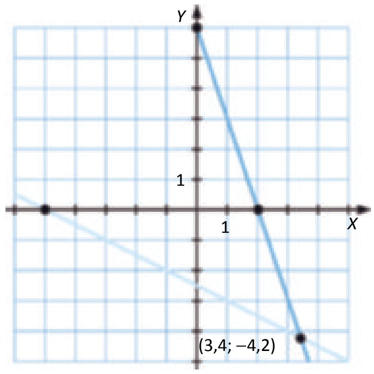
$$3x + y = 6 \xrightarrow{x=0} y = 6 \rightarrow \text{Solución } (0, 6).$$

$$3x + y = 6 \xrightarrow{y=0} x = 2 \rightarrow \text{Solución } (2, 0).$$

$$x + 2y = -5 \xrightarrow{x=0} y = -\frac{5}{2} \rightarrow \text{Solución } \left(0, -\frac{5}{2}\right).$$

$$x + 2y = -5 \xrightarrow{y=0} x = -5 \rightarrow \text{Solución } (-5, 0).$$

El sistema es compatible determinado.



f) Tomamos dos soluciones de cada ecuación.

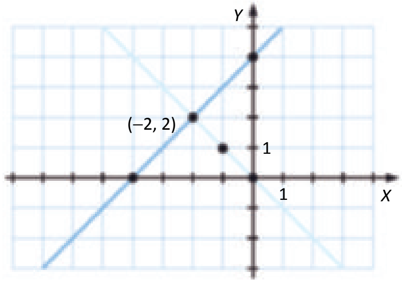
$$x + y = 0 \xrightarrow{x=0} y = 0 \rightarrow \text{Solución } (0, 0).$$

$$x + y = 0 \xrightarrow{y=1} x = -1 \rightarrow \text{Solución } (-1, 1).$$

$$-x + y = 4 \xrightarrow{x=0} y = 4 \rightarrow \text{Solución } (0, 4).$$

$$-x + y = 4 \xrightarrow{y=0} x = -4 \rightarrow \text{Solución } (-4, 0).$$

El sistema es compatible determinado.



5. Página 95

a) Tomamos dos soluciones de cada ecuación.

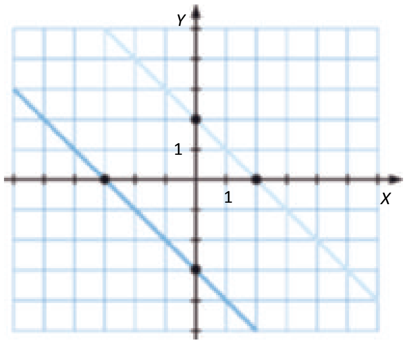
$$x + y = 2 \xrightarrow{x=0} y = 2 \rightarrow \text{Solución } (0, 2).$$

$$\xrightarrow{y=0} x = 2 \rightarrow \text{Solución } (2, 0).$$

$$x + y = -3 \xrightarrow{x=0} y = -3 \rightarrow \text{Solución } (0, -3).$$

$$\xrightarrow{y=0} x = -3 \rightarrow \text{Solución } (-3, 0).$$

Son dos rectas son paralelas. Es un sistema incompatible.



b) Tomamos dos soluciones de cada ecuación.

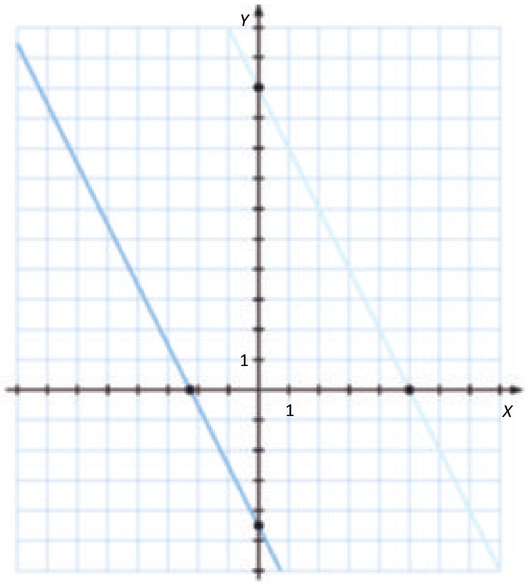
$2x + y = 10 \xrightarrow{x=0} y = 10 \rightarrow$ Solución (0, 10).

$\xrightarrow{y=0} x = 5 \rightarrow$ Solución (5, 0).

$-4x - 2y = 9 \xrightarrow{x=0} y = -\frac{9}{2} \rightarrow$ Solución $\left(0, -\frac{9}{2}\right)$.

$\xrightarrow{y=0} x = -\frac{9}{4} \rightarrow$ Solución $\left(-\frac{9}{4}, 0\right)$.

Son dos rectas paralelas, por tanto, no tienen puntos en común. Es un sistema incompatible.



6. Página 95

a) Tomamos dos soluciones de cada ecuación.

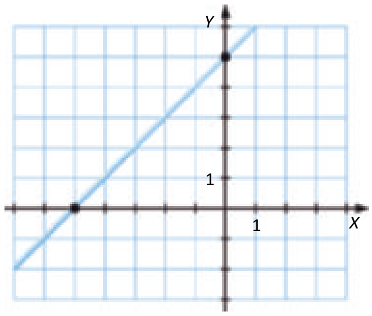
$-x + y = 5 \xrightarrow{x=0} y = 5 \rightarrow$ Solución (0, 5).

$\xrightarrow{y=0} x = -5 \rightarrow$ Solución (–5, 0).

$x - y = -5 \xrightarrow{x=0} y = 5 \rightarrow$ Solución (0, 5).

$\xrightarrow{y=0} x = -5 \rightarrow$ Solución (–5, 0).

Las dos rectas coinciden, por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones. Es un sistema compatible indeterminado.



b) Tomamos dos soluciones de cada ecuación.

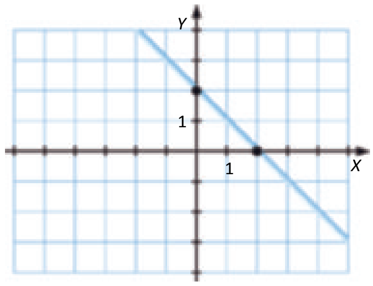
$3x + 3y = 6 \xrightarrow{x=0} y = 2 \rightarrow$ Solución (0, 2).

$\xrightarrow{y=0} x = 2 \rightarrow$ Solución (2, 0).

$2x + 2y = 4 \xrightarrow{x=0} y = 2 \rightarrow$ Solución (0, 2).

$\xrightarrow{y=0} x = 2 \rightarrow$ Solución (2, 0).

Las dos rectas coinciden, por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones. Es un sistema compatible indeterminado.



7. Página 96

a) Resolvemos por el método de sustitución.

$-x + 3y = -4 \rightarrow x = 3y + 4$

$5x + y = 4 \xrightarrow{x=3y+4} 5(3y+4) + y = 4 \rightarrow 15y + 20 + y = 4 \rightarrow y = -1$

$x = 3y + 4 \xrightarrow{y=-1} x = 3(-1) + 4 = 1$

La solución es $x = 1$ e $y = -1$.

b) Resolvemos por el método de igualación.

$$3x+y=9 \rightarrow y=9-3x$$

$$x-y=-1 \rightarrow y=x+1$$

$$9-3x=x+1 \rightarrow 8=4x \rightarrow x=2$$

$$y=x+1 \xrightarrow{x=2} y=2+1=3$$

La solución es $x = 2$ e $y = 3$.

c) Resolvemos por el método de reducción.

$$\left.\begin{array}{r} 4x+3y=4 \\ x-2y=-10 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot(-4)} \begin{array}{r} 4x+3y=4 \\ \underline{-4x+8y=40} \\ 11y=44 \rightarrow y=4 \end{array}$$

$$x-2y=-10 \xrightarrow{y=4} x-8=-10 \rightarrow x=-2$$

La solución es $x = -2$ e $y = 4$.

d) Resolvemos por el método de sustitución.

$$x-2y=9 \rightarrow x=2y+9$$

$$2x+5y=0 \xrightarrow{x=2y+9} 2(2y+9)+5y=0 \rightarrow 4y+18+5y=0 \rightarrow y=-2$$

$$x=2y+9 \xrightarrow{y=-2} x=2(-2)+9=5$$

La solución es $x = 5$ e $y = -2$.

8. Página 96

Estudiamos si $x = 3$ e $y = -1$ cumplen las dos ecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{r} x+2y=1 \\ x-y=3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3+2(-1)=1 \\ 3-(-1)\neq 3 \end{array}\right\}$

No se cumple la segunda ecuación. Por tanto, no es solución del sistema.

b) $\left.\begin{array}{r} x-2y=5 \\ x-y=2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3-2(-1)=5 \\ 3-(-1)\neq 2 \end{array}\right\}$

No se cumple la segunda ecuación. Por tanto, no es solución del sistema.

c) $\left.\begin{array}{r} x-2y=5 \\ x+y=2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3-2(-1)=5 \\ 3+(-1)=2 \end{array}\right\}$

Se cumplen las dos ecuaciones, por tanto (3, –1) es solución del sistema.

9. Página 96

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\left.\begin{array}{l} a+(a-1)=2a-1 \\ a-(a-1)=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=2a-1 \\ x-y=1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2a+(a+3)=3a+3 \\ 2a-2(a+3)=-6 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=3a+3 \\ x-2y=-6 \end{array}\right\}$

10. Página 97

a) $\frac{x-1}{4}-\frac{y+2}{3}=0 \xrightarrow{\text{m.c.m.}(3,4)=12} \frac{3(x-1)-4(y+2)}{12}=0 \rightarrow 3x-3-4y-8=0 \rightarrow 3x-4y=11$

$\frac{x+3}{5}-\frac{y-2}{4}=2 \xrightarrow{\text{m.c.m.}(4,5)=20} \frac{4(x+3)-5(y-2)}{20}=\frac{40}{20} \rightarrow 4x+12-5y+10=40 \rightarrow 4x-5y=18$

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{x-1}{4}-\frac{y+2}{3}=0\\ \frac{x+3}{5}-\frac{y-2}{4}=2\end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l}3x-4y=11\\ 4x-5y=18\end{array}\right.$$

Resolvemos por el método de reducción.

$$\left.\begin{array}{r}3x-4y=11\\ 4x-5y=18\end{array}\right\} \begin{array}{c}\xrightarrow{\cdot 4}\\ \xrightarrow{\cdot 3}\end{array} - \begin{array}{r}12x-16y=44\\ \underline{12x-15y=54}\\ -y=10 \rightarrow y=10\end{array}$$

$3x-4y=11 \xrightarrow{y=10} 3x-40=11 \rightarrow x=17 \longrightarrow$ La solución es $x=17$ e $y=10$.

b) $\frac{5(x-2)}{3}-\frac{3(y+1)}{4}=\frac{x-7y}{12} \xrightarrow{\text{m.c.m.}(3,4,12)=12} \frac{20(x-2)-9(y+1)}{12}=\frac{x-7y}{12} \rightarrow$

$20x-40-9y-9=x-7y \rightarrow 19x-2y=49$

$\frac{6-(x+y)}{2}-\frac{(5-x)4}{5}=\frac{x+2y}{10} \xrightarrow{\text{m.c.m.}(2,5,10)=10} \frac{5(6-(x+y))-2(5-x)4}{10}=\frac{x+2y}{10} \rightarrow$

$30-5x-5y-40+8x=x+2y \rightarrow 2x-7y=10$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{5(x-2)}{3}-\frac{3(y+1)}{4}=\frac{x-7y}{12}\\ \frac{6-(x+y)}{2}-\frac{(5-x)4}{5}=\frac{x+2y}{10}\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}19x-2y=49\\ 2x-7y=10\end{array}\right\}$$

Resolvemos por el método de reducción.

$$\left.\begin{array}{r}19x-2y=49\\ 2x-7y=10\end{array}\right\} \begin{array}{c}\xrightarrow{\cdot 7}\\ \xrightarrow{\cdot 2}\end{array} - \begin{array}{r}133x-14y=343\\ \underline{4x-14y=20}\\ 129x=323 \rightarrow x=\frac{323}{129}\end{array}$$

$19x-2y=49 \xrightarrow{x=\frac{323}{129}} 19\left(\frac{323}{129}\right)-2y=49 \rightarrow y=-\frac{92}{129} \longrightarrow$ La solución es $x=\frac{323}{129}$ e $y=-\frac{92}{129}$.

c) $\frac{7x+5y}{10}-\frac{4(x+y)}{5}=\frac{x-y}{10} \xrightarrow{\text{m.c.m.}(5,10)=10} \frac{7x+5y-8(x+y)}{10}=\frac{x-y}{10} \rightarrow$

$7x+5y-8x-8y=x-y \rightarrow 2x+2y=0$

$\frac{3x+y+2}{4}-\frac{y-2x}{6}=\frac{y-x}{4} \xrightarrow{\text{m.c.m.}(4,6)=12} \frac{3(3x+y+2)-2(y-2x)}{12}=\frac{3(y-x)}{12} \rightarrow$

$9x+3y+6-2y+4x=3y-3x \rightarrow 16x-2y=-6$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{7x+5y}{10}-\frac{3(x+y)}{5}=\frac{x-y}{10}\\ \frac{3x+y+2}{4}-\frac{y-2x}{6}=\frac{y-x}{4}\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}2x+2y=0\\ 16x-2y=-6\end{array}\right\}$$

Resolvemos por reducción, sumándole a la segunda ecuación la primera.

$\left.\begin{array}{r}2x+2y=0\\ 16x-2y=-6\end{array}\right\} \rightarrow 18x=-6 \rightarrow x=-\frac{1}{3} \longrightarrow 2x+2y=0 \xrightarrow{x=-\frac{1}{3}} y=\frac{1}{3} \longrightarrow$ La solución es $x=-\frac{1}{3}$ e $y=\frac{1}{3}$.

11. Página 97

a) $3x-2(y-1)=y-x+1 \rightarrow 3x-2y+2=y-x+1 \rightarrow 4x-3y=-1$

$2x-y=x+y-9 \rightarrow x-2y=-9$

$$\left.\begin{array}{r}3x-2(y-1)=y-x+1\\2x-y=x+y-9\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}4x-3y=-1\\x-2y=-9\end{array}\right\}$$

Resolvemos por el método de sustitución.

$x-2y=-9 \rightarrow x=2y-9$

$4x-3y=-1 \xrightarrow{x=2y-9} 4(2y-9)-3y=-1 \rightarrow 8y-36-3y=-1 \rightarrow y=7$

$x=2y-9 \xrightarrow{y=7} 14-9=5$

La solución es $x=5$ e $y=7$.

b) $3-2(x-4)=5y+6 \rightarrow 3-2x+8=5y+6 \rightarrow 2x+5y=5$

$5x-3y=12x-(4-y) \rightarrow 7x+4y=4$

$$\left.\begin{array}{r}3-2(x-4)=5y+6\\5x-3y=12x-(4-y)\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}2x+5y=5\\7x+4y=4\end{array}\right\}$$

Resolvemos por el método de reducción.

$$\left.\begin{array}{r}2x+5y=5\\7x+4y=4\end{array}\right\} \begin{array}{c}\xrightarrow{\cdot 7}\\\xrightarrow{\cdot 2}\end{array} \begin{array}{r}14x+35y=35\\-\underline{\;14x+8y=8\;}\\27y=27 \rightarrow y=1\end{array}$$

$2x+5y=5 \xrightarrow{y=1} 2x+5=5 \rightarrow x=0$

La solución es $x=0$ e $y=1$.

12. Página 97

$\frac{x}{5}-\frac{y}{4}=4 \xrightarrow{\text{m.c.m.}(5,\,4)=20} \frac{4x-5y}{20}=\frac{80}{20} \rightarrow 4x-5y=80$

$-2(x+y)=1-\frac{x}{2} \rightarrow \frac{-4(x+y)}{2}=\frac{2-x}{2} \rightarrow -4x-4y=2-x \rightarrow -3x-4y=2$

$$\left.\begin{array}{r}\frac{x}{5}-\frac{y}{4}=4\\-2\cdot(x+y)=1-\frac{x}{2}\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}4x-5y=80\\-3x-4y=2\end{array}\right\}$$

Resolvemos por el método de reducción: $\left.\begin{array}{r}4x-5y=80\\-3x-4y=2\end{array}\right\} \begin{array}{c}\xrightarrow{\cdot 3}\\\xrightarrow{\cdot 4}\end{array} \begin{array}{r}12x-15y=240\\+\underline{\;-12x-16y=8\;}\\-31y=248 \rightarrow y=-8\end{array}$

$4x-5y=80 \xrightarrow{y=-8} 4x+40=80 \rightarrow x=10$

La solución es $x=10$ e $y=-8$.

13. Página 98

a) El sistema es no lineal porque la segunda ecuación es de grado 2.

b) El sistema es no lineal porque ambas ecuaciones son de grado 2.

c) Es un sistema de ecuaciones lineales.

d) El sistema es no lineal porque al suprimir la raíz con el cuadrado, si solo consideramos un signo de la variable, positivo o negativo, perdemos soluciones.

e) El sistema es no lineal porque la segunda ecuación tiene un radical.

f) El sistema es no lineal porque la segunda ecuación es de grado 2.

14. Página 98

Comprobamos si $x=0$ e $y=2$ cumple ambas ecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{r} x+y^2=6 \\ x^2-y=-2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 0+2^2\neq 6 \\ 0^2-2=-2 \end{array}\right\} \rightarrow$ No se cumple la primera ecuación. No es solución del sistema.

b) $\left.\begin{array}{r} x+y^2=4 \\ x^2-y^2=-4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 0+2^2=4 \\ 0^2-2^2=-4 \end{array}\right\} \rightarrow$ Se cumplen ambas ecuaciones. Es solución del sistema.

c) $\left.\begin{array}{r} \sqrt{x}+y=2 \\ x^2-\sqrt{2y}=2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} \sqrt{0}+2=2 \\ 0^2-\sqrt{2\cdot 2}\neq 2 \end{array}\right\} \rightarrow$ No se cumple la segunda ecuación. No es solución del sistema.

d) $\left.\begin{array}{r} 2x+y=4 \\ x-2\sqrt{y}=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2\cdot 0+2\neq 4 \\ 0-2\sqrt{2}\neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow$ No se cumple ninguna de las ecuaciones. No es solución del sistema.

15. Página 98

Respuesta abierta. Por ejemplo: $\left.\begin{array}{r} 2\cdot(-3)=-6 \\ 2+(-3)^2=11 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} xy=-6 \\ x+y^2=11 \end{array}\right\}$

16. Página 99

a) $x+2y=12 \rightarrow x=12-2y$

$$x^2+y^2=29 \xrightarrow{x=12-2y} (12-2y)^2+y^2=29 \rightarrow 144-48y+5y^2=29$$

$$5y^2-48y+115=0 \rightarrow y=\frac{48\pm\sqrt{(-48)^2-4\cdot 5\cdot 115}}{2\cdot 5} \rightarrow \begin{cases} y_1=5 \\ y_2=\dfrac{23}{5} \end{cases}$$

$$x=12-2y \rightarrow \begin{cases} y_1=5 \rightarrow x_1=12-10=2 \\ y_2=\dfrac{23}{5} \rightarrow x_2=12-2\cdot\dfrac{23}{5}=\dfrac{14}{5} \end{cases}$$

Las soluciones son $x_1=2$ e $y_1=5$, y $x_2=\frac{14}{5}$ e $y_2=\frac{23}{5}$.

b) $x-y=1 \rightarrow x=1+y$

$$x^2+y^2=25 \xrightarrow{x=1+y} (1+y)^2+y^2=25 \rightarrow 2y^2+2y-24=0$$

$$y^2+y-12=0 \rightarrow y=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot 1\cdot(-12)}}{2}=\frac{-1\pm 7}{2} \rightarrow \begin{cases} y_1=3 \\ y_2=-4 \end{cases}$$

$$x=1+y \rightarrow \begin{cases} x_1=1+3=4 \\ x_2=1-4=-3 \end{cases}$$

Las soluciones son $x_1=4$ e $y_1=3$, y $x_2=-3$ e $y_2=-4$.

c) $x^2 + y = 5 \rightarrow y = 5 - x^2$

$$2x(x+y) = -6 \xrightarrow{y=5-x^2} 2x(x+5-x^2) = -6 \rightarrow -2x^3 + 2x^2 + 10x + 6 = 0$$

Descomponemos con Ruffini:
$$\begin{array}{c|cccc} & -2 & 2 & 10 & 6 \\ 3 & & -6 & -12 & -6 \\ \hline & -2 & -4 & -2 & \lfloor 0 \end{array}$$

$$-2x^3 + 2x^2 + 10x + 6 = (x-3)(-2x^2 - 4x - 2) = -2(x-3)(x^2+2x+1) = -2(x-3)(x+1)^2$$

Las soluciones de esta ecuación son $x_1 = 3$ y $x_2 = -1$.

$$y = 5 - x^2 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \rightarrow y = 5 - 3^2 = -4 \\ x_2 = -2 \rightarrow y = 5 - (-1)^2 = 4 \end{cases}$$

Las soluciones son $x_1 = 3$ e $y_1 = -4$, y $x_2 = -1$ e $y_2 = 4$.

d) $x + 5y = 7 \rightarrow x = 7 - 5y$

$$x^2 - 3y^2 = 1 \xrightarrow{x=7-5y} (7-5y)^2 - 3y^2 = 1 \rightarrow 22y^2 - 70y + 48 = 0$$

$$y = \frac{70 \pm \sqrt{(-70)^2 - 4 \cdot 22 \cdot 48}}{2 \cdot 22} \rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{24}{11} \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

$$x = 7 - 5y \rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{24}{11} \rightarrow x_1 = 7 - 5 \cdot \dfrac{24}{11} = -\dfrac{43}{11} \\ y_2 = 1 \rightarrow x_2 = 7 - 5 = 2 \end{cases}$$

Las soluciones son $x_1 = -\dfrac{43}{11}$ e $y_2 = \dfrac{24}{11}$, y $x_2 = 2$ e $y_2 = 1$.

e) $y = x^2 \xrightarrow{x=y^2} y = y^4 \rightarrow y^4 - y = 0 \rightarrow y(y^3 - 1) = 0$

Descomponemos utilizando Ruffini:
$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \lfloor 0 \end{array}$$

$$y(y^3 - 1) = 0 \rightarrow y(y-1)(y^2 + y + 1) = 0$$

$$y^2 + y + 1 = 0 \rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \rightarrow \text{No tiene solución real.}$$

Las raíces son $y_1 = 0$ e $y_2 = 1$.
$$x = y^2 \rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ y_2 = 1 \rightarrow x_2 = 1 \end{cases}$$

Las soluciones son $x_1 = 0$ e $y_1 = 0$, y $x_2 = 1$ e $y_2 = 1$.

f) $x^2 + 2xy + y^2 = 9 \rightarrow (x+y)^2 = 9 \rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = -3 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 3 \\ x - y = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{r} x + \cancel{y} = 3 \\ x - \cancel{y} = 2 \\ \hline 2x \quad = 5 \end{array} \rightarrow x = \frac{5}{2} \rightarrow x + y = 3 \xrightarrow{x=\frac{5}{2}} y = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = -3 \\ x - y = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{r} x + \cancel{y} = -3 \\ x - \cancel{y} = 2 \\ \hline 2x \quad = -1 \end{array} \rightarrow x = -\frac{1}{2} \rightarrow x + y = -3 \xrightarrow{x=-\frac{1}{2}} y = -3 + \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$$

Las soluciones son $x_1 = \dfrac{5}{2}$ e $y_1 = \dfrac{1}{2}$, y $x_2 = -\dfrac{1}{2}$ e $y_2 = -\dfrac{5}{2}$.

g) $xy-2=3x \rightarrow y=\dfrac{3x+2}{x}$

$$x^2+y^2-3(x+3y)=-22 \xrightarrow{y=\frac{3x+2}{x}} x^2+\left(\frac{3x+2}{x}\right)^2-3\left(x-3\cdot\frac{3x+2}{x}\right)=-22 \rightarrow$$

$$x^4+(3x+2)^2-3x-27x^2-18x=-22x^2 \rightarrow x^4-3x^3+4x^2-6x+4=0$$

Descomponemos con Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -3 & 4 & -6 & 4 \\ 1 & & 1 & -2 & 2 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & -4 & \boxed{0} \\ 2 & & 2 & 0 & 4 & \\ \hline & 1 & 0 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$x^4-3x^3+4x^2-6x+4=0 \rightarrow (x-1)(x-2)(x^2+2)=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=2 \\ x^2+2=0 \rightarrow \text{No tiene solución.} \end{cases}$$

$$y=\frac{3x+2}{x} \rightarrow \begin{cases} x_1=1 \rightarrow y_1=\dfrac{3\cdot 1+2}{1}=5 \\ x_2=2 \rightarrow y_2=\dfrac{3\cdot 2+2}{2}=4 \end{cases}$$

Las soluciones son $x_1=1$ e $y_1=5$; y $x_2=2$ e $y_2=4$.

17. Página 99

a) $3x-y-1=0 \rightarrow y=3x-1$

$$\frac{1}{x-y}+\frac{3}{x}=2 \xrightarrow{y=3x-1} \frac{1}{x-(3x-1)}+\frac{3}{x}=\frac{1}{1-2x}+\frac{3}{x}=\frac{x+3-6x}{x(1-2x)}=2$$

$$\rightarrow 3-5x=2x-4x^2 \rightarrow 4x^2-7x+3=0 \rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 4\cdot 3}}{2\cdot 4} \rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$y=3x-1 \rightarrow \begin{cases} x_1=1 \rightarrow y_1=3-1=2 \\ x_2=\dfrac{3}{4} \rightarrow y_2=\dfrac{9}{4}-1=\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x-y}+\dfrac{3}{x}=2 \\ 3x-y-1=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{x_1=1,\ y_1=2} \begin{cases} \dfrac{1}{1-2}+\dfrac{3}{1}=-1+3=2 \\ 3-2-1=0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x-y}+\dfrac{3}{x}=2 \\ 3x-y-1=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{x_2=\frac{3}{4},\ y_2=\frac{5}{4}} \begin{cases} \dfrac{1}{\frac{3}{4}-\frac{5}{4}}+\dfrac{3}{\frac{3}{4}}=-2+4=2 \\ \dfrac{9}{4}-\dfrac{5}{4}-1=0 \end{cases}$$

Las soluciones son $x_1=1$ e $y_1=2$, y $x_2=\dfrac{3}{4}$ e $y_2=\dfrac{5}{4}$.

b) $x-y=0 \rightarrow x=y$

$$\frac{y}{x-1}+\frac{x}{y-3}=2 \xrightarrow{x=y} \frac{y}{y-1}+\frac{y}{y-3}=2 \rightarrow \frac{y(y-3)+y(y-1)}{(y-1)(y-3)}=2$$

$$\rightarrow y^2-3y+y^2-y=2(y-1)(y-3)=-4y=-8y+6 \rightarrow 4y=6 \rightarrow y=\frac{3}{2} \rightarrow x=y \xrightarrow{y=\frac{3}{2}} x=\frac{3}{2}$$

Comprobamos las soluciones:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{y}{x-1}+\dfrac{x}{y-3}=2\\ x-y=0\end{array}\right\} \xrightarrow{x=\frac{3}{2},\,y=\frac{3}{2}} \begin{cases}\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}-1}+\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}-3}=\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}+\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{-3}{2}}=3-1=2\\ \dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}=0\end{cases} \rightarrow \text{La solución es } x=\frac{3}{2} \text{ e } y=\frac{3}{2}.$$

c) $3x-y=-5 \rightarrow y=3x+5$

$$\frac{y-1}{x+2}+\frac{x+2}{y+1}=0 \xrightarrow{y=3x+5} \frac{3x+5-1}{x+2}+\frac{x+2}{3x+5+1}=0 \rightarrow \frac{3x+4}{x+2}+\frac{x+2}{3x+6}=0 \rightarrow$$

$$\frac{3(3x+4)+x+2}{3(x+2)}=0 \rightarrow 9x+12+x+2=0 \rightarrow 10x=-14 \rightarrow x=-\frac{7}{5}$$

$$y=3x+5 \xrightarrow{x=-\frac{7}{5}} y=3\cdot\frac{-7}{5}+5=\frac{4}{5}$$

Comprobamos la solución: $\left.\begin{array}{r}\dfrac{y-1}{x+2}+\dfrac{x+2}{y+1}=0\\ 3x-y=-5\end{array}\right\} \xrightarrow{x=-\frac{7}{5},\,y=\frac{4}{5}} \begin{cases}\dfrac{\frac{4}{5}-1}{-\frac{7}{5}+2}+\dfrac{-\frac{7}{5}+2}{\frac{4}{5}+1}=\dfrac{\frac{-1}{5}}{\frac{3}{5}}+\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{9}{5}}=0\\ 3\left(-\dfrac{7}{5}\right)-\dfrac{4}{5}=-5\end{cases}$

La solución es $x=-\frac{7}{5}$ e $y=\frac{4}{5}$.

18. Página 99

a) $x-1=y+1 \rightarrow x=y+2$

$$\sqrt{x}+2y=-1 \xrightarrow{x=y+2} \sqrt{y+2}+2y=-1 \rightarrow \sqrt{y+2}=-1-2y \rightarrow y+2=(-1-2y)^2=1+4y+4y^2 \rightarrow$$

$$4y^2+3y-1=0 \rightarrow y=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot4\cdot(-1)}}{2\cdot4} \rightarrow \begin{cases}y_1=\dfrac{1}{4}\\ y_{2q}=-1\end{cases}$$

$$x=y+2 \rightarrow \begin{cases}y_1=\dfrac{1}{4} \rightarrow x_1=\dfrac{1}{4}+2=\dfrac{9}{4}\\ y_2=-1 \rightarrow x_2=-1+2=1\end{cases}$$

Comprobamos las soluciones:

$$\begin{cases}\sqrt{x}+2y=-1\\ x-1=y+1\end{cases} \xrightarrow{x=\frac{9}{4},\,y=\frac{1}{4}} \begin{cases}\sqrt{\dfrac{9}{4}}+\dfrac{2}{4}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{2}{4}=\dfrac{8}{4}=2\neq-1\\ \dfrac{9}{4}-1=\dfrac{1}{4}+1=\dfrac{5}{4}\end{cases}$$

No verifica la primera ecuación. No es solución del sistema.

$$\left.\begin{array}{r}\sqrt{x}+2y=-1\\ x-1=y+1\end{array}\right\} \xrightarrow{x_2=1,\,y_2=-1} \begin{cases}\sqrt{1}+2\cdot(-1)=1-2=-1\\ 1-1=-1+1=0\end{cases}$$

La solución es $x=1$ e $y=-1$.

b) $\sqrt{-2y+3}=3 \rightarrow -2y+3=9 \rightarrow y=\dfrac{6}{-2}=-3$

$\sqrt{x+1}=-y-1 \xrightarrow{y=-3} \sqrt{x+1}=3-1=2 \rightarrow x+1=4 \rightarrow x=3$

Comprobamos la solución:

$$\left.\begin{array}{r}\sqrt{x+1}=-y-1\\ \sqrt{-2y+3}=3\end{array}\right\} \xrightarrow{x=3,\, y=-3} \left\{\begin{array}{l}\sqrt{3+1}=-(-3)-1=2\\ \sqrt{-2(-3)+3}=\sqrt{9}=3\end{array}\right.$$

La solución es $x=3$ e $y=-3$.

c) $2x-3=2-y \rightarrow y=5-2x$

$\sqrt{x-2}=y+2 \xrightarrow{y=5-2x} \sqrt{x-2}=5-2x+2=7-2x \rightarrow x-2=49-28x+4x^2 \rightarrow$

$4x^2-29x+51=0 \rightarrow x=\dfrac{29\pm\sqrt{(-29)^2-4\cdot 4\cdot 51}}{2\cdot 4} \rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{17}{4}\\ x_2=3\end{cases}$ $\quad y=5-2x \rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{17}{4} \rightarrow 5-2\cdot\dfrac{17}{4}=-\dfrac{7}{2}\\ x_2=3 \rightarrow 5-2\cdot 3=-1\end{cases}$

Comprobamos las soluciones:

$$\left.\begin{array}{r}\sqrt{x-2}=y+2\\ 2x-3=2-y\end{array}\right\} \xrightarrow{x_1=\frac{17}{4},\, y_1=-\frac{7}{2}} \left\{\begin{array}{l}\sqrt{\dfrac{17}{4}-2}=\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{3}{2}\neq -\dfrac{7}{2}+2=-\dfrac{3}{2}\\ 2\cdot\dfrac{17}{4}-3=\dfrac{11}{2}=2-\left(-\dfrac{7}{2}\right)\end{array}\right.$$

No cumple la primera ecuación. Por tanto, no es solución del sistema.

$$\left.\begin{array}{r}\sqrt{x-2}=y+2\\ 2x-3=2-y\end{array}\right\} \xrightarrow{x_2=3,\, y_2=-1} \left\{\begin{array}{l}\sqrt{3-2}=1=-1+2\\ 2\cdot 3-3=3=2-(-1)\end{array}\right.$$

La solución del sistema es $x=3$ e $y=-1$.

d) $\sqrt{x}-y=-1 \rightarrow y=\sqrt{x}+1$

$\dfrac{\sqrt{x+4}}{2}=\sqrt{y} \xrightarrow{y=\sqrt{x}+1} \dfrac{\sqrt{x+4}}{2}=\sqrt{\sqrt{x}+1} \rightarrow \dfrac{x+4}{4}=\sqrt{x}+1 \rightarrow \dfrac{x}{4}=\sqrt{x} \rightarrow \dfrac{x^2}{16}=x \rightarrow$

$x^2-16x=0 \rightarrow x(x-16)=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=0\\ x_2=16\end{cases}$

$y=\sqrt{x}+1 \rightarrow \begin{cases} x_1=0 \rightarrow y_1=1\\ x_2=16 \rightarrow y_2=4+1=5\end{cases}$

Comprobamos las soluciones:

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{\sqrt{x+4}}{2}=\sqrt{y}\\ \sqrt{x}-y=-1\end{array}\right\} \xrightarrow{x_1=0,\, y_1=1} \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sqrt{4}}{2}=1=\sqrt{1}\\ \sqrt{0}-1=-1\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{\sqrt{x+4}}{2}=\sqrt{y}\\ \sqrt{x}-y=-1\end{array}\right\} \xrightarrow{x_2=16,\, y_2=5} \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sqrt{16+4}}{2}=\dfrac{\sqrt{20}}{2}=\sqrt{5}\\ \sqrt{16}-5=-1\end{array}\right.$$

Las soluciones son $x_1=0$ e $y_1=1$, y $x_2=16$ e $y_2=5$.

19. Página 100

a) $x=-2$:

$-2 \not> 0 \rightarrow$ No cumple la primera inecuación $\rightarrow$ No es solución del sistema.

$x=0$:

$0 \not> 0 \rightarrow$ No cumple la primera inecuación $\rightarrow$ No es solución del sistema.

$x=3$:

$$\left.\begin{array}{r} 3>0 \\ 2\cdot 3\geq 4 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Cumple las dos inecuaciones} \rightarrow \text{Es solución del sistema.}$$

b) $x=-2$:

$$\left.\begin{array}{r} -2+3=1<2 \\ 2\cdot(-2)-5=-9<3 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Cumple las dos inecuaciones} \rightarrow \text{Es solución del sistema.}$$

$x=0$:

$0+3 \not< 2 \rightarrow$ No cumple la primera inecuación $\rightarrow$ No es solución del sistema.

$x=3$:

$3+3=6 \not< 2 \rightarrow$ No cumple la primera inecuación $\rightarrow$ No es solución del sistema.

c) $x=-2$:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{-2}{2}=-1>-2 \\ 5\cdot(-2)-4=-14\leq 2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Cumple las dos inecuaciones} \rightarrow \text{Es solución del sistema.}$$

$x=0$:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{0}{2}=0>-2 \\ 5\cdot 0-4=-4\leq 2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Cumple las dos inecuaciones} \rightarrow \text{Es solución del sistema.}$$

$x=3$:

$5\cdot 3-4=11 \not\leq 2 \rightarrow$ No cumple la segunda inecuación $\rightarrow$ No es solución del sistema.

d) $x=-2$:

$6\cdot(-2)-3=-9 \not\geq -2+7=-5 \rightarrow$ No cumple la primera inecuación $\rightarrow$ No es solución del sistema.

$x=0$:

$6\cdot 0-3=-3 \not\geq 7+0 \rightarrow$ No cumple la primera inecuación $\rightarrow$ No es solución del sistema.

$x=3$:

$$\left.\begin{array}{r} 6\cdot 3-3=15\geq 3+7=10 \\ 7\cdot 3+3=24\leq 15+3\cdot 3=24 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Cumple las dos inecuaciones} \rightarrow \text{Es solución del sistema.}$$

20. Página 100

a) Para $x=-3$:

$$\left.\begin{array}{l} 5(x+2)\leq x+2 \\ 9(x+1)\leq -4x+3(x+1) \end{array}\right\} \xrightarrow{x=-3} \left.\begin{array}{l} 5(-3+2)\leq -3+2 \\ 9(-3+1)\leq -4\cdot(-3)+3(-3+1) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -5\leq -1 \\ -18\leq 6 \end{array}\right\}$$

Para $x=-2$:

$$\left.\begin{array}{l} 5(x+2)\leq x+2 \\ 9(x+1)\leq -4x+3(x+1) \end{array}\right\} \xrightarrow{x=-2} \left.\begin{array}{l} 5(-2+2)\leq -2+2 \\ 9(-2+1)\leq -4\cdot(-2)+3(-2+1) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 0\leq 0 \\ -9\leq 5 \end{array}\right\}$$

b) Para $x = 8$:

$$\left.\begin{array}{r} 4+6x-3 \le x+7(x-2) \\ 8x-2(3x+4) \le 10(x+1) \end{array}\right\} \xrightarrow{x=8} \left.\begin{array}{r} 4+6\cdot 8-3 \le 8+7(8-2) \\ 8\cdot 8-2(3\cdot 8+4) \le 10(8+1) \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 49 \le 50 \\ 8 \le 90 \end{array}\right\}$$

Para $x = 10$:

$$\left.\begin{array}{r} 4+6x-3 \le x+7(x-2) \\ 8x-2(3x+4) \le 10(x+1) \end{array}\right\} \xrightarrow{x=10} \left.\begin{array}{r} 4+6\cdot 10-3 \le 10+7(10-2) \\ 8\cdot 10-2(3\cdot 10+4) \le 10(10+1) \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 61 \le 66 \\ 12 \le 110 \end{array}\right\}$$

21. Página 100

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x \ge -1 \to 2x \ge -2 \to 2x+2 \ge -2+2 \\ x < 4 \to x-3 < 4-3 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 2x+2 \ge 0 \\ x-3 < 1 \end{array}\right\}$$

22. Página 101

a) $\left.\begin{array}{r} x+4 > 5-2x \to 3x > 1 \to x > \dfrac{1}{3} \\ 3x \ge 9 \to x \ge 3 \end{array}\right\} \to$ La solución es $\left(\dfrac{1}{3}, +\infty\right) \cap [3, +\infty) = [3, +\infty)$.

b) $\left.\begin{array}{r} 6x-3 \ge x+7 \to 5x \ge 10 \to x \ge 2 \\ 7x+3 \le 15+3x \to 4x \le 12 \to x \le 3 \end{array}\right\} \to$ La solución es $[2, +\infty) \cap (-\infty, 3] = [2, 3]$.

c) $\left.\begin{array}{r} 2(x+3) > 4 \to 2x > -2 \to x > -1 \\ 2x-3 < x \to x < 3 \end{array}\right\} \to$ La solución es $(-1, +\infty) \cap (-\infty, 3) = (-1, 3)$.

d) $\left.\begin{array}{r} 5x-2(8-x) \le -2 \to 5x-16+2x \le -2 \to 7x \le 14 \to x \le 2 \\ 4(x+6)-8 > 0 \to 4x+24-8 > 0 \to 4x > -16 \to x > -4 \end{array}\right\} \to$ La solución es $(-\infty, 2] \cap (-4, +\infty) = (-4, 2]$.

e) $\left.\begin{array}{r} 4x+3(x-2) > x \to 4x+3x-6 > x \to 6x > 6 \to x > 1 \\ 3x-4(5-x) \le 1 \to 3x-20+4x \le 1 \to 7x \le 21 \to x \le 3 \end{array}\right\} \to$ La solución es $(1, +\infty) \cap (-\infty, 3] = (1, 3]$.

f) $\left.\begin{array}{r} 5(6-x)+2(x+3) \ge 0 \to 30-5x+2x+6 \ge 0 \to -3x \ge -36 \to x \le 12 \\ -4(3-2x) \ge 2(3-x) \to -12+8x \ge 6-2x \to 10x \ge 18 \to x \ge \dfrac{9}{5} \end{array}\right\} \to$ La solución es $(-\infty, 12] \cap \left[\dfrac{9}{5}, +\infty\right) = \left[\dfrac{9}{5}, 12\right]$.

g) $\left.\begin{array}{r} 7x-8(x-2) \ge 0 \to 7x-8x+16 \ge 0 \to -x \ge -16 \to x \le 16 \\ 3x+4(1-x) \le 0 \to 3x+4-4x \le 0 \to -x \le -4 \to x \ge 4 \end{array}\right\} \to$ La solución es $(-\infty, 16] \cap [4, +\infty) = [4, 16]$.

23. Página 101

a) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-3}{4} + \dfrac{x}{2} \le 1 \to \dfrac{x-3+2x}{4} \le \dfrac{4}{4} \to 3x \le 7 \to x \le \dfrac{7}{3} \\ \dfrac{x-3}{2} + \dfrac{x+3}{5} < 2 \to \dfrac{5x-15+2x+6}{10} < \dfrac{20}{10} \to 7x < 29 \to x < \dfrac{29}{7} \end{array}\right\} \to$ La solución es $\left(-\infty, \dfrac{7}{3}\right] \cap \left(-\infty, \dfrac{29}{7}\right) = \left(-\infty, \dfrac{7}{3}\right]$.

b) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{3(1-2x)}{5} > \dfrac{1}{2} \to \dfrac{6-12x}{10} > \dfrac{5}{10} \to -12x > -1 \to x < \dfrac{1}{12} \\ 4x-5 \le \dfrac{x-1}{3} \to \dfrac{12x-15}{3} \le \dfrac{x-1}{3} \to\to 11x \le 14 \to x \le \dfrac{14}{11} \end{array}\right\} \to$ La solución es $\left(-\infty, \dfrac{1}{12}\right) \cap \left(-\infty, \dfrac{14}{11}\right] = \left(-\infty, \dfrac{1}{12}\right)$.

c) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{3(x+2)}{4} - \dfrac{x}{5} > 3 \to \dfrac{15x+30-4x}{20} > \dfrac{60}{20} \to 11x > 30 \to x > \dfrac{30}{11} \\ \dfrac{5x}{6} - \dfrac{x-2}{4} \ge 2 \to \dfrac{10x-3x+6}{12} \ge \dfrac{24}{12} \to 7x \ge 18 \to x \ge \dfrac{18}{7} \end{array}\right\} \to$ La solución es $\left(\dfrac{30}{11}, +\infty\right) \cap \left[\dfrac{18}{7}, +\infty\right) = \left(\dfrac{30}{11}, +\infty\right)$.

24. Página 101

a) $x > 0$

$2x + 1 \geq 0 \rightarrow 2x \geq -1 \rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$

$4x - 3 < 0 \rightarrow 4x < 3 \rightarrow x < \frac{3}{4}$

La solución es el intervalo $(0, +\infty) \cap \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) \cap \left(-\infty, \frac{3}{4}\right) = \left(0, \frac{3}{4}\right)$.

b) $5x - 2 \leq 0 \rightarrow 5x \leq 2 \rightarrow x \leq \frac{2}{5}$

$3x + 4 > 0 \rightarrow 3x > -4 \rightarrow x > -\frac{4}{3}$

$\frac{x+9}{2} \geq 3 \rightarrow \frac{x+9}{2} \geq \frac{6}{2} \rightarrow x + 9 \geq 6 \rightarrow x \geq -3$

La solución es el intervalo $\left(-\infty, \frac{2}{5}\right] \cap \left(-\frac{4}{3}, +\infty\right) \cap [-3, +\infty) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{5}\right]$.

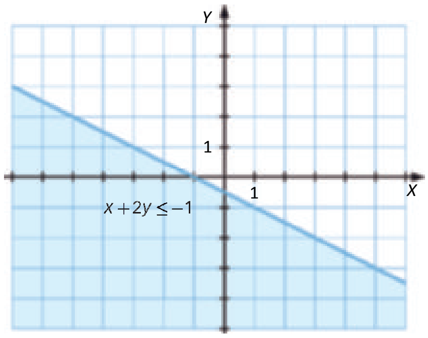
25. Página 102

a) $x + 2y \leq -1 \rightarrow x + 2y = -1$

$x + 2y = -1 \xrightarrow{x=0} y = -\frac{1}{2} \rightarrow \left(0, -\frac{1}{2}\right)$

$x + 2y = -1 \xrightarrow{y=0} x = -1 \rightarrow (-1, 0)$

Para el punto (0, 0) $\rightarrow$ $0 > -1 \rightarrow$ (0, 0) no es solución.

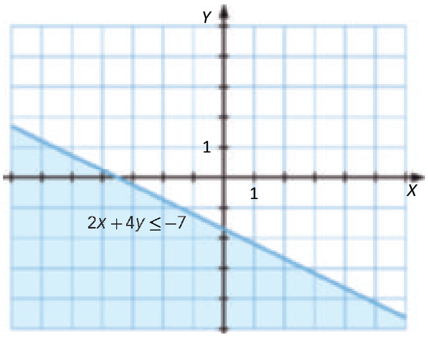


b) $2x + 4y \leq -7 \rightarrow 2x + 4y = -7$

$2x + 4y = -7 \xrightarrow{x=0} y = -\frac{7}{4} \rightarrow \left(0, -\frac{7}{4}\right)$

$2x + 4y = -7 \xrightarrow{y=0} x = -\frac{7}{2} \rightarrow \left(-\frac{7}{2}, 0\right)$

Para el punto (0, 0) $\rightarrow$ $0 > -1 \rightarrow$ (0, 0) no es solución.

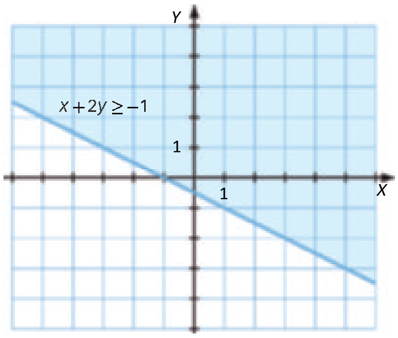


c) $x + 2y \geq -1 \rightarrow x + 2y = -1$

$x + 2y = -1 \xrightarrow{x=0} y = -\frac{1}{2} \rightarrow \left(0, -\frac{1}{2}\right)$

$x + 2y = -1 \xrightarrow{y=0} x = -1 \rightarrow (-1, 0)$

Para el punto (0, 0) $\rightarrow$ $0 > -1 \rightarrow$ (0, 0) es solución.

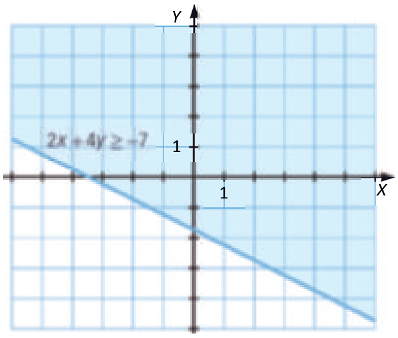


d) $2x+4y \geq -7 \rightarrow 2x+4y=-7$

$$2x+4y=-7 \xrightarrow{x=0} y=-\frac{7}{4} \rightarrow \left(0, -\frac{7}{4}\right)$$

$$2x+4y=-7 \xrightarrow{y=0} x=-\frac{7}{2} \rightarrow \left(-\frac{7}{2}, 0\right)$$

Para el punto (0, 0) $\rightarrow$ $0 > -1 \rightarrow$ (0, 0) es solución.

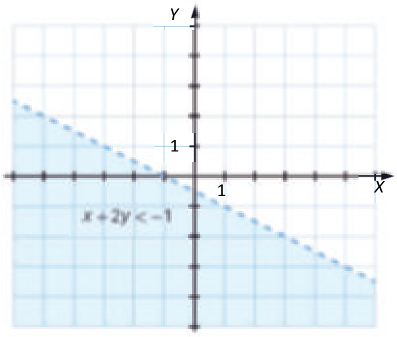


e) $x+2y < -1 \rightarrow x+2y=-1$

$$x+2y=-1 \xrightarrow{x=0} y=-\frac{1}{2} \rightarrow \left(0, -\frac{1}{2}\right)$$

$$x+2y=-1 \xrightarrow{y=0} x=-1 \rightarrow (-1, 0)$$

Para el punto (0, 0) $\rightarrow$ $0 > -1 \rightarrow$ (0, 0) no es solución.

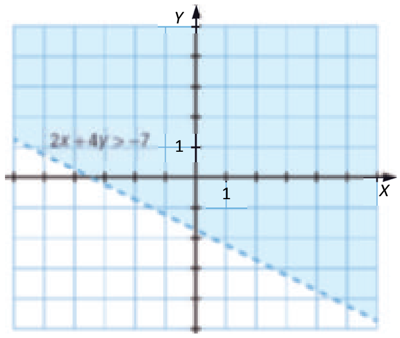


f) $2x+4y > -7 \rightarrow 2x+4y=-7$

$$2x+4y=-7 \xrightarrow{x=0} y=-\frac{7}{4} \rightarrow \left(0, -\frac{7}{4}\right)$$

$$2x+4y=-7 \xrightarrow{y=0} x=-\frac{7}{2} \rightarrow \left(-\frac{7}{2}, 0\right)$$

Para el punto (0, 0) $\rightarrow$ $0 > -1 \rightarrow$ (0, 0) es solución.

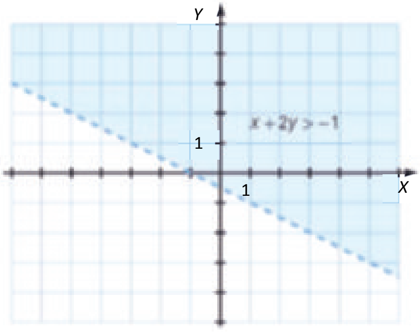


g) $x+2y > -1 \rightarrow x+2y=-1$

$$x+2y=-1 \xrightarrow{x=0} y=-\frac{1}{2} \rightarrow \left(0, -\frac{1}{2}\right)$$

$$x+2y=-1 \xrightarrow{y=0} x=-1 \rightarrow (-1, 0)$$

Para el punto (0, 0) $\rightarrow$ $0 > -1 \rightarrow$ (0, 0) es solución.

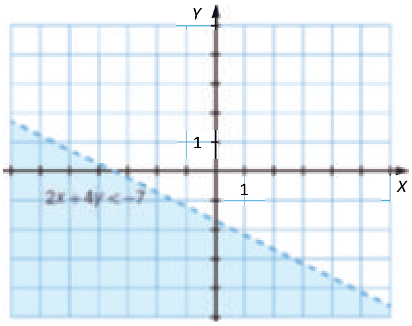


h) $2x+4y < -7 \rightarrow 2x+4y=-7$

$$2x+4y=-7 \xrightarrow{x=0} y=-\frac{7}{4} \rightarrow \left(0, -\frac{7}{4}\right)$$

$$2x+4y=-7 \xrightarrow{y=0} x=-\frac{7}{2} \rightarrow \left(-\frac{7}{2}, 0\right)$$

Para el punto (0, 0) $\rightarrow$ $0 > -1 \rightarrow$ (0, 0) no es solución.



26. Página 102

Primer cuadrante $\rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

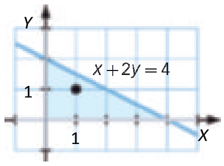
Tercer cuadrante $\rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$

Segundo cuadrante $\rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Cuarto cuadrante $\rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$

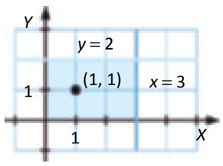
27. Página 102

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:



El interior de este triángulo es solución del sistema: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + 2y < 4 \end{cases}$

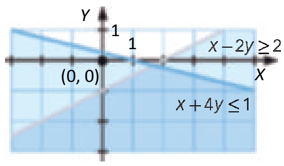
b) Respuesta abierta. Por ejemplo:



El interior de este rectángulo es solución del sistema: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x < 3 \\ y < 2 \end{cases}$

28. Página 103

a) $x + 4y \leq 1 \rightarrow x + 4y = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = \dfrac{1}{4} \rightarrow \left(0, \dfrac{1}{4}\right) \\ y = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0) \end{cases}$



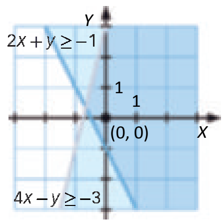
$x + 4y \leq 1 \xrightarrow{x=0, y=0} 0 \leq 1 \rightarrow$ El punto (0, 0) es solución.

$x - 2y \geq 2 \rightarrow x - 2y = 2 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow (0, -1) \\ y = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow (2, 0) \end{cases}$

$x - 2y \geq 2 \xrightarrow{x=0, y=0} 0 < 2 \rightarrow$ El punto (0, 0) no es solución.

La solución es la zona más oscura. Los bordes pertenecen a la solución.

b) $2x + y \geq -1 \rightarrow 2x + y = -1 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow (0, -1) \\ y = 0 \rightarrow x = -\dfrac{1}{2} \rightarrow \left(-\dfrac{1}{2}, 0\right) \end{cases}$



$2x + y \geq -1 \xrightarrow{x=0, y=0} 0 \geq -1 \rightarrow$ El punto (0, 0) es solución.

$4x - y \geq -3 \rightarrow 4x - y = -3 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 3 \rightarrow (0, 3) \\ y = 0 \rightarrow x = -\dfrac{3}{4} \rightarrow \left(-\dfrac{3}{4}, 0\right) \end{cases}$

$2x + y \geq -3 \xrightarrow{x=0, y=0} 0 \geq -3 \rightarrow$ El punto (0, 0) es solución.

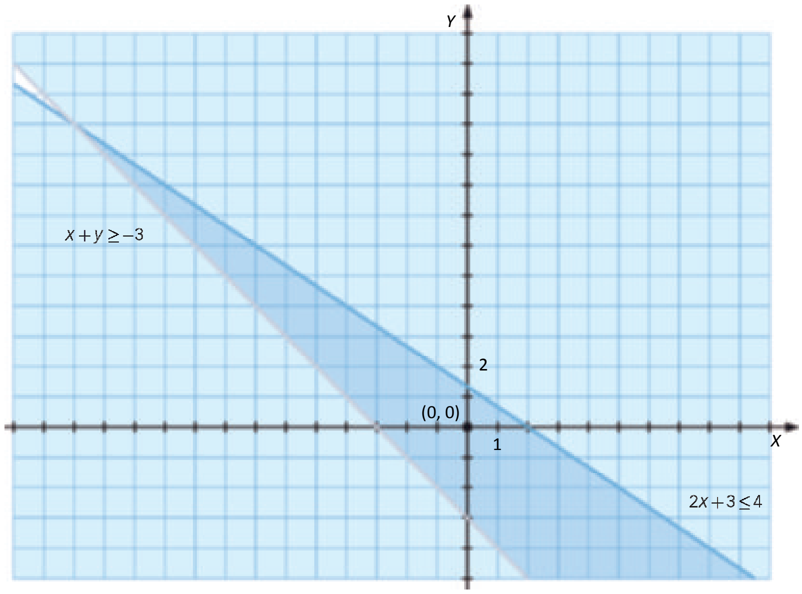
La solución es la zona más oscura. Los bordes pertenecen a la solución.

c) $2x+3y\le 4 \to 2x+3y=4 \to \begin{cases} x=0 \to y=\dfrac{4}{3} \to \left(0,\dfrac{4}{3}\right) \\ y=0 \to x=2 \to (2,0) \end{cases}$

$2x+3y\le 4 \xrightarrow{x=0,y=0} 0\le 4 \to$ El punto (0, 0) es solución.

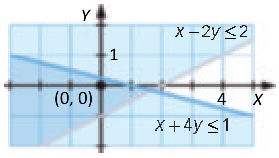
$x+y\ge -3 \to x+y=-3 \to \begin{cases} x=0 \to y=-3 \to (0,-3) \\ y=0 \to x=-3 \to (-3,0) \end{cases}$

$2x+3y\le -3 \xrightarrow{x=0,y=0} 0>-3 \to$ El punto (0, 0) no es solución.



La solución es la zona más oscura. Los bordes pertenecen a la solución.

d) $x+4y\le 1 \to x+4y=1 \to \begin{cases} x=0 \to y=\dfrac{1}{4} \to \left(0,\dfrac{1}{4}\right) \\ y=0 \to x=1 \to (1,0) \end{cases}$



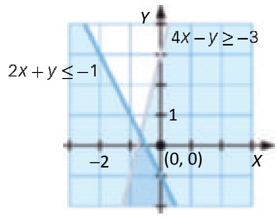
$x+4y\le 1 \xrightarrow{x=0,y=0} 0\le 1 \to$ El punto (0, 0) es solución.

$x-2y\le 2 \to x-2y=2 \to \begin{cases} x=0 \to y=-1 \to (0,-1) \\ y=0 \to x=2 \to (2,0) \end{cases}$

$x-2y\le 2 \xrightarrow{x=0,y=0} 0\le 2 \to$ El punto (0, 0) es solución.

La solución es la zona más oscura. Los bordes pertenecen a la solución.

e) $2x+y\le -1 \to 2x+y=-1 \to \begin{cases} x=0 \to y=-1 \to (0,-1) \\ y=0 \to x=-\dfrac{1}{2} \to \left(-\dfrac{1}{2},0\right) \end{cases}$



$2x+y\le -1 \xrightarrow{x=0,y=0} 0>-1 \to$ El punto (0, 0) no es solución.

$4x-y\ge -3 \to 4x-y=-3 \to \begin{cases} x=0 \to y=3 \to (0,3) \\ y=0 \to x=-\dfrac{3}{4} \to \left(-\dfrac{3}{4},0\right) \end{cases}$

$4x-y\ge -3 \xrightarrow{x=0,y=0} 0\ge -3 \to$ El punto (0, 0) es solución.

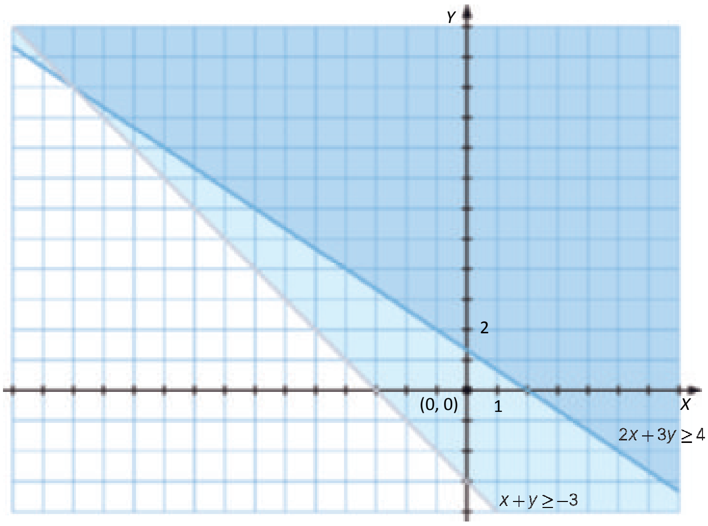
La solución es la zona más oscura. Los bordes pertenecen a la solución.

f) $2x+3y\geq 4 \rightarrow 2x+3y=4 \rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow y=\dfrac{4}{3} \rightarrow \left(0, \dfrac{4}{3}\right) \\ y=0 \rightarrow x=2 \rightarrow (2, 0) \end{cases}$

$2x+3y\geq 4 \xrightarrow{x=0,y=0} 0<4 \rightarrow$ El punto (0, 0) no es solución.

$x+y\geq -3 \rightarrow x+y=-3 \rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow y=-3 \rightarrow (0,-3) \\ y=0 \rightarrow x=-3 \rightarrow (-3, 0) \end{cases}$

$x+y\geq -3 \xrightarrow{x=0,y=0} 0\geq -3 \rightarrow$ El punto (0, 0) es solución.



La solución es la zona más oscura. Los bordes pertenecen a la solución.

29. Página 103

a) $y\leq \dfrac{4-x}{2} \rightarrow y=\dfrac{4-x}{2} \rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow y=2 \rightarrow (0, 2) \\ y=0 \rightarrow x=4 \rightarrow (4, 0) \end{cases}$

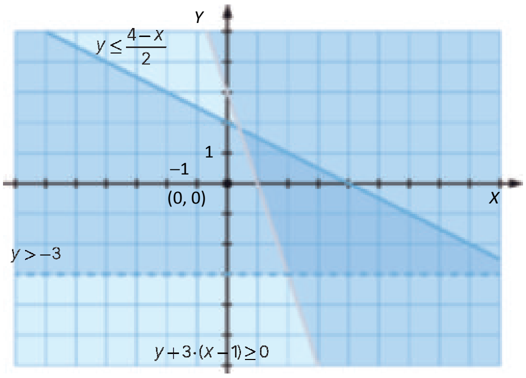
$y\leq \dfrac{4-x}{2} \xrightarrow{x=0,y=0} 0\leq 2 \rightarrow$ El punto (0, 0) es solución.

$y>-3 \rightarrow y=-3 \rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow y=-3 \\ x=1 \rightarrow y=-3 \end{cases}$

$y>-3 \xrightarrow{x=0,y=0} 0>-3 \rightarrow$ El punto (0, 0) es solución.

$y+3\cdot(x-1)\geq 0 \rightarrow y=-3(x-1) \rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow y=3 \rightarrow (0,3) \\ y=0 \rightarrow x=1 \rightarrow (1, 0) \end{cases}$

$y+3\cdot(x-1)\geq 0 \xrightarrow{x=0,y=0} -3<0 \rightarrow$ El punto (0, 0) no es solución.



La solución es la zona más oscura. Los bordes pertenecen a la solución salvo el borde de la recta $y=-3$.

b) $y < 5 \rightarrow y = 5$

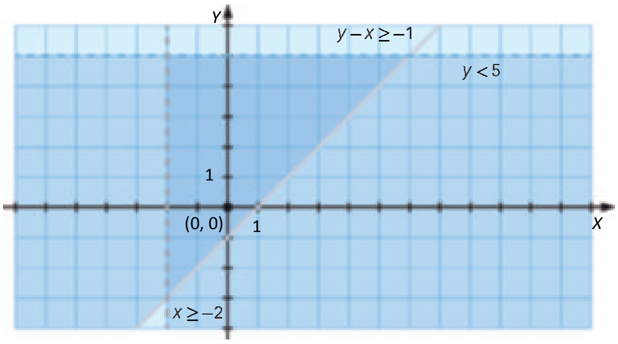
$y < 5 \xrightarrow{x=0,y=0} 0 < 5 \rightarrow$ El punto (0, 0) es solución.

$x \geq -2 \rightarrow x = -2$

$x \geq -2 \xrightarrow{x=0,y=0} 0 \geq -2 \rightarrow$ El punto (0, 0) es solución.

$y - x \geq -1 \rightarrow y - x = -1 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow (0, -1) \\ y = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0) \end{cases}$

$y - x \geq -1 \xrightarrow{x=0,y=0} 0 \geq -1 \rightarrow$ El punto (0, 0) es solución.



La solución es la zona más oscura. Los bordes pertenecen a la solución salvo el borde de la recta $y = 5$.

ACTIVIDADES FINALES

30. Página 104

a) $x + 3y = 5 \xrightarrow{x=2,y=-1} 2 + 3 \cdot (-1) \neq 5 \rightarrow$ No es solución de la ecuación.

b) $\frac{x}{2} + y = 0 \xrightarrow{x=2,y=-1} \frac{2}{2} - 1 = 0 \rightarrow$ Es solución de la ecuación.

c) $-2x + y = -5 \xrightarrow{x=2,y=-1} -2 \cdot 2 - 1 = -5 \rightarrow$ Es solución de la ecuación.

d) $3x - y = 7 \xrightarrow{x=2,y=-1} 3 \cdot 2 - (-1) = 7 \rightarrow$ Es solución de la ecuación.

e) $4x + 3y = 4 \xrightarrow{x=2,y=-1} 4 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \neq 4 \rightarrow$ No es solución de la ecuación.

f) $x = 2y \xrightarrow{x=2,y=-1} 2 \neq 2 \cdot (-1) \rightarrow$ No es solución de la ecuación.

31. Página 104

a) $x + y = 1 \xrightarrow{x=2,y=3} 2 + 3 \neq 1 \rightarrow$ No es solución de la ecuación.

b) $-x + y = 1 \xrightarrow{x=2,y=3} -2 + 3 = 1 \rightarrow$ Es solución de la ecuación.

c) $3x - \frac{y}{3} = 5 \xrightarrow{x=2,y=3} 3 \cdot 2 - \frac{3}{3} = 6 - 1 = 5 \rightarrow$ Es solución de la ecuación.

d) $y = -x + 5 \xrightarrow{x=2,y=3} 3 = -2 + 5 \rightarrow$ Es solución de la ecuación.

e) $2x - y = 1 \xrightarrow{x=2,y=3} 2 \cdot 2 - 3 = 1 \rightarrow$ Es solución de la ecuación.

f) $\frac{x}{2} + 2 = y \xrightarrow{x=2,y=3} \frac{2}{2} + 2 = 3 \rightarrow$ Es solución de la ecuación.

32. Página 104

a) $3x-\frac{y}{2}=6\xrightarrow{x=1,y=-6}3-\frac{-6}{2}=3+3=6\rightarrow$ Es solución de la ecuación.

b) $3x-\frac{y}{2}=6\xrightarrow{x=-1,y=6}-3-\frac{6}{2}=-3-3\neq 6\rightarrow$ No es solución de la ecuación.

c) $3x-\frac{y}{2}=6\xrightarrow{x=\frac{1}{6},y=-11}3\cdot\frac{1}{6}-\frac{-11}{2}=\frac{1}{2}+\frac{11}{2}=\frac{12}{2}=6\rightarrow$ Es solución de la ecuación.

d) $3x-\frac{y}{2}=6\xrightarrow{x=0,y=12}-\frac{12}{2}\neq 6\rightarrow$ No es solución de la ecuación.

e) $3x-\frac{y}{2}=6\xrightarrow{x=-2,y=-24}3\cdot(-2)-\frac{-24}{2}=-6+12=6\rightarrow$ Es solución de la ecuación.

f) $3x-\frac{y}{2}=6\xrightarrow{x=\frac{1}{3},y=10}3\cdot\frac{1}{3}-\frac{10}{2}=1-5\neq 6\rightarrow$ No es solución de la ecuación.

33. Página 104

a) $-x+y=3\xrightarrow{x=4,y=7}-4+7=3$ a) $\longrightarrow 3$

b) $2x+\frac{y}{3}=0\xrightarrow{x=-1,y=6}2\cdot(-1)+\frac{6}{3}=-2+2=0$ b) $\longrightarrow 1$

c) $x-3y=-1\xrightarrow{x=2,y=1}2-3\cdot 1=-1$ c) $\longrightarrow 4$

d) $3x+2y=1\xrightarrow{x=-1,y=2}3\cdot(-1)+2\cdot 2=1$ d) $\longrightarrow 2$

34. Página 104

a) $2x-y=3\xrightarrow{x=1}2\cdot 1-y=3\rightarrow y=-1\rightarrow(1,-1)$

b) $2x-y=3\xrightarrow{y=-7}2x+7=3\rightarrow 2x=-4\rightarrow x=-2\rightarrow(-2,-7)$

c) $2x-y=3\xrightarrow{x=-1}2\cdot(-1)-y=3\rightarrow y=-5\rightarrow(-1,-5)$

d) $2x-y=3\xrightarrow{y=-2}2x+2=3\rightarrow 2x=1\rightarrow x=\frac{1}{2}\rightarrow\left(\frac{1}{2},-2\right)$

e) $2x-y=3\xrightarrow{x=3}2\cdot 3-y=3\rightarrow y=3\rightarrow(3,3)$

f) $2x-y=3\xrightarrow{y=-3}2x+3=3\rightarrow 2x=0\rightarrow x=0\rightarrow(0,-3)$

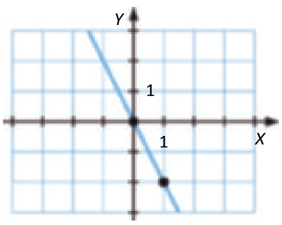
35. Página 104

a) $2x+y=0\rightarrow y=-2x$

$y=-2x\xrightarrow{x=0}y=0\rightarrow(0,0)$

$y=-2x\xrightarrow{x=1}y=-2\rightarrow(1,-2)$

Las soluciones están representadas en la siguiente recta.

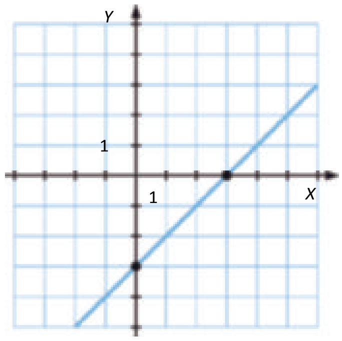


b) $x - y = 3 \rightarrow y = x - 3$

$y = x - 3 \xrightarrow{x=0} y = -3 \rightarrow (0, -3)$

$y = x - 3 \xrightarrow{y=0} x = 3 \rightarrow (3, 0)$

Las soluciones están representadas en la siguiente recta.

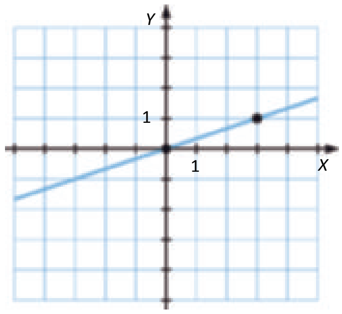


c) $-x + 3y = 0 \rightarrow x = 3y$

$x = 3y \xrightarrow{x=0} y = 0 \rightarrow (0, 0)$

$x = 3y \xrightarrow{y=1} x = 3 \rightarrow (3, 1)$

Las soluciones están representadas en la siguiente recta.

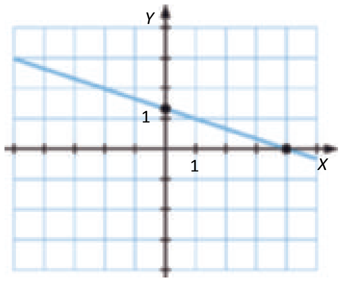


d) $x + 3y = 4 \rightarrow x = 4 - 3y$

$x = 4 - 3y \xrightarrow{x=0} y = \frac{4}{3} \rightarrow \left(0, \frac{4}{3}\right)$

$x = 4 - 3y \xrightarrow{y=0} x = 4 \rightarrow (4, 0)$

Las soluciones están representadas en la siguiente recta.

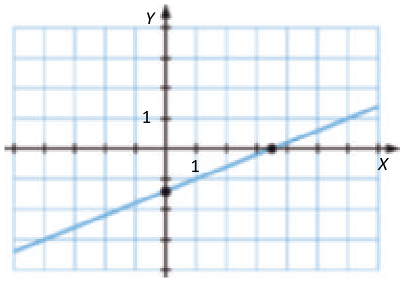


e) $2x - 5y = 7 \rightarrow x = \frac{5y + 7}{2}$

$x = \frac{5y + 7}{2} \xrightarrow{x=0} y = -\frac{7}{5} \rightarrow \left(0, -\frac{7}{5}\right)$

$x = \frac{5y + 7}{2} \xrightarrow{y=0} x = \frac{7}{2} \rightarrow \left(\frac{7}{2}, 0\right)$

Las soluciones están representadas en la siguiente recta.

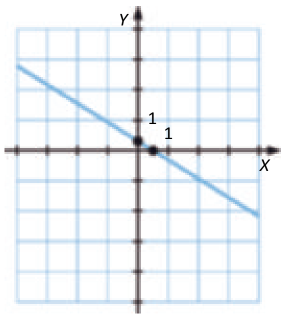


f) $-x + \frac{1}{2} = 2y \rightarrow x = \frac{1}{2} - 2y$

$x = \frac{1}{2} - 2y \xrightarrow{x=0} y = \frac{1}{4} \rightarrow \left(0, \frac{1}{4}\right)$

$x = \frac{1}{2} - 2y \xrightarrow{y=0} x = \frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Las soluciones están representadas en la siguiente recta.



36. Página 104

Respuesta abierta. Por ejemplo: $2\cdot 3a+3(1-2a)=6a+3-6a=3\rightarrow 2x+3y=3$

a) $\left.\begin{array}{r} 3a=3\rightarrow a=1 \\ 1-2a=-1\rightarrow -2a=-2\rightarrow a=1 \end{array}\right\}\rightarrow a=1$

b) $\left.\begin{array}{r} 3a=-6\rightarrow a=-2 \\ 1-2a=5\rightarrow -2a=4\rightarrow a=-2 \end{array}\right\}\rightarrow a=-2$

c) $\left.\begin{array}{r} 3a=0\rightarrow a=0 \\ 1-2a=-2\rightarrow -2a=-3\rightarrow a=\dfrac{3}{2} \end{array}\right\}\rightarrow$ No hay ningún *a* para el que se cumpla.

d) $\left.\begin{array}{r} 3a=6\rightarrow a=2 \\ 1-2a=3\rightarrow -2a=2\rightarrow a=-1 \end{array}\right\}\rightarrow$ No hay ningún *a* para el que se cumpla.

e) $\left.\begin{array}{r} 3a=-3\rightarrow a=-1 \\ 1-2a=3\rightarrow -2a=2\rightarrow a=-1 \end{array}\right\}\rightarrow a=-1$

f) $\left.\begin{array}{r} 3a=9\rightarrow a=3 \\ 1-2a=-5\rightarrow -2a=-6\rightarrow a=3 \end{array}\right\}\rightarrow a=3$

37. Página 104

a) $x+y=5\xrightarrow{x=2+a,\ y=3-a}2+a+3-a=5$

b) $x-y=4\xrightarrow{x=a,\ y=a-4}a-(a-4)=4$

c) $x+2y=2\xrightarrow{x=2a,\ y=1-a}2a+2(1-a)=2$

d) $3x-y=6\xrightarrow{x=a+2,\ y=3a}3(a+2)-3a=6$

a) $\longrightarrow$ 3

b) $\longrightarrow$ 4

c) $\longrightarrow$ 2

d) $\longrightarrow$ 1

38. Página 104

a) $3x+y=2x-y\xrightarrow{x=0}y=-y\rightarrow 2y=0\rightarrow y=0\rightarrow(0,0)$

$3x+y=2x-y\xrightarrow{x=1}3+y=2-y\rightarrow 2y=-1\rightarrow y=-\dfrac{1}{2}\rightarrow\left(1,-\dfrac{1}{2}\right)$

b) $3(x+y)=x-y\xrightarrow{x=0}3y=-y\rightarrow 4y=0\rightarrow y=0\rightarrow(0,0)$

$3(x+y)=x-y\xrightarrow{x=1}3(1+y)=1-y\rightarrow 3+3y=1-y\rightarrow 4y=-2\rightarrow y=-\dfrac{1}{2}\rightarrow\left(1,-\dfrac{1}{2}\right)$

c) $\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{x}{3}+1\xrightarrow{x=0}\dfrac{y}{2}=1\rightarrow y=2\rightarrow(0,2)$

$\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{x}{3}+1\xrightarrow{y=0}\dfrac{x}{2}=\dfrac{x}{3}+1\xrightarrow{\text{m.c.m.}(2,3)=6}\dfrac{3x}{6}=\dfrac{2x+6}{6}\rightarrow x=6\rightarrow(6,0)$

d) $2\cdot(x-y)=4x\xrightarrow{x=0}-2y=0\rightarrow y=0\rightarrow(0,0)$

$2\cdot(x-y)=4x\xrightarrow{x=1}2(1-y)=4\rightarrow 2-2y=4\rightarrow -2y=2\rightarrow y=-1\rightarrow(1,-1)$

e) $2\cdot(x-y)=4+x\xrightarrow{x=0}-2y=4\rightarrow y=-2\rightarrow(0,-2)$

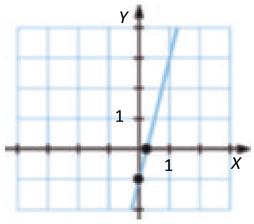
$2\cdot(x-y)=4+x\xrightarrow{y=0}2x=4+x\rightarrow x=4\rightarrow(4,0)$

f) $3\cdot(x-2y)=2\cdot(2x+y)\xrightarrow{x=0}-6y=2y\rightarrow -8y=0\rightarrow y=0\rightarrow(0,0)$

$3\cdot(x-2y)=2\cdot(2x+y)\xrightarrow{x=1}3(1-2y)=2(2+y)\rightarrow 3-6y=4+2y\rightarrow -8y=1\rightarrow y=-\dfrac{1}{8}\rightarrow\left(1,-\dfrac{1}{8}\right)$

39. Página 104

a) $3x - y = 1 \xrightarrow{\cdot(-2)} -6x + 2y = -2$



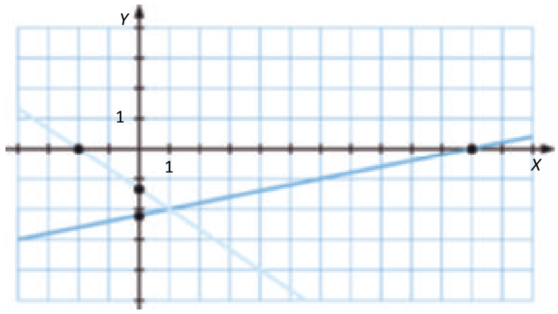
Las dos ecuaciones son equivalentes, representan la misma recta. El sistema tiene infinitas soluciones.

$3x - y = 1 \xrightarrow{x=0} -y = 1 \rightarrow y = -1 \rightarrow (0, -1)$

$3x - y = 1 \xrightarrow{y=0} 3x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{3} \rightarrow \left(\frac{1}{3}, 0\right)$

En la gráfica vemos dos rectas solapadas, que representan un sistema compatible indeterminado.

b) $x - 5y = 11 \xrightarrow{x=0} -5y = 11 \rightarrow y = -\frac{11}{5} \rightarrow \left(0, -\frac{11}{5}\right)$



$x - 5y = 11 \xrightarrow{y=0} x = 11 \rightarrow (11, 0)$

$2x + 3y = -4 \xrightarrow{x=0} 3y = -4 \rightarrow y = -\frac{4}{3} \rightarrow \left(0, -\frac{4}{3}\right)$

$2x + 3y = -4 \xrightarrow{y=0} 2x = -4 \rightarrow x = -2 \rightarrow (-2, 0)$

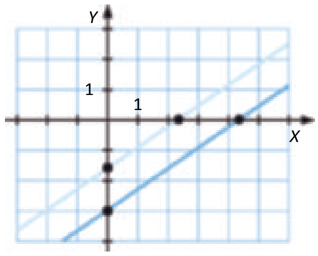
Son rectas distintas, no paralelas, se cortan en un punto. El sistema tiene una única solución.

c) $2x - 3y = 9 \xrightarrow{\cdot 2} 4x - 6y = 18$

$4x - 9 = 6y \rightarrow 4x - 6y = 9$

El sistema no tiene ninguna solución, representa dos rectas paralelas.

$2x - 3y = 9 \xrightarrow{x=0} -3y = 9 \rightarrow y = -3 \rightarrow (0, -3)$

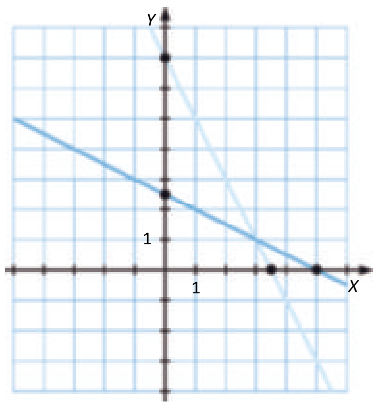


$2x - 3y = 9 \xrightarrow{y=0} 2x = 9 \rightarrow x = \frac{9}{2} \rightarrow \left(\frac{9}{2}, 0\right)$

$4x - 9 = 6y \xrightarrow{x=0} -9 = 6y \rightarrow y = -\frac{3}{2} \rightarrow \left(0, -\frac{3}{2}\right)$

$4x - 9 = 6y \xrightarrow{y=0} 4x - 9 = 0 \rightarrow x = \frac{9}{4} \rightarrow \left(\frac{9}{4}, 0\right)$

d) $x + 2y = 5 \xrightarrow{x=0} 2y = 5 \rightarrow y = \frac{5}{2} \rightarrow \left(0, \frac{5}{2}\right)$



$x + 2y = 5 \xrightarrow{y=0} x = 5 \rightarrow (5, 0)$

$2x + y = 7 \xrightarrow{x=0} y = 7 \rightarrow (0, 7)$

$2x + y = 7 \xrightarrow{y=0} 2x = 7 \rightarrow x = \frac{7}{2} \rightarrow \left(\frac{7}{2}, 0\right)$

Son rectas distintas, no paralelas, se cortan en un punto. El sistema tiene una única solución.

40. Página 104

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Para que sea un sistema incompatible, las ecuaciones tienen que ser rectas paralelas no coincidentes.

a) $x+y=2 \xrightarrow{\cdot 2} 2x+2y=4 \rightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=\boxed{6} \end{cases}$

b) $3x-y=0 \xrightarrow{\cdot(-1)} -3x+y=0 \rightarrow \begin{cases} 3x-y=0 \\ \boxed{-3x}+\boxed{y}=-1 \end{cases}$

c) $2(x-y)+x=10 \rightarrow 3x-2y=10 \rightarrow \begin{cases} 2(x-y)+x=10 \\ 3x+\boxed{(-2y)}=\boxed{5} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}=5 \\ \boxed{\dfrac{x}{2}}+\boxed{\dfrac{y}{4}}=10 \end{cases}$

41. Página 104

La expresión general del sistema es una respuesta abierta.

a) Son dos rectas no paralelas → Es un sistema compatible determinado.

Su solución es el punto (–1, 3). Es decir, $x=-1$, $y=3$.

b) Son dos rectas coincidentes, el sistema es compatible indeterminado.

La solución es todos los puntos de la recta que pasa por los puntos $(0,5)$ y $(5,0)$.

$$\left.\begin{array}{l} y=ax+b \xrightarrow{x=0,\ y=5} 5=b \\ \xrightarrow{x=5,\ y=0} 0=5a+b \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} b=5 \\ a=-1 \end{cases}$$

La solución son todos los puntos de la recta $y=-x+5$

c) Son dos rectas no paralelas, es un sistema compatible determinado.

Su solución es el punto (1, 2). Es decir, $x=1$, $y=2$.

d) Son dos rectas paralelas no coincidentes. Es un sistema incompatible.

El sistema no tiene solución.

42. Página 105

a) $x+3y=17 \rightarrow x=17-3y$

$3x-2y=7 \xrightarrow{x=17-3y} 3(17-3y)-2y=7 \rightarrow 51-9y-2y=7 \rightarrow -11y=-44 \rightarrow y=4$

$x=17-3y \xrightarrow{y=4} x=17-3\cdot 4=5$

La solución es $x=5$ e $y=4$.

b) $4x+y=7 \rightarrow y=7-4x$

$-x+2y=5 \xrightarrow{y=7-4x} -x+2(7-4x)=5 \rightarrow -x+14-8x=5 \rightarrow -9x=-9 \rightarrow x=1$

$y=7-4x \xrightarrow{x=1} y=7-4=3$

La solución es $x=1$ e $y=3$.

c) $3x+y=13 \rightarrow y=13-3x$

$-2x+3y=-16 \xrightarrow{y=13-3x} -2x+3(13-3x)=-16 \rightarrow -2x+39-9x=-16 \rightarrow -11x=-55 \rightarrow x=5$

$y=13-3x \xrightarrow{x=5} y=13-15=-2$

La solución es $x=5$ e $y=-2$.

d) $5x+y=2x \rightarrow y=2x-5x=-3x$

$x-2y=10 \xrightarrow{y=-3x} x-2(-3x)=10 \rightarrow 7x=10 \rightarrow x=\frac{10}{7}$ $\qquad y=-3x \xrightarrow{x=\frac{10}{7}} y=-\frac{30}{7}$

La solución es $x=\frac{10}{7}$ e $y=-\frac{30}{7}$.

e) $4x+3y=18 \rightarrow 3y=18-4x \rightarrow y=\frac{18-4x}{3}$

$2y-3x=29 \xrightarrow{y=\frac{18-4x}{3}} \frac{36-8x}{3}-3x=29 \rightarrow \frac{36-8x-9x}{3}=\frac{87}{3} \rightarrow 36-17x=87 \rightarrow -17x=51 \rightarrow x=-3$

$y=\frac{18-4x}{3} \xrightarrow{x=-3} y=\frac{18+12}{3}=10$

La solución es $x=-3$ e $y=10$.

f) $-x+y=\frac{1}{6} \rightarrow y=x+\frac{1}{6}$

$3x+2y=2 \xrightarrow{y=x+\frac{1}{6}} 3x+2\left(x+\frac{1}{6}\right)=2 \rightarrow 3x+2x+\frac{1}{3}=2 \rightarrow 5x=\frac{6-1}{3}=\frac{5}{3} \rightarrow x=\frac{1}{3}$

$y=x+\frac{1}{6} \xrightarrow{x=\frac{1}{3}} y=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

La solución es $x=\frac{1}{3}$ e $y=\frac{1}{2}$.

43. Página 105

a) $x+4y=-2 \rightarrow x=-2-4y$ $\qquad 2x-3y=29 \rightarrow 2x=29+3y \rightarrow x=\frac{29+3y}{2}$

$-2-4y=\frac{29+3y}{2} \rightarrow \frac{-4-8y}{2}=\frac{29+3y}{2} \rightarrow -4-8y=29+3y \rightarrow -11y=33 \rightarrow y=-3$

$x=-2-4y \xrightarrow{y=-3} x=-2+12=10$

La solución es $x=10$ e $y=-3$.

b) $y=2x+9$ $\qquad 3y+1=-8x \rightarrow 3y=-8x-1 \rightarrow y=\frac{-8x-1}{3}$

$2x+9=\frac{-8x-1}{3} \rightarrow \frac{6x+27}{3}=\frac{-8x-1}{3} \rightarrow 6x+27=-8x-1 \rightarrow 14x=-28 \rightarrow x=-2$

$y=2x+9 \xrightarrow{x=-2} y=-4+9=5$

La solución es $x=-2$ e $y=5$.

c) $\frac{x}{2}+3y=0 \rightarrow x=-6y$ $\qquad \frac{x}{3}-y=-1 \rightarrow \frac{x}{3}=-1+y \rightarrow x=-3+3y$

$-6y=-3+3y \rightarrow -9y=-3 \rightarrow y=\frac{1}{3}$ $\qquad x=-6y \xrightarrow{y=\frac{1}{3}} x=-\frac{6}{3}=-2$

La solución es $x=-2$ e $y=\frac{1}{3}$.

d) $x-2y=-3 \rightarrow x=-3+2y$

$4(x-y)=12 \rightarrow x-y=3 \rightarrow x=y+3$

$-3+2y=y+3 \rightarrow y=6$

$x=-3+2y \xrightarrow{y=6} x=-3+12=9$

La solución es $x=9$ e $y=6$.

e) $3x+y=11 \rightarrow y=11-3x$

$8x+2y=3y \rightarrow y=8x$

$11-3x=8x \rightarrow 11=11x \rightarrow x=1$

$y=11-3x \xrightarrow{x=1} y=11-3=8$

La solución es $x=1$ e $y=8$.

f) $-x+y=10 \rightarrow x=y-10$

$2x+3y=10 \rightarrow 2x=10-3y \rightarrow x=\dfrac{10-3y}{2}$

$$y-10=\frac{10-3y}{2} \rightarrow \frac{2y-20}{2}=\frac{10-3y}{2} \rightarrow 2y-20=10-3y \rightarrow 5y=30 \rightarrow y=6$$

$x=y-10 \xrightarrow{y=6} x=6-10=-4$

La solución es $x=-4$ e $y=6$.

44. Página 105

a) $$\begin{cases} x-2y=3x \longrightarrow \\ -x+y=-6 \xrightarrow{\cdot 2} \end{cases} \quad - \begin{array}{r} -2x-2y=0 \\ \underline{-2x+2y=-12} \\ -4y=12 \rightarrow y=-3 \end{array}$$

$-x+y=-6 \xrightarrow{y=-3} -x=-3 \rightarrow x=3$

La solución es $x=3$ e $y=-3$.

b) $$\begin{cases} 5\cdot(x-y)=25 \longrightarrow 5x-5y=25 \longrightarrow \\ 3x-2\cdot(x+y)=8 \rightarrow x-2y=8 \xrightarrow{\cdot 5} \end{cases} \quad - \begin{array}{r} 5x-5y=25 \\ \underline{5x-10y=40} \\ 5y=-15 \rightarrow y=-3 \end{array}$$

$x-2y=8 \xrightarrow{y=-3} x+6=8 \rightarrow x=2$

La solución es $x=2$ e $y=-3$.

c) $$\begin{cases} -5x+3y=5 \longrightarrow \\ 3x=y+1 \xrightarrow{\cdot 3} \end{cases} \quad + \begin{array}{r} -5x+3y=5 \\ \underline{9x-3y=3} \\ 4x=8 \rightarrow x=2 \end{array}$$

$3x=y+1 \xrightarrow{x=2} 6=y+1 \rightarrow y=5$

La solución es $x=2$ e $y=5$.

d) $$\begin{cases} x+y-5=-6 \longrightarrow \\ 2\cdot(x+y)=x+6 \rightarrow \end{cases} \quad - \begin{array}{r} x+y=-1 \\ \underline{x+2y=6} \\ -y=-7 \rightarrow y=7 \end{array}$$

$x+y=-1 \xrightarrow{y=7} x+7=-1 \rightarrow x=-8$

La solución es $x=-8$ e $y=7$.

e) $\begin{cases} 7x-4y=3 \longrightarrow \\ 3+x-y=-3 \xrightarrow{\cdot 4} \end{cases} \begin{array}{r} 7x-4y=3 \\ -\ \underline{4x-4y=-24} \\ 3x=27 \rightarrow x=9 \end{array}$

$3+x-y=-3 \xrightarrow{x=9} 12-y=-3 \rightarrow y=15$

La solución es $x=9$ e $y=15$.

f) $\begin{cases} 3x+2y=1 \longrightarrow \\ x+3y=-\dfrac{5}{6} \xrightarrow{\cdot 3} \end{cases} \begin{array}{r} 3x+2y=1 \\ -\ \underline{3x+9y=-\dfrac{5}{2}} \\ -7y=1+\dfrac{5}{2}=\dfrac{7}{2} \rightarrow y=-\dfrac{1}{2} \end{array}$

$x+3y=-\dfrac{5}{6} \xrightarrow{y=-\frac{1}{2}} x-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{5}{6} \rightarrow x=-\dfrac{5}{6}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

La solución es $x=\dfrac{2}{3}$ e $y=-\dfrac{1}{2}$.

45. Página 105

a) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{4}+y=\dfrac{3}{4} \rightarrow \dfrac{x+4y}{4}=\dfrac{3}{4} \\ \dfrac{-x}{2}+4y=\dfrac{3}{2} \rightarrow \dfrac{-x+8y}{2}=\dfrac{3}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+4y=3 \\ -x+8y=3 \end{array}\right\}$

Resolvemos por el método de igualación.

$x+4y=3 \rightarrow x=3-4y$ $\qquad -x+8y=3 \rightarrow x=8y-3$

$3-4y=8y-3 \rightarrow 12y=6 \rightarrow y=\dfrac{1}{2}$ $\qquad x=3-4y \xrightarrow{y=\frac{1}{2}} x=3-2=1$

La solución es $x=1$ e $y=\dfrac{1}{2}$.

b) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{2x+y}{2}=2 \rightarrow \dfrac{2x+y}{2}=\dfrac{4}{2} \\ \dfrac{x-3y+1}{5}=2 \rightarrow \dfrac{x-3y+1}{5}=\dfrac{10}{5} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y=4 \\ x-3y=9 \end{array}\right\}$

Resolvemos por el método de sustitución.

$2x+y=4 \rightarrow y=4-2x$

$x-3y=9 \xrightarrow{y=4-2x} x-3(4-2x)=9 \rightarrow x-12+6x=9 \rightarrow 7x=21 \rightarrow x=3$

$y=4-2x \xrightarrow{x=3} y=4-6=-2$

La solución es $x=3$ e $y=-2$.

c) $$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x+2y}{3}=1\rightarrow\dfrac{x+2y}{3}=\dfrac{3}{3}\\ \dfrac{y-x+3}{2}=y\rightarrow\dfrac{y-x+3}{2}=\dfrac{2y}{2}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x+2y=3\\ -x-y=-3\end{array}\right\}$$

Resolvemos por reducción.

$$\begin{array}{r}\cancel{x}+2y=3\\ -\cancel{x}-y=-3\\ \hline y=0\end{array}$$

$$x+2y=3\xrightarrow{y=0}x=3$$

La solución es $x=3$ e $y=0$.

d) $$\left.\begin{array}{l}\dfrac{-y+3}{4}=x+5\rightarrow\dfrac{-y+3}{4}=\dfrac{4x+20}{4}\\ \dfrac{2y}{5}-x=1\longrightarrow\dfrac{2y-5x}{5}=\dfrac{5}{5}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}-4x-y=17\\ -5x+2y=5\end{array}\right\}$$

Resolvemos por el método de sustitución.

$$-4x-y=17\rightarrow y=-4x-17$$

$$-5x+2y=5\xrightarrow{y=-4x-17}-5x+2(-4x-17)=5\rightarrow-5x-8x-34=5\rightarrow-13x=39\rightarrow x=-3$$

$$y=-4x-17\xrightarrow{x=-3}y=12-17=-5$$

La solución es $x=-3$ e $y=-5$.

e) $$\left.\begin{array}{l}5x-\dfrac{y}{3}=3\rightarrow\dfrac{15x-y}{3}=\dfrac{9}{3}\\ 3x+y=\dfrac{-9}{5}\rightarrow\dfrac{15x+5y}{5}=\dfrac{-9}{5}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}15x-y=9\\ 15x+5y=-9\end{array}\right\}$$

Resolvemos por el método de reducción.

$$\begin{array}{r}15x-y=9\\ -\;15x+5y=-9\\ \hline -6y=18\rightarrow y=-3\end{array}$$

$$15x-y=9\xrightarrow{y=-3}15x+3=9\rightarrow15x=6\rightarrow x=\frac{2}{5}$$

La solución es $x=\dfrac{2}{5}$ e $y=-3$.

f) $$\left.\begin{array}{l}x+4y=-1\\ \dfrac{x}{2}-y=\dfrac{-5}{4}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{m.c.m.}(2,\,4)=4}\dfrac{2x-4y}{4}=\dfrac{-5}{4}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x+4y=-1\\ 2x-4y=-5\end{array}\right\}$$

Resolvemos por el método de reducción.

$$\begin{array}{r}x+4y=-1\\ +\;2x-4y=-5\\ \hline 3x=-6\rightarrow x=-2\end{array}$$

$$x+4y=-1\xrightarrow{x=-2}-2+4y=-1\rightarrow4y=1\rightarrow y=\frac{1}{4}$$

La solución es $x=-2$ e $y=\dfrac{1}{4}$.

g) $$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x}{5}-\dfrac{y}{4}=2\\ x+\dfrac{y}{2}=3\end{array}\right\}\begin{array}{l}\xrightarrow{\text{m.c.m.}(5,\,4)=20}\\ \xrightarrow{\hspace{2cm}}\end{array}\left.\begin{array}{l}\dfrac{4x-5y}{20}=\dfrac{40}{20}\\ \dfrac{2x+y}{2}=\dfrac{6}{2}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}4x-5y=40\\ 2x+y=6\end{array}\right\}$$

Resolvemos por el método de sustitución.

$2x+y=6\rightarrow y=6-2x$

$4x-5y=40\xrightarrow{y=6-2x}4x-5(6-2x)=40\rightarrow 4x-30+10x=40\rightarrow 14x=70\rightarrow x=5$

$y=6-2x\xrightarrow{x=5}y=6-10=-4$

La solución es $x=5$ e $y=-4$.

h) $$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{4}\\ \dfrac{x-1}{3}+\dfrac{y-2}{5}=2\end{array}\right\}\begin{array}{l}\xrightarrow{\text{m.c.m.}(2,\,4)=4}\\ \xrightarrow{\text{m.c.m.}(3,\,5)=15}\end{array}\left.\begin{array}{l}\dfrac{2x}{4}=\dfrac{y+1}{4}\\ \dfrac{5x-5+3y-6}{15}=\dfrac{30}{15}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}2x-y=1\\ 5x+3y=41\end{array}\right\}$$

Resolvemos por el método de sustitución.

$2x-y=1\rightarrow y=2x-1$

$5x+3y=41\xrightarrow{y=2x-1}5x+3(2x-1)=41\rightarrow 5x+6x-3=41\rightarrow 11x=44\rightarrow x=4$

$y=2x-1\xrightarrow{x=4}y=8-1=7$

La solución es $x=4$ e $y=7$.

47. Página 105

a) Resolvemos por el método de sustitución.

$x-2y=5\rightarrow x=2y+5$

$ax+y=1\xrightarrow{x=2y+5}a(2y+5)+y=1\rightarrow 2ay+5a+y=1\rightarrow(2a+1)y=1-5a\rightarrow y=\dfrac{1-5a}{2a+1}$

$x=2y+5\xrightarrow{\frac{1-5a}{2a+1}}\dfrac{2-10a}{2a+1}+5=\dfrac{2-10a+10a+5}{2a+1}=\dfrac{7}{2a+1}$

Para $a=-\dfrac{1}{2}$ se anula el denominador. Es un sistema incompatible.

Para $a\neq-\dfrac{1}{2}$ es un sistema compatible determinado cuya solución es $x=\dfrac{7}{2a+1}$ e $y=\dfrac{1-5a}{2a+1}$.

b) Resolvemos por el método de sustitución.

$bx+y=-2\rightarrow y=-2-bx$

$2x+3y=19\xrightarrow{y=-2-bx}2x+3(-2-bx)=19\rightarrow 2x-6-3bx=19\rightarrow(2-3b)x=25\rightarrow x=\dfrac{25}{2-3b}$

$y=-2-bx\xrightarrow{x=\frac{25}{2-3b}}y=-2-\dfrac{25b}{2-3b}=\dfrac{-4+6b-25b}{2-3b}=\dfrac{-4-19b}{2-3b}=\dfrac{4+19b}{3b-2}$

Para $b=\dfrac{2}{3}$ se anula el denominador. Es un sistema incompatible.

Para $b\neq\dfrac{2}{3}$ es un sistema compatible determinado cuya solución es $x=\dfrac{25}{2-3b}$ e $y=\dfrac{4+19b}{3b-2}$.

c) Resolvemos por el método de igualación.

$2x - y = 9 \rightarrow y = 2x - 9$ $\qquad$ $cx + y = -3 \rightarrow y = -3 - cx$

$$2x - 9 = -3 - cx \rightarrow (2 + c)x = 6 \rightarrow x = \frac{6}{2 + c}$$

$$y = 2x - 9 \xrightarrow{x=\frac{6}{2+c}} y = \frac{12}{2+c} - 9 = \frac{12 - 18 - 9c}{2 + c} = -\frac{6 + 9c}{2 + c}$$

Para $c = -2$ se anula el denominador. Es un sistema incompatible.

Para $c \neq -2$ es un sistema compatible determinado cuya solución es $x = \frac{6}{2+c}$ e $y = -\frac{6+9c}{2+c}$.

d) Resolvemos por el método de reducción.

$$\left.\begin{array}{r} -2x + 3y = 6 \\ 4x - dy = 8 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 2} \\ \xrightarrow{} \end{array} + \begin{array}{r} -4x + 6y = 12 \\ \underline{4x - dy = 8} \end{array}$$

$$(6 - d)y = 20 \rightarrow y = \frac{20}{6 - d}$$

$$-2x + 3y = 6 \xrightarrow{y=\frac{20}{6-d}} -2x + \frac{60}{6-d} = 6 \rightarrow -2x = 6 - \frac{60}{6-d} = \frac{-6d - 24}{6 - d} \rightarrow x = \frac{3d + 12}{6 - d}$$

Para $d = 6$ el denominador se anula. Es un sistema incompatible.

Para $d \neq 6$ es un sistema compatible cuya solución es $x = \frac{3d+12}{6-d}$ y $x = \frac{20}{6-d}$.

e) Resolvemos por el método de reducción.

$$\left.\begin{array}{r} 4x + 3y = 17 \\ ax + 2y = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 2} \\ \xrightarrow{\cdot 3} \end{array} - \begin{array}{r} 8x + 6y = 34 \\ \underline{3ax + 6y = -6} \end{array}$$

$$(8 - 3a)x = 40 \rightarrow x = \frac{40}{8 - 3a}$$

$$4x + 3y = 17 \xrightarrow{x=\frac{40}{8-3a}} \frac{160}{8-3a} + 3y = 17 \rightarrow 3y = 17 - \frac{160}{8-3a} = \frac{-51a - 24}{8 - 3a} \rightarrow y = \frac{17a + 8}{3a - 8}$$

Para $a = \frac{8}{3}$ el denominador se anula. Es un sistema incompatible.

Para $a \neq \frac{8}{3}$ es un sistema compatible cuya solución es $x = \frac{40}{8-3a}$ e $y = \frac{17a+8}{3a-8}$.

f) Resolvemos por el método de sustitución.

$x + by = -2 \rightarrow x = -2 - by$

$$3x + 5y = 4 \xrightarrow{x=-2-by} 3(-2 - by) + 5y = 4 \rightarrow -6 - 3by + 5y = 4 \rightarrow (5 - 3b)y = 10 \rightarrow y = \frac{10}{5 - 3b}$$

$$x = -2 - by \xrightarrow{y=\frac{10}{5-3b}} x = -2 - \frac{10b}{5-3b} = \frac{10 + 4b}{3b - 5}$$

Para $b = \frac{5}{3}$ el denominador se anula. Es un sistema incompatible.

Para $b \neq \frac{5}{3}$ es un sistema compatible cuya solución es $x = \frac{10+4b}{3b-5}$ e $y = \frac{10}{5-3b}$.

g) Resolvemos por el método de sustitución.

$cx + y = 5 \rightarrow y = 5 - cx$

$4x - 5y = -7 \xrightarrow{y=5-cx} 4x - 5(5 - cx) = -7 \rightarrow 4x - 25 + 5cx = -7 \rightarrow (4 + 5c)x = 18 \rightarrow x = \dfrac{18}{4+5c}$

$y = 5 - cx \xrightarrow{x=\frac{18}{4+5c}} y = 5 - \dfrac{18c}{4+5c} = \dfrac{20+7c}{4+5c}$

Para $c = -\dfrac{4}{5}$ se anula el denominador. Es un sistema incompatible.

Para $c \neq -\dfrac{4}{5}$ es un sistema compatible determinado cuya solución es $x = \dfrac{18}{4+5c}$ e $y = \dfrac{20+7c}{4+5c}$

h) Resolvemos por el método de sustitución.

$x + y = 8 \rightarrow x = 8 - y$

$dx + 2y = 6 \xrightarrow{x=8-y} d(8 - y) + 2y = 6 \rightarrow (2 - d)y = 6 - 8d \rightarrow y = \dfrac{6-8d}{2-d}$

$x = 8 - y \xrightarrow{y=\frac{6-8d}{2-d}} x = 8 - \dfrac{6-8d}{2-d} = \dfrac{10}{2-d}$

Para $d = 2$ se anula el denominador. Es un sistema incompatible.

Para $d \neq 2$ es un sistema compatible determinado cuya solución es $x = \dfrac{10}{2-d}$ e $y = \dfrac{6-8d}{2-d}$.

48. Página 105

a) Resolvemos por el método de sustitución.

$4x - y - 1 = 2a \rightarrow y = 4x - 1 - 2a$

$2x + 3y = a + 11 \xrightarrow{y=4x-1-2a} 2x + 3(4x - 1 - 2a) = a + 11$

$\rightarrow 14x = 7a + 14 \rightarrow x = \dfrac{a+2}{2}$

$y = 4x - 1 - 2a \xrightarrow{x=\frac{a+2}{2}} y = 2a + 4 - 1 - 2a = 3$

Es un sistema compatible determinado cuya solución es $x = \dfrac{a+2}{2}$ e $y = 3$.

b) Resolvemos por el método de reducción.

$$\begin{array}{rr} & 6x + 2y = 7a \\ + & x - 2y = 0 \\ \hline & 7x = 7a \rightarrow x = a \end{array}$$

$x - 2y = 0 \xrightarrow{x=a} a - 2y = 0 \rightarrow y = \dfrac{a}{2}$

Es un sistema compatible determinado cuya solución es $x = a$ e $y = \dfrac{a}{2}$.

49. Página 105

a) Resolvemos por el método de reducción.

$$\left.\begin{array}{l}3x-ay=5\\6x-2y=b\end{array}\right\}\begin{array}{l}\xrightarrow{\cdot 2}\\\longrightarrow\end{array}\ -\ \begin{array}{r}6x-2ay=10\\6x-2y=b\\\hline(2-2a)y=10-b\rightarrow y=\dfrac{10-b}{2-2a}\end{array}$$

$$6x-2y=b\xrightarrow{y=\frac{10-b}{2-2a}}6x-2\cdot\frac{10-b}{2-2a}=b\rightarrow 6x=b+\frac{10-b}{1-a}=\frac{10-ab}{1-a}\rightarrow x=\frac{10-ab}{6-6a}$$

Para $a\neq 1$ es un sistema compatible determinado, cuya solución es $x=\dfrac{10-ab}{6-6a}$ e $y=\dfrac{10-b}{2-2a}$.

Para $a=1$ el denominador se anula, si $b\neq 10$ es un sistema incompatible.

Para $a=1$ y $b=10$, $3x-y=5\xrightarrow{\cdot 2}6x-2y=10\rightarrow y=3x-5$. Es un sistema compatible indeterminado con soluciones $(x,3x-5)$.

b) Resolvemos por el método de sustitución.

$$-2x-by=6\rightarrow x=-\frac{6+by}{2}$$

$$ax+5y=-1\xrightarrow{x=-\frac{6+by}{2}}-\frac{6a+aby}{2}+5y=-1\rightarrow\frac{-6a-aby+10y}{2}=\frac{-2}{2}\rightarrow(10-ab)y=6a-2\rightarrow y=\frac{6a-2}{10-ab}$$

$$x=-\frac{6+by}{2}\xrightarrow{y=\frac{6a-2}{10-ab}}x=-\frac{6+\dfrac{6ab-2b}{10-ab}}{2}=\frac{b-30}{10-ab}$$

Si $ab\neq 10$ es un sistema compatible determinado cuya solución es $x=\dfrac{b-30}{10-ab}$ e $y=\dfrac{6a-2}{10-ab}$.

Para $ab=10$ el denominador se anula, si $b\neq 30$ es un sistema incompatible.

Para $b=30$ y $a=\dfrac{1}{3}\rightarrow\dfrac{x}{3}+5y=-1\xrightarrow{\cdot(-6)}-2x-30y=6\rightarrow x=-15y-3$ es un sistema compatible indeterminado con soluciones $(-15y-3,y)$.

c) Resolvemos por el método de sustitución.

$$3x-y=8\rightarrow y=3x-8$$

$$ax+by=4\xrightarrow{y=3x-8}ax+3bx-8b=4\rightarrow(a+3b)x=4+8b\rightarrow x=\frac{4+8b}{a+3b}$$

$$y=3x-8\xrightarrow{x=\frac{4+8b}{a+3b}}y=\frac{12+24b}{a+3b}-8=\frac{12-8a}{a+3b}$$

Para $a\neq -3b$ es un sistema compatible determinado con soluciones $x=\dfrac{4+8b}{a+3b}$ e $y=\dfrac{12-8a}{a+3b}$.

Si $a=3b$ el denominador se anula. Para $a\neq\dfrac{3}{2}$ es un sistema incompatible.

Si $a=\dfrac{3}{2}$ y $b=-\dfrac{1}{2}\rightarrow\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}y=4\xrightarrow{\cdot 2}3x-y=8\rightarrow y=3x-8$ es un sistema compatible indeterminado con soluciones $(x,3x-8)$.

d) Resolvemos por el método de reducción.

$$\left.\begin{array}{l}-ax-by=5\\6x-2by=10\end{array}\right\}\begin{array}{l}\xrightarrow{\cdot 2}\\\longrightarrow\end{array}\quad -\begin{array}{r}-2ax-2by=10\\6x-2by=10\\\hline(-2a-6)x=0\rightarrow x=0\end{array}$$

$$-ax-by=5\xrightarrow{x=0}-by=5\rightarrow y=-\frac{5}{b}$$

Si $a\neq -3$ y $b\neq 0$ es un sistema compatible determinado cuya solución es $x=0$ e $y=-\frac{5}{b}$.

Si $a=-3\rightarrow 3x-by=5\xrightarrow{\cdot 2}6x-2by=10\rightarrow x=\frac{5-by}{3}$ es un sistema compatible indeterminado con soluciones $\left(\frac{5-by}{3},y\right)$.

Si $b=0$, el sistema es $\begin{cases}-ax=5\rightarrow x=-\frac{5}{a}\\6x=10\rightarrow x=\frac{5}{3}\end{cases}$.

Si $a\neq -3$ es un sistema incompatible, y si $a=-3$ es un sistema compatible indeterminado con soluciones $\left(\frac{5}{3},y\right)$.

51. Página 106

a) Resolvemos por el método de sustitución.

$$x+y=-1\rightarrow x=-1-y$$

$$5x+2y=6\xrightarrow{x=1-y}5(-1-y)+2y=6\rightarrow -5-5y+2y=6\rightarrow -3y=11\rightarrow y=-\frac{11}{3}$$

$$x=-1-y\xrightarrow{y=-\frac{11}{3}}x=-1+\frac{11}{3}=\frac{8}{3}$$

La solución es $x=\frac{8}{3}$ e $y=-\frac{11}{3}$.

b) Resolvemos por el método de sustitución.

$$x+y=1\rightarrow x=1-y$$

$3x+3y=3\xrightarrow{x=1-y}3-3y+3y=3\rightarrow 0=0$ es un sistema compatible indeterminado.

Resolvemos para $y=\lambda$:

$x=1-y\xrightarrow{y=\lambda}x=1-\lambda$.

La solución es $x=1-\lambda$ e $y=\lambda$.

c) Resolvemos por el método de igualación.

$-x+5y=0\rightarrow x=5y$ $\qquad$ $x+y=4\rightarrow x=4-y$

$$5y=4-y\rightarrow 6y=4\rightarrow y=\frac{2}{3}$$

$$x=5y\xrightarrow{y=\frac{2}{3}}x=\frac{10}{3}$$

La solución es $x=\frac{10}{3}$ e $y=\frac{2}{3}$.

d) Resolvemos por el método de sustitución.

$x + y = 1 \rightarrow x = 1 - y$

$-2x - 2y = -2 \xrightarrow{x=1-y} -2(1-y) - 2y = -2 \rightarrow 0 = 0$ es un sistema compatible indeterminado.

Resolvemos para $y = \lambda$:

$x = 1 - y \xrightarrow{y=\lambda} x = 1 - \lambda$.

La solución es $x = 1 - \lambda$ e $y = \lambda$.

e) Resolvemos por el método de sustitución.

$y = 3 - 2x$

$4x + 2y = 6 \xrightarrow{y=3-2x} 4x + 2(3-2x) = 6 \rightarrow 0 = 0$ es un sistema compatible indeterminado.

Resolvemos para $x = \lambda$:

$y = 3 - 2x \xrightarrow{x=\lambda} y = 3 - 2\lambda$.

La solución es $x = \lambda$ e $y = 3 - 2\lambda$.

f) Resolvemos por el método de sustitución.

$x + 3y = 5 \rightarrow x = 5 - 3y$

$-x - 3y = -5 \xrightarrow{x=5-3y} -(5-3y) + 3y = -5 \rightarrow 0 = 0$ es un sistema compatible indeterminado.

Resolvemos para $y = \lambda$:

$x = 5 - 3y \xrightarrow{y=\lambda} x = 5 - 3\lambda$.

La solución es $x = 5 - 3\lambda$ e $y = \lambda$.

g) Resolvemos por el método de igualación.

$x + 8y = 10 \rightarrow x = 10 - 8y$

$$3x + y = -4 \xrightarrow{x=10-8y} 3(10-8y) + y = -4 \rightarrow -23y = -34 \rightarrow y = \frac{34}{23}$$

$$x = 10 - 8y \xrightarrow{y=\frac{34}{23}} x = -\frac{42}{23}.$$

La solución es $x = -\frac{42}{23}$ e $y = \frac{34}{23}$.

h) Resolvemos por el método de reducción.

$$\left.\begin{array}{r} -3x + 7y = 0 \\ 3x + y = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} + \begin{array}{r} -3x + 7y = 0 \\ 3x + y = 4 \\ \hline 8y = 4 \rightarrow y = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$-3x + 7y = 0 \xrightarrow{y=\frac{1}{2}} 3x = \frac{7}{2} \rightarrow x = \frac{7}{6}$$

La solución es $x = \frac{7}{6}$ e $y = \frac{1}{2}$.

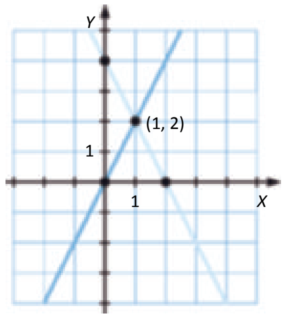
52. Página 106

a) Calculamos dos puntos de cada recta.

$$2x+y=4 \rightarrow \begin{cases} y=0 \rightarrow x=2 \rightarrow (2,0) \\ x=0 \rightarrow y=4 \rightarrow (0,4) \end{cases}$$

$$2x-y=0 \rightarrow \begin{cases} y=0 \rightarrow x=0 \rightarrow (0,0) \\ x=1 \rightarrow y=2 \rightarrow (0,2) \end{cases}$$

La solución es $x=1$ e $y=2$.

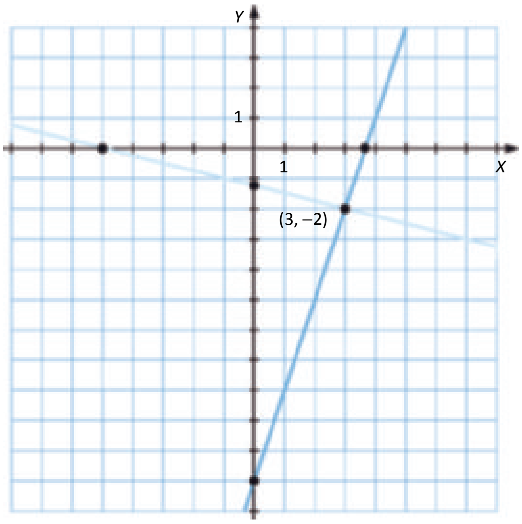


b) Calculamos dos puntos de cada recta.

$$x+4y=-5 \rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow y=-\dfrac{5}{4} \rightarrow \left(0,-\dfrac{5}{4}\right) \\ y=0 \rightarrow x=-5 \rightarrow (-5,0) \end{cases}$$

$$3x-y=11 \rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow y=-11 \rightarrow (0,-11) \\ y=0 \rightarrow x=\dfrac{11}{3} \rightarrow \left(\dfrac{11}{3},0\right) \end{cases}$$

La solución es $x=3$ e $y=-2$.

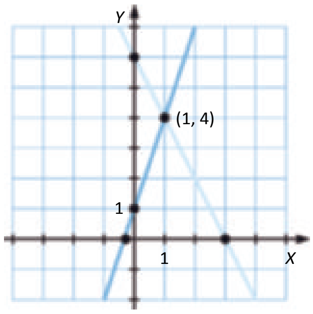


c) Calculamos dos puntos de cada recta.

$$2x+y=6 \rightarrow \begin{cases} y=0 \rightarrow x=3 \rightarrow (3,0) \\ x=0 \rightarrow y=6 \rightarrow (0,6) \end{cases}$$

$$3x-y=-1 \rightarrow \begin{cases} y=0 \rightarrow x=-\dfrac{1}{3} \rightarrow \left(-\dfrac{1}{3},0\right) \\ x=0 \rightarrow y=1 \rightarrow (0,1) \end{cases}$$

La solución es $x=1$ e $y=4$.

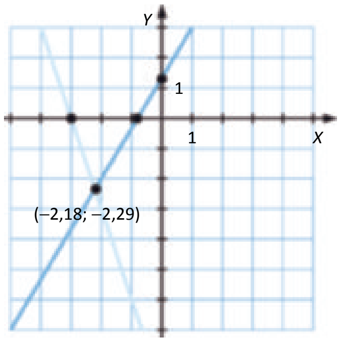


d) Calculamos dos puntos de cada recta.

$$5x-3y=-4 \rightarrow \begin{cases} y=0 \rightarrow x=-\dfrac{4}{5} \rightarrow \left(-\dfrac{4}{5},0\right) \\ x=0 \rightarrow y=\dfrac{4}{3} \rightarrow \left(0,\dfrac{4}{3}\right) \end{cases}$$

$$4x+y=-11 \rightarrow \begin{cases} y=0 \rightarrow x=-\dfrac{11}{4} \rightarrow \left(-\dfrac{11}{4},0\right) \\ x=0 \rightarrow y=-11 \rightarrow (0,-11) \end{cases}$$

La solución es $x=-2{,}18$ e $y=-2{,}29$.



53. Página 106

a) $(x-y)^2=25\xrightarrow{x=3,\,y=2}1^2\neq 25\rightarrow(3,2)$ no es solución de la ecuación.

b) $(x-y)^2=25\xrightarrow{x=-3,y=2}(-5)^2=25\rightarrow(-3,2)$ es solución de la ecuación.

c) $(x-y)^2=25\xrightarrow{x=3,y=-2}5^2=25\rightarrow(3,-2)$ es solución de la ecuación.

d) $(x-y)^2=25\xrightarrow{x=-3,y=-2}(-1)^2\neq 25\rightarrow(-3,-2)$ no es solución de la ecuación.

e) $(x-y)^2=25\xrightarrow{x=1,y=4}(-3)^2\neq 25\rightarrow(1,4)$ no es solución de la ecuación.

f) $(x-y)^2=25\xrightarrow{x=-1,y=4}(-5)^2=25\rightarrow(-1,4)$ es solución de la ecuación.

g) $(x-y)^2=25\xrightarrow{x=4,y=1}3^2\neq 25\rightarrow(4,1)$ no es solución de la ecuación.

h) $(x-y)^2=25\xrightarrow{x=-4,y=-1}(-3)^2\neq 25\rightarrow(-4,-1)$ no es solución de la ecuación.

54. Página 106

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $(x-y)^2=9\xrightarrow{x=0}(-y)^2=9\rightarrow y=\pm 3\rightarrow(0,3)$ y $(0,-3)$

$(x-y)^2=9\xrightarrow{y=0}x^2=9\rightarrow x=\pm 3\rightarrow(3,0)$ y $(-3,0)$

b) $(x+2y)^2=16\xrightarrow{y=0}x^2=16\rightarrow x=\pm 4\rightarrow(4,0)$ y $(-4,0)$

$(x+2y)^2=16\xrightarrow{x=0}(2y)^2=16\rightarrow 2y=\pm 4\rightarrow y=\pm 2\rightarrow(0,2)$ y $(0,-2)$

c) $x^2+y=1\xrightarrow{x=0}y=1\rightarrow(0,1)$

$x^2+y=1\xrightarrow{y=0}x^2=1\rightarrow x=\pm 1\rightarrow(1,0)$ y $(-1,0)$

d) $x^2+y^2=3\xrightarrow{y=0}x^2=3\rightarrow x=\pm\sqrt{3}\rightarrow\left(\sqrt{3},0\right)$ y $\left(-\sqrt{3},0\right)$

$x^2+y^2=3\xrightarrow{x=0}y^2=3\rightarrow y=\pm\sqrt{3}\rightarrow\left(0,\sqrt{3}\right)$ y $\left(0,-\sqrt{3}\right)$

55. Página 106

a) $y-x=3\rightarrow y=x+3$

$(x+1)^2-(y-1)^2=-7\xrightarrow{y=x+3}(x+1)^2-(x+2)^2=-7\rightarrow x^2+2x+1-x^2-4x-4=-7\rightarrow -2x=-4\rightarrow x=2$

$y=x+3\xrightarrow{x=2}y=5$ $\longrightarrow$ La solución es $x=2$ e $y=5$.

b) $x\cdot(y-1)=5\rightarrow x=\dfrac{5}{y-1}$

$$(x-2)(y+1)=9\xrightarrow{x=\frac{5}{y-1}}\left(\frac{5}{y-1}-2\right)(y+1)=9\rightarrow\frac{7-2y}{y-1}(y+1)=9\rightarrow(7-2y)(y+1)=9y-9$$

$$16-4y-2y^2=0\rightarrow y=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 16\cdot(-2)}}{-2\cdot 2}\rightarrow\begin{cases}y_1=-4\\ y_2=2\end{cases}$$

$x=\dfrac{5}{y-1}\xrightarrow{y=-4}x_1=-1$ $\qquad$ $x=\dfrac{5}{y-1}\xrightarrow{y_2=2}x_2=5$

Como es un sistema con ecuaciones racionales, comprobamos las soluciones obtenidas.

$$\left.\begin{matrix}(x-2)\cdot(y+1)=9\\ x\cdot(y-1)=5\end{matrix}\right\}\xrightarrow{x_1=-1,y_1=-4}\begin{cases}(-3)\cdot(-3)=9\\ -1\cdot(-5)=5\end{cases}\qquad\left.\begin{matrix}(x-2)\cdot(y+1)=9\\ x\cdot(y-1)=5\end{matrix}\right\}\xrightarrow{x=5,y=2}\begin{cases}3\cdot 3=9\\ 5\cdot 1=5\end{cases}$$

Las soluciones son $x_1=-1$ e $y_1=-4$; y $x_2=5$ e $y_2=2$.

c) $$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x-2}{4}+\dfrac{y+1}{5}=4\\[2mm] \dfrac{10}{x}+\dfrac{9}{y}=2\end{array}\right\}\begin{array}{l}\xrightarrow{\text{m.c.m.}(4,\,5)=20}\dfrac{5x-10+4y+4}{20}=\dfrac{80}{20}\\[2mm] \xrightarrow{\qquad\qquad}\dfrac{10y+9x}{xy}=\dfrac{2xy}{xy}\end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\1\\1\end{array}}\right\}\to\left.\begin{array}{r}5x+4y=86\\10y+9x-2xy=0\end{array}\right\}$$

$$5x+4y=86\to y=\frac{86-5x}{4}$$

$$10y+9x-2xy=0\xrightarrow{y=\frac{86-5x}{4}}-\frac{430-25x}{2}+\frac{18x}{2}-\frac{86x-5x^2}{2}=0$$

$$5x^2-93x+430=0\to x=\frac{93\pm\sqrt{(-93)^2-4\cdot 5\cdot 430}}{2\cdot 5}\to\begin{cases}x_1=10\\ x_2=\dfrac{43}{5}\end{cases}$$

$$y=\frac{86-5x}{4}\xrightarrow{x_1=10}y_1=9$$

$$y=\frac{86-5x}{4}\xrightarrow{x_2=\frac{43}{5}}y_2=\frac{43}{4}$$

Como es un sistema con ecuaciones racionales, comprobamos las soluciones obtenidas.

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x-2}{4}+\dfrac{y+1}{5}=4\\[2mm] \dfrac{10}{x}+\dfrac{9}{y}=2\end{array}\right\}\xrightarrow{x_1=10,\,y_1=9}\begin{cases}\dfrac{8}{4}+\dfrac{10}{5}=4\\[2mm] \dfrac{10}{10}+\dfrac{9}{9}=2\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x-2}{4}+\dfrac{y+1}{5}=4\\[2mm] \dfrac{10}{x}+\dfrac{9}{y}=2\end{array}\right\}\xrightarrow{x_2=\frac{43}{5},\,y_2=\frac{43}{4}}\begin{cases}\dfrac{33}{20}+\dfrac{47}{20}=4\\[2mm] \dfrac{50}{43}+\dfrac{36}{43}=2\end{cases}$$

Las soluciones son $x_1=10$ e $y_1=9$; y $x_2=\frac{43}{5}$ e $y_2=\frac{43}{4}$.

d) $x-2y=10\to x=2y+10$

$$\frac{xy+3}{y}=3\xrightarrow{x=2y+10}2y^2+10y+3=3y\to 2y^2+7y+3=0\to y=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot 2\cdot 3}}{2\cdot 2}\to\begin{cases}y_1=-\dfrac{1}{2}\\ y_2=-3\end{cases}$$

$$x=2y+10\xrightarrow{y=\frac{-1}{2}}x_1=9$$

$$x=2y+10\xrightarrow{y_2=-3}x_2=4$$

Como es un sistema con ecuaciones racionales, comprobamos las soluciones obtenidas:

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{xy+3}{y}=3\\[2mm] x-2y=10\end{array}\right\}\xrightarrow{x_1=9,\,y_1=\frac{-1}{2}}\begin{cases}\dfrac{-\frac{9}{2}+3}{-\frac{1}{2}}=3\\[2mm] 9+1=10\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{xy+3}{y}=3\\[2mm] x-2y=10\end{array}\right\}\xrightarrow{x_2=4,\,y_2=-3}\begin{cases}\dfrac{-12+3}{-3}=3\\[2mm] 4+6=10\end{cases}$$

Las soluciones son $x_1=9$ e $y_1=-\frac{1}{2}$; y $x_2=4$ e $y_2=-3$.

e) $x+y=-1 \rightarrow x=-y-1$

$$x^2+y^2=13 \xrightarrow{x=-1-y} (-1-y)^2+y^2=13 \rightarrow 2y^2+2y-12=0$$

$$\rightarrow y=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 2\cdot(-12)}}{2\cdot 2} \rightarrow \begin{cases} y_1=2 \\ y_2=-3 \end{cases}$$

$$x=-y-1 \xrightarrow{y_1=2} x=-3$$

$$x=-y-1 \xrightarrow{y_2=-3} x=2$$

Las soluciones son:

$x_1=-3$ e $y_1=2$ $\qquad$ $x_2=2$ e $y_2=-3$.

f) $x-y=1 \rightarrow x=y+1$

$$x^2+2xy+y^2=9 \xrightarrow{x=y+1} (y+1)^2+2y^2+2y+y^2=9 \rightarrow 4y^2+4y-8=0$$

$$\rightarrow y=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 4\cdot(-8)}}{2\cdot 4} \rightarrow \begin{cases} y_1=1 \\ y_2=-2 \end{cases}$$

$$x=y+1 \xrightarrow{y_1=1} x=2$$

$$x=y+1 \xrightarrow{y_2=-2} x=-1$$

Las soluciones son:

$x_1=2$ e $y_1=1$ $\qquad$ $x_2=-1$ e $y_2=-2$.

g) $y+1=4x \rightarrow y=4x-1$

$$\frac{1}{y-x}+\frac{3}{10}=\frac{1}{x} \xrightarrow{y=4x-1} \frac{1}{3x-1}+\frac{3}{10}=\frac{1}{x} \rightarrow \frac{10x+9x^2-3x}{10x(3x-1)}=\frac{30x-10}{10x(3x-1)} \rightarrow$$

$$9x^2-23x+10=0 \rightarrow x=\frac{23\pm\sqrt{(-23)^2-4\cdot 9\cdot 10}}{2\cdot 9} \rightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=\dfrac{5}{9} \end{cases}$$

$$y=4x-1 \xrightarrow{x_1=2} y_1=7$$

$$y=4x-1 \xrightarrow{x_2=\frac{5}{9}} y_2=\frac{11}{9}$$

Como es un sistema con ecuaciones racionales, comprobamos las soluciones obtenidas.

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{1}{y-x}+\dfrac{3}{10}=\dfrac{1}{x} \\ y+1=4x \end{array}\right\} \xrightarrow{x_1=2,\, y_1=7} \begin{cases} \dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{10}=\dfrac{1}{2} \\ 7+1=4\cdot 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{1}{y-x}+\dfrac{3}{10}=\dfrac{1}{x} \\ y+1=4x \end{array}\right\} \xrightarrow{x_2=\frac{5}{9},\, y_2=\frac{11}{9}} \begin{cases} \dfrac{1}{\frac{11}{9}-\frac{5}{9}}+\dfrac{3}{10}=\dfrac{9}{6}+\dfrac{3}{10}=\dfrac{45+9}{30}=\dfrac{9}{5} \\ \dfrac{11}{9}+1=\dfrac{20}{9} \end{cases}$$

Las soluciones son:

$x_1=2$ e $y_1=7$ $\qquad$ $x_2=\frac{5}{9}$ e $y_2=\frac{11}{9}$.

h) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{5}{y+1}=6\\ \dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{3}=\dfrac{17}{12}\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{5}{y+1}=6\\ 3x-4y=17\end{array}\right\} \rightarrow x=\dfrac{17+4y}{3}$

$$\frac{2}{\frac{17+4y}{3}-1}-\frac{5}{y+1}=6 \rightarrow \frac{3}{7+2y}-\frac{5}{y+1}=6 \rightarrow 3(y+1)-5(7+2y)=6(7+2y)(y+1) \rightarrow 12y^2+61y+74=0 \rightarrow$$

$$y=\frac{-61\pm\sqrt{61^2-4\cdot12\cdot74}}{2\cdot12} \rightarrow \begin{cases} y_1=-2\\ y_2=-\dfrac{37}{12}\end{cases}$$

$$x=\frac{17+4(-2)}{3}=3 \qquad\qquad x=\frac{17+4\left(-\frac{37}{12}\right)}{3}=\frac{14}{9}$$

Como es un sistema con ecuaciones racionales, comprobamos las soluciones obtenidas.

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{5}{y+1}=6\\ \dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{3}=\dfrac{17}{12}\end{array}\right\} \xrightarrow{x=3,\, y=-2} \begin{cases}\dfrac{2}{3-1}-\dfrac{5}{-2+1}=6\\ \dfrac{3}{4}-\dfrac{-2}{3}=\dfrac{17}{12}\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{5}{y+1}=6\\ \dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{3}=\dfrac{17}{12}\end{array}\right\} \xrightarrow{x=14/9,\, y=-37/12} \begin{cases}\dfrac{2}{\frac{14}{9}-1}-\dfrac{5}{-\frac{37}{12}+1}=6\\ \dfrac{\frac{14}{9}}{4}-\dfrac{-\frac{37}{12}}{3}=\dfrac{17}{12}\end{cases}$$

Las soluciones son $x_1=3$ e $y_1=-2$; y $x_2=\dfrac{14}{9}$ e $y_2=-\dfrac{37}{12}$.

56. Página 106

a) $x+y^2=3 \rightarrow x=3-y^2$

$$x^2-y=3 \xrightarrow{x=3-y^2} (3-y^2)^2-y=3 \rightarrow 9+y^4-6y^2-y=3 \rightarrow y^4-6y^2-y+6=0$$

Descomponemos por Ruffini:

	1	0	−6	−1	6
1		1	1	−5	−6
	1	1	−5	−6	0
−2		−2	2	6	
	1	−1	−3	0	

$$y^4-6y^2-y+6=(y-1)(y+2)(y^2-y-3)=0 \rightarrow y_1=1,\ y_2=-2$$

$$y^2-y-3=0 \rightarrow y=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2} \rightarrow \begin{cases} y_3=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\\ y_4=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\end{cases}$$

$$x=3-y^2 \xrightarrow{y_1=1} x_1=2 \qquad\qquad x=3-y^2 \xrightarrow{y_2=-2} x_2=-1$$

$$x=3-y^2 \xrightarrow{y_3=\frac{1-\sqrt{13}}{2}} x_3=3-\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^2=\frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{1}{2} \qquad x=3-y^2 \xrightarrow{y_4=\frac{1+\sqrt{31}}{2}} x_4=3-\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^2=-\frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{1}{2}$$

Tenemos cuatro soluciones:

$$x_1=2,\ y_1=1 \qquad x_2=-1,\ y_2=-2 \qquad x_3=\frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{1}{2},\ y_3=\frac{1-\sqrt{13}}{2} \qquad x_4=-\frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{1}{2},\ y_4=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

b) $\frac{x}{5} - y^2 = 0 \rightarrow x = 5y^2$

$xy - 5 = 0 \xrightarrow{x=5y^2} 5(y^3 - 1) = 0 \rightarrow y^3 = 1 \rightarrow y = 1$ $\qquad x = 5y^2 \xrightarrow{y=1} x = 5$

La solución es $x = 5$ e $y = 1$.

c) $x - y - 10 = 0 \rightarrow x = y + 10$

$$\frac{1}{x+y} + \frac{x}{y} = -1 \xrightarrow{x=y+10} \frac{1}{2y+10} + \frac{y+10}{y} = -1 \rightarrow \frac{y + (y+10)(2y+10)}{y(2y+10)} = \frac{-y(2y+10)}{y(2y+10)} \rightarrow$$

$$2y^2 + 31y + 100 = -2y^2 - 10y \rightarrow 4y^2 + 41y + 100 = 0 \rightarrow y = \frac{-41 \pm \sqrt{41^2 - 4 \cdot 4 \cdot 100}}{2 \cdot 4} \rightarrow \begin{cases} y_1 = -4 \\ y_2 = -\frac{25}{4} \end{cases}$$

$x = y + 10 \xrightarrow{y_1=-4} x_1 = 6$ $\qquad x = y + 10 \xrightarrow{y_2=-\frac{25}{4}} x_2 = \frac{15}{4}$

Como es un sistema con ecuaciones racionales, comprobamos las soluciones obtenidas.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x+y} + \frac{x}{y} = -1 \\ x - y - 10 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{x_1=6,\, y_1=-4} \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{6}{4} = -1 \\ 6 + 4 - 10 = 0 \end{cases} \qquad \left.\begin{array}{l} \frac{1}{x+y} + \frac{x}{y} = -1 \\ x - y - 10 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{x_2=\frac{15}{4},\, y_2=-\frac{25}{4}} \begin{cases} \frac{1}{-\frac{10}{4}} + \frac{\frac{15}{4}}{\frac{25}{4}} = -\frac{2}{5} - \frac{3}{5} = -1 \\ \frac{15}{4} + \frac{25}{4} - 10 = \frac{40}{4} - 10 = 0 \end{cases}$$

Las soluciones son $x_1 = 6$ e $y_1 = -4$; y $x_2 = \frac{15}{4}$ e $y_2 = -\frac{25}{4}$.

d) $(x+1) \cdot y = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$

$(x+y)(x-1) = -2 \xrightarrow{x=-1} (y-1) \cdot (-2) = -2 \rightarrow y - 1 = 1 \rightarrow y = 2$

$(x+y)(x-1) = -2 \xrightarrow{y=0} x^2 - x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} \rightarrow$ No tiene solución.

Como aparecen funciones racionales comprobamos la solución.

$$\left.\begin{array}{r} (x+y) \cdot (x-1) = -2 \\ (x+1) \cdot y = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{x=-1,\, y=2} \begin{cases} (1) \cdot (-1-1) = -2 \\ (-1+1) \cdot 2 = 0 \end{cases}$$

La solución es $x = -1$ e $y = 2$.

e) $2xy = 4 \rightarrow x = \frac{2}{y}$

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 2 \xrightarrow{x=\frac{2}{y}} y + \frac{1}{y} = 2 \rightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \rightarrow y = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1}}{2} = 1$$

$x = \frac{2}{y} \xrightarrow{y=1} x = 2$

Comprobamos las soluciones.

$$\left.\begin{array}{r} \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 2 \\ 2xy = 4 \end{array}\right\} \xrightarrow{x=2,\, y=1} \begin{cases} \frac{2}{2} + \frac{1}{1} = 2 \\ 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \end{cases}$$

La solución es $x = 2$ e $y = 1$.

f) $\left.\begin{array}{l}\dfrac{2}{y-x}+x=4\\ \dfrac{1}{x+1}-y=\dfrac{-19}{4}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\rightarrow \dfrac{2}{y-x}=4-x\rightarrow 2=(4-x)(y-x)\\ \rightarrow \dfrac{1}{x+1}=\dfrac{-19+4y}{4}\rightarrow 4=(x+1)(-19+4y)\end{array}\Bigg\}\rightarrow \left.\begin{array}{l}x^2-4x-xy+4y=2\\ 19x-4y-4xy+23=0\end{array}\right\}$

$$19x-4y-4xy+23=0\rightarrow x(19-4y)=4y-3\rightarrow x=\frac{4y-23}{19-4y}$$

$$x^2-4x-xy+4y-2=0\xrightarrow{x=\frac{4y-23}{19-4y}}\left(\frac{4y-23}{19-4y}\right)^2-\frac{16y-92}{19-4y}-\frac{4y^2-23y}{19-4y}+4y-2=0\rightarrow$$

$$\frac{(4y-23)^2+(19-4y)(92+7y-4y^2)+(19-4y)^2(4y-2)}{(19-4y)^2}=0\rightarrow 80y^3-728y^2+1329y+1555=0$$

Resolvemos por Ruffini:

	80	−728	1329	1555
5		400	−1640	−1555
	80	−328	−311	0

$$(y-5)(80y^2-328y-311)=0\rightarrow y_1=5$$

$$y=\frac{328\pm\sqrt{(-328)^2-4\cdot 80\cdot(-311)}}{2\cdot 80}\rightarrow\begin{cases}y_2=\dfrac{41+2\sqrt{809}}{20}\\ y_3=\dfrac{41-2\sqrt{809}}{20}\end{cases}$$

$$x=\frac{4y-23}{19-4y}\xrightarrow{y_1=5}x_1=\frac{-3}{-1}=3$$

$$x=\frac{4y-23}{19-4y}\xrightarrow{y_2=\frac{41+2\sqrt{809}}{20}}x_2=\frac{\dfrac{41+2\sqrt{809}-115}{5}}{\dfrac{95-41-2\sqrt{809}}{5}}=\frac{\sqrt{809}-37}{27-\sqrt{809}}$$

$$x=\frac{4y-23}{19-4y}\xrightarrow{y_3=\frac{41-2\sqrt{809}}{20}}x_3=\frac{\dfrac{41-2\sqrt{809}-115}{5}}{\dfrac{95-41+2\sqrt{809}}{5}}=-\frac{\sqrt{809}+37}{27+\sqrt{809}}$$

Como aparecen ecuaciones racionales comprobamos las soluciones.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{2}{y-x}+x=4\\ \dfrac{1}{x+1}-y=\dfrac{-19}{4}\end{array}\right\}\xrightarrow{x_1=3,\,y_1=5}\begin{cases}\dfrac{2}{2}+3=4\\ \dfrac{1}{4}-5=\dfrac{-19}{4}\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{2}{y-x}+x=4\\ \dfrac{1}{x+1}-y=\dfrac{-19}{4}\end{array}\right\}\xrightarrow{x_2=\frac{\sqrt{809}-37}{27-\sqrt{809}},\,y_2=\frac{41+2\sqrt{809}}{20}}\begin{cases}\dfrac{-80}{13+\sqrt{809}}+\dfrac{\sqrt{809}-37}{27-\sqrt{809}}=4\\ \dfrac{8}{27+\sqrt{809}}-\dfrac{41+2\sqrt{809}}{20}=\dfrac{-19}{4}\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{2}{y-x}+x=4\\ \dfrac{1}{x+1}-y=\dfrac{-19}{4}\end{array}\right\}\xrightarrow{x_3=-\frac{\sqrt{809}+37}{27+\sqrt{809}},\,y_3=\frac{41-2\sqrt{809}}{20}}\begin{cases}\dfrac{80}{-13+\sqrt{809}}-\dfrac{\sqrt{809}+37}{27+\sqrt{809}}=4\\ \dfrac{8}{27-\sqrt{809}}-\dfrac{41-2\sqrt{809}}{20}=\dfrac{-19}{4}\end{cases}$$

Las soluciones son:

$x_1=3,\ y_1=5$ $\qquad x_2=\dfrac{\sqrt{809}-37}{27-\sqrt{809}},\ y_2=\dfrac{41+2\sqrt{809}}{20}$ $\qquad x_3=-\dfrac{\sqrt{809}+37}{27+\sqrt{809}},\ y_3=\dfrac{41-2\sqrt{809}}{20}$

57. Página 106

a) $\frac{y}{x}=2 \rightarrow y=2x$

$\sqrt{y+1}=x-1 \xrightarrow{y=2x} \sqrt{2x+1}=x-1 \rightarrow 2x+1=x^2-2x+1 \rightarrow x^2-4x=0 \rightarrow x(x-4)=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=4 \end{cases}$

$y=2x \xrightarrow{x_1=0} y=0 \qquad y=2x \xrightarrow{x_2=4} y=8$

Como aparecen radicales, comprobamos las soluciones:

$\left.\begin{array}{r} \sqrt{y+1}=x-1 \\ \frac{y}{x}=2 \end{array}\right\} \xrightarrow{x_1=0,y_1=0} \begin{cases} \sqrt{1}=1\neq -1 \\ \frac{0}{0} \end{cases} \rightarrow$ No es solución.

$\begin{cases} \sqrt{y+1}=x-1 \\ \frac{y}{x}=2 \end{cases} \xrightarrow{x_2=4,y_2=8} \begin{cases} \sqrt{9}=3 \\ \frac{8}{4}=2 \end{cases} \rightarrow$ Es solución.

La solución es $x=4$ e $y=8$.

b) $\sqrt{x+y+1}=x \xrightarrow{y=2x-1} \sqrt{3x}=x \rightarrow 3x=x^2 \rightarrow x^2-3x=0 \rightarrow x(x-3)=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=3 \end{cases}$

$y=2x-1 \xrightarrow{x_1=0} y_1=-1 \qquad y=2x-1 \xrightarrow{x_2=3} y_2=5$

Comprobamos las soluciones.

$\left.\begin{array}{r} \sqrt{x+y+1}=x \\ y=2x-1 \end{array}\right\} \xrightarrow{x_1=0,y_1=-1} \begin{cases} \sqrt{0}=0 \\ -1=-1 \end{cases} \rightarrow$ Es solución.

$\left.\begin{array}{r} \sqrt{x+y+1}=x \\ y=2x-1 \end{array}\right\} \xrightarrow{x_2=3,y_2=5} \begin{cases} \sqrt{9}=3 \\ 5=6-1 \end{cases} \rightarrow$ Es solución.

Las soluciones son $x_1=0$ e $y_1=-1$; y $x_2=3$ e $y_2=5$.

c) $\left.\begin{array}{r} \sqrt{x+2y}=2 \\ \sqrt{5y+1}=4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=4 \\ 5y+1=16 \end{array}\right\}$

$5y+1=16 \rightarrow y=3 \qquad x+2y=4 \xrightarrow{y=3} x=-2$

Comprobamos la solución.

$\left.\begin{array}{r} \sqrt{x+2y}=2 \\ \sqrt{5y+1}=4 \end{array}\right\} \xrightarrow{x=-2,y=3} \begin{cases} \sqrt{-2+6}=2 \\ \sqrt{15+1}=4 \end{cases}$

La solución es $x=-2$ e $y=3$.

d) $\frac{x}{y-2}=2 \rightarrow x=2y-4$

$x+\sqrt{3y+4}=15 \xrightarrow{x=2y-4} 2y-4+\sqrt{3y+4}=15 \rightarrow \sqrt{3y+4}=19-2y \rightarrow 3y+4=361-76y+4y^2 \rightarrow$

$4y^2-79y+357=0 \rightarrow y=\frac{79\pm\sqrt{(-79)^2-4\cdot 4\cdot 357}}{2\cdot 4} \rightarrow \begin{cases} y_1=\frac{51}{4} \\ y_2=7 \end{cases}$

$x=2y-4 \xrightarrow{y_1=\frac{51}{4}} x_1=\frac{51}{2}-4=\frac{43}{2} \qquad x=2x-4 \xrightarrow{y_2=7} x_2=14-4=10$

Comprobamos las soluciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+\sqrt{3y+4}=15 \\ \dfrac{x}{y-2}=2 \end{array}\right\} \xrightarrow{x_1=\frac{43}{2},\, y_2=\frac{51}{4}} \left\{\begin{array}{l} \dfrac{43}{2}+\sqrt{\dfrac{153}{4}+4}=\dfrac{43}{2}+\dfrac{13}{2}=13\neq 15 \\ \dfrac{\frac{43}{2}}{\frac{51}{4}-2}=\dfrac{86}{43}=2 \end{array}\right. \rightarrow \text{No es solución.}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+\sqrt{3y+4}=15 \\ \dfrac{x}{y-2}=2 \end{array}\right\} \xrightarrow{x_2=10,\, y_2=7} \left\{\begin{array}{l} 10+\sqrt{21+4}=10+5=15 \\ \dfrac{10}{7-2}=2 \end{array}\right. \rightarrow \text{Es solución.}$$

La solución es $x = 10$ e $y = 7$.

e) $$\left.\begin{array}{r} \sqrt{y}-x=5 \\ \sqrt{26+x}-y=-1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} y=(x+5)^2 \rightarrow y=x^2+10x+25 \\ y=\sqrt{26+x}+1 \end{array}\right\}$$

$$x^2+10x+25=\sqrt{26+x}+1 \rightarrow (x^2+10x+24)^2=26+x \rightarrow x^4+20x^3+148x^2+479x+550=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=-7{,}31 \\ x_2=-2{,}58 \end{cases}$$

$$y=(x+5)^2 \xrightarrow{x_1=-7{,}31} y_1=5{,}34 \qquad y=(x+5)^2 \xrightarrow{x_2=-2{,}58} y_2=5{,}86$$

Las soluciones son $x_1=-7{,}31$ e $y_1=5{,}34$ y $x_2=-2{,}58$ e $y_2=5{,}86$.

f) $$\left.\begin{array}{r} \dfrac{y}{3}+\sqrt{12-x}=9 \\ \sqrt{y-x}=5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 12-x=\left(9-\dfrac{y}{3}\right)^2 \\ y-x=25 \end{array}\right\}$$

$$25=y-x \rightarrow y=x+25$$

$$12-x=\left(9-\frac{y}{3}\right)^2 \xrightarrow{y=x+25} 12-x=\left(9-\frac{x+25}{3}\right)^2 \rightarrow 12-x=\left(\frac{2-x}{3}\right)^2 \rightarrow 108-9x=4-4x+x^2 \rightarrow$$

$$x^2+5x-104=0 \rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2+4\cdot 104}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1=8 \\ x_2=-13 \end{cases}$$

$$y=x+25 \xrightarrow{x_1=8} y_1=33 \qquad y=x+25 \xrightarrow{x_2=-13} y_2=12$$

Comprobamos las soluciones.

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{y}{3}+\sqrt{12-x}=9 \\ \sqrt{y-x}=5 \end{array}\right\} \xrightarrow{x_1=8,\, y_1=33} \left\{\begin{array}{l} \dfrac{33}{3}+\sqrt{12-8}=11+2=13\neq 9 \\ 5=\sqrt{33-8} \end{array}\right. \rightarrow \text{No es solución.}$$

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{y}{3}+\sqrt{12-x}=9 \\ \sqrt{y-x}=5 \end{array}\right\} \xrightarrow{x_2=-13,\, y_2=12} \left\{\begin{array}{l} \dfrac{12}{3}+\sqrt{12+13}=4+5=9 \\ 5=\sqrt{12+13} \end{array}\right. \rightarrow \text{Es solución.}$$

La solución es $x = -13$ e $y = 12$.

59. Página 107

a) $$\left.\begin{array}{r} 2x^2-y^2=14 \\ 3y^2-x^2=3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \xrightarrow{\cdot 2} \end{array} + \begin{array}{r} \cancel{2x^2}-y^2=14 \\ -\cancel{2x^2}+6y^2=6 \\ \hline 5y^2=20 \rightarrow y^2=4 \rightarrow y=\pm 2 \end{array}$$

$$3y^2-x^2=3 \xrightarrow{y_1=2} x^2=9 \rightarrow x=\pm 3 \qquad 3y^2-x^2=3 \xrightarrow{y_2=-2} x^2=9 \rightarrow x=\pm 3$$

Las soluciones son $x_1 = 3$ e $y_1 = 2$; $x_2 = 3$ e $y_2 = -2$; $x_3 = -3$ e $y_3 = 2$; y $x_4 = -3$ e $y_4 = -2$.

b) $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=29 \\ 3y^2-2x^2=67 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 2} \\ \longrightarrow \end{array} + \begin{array}{r} \cancel{2x^2}+2y^2=58 \\ -\cancel{2x^2}+3y^2=67 \\ \hline 5y^2=125 \end{array} \rightarrow y^2=25 \rightarrow y=\pm 5$

$x^2+y^2=29 \xrightarrow{y_1=5} x^2=4 \rightarrow x=\pm 2$

$x^2+y^2=29 \xrightarrow{y_2=-5} x^2=4 \rightarrow x=\pm 2$

Las soluciones son $x_1=2$ e $y_1=5$; $x_2=2$ e $y_2=-5$; $x_3=-2$ e $y_3=5$; y $x_4=-2$ e $y_4=-5$.

c) $\left.\begin{array}{r} 3(x^2+y^2)=102 \\ x^2+41=2y^2 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \xrightarrow{\cdot 3} \end{array} - \begin{array}{r} \cancel{3x^2}+3y^2=102 \\ \cancel{3x^2}-6y^2=-123 \\ \hline 9y^2=225 \end{array} \rightarrow y^2=25 \rightarrow y=\pm 5$

$x^2+41=2y^2 \xrightarrow{y_1=5} x^2=9 \rightarrow x=\pm 3$

$x^2+41=2y^2 \xrightarrow{y_2=-5} x^2=9 \rightarrow x=\pm 3$

Las soluciones son $x_1=3$ e $y_1=5$; $x_2=3$ e $y_2=-5$; $x_3=-3$ e $y_3=5$; y $x_4=-3$ e $y_4=-5$.

d) $\left.\begin{array}{r} y^2=x^2+24 \\ 5x^2=3y^2-22 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 3} \\ \longrightarrow \end{array} + \begin{array}{r} -3x^2+\cancel{3y^2}=72 \\ 5x^2-\cancel{3y^2}=-22 \\ \hline 2x^2 \qquad =50 \end{array} \rightarrow x^2=25 \rightarrow x=\pm 5$

$y^2=x^2+24 \xrightarrow{x_1=5} y^2=49 \rightarrow y=\pm 7$

$y^2=x^2+24 \xrightarrow{x_2=-5} y^2=49 \rightarrow y=\pm 7$

Las soluciones son $x_1=5$ e $y_1=7$; $x_2=5$ e $y_2=-7$; $x_3=-5$ e $y_3=7$; y $x_4=-5$ e $y_4=-7$.

e) $\left.\begin{array}{r} x^2=y^2-x^2+28 \\ 25x^2=16y^2 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 16} \\ \longrightarrow \end{array} - \begin{array}{r} 32x^2-\cancel{16y^2}=448 \\ 25x^2-\cancel{16y^2}=0 \\ \hline 7x^2 \qquad =448 \end{array} \rightarrow x^2=64 \rightarrow x=\pm 8$

$25x^2=16y^2 \xrightarrow{x_1=8} y^2=100 \rightarrow y=\pm 10$

$25x^2=16y^2 \xrightarrow{x_2=-8} y^2=100 \rightarrow y=\pm 10$

Las soluciones son $x_1=8$ e $y_1=10$; $x_2=8$ e $y_2=-10$; $x_3=-8$ e $y_3=10$; y $x_4=-8$ e $y_4=-10$.

f) $\left.\begin{array}{r} y^2-9x^2=7 \\ y^2+3x^2=19 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} - \begin{array}{r} \cancel{y^2}-9x^2=7 \\ \cancel{y^2}+3x^2=19 \\ \hline -12x^2=-12 \end{array} \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=\pm 1$

$y^2+3x^2=19 \xrightarrow{x_1=1} y^2=16 \rightarrow y=\pm 4$

$y^2+3x^2=19 \xrightarrow{x_2=-1} y^2=16 \rightarrow y=\pm 4$

Las soluciones son $x_1=1$ e $y_1=4$; $x_2=1$ e $y_2=-4$; $x_3=-1$ e $y_3=4$; y $x_4=-1$ e $y_4=-4$.

60. Página 107

a) $\left.\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{6}=2\\ \dfrac{x^2-y^2}{4}=-2\end{array}\right\}\begin{array}{l}\xrightarrow{\cdot 6}\\ \xrightarrow{\cdot 4}\end{array}\ +\begin{array}{l}3x^2+\cancel{y^2}=12\\ \underline{x^2-\cancel{y^2}=-8}\\ 4x^2\qquad =4\to x^2=1\to x=\pm 1\end{array}$

$x^2-y^2=-8\xrightarrow{x_1=1}y^2=9\to y=\pm 3$

$x^2-y^2=-8\xrightarrow{x_2=-1}y^2=9\to y=\pm 3$

Las soluciones son $x_1=1$ e $y_1=3$; $x_2=1$ e $y_2=-3$; $x_3=-1$ e $y_3=3$; y $x_4=-1$ e $y_4=-3$.

b) $\left.\begin{array}{l}\dfrac{2x^2+y^2}{6}=\dfrac{34}{6}\\ 2y^2-3x^2=-3\end{array}\right\}\begin{array}{l}\xrightarrow{\cdot 12}\\ \longrightarrow\end{array}\ -\begin{array}{l}4x^2+\cancel{2y^2}=68\\ \underline{-3x^2+\cancel{2y^2}=-3}\\ 7x^2\qquad =71\to x^2=\dfrac{71}{7}\to x=\pm\sqrt{\dfrac{71}{7}}\end{array}$

$2x^2+y^2=34\xrightarrow{x_1=\sqrt{\frac{71}{7}}}y^2=\dfrac{96}{7}\to y=\pm 4\sqrt{\dfrac{6}{7}}$

$2x^2+y^2=34\xrightarrow{x_2=-\sqrt{\frac{71}{7}}}y^2=\dfrac{96}{7}\to y=\pm 4\sqrt{\dfrac{6}{7}}$

Las soluciones son $x_1=\sqrt{\dfrac{71}{7}}$ e $y_1=4\sqrt{\dfrac{6}{7}}$; $x_2=-\sqrt{\dfrac{71}{7}}$ e $y_2=4\sqrt{\dfrac{6}{7}}$; $x_3=\sqrt{\dfrac{71}{7}}$ e $y_3=-4\sqrt{\dfrac{6}{7}}$; y $x_4=-\sqrt{\dfrac{71}{7}}$ e $y_4=-4\sqrt{\dfrac{6}{7}}$.

c) $\left.\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{2}=28\\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{3}=\dfrac{134}{3}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\xrightarrow{\cdot 30}\\ \xrightarrow{\cdot 12}\end{array}\ -\begin{array}{l}\cancel{6x^2}+15y^2=840\\ \underline{\cancel{6x^2}-4y^2=536}\\ 19y^2=304\to y^2=16\to y=\pm 4\end{array}$

$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{3}=\dfrac{134}{3}\longrightarrow 3x^2-2y^2=268\xrightarrow{y_1=4}3x^2=300\to x=\pm 10$

$3x^2-2y^2=268\xrightarrow{y_2=-4}3x^2=300\to x=\pm 10$

Las soluciones son $x_1=10$ e $y_1=4$; $x_2=10$ e $y_2=-4$; $x_3=-10$ e $y_3=4$; y $x_4=-10$ e $y_4=-4$.

d) $\left.\begin{array}{l}x^2-(y^2+3)=-30\\ 2(x^2+y^2)=3y^2-18\end{array}\right\}\begin{array}{l}\longrightarrow\\ \longrightarrow\end{array}\ -\begin{array}{l}x^2-\cancel{y^2}=-27\\ \underline{2x^2-\cancel{y^2}=-18}\\ -x^2\qquad =-9\to x=\pm 3\end{array}$

$x^2-y^2=-27\xrightarrow{x_1=3}-y^2=36\to y=\pm 6$

$x^2-y^2=-27\xrightarrow{x_2=-3}-y^2=36\to y=\pm 6$

Las soluciones son $x_1=3$ e $y_1=6$; $x_2=3$ e $y_2=-6$; $x_3=-3$ e $y_3=6$; y $x_4=-3$ e $y_4=-6$.

e) $$\left.\begin{array}{r}\dfrac{y^2-x^2}{9}-\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{21}{2}\\ x^2+\dfrac{y^2}{10}=11\end{array}\right\}\begin{array}{l}\xrightarrow{\cdot 18}\\ \\ \xrightarrow{\cdot 20}\end{array}\begin{array}{r}-11x^2+\cancel{2y^2}=189\\ -\quad\quad\quad\quad\\ \underline{20x^2+\cancel{2y^2}=220}\\ -31x^2\quad\quad=-31\rightarrow x=\pm 1\end{array}$$

$$x^2+\frac{y^2}{10}=11\xrightarrow{x_1=1}y^2=100\rightarrow y=\pm 10$$

$$x^2+\frac{y^2}{10}=11\xrightarrow{x_2=-1}y^2=100\rightarrow y=\pm 10$$

Las soluciones son $x_1 = 1$ e $y_1 = 10$; $x_2 = 1$ e $y_2 = -10$; $x_3 = -1$ e $y_3 = 10$; y $x_4 = -1$ e $y_4 = -10$.

f) $$\left.\begin{array}{r}y^2-5x^2=1\\ \dfrac{7x^2}{2}+\dfrac{5y^2}{3}=191\end{array}\right\}\begin{array}{l}\xrightarrow{\cdot 10}\\ \\ \xrightarrow{\cdot 6}\end{array}\begin{array}{r}-50x^2+\cancel{10y^2}=10\\ -\quad\quad\quad\quad\\ \underline{21x^2+\cancel{10y^2}=1146}\\ -71x^2\quad\quad=-1136\rightarrow x^2=16\rightarrow x=\pm 4\end{array}$$

$$y^2-5x^2=1\xrightarrow{x_1=4}y^2=81\rightarrow y=\pm 9$$

$$y^2-5x^2=1\xrightarrow{x_2=-4}y^2=81\rightarrow y=\pm 9$$

Las soluciones son $x_1 = 4$ e $y_1 = 9$; $x_2 = 4$ e $y_2 = -9$; $x_3 = -4$ e $y_3 = 9$; y $x_4 = -4$ e $y_4 = -9$.

61. Página 107

a) $\left.\begin{array}{l}x+5\geq 0\rightarrow x\geq -5\\ 3x\leq 6\rightarrow x\leq 2\end{array}\right\}\rightarrow$ La solución es el intervalo $[-5,+\infty)\cap(-\infty,2]=[-5,2]$.

b) $\left.\begin{array}{l}x-4<0\rightarrow x<4\\ 2x\leq 6\rightarrow x\leq 3\end{array}\right\}\rightarrow$ La solución es el intervalo $(-\infty,4)\cap(-\infty,3]=(-\infty,3]$.

c) $\left.\begin{array}{l}2x-4<0\rightarrow 2x<4\rightarrow x<2\\ x\geq 1\end{array}\right\}\rightarrow$ La solución es el intervalo $(-\infty,2)\cap[1,+\infty)=[1,2)$.

d) $\left.\begin{array}{l}-x+4\leq -2\rightarrow x\geq 6\\ 3x>9\rightarrow x>3\end{array}\right\}\rightarrow$ La solución es el intervalo $[6,+\infty)\cap(3,+\infty)=[6,+\infty)$.

e) $\left.\begin{array}{l}x+3\leq 2\rightarrow x\leq -1\\ 5x>10\rightarrow x>2\end{array}\right\}\rightarrow$ La solución es el intervalo $(-\infty,-1]\cap(2,+\infty)=\varnothing\rightarrow$ No tiene solución.

f) $\left.\begin{array}{l}-2x-4<0\rightarrow 2x>-4\rightarrow x>-2\\ 3-x\geq 2\rightarrow x\leq 1\end{array}\right\}\rightarrow$ La solución es el intervalo $(-2,+\infty)\cap(-\infty,-1]=(-2,1]$.

62. Página 107

a) $\left.\begin{array}{l}2(x-3)<x\rightarrow 2x-6<x\rightarrow x<6\\ (4-x)3\geq 5\rightarrow 12-3x\geq 5\rightarrow 3x\leq 7\rightarrow x\leq \dfrac{7}{3}\end{array}\right\}\rightarrow$ La solución es el intervalo $(-\infty,6)\cap\left(-\infty,\dfrac{7}{3}\right]=\left(-\infty,\dfrac{7}{3}\right]$.

b) $\left.\begin{array}{l}-x+3<5x+9\rightarrow -6x<6\rightarrow x>-1\\ 3-4x\leq 15\rightarrow -4x\leq 12\rightarrow x\geq -3\end{array}\right\}\rightarrow$ La solución es el intervalo $(-1,+\infty)\cap[-3,+\infty)=(-1,+\infty)$.

c) $\left.\begin{array}{l} x-4(1-x)<0 \to 5x-4<0 \to x<\frac{4}{5} \\ 2x \geq 5-(x+6) \to 3x \geq -1 \to x \geq -\frac{1}{3} \end{array}\right\} \to$ La solución es el intervalo $\left(-\infty, \frac{4}{5}\right) \cap \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right) = \left[-\frac{1}{3}, \frac{4}{5}\right)$.

d) $\left.\begin{array}{l} 5(x-2)-10 \leq 0 \to 5x \leq 20 \to x \leq 4 \\ -3x+2(x+1)<0 \to -x+2<0 \to x>2 \end{array}\right\} \to$ La solución es el intervalo $(-\infty, 4] \cap (2, +\infty) = (2, 4]$.

e) $\left.\begin{array}{l} -3(x-1)+8 \leq 11 \to -3x+11 \leq 11 \to -3x \leq 0 \to x \geq 0 \\ x+4(2-x)>2 \to -3x>-6 \to x<2 \end{array}\right\} \to$ La solución es el intervalo $[0, +\infty) \cap (-\infty, 2) = [0, 2)$.

f) $\left.\begin{array}{l} 6x+(x+2)(-1)<3 \to 5x<5 \to x<1 \\ -4-2(x+6)>-8 \to 2x<-8 \to x<-4 \end{array}\right\} \to$ La solución es el intervalo $(-\infty, 1) \cap (-\infty, -4) = (-\infty, -4)$.

63. Página 107

a) $\left.\begin{array}{l} \frac{2x}{3}<x+4 \to 2x<3x+12 \to x>-12 \\ 7-\frac{4x}{5} \geq 1 \to 35-4x \geq 5 \to 4x \leq 30 \to x \leq \frac{15}{2} \end{array}\right\} \to$ La solución es el intervalo $(-12, +\infty) \cap \left(-\infty, \frac{15}{2}\right] = \left(-12, \frac{15}{2}\right]$.

b) $\frac{x+3}{2}-\frac{x-1}{5} \geq 1 \xrightarrow{\text{m.c.m.}(2,5)=10} 5x+15-2x+2 \geq 1 \to 3x \geq -16 \to x \geq -\frac{16}{3}$

$\frac{2x+1}{3}+\frac{x+2}{4}>3 \xrightarrow{\text{m.c.m.}(3,4)=12} 8x+4+3x+6>36 \to 11x>26 \to x>\frac{26}{11}$

La solución es el intervalo $\left[-\frac{16}{3}, +\infty\right) \cap \left(\frac{26}{11}, +\infty\right) = \left(\frac{26}{11}, +\infty\right)$.

c) $\frac{x-4}{5}-\frac{x}{2}<3 \xrightarrow{m.c.m.(5,2)=10} 2x-8-5x<30 \to -3x<38 \to x>-\frac{38}{3}$

$\frac{x}{3}+1 \geq x \to x+3 \geq 3x \to 2x \leq 3 \to x \leq \frac{3}{2}$

La solución es el intervalo $\left(-\frac{38}{3}, +\infty\right) \cap \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] = \left(-\frac{38}{3}, \frac{3}{2}\right]$.

d) $\frac{5-x}{4}+\frac{3+x}{2} \geq \frac{x}{6} \xrightarrow{\text{m.c.m.}(4,2,6)=12} 15-3x+18+6x \geq 2x \to x \geq -33$

$x-\frac{x}{2}-\frac{x}{3} \leq 0 \xrightarrow{\text{m.c.m.}(2,3)=6} 6x-3x-2x \leq 0 \to x \leq 0$

La solución es el intervalo $[-33, +\infty) \cap (-\infty, 0] = [-33, 0]$.

64. Página 107

a) $4 \cdot \left(\frac{x+1}{3}-x\right) \leq x+\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{m.c.m.}(3,2)=6} 8x+8-24x \leq 6x+3 \to -22x \leq -5 \to x \geq \frac{5}{22}$

$-3x+\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{x}{4}-2\right)>5 \cdot \left(\frac{x}{3}-1\right) \xrightarrow{\text{m.c.m.}(20,3)=60} -180x+9x-72>100x-300 \to -271x>-228 \to x<\frac{228}{271}$

La solución es el intervalo $\left[\frac{5}{22}, +\infty\right) \cap \left(-\infty, \frac{228}{271}\right] = \left[\frac{5}{22}, \frac{228}{271}\right)$.

b) $4x-\left(\frac{x+1}{5}-\frac{x-1}{2}\right)\le\frac{x}{8}\xrightarrow{\text{m.c.m.}(5,2,8)=40}160x-8x-8+20x-20\le 5x\rightarrow 167x\le 28\rightarrow x\le\frac{28}{167}$

$\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{x-2}{10}-\frac{x}{4}\right)<\frac{x}{6}\xrightarrow{\text{m.c.m.}(20,8,6)=120}30x-60-75x<20x\rightarrow -65x<60\rightarrow x>-\frac{12}{13}$

La solución es el intervalo $\left(-\infty,\frac{28}{167}\right]\cap\left(-\frac{12}{13},+\infty\right)=\left(-\frac{12}{13},\frac{28}{167}\right]$.

65. Página 108

a) $\left.\begin{array}{l}4x+3<10\rightarrow 4x<7\rightarrow x<\frac{7}{4}\\ 3x\ge -3\rightarrow x\ge -1\\ x-5\le 0\rightarrow x\le 5\end{array}\right\}\rightarrow$ La solución es el intervalo $\left(-\infty,\frac{7}{4}\right)\cap[-1,+\infty)\cap(-\infty,5]=\left[-1,\frac{7}{4}\right)$.

b) $(x+1)2\le x\rightarrow 2x+2\le x\rightarrow x\le -2$

$(x-3)(-1)\ge 4\rightarrow -x+3\ge 4\rightarrow x\le -1$

$6x+2\ge 2(x-5)\rightarrow 6x+2\ge 2x-10\rightarrow 4x\ge -12\rightarrow x\ge -3$

La solución es el intervalo $(-\infty,-2]\cap(-\infty,-1]\cap[-3,+\infty)=[-3,-2]$.

c) $\left.\begin{array}{l}4-3x>5\rightarrow 3x<-1\rightarrow x<-\frac{1}{3}\\ \frac{x}{10}\ge -1\rightarrow x\ge -10\\ x+5\ge 2x\rightarrow x\le 5\end{array}\right\}\rightarrow$ La solución es el intervalo $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cap[-10,+\infty)\cap(-\infty,5]=\left[-10,-\frac{1}{3}\right)$.

d) $2+5x\le 7\rightarrow 5x\le 5\rightarrow x\le 1$

$\frac{x}{4}+x\ge 5\rightarrow x+4x\ge 20\rightarrow 5x\ge 20\rightarrow x\ge 4$

$3x+1>1\rightarrow 3x>0\rightarrow x>0$

La solución es el intervalo $(-\infty,1]\cap[5,+\infty)\cap(0,+\infty)=\varnothing\rightarrow$ No tiene solución.

66. Página 108

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\left.\begin{array}{l}x\ge -2\rightarrow x+2\ge 0\\ x\le 1\rightarrow 2x\le 2\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x+2\ge 0\\ 2x\le 2\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l}x<0\rightarrow x+3<3\\ x\le 4\rightarrow 2x\le 8\rightarrow 2x-4\le 4\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x+3<3\\ 2x-4\le 4\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l}x\ge 0\rightarrow 2x\ge 0\rightarrow 2x+2\ge 2\\ x>-3\rightarrow x+3>0\rightarrow 2x+6>0\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}2x+2\ge 2\\ 2x+6>0\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l}x\ge 2\rightarrow x+4\ge 6\\ x\le 2\rightarrow 2x\le 4\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x+4\ge 6\\ 2x\le 4\end{array}\right\}$

67. Página 108

a) $x^2 - x \leq 0 \rightarrow x^2 - x = 0 \rightarrow x(x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

Tomamos valores en los tres intervalos en los que queda dividida la recta:

$x = -1 \rightarrow (-1)^2 - (-1) = 2 > 0 \rightarrow$ No es solución.

$x = \frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \leq 0 \rightarrow$ Es solución.

$x = 2 \rightarrow 2^2 - 2 = 2 > 0 \rightarrow$ No es solución.

La solución de la primera inecuación es el intervalo [0, 1].

$2x > 1 \rightarrow x > \frac{1}{2}$

La solución es $[0, 1] \cap \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$.

b) $x^2 + 3x > 0 \rightarrow x^2 + 3x = 0 \rightarrow x(x+3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$

Tomamos valores en los tres intervalos en los que queda dividida la recta:

$x = -4 \rightarrow (-4)^2 + 3 \cdot (-4) = 4 > 0 \rightarrow$ Es solución.

$x = -1 \rightarrow (-1)^2 + 3 \cdot (-1) = -2 < 0 \rightarrow$ No es solución.

$x = 1 \rightarrow 1^2 + 3 \cdot 1 = 4 > 0 \rightarrow$ Es solución.

La solución de la primera inecuación es el intervalo $(-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$.

$x - 1 \leq 0 \rightarrow x \leq 1$

La solución es $((-\infty, -3) \cup (0, +\infty)) \cap (-\infty, 1] = (-\infty, -3) \cup (0, 1]$.

c) $x^2 - 2x < 0 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Tomamos valores en los tres intervalos en los que queda dividida la recta:

$x = -1 \rightarrow (-1)^2 - 2 \cdot (-1) = 3 > 0 \rightarrow$ No es solución.

$x = 1 \rightarrow 1^2 - 2 \cdot 1 = -1 < 0 \rightarrow$ Es solución.

$x = 3 \rightarrow 3^2 - 2 \cdot 3 = 3 > 0 \rightarrow$ No es solución.

La solución de la primera inecuación es el intervalo (0, 2).

$x + 1 > 0 \rightarrow x > -1$

La solución es el intervalo $(0, 2) \cap (-1, +\infty) = (0, 2)$.

d) $x^2 - 5x + 4 \leq 0 \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 4}}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$

Tomamos valores en los tres intervalos en los que queda dividida la recta:

$x = 0 \rightarrow 0^2 - 5 \cdot 0 + 4 = 4 > 0 \rightarrow$ No es solución.

$x = 2 \rightarrow 2^2 - 5 \cdot 2 + 4 = -2 < 0 \rightarrow$ Es solución.

$x = 5 \rightarrow 5^2 - 5 \cdot 5 + 4 = 4 > 0 \rightarrow$ No es solución.

La solución de la primera inecuación es el intervalo [1, 4].

$x + 2 < 0 \rightarrow x < -2$

La solución es el intervalo $[1, 4] \cap (-\infty, 2) = \varnothing \rightarrow$ El sistema no tiene solución.

e) $x \le x^2 \to x^2 - x = 0 \to x(x-1) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

Tomamos valores en los tres intervalos en los que queda dividida la recta:

$x = -1 \to -1 \le (-1)^2 \to$ Es solución.

$x = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} > \left(\frac{1}{2}\right)^2 \to$ No es solución. $\qquad x = 2 \to 2 \le 2^2 \to$ Es solución.

La solución de la primera inecuación es el intervalo $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$.

$4 - x \ge 3 \to x \le 1$

La solución es $((-\infty, 0] \cup [1, +\infty)) \cap (-\infty, 1] = (-\infty, 0] \cup \{1\}$.

f) $x^2 - 4x + 3 \le 0 \to x^2 - 4x + 3 = 0 \to x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3}}{2} \to \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$

Tomamos valores en los tres intervalos en los que queda dividida la recta:

$x = 0 \to 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3 > 0 \to$ No es solución.

$x = 2 \to 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1 \le 0 \to$ Es solución.

$x = 4 \to 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 3 > 0 \to$ No es solución.

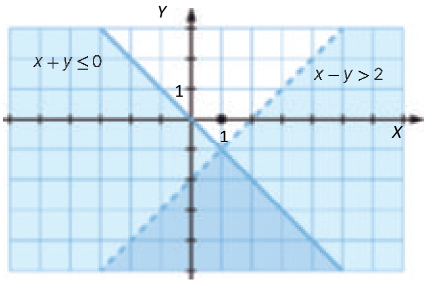
La solución de la primera inecuación es el intervalo $[1, 3]$.

$x - 2 > 0 \to x > 2$

La solución es el intervalo $[1, 3] \cap (2, +\infty) = (2, 3]$.

68. Página 108

a) $x + y = 0 \xrightarrow{x=0} y = 0 \to (0, 0)$



$x + y = 0 \xrightarrow{x=1} y = -1 \to (1, -1)$

$x + y \le 0 \xrightarrow{x=1, y=0} 1 > 0 \to$ El punto (1, 0) no es solución.

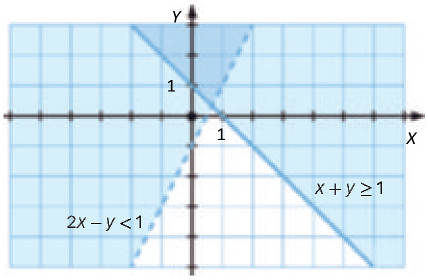
$x - y = 2 \xrightarrow{x=0} y = -2 \to (0, -2)$

$x - y = 2 \xrightarrow{y=0} x = 2 \to (2, 0)$

$x - y > 2 \xrightarrow{x=1, y=0} 1 < 2 \to$ El punto (1, 0) no es solución.

La solución es la zona más oscura. La frontera que aparece punteada no está en la solución. La otra frontera si pertenece a la solución.

b) $x + y = 1 \xrightarrow{x=0} y = 1 \to (0, 1)$



$x + y = 1 \xrightarrow{y=0} x = 1 \to (1, 0)$

$x + y \ge 1 \xrightarrow{x=0, y=0} 0 < 1 \to$ El punto (0, 0) no es solución.

$2x - y = 1 \xrightarrow{x=0} y = -1 \to (0, -1)$

$2x - y = 1 \xrightarrow{y=0} x = \frac{1}{2} \to \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

$2x - y < 1 \xrightarrow{x=0, y=0} 0 < 1 \to$ El punto (0, 0) es solución.

La solución es la zona más oscura. La frontera que aparece punteada no está en la solución.

c) $x - y = 0 \xrightarrow{x=0} y = 0 \rightarrow (0, 0)$

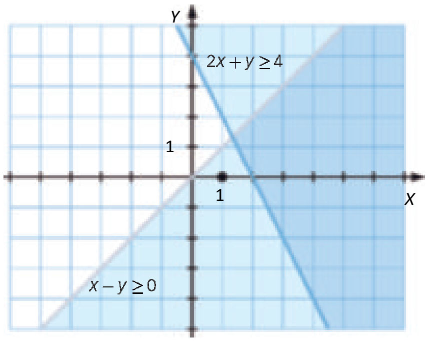
$x - y = 0 \xrightarrow{x=1} y = 1 \rightarrow (1, 1)$

$x - y \geq 0 \xrightarrow{x=1, y=0} 1 > 0 \rightarrow$ El punto (1, 0) es solución.

$2x + y = 4 \xrightarrow{x=0} y = 4 \rightarrow (0, 4)$

$2x + y = 4 \xrightarrow{y=0} x = 2 \rightarrow (2, 0)$

$2x + y \geq 4 \xrightarrow{x=1, y=0} 2 < 4 \rightarrow$ El punto (1, 0) no es solución.



La solución es la zona más oscura. La frontera pertenece a la solución.

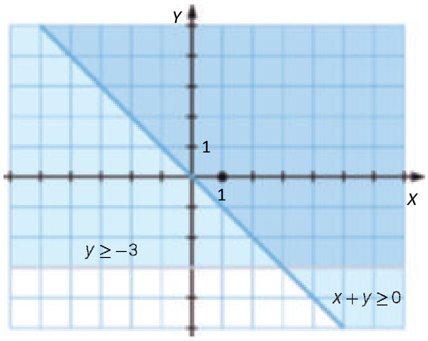
d) $y \geq -3 \rightarrow y = -3$

$y \geq -3 \xrightarrow{x=1, y=0} 0 \geq -3 \rightarrow$ El punto (1, 0) es solución.

$x + y = 0 \xrightarrow{x=0} y = 0 \rightarrow (0, 0)$

$x + y = 0 \xrightarrow{y=1} x = -1 \rightarrow (-1, 1)$

$x + y \geq 0 \xrightarrow{x=1, y=0} 1 \geq 0 \rightarrow$ El punto (1, 0) es solución.



La solución es la zona más oscura. La frontera pertenece a la solución.

e) $x - y = -3 \xrightarrow{x=0} y = 3 \rightarrow (0, 3)$

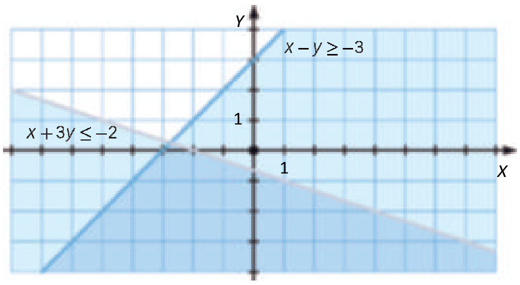
$x - y = -3 \xrightarrow{y=0} x = -3 \rightarrow (-3, 0)$

$x - y \geq -3 \xrightarrow{x=0, y=0} 0 \geq -3 \rightarrow$ El punto (0, 0) es solución.

$x + 3y = -2 \xrightarrow{x=0} y = -\dfrac{2}{3} \rightarrow \left(0, -\dfrac{2}{3}\right)$

$x + 3y = -2 \xrightarrow{y=0} x = -2 \rightarrow (-2, 0)$

$x + 3y \leq -2 \xrightarrow{x=0, y=0} 0 > -2 \rightarrow$ El punto (0, 0) no es solución.



La solución es la zona más oscura. La frontera pertenece a la solución.

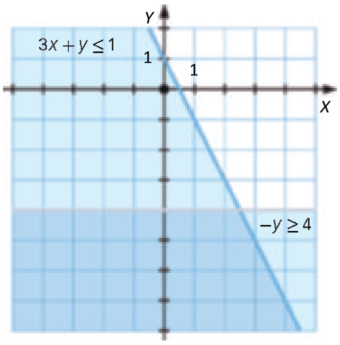
f) $-y \geq 4 \rightarrow y = -4$

$-y \geq 4 \xrightarrow{x=0, y=0} 0 < 4 \rightarrow$ El punto (0, 0) no es solución.

$3x + y = 1 \xrightarrow{x=0} y = 1 \rightarrow (0, 1)$

$3x + y = 1 \xrightarrow{y=0} x = \dfrac{1}{3} \rightarrow \left(\dfrac{1}{3}, 0\right)$

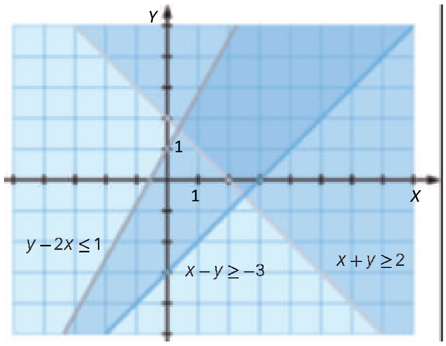
$3x + y \leq 1 \xrightarrow{x=0, y=0} 0 \leq 1 \rightarrow$ El punto (0, 0) es solución.



La solución es la zona más oscura. La frontera pertenece a la solución.

69. Página 108

a) $x+y=2 \xrightarrow{x=0} y=2 \rightarrow (0,2)$



$x+y=2 \xrightarrow{y=0} x=2 \rightarrow (2,0)$

$x+y\ge 2 \xrightarrow{x=0,y=0} 0<2 \rightarrow$ El punto (0, 0) no es solución.

$y-2x=1 \xrightarrow{x=0} y=1 \rightarrow (0,1)$

$y-2x=1 \xrightarrow{y=0} x=-\dfrac{1}{2} \rightarrow \left(-\dfrac{1}{2},0\right)$

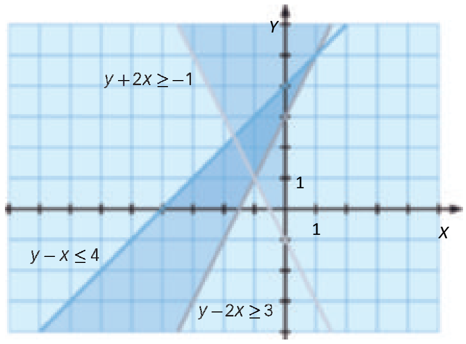
$y-2x\le 1 \xrightarrow{x=0,y=0} 0\le 1 \rightarrow$ El punto (0, 0) es solución.

$y-x=-3 \xrightarrow{x=0} y=-3 \rightarrow (0,-3)$ $\qquad$ $y-x=-3 \xrightarrow{y=0} x=3 \rightarrow (3,0)$

$x-y\ge -3 \xrightarrow{x=0,y=0} 0\ge -3 \rightarrow$ El punto (0, 0) es solución.

La solución es la zona más oscura. La frontera pertenece a la solución.

b) $y-2x=3 \xrightarrow{y=0} x=-\dfrac{3}{2} \rightarrow \left(-\dfrac{3}{2},0\right)$



$y-2x=3 \xrightarrow{x=0} y=3 \rightarrow (0,3)$

$y-2x\ge 3 \xrightarrow{x=0,y=0} 0<3 \rightarrow$ El punto (0, 0) no es solución.

$y+2x=-1 \xrightarrow{x=0} y=-1 \rightarrow (0,-1)$

$y+2x=-1 \xrightarrow{y=0} x=-\dfrac{1}{2} \rightarrow \left(-\dfrac{1}{2},0\right)$

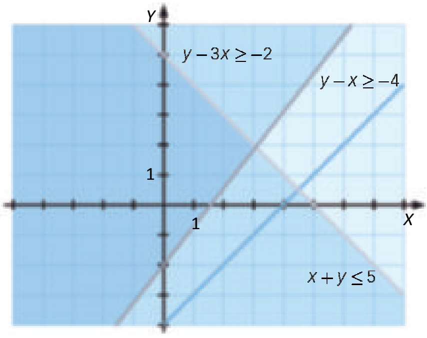
$y+2x\ge -1 \xrightarrow{x=0,y=0} 0\ge -1 \rightarrow$ El punto (0, 0) es solución.

$y-x=4 \xrightarrow{x=0} y=4 \rightarrow (0,4)$ $\qquad$ $y-x=4 \xrightarrow{y=0} x=-4 \rightarrow (-4,0)$

$y-x\le 4 \xrightarrow{x=0,y=0} 0<4 \rightarrow$ El punto (0, 0) es solución.

La solución es la zona más oscura. La frontera pertenece a la solución.

c) $y-3x=-2 \xrightarrow{x=0} y=-2 \rightarrow (0,-2)$



$y-3x=-2 \xrightarrow{y=0} x=\dfrac{3}{2} \rightarrow \left(\dfrac{3}{2},0\right)$

$y-3x\ge -2 \xrightarrow{x=0,y=0} 0\ge -2 \rightarrow$ El punto (0, 0) es solución.

$x+y=5 \xrightarrow{x=0} y=5 \rightarrow (0,5)$

$x+y=5 \xrightarrow{y=0} x=5 \rightarrow (5,0)$

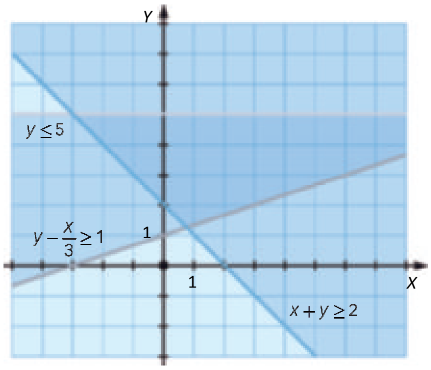
$x+y\le 5 \xrightarrow{x=0,y=0} 0\le 5 \rightarrow$ El punto (0, 0) es solución.

$y-x=-4 \xrightarrow{x=0} y=-4 \rightarrow (0,-4)$ $\qquad$ $y-x=-4 \xrightarrow{y=0} x=4 \rightarrow (4,0)$

$y-x\ge -4 \xrightarrow{x=0,y=0} 0\ge -4 \rightarrow$ El punto (0, 0) es solución.

La solución es la zona más oscura. La frontera pertenece a la solución.

d) $3y - x = 3 \xrightarrow{x=0} y = 1 \rightarrow (0, 1)$



$3y - x = 3 \xrightarrow{y=0} x = -3 \rightarrow (-3, 0)$

$y - \frac{x}{3} \geq 1 \xrightarrow{x=0, y=0} 0 < 1 \rightarrow$ El punto (0, 0) no es solución.

$y \leq 5 \rightarrow y = 5$

$y \leq 5 \xrightarrow{x=0, y=0} 0 \leq 5 \rightarrow$ El punto (0, 0) es solución.

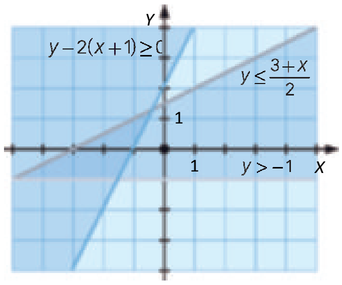
$y + x = 2 \xrightarrow{x=0} y = 2 \rightarrow (0, 2)$

$y + x = 2 \xrightarrow{y=0} x = 2 \rightarrow (2, 0)$

$x + y \geq 2 \xrightarrow{x=0, y=0} 0 < 2 \rightarrow$ El punto (0, 0) no es solución.

La solución es la zona más oscura. La frontera pertenece a la solución.

e) $y = \frac{3 + x}{2} \xrightarrow{x=0} y = \frac{3}{2} \rightarrow \left(0, \frac{3}{2}\right)$



$y = \frac{3 + x}{2} \xrightarrow{y=0} x = -3 \rightarrow (-3, 0)$

$y \leq \frac{3 + x}{2} \xrightarrow{x=0, y=0} 0 \leq \frac{3}{2} \rightarrow$ El punto (0, 0) es solución.

$y > -1 \rightarrow y = -1$

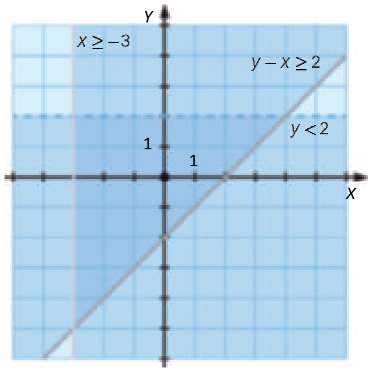
$y > -1 \xrightarrow{x=0, y=0} 0 > -1 \rightarrow$ El punto (0, 0) es solución.

$y - 2x = 2 \xrightarrow{x=0} y = 2 \rightarrow (0, 2)$ $\quad$ $y - 2x = 2 \xrightarrow{y=0} x = -1 \rightarrow (-1, 0)$

$y - 2(x + 1) \geq 0 \xrightarrow{x=0, y=0} -2 < 0 \rightarrow$ El punto (0, 0) no es solución.

La solución es la zona más oscura. La frontera pertenece a la solución salvo la perteneciente a la recta $y = -1$.

f) $y < 2 \rightarrow y = 2$



$y < 2 \xrightarrow{x=0, y=0} 0 < 2 \rightarrow$ El punto (0, 0) es solución.

$x \geq -3 \rightarrow x = -3$

$x \geq -3 \xrightarrow{x=0, y=0} 0 \geq -3 \rightarrow$ El punto (0, 0) es solución.

$y - x = -2 \xrightarrow{x=0} y = -2 \rightarrow (0, -2)$

$y - x = -2 \xrightarrow{y=0} x = 2 \rightarrow (2, 0)$

$y - x \geq -2 \xrightarrow{x=0, y=0} 0 \geq -2 \rightarrow$ El punto (0, 0) es solución.

La solución es la zona más oscura. La frontera pertenece a la solución, salvo la recta $y = 2$.

70. Página 108

Llamamos *x* e *y* a los números buscados.

$$\left.\begin{array}{r}\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=y-1\\ \sqrt{x+2y}=5\end{array}\right\}$$

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=y-1\xrightarrow{\text{m.c.m.}(2,3)=6}2x-3y=-6\rightarrow x=\frac{3y-6}{2}$$

$$\sqrt{x+2y}=5\xrightarrow{x=\frac{3y-6}{2}}\sqrt{\frac{3y-6}{2}+2y}=5\rightarrow\frac{7y-6}{2}=25\rightarrow 7y=56\rightarrow y=8$$

$$x=\frac{3y-6}{2}\xrightarrow{y=8}x=\frac{18}{2}=9$$

Como aparece un radical, comprobamos la solución.

$$\left.\begin{array}{r}\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=y-1\\ \sqrt{x+2y}=5\end{array}\right\}\xrightarrow{x=9,y=8}\left\{\begin{array}{l}\frac{9}{3}+\frac{8}{2}=3+4=8-1\\ \sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5\end{array}\right.$$

Los números buscados son 8 y 9.

71. Página 108

Llamamos *x* al precio de cada reloj e *y* al precio de cada pulsera.

$$\left.\begin{array}{r}2x=3y\\ 2x+3y=144\end{array}\right\}\begin{array}{c}\longrightarrow\\ \longrightarrow\end{array}\begin{array}{r}2x-3y=0\\ +\underline{2x+3y=144}\\ 4x=144\rightarrow x=36\end{array}$$

$$2x=3y\xrightarrow{x=36}3y=72\rightarrow y=24$$

Cada reloj cuesta 36 € y cada pulsera 24 €.

El dinero con el que compramos 12 pulseras es $12\cdot 24=288$ €.

Con ese dinero podemos comprar $\frac{288}{36}=8$ relojes.

72. Página 108

Llamamos *x* e *y* a la longitud del lado de cada cuadrado.

$$\left.\begin{array}{r}x^2+y^2=97\\ 4x-4y=20\end{array}\right\}$$

$$4x-4y=20\rightarrow 4x=20+4y\rightarrow x=5+y$$

$$x^2+y^2=97\xrightarrow{x=5+y}(5+y)^2+y^2=97\rightarrow 2y^2+10y-72=0\rightarrow y=\frac{-10\pm\sqrt{10^2-4\cdot 2\cdot(-72)}}{2\cdot 2}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}y_1=4\\ y_2=-9\end{array}\right.$$

Solo nos interesa el resultado positivo, ya que estamos hablando de longitudes.

$$x=5+y\xrightarrow{y=4}x=9$$

Los lados de cada cuadrado miden 9 y 4 cm, respectivamente.

73. Página 108

Llamamos *x* e *y* a las longitudes de los lados del rectángulo.

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=34^2 \\ 2x+2y=92 \end{array}\right\}$$

$$2x+2y=92 \rightarrow 2x=92-2y \rightarrow x=46-y$$

$$x^2+y^2=1156 \xrightarrow{x=46-y} (46-y)^2+y^2=1156 \rightarrow 2y^2-92y+960=0 \rightarrow y=\frac{92\pm\sqrt{(-92)^2-4\cdot 2\cdot 960}}{2\cdot 2} \rightarrow \begin{cases} y_1=30 \\ y_2=16 \end{cases}$$

$$x=46-y \xrightarrow{y=30} x=16 \qquad x=46-y \xrightarrow{y=16} x=30$$

Uno de los lados del rectángulo mide 30 cm y el otro 16 cm.

74. Página 108

Llamamos *x* a la altura e *y* a la base del rectángulo.

$$\left.\begin{array}{r} xy=75 \\ x=\dfrac{y}{3} \end{array}\right\}$$

$$xy=75 \xrightarrow{x=\frac{y}{3}} \frac{y^2}{3}=75 \rightarrow y^2=225 \rightarrow y=\pm 15$$

Nos quedamos con el dato positivo, ya que estamos hablando de longitudes.

$$x=\frac{y}{3} \xrightarrow{y=15} x=5$$

La base del rectángulo mide 15 cm y la altura 5 cm. El perímetro es $2\cdot 5+2\cdot 15=40$ cm.

75. Página 108

Llamamos *x* e *y* a las respectivas diagonales del rombo.

$$\left.\begin{array}{r} \left(\dfrac{x}{2}\right)^2+\left(\dfrac{y}{2}\right)^2=\left(\dfrac{23,324}{4}\right)^2 \\ x+y=16 \end{array}\right\}$$

$$x+y=16 \rightarrow x=16-y$$

$$x^2+y^2=136,002 \xrightarrow{x=16-y} (16-y)^2+y^2=136,002 \rightarrow 2y^2-32y+119,998=0 \rightarrow y=\frac{32\pm\sqrt{(-32)^2-4\cdot 2\cdot 119,998}}{2\cdot 2} \rightarrow \begin{cases} y_1=10 \\ y_2=6 \end{cases}$$

$$x=16-y \xrightarrow{y_1=10} x_1=6 \qquad x=16-y \xrightarrow{y_2=6} x_2=10$$

Las diagonales miden 6 y 10 cm, respectivamente.

El área del rombo es $\dfrac{6\cdot 10}{2}=30$ cm^2.

76. Página 108

Llamamos *x* al radio menor e *y* al mayor.

$$\left.\begin{aligned}\pi(y^2-x^2)=100{,}53\\ y-x=4\end{aligned}\right\}$$

$y-x=4\rightarrow y=x+4$

$\pi\left(y^2-x^2\right)=100{,}53\rightarrow y^2-x^2=32\xrightarrow{y=x+4}\left(x+4\right)^2-x^2=32\rightarrow 8x+16=32\rightarrow x=2$

$y=x+4\xrightarrow{x=2}y=6$

Los radios de la corona circular son 2 y 6 cm, respectivamente.

77. Página 108

Llamamos *x* al lado del cuadrado original e *y* al área del cuadrado original.

$$\left.\begin{aligned}x^2=y\\ \left(x+2\right)^2=y+20\end{aligned}\right\}$$

$\left(x+2\right)^2=y+20\xrightarrow{y=x^2}x^2+4x+4=x^2+20\rightarrow 4x=16\rightarrow x=4$

El lado del cuadrado original era de 4 cm.

78. Página 108

Llamamos *x* a la cantidad de monedas de 0,50 € e *y* a la cantidad de monedas de 0,20 €.

$$\left.\begin{aligned}x+y=8\\ 0{,}5x+0{,}2y=3{,}1\end{aligned}\right\}$$

$x+y=8\rightarrow y=8-x$

$0{,}5x+0{,}2y=3{,}1\xrightarrow{y=8-x}0{,}5x+1{,}6-0{,}2x=3{,}1\rightarrow 0{,}3x=1{,}5\rightarrow x=5$

$y=8-x\xrightarrow{x=5}y=3$

Javier tiene 5 monedas de 0,50 € y 3 monedas de 0,20 €.

79. Página 108

Llamamos *x* al número de billetes de 5 € e *y* al número de billetes de 10 €.

$$\left.\begin{aligned}x+y=40\\ 5x+10y=10x+5y\end{aligned}\right\}$$

$x+y=40\rightarrow x=40-y$

$5x+10y=10x+5y\rightarrow -5x+5y=0\rightarrow -x+y=0\xrightarrow{x=40-y}-40+2y=0\rightarrow 2y=40\rightarrow y=20$

$x=40-y\xrightarrow{y=20}x=20$

Juan tiene 20 billetes de 5 € y 20 billetes de 10 €.

80. Página 108

Llamamos *x* al número de monedas de 1 € e *y* al número de monedas de 2 €.

$$\left.\begin{array}{r} x+y=20 \\ x+2y=25 \end{array}\right\}$$

$x+y=20 \rightarrow x=20-y$ $\qquad$ $x+2y=25 \rightarrow x=25-2y$

$20-y=25-2y \rightarrow y=5$

$x=20-y \xrightarrow{y=5} x=15$

Luisa llevaba 15 monedas de 1 € y 5 monedas de 2 €.

81. Página 108

Llamamos *x* e *y* a los dos números.

$$\left.\begin{array}{r} x+y=27 \\ x^2-y^2=81 \end{array}\right\}$$

$x+y=27 \rightarrow x=27-y$

$x^2-y^2=81 \xrightarrow{x=27-y} (27-y)^2-y^2=81 \rightarrow 729-54y+y^2-y^2=81 \rightarrow 54y=648 \rightarrow y=12$

$x=27-y \xrightarrow{y=12} x=15$

Los números son 15 y 12.

82. Página 108

Llamamos *x* e *y* a los dos números.

$$\left.\begin{array}{r} x=3y+1 \\ xy-4=5y \end{array}\right\}$$

$$xy-4=5y \xrightarrow{x=3y+1} 3y^2+y-4=5y \rightarrow 3y^2-4y-4=0 \rightarrow y=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 3\cdot(-4)}}{2\cdot 3} \rightarrow \begin{cases} y_1=2 \\ y_2=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

La solución y_2 no nos sirve porque no es un número entero.

$x=3y+1 \xrightarrow{y=2} x=7$

Comprobamos la solución.

$$\left.\begin{array}{r} x=3y+1 \\ xy-4=5y \end{array}\right\} \xrightarrow{x=7,\,y=2} \begin{cases} 7=6+1 \\ 14-4=10 \end{cases}$$

Los números son 7 y 2.

83. Página 108

Llamamos *x* e *y* a los números

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{7}{10}\\ \dfrac{1}{3}(x-y)=1\end{array}\right\}$$

$$\frac{1}{3}(x-y)=1\rightarrow x-y=3\rightarrow x=3+y$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{10}\xrightarrow{x=3+y}\frac{1}{3+y}+\frac{1}{y}=\frac{7}{10}\rightarrow\frac{10y+30+10y}{10y(3+y)}=\frac{21y+7y^2}{10y(3+y)}\rightarrow$$

$$7y^2+y-30=0\rightarrow y=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 7\cdot(-30)}}{2\cdot 7}\rightarrow\begin{cases}y_1=2\\ y_2=-\dfrac{15}{7}\end{cases}$$

$$x=3+y\xrightarrow{y_1=2}x_1=5 \qquad x=3+y\xrightarrow{y_2=\frac{-15}{7}}x_2=3-\frac{15}{7}=\frac{6}{7}$$

Los números pueden ser 5 y 2, o $\frac{6}{7}$ y $-\frac{15}{7}$.

84. Página 109

Llamamos *x* a la edad de Marta e *y* a la edad de Carlos.

$$\left.\begin{array}{l}x+4=y\\ x+y+(x+10)+(y+10)=40\rightarrow 2x+2y=20\rightarrow x+y=10\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x+4=y\\ x+y=10\end{array}\right\}$$

$$x+y=10\xrightarrow{y=x+4}x+x+4=10\rightarrow 2x=6\rightarrow x=3$$

$$y=x+4\xrightarrow{x=3}y=7$$

Marta tiene 3 años y Carlos tiene 7 años.

85. Página 109

Llamamos *x* a la edad de Alicia, *y* a la de Luis y *z* a la de Ángel.

$$\left.\begin{array}{l}y-z=2(x-y)\rightarrow 2x-3y+z=0\\ x+y+z=23\\ x^2-y^2=88\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}2x-3y+z=0\\ x+y+z=23\\ x^2-y^2=88\end{array}\right\}$$

$$2x-3y+z=0\rightarrow z=3y-2x \qquad x+y+z=23\rightarrow z=23-x-y \qquad 3y-2x=23-x-y\rightarrow x=4y-23$$

$$x^2-y^2=88\xrightarrow{x=4,y-23}(4y-23)^2-y^2=88\rightarrow 16y^2-184y+529-y^2=88\rightarrow$$

$$15y^2-184y+441=0\rightarrow y=\frac{184\pm\sqrt{(-184)^2-4\cdot 15\cdot 441}}{2\cdot 15}\rightarrow\begin{cases}y_1=9\\ y_2=\dfrac{49}{15}\end{cases}$$

$$x=4y-23\xrightarrow{y_1=9}x_1=13 \qquad x=4y-23\xrightarrow{y_2=\frac{49}{15}}x_2=-\frac{149}{15}$$

Nos quedamos solo con la solución positiva porque las incógnitas son edades.

$$z=23-x-y\xrightarrow{x=13,y=9}z=1$$

Alicia tiene 13 años, Luis 9 y Ángel 1.

86. Página 109

a) Llamamos *x* e *y* a las cifras del número.

$$\left.\begin{array}{r}(x+y)^2=49\\ x=y+1\end{array}\right\}$$

$$(x+y)^2=49 \xrightarrow{x=y+1} (2y+1)^2=49 \rightarrow 4y^2+4y-48=0 \rightarrow y^2+y-12=0 \rightarrow y=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot(-16)}}{2} \rightarrow \begin{cases} y_1=3\\ y_2=-4\end{cases}$$

Como es una cifra nos quedamos con el valor positivo.

$$x=y+1 \xrightarrow{y=3} x=4$$

Los números que cumplen la condición son el 34 y el 43.

b) Llamamos *x* e *y* a las cifras del número.

$$\left.\begin{array}{r}(x+y)^2=49\\ x-y=3\end{array}\right\}$$

$$x-y=3 \rightarrow x=y+3$$

$$(x+y)^2=49 \xrightarrow{x=y+3} (2y+3)^2=49 \rightarrow 4y^2+12y-40=0 \rightarrow y^2+3y-10=0 \rightarrow y=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot(-10)}}{2} \rightarrow \begin{cases} y_1=2\\ y_2=-5\end{cases}$$

Como es una cifra nos quedamos con el valor positivo.

$$x=y+3 \xrightarrow{y=2} x=5$$

Los números que cumplen la condición son el 25 y el 52.

c) Llamamos *x* e *y* a las cifras del número.

$$\left.\begin{array}{r}(x+y)^2=49\\ x^2+y^2=37\end{array}\right\}$$

$$(x+y)^2=49 \rightarrow x+y=\pm 7 \rightarrow \begin{cases} x_1=7-y\\ x_2=-7-y\end{cases}$$

$$x^2+y^2=37 \xrightarrow{x_1=7-y} (7-y)^2+y^2=37 \rightarrow 2y^2-14y+12=0 \rightarrow y^2-7y+6=0 \rightarrow y=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 6}}{2} \rightarrow \begin{cases} y_{11}=6\\ y_{12}=1\end{cases}$$

$$x=7-y \xrightarrow{y_{11}=6} x_{11}=1 \qquad\qquad x=7-y \xrightarrow{y_{12}=1} x_{12}=6$$

$$x^2+y^2=37 \xrightarrow{x_2=-7-y} (-7-y)^2+y^2=37 \rightarrow 2y^2+14y+12=0 \rightarrow y^2+7y+6=0 \rightarrow y=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot 6}}{2} \rightarrow \begin{cases} y_{21}=-1\\ y_{22}=-6\end{cases}$$

Como son cifras no tomamos los valores negativos.

Los números que cumplen la condición son el 61 y el 16.

87. Página 109

Llamamos *x* a los litros de vinagre de 1,2 €/ℓ e *y* a los litros de vinagre de 1,6 €/ℓ.

$$\left.\begin{array}{r}x+y=100\\ 1{,}2x+1{,}6y=130\end{array}\right\} \qquad x+y=100 \rightarrow x=100-y$$

$$1{,}2x+1{,}6y=130 \xrightarrow{x=100-y} 120-1{,}2y+1{,}6y=130 \rightarrow 0{,}4y=10 \rightarrow y=25 \qquad x=100-y \xrightarrow{y=25} x=75$$

Se han mezclado 75 ℓ de vinagre de 1,2 €/ℓ y 25 l de vinagre de 1,6 €/ℓ.

88. Página 109

Llamamos *x* e *y* a la base y a la altura del rectángulo, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=9^2 \\ x+2y=18 \end{array}\right\}$$

$$x+2y=18 \rightarrow x=18-2y$$

$$x^2+y^2=81 \xrightarrow{x=18-2y} (18-2y)^2+y^2=81 \rightarrow 5y^2-72y+243=0$$

$$\rightarrow y=\frac{72\pm\sqrt{(-72)^2-4\cdot 5\cdot 243}}{2\cdot 5} \rightarrow \begin{cases} y_1=9 \\ y_2=\dfrac{27}{5}=5{,}4 \end{cases}$$

$x=18-2y \xrightarrow{y_1=9} x_1=0 \rightarrow$ No es solución válida, ya que un lado del triángulo tendría lado 0.

$$x=18-2y \xrightarrow{y_2=\frac{27}{5}} x_2=\frac{36}{5}=7{,}2$$

La base del rectángulo mide 7,2 cm y la altura 5,4.

El perímetro es $2\cdot 7{,}2+2\cdot 5{,}4=25{,}2$ cm y el área $7{,}2\cdot 5{,}4=38{,}88\ \text{cm}^2$.

89. Página 109

Llamamos *x* a los kg de patatas de 2 €/kg e *y* a los kg de patatas de 2,4 €/kg.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=300 \\ 2x+2{,}5y=2{,}4(x+y)\rightarrow -0{,}4x+0{,}1y=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=300 \\ -0{,}4x+0{,}1y=0 \end{array}\right\}$$

$$x+y=300 \rightarrow x=300-y$$

$$-0{,}4x+0{,}1y=0 \xrightarrow{x=300-y} -0{,}4(300-y)+0{,}1y=0 \rightarrow -120+0{,}5y=0 \rightarrow y=240$$

$$x=300-y \xrightarrow{y=240} x=60$$

Se han mezclado 60 kg de patatas de 2 €/kg y 240 kg de patatas de 2,5 €/kg.

90. Página 109

Llamamos *x* a los números que cumplen la propiedad.

$$x^2-4x\geq 0$$

$$\rightarrow x^2-4x=0 \rightarrow x(x-4)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$$

Tomamos valores en los tres intervalos en los que queda dividida la recta:

$x=-1 \rightarrow (-1)^2-4\cdot(-1)=5\geq 0 \rightarrow$ Es solución.

$x=1 \rightarrow 1^2-4\cdot 1=-3<0 \rightarrow$ No es solución.

$x=5 \rightarrow 5^2-5\cdot 1=20\geq 0 \rightarrow$ Es solución.

Los números que cumplen la propiedad son los que están en los intervalos $(-\infty,0]$ y $[4,+\infty)$.

91. Página 109

Llamamos *x* a los números que cumplen la propiedad.

$$x^2-\frac{x}{2}\le 0 \to x^2-\frac{x}{2}=0 \to x\left(x-\frac{1}{2}\right)=0 \to \begin{cases} x=0 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Tomamos valores en los tres intervalos en los que queda dividida la recta:

$x=-1 \to (-1)^2-\frac{-1}{2}=\frac{3}{2}>0 \to$ No es solución.

$x=\frac{1}{4} \to \left(\frac{1}{4}\right)^2-\frac{\frac{1}{4}}{2}=\frac{1}{16}-\frac{1}{8}=-\frac{1}{16}\le 0 \to$ Es solución.

$x=1 \to 1^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0 \to$ No es solución.

Los números que cumplen la propiedad son los que están en el intervalo $\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

92. Página 109

Llamamos *x* a los números que cumplen la propiedad.

$$x(x+1)\le 0 \to x(x+1)=0 \to \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$$

Tomamos valores en los tres intervalos en los que queda dividida la recta:

$x=-2 \to (-2)(-2+1)=2>0 \to$ No es solución.

$x=-\frac{1}{2} \to -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+1\right)=-\frac{1}{4}<0 \to$ Es solución.

$x=1 \to 1\cdot(1+1)=2>0 \to$ No es solución.

Los números que cumplen la propiedad son los que están en el intervalo $[-1,0]$.

93. Página 109

Llamamos *x* al precio de cada bocadillo e *y* al precio de cada refresco.

$$\left.\begin{aligned} 4x+5y&=a \\ 2x+y&=b \end{aligned}\right\}$$

$$2x+y=b \to y=b-2x$$

$$4x+5y=a \xrightarrow{y=b-2x} 4x+5b-10x=a \to -6x=a-5b \to x=\frac{5b-a}{6}$$

$$y=b-2x \xrightarrow{x=\frac{5b-a}{6}} y=b-\frac{5b-a}{3}=\frac{a-2b}{3}$$

a) $x+y=\frac{5b-a}{6}+\frac{a-2b}{3}=\frac{b+a}{6}$

b) $x+2y=\frac{5b-a}{6}+\frac{2a-4b}{3}=\frac{3a-3b}{6}=\frac{a-b}{2}$

c) $10x+8y=\frac{50b-10a}{6}+\frac{8a-16b}{3}=\frac{6a+18b}{6}=a+3b$

d) $x=\frac{5b-a}{6}\xrightarrow{a=8,3;b=3,1}x=\frac{15,5-8,3}{6}=1,2$

$x=\frac{a-2b}{3}\xrightarrow{a=8,3;b=3,1}x=\frac{8,3-6,2}{3}=0,7$

94. Página 109

Llamamos *x* a la base del rectángulo e *y* a la altura del rectángulo.

$$\left.\begin{array}{r} xy=78 \\ \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=205\rightarrow x^2+y^2=205 \end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r} xy=78 \\ x^2+y^2=205 \end{array}\right\}$$

$$xy=78\rightarrow x=\frac{78}{y}$$

$$x^2+y^2=205\xrightarrow{x=\frac{78}{y}}\left(\frac{78}{y}\right)^2+y^2=205\rightarrow\frac{6\,084+y^4}{y^2}=\frac{205y^2}{y^2}\rightarrow$$

$$y^4-205y^2+6084=0\rightarrow y^2=\frac{205\pm\sqrt{(-205)^2-4\cdot 6084}}{2}\rightarrow\begin{cases} y^2=169\rightarrow y=\pm 13 \\ y^2=36\rightarrow y=\pm 6 \end{cases}$$

Como estamos trabajando con longitudes, consideramos solo los valores positivos.

$$x_1=\frac{78}{y}\xrightarrow{y_1=13}x=6 \qquad\qquad x_2=\frac{78}{y}\xrightarrow{y_2=6}x=13$$

Los lados del rectángulo miden 13 cm y 6 cm respectivamente.

95. Página 109

Llamamos *x* a la base menor del trapecio e *y* a la mayor. La altura es *x*. El lado del trapecio que nos falta lo obtenemos mediante el teorema de Pitágoras: $l^2=(y-x)^2+x^2$.

$$\left.\begin{array}{r} 2x=y \\ x+y+x+\sqrt{(y-x)^2+x^2}=19,243 \end{array}\right\}$$

$$x+y+2x+\sqrt{(y-x)^2+x^2}=19,243\xrightarrow{y=2x}4x+\sqrt{2x^2}=19,243\rightarrow\left(4+\sqrt{2}\right)x=19,243\rightarrow x=3,55$$

$$y=2x\xrightarrow{x=3,55}y=7,1$$

La base menor y la altura miden 3,55 cm y la base mayor 7,1 cm.

El área del trapecio es $\frac{(x+y)\cdot x}{2}=\frac{(3,55+7,1)\cdot 3,55}{2}=18,9$ cm^2.

DEBES SABER HACER

1. Página 109

$$\left.\begin{array}{r}2(x-y)+x=11-3y\\ x-3(y+3x)=4y-12\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}2x-2y+x=11-3y\\ x-3y-9x=4y-12\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}3x+y=11\\ -8x-7y=-12\end{array}\right\}$$

Resolvemos por el método de sustitución.

$$3x+y=11\rightarrow y=11-3x$$

$$-8x-7y=-12\xrightarrow{y=11-3x}-8x-77+21x=-12\rightarrow 13x=65\rightarrow x=5$$

$$y=11-3x\xrightarrow{x=5}y=-4$$

La solución es $x=5$ e $y=-4$.

2. Página 109

a) $4x+y=4\rightarrow y=4-4x$

$$(x+2)y=-16\xrightarrow{y=4-4x}(x+2)(4-4x)=-16\rightarrow -4x^2-4x+24=0\rightarrow$$

$$x^2+x-6=0\rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot(-6)}}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=2\\ x_2=-3\end{cases}$$

$$y=4-4x\xrightarrow{x_1=2}y_1=-4 \qquad y=4-4x\xrightarrow{x_2=-3}y_2=16$$

Comprobamos las soluciones.

$$\left.\begin{array}{r}(x+2)y=-16\\ 4x+y=4\end{array}\right\}\xrightarrow{x_1=2,\,y_1=-4}\begin{cases}4\cdot(-4)=-16\\ 8-4=4\end{cases}\rightarrow \text{Es solución.}$$

$$\left.\begin{array}{r}(x+2)y=-16\\ 4x+y=4\end{array}\right\}\xrightarrow{x_2=-3,\,y_2=16}\begin{cases}(-1)\cdot 16=-16\\ -12+16=4\end{cases}\rightarrow \text{Es solución.}$$

Las soluciones son $x=2$ e $y=-4$; y $x=-3$ e $y=16$.

b) $\sqrt{x+6}-1=y\rightarrow\sqrt{x+6}=y+1\rightarrow x+6=(y+1)^2=y^2+2y+1\rightarrow x=y^2+2y-5$

$$2x-y=-5\xrightarrow{x=y^2+2y-5}2(y^2+2y-5)-y=-5\rightarrow 2y^2+3y-5=0\rightarrow y=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2\cdot(-5)}}{2\cdot 2}\rightarrow\begin{cases}y_1=1\\ y_2=-\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

$$2x-y=-5\rightarrow x=\frac{y-5}{2}\rightarrow\begin{cases}y_1=1\rightarrow x_1=-2\\ y_2=-\dfrac{5}{2}\rightarrow x_2=-\dfrac{15}{4}\end{cases}$$

Comprobamos las soluciones.

$$\left.\begin{array}{r}\sqrt{x+6}-1=y\\ 2x-y=-5\end{array}\right\}\xrightarrow{x_1=-2,\,y_1=1}\begin{cases}\sqrt{-2+6}-1=1\\ 2\cdot(-2)-1=-5\end{cases}\rightarrow \text{Es solución.}$$

$$\left.\begin{array}{r}\sqrt{x+6}-1=y\\ 2x-y=-5\end{array}\right\}\xrightarrow{x_2=-\frac{15}{4},\,y_2=-\frac{5}{2}}\begin{cases}\sqrt{-\dfrac{15}{4}+6}-1=\pm\dfrac{3}{2}-1=\begin{cases}\dfrac{3}{2}-1\neq-\dfrac{5}{2}\\ -\dfrac{3}{2}-1=-\dfrac{5}{2}\end{cases}\\ 2\cdot\left(-\dfrac{15}{4}\right)-\left(-\dfrac{5}{2}\right)=-\dfrac{15}{2}+\dfrac{5}{2}=-5\end{cases}\rightarrow \text{Es solución.}$$

Las soluciones son $x=-2$ e $y=1$; y $x_2=-\dfrac{15}{4}$ e $y_2=-\dfrac{5}{2}$.

3. Página 109

a) $-x+y^2=-2 \rightarrow x=y^2+2$

$\sqrt{x+1}=3-y \xrightarrow{x=y^2+2} \sqrt{y^2+3}=3-y \rightarrow y^2+3=9-6y+y^2 \rightarrow 6y=6 \rightarrow y=1$

$x=y^2+2 \xrightarrow{y=1} x=3$

Comprobamos la solución.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x+1}=3-y\\ -x+y^2=-2\end{array}\right\} \xrightarrow{x=3,y=1} \left\{\begin{array}{l}\sqrt{4}=3-1\\ -3+1=-2\end{array}\right. \rightarrow \text{ Es solución.}$$

La solución es $x=3$ e $y=1$.

b) $\dfrac{1}{x}+2y=-1 \rightarrow 2y=-1-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{x+1}{x} \rightarrow y=-\dfrac{x+1}{2x}$

$$\frac{-2}{x}=\frac{y+2}{xy} \xrightarrow{y=-\frac{x+1}{2x}} \frac{-2}{x}=\frac{-\frac{x+1}{2x}+2}{-\frac{x+1}{2}}=\frac{1}{x}-\frac{4}{1+x} \rightarrow \frac{3}{x}-\frac{4}{1+x}=0 \rightarrow \frac{3+3x-4x}{x(1+x)}=0 \rightarrow 3-x=0 \rightarrow x=3$$

$$y=-\frac{x+1}{2x} \xrightarrow{x=3} y=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$$

Comprobamos la solución.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{-2}{x}=\dfrac{y+2}{xy}\\ \dfrac{1}{x}+2y=-1\end{array}\right\} \xrightarrow{x=3,y=-\frac{2}{3}} \left\{\begin{array}{l}\dfrac{-2}{3}=\dfrac{4}{-6}=\dfrac{-\frac{2}{3}+2}{-2}\\ \dfrac{1}{3}-\dfrac{4}{3}=-1\end{array}\right. \rightarrow \text{ Es solución.}$$

La solución es $x=3$ e $y=-\dfrac{2}{3}$.

4. Página 109

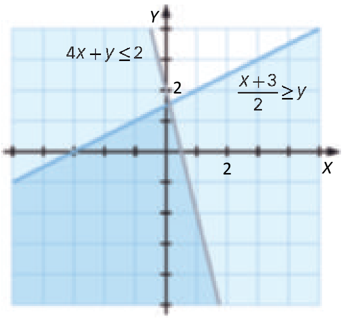
a) $$\left.\begin{array}{l}x+6\leq 3x+4 \rightarrow 2x\geq 2 \rightarrow x\geq 1\\ \dfrac{x+3}{2}\geq x \rightarrow x+3\geq 2x \rightarrow x\leq 3\end{array}\right\} \rightarrow \text{ La solución es el intervalo } [1,+\infty)\cap(-\infty,3]=[1,3].$$

b) $$4x+y\leq 2 \rightarrow 4x+y=2 \rightarrow \left\{\begin{array}{l}y=0 \rightarrow x=\dfrac{1}{2} \rightarrow \left(\dfrac{1}{2},0\right)\\ x=0 \rightarrow y=2 \rightarrow (0,2)\end{array}\right.$$

$4x+y\leq 2 \xrightarrow{x=0,y=0} 0\leq 2 \rightarrow$ El punto (0, 0) es solución.

$$\frac{x+3}{2}\geq y \rightarrow y=\frac{x+3}{2} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}y=0 \rightarrow x=-3 \rightarrow (-3,0)\\ x=0 \rightarrow y=\dfrac{3}{2} \rightarrow \left(0,\dfrac{3}{2}\right)\end{array}\right.$$

$\dfrac{x+3}{2}\geq y \xrightarrow{x=0,y=0} \dfrac{3}{2}\geq 0 \rightarrow$ El punto (0, 0) es solución.



La solución es la zona más oscura. La frontera pertenece a la solución.

5. Página 109

Llamamos *x* al precio original del chándal e *y* al precio original de las zapatillas.

El descuento del 40 % representa un (100 – 40) = 60 % y el descuento del 30 % representa un (100 – 30) = 70 %.

$$\left.\begin{aligned} x+y&=135\\ (1-0,4)x+(1-0,3)y&=85,50\end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} x+y&=135\\ 0,6x+0,7y&=85,50\end{aligned}\right\} \to x+y=135 \to x=135-y$$

$$0,6x+0,7y=85,5 \xrightarrow{x=135-y} 81-0,6y+0,7y=85,5 \to 0,1y=4,5 \to y=45$$

$$x=135-y \xrightarrow{y=45} x=90$$

60 % de 90 $=\frac{60}{100}\cdot 90=54$ €

70 % de 45 $=\frac{70}{100}\cdot 45=31,5$ €

El precio original del chándal era 90 € y después de la rebaja 54 €.

El precio original de las zapatillas era 45 € y después de la rebaja 31,50 €.

6. Página 109

Llamamos *x* a los números que satisfacen la propiedad.

$$2x^2>8 \to x^2>4 \to x^2=4 \to x=\pm 2$$

Tomamos valores en los tres intervalos en los que queda dividida la recta:

$x=-3 \to (-3)^2=9>4 \to$ Es solución.

$x=0 \to 0^2=0<4 \to$ No es solución.

$x=3 \to 3^2=9>4 \to$ Es solución.

Los números que satisfacen esa propiedad son los que pertenecen a los intervalos $(-\infty,-2)$ y $(2,+\infty)$.

COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

96. Página 110

La fábrica está produciendo al 80 % de su capacidad y produce diariamente $0,8\cdot 3520=2816$ cepillos.

a) Llamamos *x* al número de cepillos manuales e *y* al número de cepillos eléctricos.

$$\left.\begin{aligned} x+y&=2816\\ 1,1x+9,8y&=19932,1\end{aligned}\right\} \to x+y=2\,816 \to x=2\,816-y$$

$$1,1x+9,8y=19932,1 \xrightarrow{x=2816-y} 3097,6-1,1y+9,8y=19932,1 \to 8,7y=16834,5 \to y=1935$$

$x=2816-1935=881 \to$ La empresa produce 881 cepillos manuales y 1 935 cepillos eléctricos.

b) Está produciendo 2 816 cepillos diarios y tiene una capacidad máxima de 3 520 cepillos diarios.

Puede producir diariamente: 3 520 – 2 816 = 704 cepillos más. Si el pedido es de 1 500 cepillos, no puede asumir la producción en un día.

Para poder producir los 1 500 cepillos eléctricos necesita disminuir la producción de cepillos manuales.

Si reduce el número de cepillos manuales hasta $3520-(1935+1500)=85$, sí puede aumentar la producción de cepillos eléctricos en 1 500.

La facturación sería de $85\cdot 1,1+3435\cdot 9,8=33756,5$ €.

c) La máxima facturación posible de la fábrica es de $3520\cdot 9,8=34496$ €.

FORMAS DE PENSAR. Razonamiento matemático

97. Página 110

La única respuesta verdadera es b).

98. Página 110

Si la ecuación resultante no se puede resolver, el sistema es incompatible ya que, al resolver el sistema por igualación, deberíamos obtener el valor de una de las incógnitas.

99. Página 110

Llamamos *x* a la cifra de las decenas e *y* a la cifra las unidades.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=a \\ x-y=a \end{array}\right\} \rightarrow x+y=x-y \rightarrow 2y=0 \rightarrow y=0$$

$$x+y=a \xrightarrow{y=0} x=a$$

Los números que cumplen esa condición son decenas completas, donde la cifra de las decenas es un número del 1 al 9 y la cifra de las unidades es 0.

100. Página 110

$$a(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0 \rightarrow ax^2+x(-ax_1-ax_2)+ax_1x_2=ax^2+bx+c$$

El sistema que relaciona los coeficientes con las soluciones es:

$$\left.\begin{array}{l} b=-ax_1-ax_2 \\ c=ax_1x_2 \end{array}\right\}$$

101. Página 110

a) $x+y=6 \rightarrow x=6-y$

$$4x-y=-1 \xrightarrow{x=6-y} 24-4y-y=-1 \rightarrow -5y=-25 \rightarrow y=5$$

$$x=6-y \xrightarrow{y=5} x=1$$

La solución es $x=1$ e $y=5$.

Es un sistema compatible determinado. Los coeficientes no son proporcionales: $\frac{1}{4} \neq \frac{1}{-1}$.

b) $x+y=6 \rightarrow y=6-x$

$$2x+2y=12 \xrightarrow{y=6-x} 2y+12-2x=12 \rightarrow 0=0$$

Es un sistema compatible indeterminado.

Resolvemos para $x=\lambda$:

$$y=6-x \xrightarrow{x=\lambda} y=6-\lambda$$

Las soluciones son de la forma $x=\lambda$ e $y=6-\lambda$.

Es un sistema compatible indeterminado. Los coeficientes son proporcionales y los términos independientes también: $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{6}{12}$.

c) $x+y=6 \rightarrow y=6-x$

$x+y=8 \xrightarrow{y=6-y} 6 \neq 8 \rightarrow$ No tiene solución.

Es un sistema incompatible. Los coeficientes son proporcionales, pero los términos independientes no: $\frac{1}{1}=\frac{1}{1}\neq\frac{6}{8}$.

102. Página 110

Llamamos *x* a la velocidad del bote e *y* a la velocidad de la corriente.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=45 \\ x-y=\frac{70}{2}=35 \end{array}\right\}$$

$x+y=45 \rightarrow x=45-y \qquad x-y=35 \rightarrow x=y+35$

$45-y=y+35 \rightarrow 2y=10 \rightarrow y=5$

$x=45-y \xrightarrow{y=5} x=40$

La velocidad del bote es de 40 millas/hora y la velocidad de la corriente es de 5 millas/hora.

PRUEBAS PISA

103. Página 111

Llamamos *x* al precio de cada refresco. Sabemos que 6 refrescos cuestan menos de 3 € y 12 refrescos más de 5 €.

$$\left.\begin{array}{l} 6x<3 \rightarrow x<\frac{1}{2}=0{,}50 \\ 12x>5 \rightarrow x>\frac{5}{12}=0{,}42 \end{array}\right\} \rightarrow \text{La solución es el intervalo } (-\infty;0{,}5)\cap(0{,}42;+\infty)=(0{,}42;0{,}5)$$

El precio del refresco está entre 42 céntimos y 50 céntimos, por tanto no tiene dinero suficiente para otro refresco.

104. Página 111

Llamamos *x* al número de amigas e *y* al dinero que tiene que pagar cada una al día.

$$\left.\begin{array}{r} xy=80 \\ (x+3)(y-6)=80 \end{array}\right\}$$

$xy=80 \rightarrow x=\frac{80}{y}$

$(x+3)(y-6)=80 \xrightarrow{x=\frac{80}{y}} \left(\frac{80}{y}+3\right)(y-6)=80 \rightarrow 3y-\frac{480}{y}-18=0$

$3y^2-18y-480=0 \rightarrow y=\frac{18\pm\sqrt{(-18)^2-4\cdot3\cdot(-480)}}{2\cdot3} \rightarrow \begin{cases} y_1=16 \\ y_2=-10 \end{cases}$

Nos quedamos con el valor positivo: $x=\frac{80}{y} \xrightarrow{y=16} x=5$

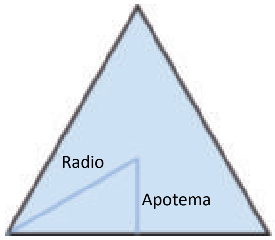
Van de excursión 5 amigas.

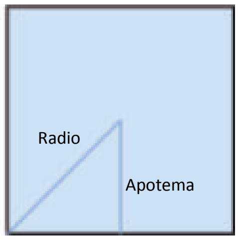
Áreas y volúmenes. Semejanza

6

CLAVES PARA EMPEZAR

1. Página 112





El polígono regular de 3 lados se llama triángulo equilátero y el polígono regular de 4 lados se llama cuadrado.

2. Página 112

$a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{b=20,\, c=21} a^2 = 20^2 + 21^2 = 841 \rightarrow a = 29$ cm

3. Página 112

a) $a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{a=73,\, b=55,\, c=48} 73^2 = 5329 = 55^2 + 48^2 \rightarrow$ Sí que son los lados de un triángulo rectángulo.

b) $a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{a=16,\, b=8,\, c=10} 16^2 = 256 \neq 164 = 8^2 + 10^2 \rightarrow$ No son los lados de un triángulo rectángulo.

VIDA COTIDIANA

EL TETRABRIK. Página 113

$V = 5 \cdot 4 \cdot 12 = 240 \text{ cm}^3 \xrightarrow{1 \text{ litro } = \text{ } 1 \text{ dm}^3 = \text{ } 0{,}001 \text{ cm}^3} V = 0{,}24$ ℓ de zumo.

RESUELVE EL RETO

RETO 1. Página 124

Sí. Tienen todos sus lados iguales, por lo tanto, sus lados son proporcionales, y todos sus ángulos también son iguales.

ACTIVIDADES

1. Página 114

Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la apotema: $a = \sqrt{6{,}53^2 - 2{,}5^2} = 6$ cm

Perímetro: $P = 8 \cdot 5 = 40$ cm

Área: $A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{40 \cdot 6}{2} = 120$ cm²

2. Página 114

a) Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la apotema: $a=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}=1{,}73\text{ cm}$.

Perímetro: $P=2\cdot 6=12\text{ cm}$. Área: $A=\frac{P\cdot a}{2}=\frac{12\cdot 1{,}73}{2}=10{,}38\text{ cm}^2$.

b) Perímetro: $P=3\cdot 7=21\text{ cm}$. Área: $A=\frac{P\cdot a}{2}=\frac{21\cdot 3{,}11}{2}=32{,}655\text{ cm}^2$.

3. Página 114

La apotema de un polígono regular es el radio de la circunferencia inscrita en él.

4. Página 115

a) La figura está formada por:

Dos trapecios: $B=4$ cm, $b=2$ cm, $h=6-4=2$ cm $\rightarrow A_{\text{Trapecio}}=\frac{B+b}{2}\cdot h=\frac{4+2}{2}\cdot 2=6\text{ cm}^2$

Un cuadrado: $l=4$ cm $\rightarrow A_{\text{Cuadrado}}=l^2=4^2=16\text{ cm}^2$

$A_{\text{total}}=2A_{\text{trapecio}}+A_{\text{cuadrado}}=2\cdot 6+16=28\text{ cm}^2$

b) La figura está formada por:

Cuatro triángulos: $b=2$ cm, calculamos la altura con el teorema de Pitágoras: $h=\sqrt{1{,}41^2-1^2}=1\text{ cm}$

$A_{\text{triángulo}}=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{2\cdot 1}{2}=1\text{ cm}^2$

Un cuadrado: calculamos el lado del cuadrado con el teorema de Pitágoras: $2l^2=2^2\rightarrow l=1{,}41$ cm

$A_{\text{cuadrado}}=l^2=1{,}41^2=2\text{ cm}^2$

$A_{\text{total}}=4A_{\text{triángulo}}+A_{\text{cuadrado}}=4\cdot 1+2=6\text{ cm}^2$

c) La figura está formada por:

El triángulo 1: $b=2$ cm, calculamos la altura con el teorema de Pitágoras: $h=\sqrt{2{,}24^2-1^2}=2\text{ cm}$

$A_{\text{triángulo 1}}=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{2\cdot 2}{2}=2\text{ cm}^2$

El triángulo 2: $b=3$ cm, $h=4$ cm $-$ 2 cm $=2$ cm $\rightarrow A_{\text{triángulo 2}}=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{3\cdot 2}{2}=3\text{ cm}^2$

Un rectángulo: $b=3$ cm, $h=2$ cm $\rightarrow A_{\text{rectángulo}}=b\cdot h=3\cdot 2=6\text{ cm}^2$

Un trapecio: $B=4$ cm, $b=2$ cm, calculamos la altura con el teorema de Pitágoras: $h=\sqrt{2{,}24^2-1^2}=2\text{ cm}$

$A_{\text{trapecio}}=\frac{B+b}{2}\cdot h=\frac{4+2}{2}\cdot 2=6\text{ cm}^2$

$A_{\text{total}}=A_{\text{triángulo 1}}+A_{\text{triángulo 2}}+A_{\text{rectángulo}}+A_{\text{trapecio}}=2+3+6+6=17\text{ cm}^2$

d) La figura está formada por:

El triángulo 1: **$b = 2$ cm**, calculamos la altura con el teorema de Pitágoras: $h = \sqrt{1{,}41^2 - 1^2} = 1$ cm

$A_{\text{triángulo 1}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1 \text{ cm}^2$

El triángulo 2: **$b = 2$ cm, $h = 2$ cm** $\rightarrow A_{\text{triángulo 2}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2 \text{ cm}^2$

Un romboide: **$b = 1$ cm**, calculamos la altura con el teorema de Pitágoras: $h = \sqrt{1{,}41^2 - 1^2} = 1$ cm

$A_{\text{romboide}} = b \cdot h = 1 \cdot 1 = 1 \text{ cm}^2$

$A_{\text{total}} = A_{\text{triángulo 1}} + A_{\text{triángulo 2}} + A_{\text{romboide}} = 1 + 2 + 1 = 4 \text{ cm}^2$

5. Página 115

a) La figura está formada por:

Un triángulo: **$b = 4$ cm, $h = 3$ cm − 2 cm = 1 cm** $\rightarrow A_{\textit{triángulo}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{4 \cdot 1}{2} = 2 \text{ cm}^2$

Un rectángulo: **$b = 4$ cm, $h = 2$ cm** $\rightarrow A_{\textit{rectángulo}} = b \cdot h = 4 \cdot 2 = 8 \text{ cm}^2$

$A_{\text{total}} = A_{\text{triángulo}} + A_{\text{rectángulo}} = 2 + 8 = 10 \text{ cm}^2$

b) La figura está formada por:

Dos trapecios: **$B = 4$ cm, $b = 2$ cm, $h = 1$ cm** $\rightarrow A_{\text{trapecio}} = \frac{B + b}{2} \cdot h = \frac{4 + 2}{2} \cdot 1 = 3 \text{ cm}^2$

Un rectángulo: **$b = 2$ cm, $h = 1$ cm** $\rightarrow A_{\text{rectángulo}} = b \cdot h = 2 \cdot 1 = 2 \text{ cm}^2$

$A_{\text{total}} = A_{\text{rectángulo}} + 2A_{\text{trapecio}} = 2 + 2 \cdot 3 = 8 \text{ cm}^2$

c) Tenemos que calcular el área de estas figuras:

Triángulo 1: **$b = 2$ cm, $h = 1$ cm** $\rightarrow A_{\text{triángulo 1}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1 \text{ cm}^2$

Triángulo 2: **$b = 2$ cm, $h = 0{,}5$ cm** $\rightarrow A_{\text{triángulo 2}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 0{,}5}{2} = 0{,}5 \text{ cm}^2$

Rectángulo: **$b = 6$ cm, $h = 3$ cm** $\rightarrow A_{\text{rectángulo}} = b \cdot h = 6 \cdot 3 = 18 \text{ cm}^2$

$A_{\text{total}} = A_{\text{rectángulo}} - 2A_{\text{triángulo 1}} - 2A_{\text{triángulo 2}} = 18 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0{,}5 = 15 \text{ cm}^2$

d) Tenemos que calcular el área de estas figuras:

Rombo 1: $D = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$ cm, **$d = 3$ cm** $\rightarrow A_{\text{rombo 1}} = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ cm}^2$

Rombo 2: $D = \frac{4}{2} = 2$ cm, **$d = 1{,}5$ cm** $\rightarrow A_{\text{rombo 2}} = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{2 \cdot 1{,}5}{2} = 1{,}5 \text{ cm}^2$

$A_{\text{total}} = 2A_{\text{rombo 1}} - A_{\text{rombo 2}} = 2 \cdot 6 - 1{,}5 = 10{,}5 \text{ cm}^2$

6. Página 116

a) $A = \pi(R^2 - r^2) = \pi(2^2 - 1^2) = 3\pi = 9{,}42\ \text{cm}^2$

b) $A_{\text{sector}} = \dfrac{\pi r^2 \alpha}{360} = \dfrac{\pi \cdot 3^2 \cdot 83{,}6}{360} = 6{,}57\ \text{cm}$

Calculamos la altura del triángulo con el teorema de Pitágoras: $h = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}\ \text{cm}$

$A_{\text{triángulo}} = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{4 \cdot \sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5} = 4{,}47\ \text{cm}^2$ $\qquad A_{\text{total}} = A_{\text{sector}} - A_{\text{triángulo}} = 6{,}57 - 4{,}47 = 2{,}1\ \text{cm}^2$

7. Página 116

a) $P = 2\pi(R + r) = 2\pi(5 + 3) = 50{,}27\ \text{cm}$

$A = \pi(R^2 - r^2) = \pi(5^2 - 3^2) = 16\pi = 50{,}27\ \text{cm}^2$

b) $P = \dfrac{2\pi r \alpha}{360} + 2r = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 30}{360} + 2 \cdot 4 = 10{,}09\ \text{cm}$

$A = \dfrac{\pi r^2 \alpha}{360} = \dfrac{\pi \cdot 4^2 \cdot 30}{360} = 4{,}19\ \text{cm}^2$

8. Página 116

Como el ángulo es de 60º es un triángulo equilátero. Calculamos la altura mediante el teorema de Pitágoras:

$h = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2} = 4{,}33$ cm, $b = 5$ cm $\rightarrow A = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{5 \cdot 4{,}33}{2} = 10{,}825\ \text{cm}^2$

9. Página 117

a) Tenemos que calcular el área de estas figuras:

Rectángulo: $b = 4$ cm, $h = 2$ cm $\rightarrow A_{\text{rectángulo}} = b \cdot h = 4 \cdot 2 = 8\ \text{cm}^2$

Semicírculo: $r = 2$ cm, $\alpha = 180° \rightarrow A_{\text{semicírculo}} = \dfrac{\pi r^2 \alpha}{360} = \dfrac{\pi \cdot 2^2 \cdot 180}{360} = 6{,}28\ \text{cm}^2$

$A_{\text{total}} = A_{\text{rectángulo}} - A_{\text{semicírculo}} = 8 - 6{,}28 = 1{,}72\ \text{cm}^2$

b) Tenemos que calcular el área de estas figuras:

Semicírculo: $r = \dfrac{6}{2} = 3$ cm, $\alpha = 180° \rightarrow A_{\text{semicírculo}} = \dfrac{\pi r^2 \alpha}{360} = \dfrac{\pi \cdot 3^2 \cdot 180}{360} = 14{,}14\ \text{cm}^2$

Triángulo: $b = 6$ cm, calculamos la altura con el teorema de Pitágoras: $h = \sqrt{6^2 - 3^2} = 5{,}2\ \text{cm}$

$A_{\text{triángulo}} = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{6 \cdot 5{,}2}{2} = 15{,}6\ \text{cm}^2$

$A_{\text{total}} = A_{\text{semicírculo}} + A_{\text{triángulo}} = 14{,}14 + 15{,}6 = 29{,}74\ \text{cm}^2$

10. Página 117

a) Tenemos que calcular el área de estas figuras:

Cuadrado: $l = 6$ cm $\rightarrow A_{\text{cuadrado}} = l^2 = 6^2 = 36\ \text{cm}^2$

Corona circular: $R = 3$ cm, $r = 1{,}5$ cm $\rightarrow A_{\text{corona}} = \pi(R^2 - r^2) = \pi(3^2 - 1{,}5^2) = 21{,}2\ \text{cm}^2$

$A_{\text{total}} = A_{\text{cuadrado}} - A_{\text{corona}} = 36 - 21{,}2 = 14{,}8\ \text{cm}^2$

b) Tenemos que calcular el área de estas figuras:

Cuadrado: $l = 8$ cm $\rightarrow A_{cuadrado} = l^2 = 8^2 = 64 \text{ cm}^2$

Semicírculos: $r = 2$ cm, $\alpha = 180° \rightarrow A_{semicírculo} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 180}{360} = 6{,}28 \text{ cm}^2$

$A_{total} = A_{cuadrado} - 4A_{semicírculo} = 64 - 4 \cdot 6{,}28 = 38{,}88 \text{ cm}^2$

c) Tenemos que calcular el área de un segmento circular:

$\alpha = 90°, r = 1 \text{ cm} \rightarrow A_{Segmento} = A_{Sector} - A_{Triángulo} = \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot 90}{360} - \frac{1 \cdot 1}{2} = 0{,}2854 \text{ cm}^2$

$A_{Total} = 8 \cdot A_{Segmento} = 8 \cdot 0{,}2854 = 2{,}28 \text{ cm}^2$

d) Tenemos que calcular el área de estas figuras:

Semicírculo: $r = 2$ cm, $\alpha = 180° \rightarrow A_{semicírculo} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 180}{360} = 6{,}28 \text{ cm}^2$

Segmento circular: $A_{Segmento} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 90}{360} - \frac{2 \cdot 2}{2} = 1{,}14 \text{ cm}^2$

$A_{total} = 3(A_{semicírculo} - 4A_{segmento}) = 3(6{,}28 - 4 \cdot 1{,}14) = 5{,}16 \text{ cm}^2$

11. Página 118

$A_{lateral} = \frac{P \cdot A}{2} \xrightarrow{P = 4 \cdot 6 = 24} A_{lateral} = \frac{24 \cdot 10}{2} = 120 \text{ cm}^2$

Utilizamos el teorema de Pitágoras para calcular la apotema de la base: $a = \sqrt{4^2 - 2^2} = 3{,}46$ cm

$A_{base} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{24 \cdot 3{,}46}{2} = 41{,}52 \text{ cm}^2$

$A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = 120 + 41{,}52 = 161{,}52 \text{ cm}^2$

12. Página 118

a) Utilizamos el teorema de Pitágoras para calcular la apotema de la pirámide: $a = \sqrt{7^2 + 1{,}5^2} = 7{,}16$ cm

$A_{lateral} = \frac{P \cdot A}{2} \xrightarrow{P = 3 \cdot 4 = 12} A_{lateral} = \frac{12 \cdot 7{,}16}{2} = 42{,}96 \text{ cm}^2$

$A_{base} = l^2 = 3^2 = 9 \text{ cm}^2$

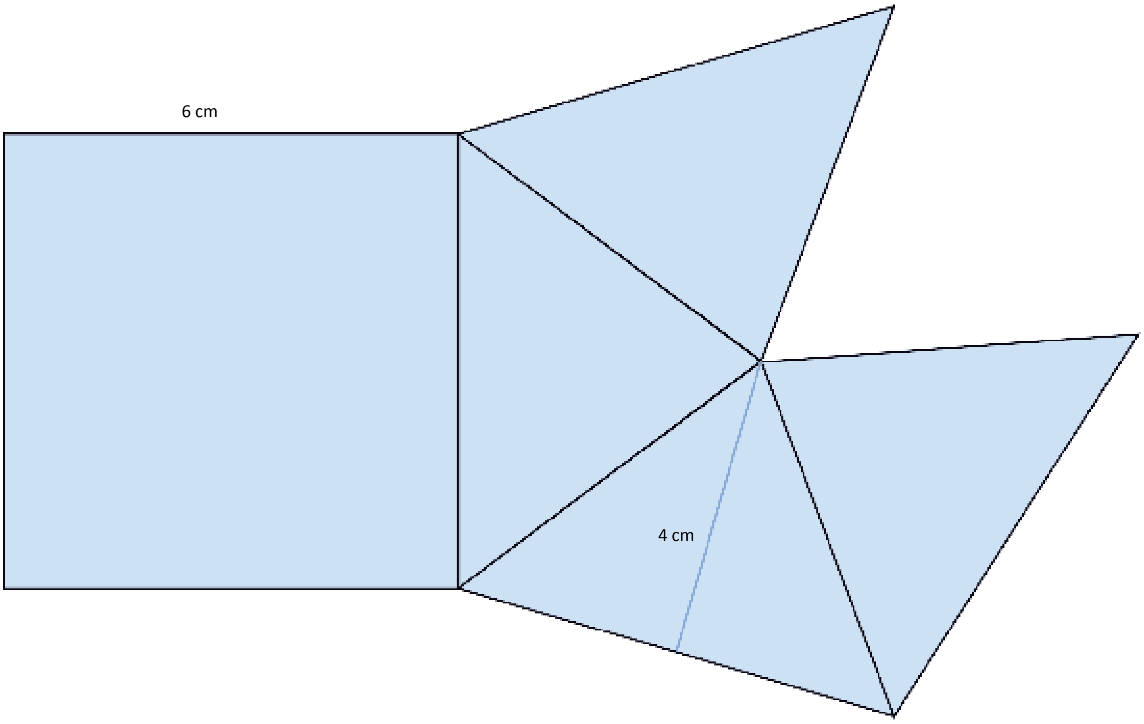
$A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = 42{,}96 + 9 = 51{,}96 \text{ cm}^2$

b) $A_{lateral} = P \cdot h \xrightarrow{P = 2 \cdot 5 = 10} A_{lateral} = 10 \cdot 6 = 60 \text{ cm}^2$

$A_{base} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{10 \cdot 1{,}38}{2} = 6{,}9 \text{ cm}^2$

$A_{total} = A_{lateral} + 2A_{base} = 60 + 2 \cdot 6{,}9 = 73{,}8 \text{ cm}^2$

13. Página 118



$$A_{\text{lateral}} = \frac{P \cdot A}{2} \xrightarrow{P=4\cdot 6=24} A_{\text{lateral}} = \frac{24 \cdot 4}{2} = 48 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{base}} = l^2 = 6^2 = 36 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + A_{\text{base}} = 48 + 36 = 84 \text{ cm}^2$$

14. Página 119

a) Pirámide 1:

Utilizamos el teorema de Pitágoras para calcular la apotema de la pirámide: $a = \sqrt{7^2 + 1{,}5^2} = 7{,}16$ cm.

$$A_{\text{lateral}} = \frac{P \cdot A}{2} \xrightarrow{P=4\cdot 3=12} A_{\text{lateral}} = \frac{12 \cdot 7{,}16}{2} = 42{,}96 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{base}} = l^2 = 3^2 = 9 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{pirámide 1}} = A_{\text{lateral}} + A_{\text{base}} = 42{,}96 + 9 = 51{,}96 \text{ cm}^2$$

Pirámide 2:

$$A_{\text{lateral}} = \frac{P \cdot A}{2} \xrightarrow{P=4\cdot 5=20} A_{\text{lateral}} = \frac{20 \cdot 8}{2} = 80 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{base}} = l^2 = 5^2 = 25 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{pirámide 2}} = A_{\text{lateral}} + A_{\text{base}} = 80 + 25 = 105 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{total}} = A_{\text{pirámide 1}} + A_{\text{pirámide 2}} = 42{,}96 + 105 = 147{,}96 \text{ cm}^2$$

b) Pirámide:

Utilizamos el teorema de Pitágoras para calcular la apotema de la pirámide: $a = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4{,}47$ cm.

$$A_{lateral} = \frac{P \cdot A}{2} \xrightarrow{P=4\cdot4=16} A_{lateral} = \frac{16 \cdot 4{,}47}{2} = 35{,}76 \text{ cm}^2$$

$$A_{base} = l^2 = 4^2 = 16 \text{ cm}^2$$

$$A_{pirámide} = A_{lateral} + A_{base} = 35{,}76 + 16 = 51{,}76 \text{ cm}^2$$

Prisma:

$$A_{lateral} = P \cdot h \xrightarrow{P=3\cdot6=18} A_{lateral} = 18 \cdot 4 = 72 \text{ cm}^2$$

Utilizamos el teorema de Pitágoras para calcular la apotema de la base: $a = \sqrt{3^2 - 1{,}5^2} = 2{,}6$ cm.

$$A_{base} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{18 \cdot 2{,}6}{2} = 23{,}4 \text{ cm}^2$$

$$A_{prisma} = A_{lateral} + 2A_{base} = 72 + 2 \cdot 23{,}4 = 118{,}8 \text{ cm}^2$$

$$A_{total} = A_{pirámide} + A_{prisma} = 51{,}76 + 118{,}8 = 170{,}56 \text{ cm}^2$$

15. Página 119

a) Pirámide:

Utilizamos el teorema de Pitágoras para calcular la apotema de la pirámide: $a = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ cm.

$$A_{lateral\ 1} = \frac{P \cdot A}{2} \xrightarrow{P=4\cdot8=32} A_{lateral\ 1} = \frac{32 \cdot 3}{2} = 48 \text{ cm}^2$$

Cubo:

$$A_{lateral\ 2} = P \cdot h \xrightarrow{P=4\cdot8=32} A_{lateral\ 2} = 32 \cdot 8 = 256 \text{ cm}^2$$

$$A_{base} = l^2 = 8^2 = 64 \text{ cm}^2$$

$$A_{total} = A_{lateral\ 1} + A_{lateral\ 2} + A_{base} = 48 + 256 + 64 = 368 \text{ cm}^2$$

b) Pirámide:

Utilizamos el teorema de Pitágoras para calcular la apotema de la pirámide: $a = \sqrt{2^2 + 1^2} = 2{,}24$ cm.

$$A_{lateral} = \frac{P \cdot A}{2} \xrightarrow{P=4\cdot2=8} A_{lateral} = \frac{8 \cdot 2{,}24}{2} = 8{,}96 \text{ cm}^2$$

Cubo, solo hay que sumar 4 caras:

$$A_{cubo} = 4 \cdot 2^2 = 16 \text{ cm}^2$$

Prisma:

$$A_{lateral} = P \cdot h \xrightarrow{P=4\cdot2+2\cdot2=12} A_{lateral} = 12 \cdot 1 = 12 \text{ cm}^2$$

$$A_{base} = b \cdot h = 4 \cdot 2 = 8 \text{ cm}^2$$

$$A_{cara\ superior} = 2 \cdot 2 = 4 \text{ cm}^2$$

Sumamos las áreas anteriores para calcular el área total:

$$A_{total} = A_{pirámide} + A_{cubo} + A_{prisma} = 8{,}96 + 16 + (12 + 8 + 4) = 48{,}96 \text{ cm}^2$$

16. Página 120

a) Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la generatriz del cono: $g=\sqrt{4^2+3^2}=5$ cm

$A=\pi r(g+r)=3\pi(3+5)=75,4$ cm²

b) $A=4\pi r^2=4\pi\cdot 4^2=201,06$ cm²

c) $A=2\pi rh=2\pi\cdot 2\cdot(2-1)=12,57$ cm²

d) $A_{huso}=\dfrac{4\pi r^2\alpha}{360}=\dfrac{4\pi\cdot 5^2\cdot 35}{360}=30,54$ cm²

17. Página 120

a) $A=2\pi r(h+r)=2\cdot 5\cdot\pi\cdot(2+5)=219,91$ cm²

b) Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la generatriz del cono: $g=\sqrt{4^2+2^2}=4,47$ cm

$A=\pi r(g+r)=2\pi(4,47+2)=40,65$ cm²

c) $A=4\pi r^2=4\pi 1^2=12,57$ cm²

d) $A=\dfrac{4\pi r^2\alpha}{360}=\dfrac{4\pi 2^2\cdot 30}{360}=4,19$ cm²

18. Página 120

Un casquete esférico cuya altura es igual al radio representa media esfera, por tanto, su área será la mitad de la de la esfera completa: $A=2\pi rh\xrightarrow{h=r}A=2\pi r^2=A=\dfrac{4\pi r^2}{2}=2\pi r^2$

19. Página 121

a) Esfera:

$A_{esfera}=4\pi r^2=4\pi 1^2=12,57$ cm²

Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la altura del casquete esférico que tenemos que descontar al área de la esfera:

$(r_{esfera}-h)^2+r^2_{cilindro}=r^2_{esfera}\rightarrow h=1-\sqrt{1^2-0,5^2}=0,134$ cm

$A_{casquete}=2\pi rh=2\pi 1\cdot 0,134=0,84$ cm²

Cilindro:

$A_{lateral}=2\pi rh=2\cdot 0,5\cdot\pi\cdot 3=9,42$ cm²

$A_{base}=\pi r^2=\pi\cdot 0,5^2=0,79$ cm²

$A_{total}=A_{esfera}-A_{casquete}+A_{lateral}+A_{base}=12,57-0,84+9,42+0,79=21,94$ cm²

b) Semiesfera:

$A_{semiesfera}=2\pi r^2=2\cdot\pi\cdot 3^2=56,55$ cm²

Cono:

Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la generatriz del cono:

$g=\sqrt{h^2+r^2}=\sqrt{7^2+3^2}=7,62$ cm

$A_{lateral}=\pi rg=\pi\cdot 3\cdot 7,62=71,82$ cm²

$A_{total}=A_{semiesfera}+A_{lateral}=56,55+71,82=128,37$ cm²

20. Página 121

Semiesfera:

$A_{\text{semiesfera}} = 2\pi r^2 = 2 \cdot \pi \cdot 3^2 = 56{,}55 \text{ cm}^2$

$A_{\text{corona}} = \pi(R^2 - r^2) = \pi(3^2 - 2^2) = 15{,}71 \text{ cm}^2$

Cilindro:

$A_{\text{lateral}} = 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 5 = 62{,}83 \text{ cm}^2$

$A_{\text{base}} = \pi r^2 = \pi 2^2 = 12{,}57 \text{ cm}^2$

$A_{total} = A_{\text{semiesfera}} + A_{\text{corona}} + A_{\text{lateral}} + A_{\text{base}} = 56{,}55 + 15{,}71 + 62{,}83 + 12{,}57 = 147{,}66 \text{ cm}^2$

21. Página 121

$A_{\text{corona}} = \pi(R^2 - r^2) = \pi(20^2 - 7^2) = 1\,102{,}7 \text{ cm}^2$

Cilindro 1:

$A_{\text{lateral 1}} = 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 20 \cdot 10 = 1256{,}64 \text{ cm}^2$

$A_{\text{base 1}} = \pi r^2 = \pi 20^2 = 1256{,}64 \text{ cm}^2$

Cilindro 2:

$A_{\text{lateral 2}} = 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 7 \cdot 30 = 1319{,}47 \text{ cm}^2$

$A_{\text{base 2}} = \pi r^2 = \pi 7^2 = 153{,}94 \text{ cm}^2$

$A_{\text{total}} = A_{\text{corona}} + A_{\text{lateral 1}} + A_{\text{base 1}} + A_{\text{lateral 2}} + A_{\text{base 2}} = 1102{,}7 + 1256{,}64 + 1256{,}64 + 1319{,}47 + 153{,}94 = 5089{,}39 \text{ cm}^2$

22. Página 122

a) $V = \pi r^2 \cdot h = \pi 2^2 \cdot 7 = 87{,}96 \text{ cm}^3$

b) Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la apotema de la base: $a = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2} = 4{,}33 \text{ cm}$.

$$A_{\text{base}} = \frac{P \cdot a}{2} \xrightarrow{P = 5 \cdot 6 = 30} A_{\text{base}} = \frac{30 \cdot 4{,}33}{2} = 64{,}95 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 64{,}95 \cdot 10 = 216{,}5 \text{ cm}^3$$

c) $A_{\text{base}} = l^2 = 2^2 = 4 \text{ cm}^2$

$V = A_{\text{base}} \cdot h = 4 \cdot 6 = 24 \text{ cm}^3$

23. Página 122

Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener altura: $h = \sqrt{12^2 - 5^2} = 10{,}91 \text{ mm}$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 10{,}91 = 285{,}62 \text{ mm}^3$$

24. Página 122

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi 3^3 = 113{,}1 \text{ cm}^3$$

El volumen de la semiesfera de igual radio será la mitad del de la esfera, es decir:

$$V = \frac{113{,}1}{2} = 56{,}55 \text{ cm}^3$$

25. Página 123

Cubo:

$V_{cubo} = l^3 = 5^3 = 125 \text{ cm}^3$

Prisma:

Utilizamos el teorema de Pitágoras para calcular la altura de la base: $h_{base} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 3{,}46 \text{ cm}$

$$V_{prisma} = A_{base} \cdot h = \left(\frac{b \cdot h_{base}}{2}\right) \cdot h = \left(\frac{4 \cdot 3{,}46}{2}\right) \cdot 5 = 34{,}6 \text{ cm}^3$$

$V_{total} = V_{cubo} + V_{prisma} = 125 + 34{,}6 = 159{,}6 \text{ cm}^3$

26. Página 123

Cilindro:

$V_{cilindro} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 6 = 117{,}81 \text{ cm}^3$

Cono:

Utilizamos el teorema de Pitágoras para calcular la altura: $h = \sqrt{3{,}91^2 - 2{,}5^2} = 3 \text{ cm}$

$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi 2{,}5^2 \cdot 3 = 19{,}63 \text{ cm}^3$$

$V_{total} = V_{cilindro} + V_{cono} = 117{,}81 + 19{,}63 = 137{,}44 \text{ cm}^3$

27. Página 123

Cilindro:

$V_{cilindro} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 5^2 \cdot 9 = 706{,}86 \text{ cm}^3$

Semiesfera:

$$V_{semiesfera} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{2}{3}\pi 5^3 = 261{,}8 \text{ cm}^3$$

$V_{total} = V_{cilindro} + V_{semiesfera} = 706{,}86 + 261{,}8 = 968{,}66 \text{ cm}^3$

28. Página 123

Prisma:

Utilizamos el teorema de Pitágoras para calcular la apotema de la base: $a = \sqrt{2^2 - 1^2} = 1{,}73 \text{ cm}$

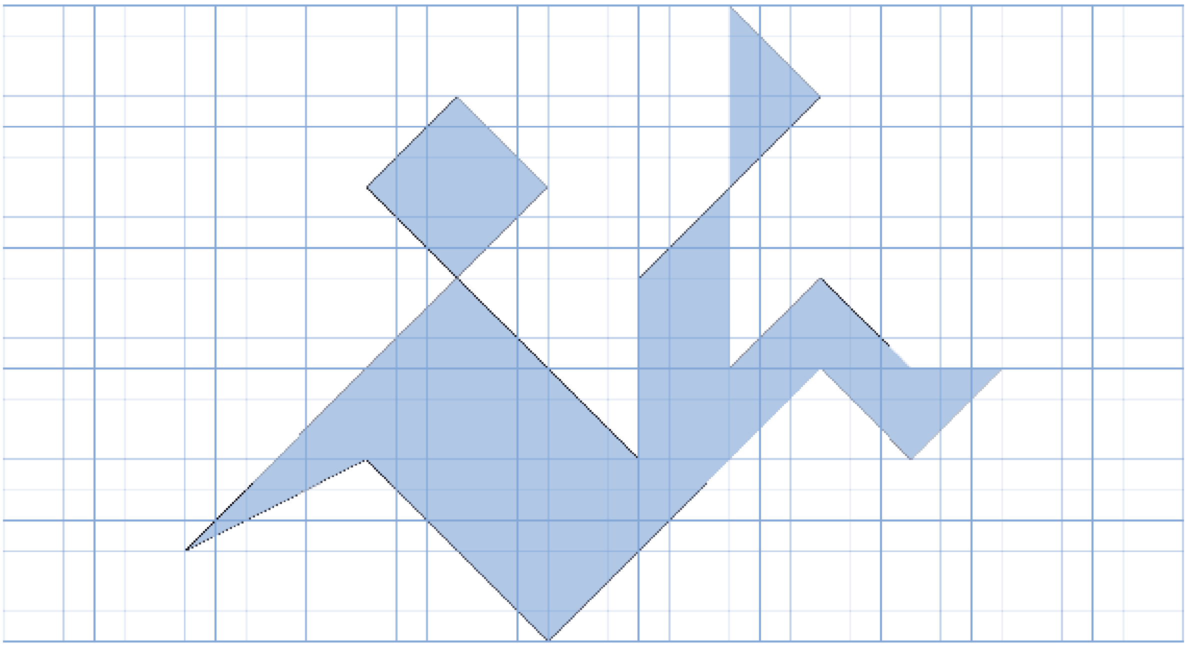
$$V_{prisma} = A_{base} \cdot h = \left(\frac{P \cdot a}{2}\right) \cdot h \xrightarrow{P=2\cdot 6=12} V_{prisma} = \left(\frac{12 \cdot 1{,}73}{2}\right) \cdot 6 = 62{,}28 \text{ cm}^3.$$

Semicilindro:

$$V_{semicilindro} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{2} = \frac{\pi 1^2 \cdot 4}{2} = 6{,}28 \text{ cm}^3$$

$V_{total} = V_{prisma} + V_{semicilindro} = 62{,}28 + 6{,}28 = 68{,}56 \text{ cm}^3$

29. Página 124



30. Página 124

Razón de semejanza $= \frac{3}{2} = 1{,}5$

31. Página 124

Si la razón de semejanza es 4, el lado de la figura semejante mide: 3 · 4 = 12 cm

32. Página 125

Razón de semejanza $= \frac{12}{4} = \frac{9}{3} = \frac{6}{2} = 3$

Área del poliedro 1:

$A_{lateral} = P_{base} \cdot h = (4 \cdot 2 + 3 \cdot 2) \cdot 2 = 28 \text{ cm}^2$

$A_{base} = b \cdot h = 4 \cdot 3 = 12 \text{ cm}^2$

$A_{poliedro\ 1} = A_{lateral} + 2A_{base} = 28 + 2 \cdot 12 = 52 \text{ cm}^2$

$A_{poliedro\ 2} = 3^2 \cdot A_{poliedro\ 1} = 9 \cdot 52 = 468 \text{ cm}^2$

33. Página 125

Utilizamos el teorema de Pitágoras para calcular la apotema de la pirámide: $a = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ cm}$

Área:

$A_{lateral} = \frac{P_{base} \cdot a}{2} \xrightarrow{P=6\cdot 4=24} A_{lateral} = \frac{24 \cdot 5}{2} = 60 \text{ cm}^2$

$A_{base} = l^2 = 6^2 = 36 \text{ cm}^2$

$A_{pirámide\ 1} = A_{lateral} + A_{base} = 60 + 36 = 96 \text{ cm}^2$

Volumen:

$V_{pirámide\ 1} = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h = \frac{1}{3} 36 \cdot 4 = 48 \text{ cm}^3$

Pirámide semejante con razón de semejanza 0,5:

Área:

$$A_{\text{pirámide 2}} = (0{,}5)^2 A_{\text{pirámide 1}} = 0{,}25 \cdot 96 = 24 \ \text{cm}^2$$

Volumen:

$$V_{\text{pirámide 2}} = (0{,}5)^3 \cdot V_{\text{pirámide 1}} = 0{,}125 \cdot 48 = 6 \ \text{cm}^3$$

34. Página 125

$$V_2 = r^3 \cdot V_1 \rightarrow r^3 = \frac{V_2}{V_1} = \frac{343}{8} \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{343}{8}} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

ACTIVIDADES FINALES

35. Página 126

a) $P = 3 \cdot 8 = 24 \ \text{cm} \longrightarrow A = \dfrac{P \cdot a}{2} = \dfrac{24 \cdot 3{,}62}{2} = 43{,}44 \ \text{cm}^2$

b) Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la longitud de los lados desconocidos del trapecio:

$l = \sqrt{5^2 + 1{,}5^2} = 5{,}22 \ \text{cm}$

$P = 6 + 3 + 2 \cdot 5{,}22 = 19{,}44 \ \text{cm}$ $\qquad A = \dfrac{B+b}{2} \cdot h = \dfrac{6+3}{2} \cdot 5 = 22{,}5 \ \text{cm}^2$

36. Página 126

a) $P = 2 \cdot (2+3) = 10 \ \text{cm}$ $\qquad A = b \cdot h = 2 \cdot 3 = 6 \ \text{cm}^2$

b) Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la longitud del lado: $l = \sqrt{0{,}5^2 + 2^2} = 2{,}06 \ \text{cm}$

$P = 4 \cdot l = 4 \cdot 2{,}06 = 8{,}24 \ \text{cm}$ $\qquad A = \dfrac{D \cdot d}{2} = \dfrac{1 \cdot 4}{2} = 2 \ \text{cm}^2$

c) Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la longitud de los lados desconocidos del trapecio:

$l = \sqrt{5^2 + 1^2} = 5{,}1 \ \text{mm}$ $\qquad P = 3 + 5 + 2 \cdot 5{,}1 = 18{,}2 \ \text{mm}$

$A = \dfrac{B+b}{2} \cdot h = \dfrac{5+3}{2} \cdot 5 = 20 \ \text{mm}^2$

d) $P = 2(4{,}2 + 2) = 12{,}4 \ \text{dm}$ $\qquad A = b \cdot h = 2 \cdot 4 = 8 \ \text{dm}^2$

37. Página 126

a) $P = 3 \cdot 5 = 15 \ \text{cm} \longrightarrow A = \dfrac{P \cdot a}{2} = \dfrac{15 \cdot 2{,}06}{2} = 15{,}45 \ \text{cm}^2$

b) $P = 4 \cdot 7 = 28 \ \text{m} \longrightarrow A = \dfrac{P \cdot a}{2} = \dfrac{28 \cdot 4{,}15}{2} = 58{,}1 \ \text{m}^2$

c) $P = 1 \cdot 8 = 8 \ \text{mm} \longrightarrow A = \dfrac{P \cdot a}{2} = \dfrac{8 \cdot 1{,}21}{2} = 4{,}84 \ \text{mm}^2$

d) $P = 2 \cdot 10 = 20 \ \text{cm} \longrightarrow A = \dfrac{P \cdot a}{2} = \dfrac{20 \cdot 3{,}08}{2} = 30{,}8 \ \text{cm}^2$

38. Página 126

a) $P = 6 \cdot 5 = 30$ cm

Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la apotema del pentágono: $a = \sqrt{5,1^2 - 3^2} = 4,12$ cm

$$A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{30 \cdot 4,12}{2} = 61,8 \text{ cm}^2$$

b) $P = 7 \cdot 6 = 42$ cm

Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la apotema del hexágono: $a = \sqrt{7^2 - 3,5^2} = 6,06$ cm

$$A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{42 \cdot 6,06}{2} = 127,26 \text{ cm}^2$$

39. Página 126

a) Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener el otro lado del rectángulo: $b = \sqrt{d^2 - a^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ cm

$P = 2 \cdot (a + b) = 2 \cdot (3 + 4) = 14$ cm

$A = a \cdot b = 3 \cdot 4 = 12$ cm^2

b) $P = 4 \cdot l = 4 \cdot 13 = 52$ m

Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la diagonal mayor: $D = 2\sqrt{13^2 - 5^2} = 24$ m

$$A = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{24 \cdot 10}{2} = 120 \text{ m}^2$$

c) Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la longitud de los lados desconocidos:

$$l = \sqrt{\left(\frac{11-5}{2}\right)^2 + 4^2} = 5 \text{ cm}$$

$P = 2 \cdot 5 + 5 + 11 = 26$ cm

$$A = \frac{B + b}{2} \cdot h = \frac{11 + 5}{2} \cdot 4 = 32 \text{ cm}^2$$

d) Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener el lado del cuadrado:

$l^2 + l^2 = 2,42^2 \rightarrow l^2 = 2,93 \rightarrow l = 1,71$ mm

$P = 4 \cdot l = 4 \cdot 1,71 = 6,84$ mm

$A = l^2 = 2,93$ mm^2

40. Página 126

a) Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la apotema del polígono: $a = \sqrt{2,61^2 - 1^2} = 2,41$ cm

$$P = 2 \cdot 8 = 16 \text{ cm} \rightarrow A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{16 \cdot 2,41}{2} = 19,28 \text{ cm}^2$$

b) Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la apotema del polígono: $a = \sqrt{4,61^2 - 2^2} = 4,15$ m

$$P = 4 \cdot 7 = 28 \text{ m} \rightarrow A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{28 \cdot 4,15}{2} = 58,1 \text{ m}^2$$

c) Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la apotema del polígono: $a=\sqrt{3{,}86^2-1^2}=3{,}73$ mm

$P=12\cdot 2=24$ mm $\rightarrow A=\dfrac{P\cdot a}{2}=\dfrac{24\cdot 3{,}73}{2}=44{,}76$ mm²

d) Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la apotema del polígono: $a=\sqrt{0{,}81^2-0{,}25^2}=0{,}77$ cm

$P=0{,}5\cdot 10=5$ cm $\rightarrow A=\dfrac{P\cdot a}{2}=\dfrac{5\cdot 0{,}77}{2}=1{,}925$ cm²

42. Página 126

a) Utilizamos el teorema de Pitágoras dos veces para obtener la altura del triángulo:

$$\begin{cases} x^2+h^2=6^2 \\ (5-x)^2+h^2=7^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2+h^2=36 \\ 25-10x+x^2+h^2=49 \end{cases} \rightarrow 25-10x=13 \rightarrow x=1{,}2 \text{ cm}$$

$h=\sqrt{36-1{,}2^2}=5{,}88$ cm $\qquad A=\dfrac{b\cdot h}{2}=\dfrac{5\cdot 5{,}88}{2}=14{,}7$ cm²

$P=5+6+7=18$ cm

b) Utilizamos el teorema de Pitágoras dos veces para obtener la altura del triángulo:

$$\begin{cases} x^2+h^2=3^2 \\ (6-x)^2+h^2=5^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2+h^2=9 \\ 36-12x+x^2+h^2=25 \end{cases} \rightarrow 36-12x=16 \rightarrow x=1{,}67 \text{ cm}$$

$h=\sqrt{9-1{,}67^2}=2{,}49$ cm $\qquad A=\dfrac{b\cdot h}{2}=\dfrac{6\cdot 2{,}49}{2}=7{,}47$ cm²

$P=3+5+6=14$ cm

c) Utilizamos el teorema de Pitágoras dos veces para obtener la altura del triángulo:

$$\begin{cases} x^2+h^2=6^2 \\ (10-x)^2+h^2=9^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2+h^2=36 \\ 100-20x+x^2+h^2=81 \end{cases} \rightarrow 100-20x=45 \rightarrow x=2{,}75 \text{ cm}$$

$h=\sqrt{36-2{,}75^2}=5{,}33$ cm $\qquad A=\dfrac{b\cdot h}{2}=\dfrac{10\cdot 5{,}33}{2}=26{,}65$ cm²

$P=6+9+10=25$ cm

d) Utilizamos el teorema de Pitágoras dos veces para obtener la altura del triángulo:

$$\begin{cases} x^2+h^2=7^2 \\ (11-x)^2+h^2=8^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2+h^2=49 \\ 121-22x+x^2+h^2=64 \end{cases} \rightarrow 121-22x=15 \rightarrow x=4{,}82 \text{ cm}$$

$h=\sqrt{49-4{,}82^2}=5{,}08$ cm

$A=\dfrac{b\cdot h}{2}=\dfrac{11\cdot 5{,}08}{2}=27{,}94$ cm²

43. Página 126

a) Utilizamos el teorema de Pitágoras dos veces para obtener la altura del triángulo:

$$\begin{cases} x^2+h^2=5^2 \\ (11-x)^2+h^2=9^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2+h^2=25 \\ 121-22x+x^2+h^2=81 \end{cases} \rightarrow 121-22x=56 \rightarrow x=2{,}95 \text{ cm}$$

$h=\sqrt{25-2{,}95^2}=4{,}04$ cm $\qquad A=\dfrac{b\cdot h}{2}=\dfrac{11\cdot 4{,}04}{2}=22{,}22$ cm²

b) Utilizamos el teorema de Pitágoras dos veces para obtener la altura del triángulo:

$$\begin{cases} x^2+h^2=3^2 \\ (6-x)^2+h^2=5^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2+h^2=9 \\ 36-12x+x^2+h^2=25 \end{cases} \rightarrow 36-12x=16 \rightarrow x=1{,}67 \text{ cm}$$

$$h=\sqrt{9-1{,}67^2}=2{,}49 \text{ cm} \qquad A=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{6\cdot 2{,}49}{2}=7{,}47 \text{ cm}^2$$

c) Utilizamos el teorema de Pitágoras dos veces para obtener la altura del triángulo:

$$\begin{cases} x^2+h^2=5^2 \\ (10-x)^2+h^2=8^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2+h^2=25 \\ 100-20x+x^2+h^2=64 \end{cases} \rightarrow 100-20x=39 \rightarrow x=3{,}05 \text{ cm}$$

$$h=\sqrt{25-3{,}05^2}=3{,}96 \text{ cm} \qquad A=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{10\cdot 3{,}96}{2}=19{,}8 \text{ cm}^2$$

d) Utilizamos el teorema de Pitágoras dos veces para obtener la altura del triángulo:

$$\begin{cases} x^2+h^2=3^2 \\ (7-x)^2+h^2=6^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2+h^2=9 \\ 49-14x+x^2+h^2=36 \end{cases} \rightarrow 49-14x=27 \rightarrow x=1{,}57 \text{ cm}$$

$$h=\sqrt{9-1{,}57^2}=2{,}56 \text{ cm} \qquad A=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{7\cdot 2{,}56}{2}=8{,}96 \text{ cm}^2$$

44. Página 126

$$P=2\cdot 10+2\cdot 6=32 \text{ cm}$$

Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la altura de los triángulos:

$$h_1=\sqrt{10^2-3^2}=9{,}54 \text{ cm} \rightarrow A_1=\frac{b_1\cdot h_1}{2}=\frac{6\cdot 9{,}54}{2}=28{,}62 \text{ cm}^2$$

$$h_2=\sqrt{6^2-3^2}=5{,}2 \text{ cm} \rightarrow A_2=\frac{b_2\cdot h_2}{2}=\frac{6\cdot 5{,}2}{2}=15{,}6 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{total}}=A_1+A_2=28{,}62+15{,}6=44{,}22 \text{ cm}^2$$

45. Página 127

Tenemos que calcular el área de estas figuras:

Triángulo 1: $b=8-6=2$ cm, $h=6-2=4$ cm $\rightarrow A_{\text{triángulo 1}}=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{2\cdot 4}{2}=4 \text{ cm}^2$

Cuadrado: $l=6$ cm $\rightarrow A_{\text{cuadrado}}=l^2=6^2=36 \text{ cm}^2$

Rectángulo: $b=4+2=6$ cm, $h=6$ cm $\rightarrow A_{\text{rectángulo}}=b\cdot h=6\cdot 6=36 \text{ cm}^2$

Triángulo 2: $b=2$ cm, $h=6$ cm $\rightarrow A_{\text{triángulo 2}}=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{2\cdot 6}{2}=6 \text{ cm}^2$

Triángulo 3: $b=2$ cm, $h=6$ cm $\rightarrow A_{\text{triángulo 3}}=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{2\cdot 6}{2}=6 \text{ cm}^2$

$$A_{\text{total}}=A_{\text{triángulo 1}}+A_{\text{cuadrado}}+A_{\text{rectángulo}}-A_{\text{triángulo 2}}-A_{\text{triángulo 3}}=A_{total}=4+36+36-6-6=64 \text{ cm}^2$$

Para calcular el perímetro necesitamos conocer los lados desconocidos, es decir, las hipotenusas de los triángulos 1, 2 y 3. Para obtenerlas utilizamos el teorema de Pitágoras:

$$c_1=\sqrt{2^2+4^2}=4{,}47 \text{ cm} \qquad c_2=\sqrt{2^2+6^2}=6{,}32 \text{ cm} \qquad c_3=\sqrt{2^2+6^2}=6{,}32 \text{ cm}$$

$$P=8+4+6{,}32+6{,}32+2+6+2+4{,}47=39{,}11 \text{ cm}$$

46. Página 127

Tenemos que calcular el área de estas figuras:

Cuadrado: $l=\sqrt{5} \rightarrow A_{\text{cuadrado}}=\left(\sqrt{5}\right)^2=5\ \text{cm}^2$

Rombo: $D=4$ cm, $l=\sqrt{5}$ cm.

Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la otra diagonal: $d=2\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2-2^2}=2\ \text{cm}$

$A=\frac{D\cdot d}{2}=\frac{2\cdot 4}{2}=4\ \text{cm}^2$ $A_{\text{total}}=4A_{\text{cuadrado}}+A_{\text{rombo}}=4\cdot 5+4=24\ \text{cm}^2$

47. Página 127

Tenemos que calcular el área de estas figuras:

Triángulo 1: $b=1$ cm, $h=3$ cm $\rightarrow A_{\text{triángulo 1}}=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{1\cdot 3}{2}=1{,}5\ \text{cm}^2$

El lado que falta del triángulo 1 mide $c_1=\sqrt{1^2+3^2}=3{,}16$ cm.

Trapecio: $B=3$ cm, $b=2$ cm, $h=3$ cm $\rightarrow A_{\text{trapecio}}=\frac{B+b}{2}\cdot h=\frac{3+2}{2}\cdot 3=7{,}5\ \text{cm}^{2\text{rd}4\text{c}}$

El lado que falta del trapecio mide $c_2=\sqrt{(3-2)^2+3^2}=3{,}16$ cm.

Triángulo 2: $b=2$ cm, $h=3$ cm $\rightarrow A_{\text{triángulo 2}}=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{2\cdot 3}{2}=3\ \text{cm}^2$

El lado que falta del triángulo 2 mide $c_3=\sqrt{1^2+3^2}=3{,}16$ cm.

$A_{\text{total}}=A_{\text{triángulo 1}}+A_{\text{trapecio}}+A_{\text{triángulo 2}}=1{,}5+7{,}5+3=12\ \text{cm}^2$

$P=3\cdot 3{,}16+1+3=13{,}48\ \text{cm}$

48. Página 127

La diagonal del cuadrado mide 2 · 4 cm = 8 cm.

Hallamos el lado del cuadrado utilizando el teorema de Pitágoras: $2l^2=8^2 \rightarrow l=\sqrt{32}=5{,}7\ \text{cm}$

Tenemos que calcular el área de estas figuras:

Cuadrado:

$A_{\text{cuadrado}}=l^2=5{,}7^2=32{,}49\ \text{cm}^2$

Triángulo:

Si sumamos dos veces la altura del triángulo con el lado del cuadrado obtenemos el diámetro de la circunferencia, es decir, $2h+l=8 \rightarrow h=\frac{8-5{,}7}{2}=1{,}15$ cm.

$A_{\text{triángulo}}=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{5{,}7\cdot 1{,}15}{2}=3{,}28\ \text{cm}^2$

$A_{\text{octógono}}=A_{\text{cuadrado}}+4A_{\text{triángulo}}=32{,}49+4\cdot 3{,}28=45{,}61\ \text{cm}^2$

49. Página 127

Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener el valor de x: $2x^2 = (\sqrt{2})^2 \rightarrow x = 1$ cm

Tenemos que calcular el área de estas figuras:

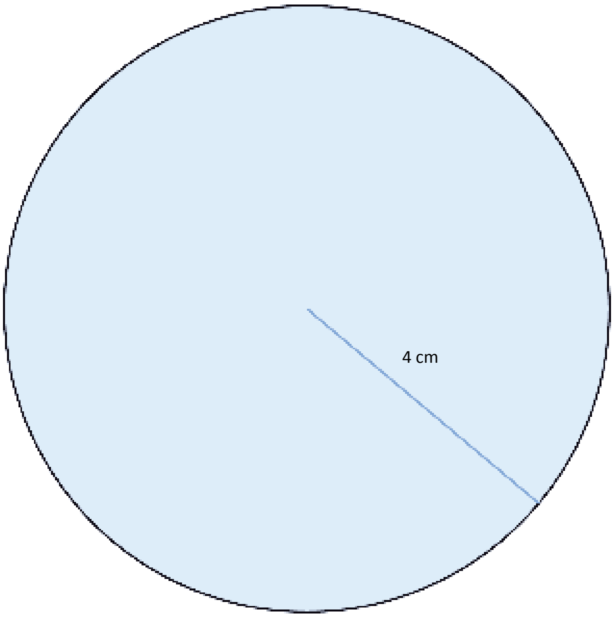
Cuadrado: $l = 2 + \sqrt{2}$ cm $\rightarrow A_{\text{cuadrado}} = l^2 = (2+\sqrt{2})^2 = 11{,}66$ cm²

Triángulo: $b = 1$ cm, $h = 1$ cm $\rightarrow A_{\text{triángulo}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1 \cdot 1}{2} = 0{,}5$ cm²

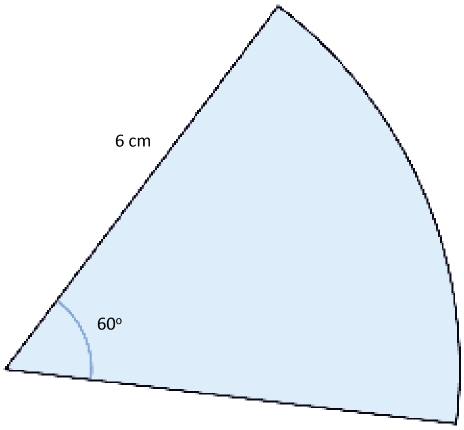
$A_{\text{total}} = A_{\text{cuadrado}} - 4A_{\text{triángulo}} = 11{,}66 - 4 \cdot 0{,}5 = 9{,}66$ cm²

50. Página 127

a) $P = 2\pi r = 2\pi 4 = 25{,}13$ cm $\qquad A = \pi r^2 = \pi 4^2 = 50{,}26$ cm²

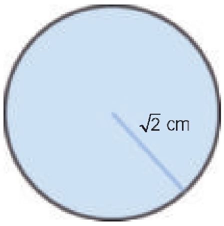


b) $P = \frac{2\pi r \alpha}{360} + 2r = \frac{2\pi 6 \cdot 60}{360} + 2 \cdot 6 = 18{,}28$ cm $\qquad A = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} = \frac{\pi 6^2 \cdot 60}{360} = 18{,}85$ cm²



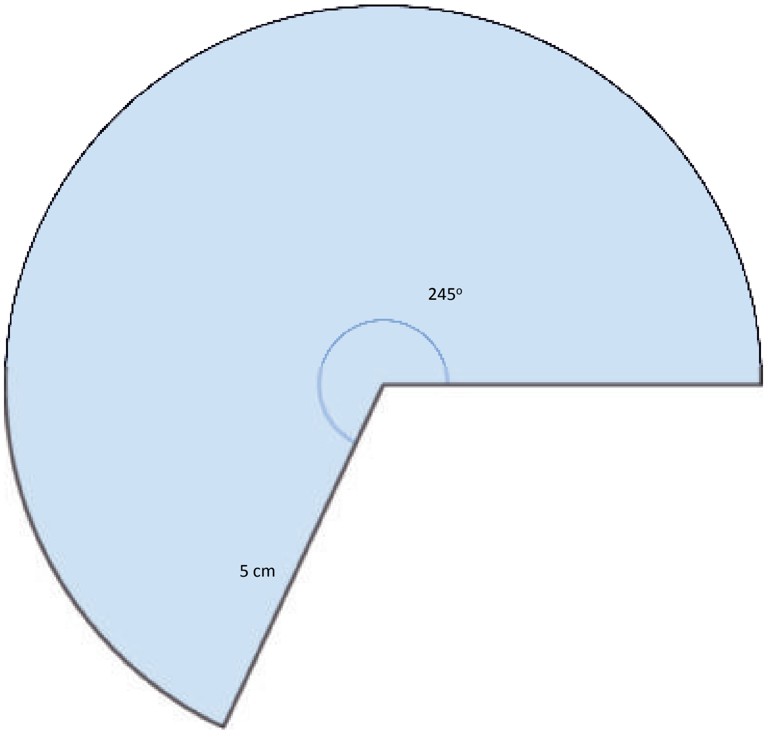
c) $P = 2\pi r = 2\pi\sqrt{2} = 8{,}88\ \text{cm}$

$A = \pi r^2 = \pi\left(\sqrt{2}\right)^2 = 12{,}57\ \text{cm}^2$



d) $P = \frac{2\pi r\alpha}{360} + 2r = \frac{2\pi 5 \cdot 245}{360} + 2 \cdot 5 = 31{,}38\ \text{cm}$

$A = \frac{\pi r^2\alpha}{360} = \frac{\pi 5^2 \cdot 245}{360} = 53{,}45\ \text{cm}^2$



51. Página 127

$P = 2\pi r = 62{,}83 \rightarrow r = \frac{62{,}83}{2\pi} = 10\ \text{cm}$

$A = \pi r^2 = \pi 10^2 = 314{,}16\ \text{cm}^2$

52. Página 127

$A = \frac{\pi r^2\alpha}{360} = \frac{\pi 5^2\alpha}{360} = 6{,}54 \rightarrow \alpha = \frac{6{,}54 \cdot 360}{25\pi} = 30°$

53. Página 127

$A = \frac{\pi r^2\alpha}{360} = \frac{\pi r^2 30}{360} = 26{,}18 \rightarrow r = \sqrt{\frac{26{,}18 \cdot 360}{30\pi}} = 10\ \text{cm}$

54. Página 127

a) $R = 8$ cm, $r = 0{,}2$ dm $= 2$ cm

$P = 2 \cdot \pi(R + r) = 2 \cdot \pi(8 + 2) = 62{,}83\ \text{cm}$

$A = \pi(R^2 - r^2) = \pi(8^2 - 2^2) = 188{,}5\ \text{cm}^2$

b) $r = 4$ cm, $\alpha = 43°$

$P = \frac{2\pi r\alpha}{360} + 2r = \frac{2\pi \cdot 4 \cdot 43}{360} + 2 \cdot 4 = 11\ \text{cm}$

$A = \frac{\pi r^2\alpha}{360} = \frac{\pi 4^2 \cdot 43}{360} = 6\ \text{cm}^2$

c) $R = 6{,}5$ cm, $r = 5$ cm

$P = 2 \cdot \pi (R + r) = 2 \cdot \pi (6{,}5 + 5) = 72{,}25$ cm $\qquad A = \pi (R^2 - r^2) = \pi (6{,}5^2 - 5^2) = 54{,}19$ cm²

b) $r = 2{,}5$ cm, $\alpha = 67^\circ$

$P = \dfrac{2\pi r\alpha}{360} + 2r = \dfrac{2\pi \cdot 2{,}5 \cdot 67}{360} + 2 \cdot 2{,}5 = 7{,}92$ cm $\qquad A = \dfrac{\pi r^2\alpha}{360} = \dfrac{\pi 2{,}5^2 \cdot 67}{360} = 3{,}65$ cm²

55. Página 127

$$A = \pi (R^2 - r^2) = \pi (10^2 - r^2) = 26\pi \rightarrow r = \sqrt{74} = 8{,}6 \text{ cm}$$

56. Página 127

$$A = \pi (R^2 - r^2) = \pi (R^2 - 3^2) = 16\pi \rightarrow R = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

57. Página 127

a) $P = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 50}{360} + 4{,}23 = 8{,}59$ cm

$A_{sector} = \dfrac{\pi \cdot 5^2 \cdot 50}{360} = 10{,}91$ cm²

Utilizamos el teorema de Pitágoras para calcular la altura: $h = \sqrt{5^2 - \left(\dfrac{4{,}23}{2}\right)^2} = 4{,}53$ cm

$A_{triángulo} = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{4{,}23 \cdot 4{,}53}{2} = 9{,}58$ cm²

$A_{total} = A_{sector} - A_{triángulo} = 10{,}91 - 9{,}58 = 1{,}33$ cm²

b) $P = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 70}{360} + 11{,}47 = 23{,}68$ cm

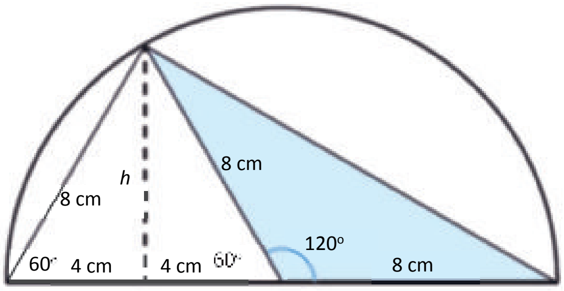
$A_{sector} = \dfrac{\pi \cdot 10^2 \cdot 70}{360} = 61{,}09$ cm²

Utilizamos el teorema de Pitágoras para calcular la altura: $h = \sqrt{10^2 - \left(\dfrac{11{,}47}{2}\right)^2} = 8{,}19$ cm

$A_{triángulo} = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{11{,}47 \cdot 8{,}19}{2} = 46{,}97$ cm²

$A_{total} = A_{sector} - A_{triángulo} = 61{,}09 - 46{,}97 = 14{,}12$ cm²

58. Página 127



Una de las alturas de este triángulo coincide con la altura de un triángulo equilátero de 8 cm de lado, la calculamos utilizando el teorema de Pitágoras:

$h = \sqrt{8^2 - \left(\dfrac{8}{2}\right)^2} = 6{,}93$ cm.

$A = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 27{,}72$ cm²

59. Página 127

a) Tenemos que hallar el área de estas figuras:

Semicírculo: $r = 1$ cm $\rightarrow A_{semicírculo} = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi 1^2 = 1{,}57\ \text{cm}^2$

Corona circular: $R = 1$ cm, $r = 0{,}5$ cm, $A_{corona} = \pi(R^2 - r^2) = \pi(1^2 - 0{,}5^2) = 2{,}36\ \text{cm}^2$

$A_{total} = 2A_{semicírculo} + A_{corona} = 2 \cdot 1{,}57 + 2{,}36 = 5{,}5\ \text{cm}^2$

b) El área azul está formada por 8 segmentos circulares. Para calcular su área tenemos que hallar el área de estas figuras:

Sector: $r = 1$ cm, $\alpha = 90°$ $\rightarrow A_{sector} = \frac{\pi r^2 90}{360} = \frac{\pi}{4}\ \text{cm}^2$

Triángulo: $b = 1$ cm, $h = 1$ cm $\rightarrow A_{triángulo} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1}{2}\ \text{cm}^2$

$A_{segmento\ circular} = A_{sector} - A_{triángulo} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ \text{cm}^2$

$A_{total} = 8A_{segmento\ circular} = 8 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = 2{,}28\ \text{cm}^2$

61. Página 128

a) Sector mayor: $R = 7$ cm, $\alpha = 42°$ $\rightarrow A_{sector\ 1} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} = \frac{\pi 7^2 \cdot 42}{360} = 17{,}96\ \text{cm}^2$

Sector menor: $r = 4$ cm, $\alpha = 42°$ $\rightarrow A_{sector\ 2} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} = \frac{\pi 4^2 \cdot 42}{360} = 5{,}86\ \text{cm}^2$

$A_{total} = A_{sector\ 1} - A_{sector\ 2} = 17{,}96 - 5{,}86 = 12{,}1\ \text{cm}^2$

b) Sector mayor: $R = 2$ cm, $\alpha = 33°$ $\rightarrow A_{sector\ 1} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} = \frac{\pi 2^2 \cdot 33}{360} = 1{,}15\ \text{cm}^2$

Sector menor: $r = 1$ cm, $\alpha = 33°$ $\rightarrow A_{sector\ 2} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} = \frac{\pi 1^2 \cdot 33}{360} = 0{,}29\ \text{cm}^2$

$A_{total} = A_{sector\ 1} - A_{sector\ 2} = 1{,}15 - 0{,}29 = 0{,}86\ \text{cm}^2$

c) Sector mayor: $R = 8$ cm, $\alpha = 68°$ $\rightarrow A_{sector1} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} = \frac{\pi 8^2 \cdot 68}{360} = 37{,}98\ \text{cm}^2$

Sector menor: $r = 5$ cm, $\alpha = 68°$ $\rightarrow A_{sector\ 2} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} = \frac{\pi 5^2 \cdot 68}{360} = 14{,}84\ \text{cm}^2$

$A_{total} = A_{sector\ 1} - A_{sector\ 2} = 37{,}98 - 14{,}84 = 23{,}14\ \text{cm}^2$

d) Sector mayor: $R = 7$ cm, $\alpha = 22°$ $\rightarrow A_{sector\ 1} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} = \frac{\pi 7^2 \cdot 22}{360} = 9{,}41\ \text{cm}^2$

Sector menor: $r = 5$ cm, $\alpha = 22°$ $\rightarrow A_{sector\ 2} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} = \frac{\pi 5^2 \cdot 22}{360} = 4{,}8\ \text{cm}^2$

$A_{total} = A_{sector\ 1} - A_{sector\ 2} = 9{,}41 - 4{,}8 = 4{,}61\ \text{cm}^2$

62. Página 128

Para calcular el área, tenemos que hallar el área de las siguientes figuras:

Trapecio circular:

Sector mayor: $R = 2$ cm, $\alpha = 180^o \rightarrow A_{\text{sector 1}} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} = \frac{\pi 2^2 \cdot 180}{360} = 6{,}28 \text{ cm}^2$

Sector menor: $r = 1$ cm, $\alpha = 180^o \rightarrow A_{\text{sector 2}} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} = \frac{\pi 1^2 \cdot 180}{360} = 1{,}57 \text{ cm}^2$

$A_{\text{trapecio}} = A_{\text{sector 1}} - A_{\text{sector 2}} = 6{,}28 - 1{,}57 = 4{,}71 \text{ cm}^2$

Círculo 1: $R = 2$ cm $A_{\text{círculo 1}} = \pi R^2 = \pi 2^2 = 12{,}56 \text{ cm}^2$

Círculo 2: $r = 1$ cm $A_{\text{círculo 2}} = \pi r^2 = \pi 1^2 = 3{,}14 \text{ cm}^2$

$A_{\text{total}} = A_{\text{trapecio}} + A_{\text{círculo 1}} + A_{\text{círculo 2}} = 4{,}71 + 12{,}56 + 3{,}14 = 20{,}41 \text{ cm}^2$

63. Página 128

a) Es un prisma pentagonal.

$A_{\text{lateral}} = P \cdot h \xrightarrow{P=4\cdot 5=20} A_{\text{lateral}} = 20 \cdot 8 = 160 \text{ cm}^2$

$A_{\text{base}} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{20 \cdot 2{,}75}{2} = 27{,}5 \text{ cm}^2$

$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + 2A_{\text{base}} = 160 + 2 \cdot 27{,}5 = 215 \text{ cm}^2$

b) Es un prisma heptagonal.

$A_{\text{lateral}} = P \cdot h \xrightarrow{P=1\cdot 7=7} A_{\text{lateral}} = 7 \cdot 7 = 49 \text{ cm}^2$

$A_{\text{base}} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{7 \cdot 1{,}04}{2} = 3{,}64 \text{ cm}^2$

$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + 2A_{\text{base}} = 49 + 2 \cdot 3{,}64 = 56{,}28 \text{ cm}^2$

64. Página 128

a) $A_{\text{lateral}} = P \cdot h \xrightarrow{P=7\cdot 6=42} A_{\text{lateral}} = 42 \cdot 4 = 168 \text{ cm}^2$

Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la apotema de la base: $a = \sqrt{7^2 - 3{,}5^2} = 6{,}06$ cm

$A_{\text{base}} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{42 \cdot 6{,}06}{2} = 127{,}31 \text{ cm}^2$

$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + 2A_{\text{base}} = 168 + 2 \cdot 127{,}31 = 422{,}62 \text{ cm}^2$

b) $A_{\text{lateral}} = P \cdot h \xrightarrow{P=2\cdot 6=12} A_{\text{lateral}} = 12 \cdot 6 = 72 \text{ cm}^2$

Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la apotema de la base: $a = \sqrt{2^2 - 1^2} = 1{,}73$ cm

$A_{\text{base}} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{12 \cdot 1{,}73}{2} = 10{,}38 \text{ cm}^2$

$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + 2A_{\text{base}} = 72 + 2 \cdot 10{,}38 = 92{,}76 \text{ cm}^2$

65. Página 128

a) $A_{\text{lateral}} = P \cdot h \xrightarrow{P=3\cdot 4=12} A_{\text{lateral}} = 12 \cdot 2 = 24 \text{ cm}^2$

$A_{\text{base}} = l^2 = 3^2 = 9 \text{ cm}^2$

$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + 2A_{\text{base}} = 24 + 2 \cdot 9 = 42 \text{ cm}^2$

b) $A_{\text{lateral}} = P \cdot h \xrightarrow{P=4\cdot 6=24} A_{\text{lateral}} = 24 \cdot 8 = 192 \text{ cm}^2$

Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la apotema de la base: $a = \sqrt{4^2 - 2^2} = 3{,}46 \text{ cm}$

$A_{\text{base}} = \dfrac{P \cdot a}{2} = \dfrac{24 \cdot 3{,}46}{2} = 41{,}52 \text{ cm}^2$

$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + 2A_{\text{base}} = 192 + 2 \cdot 41{,}52 = 275{,}04 \text{ cm}^2$

c) $A_{\text{lateral}} = P \cdot h \xrightarrow{P=1\cdot 5=5} A_{\text{lateral}} = 5 \cdot 1 = 5 \text{ cm}^2$

$A_{\text{base}} = \dfrac{P \cdot a}{2} = \dfrac{5 \cdot 0{,}69}{2} = 1{,}725 \text{ cm}^2$

$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + 2A_{\text{base}} = 5 + 2 \cdot 1{,}725 = 8{,}45 \text{ cm}^2$

d) $A_{\text{lateral}} = P \cdot h \xrightarrow{P=2\cdot 6=12} A_{\text{lateral}} = 12 \cdot 3 = 36 \text{ cm}^2$

Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la apotema de la base: $a = \sqrt{2^2 - 1^2} = 1{,}73 \text{ cm}$

$A_{\text{base}} = \dfrac{P \cdot a}{2} = \dfrac{12 \cdot 1{,}73}{2} = 10{,}38 \text{ cm}^2$

$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + 2A_{\text{base}} = 36 + 2 \cdot 10{,}38 = 56{,}76 \text{ cm}^2$

66. Página 128

$A_{\text{total}} = 6A_{\text{cara}} = 150 \rightarrow A_{\text{cara}} = \dfrac{150}{6} = 25 \text{ m}^2$

$A_{\text{cara}} = l^2 = 25 \rightarrow l = \sqrt{25} = 5 \text{ m}^2$

67. Página 128

a) Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la apotema de la base: $a = \sqrt{6^2 - 3^2} = 5{,}2 \text{ cm}$

$A_{\text{base}} = \dfrac{P \cdot a}{2} \xrightarrow{P=6\cdot 6=36} A_{\text{base}} = \dfrac{36 \cdot 5{,}2}{2} = 93{,}6 \text{ cm}^2$

Utilizamos de nuevo el teorema de Pitágoras para obtener la apotema de la pirámide:

$A_p = \sqrt{4^2 + 5{,}2^2} = 6{,}56 \text{ cm}$

$A_{\text{lateral}} = \dfrac{P \cdot A_p}{2} = \dfrac{36 \cdot 6{,}56}{2} = 118{,}08 \text{ cm}^2$

$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + A_{\text{base}} = 93{,}6 + 118{,}08 = 211{,}68 \text{ cm}^2$

b) $A_{\text{base}} = \dfrac{P \cdot a}{2} \xrightarrow{P=7\cdot 3=21} A_{\text{base}} = \dfrac{21 \cdot 3{,}11}{2} = 32{,}66 \text{ cm}^2$

Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la apotema de la pirámide: $A_p = \sqrt{5^2 + 3{,}11^2} = 5{,}89 \text{ cm}$

$A_{\text{lateral}} = \dfrac{P \cdot A_p}{2} = \dfrac{21 \cdot 5{,}89}{2} = 61{,}85 \text{ cm}^2$

$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + A_{\text{base}} = 61{,}85 + 32{,}66 = 94{,}51 \text{ cm}^2$

68. Página 129

a) $A_{base} = l^2 = 4^2 = 16 \text{ cm}^2$

$$A_{lateral} = \frac{P \cdot A_p}{2} \xrightarrow{P=4l=16} A_{lateral} = \frac{16 \cdot 2}{2} = 16 \text{ cm}^2$$

$$A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = 16 + 16 = 32 \text{ cm}^2$$

b) Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la apotema de la base: $a = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2} = 4{,}33 \text{ cm}$

$$A_{base} = \frac{P \cdot a}{2} \xrightarrow{P=6 \cdot 5=30} A_{base} = \frac{30 \cdot 4{,}33}{2} = 64{,}95 \text{ cm}^2$$

$$A_{lateral} = \frac{P \cdot A_p}{2} = \frac{30 \cdot 4}{2} = 60 \text{ cm}^2$$

$$A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = 64{,}95 + 60 = 124{,}95 \text{ cm}^2$$

c) $A_{base} = \frac{P \cdot a}{2} \xrightarrow{P=3 \cdot 5=15} A_{base} = \frac{15 \cdot 2{,}06}{2} = 15{,}45 \text{ cm}^2$

$$A_{lateral} = \frac{P \cdot A_p}{2} = \frac{15 \cdot 3}{2} = 22{,}5 \text{ cm}^2$$

$$A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = 15{,}45 + 22{,}5 = 37{,}95 \text{ cm}^2$$

d) Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la apotema de la base: $a = \sqrt{2^2 - 1^2} = 1{,}73 \text{ cm}$

$$A_{base} = \frac{P \cdot a}{2} \xrightarrow{P=6 \cdot 2=12} A_{base} = \frac{12 \cdot 1{,}73}{2} = 10{,}38 \text{ cm}^2$$

$$A_{lateral} = \frac{P \cdot A_p}{2} = \frac{12 \cdot 6}{2} = 36 \text{ cm}^2$$

$$A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = 36 + 10{,}38 = 46{,}38 \text{ cm}^2$$

69. Página 129

a) Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la apotema de la pirámide: $A_p = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ cm}$

$$A_{lateral} = \frac{P \cdot A_p}{2} \xrightarrow{P=4 \cdot 6=24} A_{lateral} = \frac{24 \cdot 5}{2} = 60 \text{ cm}^2$$

b) Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la apotema de la pirámide: $A_p = \sqrt{8^2 - 3^2} = 7{,}42 \text{ cm}$

$$A_{lateral} = \frac{P \cdot A_p}{2} \xrightarrow{P=6 \cdot 6=36} A_{lateral} = \frac{36 \cdot 7{,}42}{2} = 133{,}56 \text{ cm}^2$$

c) Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la arista básica: $\frac{l}{2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12 \rightarrow l = 24 \text{ cm}$

$$A_{lateral} = \frac{P \cdot A_p}{2} \xrightarrow{P=24 \cdot 5=120} A_{lateral} = \frac{120 \cdot 16}{2} = 960 \text{ cm}^2$$

d) Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la arista básica: $\frac{l}{2} = \sqrt{2{,}5^2 - 2^2} = 1{,}5 \rightarrow l = 3 \text{ cm}$

$$A_{lateral} = \frac{P \cdot A_p}{2} \xrightarrow{P=4 \cdot 3=12} A_{lateral} = \frac{12 \cdot 2{,}5}{2} = 15 \text{ cm}^2$$

70. Página 129

a) $A = 2\pi r(r + h) = 2\pi 7 \cdot (7 + 6) = 571{,}77 \text{ cm}^2$

b) $A = 2\pi r(r + h) = 2\pi 5 \cdot (5 + 8) = 408{,}41 \text{ cm}^2$

71. Página 129

a) $A=2\pi r(r+h)=2\pi 3\cdot(3+2)=94{,}25\ \text{cm}^2$

b) $A=2\pi r(r+h)=2\pi 4\cdot(4+8)=301{,}59\ \text{cm}^2$

c) $A=2\pi r(r+h)=2\pi 1\cdot(1+1)=12{,}57\ \text{cm}^2$

d) $A=2\pi r(r+h)=2\pi 2\cdot(2+3)=62{,}83\ \text{cm}^2$

72. Página 129

a) Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la generatriz del cono: $g=\sqrt{5^2+7^2}=8{,}6\ \text{cm}$

$A=\pi r(g+r)=\pi\cdot 5\cdot(8{,}6+5)=213{,}63\ \text{cm}^2$

b) Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la generatriz del cono: $g=\sqrt{10^2+2^2}=10{,}2\ \text{cm}$

$A=\pi r(g+r)=\pi\cdot 2\cdot(10{,}2+2)=76{,}65\ \text{cm}^2$

c) $A=\pi r(g+r)=\pi\cdot 3\cdot(5+3)=75{,}4\ \text{cm}^2$

d) $A=\pi r(g+r)=\pi\cdot 5\cdot(13+5)=282{,}74\ \text{cm}^2$

73. Página 129

a) Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la generatriz del cono: $g=\sqrt{2^2+1{,}5^2}=2{,}5\ \text{cm}$

$A=\pi r(g+r)=\pi\cdot 2\cdot(2{,}5+2)=28{,}27\ \text{cm}^2$

b) $A=\pi r(g+r)=\pi\cdot 4\cdot(5+4)=113{,}1\ \text{cm}^2$

c) Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la generatriz del cono: $g=\sqrt{5^2+12^2}=13\ \text{cm}$

$A=\pi r(g+r)=\pi\cdot 5\cdot(13+5)=282{,}74\ \text{cm}^2$

d) $A=\pi r(g+r)=\pi\cdot 4\cdot(3+4)=87{,}96\ \text{cm}^2$

74. Página 129

a) Para hallar el área pedida, tenemos que calcular el área de estas figuras:

Cono: Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la generatriz del cono: $g=\sqrt{4^2+3^2}=5\ \text{cm}$

$A_{\text{lateral 1}}=\pi rg=\pi\cdot 3\cdot 5=47{,}12\ \text{cm}^2$

Cilindro: $A_{\text{lateral 2}}=2\pi rh=2\pi\cdot 3\cdot 5=94{,}25\ \text{cm}^2$

Semiesfera: $A_{\text{semiesfera}}=\frac{1}{2}(4\pi r^2)=2\pi\cdot 3^2=56{,}55\ \text{cm}^2$

$A_{\text{total}}=A_{\text{lateral 1}}+A_{\text{lateral 2}}+A_{\text{semiesfera}}=47{,}12+94{,}25+56{,}55=197{,}92\ \text{cm}^2$

b) Para hallar el área pedida, tenemos que calcular el área de estas figuras:

Cilindro: $A_{\text{lateral}}=2\pi rh=2\pi\cdot 1\cdot 2=12{,}57\ \text{cm}^2$

$A_{\text{base}}=\pi r^2=\pi\cdot 1^2=3{,}14\ \text{cm}^2$

Semiesfera: $A_{\text{semiesfera}}=\frac{1}{2}(4\pi r^2)=2\pi\cdot 1^2=6{,}28\ \text{cm}^2$

$A_{\text{total}}=A_{\text{lateral}}+A_{\text{base}}+A_{\text{semiesfera}}=12{,}57+3{,}14+6{,}28=21{,}99\ \text{cm}^2$

75. Página 129

a) Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la apotema de la base: $a=\sqrt{6^2-3^2}=5,2$ cm

$$A_{base}=\frac{P\cdot a}{2}\xrightarrow{P=6\cdot 6=36}A_{base}=\frac{36\cdot 5,2}{2}=93,6\ \text{cm}^2$$

$$V=A_{base}\cdot h=93,6\cdot 8=748,8\ \text{cm}^3$$

b) $A_{base}=l^2=2^2=4\ \text{cm}^2$

$$V=\frac{1}{3}A_{base}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 4\cdot 4,6=6,13\ \text{cm}^3$$

76. Página 129

a) Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la apotema de la base: $a=\sqrt{3^2-1,5^2}=2,6$ cm

$$A_{base}=\frac{P\cdot a}{2}\xrightarrow{P=6\cdot 3=18}A_{base}=\frac{18\cdot 2,6}{2}=23,4\ \text{cm}^2$$

$$V=\frac{1}{3}A_{base}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 23,4\cdot 5=39\ \text{cm}^3$$

b) $A_{base}=l^2=1^2=1\ \text{cm}^2$

$$V=A_{base}\cdot h=1\cdot 7=7\ \text{cm}^3$$

c) $A_{base}=l^2=12^2=144\ \text{cm}^2$

Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la altura de la pirámide: $h=\sqrt{10^2-6^2}=8$ cm

$$V=\frac{1}{3}A_{base}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 144\cdot 8=384\ \text{cm}^3$$

d) Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la apotema de la base: $a=\sqrt{3^2-1,5^2}=2,6$ cm

$$A_{base}=\frac{P\cdot a}{2}\xrightarrow{P=6\cdot 3=18}A_{base}=\frac{18\cdot 2,6}{2}=23,4\ \text{cm}^2$$

$$V=A_{base}\cdot h=23,4\cdot 7=163,8\ \text{cm}^3$$

77. Página 129

a) $V=\pi r^2\cdot h=\pi\cdot 4^2\cdot 24=1206,37\ \text{cm}^3$

b) $V=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h=\frac{1}{3}\pi\cdot 1,5^2\cdot 5,3=12,49\ \text{cm}^3$

78. Página 129

a) $V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\cdot 2^3=33,51\ \text{cm}^3$

b) Un huso esférico de 90º representa $\frac{90}{360}=\frac{1}{4}$ de la esfera:

$$V=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 4^3=66,99\ \text{cm}^3$$

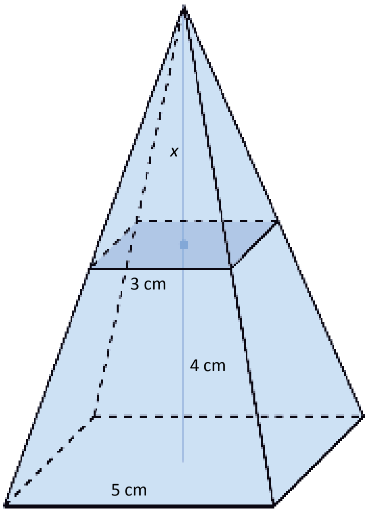
c) Un huso esférico de 30º representa $\frac{30}{360}=\frac{1}{12}$ de la esfera:

$$V=\frac{1}{12}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{1}{12}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 2^3=2,79\ \text{cm}^3$$

d) $V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3=113,1\ \text{cm}^3$

80. Página 130

a)



Utilizando el teorema de Tales obtenemos el valor de *x*:

$$\frac{3}{5}=\frac{x}{x+4}\rightarrow 3x+12=5x\rightarrow x=6 \text{ cm}$$

Pirámide completa:

Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la apotema de la pirámide: $A_p=\sqrt{2{,}5^2+(4+6)^2}=10{,}31$ cm.

$$A_{\text{lateral 1}}=\frac{P\cdot A_p}{2}\xrightarrow{P=5\cdot4=20}A_{\text{lateral 1}}=\frac{20\cdot10{,}31}{2}=103{,}1 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{base 1}}=l^2=5^2=25 \text{ cm}^2$$

$$V_1=\frac{1}{3}A_{\text{base 1}}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot25\cdot10=83{,}33 \text{ cm}^3$$

Pirámide generada por el corte plano:

Utilizamos el teorema de Tales para obtener la apotema de la pirámide generada:

$$\frac{3}{5}=\frac{A_p}{10{,}31}\rightarrow A_p=6{,}19 \text{ cm}$$

$$A_{\text{lateral 2}}=\frac{P\cdot A_p}{2}\xrightarrow{P=3\cdot4=12}A_{\text{lateral 2}}=\frac{12\cdot6{,}19}{2}=37{,}14 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{base 2}}=l^2=3^2=9 \text{ cm}^2$$

$$V_2=\frac{1}{3}A_{\text{base 2}}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot9\cdot6=18 \text{ cm}^3$$

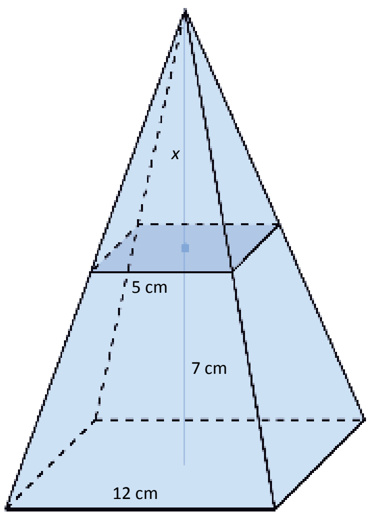
Calculamos el área del tronco de pirámide:

$$A_{\text{total}}=A_{\text{lateral 1}}-A_{\text{lateral 2}}+A_{\text{base 1}}+A_{\text{base 2}}=103{,}1-37{,}14+25+9=99{,}96 \text{ cm}^2$$

Calculamos el volumen del tronco de pirámide:

$$V_{\text{total}}=V_1-V_2=83{,}33-18=65{,}33 \text{ cm}^3$$

b)



Utilizando el teorema de Tales obtenemos el valor de *x*:

$$\frac{5}{12}=\frac{x}{x+7}\rightarrow 5x+35=12x\rightarrow x=5\ \text{cm}$$

Pirámide completa:

Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la apotema de la pirámide: $A_p=\sqrt{6^2+(7+5)^2}=13{,}42\ \text{cm}$

$$A_{\text{lateral 1}}=\frac{P\cdot A_p}{2}\xrightarrow{P=12\cdot 4=48}A_{\text{lateral 1}}=\frac{48\cdot 13{,}42}{2}=322{,}08\ \text{cm}^2$$

$$A_{\text{base 1}}=l^2=12^2=144\ \text{cm}^2$$

$$V_1=\frac{1}{3}A_{\text{base 1}}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 144\cdot 12=576\ \text{cm}^3$$

Pirámide generada por el corte plano:

Utilizamos el teorema de Tales para obtener la apotema de la pirámide generada:

$$\frac{5}{12}=\frac{A_p}{13{,}42}\rightarrow A_p=5{,}59\ \text{cm}$$

$$A_{\text{lateral 2}}=\frac{P\cdot A_p}{2}\xrightarrow{P=5\cdot 4=20}A_{\text{lateral 2}}=\frac{20\cdot 5{,}59}{2}=55{,}9\ \text{cm}^2$$

$$A_{\text{base 2}}=l^2=5^2=25\ \text{cm}^2$$

$$V_2=\frac{1}{3}A_{\text{base 2}}\cdot h=\frac{1}{3}25\cdot 5=41{,}67\ \text{cm}^3$$

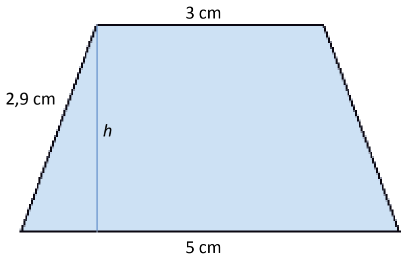
Calculamos el área del tronco de pirámide:

$$A_{\text{total}}=A_{\text{lateral 1}}-A_{\text{lateral 2}}+A_{\text{base 1}}+A_{\text{base 2}}=322{,}08-55{,}9+144+25=435{,}18\ \text{cm}^2$$

Calculamos el volumen del tronco de pirámide:

$$V_{\text{total}}=V_1-V_2=576-41{,}67=534{,}33\ \text{cm}^3$$

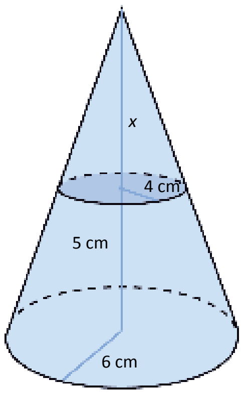
81. Página 130



Utilizamos el teorema de Pitágoras: $h = \sqrt{2,9^2 - 1^2} = 2,72$ cm

83. Página 131

a)



Utilizamos el teorema de Tales para obtener la altura del cono completo:

$$\frac{4}{6} = \frac{x}{x+5} \rightarrow 4x + 20 = 6x \rightarrow x = 10 \rightarrow \begin{cases} h_1 = 10 + 5 = 15 \text{ cm} \\ h_2 = 10 \text{ cm} \end{cases}$$

Calculamos las generatrices de los conos utilizando el teorema de Pitágoras:

$$g_1 = \sqrt{15^2 + 6^2} = 16,16 \text{ cm}$$

$$g_2 = \sqrt{10^2 + 4^2} = 10,77 \text{ cm}$$

$$A_1 = \pi r_1(g_1 + r_1) = \pi \cdot 6 \cdot (16,16 + 6) = 417,49 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{lateral 2}} = \pi r_2 g_2 = \pi 4 \cdot 10,77 = 135,27 \text{ cm}^2$$

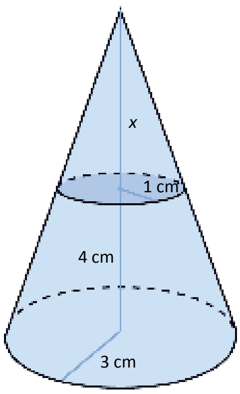
$$A_{\text{base 2}} = \pi r_2^2 = \pi 4^2 = 50,24 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{total}} = A_1 + A_{\text{base 2}} - A_2 = 417,49 + 50,24 - 135,27 = 332,46 \text{ cm}^2$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi r_1^2 \cdot h_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 15 = 565,49 \text{ cm}^3 \qquad V_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi r_2^2 \cdot h_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi 4^2 \cdot 10 = 167,55 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{total}} = V_1 - V_2 = 565,49 - 167,55 = 397,94 \text{ cm}^3$$

b)



Utilizamos el teorema de Tales para obtener la altura del cono completo:

$$\frac{1}{3} = \frac{x}{x+4} \rightarrow x + 4 = 3x \rightarrow x = 2 \rightarrow \begin{cases} h_1 = 4 + 2 = 6 \text{ cm} \\ h_2 = 2 \text{ cm} \end{cases}$$

Calculamos las generatrices de los conos utilizando el teorema de Pitágoras:

$$g_1 = \sqrt{3^2 + 6^2} = 6,71 \text{ cm} \qquad g_2 = \sqrt{2^2 + 1^2} = 3,16 \text{ cm}$$

$$A_1 = \pi r_1(g_1 + r_1) = \pi 3 \cdot (6,71 + 3) = 91,47 \text{ cm}^2$$

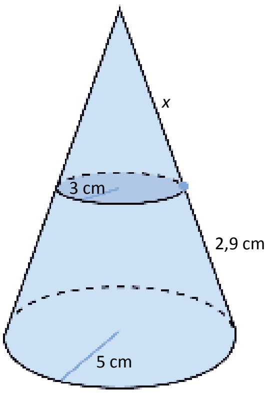
$$A_{\text{lateral 2}} = \pi r_2 g_2 = \pi 1 \cdot 3,16 = 9,92 \text{ cm}^2 \qquad A_{\text{base 2}} = \pi r_2^2 = \pi 1 = 3,14 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{total}} = A_1 + A_{\text{base 2}} - A_{\text{lateral 2}} = 91,47 + 3,14 - 9,92 = 84,69 \text{ cm}^2$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi r_1^2 \cdot h_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi 3^2 \cdot 6 = 56,55 \text{ cm}^3 \qquad V_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi r_2^2 \cdot h_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi 1^2 \cdot 2 = 2,09 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{total}} = V_1 - V_2 = 56,55 - 2,09 = 54,46 \text{ cm}^3$$

84. Página 131



Utilizamos el teorema de Tales para obtener la generatriz del cono completo:

$$\frac{3}{5} = \frac{x}{x+2,9} \to 3x + 8,7 = 5x \to x = 4,35 \to \begin{cases} g_1 = 7,25 \text{ cm} \\ g_2 = 4,35 \text{ cm} \end{cases}$$

$$A_{\text{lateral 1}} = \pi r_1 g_1 = \pi 5 \cdot 4,35 = 68,33 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{base 1}} = \pi r_1^2 = \pi 5^2 = 78,54 \text{ cm}^2$$

Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la altura del cono completo: $h_1 = \sqrt{7,25^2 - 5^2} = 5,25$ cm.

$$V_1 = \frac{1}{3} A_{\text{base 1}} \cdot h_1 = \frac{1}{3} 78,54 \cdot 5,25 = 137,45 \text{ cm}^3$$

$A_{\text{lateral 2}} = \pi r_2 g_2 = \pi 3 \cdot 2,9 = 27,33 \text{ cm}^2$ $\qquad$ $A_{\text{base 2}} = \pi r_2^2 = \pi 3^2 = 28,27 \text{ cm}^2$

Utilizamos el teorema de Tales para obtener la altura del cono generado:

$$\frac{3}{5} = \frac{h_2}{5,25} \to h_2 = 3,15 \text{ cm}$$

$$V_2 = \frac{1}{3} A_{\text{base 2}} \cdot h_2 = \frac{1}{3} 28,27 \cdot 3,15 = 29,68 \text{ cm}^3$$

Calculamos el área del tronco de cono:

$$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral 1}} - A_{\text{lateral 2}} + A_{\text{base 1}} + A_{\text{base 2}} = 68,33 - 27,33 + 78,54 + 28,27 = 147,78 \text{ cm}^2$$

Calculamos el volumen del tronco de cono:

$$V_{\text{total}} = V_1 - V_2 = 137,45 - 29,68 = 107,77 \text{ cm}^2$$

85. Página 131

Calculamos el volumen del ortoedro original: $V_1 = A_{\text{base}} \cdot h = (3 \cdot 4) \cdot 5 = 60 \text{ cm}^3$

Volumen del ortoedro semejante: $V = 0,5^3 \cdot 60 = 7,5 \text{ cm}^3$

86. Página 131

$$A_{\text{lateral}} = 2\pi r h = 2\pi r \cdot 4 = 75,4 \to r = \frac{75,4}{8\pi} = 3 \text{ cm}$$

El radio del cilindro semejante mide 0,25 · 3 = 0,75 cm y la altura 0,25 · 4 = 1 cm, por tanto, el volumen es:

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 0,75^2 \cdot 1 = 1,77 \text{ cm}^3$$

87. Página 131

Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la apotema de la base y, posteriormente, la de la pirámide:

$a=\sqrt{3^2-1{,}5^2}=2{,}6\ \text{cm}$ $\qquad A_p=\sqrt{2{,}6^2+8^2}=8{,}41\ \text{cm}$

$A_{base}=\dfrac{P\cdot a}{2}\xrightarrow{P=6\cdot 3=18}A_{base}=\dfrac{18\cdot 2{,}6}{2}=23{,}4\ \text{cm}^2$ $\qquad A_{lateral}=\dfrac{P\cdot A_p}{2}=\dfrac{18\cdot 8{,}41}{2}=75{,}69\ \text{cm}^2$

$A_1=A_{base}+A_{lateral}=23{,}4+75{,}69=99{,}09\ \text{cm}^2$

Superficie de la pirámide semejante:

$A_2=2^2A_1=4\cdot 99{,}09=396{,}36\ \text{cm}^2$

88. Página 131

$A_1=\pi r(g+r)=3\pi(g+3)=94{,}25\rightarrow g=\dfrac{94{,}25}{3\pi}-3=7\ \text{cm}$

Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la altura: $h=\sqrt{7^2-3^2}=6{,}32\ \text{cm}$.

Llamamos r a la razón de semejanza: $A_1=r^2A_2\rightarrow 94{,}25=r^2\cdot 23{,}56\rightarrow r=2$.

89. Página 131

Obtenemos la altura del ascensor a partir del volumen:

$V=A_{base}\cdot h\rightarrow 3{,}6=1{,}2^2\cdot h\rightarrow h=2{,}5\ \text{cm}$

Rubén mide menos de 2,5 m; por lo tanto, entrará en el ascensor.

90. Página 131

Obtenemos la superficie de la caja:

$A_{base}=b\cdot h=1{,}5\cdot 2=3\ \text{dm}^2$ $\qquad A_{lateral}=P\cdot h\xrightarrow{P=2\cdot(1{,}5+2)=7}A_{lateral}=7\cdot 2{,}5=17{,}5\ \text{dm}^2$

$A_{total}=A_{lateral}+2A_{base}=17{,}5+2\cdot 3=23{,}5\ \text{dm}^2$

Obtenemos la cantidad de papel:

$A=b\cdot h=1\cdot 2=2\ \text{m}^2=200\ \text{dm}^2$

María tendrá papel suficiente para envolver el regalo.

91. Página 131

Volumen primer tarro: $V=\pi r^2h=\pi 4^2\cdot 8=402{,}12\ \text{cm}^3$

Volumen segundo tarro: $V=A_{base}\cdot h=(4^2)\cdot 8=128\ \text{cm}^3$

La mermelada sale más cara con el segundo tipo de tarro, ya que lleva menos cantidad de mermelada.

92. Página 131

a) $r=6371\ \text{km}\rightarrow\begin{cases}A=4\pi r^2=4\pi\cdot 6371^2=510\,064\,471{,}91\ \text{km}^2\\ V=\dfrac{4}{3}\pi r^3=\dfrac{4}{3}\pi\cdot 6371^3=1\,083\,206\,916\,845{,}75\ \text{km}^3\end{cases}$

b) $r = 6052 \text{ km} \rightarrow \begin{cases} A = 4\pi r^2 = 4\pi 6052^2 = 460\,264\,736{,}85 \text{ km}^2 \\ V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{4}{3}\pi 6052^3 = 928\,507\,395\,798{,}2 \text{ km}^3 \end{cases}$

c) $r = 58232 \text{ km} \rightarrow \begin{cases} A = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 58232^2 = 42\,612\,133\,285{,}01 \text{ km}^2 \\ V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 58232^3 = 827\,129\,915\,150\,897{,}6 \text{ km}^3 \end{cases}$

93. Página 131

$$\left.\begin{array}{l} r = \dfrac{25}{2} = 12{,}5 \text{ cm} \\ h = 13 - 7 = 6 \text{ cm} \end{array}\right\} \rightarrow V = \pi r^2 h = \pi \cdot 12{,}5^2 \cdot 6 = 2\,945{,}24 \text{ cm}^3 = 2{,}945 \ \ell$$

Luis va a cocinar 2,945 ℓ de judías.

94. Página 131

Volumen mínimo: $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 0{,}1^2 \cdot 8 = 0{,}25 \text{ cm}^3$

Volumen máximo: $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 0{,}15^2 \cdot 10 = 0{,}71 \text{ cm}^3$

El volumen de líquido que cabe dentro se encuentra entre 0,25 cm^3 y 0,71 cm^3.

DEBES SABER HACER

1. Página 131

a) Tenemos que hallar el área de estas figuras:

Cuadrado: $l = 2$ cm $\rightarrow A_{\text{cuadrado}} = l^2 = 2^2 = 4 \text{ cm}^2$

Trapecio: $B = 2$ cm + 3 cm = 5 cm, $b = 3$ cm

Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la altura del trapecio: $h = \sqrt{2{,}24^2 - 1^2} = 2 \text{ cm}$

$$A_{\text{trapecio}} = \frac{B+b}{2} \cdot h = \frac{5+3}{2} \cdot 2 = 8 \text{ cm}^2$$

Triángulo: $b = 3$ cm, $h = 2$ cm $\rightarrow A_{\text{triángulo}} = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{3 \cdot 2}{2} = 3 \text{ cm}^2$

$$A_{\text{total}} = A_{\text{cuadrado}} + A_{\text{trapecio}} + A_{\text{triángulo}} = 4 + 8 + 3 = 15 \text{ cm}^2$$

b) Tenemos que hallar el área de estas figuras:

Corona 1: $r = \dfrac{4}{2} = 2$ cm, $R = 2 + 1 = 3$ cm $\rightarrow A_{\text{corona 1}} = \pi(R^2 - r^2) = \pi(3^2 - 2^2) = 5\pi = 15{,}7 \text{ cm}^2$

Corona 2: $r = \dfrac{6}{2} = 3$ cm, $R = 3 + 1 = 4$ cm $\rightarrow A_{\text{corona 2}} = \pi(R^2 - r^2) = \pi(4^2 - 3^2) = 7\pi = 21{,}98 \text{ cm}^2$

$$A_{\text{total}} = A_{\text{corona 1}} + A_{\text{corona 2}} = 9{,}42 + 15{,}71 = 25{,}13 \text{ cm}^2$$

2. Página 131

a) $A = 2\pi r(r + h) = 2\pi \cdot 7 \cdot (7 + 4) = 483{,}805 \text{ km}^2$

b) Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la generatriz del cono: $g = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15 \text{ cm}$.

$A = \pi r(r + g) = \pi \cdot 12 \cdot (12 + 15) = 1017{,}88 \text{ cm}^2$

3. Página 131

a) $A_{base} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ m}^2$

Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la hipotenusa de la base: $c = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ m}$

$A_{lateral} = P \cdot h \xrightarrow{P=5+3+4=12} A_{lateral} = 12 \cdot 6 = 72 \text{ m}^2$

$A_{total} = A_{lateral} + 2A_{base} = 72 + 2 \cdot 6 = 84 \text{ m}^2$

b) Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener la apotema de la base: $a = \sqrt{3^2 - 1{,}5^2} = 2{,}6 \text{ cm}$

$A_{base} = \frac{P \cdot a}{2} \xrightarrow{P=6 \cdot 3=18} A_{base} = \frac{18 \cdot 2{,}6}{2} = 23{,}4 \text{ cm}^2$

$A_{lateral} = \frac{P \cdot h}{2} = \frac{18 \cdot 8}{2} = 72 \text{ cm}^2$

$A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = 72 + 23{,}4 = 95{,}4 \text{ cm}^2$

4. Página 131

Tenemos que hallar el volumen de estas figuras:

Prisma: $V_{prisma} = A_{base} \cdot h = \frac{P \cdot a}{2} \cdot 5 \xrightarrow{P=2 \cdot 5=10} V_{prisma} = \frac{10 \cdot 1{,}38}{2} \cdot 5 = 34{,}5 \text{ cm}^3$

Cono: $V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 9 = 1357{,}17 \text{ cm}^3$

$V_{total} = V_{prisma} + V_{cono} = 34{,}5 + 1357{,}17 = 1391{,}67 \text{ cm}^3$

5. Página 131

$A_1 = 4\pi r^2 = 4\pi 3^2 = 113{,}1 \text{ cm}^2$

$V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi 3^3 = 113{,}1 \text{ cm}^3$

El área y el volumen de la esfera semejante son:

$A_2 = 1{,}5^2 A_1 = 2{,}25 \cdot 113{,}1 = 254{,}48 \text{ cm}^2$

$V_2 = 1{,}5^3 V_1 = 3{,}375 \cdot 113{,}1 = 381{,}71 \text{ cm}^3$

COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

95. Página 132

a) Volumen del tetrabrik: $V = A_{base} h = (5 \cdot 8) \cdot 10 = 400 \text{ cm}^3 = 0{,}4$ ℓ de batido

Precio: 0,4 · 0,87 + 0,03 = 0,38 €

Volumen de la botella: $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 13 = 367{,}57 \text{ cm}^3 = 0{,}368$ ℓ de batido

Precio: 0,368 · 0,87 + 0,07 = 0,39 €

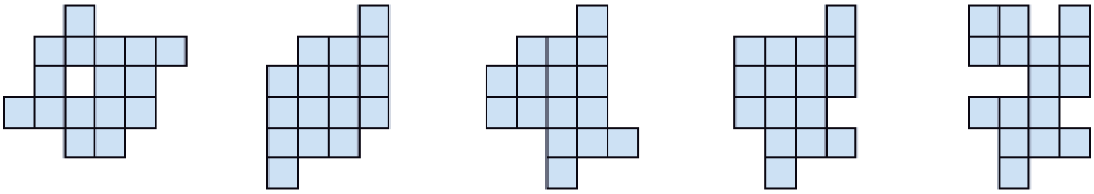
b) El beneficio viene dado por el número de litros vendidos ya que el coste del envase va incluido en su precio, por esta razón como los litros vendidos en tetrabriks son 114 % de 3 000 000 = $\frac{114}{100} \cdot 3000000 = 3420000$ ℓ y los litros vendidos en botella son 103 % de 3 420 000 = $\frac{103}{100} \cdot 3420000 = 3522600$ ℓ → Se obtendría más beneficio con las botellas.

FORMAS DE PENSAR. Razonamiento matemático

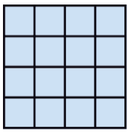
96. Página 132

Respuesta abierta. Por ejemplo:

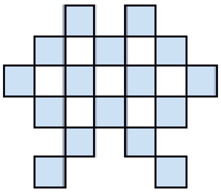
a)



b) La figura de menor perímetro es:



c) Una de las figuras de mayor perímetro es:



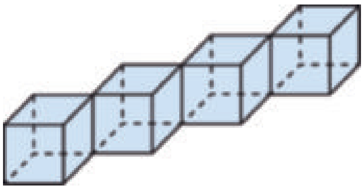
Para su construcción lo que hacemos es que no coincida ninguna de las aristas de los cuadraditos pequeños, de esta manera su perímetro es $P = 4 \cdot 16 = 64$.

97. Página 132

Respuesta abierta. Por ejemplo:

La mayor área posible es de 6 · 4 = 24 cuadrados

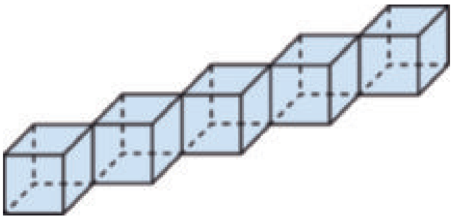
Una de las figuras de mayor área es:



La estrategia consiste en hacer una figura con los cubos uniéndolos por las aristas o por los vértices, de este modo el área será máxima.

La mayor área posible es de 6 · 5 = 30 cuadrados

Con 5 cubos, una de las figuras de mayor área es:



PRUEBAS PISA

98. Página 133

a) Jorge eligió el modelo B.

b) Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener el ancho de cada sección del tejado.

$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{1^2 + 2{,}5^2} = 2{,}69$ m $\qquad A_{\text{tejado}} = 2A_{\text{sección tejado}} = 2 \cdot 2{,}69 \cdot 6 = 32{,}28$ m² de superficie tiene el tejado.

Trigonometría

7

CLAVES PARA EMPEZAR

1. Página 134

a) $\left.\begin{array}{l} 3+4=7>5 \\ 5-4=1<3 \end{array}\right\} \rightarrow$ Corresponden a las medidas de los lados de un triángulo.

b) $5+15=20<30 \rightarrow$ No corresponden a las medidas de los lados de un triángulo.

2. Página 134

a) Uno de sus ángulos es recto. Los dos restantes son agudos.

b) Los ángulos agudos son complementarios, es decir, suman 90°.

VIDA COTIDIANA

EL FARO. Página 135

$$tg\ 30° = \frac{50}{\text{distancia}} \rightarrow \text{distancia} = 86.60\ \text{m}$$

ACTIVIDADES

1. Página 136

a) $x = 180 \cdot \frac{2\pi}{360} = \pi$

b) $x = 540 \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{3}{2} \cdot 2\pi = 3\pi$

c) $x = 900 \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{5}{2} \cdot 2\pi = 5\pi$

d) $x = 1080 \cdot \frac{2\pi}{360} = 3 \cdot 2\pi = 6\pi$

e) $x = 1440 \cdot \frac{2\pi}{360} = 4 \cdot 2\pi = 8\pi$

2. Página 136

a) $x = 7\pi \cdot \frac{360}{2\pi} = 1260°$

b) $x = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{360}{2\pi} = 30°$

c) $x = \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{360}{2\pi} = 135°$

3. Página 136

a) $\frac{\pi}{2}\ \text{rad} = 90°$

b) $\frac{3\pi}{2}\ \text{rad} = 270°$

c) $\frac{\pi}{3}\ \text{rad} = 60°$

d) $\frac{2\pi}{3}\ \text{rad} = 120°$

4. Página 137

a) $sen\ \alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$ $\quad cos\ \alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$ $\quad tg\ \alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75$

b) $sen\ \alpha = \frac{8}{17} = 0{,}47$ $\quad cos\ \alpha = \frac{15}{17} = 0{,}88$ $\quad tg\ \alpha = \frac{8}{15} = 0{,}53$

5. Página 137

$tg\ \alpha = \frac{4}{3} \rightarrow$ El cateto opuesto mide 4 cm. Aplicando el teorema de Pitágoras: $h^2 = 3^2 + 4^2 \rightarrow h = \sqrt{9+16} \rightarrow h = 5$

Los lados del triángulo miden 3, 4 y 5 cm.

6. Página 137

$tg\ \alpha = 1 = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} \rightarrow \text{cateto opuesto} = \text{cateto contiguo}$

Aplicando el teorema de Pitágoras: $h^2 = c^2 + c^2 \rightarrow h^2 = 2c^2 \rightarrow 4 = 2c^2 \rightarrow c = \sqrt{2}$

Los otros dos lados son iguales y miden $\sqrt{2}$ cm.

7. Página 138

a) $tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha} \rightarrow \begin{cases} 0{,}4663^2 + 1 = 1{,}21744 \\ \frac{1}{0{,}1736^2} = 33{,}1818 \end{cases} \rightarrow 1{,}21744 \neq 33{,}1818 \rightarrow$ No existe.

b) $tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha} \rightarrow \begin{cases} 0{,}3640^2 + 1 = 1{,}1325 \\ \frac{1}{0{,}9397^2} = 1{,}1325 \end{cases} \rightarrow$ Sí existe.

c) $cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1 \rightarrow 0{,}2588^2 + 0{,}1485^2 = 0{,}067 + 0{,}0221 = 0{,}0891 \neq 1 \rightarrow$ No existe.

d) $tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha} \rightarrow \begin{cases} 0{,}9325^2 + 1 = 1{,}87 \\ \frac{1}{0{,}7313^2} = 1{,}87 \end{cases} \rightarrow$ Sí existe.

e) $cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1 \rightarrow 0{,}6691^2 + 0{,}2754^2 = 0{,}4476 + 0{,}0758 = 0{,}5234 \neq 1 \rightarrow$ No existe.

8. Página 138

a) $cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1 \rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1 \rightarrow$ Sí existe.

b) $tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha} \rightarrow \begin{cases} \left(\frac{7}{5}\right)^2 + 1 = \frac{49}{25} + 1 = \frac{74}{25} \\ \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{25}{9} \end{cases} \rightarrow \frac{74}{25} \neq \frac{25}{9} \rightarrow$ No existe.

9. Página 138

$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow \frac{sen^2\alpha}{sen^2\alpha} + \frac{cos^2\alpha}{sen^2\alpha} = \frac{1}{sen^2\alpha} \rightarrow 1 + \frac{1}{tg^2\alpha} = \frac{1}{sen^2\alpha}$

10. Página 139

a) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow sen^2\alpha + 0{,}4321^2 = 1 \rightarrow sen^2\alpha = 0{,}8133 \rightarrow sen\ \alpha = 0{,}9018$

b) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow sen^2\alpha + 0{,}1357^2 = 1 \rightarrow sen^2\alpha = 0{,}9816 \rightarrow sen\ \alpha = 0{,}9908$

c) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow sen^2\alpha + 0{,}9531^2 = 1 \rightarrow sen^2\alpha = 0{,}0916 \rightarrow sen\ \alpha = 0{,}3027$

d) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow sen^2\alpha + 0{,}2864^2 = 1 \rightarrow sen^2\alpha = 0{,}918 \rightarrow sen\ \alpha = 0{,}9581$

11. Página 139

a) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow 0,1827^2 + cos^2\alpha = 1 \rightarrow cos^2\alpha = 0,9666 \rightarrow cos\ \alpha = 0,9832$

b) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow 0,9542^2 + cos^2\alpha = 1 \rightarrow cos^2\alpha = 0,0895 \rightarrow cos\ \alpha = 0,2992$

c) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow 0,4531^2 + cos^2\alpha = 1 \rightarrow cos^2\alpha = 0,7947 \rightarrow cos\ \alpha = 0,8915$

d) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow 0,7988^2 + cos^2\alpha = 1 \rightarrow cos^2\alpha = 0,3619 \rightarrow cos\ \alpha = 0,6016$

12. Página 139

a) $tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha} \rightarrow 3^2 + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha} \rightarrow 10 = \frac{1}{cos^2\alpha} \rightarrow cos^2\alpha = 0,1$

$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow sen^2\alpha + 0,1 = 1 \rightarrow sen^2\alpha = 0,9 \rightarrow sen\ \alpha = 0,9487$

b) $tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha} \rightarrow 1^2 + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha} \rightarrow 2 = \frac{1}{cos^2\alpha} \rightarrow cos^2\alpha = 0,5$

$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow sen^2\alpha + 0,5 = 1 \rightarrow sen^2\alpha = 0,5 \rightarrow sen\ \alpha = 0,7071$

13. Página 139

a) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow \left(\frac{7}{25}\right)^2 + cos^2\alpha = 1 \rightarrow \frac{49}{625} + cos^2\alpha = 1 \rightarrow cos^2\alpha = \frac{576}{625} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{24}{25}$

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{\frac{7}{25}}{\frac{24}{25}} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{7}{24}$

b) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + cos^2\alpha = 1 \rightarrow \frac{9}{25} + cos^2\alpha = 1 \rightarrow cos^2\alpha = \frac{16}{25} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{4}{5}$

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{3}{4}$

c) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow \left(\frac{12}{37}\right)^2 + cos^2\alpha = 1 \rightarrow \frac{144}{1369} + cos^2\alpha = 1 \rightarrow cos^2\alpha = \frac{1225}{1369} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{35}{37}$

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{\frac{12}{37}}{\frac{35}{37}} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{12}{35}$

d) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow \left(\frac{11}{61}\right)^2 + cos^2\alpha = 1 \rightarrow \frac{121}{3\,721} + cos^2\alpha = 1 \rightarrow cos^2\alpha = \frac{3\,600}{3\,721} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{60}{61}$

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{\frac{11}{61}}{\frac{60}{61}} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{11}{60}$

e) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow sen^2\alpha + \left(\frac{8}{17}\right)^2 = 1 \rightarrow sen^2\alpha + \frac{64}{289} = 1 \rightarrow sen^2\alpha = \frac{225}{289} \rightarrow sen\ \alpha = \frac{15}{17}$

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{\frac{15}{17}}{\frac{8}{17}} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{15}{8}$

f) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \to sen^2\alpha + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1 \to sen^2\alpha + \frac{144}{169} = 1 \to sen^2\alpha = \frac{25}{169} \to sen\ \alpha = \frac{5}{13}$

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \to tg\ \alpha = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} \to tg\ \alpha = \frac{5}{12}$

g) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \to sen^2\alpha + \left(\frac{20}{29}\right)^2 = 1 \to sen^2\alpha + \frac{400}{841} = 1 \to sen^2\alpha = \frac{441}{841} \to sen\ \alpha = \frac{21}{29}$

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \to tg\ \alpha = \frac{\frac{21}{29}}{\frac{20}{29}} \to tg\ \alpha = \frac{21}{20}$

h) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \to sen^2\alpha + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 \to sen^2\alpha + \frac{25}{169} = 1 \to sen^2\alpha = \frac{144}{169} \to sen\ \alpha = \frac{12}{13}$

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \to tg\ \alpha = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} \to tg\ \alpha = \frac{12}{5}$

14. Página 139

a) $tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha} \to \left(\frac{5}{3}\right)^2 + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha} \to \frac{25}{9} + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha} \to \frac{34}{9} = \frac{1}{cos^2\alpha} \to cos^2\alpha = \frac{9}{34} \to cos\ \alpha = 0{,}5145$

$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \to sen^2\alpha + \frac{9}{34} = 1 \to sen^2\alpha = \frac{25}{34} \to sen\ \alpha = 0{,}8575$

b) $tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha} \to \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha} \to \frac{9}{16} + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha} \to \frac{25}{16} = \frac{1}{cos^2\alpha} \to cos^2\alpha = \frac{16}{25} \to cos\ \alpha = \frac{4}{5}$

$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \to sen^2\alpha + \frac{16}{25} = 1 \to sen^2\alpha = \frac{9}{25} \to sen\ \alpha = \frac{3}{5}$

15. Página 140

$sen\ 60° = \frac{h}{5} \to \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{5} \to h = 4{,}33 \longrightarrow$ La altura del triángulo mide 4,33 cm.

16. Página 140

$sen\ 45° = \frac{3}{d} \to \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{d} \to d = 4{,}24 \longrightarrow$ La diagonal del cuadrado mide 4,24 cm.

17. Página 140

En un hexágono de lado 4 cm, su radio mide 4 cm y la mitad de su lado 2 cm.

Consideramos el triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el radio del hexágono, 4 cm, un cateto la mitad de su lado, 2 cm, y el otro cateto la apotema. Si llamamos α_1 al ángulo marcado en la figura tenemos:

$$cos\ \alpha_1 = \frac{2}{4} = 0{,}5$$

En un hexágono de lado 6 cm, su radio mide 6 cm y la mitad de su lado 3 cm.

Consideramos el triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el radio del hexágono, 6 cm, un cateto la mitad de su lado, 3 cm, y el otro cateto la apotema. Si llamamos α_2 al ángulo marcado en la figura tenemos:

$$cos\ \alpha_2 = \frac{3}{6} = 0{,}5$$

Por tanto $cos\ \alpha_1 = cos\ \alpha_2$. El coseno no varía según la longitud del lado.

De la misma manera:

$$\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha_1 = \dfrac{\sqrt{4^2-2^2}}{4} = \dfrac{\sqrt{12}}{4} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ sen\ \alpha_2 = \dfrac{\sqrt{6^2-3^2}}{6} = \dfrac{\sqrt{27}}{6} = \dfrac{3\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \rightarrow sen\ \alpha_1 = sen\ \alpha_2$$

$$\left.\begin{array}{l} tg\ \alpha_1 = \dfrac{\sqrt{4^2-2^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3} \\ tg\ \alpha_2 = \dfrac{\sqrt{6^2-3^2}}{3} = \dfrac{\sqrt{27}}{3} = \sqrt{3} \end{array}\right\} \rightarrow tg\ \alpha_1 = tg\ \alpha_2$$

18. Página 141

a)	$sen\ 40° = 0,643$	$cos\ 40° = 0,766$	$tg\ 40° = 0,839$
b)	$sen\ 120° = 0,866$	$cos\ 120° = -0,5$	$tg\ 120° = -1,732$
c)	$sen\ 75° = 0,966$	$cos\ 75° = 0,259$	$tg\ 75° = 3,732$
d)	$sen\ 220° = -0,643$	$cos\ 220° = -0,766$	$tg\ 220° = 0,839$
e)	$sen\ 135° = 0,707$	$cos\ 135° = -0,707$	$tg\ 135° = -1$
f)	$sen\ 300° = -0,866$	$cos\ 300° = 0,5$	$tg\ 300° = -1,732$
g)	$sen\ 240° = -0,866$	$cos\ 240° = -0,5$	$tg\ 240° = 1,732$
h)	$sen\ 15° = 0,259$	$cos\ 15° = 0,966$	$tg\ 15° = 0,268$
i)	$sen\ 85° = 0,996$	$cos\ 85° = 0,087$	$tg\ 85° = 11,430$

19. Página 141

$$sen\ \alpha = 0,34 \rightarrow \alpha = 19,88° \rightarrow \begin{cases} cos\ \alpha = 0,94 \\ tg\ \alpha = 0,36 \end{cases}$$

20. Página 141

a) $sen\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \alpha = 60°$

b) $cos\ \alpha = \dfrac{1}{3} \rightarrow \alpha = 70,53°$

21. Página 142

a)	$sen\ 310° < 0$	$cos\ 310° > 0$	$tg\ 310° < 0$
b)	$sen\ 255° < 0$	$cos\ 255° < 0$	$tg\ 255° > 0$
c)	$sen\ 275° < 0$	$cos\ 275° > 0$	$tg\ 275° < 0$
d)	$sen\ 295° < 0$	$cos\ 295° > 0$	$tg\ 295° < 0$
e)	$sen\ 70° > 0$	$cos\ 70° > 0$	$tg\ 70° > 0$
f)	$sen\ 155° > 0$	$cos\ 155° < 0$	$tg\ 155° < 0$

22. Página 142

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow 0{,}6427^2 + cos^2\alpha = 1 \rightarrow cos^2\alpha = 0{,}5869 \rightarrow cos\ \alpha = -0{,}7661$$

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{0{,}6427}{-0{,}7661} = -0{,}8389$$

23. Página 142

a) $sen\ \alpha > 0 \qquad cos\ \alpha < 0 \quad \rightarrow$ 2º Cuadrante

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{0{,}9397}{-0{,}3420} = -2{,}7477$$

b) $sen\ \alpha < 0 \qquad tg\ \alpha > 0 \quad \rightarrow$ 3º Cuadrante

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{tg\ \alpha} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{-0{,}7660}{1{,}1918} = -0{,}6427$$

24. Página 143

a) $sen\ 120° = sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad cos\ 120° = -cos\ 60° = -\frac{1}{2}$ $\qquad tg\ 120° = -tg\ 60° = -\sqrt{3}$

b) $sen\ 210° = -sen\ 30° = -\frac{1}{2}$ $\qquad cos\ 210° = -cos\ 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad tg\ 210° = tg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $sen\ 315° = -sen\ 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad cos\ 315° = cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad tg\ 315° = -tg\ 45° = -1$

25. Página 143

a) $sen\ 225° = sen\ (45° + 180°) = -sen\ 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $sen\ 150° = sen\ (180° - 30°) = sen\ 30° = \frac{1}{2}$

c) $sen\ 300° = sen\ (360° - 60°) = sen\ (-60°) = -sen\ 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $cos\ 315° = cos\ (360° - 45°) = cos\ (-45°) = cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

26. Página 144

$sen\ 35° = 0{,}57 \qquad cos\ 35° = 0{,}82 \qquad tg\ 35° = 0{,}70$

a) $sen\ (90° - 35°) = cos\ 35° = 0{,}82$

$cos\ (90° - 35°) = sen\ 35° = 0{,}57$

$$tg\ (90° - 35°) = \frac{0{,}82}{0{,}57} = 1{,}44$$

b) $sen\ (180° - 35°) = sen\ 35° = 0{,}57$

$cos\ (180° - 35°) = -cos\ 35° = -0{,}82$

$tg\ (180° - 35°) = -tg\ 35° = -0{,}70$

c) $sen\,(-35°) = -sen\,35° = -0,57$

$cos\,(-35°) = cos\,35° = 0,82$

$tg\,(-35°) = -tg\,35° = -0,70$

27. Página 144

a) $65° = 90° - 25° \rightarrow \begin{cases} sen\,65° = cos\,25° = 0,91 \\ cos\,65° = sen\,25° = 0,42 \\ tg\,65° = \dfrac{0,91}{0,42} = 2,17 \end{cases}$

b) $155° = 180° - 25° \rightarrow \begin{cases} sen\,155° = sen\,25° = 0,42 \\ cos\,155° = -cos\,25° = -0,91 \\ tg\,155° = -tg\,25° = -0,47 \end{cases}$

c) $335° = 360° - 25° = -25° \rightarrow \begin{cases} sen\,335° = -sen\,25° = -0,42 \\ cos\,335° = cos\,25° = 0,91 \\ tg\,335° = -tg\,25° = -0,47 \end{cases}$

28. Página 144

Sea β el otro ángulo: $\alpha + \beta + 90° = 180° \rightarrow \beta = 90° - \alpha \rightarrow \begin{cases} sen\,\beta = cos\,\alpha \\ cos\,\beta = sen\,\alpha \end{cases}$

$cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1 \rightarrow cos^2\alpha = 1 - 0,9848^2 \rightarrow cos^2\alpha = 0,0302 \rightarrow cos\,\alpha = 0,1738$

$sen\,\beta = 0,1738$ $\qquad cos\,\beta = 0,9848$ $\qquad tg\,\beta = \dfrac{0,1738}{0,9848} = 0,1765$

29. Página 145

a) $\begin{array}{r|l} 390 & 360 \\ \hline 30 & 1 \end{array}$

$sen\,390° = sen\,30° = \dfrac{1}{2}$ $\qquad cos\,390° = cos\,30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad tg\,390° = tg\,30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\begin{array}{r|l} 480 & 360 \\ \hline 120 & 1 \end{array}$

$sen\,480° = sen\,120° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad cos\,480° = cos\,120° = -\dfrac{1}{2}$ $\qquad tg\,480° = tg\,120° = -\sqrt{3}$

c) $\begin{array}{r|l} 585 & 360 \\ \hline 225 & 1 \end{array}$

$sen\,585° = sen\,225° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad cos\,585° = cos\,225° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad tg\,585° = tg\,225° = 1$

d) $\begin{array}{r|l} 405 & 360 \\ \hline 45 & 1 \end{array}$

$sen\,405° = sen\,45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad cos\,405° = cos\,45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad tg\,405° = tg\,45° = 1$

e) $\begin{array}{r|l} 690 & 360 \\ \cline{2-2} 330 & 1 \end{array}$

$sen\ 690° = sen\ 330° = -\dfrac{1}{2}$ $\qquad cos\ 690° = cos\ 330° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad tg\ 690° = tg\ 330° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

30. Página 145

a) $\begin{array}{r|l} 1\,125 & 360 \\ \cline{2-2} 45 & 3 \end{array}$

$360° - 45° = 315°$

$sen(-1\,125°) = sen\ 315° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad cos(-1\,125°) = cos\ 315° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad tg(-1\,125°) = tg\ 315° = -1$

b) $\begin{array}{r|l} 1\,060 & 360 \\ \cline{2-2} 340 & 2 \end{array}$

$360° - 340° = 20°$

$sen(-1\,060°) = sen\ 20° = 0{,}34$ $\qquad cos(-1\,060°) = cos\ 20° = 0{,}94$ $\qquad tg(-1\,060°) = tg\ 20° = 0{,}36$

31. Página 145

Respuesta abierta. $\alpha = 45° \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 45° + 360° = 405° > 360° \\ \alpha_2 = 45° + 2\cdot 360° = 765° > 360° \\ \alpha_3 = 45° - 360° = -315° < 0° \\ \alpha_4 = 45° - 2\cdot 360° = -675° < 0° \end{cases}$

$sen\ \alpha_1 = sen\ \alpha_2 = sen\ \alpha_3 = sen\ \alpha_4 = sen\ \alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad cos\ \alpha_1 = cos\ \alpha_2 = cos\ \alpha_3 = cos\ \alpha_4 = cos\ \alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$tg\ \alpha_1 = tg\ \alpha_2 = tg\ \alpha_3 = tg\ \alpha_4 = tg\ \alpha = 1$

32. Página 146

a) $h = \sqrt{20^2 + 21^2} = 29 \rightarrow$ La hipotenusa mide 29.

$tg\ \alpha = \dfrac{20}{21} = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 43{,}6°$ $\qquad tg\ \beta = \dfrac{21}{20} = 1{,}05 \rightarrow \beta = 46{,}4°$

Los ángulos miden 90°, 43,6° y 46,4°.

b) $tg\ 45° = \dfrac{10}{c} \rightarrow c = 10$ El otro cateto mide 10 cm.

Es un triángulo rectángulo isósceles, por tanto sus ángulos iguales miden 45°.

$h = \sqrt{10^2 + 10^2} = 14{,}1 \rightarrow$ La hipotenusa mide 14,1 cm

33. Página 146

$h = \sqrt{7^2 + 10^2} = 12{,}2 \rightarrow$ La hipotenusa mide 12,2 cm

$tg\ \alpha = \dfrac{7}{10} = 0{,}7 \rightarrow \alpha = 35°$ $\qquad tg\ \beta = \dfrac{10}{7} = 1{,}43 \rightarrow \beta = 55°$

Los ángulos miden 90°, 35° y 55°.

34. Página 146

$$tg\ 30° = \frac{c}{5} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{c}{5} \rightarrow c = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$ El otro cateto mide 2,89 cm.

$$tg\ \alpha = \frac{5}{\frac{5\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} \rightarrow \alpha = 60°$$ El otro ángulo agudo mide 60°.

$$h = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 5^2} = \frac{10\sqrt{3}}{3} = 5{,}77 \text{ cm}.$$ La hipotenusa mide 5,77 cm.

35. Página 147

La altura del triángulo lo divide por la mitad en dos triángulos rectángulos que tienen un ángulo de 15° y cuyo cateto opuesto mide 3 cm.

$$tg\ 15° = \frac{3}{a} \rightarrow 0{,}27 = \frac{3}{a} \rightarrow a = 11{,}1 \qquad l = \sqrt{11{,}1^2 + 3^2} = 11{,}5$$

La altura del triángulo es 11,1 cm y sus lados iguales miden 11,5 cm.

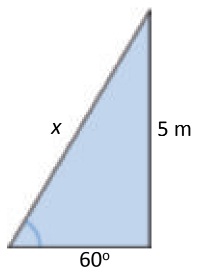
$$\text{Área} = \frac{6 \cdot 11{,}1}{2} = 33{,}3 \qquad \text{Perímetro} = 6 + 2 \cdot 11{,}5 = 29$$

El área del triángulo es 33,3 cm² y su perímetro 29 cm.

36. Página 147

$$sen\ 60° = \frac{5}{x} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{x} \rightarrow x = \frac{10\sqrt{3}}{3} = 5{,}8$$

La cuerda mide 5,8 metros.

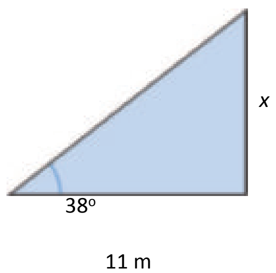


37. Página 147

$$tg\ 38° = \frac{x}{11} \rightarrow 0{,}78 = \frac{x}{11} \rightarrow x = 8{,}59$$

La pelota llega a la portería con una altura de 8,59 m sobre el suelo.

Como la portería mide 2,44 m de altura, la pelota no entrará.

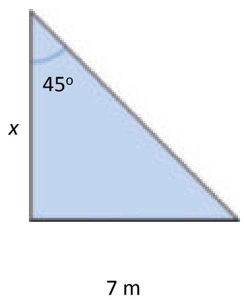


38. Página 147

$$90° - 45° = 45°$$

$$tg\ 45° = \frac{7}{x} \rightarrow 1 = \frac{7}{x} \rightarrow x = 7$$

La ventana está a 7 metros de altura.



ACTIVIDADES FINALES

39. Página 148

a) $x = 1800 \cdot \frac{2\pi}{360} = 10\pi$ rad

c) $x = 2\,880 \cdot \frac{2\pi}{360} = 16\pi$ rad

b) $x = 1260 \cdot \frac{2\pi}{360} = 7\pi$ rad

d) $x = 720 \cdot \frac{2\pi}{360} = 4\pi$ rad

40. Página 148

a) $x = 180°$ b) $x = 720°$ c) $x = 360°$ d) $x = 540°$

41. Página 148

a) $x = \frac{\pi}{4}$ rad b) $x = \frac{\pi}{6}$ rad c) $x = \frac{2\pi}{3}$ rad d) $x = \frac{5\pi}{6}$ rad

42. Página 148

a) $x = 270°$ b) $x = 300°$ c) $x = 90°$ d) $x = 240°$

43. Página 148

a) $30°15' = 30{,}25°$ $x = 30{,}25 \cdot \frac{2\pi}{360} = 0{,}53$ rad

b) $15°27'45'' = 15{,}4625°$ $x = 15{,}4625 \cdot \frac{2\pi}{360} = 0{,}27$ rad

44. Página 148

a) $\frac{\pi}{3} \cdot \frac{360°}{2\pi} + 45{,}25° = 60° + 45{,}25° = 105{,}25° = 105°15'$

c) $2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \frac{3\pi + 2\pi}{12} = \frac{5\pi}{6}$ rad

b) $\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} = \frac{3\pi - 5\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}$ rad

d) $\left(\frac{5\pi}{3} \cdot \frac{360°}{2\pi} + 50°\right) : 3 = \frac{350°}{3} = 116{,}7° = 116°42'$

45. Página 148

a) $h = \sqrt{16^2 + 30^2} = 34$

$tg\ \alpha = \frac{16}{30} = 0{,}53$

$sen\ \alpha = \frac{16}{34} = 0{,}47$

$cos\ \alpha = \frac{30}{34} = 0{,}88$

b) $c = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$

$tg\ \alpha = \frac{6}{8} = 0{,}75$

$sen\ \alpha = \frac{6}{10} = 0{,}6$

$cos\ \alpha = \frac{8}{10} = 0{,}8$

46. Página 148

a) $h = \sqrt{10^2 + 24^2} = 26$

$tg\ \alpha = \frac{24}{10} = 2,4$ $\quad$ $tg\ \beta = \frac{10}{24} = 0,42$

$sen\ \alpha = \frac{24}{26} = 0,92$ $\quad$ $sen\ \beta = \frac{10}{26} = 0,38$

$cos\ \alpha = \frac{10}{26} = 0,38$ $\quad$ $cos\ \beta = \frac{24}{26} = 0,92$

b) $h = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$

$tg\ \alpha = \frac{12}{9} = 1,33$ $\quad$ $tg\ \beta = \frac{9}{12} = 0,75$

$sen\ \alpha = \frac{12}{15} = 0,8$ $\quad$ $sen\ \beta = \frac{9}{15} = 0,6$

$cos\ \alpha = \frac{9}{15} = 0,6$ $\quad$ $\cos\ \beta = \frac{12}{15} = 0,8$

c) $c = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$

$tg\ \alpha = \frac{24}{7} = 3,43$ $\quad$ $tg\ \beta = \frac{7}{24} = 0,29$

$sen\ \alpha = \frac{24}{25} = 0,96$ $\quad$ $sen\ \beta = \frac{7}{25} = 0,28$

$cos\ \alpha = \frac{7}{25} = 0,28$ $\quad$ $\cos\ \beta = \frac{24}{25} = 0,96$

d) $c = \sqrt{29^2 - 20^2} = 21$

$tg\ \alpha = \frac{21}{20} = 1,05$ $\quad$ $sen\ \beta = \frac{20}{29} = 0,69$

$sen\ \alpha = \frac{21}{29} = 0,72$ $\quad$ $\cos\ \beta = \frac{21}{29} = 0,72$

$cos\ \alpha = \frac{20}{29} = 0,69$ $\quad$ $tg\ \beta = \frac{20}{21} = 0,95$

47. Página 148

a) $tg\ 60° = \frac{5}{b} \to b = 2,87$ $\quad$ $sen\ 60° = \frac{5}{a} \to a = 5,77$

b) $tg\ 30° = \frac{2}{b} \to b = 3,46$ $\quad$ $sen\ 30° = \frac{2}{a} \to a = 4$

c) $tg\ 45° = \frac{b}{7} \to b = 7$ $\quad$ $cos\ 45° = \frac{7}{a} \to a = 9,9$

d) $tg\ 45° = \frac{9}{b} \to b = 9$ $\quad$ $sen\ 45° = \frac{9}{a} \to a = 12,73$

48. Página 148

a) $c=\sqrt{4,1^2-0,9^2}=4$ $\quad sen\ \alpha=\frac{4}{4,1}=0,98$ $\quad cos\ \alpha=\frac{0,9}{4,1}=0,22$ $\quad tg\ \alpha=\frac{4}{0,9}=4,44$

b) $h=\sqrt{2,8^2+9,6^2}=10$ $\quad sen\ \alpha=\frac{9,6}{10}=0,96$ $\quad cos\ \alpha=\frac{2,8}{10}=0,28$ $\quad tg\ \alpha=\frac{9,6}{2,8}=3,43$

c) $h=\sqrt{2^2+9,1^2}=9,32$ $\quad sen\ \alpha=\frac{9,1}{9,32}=0,98$ $\quad cos\ \alpha=\frac{2}{9,32}=0,21$ $\quad tg\ \alpha=\frac{9,1}{2}=4,55$

d) $c=\sqrt{3,7^2-1,2^2}=3,5$ $\quad sen\ \alpha=\frac{3,5}{3,7}=0,95$ $\quad cos\ \alpha=\frac{1,2}{3,7}=0,32$ $\quad tg\ \alpha=\frac{3,5}{1,2}=2,92$

49. Página 148

$$tg\ \alpha=\frac{c_{opuesto}}{c_{contiguo}}=\frac{6}{5}\rightarrow c_{opuesto}=\frac{6\cdot 5}{5}\rightarrow c_{opuesto}=6 \qquad h=\sqrt{6^2+5^2}=7,81$$

El otro cateto mide 6 cm y la hipotenusa 7,81 cm.

50. Página 148

$$sen\ \alpha=\frac{24}{h}=\frac{12}{13}\rightarrow h=\frac{24\cdot 13}{12}\rightarrow h=26 \qquad c=\sqrt{26^2-24^2}=10$$

El otro cateto mide 10 cm y la hipotenusa 26 cm.

51. Página 148

$$sen\ \alpha=\frac{a}{50}=\frac{7}{25}\rightarrow a=\frac{50\cdot 7}{25}\rightarrow a=14$$

$$sen^2\alpha+cos^2\alpha=1\rightarrow cos\ \alpha=\sqrt{1-\left(\frac{7}{25}\right)^2}\rightarrow cos\ \alpha=0,96$$

$$tg\ \alpha=\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}\rightarrow tg\ \alpha=\frac{7}{25\cdot 0,96}\rightarrow tg\ \alpha=0,29$$

52. Página 148

$$tg\ \alpha=\frac{15}{c}=\frac{3}{4}\rightarrow c=20 \qquad h=\sqrt{20^2+15^2}=25$$

$$sen\ \alpha=\frac{15}{25}=0,6 \qquad cos\ \alpha=\frac{20}{25}=0,8$$

53. Página 148

$$tg\ \alpha=\frac{a}{b}=\frac{7}{12}\rightarrow a=\frac{7b}{12}$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2+b^2=100 \\ a=\frac{7b}{12} \end{array}\right\}\rightarrow \left(\frac{7b}{12}\right)^2+b^2=100\rightarrow \frac{49b^2}{144}+b^2=100\rightarrow b^2=74,6\rightarrow b=8,64\rightarrow a=5,04$$

$$sen\ \alpha=\frac{a}{10}=\frac{5,04}{10}=0,5 \qquad cos\ \alpha=\frac{b}{10}=\frac{8,64}{10}=0,86$$

54. Página 149

a) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow \left(\frac{7}{25}\right)^2 + \left(\frac{11}{25}\right)^2 = \frac{49}{625} + \frac{121}{625} = \frac{170}{625} \neq 1 \rightarrow$ No existe.

b) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow \left(\frac{7}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{49}{169} + \frac{144}{169} = \frac{193}{169} \neq 1 \rightarrow$ No existe.

c) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{5}{25} + \frac{20}{25} = \frac{25}{25} = 1 \rightarrow$ Sí existe.

55. Página 149

a) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow \left(\frac{7}{25}\right)^2 + cos^2\alpha = 1 \rightarrow cos\ \alpha = \sqrt{1 - \frac{49}{625}} \rightarrow cos\ \alpha = \sqrt{\frac{576}{625}} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{24}{25}$

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow tg\alpha = \frac{\frac{7}{25}}{\frac{24}{25}} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{7}{24}$

b) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow sen^2\alpha + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1 \rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} \rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{\frac{25}{169}} \rightarrow sen\ \alpha = \frac{5}{13}$

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{5}{12}$

c) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow sen^2\alpha + \left(\frac{8}{17}\right)^2 = 1 \rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{1 - \frac{64}{289}} \rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{\frac{225}{289}} \rightarrow sen\ \alpha = \frac{15}{17}$

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{\frac{15}{17}}{\frac{8}{17}} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{15}{8}$

d) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + cos^2\alpha = 1 \rightarrow cos\ \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} \rightarrow cos\ \alpha = \sqrt{\frac{16}{25}} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{4}{5}$

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{3}{4}$

56. Página 149

a) $tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow \frac{6}{11} = \frac{\frac{7}{11}}{cos\ \alpha} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{7}{6} > 1 \rightarrow$ No existe.

b) $tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha} \rightarrow \frac{1}{cos^2\alpha} - tg^2\alpha = \left(\frac{13}{5}\right)^2 - 1 = \frac{169}{25} - 1 = \frac{144}{25} \neq 1 \rightarrow$ No existe.

c) $tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha} \rightarrow \frac{1}{cos^2\alpha} - tg^2\alpha = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3} - \frac{3}{9} = \frac{9}{9} = 1 \rightarrow$ Sí existe.

57. Página 149

a) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow cos\alpha = \sqrt{1 - sen^2\alpha} \rightarrow cos\ \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{37}\right)^2} \rightarrow cos\ \alpha = \sqrt{1 - \frac{144}{1369}} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{35}{37}$

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{\frac{12}{37}}{\frac{35}{37}} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{12}{35}$

b) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow cos\alpha = \sqrt{1 - sen^2\alpha} \rightarrow cos\ \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{11}{61}\right)^2} \rightarrow cos\ \alpha = \sqrt{1 - \frac{121}{3721}} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{60}{61}$

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{\frac{11}{61}}{\frac{60}{61}} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{11}{60}$

c) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha} \rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{20}{29}\right)^2} \rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{1 - \frac{400}{841}} \rightarrow sen\ \alpha = \frac{21}{29}$

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{\frac{21}{29}}{\frac{20}{29}} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{21}{20}$

d) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha} \rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} \rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} \rightarrow sen\ \alpha = \frac{12}{13}$

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{12}{5}$

58. Página 149

a) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow cos\ \alpha = \sqrt{1 - sen^2\alpha} \rightarrow cos\ \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{8}\right)^2} \rightarrow cos\ \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{64}} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{\sqrt{55}}{8}$

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{55}}{8}} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{3\sqrt{55}}{55}$

b) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha} \rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} \rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} \rightarrow sen\ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$

c) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow cos\ \alpha = \sqrt{1 - sen^2\alpha} \rightarrow cos\ \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{15}{34}\right)^2} \rightarrow cos\ \alpha = \sqrt{1 - \frac{225}{1\,156}} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{7\sqrt{19}}{34}$

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{\frac{15}{34}}{\frac{7\sqrt{19}}{34}} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{15\sqrt{19}}{133}$

d) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha} \rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} \rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{25}} \rightarrow sen\ \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{\frac{\sqrt{21}}{5}}{\frac{2}{5}} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$

e) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow cos\ \alpha = \sqrt{1 - sen^2\alpha} \rightarrow cos\ \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{7}\right)^2} \rightarrow cos\ \alpha = \sqrt{1 - \frac{16}{49}} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{\sqrt{33}}{7}$

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{\frac{4}{7}}{\frac{\sqrt{33}}{7}} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{4\sqrt{33}}{33}$

f) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha} \rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} \rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} \rightarrow sen\ \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} \rightarrow tg\ \alpha = 2\sqrt{2}$

59. Página 149

a) $tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{tg^2\alpha + 1}} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{5}{12}\right)^2 + 1}} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{12}{13}$

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow sen\ \alpha = tg\ \alpha \cdot cos\ \alpha \rightarrow sen\ \alpha = \frac{5}{12} \cdot \frac{12}{13} = \frac{5}{13}$

b) $tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{tg^2\alpha + 1}} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1}} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{4}{5}$

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow sen\ \alpha = tg\ \alpha \cdot cos\ \alpha \rightarrow sen\ \alpha = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$

c) $tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{tg^2\alpha + 1}} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{5}{13}\right)^2 + 1}} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{13}{\sqrt{194}} = 0{,}93$

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow sen\ \alpha = tg\ \alpha \cdot cos\ \alpha \rightarrow sen\ \alpha = \frac{5}{13} \cdot \frac{13}{\sqrt{194}} = \frac{5}{\sqrt{194}} = 0{,}36$

d) $tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{tg^2\alpha + 1}} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{5}{8}\right)^2 + 1}} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{8}{\sqrt{89}} = 0{,}85$

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow sen\ \alpha = tg\ \alpha \cdot cos\ \alpha \rightarrow sen\ \alpha = \frac{5}{8} \cdot \frac{8}{\sqrt{89}} = \frac{5}{\sqrt{89}} = 0{,}53$

60. Página 149

a) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow cos\ \alpha = \sqrt{1 - sen^2\alpha} \rightarrow cos\ \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{3} + 2$$

b) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha} \rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{1+\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{2}} = -\sqrt{3} + 2$$

61. Página 149

$$cos\ 60° = \frac{6}{h} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{6}{h} \rightarrow h = 12$$

$$tg\ 60° = \frac{x}{6} \rightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{6} \rightarrow x = 6\sqrt{3} = 10{,}4$$

Los demás lados miden 12 y 10,4 cm.

62. Página 149

$$sen\ 45° = \frac{12}{h} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{12}{h} \rightarrow h = 12\sqrt{2} = 16{,}97$$

$$tg\ 45° = \frac{12}{x} \rightarrow 1 = \frac{12}{x} \rightarrow x = 12$$

Los demás lados miden 12 y 16,97 cm.

63. Página 149

$$sen\ 30° = \frac{x}{30} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{30} \rightarrow x = 15$$

$$cos\ 30° = \frac{y}{30} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{30} \rightarrow x = 15\sqrt{3} = 25{,}98$$

Los demás lados miden 15 y 25,98 cm.

64. Página 149

$$a = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} = 3{,}46$$

$$P = 6 \cdot 4 = 24$$

$$\text{Área} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{24 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3} = 41{,}57$$

La apotema del polígono mide 3,46 cm y su área es 41,57 cm².

65. Página 149

a) $sen\ 157° = sen(180° - 23°) = sen\ 23° = 0{,}39$

b) $cos\ 197° = cos(180° + 17°) = -cos\ 17° = -0{,}96$

c) $sen\ 335° = sen(360° - 25°) = -sen\ 25° = -0{,}42$

d) $cos\ 245° = cos(180° + 65°) = -cos\ 65° = -0{,}42$

66. Página 149

a) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow cos\ \alpha = \pm\sqrt{1 - sen^2\alpha} = \pm\sqrt{1 - \frac{9}{25}} \rightarrow \begin{cases} cos\ \alpha_1 = \frac{4}{5} \\ cos\ \alpha_2 = -\frac{4}{5} \end{cases}$

$tg\ \alpha_1 = \frac{sen\ \alpha_1}{cos\ \alpha_1} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$ $\qquad$ $tg\ \alpha_2 = \frac{sen\ \alpha_2}{cos\ \alpha_2} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$

b) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow sen\ \alpha = \pm\sqrt{1 - cos^2\alpha} = \pm\sqrt{1 - \frac{2}{4}} \rightarrow \begin{cases} sen\ \alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sen\ \alpha_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$tg\ \alpha_1 = \frac{sen\ \alpha_1}{cos\ \alpha_1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$ $\qquad$ $tg\ \alpha_2 = \frac{sen\ \alpha_2}{cos\ \alpha_2} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$

c) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow cos\ \alpha = \pm\sqrt{1 - sen^2\alpha} = \pm\sqrt{1 - \frac{16}{25}} \rightarrow \begin{cases} cos\ \alpha_1 = \frac{3}{5} \\ cos\ \alpha_2 = -\frac{3}{5} \end{cases}$

$tg\ \alpha_1 = \frac{sen\ \alpha_1}{cos\ \alpha_1} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$ $\qquad$ $tg\ \alpha_2 = \frac{sen\ \alpha_2}{cos\ \alpha_2} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$

d) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow sen\ \alpha = \pm\sqrt{1 - cos^2\alpha} = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{4}} \rightarrow \begin{cases} sen\ \alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sen\ \alpha_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$tg\ \alpha_1 = \frac{sen\ \alpha_1}{cos\ \alpha_1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ $\qquad$ $tg\ \alpha_2 = \frac{sen\ \alpha_2}{cos\ \alpha_2} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$

67. Página 149

a) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow cos\ \alpha = \pm\sqrt{1 - sen^2\alpha} = \pm\sqrt{1 - \frac{4}{49}} \rightarrow \begin{cases} cos\ \alpha_1 = \frac{3\sqrt{5}}{7} \\ cos\ \alpha_2 = -\frac{3\sqrt{5}}{7} \end{cases}$

$tg\ \alpha_1 = \frac{sen\ \alpha_1}{cos\ \alpha_1} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{3\sqrt{5}}{7}} = \frac{2\sqrt{5}}{15}$ $\qquad$ $tg\ \alpha_2 = \frac{sen\ \alpha_2}{cos\ \alpha_2} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{-3\sqrt{5}}{7}} = -\frac{2\sqrt{5}}{15}$

b) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{1-cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{169}{225}} \rightarrow \begin{cases} sen\ \alpha_1 = \frac{2\sqrt{14}}{15} \\ sen\ \alpha_2 = -\frac{2\sqrt{14}}{15} \end{cases}$

$tg\ \alpha_1 = \frac{sen\ \alpha_1}{cos\ \alpha_1} = \frac{\frac{2\sqrt{14}}{15}}{-\frac{13}{15}} = -\frac{2\sqrt{14}}{13}$ $\qquad tg\ \alpha_2 = \frac{sen\ \alpha_2}{cos\ \alpha_2} = \frac{-\frac{2\sqrt{14}}{15}}{-\frac{13}{15}} = \frac{2\sqrt{14}}{13}$

c) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{1-cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{25}} \rightarrow \begin{cases} sen\ \alpha_1 = \frac{2\sqrt{6}}{5} \\ sen\ \alpha_2 = -\frac{2\sqrt{6}}{5} \end{cases}$

$tg\ \alpha_1 = \frac{sen\ \alpha_1}{cos\ \alpha_1} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{5}}{\frac{1}{5}} = 2\sqrt{6}$ $\qquad tg\ \alpha_2 = \frac{sen\ \alpha_2}{cos\ \alpha_2} = \frac{-\frac{2\sqrt{6}}{5}}{\frac{1}{5}} = -2\sqrt{6}$

d) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow cos\ \alpha = \pm\sqrt{1-sen^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\frac{121}{529}} \rightarrow \begin{cases} cos\ \alpha_1 = \frac{2\sqrt{102}}{23} \\ cos\ \alpha_2 = -\frac{2\sqrt{102}}{23} \end{cases}$

$tg\ \alpha_1 = \frac{sen\ \alpha_1}{cos\ \alpha_1} = \frac{-\frac{11}{23}}{\frac{2\sqrt{102}}{23}} = -\frac{11}{2\sqrt{102}}$ $\qquad tg\ \alpha_2 = \frac{sen\ \alpha_2}{cos\ \alpha_2} = \frac{-\frac{11}{23}}{-\frac{2\sqrt{102}}{23}} = \frac{11}{2\sqrt{102}}$

68. Página 149

a) $tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{tg^2\alpha+1}} \rightarrow \begin{cases} cos\ \alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ cos\ \alpha_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$tg\ \alpha_1 = \frac{sen\ \alpha_1}{cos\ \alpha_1} \rightarrow sen\ \alpha_1 = tg\ \alpha_1 \cdot cos\ \alpha_1 = (-1)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$tg\ \alpha_2 = \frac{sen\ \alpha_2}{cos\ \alpha_2} \rightarrow sen\ \alpha_2 = tg\ \alpha_2 \cdot cos\ \alpha_2 = (-1)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{tg^2\alpha+1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}}} \rightarrow \begin{cases} cos\ \alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ cos\ \alpha_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$tg\ \alpha_1 = \frac{sen\ \alpha_1}{cos\ \alpha_1} \rightarrow sen\ \alpha_1 = tg\ \alpha_1 \cdot cos\ \alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$

$tg\ \alpha_2 = \frac{sen\ \alpha_2}{cos\ \alpha_2} \rightarrow sen\ \alpha_2 = tg\ \alpha_2 \cdot cos\ \alpha_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

c) $tg^2\alpha+1=\dfrac{1}{cos^2\alpha}\rightarrow cos\ \alpha=\dfrac{1}{\sqrt{tg^2\alpha+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{4}}\rightarrow\begin{cases}cos\ \alpha_1=\dfrac{1}{2}\\ cos\ \alpha_2=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

$tg\ \alpha_1=\dfrac{sen\ \alpha_1}{cos\ \alpha_1}\rightarrow sen\ \alpha_1=tg\ \alpha_1\cdot cos\ \alpha_1=\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$tg\ \alpha_2=\dfrac{sen\ \alpha_2}{cos\ \alpha_2}\rightarrow sen\ \alpha_2=tg\ \alpha_2\cdot cos\ \alpha_2=\sqrt{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

d) $tg^2\alpha+1=\dfrac{1}{cos^2\alpha}\rightarrow cos\ \alpha=\dfrac{1}{\sqrt{tg^2\alpha+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{25}{16}}}\rightarrow\begin{cases}cos\ \alpha_1=\dfrac{4}{5}\\ cos\ \alpha_2=-\dfrac{4}{5}\end{cases}$

$tg\ \alpha_1=\dfrac{sen\ \alpha_1}{cos\ \alpha_1}\rightarrow sen\ \alpha_1=tg\ \alpha_1\cdot cos\ \alpha_1=\left(-\dfrac{3}{4}\right)\cdot\dfrac{4}{5}=-\dfrac{3}{5}$

$tg\ \alpha_2=\dfrac{sen\ \alpha_2}{cos\ \alpha_2}\rightarrow sen\ \alpha_2=tg\ \alpha_2\cdot cos\alpha_2=\left(-\dfrac{3}{4}\right)\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{3}{5}$

69. Página 149

a) $tg\ \alpha=-1\rightarrow\alpha=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$.

b) $tg\ \alpha=1\rightarrow\alpha=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$.

c) $tg\ \alpha=\sqrt{3}\rightarrow\alpha=\dfrac{\pi}{3}+k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$.

d) $tg\ \alpha=-\sqrt{3}\rightarrow\alpha=\dfrac{2\pi}{3}+k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$.

70. Página 150

a) $sen\ 1\,200°=sen\ 120°=sen\ 60°$

b) $cos\ 870°=cos\ 150°=-cos\ 30°$

c) $sen\ 930°=sen\ 210°=-sen\ 30°$

d) $cos\ 1\,770°=cos\ 330°=cos\ 30°$

71. Página 150

$sen^2\ 35°+cos^2\ 35°=1\rightarrow cos\ 35°=\sqrt{1-0{,}57^2}=\sqrt{0{,}68}\rightarrow cos\ 35°=0{,}82$

$tg\ 35°=\dfrac{sen\ 35°}{cos\ 35°}\rightarrow tg\ 35°=\dfrac{0{,}57}{0{,}82}=0{,}7$

a) $cos\ 1\,655°=cos\ 215°=cos(180°+35°)=-cos\ 35°=-0{,}82$

b) $sen\ 1\,585°=sen\ 145°=sen(180°-35°)=sen\ 35°=0{,}57$

c) $sen\ 1\,765°=sen\ 325°=sen(-35°)=-sen\ 35°=-0{,}57$

d) $cos\ 1\,565°=cos\ 125°=cos(90°+35°)=-sen\ 35°=-0{,}57$

72. Página 150

a) $\cos\frac{14\pi}{3}=\cos\frac{2\pi}{3}=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

b) $\cos\frac{2\pi}{3}=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

c) $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}=-\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}=\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

73. Página 150

a) $\cos 960°=\cos 240°=-\cos 60°=-\operatorname{sen} 30°$

b) $\operatorname{sen} 600°=\operatorname{sen} 240°=-\operatorname{sen} 60°=-\cos 30°$

c) $\cos 2\,145°=\cos 345°=\cos 15°$

d) $\operatorname{sen} 1\,120°=\operatorname{sen} 40°$

74. Página 150

a) $\operatorname{tg} 1\,655°=\operatorname{tg} 215°=\operatorname{tg}(180°+35°)=\operatorname{tg} 35°=0{,}7$

b) $\operatorname{tg} 1\,585°=\operatorname{tg} 145°=\operatorname{tg}(180°-35°)=-\operatorname{tg} 35°=-0{,}7$

c) $\operatorname{tg} 1\,765°=\operatorname{tg} 325°=\operatorname{tg}(-35°)=-\operatorname{tg} 35°=-0{,}7$

d) $\operatorname{tg} 1\,565°=\operatorname{tg} 125°=\operatorname{tg}(90°+35°)=\frac{\operatorname{sen}(90°+35°)}{\cos(90°+35°)}=\frac{\cos 35°}{-\operatorname{sen} 35°}=-\frac{1}{\operatorname{tg} 35°}=-1{,}43$

75. Página 150

a) $\operatorname{sen}\alpha=\cos\alpha\rightarrow\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=1\rightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}+k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$.

b) $\operatorname{sen}\alpha=1-\operatorname{sen}\alpha\rightarrow\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{2}\rightarrow\begin{cases}\alpha_k=\frac{\pi}{6}+2k\pi\\ \alpha_n=\frac{5\pi}{6}+2n\pi\end{cases}$, con $k,n\in\mathbb{Z}$.

c) $\operatorname{sen}^2\alpha=1\rightarrow\operatorname{sen}\alpha=\pm1\rightarrow\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi$, con $k,n\in\mathbb{Z}$.

d) $\operatorname{sen}\alpha+\cos(90°-\alpha)=1\rightarrow\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\alpha=1\rightarrow\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{2}\rightarrow\begin{cases}\alpha_k=\frac{\pi}{6}+2k\pi\\ \alpha_n=\frac{5\pi}{6}+2n\pi\end{cases}$, con $k,n\in\mathbb{Z}$.

76. Página 150

a) $\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{tg}\alpha=0\rightarrow\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{tg}\alpha\rightarrow\operatorname{sen}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\rightarrow\begin{cases}\cos\alpha=1\\ \operatorname{sen}\alpha=0=\operatorname{tg}\alpha\end{cases}\rightarrow\alpha=k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$.

b) $\operatorname{sen}^2\alpha-2\operatorname{sen}\alpha+1=0\rightarrow\operatorname{sen}\alpha=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}=1\rightarrow\alpha=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$.

77. Página 150

a) $h = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65} = 8{,}06$

$tg\ \alpha = \frac{7}{4} \rightarrow \alpha = 60{,}25°$ $\alpha + \beta + 90° = 180° \rightarrow \beta = 180° - 60{,}25° - 90° = 29{,}75°$

Los lados del triángulo miden 4, 7 y 8,06 cm. Los ángulos miden 90°, 60,25° y 29,75°.

b) $h = \sqrt{5^2 + 9^2} = \sqrt{25 + 81} = \sqrt{106} = 10{,}3$

$tg\ \alpha = \frac{9}{5} \rightarrow \alpha = 60{,}95°$ $\alpha + \beta + 90° = 180° \rightarrow \beta = 180° - 60{,}95° - 90° = 29{,}05°$

Los lados del triángulo miden 5, 9 y 10,3 cm. Los ángulos miden 90°, 60,95° y 29,05°.

c) $x = \sqrt{8^2 - 3^2} = \sqrt{64 - 9} = \sqrt{55} = 7{,}42$

$\cos\ \alpha = \frac{3}{8} \rightarrow \alpha = 67{,}98°$ $\alpha + \beta + 90° = 180° \rightarrow \beta = 180° - 67{,}98° - 90° = 22{,}02°$

Los lados del triángulo miden 8, 3 y 7,42 cm. Los ángulos miden 90°, 67,98° y 22,02°.

d) $x = \sqrt{11^2 - 6^2} = \sqrt{121 - 36} = \sqrt{85} = 9{,}22$

$\cos\ \alpha = \frac{6}{11} \rightarrow \alpha = 56{,}94°$ $\alpha + \beta + 90° = 180° \rightarrow \beta = 180° - 56{,}94° - 90° = 33{,}06°$

Los lados del triángulo miden 6, 11 y 9,22 cm. Los ángulos miden 90°, 56,94° y 33,06°.

78. Página 150

a) $\cos\ 20° = \frac{8}{h} \rightarrow h = \frac{8}{0{,}94} \rightarrow h = 8{,}51$ $tg\ 20° = \frac{x}{8} \rightarrow 0{,}36 = \frac{y}{8} \rightarrow y = 2{,}88$

$\alpha + 20° + 90° = 180° \rightarrow \alpha = 70°$

Los lados del triángulo miden 8, 8,51 y 2,88 cm. Los ángulos miden 90°, 70° y 20°.

b) $\cos\ 25° = \frac{x}{10} \rightarrow 0{,}91 = \frac{x}{10} \rightarrow x = 9{,}1$ $sen\ 25° = \frac{y}{10} \rightarrow 0{,}42 = \frac{y}{10} \rightarrow y = 4{,}2$

$\alpha + 25° + 90° = 180° \rightarrow \alpha = 65°$

Los lados del triángulo miden 10, 9,1 y 4,2 cm. Los ángulos miden 90°, 65° y 25°.

79. Página 150

a) $h = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} = 3{,}61$

$tg\ \alpha = \frac{3}{2} \rightarrow \alpha = 56{,}31°$ $\alpha + \beta + 90° = 180° \rightarrow \beta = 180° - 56{,}31° - 90° = 33{,}69°$

Los lados del triángulo miden 2, 3 y 3,6 cm. Los ángulos miden 90°, 56,31° y 33,69°.

b) $x = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{144 - 36} = \sqrt{108} = 10{,}39$

$\cos\ \alpha = \frac{6}{12} \rightarrow \cos\ \alpha = 0{,}5 \rightarrow \alpha = 60°$ $\alpha + \beta + 90° = 180° \rightarrow \beta = 180° - 60° - 90° = 30°$

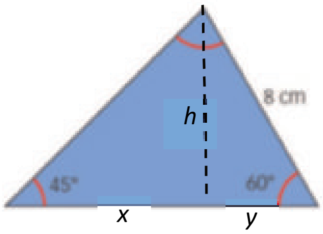
Los lados del triángulo miden 6, 12 y 10,39 cm. Los ángulos miden 90°, 60° y 30°.

c) $\cos\ 35° = \frac{x}{10} \rightarrow x = 0{,}82 \cdot 10 \rightarrow x = 8{,}2$ $sen\ 35° = \frac{y}{10} \rightarrow y = 0{,}57 \cdot 10 \rightarrow x = 5{,}7$

$\alpha + 35° + 90° = 180° \rightarrow \alpha = 180° - 35° - 90° = 55°$

Los lados del triángulo miden 10, 5,7 y 8,2 cm. Los ángulos miden 90°, 55° y 35°.

81. Página 150



$$sen\ 60° = \frac{h}{8} \rightarrow h = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

$$cos\ 60° = \frac{y}{8} \rightarrow y = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

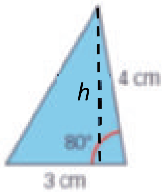
$$tg\ 45° = \frac{h}{x} = \frac{4\sqrt{3}}{x} \rightarrow x = 4\sqrt{3}$$

$$\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\left(4\sqrt{3}+4\right) \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3} + 24 = 37,86$$

El área de ese triángulo es 37,86 cm².

83. Página 151

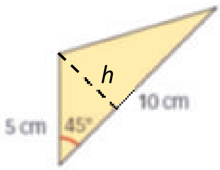
a) $sen\ 80° = \frac{h}{4} \rightarrow 0,98 = \frac{h}{4} \rightarrow h = 3,92$



$$\text{Área} = \frac{3 \cdot 3,92}{2} = 5,88$$

El área del triángulo es 5,88 cm².

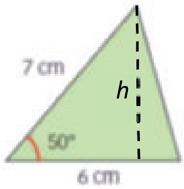
b) $sen\ 45° = \frac{h}{5} \rightarrow 0,71 = \frac{h}{5} \rightarrow h = 3,55$



$$\text{Área} = \frac{10 \cdot 3,55}{2} = 17,75$$

El área del triángulo es 17,75 cm².

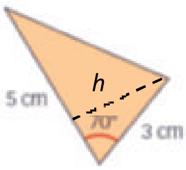
c) $sen\ 50° = \frac{h}{7} \rightarrow 0,77 = \frac{h}{7} \rightarrow h = 5,39$



$$\text{Área} = \frac{6 \cdot 5,39}{2} = 16,17$$

El área del triángulo es 16,17 cm².

d) $sen\ 70° = \frac{h}{3} \rightarrow 0,94 = \frac{h}{3} \rightarrow h = 2,82$



$$\text{Área} = \frac{5 \cdot 2,82}{2} = 7,05$$

El área del triángulo es 7,05 cm².

84. Página 151

$$sen\ 60° = \frac{h}{8} \rightarrow 0,87 = \frac{h}{8} \rightarrow h = 6,96 \qquad \text{Área} = \frac{8 \cdot 6,96}{2} = 27,84$$

La altura del triángulo es de 6,96 cm y su área es 27,84 cm².

85. Página 151

$$sen\ 60° = \frac{h}{5} \rightarrow 0,87 = \frac{h}{5} \rightarrow h = 4,35 \qquad \text{Área} = \frac{5 \cdot 4,35}{2} = 10,875$$

La altura del triángulo es de 4,35 cm y su área es 10,875 cm².

86. Página 151

Si el ángulo desigual mide 60°, necesariamente el triángulo es equilátero. Por tanto todos sus lados miden 10 cm.

Entonces:

$\text{Perímetro} = 3 \cdot 10 = 30$

$sen\ 60° = \dfrac{h}{10} \rightarrow 0,87 = \dfrac{h}{10} \rightarrow h = 8,7$ $\qquad$ $\text{Área} = \dfrac{10 \cdot 8,7}{2} = 43,5$

El perímetro mide 30 cm y el área 43,5 cm².

87. Página 151

$sen\ 15° = \dfrac{4}{x} \rightarrow 0,26 = \dfrac{4}{x} \rightarrow x = 15,38$

$h = \sqrt{15,38^2 - 4^2} = \sqrt{236,54 - 16} = \sqrt{220,54} = 14,85$

$\text{Perímetro} = 2 \cdot 15,38 + 8 = 38,76$ $\qquad$ $\text{Área} = \dfrac{8 \cdot 14,85}{2} = 59,4$

El perímetro mide 38,76 cm y el área 59,4 cm².

88. Página 151

$tg\ 40° = \dfrac{x}{4} \rightarrow 0,84 = \dfrac{x}{4} \rightarrow x = 3,36$

$\text{Perímetro} = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3,36 = 14,72$ $\qquad$ $\text{Área} = 4 \cdot 3,36 = 13,44$

El lado menor mide 3,36 cm, el perímetro 14,72 cm y el área 13,44 cm².

89. Página 151

$sen\ 30° = \dfrac{h}{7} \rightarrow 0,5 = \dfrac{h}{7} \rightarrow h = 3,5$ $\qquad$ $\text{Área} = 5 \cdot 3,5 = 17,5$

La altura del paralelogramo mide 3,5 cm y el área 17,5 cm².

91. Página 151

Un pentágono regular puede dividirse en 5 triángulos isósceles iguales cuyos lados iguales coinciden con el radio de la circunferencia en la que éste está inscrito.

Hallamos primero el ángulo que forman estos dos lados (ángulo central):

$$\alpha = \frac{360°}{5} = 72° \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 36°$$

Calculamos la apotema del pentágono.

Para hallar la apotema del pentágono, dividimos uno de los triángulos en dos triángulos rectángulos iguales. La apotema coincide con el cateto desconocido (y la altura de triángulo). El otro cateto mide la mitad del lado del pentágono, es decir, 2,5 cm.

$$sen\ 36° = \frac{2,5}{r} \rightarrow r = \frac{2,5}{0,59} \rightarrow r = 4,24$$

$a = \sqrt{4,24^2 - 2,5^2} = \sqrt{11,73} \rightarrow a = 3,42$ $\qquad$ $\text{Área} = \dfrac{5 \cdot 5 \cdot 3,42}{2} = 42,75$

El radio de la circunferencia es 4,24 cm y el área del pentágono es 42,75 cm².

92. Página 151

Un pentágono regular puede dividirse en 5 triángulos isósceles iguales cuyos lados iguales coinciden con el radio de la circunferencia en la que éste está inscrito, en este caso 8 cm. Hallamos primero el ángulo que forman estos dos lados:

$$\alpha = \frac{360°}{5} = 72° \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 36°$$

Para hallar la apotema del pentágono, dividimos uno de los triángulos en dos triángulos rectángulos iguales. La apotema coincide con el cateto adyacente a α. El otro cateto mide la mitad del lado del pentágono y la hipotenusa es el radio de la circunferencia, 8 cm.

$$sen\ 36° = \frac{x}{8} \rightarrow x = 0,59 \cdot 8 \rightarrow x = 4,72 \rightarrow \text{Lado} = 2 \cdot 4,72 = 9,44$$

$$a = \sqrt{8^2 - 4,72^2} = \sqrt{41,72} \rightarrow a = 6,46$$

$$\text{Perímetro} = 5 \cdot 9,44 = 47,2 \qquad \text{Área} = \frac{47,2 \cdot 6,46}{2} = 152,46$$

El perímetro del pentágono es 47,2 cm y el área del pentágono es 152,46 cm².

93. Página 151

Un octógono regular puede dividirse en 8 triángulos isósceles iguales cuyos lados iguales coinciden con el radio de la circunferencia en la que éste está inscrito, en este caso 4 cm. Hallamos primero el ángulo que forman estos dos lados:

$$\alpha = \frac{360°}{8} = 45° \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 22,5°$$

Para hallar la apotema del octógono, dividimos uno de los triángulos en dos triángulos rectángulos iguales. La apotema coincide con el cateto adyacente a α. El otro cateto mide la mitad del lado del octógono y la hipotenusa es el radio de la circunferencia, 4 cm.

$$sen\ 22,5° = \frac{x}{4} \rightarrow x = 0,38 \cdot 4 \rightarrow x = 1,52 \rightarrow \text{Lado} = 2 \cdot 1,52 = 3,04$$

$$a = \sqrt{4^2 - 1,52^2} = \sqrt{13,69} \rightarrow a = 3,7 \qquad \text{Área} = \frac{8 \cdot 3,04 \cdot 3,7}{2} = 44,99$$

El lado del octógono es 3,04 cm y su área es 44,99 cm².

94. Página 151

Un octógono regular puede dividirse en 8 triángulos isósceles iguales cuyos lados iguales coinciden con el radio de la circunferencia en la que éste está inscrito. Hallamos primero el ángulo que forman estos dos lados:

$$\alpha = \frac{360°}{8} = 45° \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 22,5°$$

Para hallar la apotema del octógono, dividimos uno de los triángulos en dos triángulos rectángulos iguales. La apotema coincide con el cateto adyacente a α. El otro cateto mide la mitad del lado del octógono y la hipotenusa es el radio de la circunferencia.

$$tg\ 22,5° = \frac{2,5}{a} \rightarrow a = \frac{2,5}{0,41} \rightarrow a = 6,1$$

$$\text{Perímetro} = 8 \cdot 5 = 40 \qquad \text{Área} = \frac{40 \cdot 6,1}{2} = 122$$

El perímetro del octógono es 40 cm y su área es 122 cm².

95. Página 151

Un decágono regular puede dividirse en 10 triángulos isósceles iguales. Hallamos primero el ángulo que forman estos dos lados:

$$\alpha = \frac{360°}{10} = 36° \to \frac{\alpha}{2} = 18°$$

Para hallar el lado del decágono, dividimos uno de los triángulos en dos triángulos rectángulos iguales. La apotema coincide con el cateto adyacente a α. El otro cateto mide la mitad del lado del decágono.

$$tg\ 18° = \frac{x}{5} \to x = 0{,}32 \cdot 5 \to x = 1{,}6 \to Lado = 2 \cdot 1{,}6 = 3{,}2$$

$$\text{Perímetro} = 10 \cdot 3{,}2 = 32$$

$$\text{Área} = \frac{32 \cdot 5}{2} = 80$$

El lado del decágono mide 3,2 cm; su perímetro 32 cm y su área es 80 cm².

Si inscribimos el polígono en una circunferencia, el radio de ésta coincide con la hipotenusa del triángulo que hemos utilizado para hallar el lado del decágono. Así:

$$r = \sqrt{5^2 + 1{,}6^2} = \sqrt{27{,}56} \to r = 5{,}25$$

El radio de dicha circunferencia es 5,25 cm.

96. Página 151

Un dodecágono regular puede dividirse en 12 triángulos isósceles iguales cuyos lados iguales coinciden con el radio de la circunferencia en la que éste está inscrito.

Hallamos primero el ángulo que forman estos dos lados:

$$\alpha = \frac{360°}{12} = 30° \to \frac{\alpha}{2} = 15°$$

Para hallar la apotema del dodecágono, dividimos uno de los triángulos en dos triángulos rectángulos iguales. La apotema coincide con el cateto adyacente a α. El otro cateto mide la mitad del lado del dodecágono y la hipotenusa es el radio de la circunferencia.

$$\cos 15° = \frac{a}{7} \to a = 0{,}97 \cdot 7 \to a = 6{,}79$$

$$x = \sqrt{7^2 - 6{,}79^2} = \sqrt{2{,}9} \to x = 1{,}7$$

$$\text{Perímetro} = 2 \cdot x \cdot 12 = 2 \cdot 1{,}7 \cdot 12 = 40{,}8$$

$$\text{Área} = \frac{40{,}8 \cdot 6{,}79}{2} = 138{,}52$$

La apotema del dodecágono es 6,79 cm, su perímetro es 40,8 cm y su área es 138,52 cm².

97. Página 151

Primero hallamos el área de la base.

Un pentágono regular puede dividirse en 5 triángulos isósceles iguales cuyos lados iguales coinciden con el radio de la circunferencia en la que éste está inscrito.

Hallamos primero el ángulo que forman estos dos lados:

$$\alpha = \frac{360°}{5} = 72° \to \frac{\alpha}{2} = 36°$$

Para hallar la apotema del pentágono, dividimos uno de los triángulos en dos triángulos rectángulos iguales. La apotema coincide con el cateto adyacente a α. El otro cateto mide la mitad del lado del pentágono y la hipotenusa es el radio de la circunferencia, 6 cm.

$$sen\ 36° = \frac{x}{6} \rightarrow x = 0{,}59 \cdot 6 \rightarrow x = 3{,}54 \qquad a = \sqrt{6^2 - 3{,}54^2} = \sqrt{23{,}47} \rightarrow a = 4{,}84$$

$$\text{Perímetro} = 5 \cdot 2 \cdot x = 10 \cdot 3{,}54 = 35{,}4 \qquad \text{Área} = \frac{35{,}4 \cdot 4{,}84}{2} = 85{,}67$$

El área del pentágono es 85,67 cm².

Hallamos ahora el volumen de la pirámide: $\text{Volumen} = \frac{85{,}67 \cdot 3}{3} = 85{,}67$

El volumen de la pirámide es 85,67 cm³.

98. Página 151

Un dodecágono regular puede dividirse en 12 triángulos isósceles iguales cuyos lados iguales coinciden con el radio de la circunferencia en la que éste está inscrito. Hallaremos primero el ángulo que forman estos dos lados:

$$\alpha = \frac{360°}{12} = 30° \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 15°$$

Para hallar la apotema del dodecágono, dividimos uno de los triángulos en dos triángulos rectángulos iguales. La apotema coincide con el cateto adyacente a α. El otro cateto mide la mitad del lado del dodecágono y la hipotenusa es el radio de la circunferencia.

$$cos\ 15° = \frac{a}{10} \rightarrow a = 0{,}97 \cdot 10 \rightarrow a = 9{,}7 \longrightarrow x = \sqrt{10^2 - 9{,}7^2} = \sqrt{5{,}91} \rightarrow x = 2{,}43$$

$$\text{Perímetro} = 2 \cdot x \cdot 12 = 2 \cdot 2{,}43 \cdot 12 = 58{,}32$$

$$\text{Área}_{\text{Dodecaedro}} = \frac{58{,}32 \cdot 9{,}7}{2} = 282{,}85$$

$$\text{Área}_{\text{Circulo}} = \pi \cdot 10^2 = 314{,}16$$

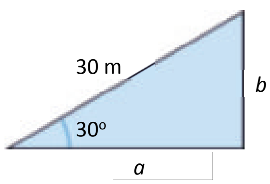
$$\text{Área}_{\text{Restante}} = 314{,}16 - 282{,}85 = 31{,}31$$

El área que le sobra es 31,31 cm².

99. Página 152

$$cos\ 30° = \frac{a}{30} \rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 30 \rightarrow a = 15\sqrt{3} = 25{,}98$$

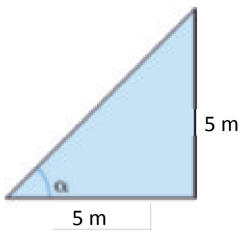
$$sen\ 30° = \frac{b}{30} \rightarrow b = \frac{1}{2} \cdot 30 \rightarrow b = 15$$



El río mide 25,98 m de ancho y Jorge tendrá que caminar 15 m hasta el embarcadero.

100. Página 152

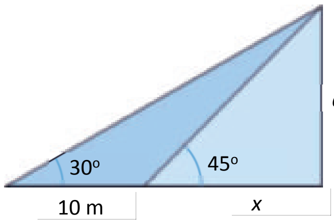
$$tg\ \alpha = \frac{5}{5} \rightarrow tg\ \alpha = 1 \rightarrow \alpha = 45°$$



102. Página 152

$$\begin{cases} tg\ 45° = \dfrac{a}{x} \rightarrow 1 = \dfrac{a}{x} \rightarrow a = x \\ tg\ 30° = \dfrac{a}{x+10} \rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a}{x+10} \rightarrow a = \dfrac{(x+10)\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$x = \frac{(x+10)\sqrt{3}}{3} \rightarrow 3x = \sqrt{3}x + 10\sqrt{3} \rightarrow x\left(3-\sqrt{3}\right) = 10\sqrt{3} \rightarrow x = 13{,}66 = a$$

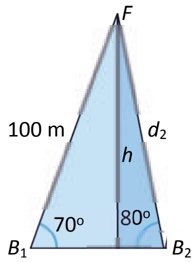


El río mide de ancho 13,66 metros, al igual que la altura del árbol.

103. Página 152

$$sen\ 70° = \frac{h}{100} \rightarrow 0{,}94 = \frac{h}{100} \rightarrow h = 94$$

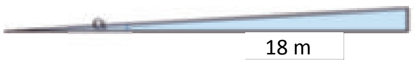
$$sen\ 80° = \frac{h}{x} \rightarrow 0{,}98 = \frac{94}{x} \rightarrow x = \frac{94}{0{,}98} = 95{,}92$$



Un barco está a 100 m del faro y el otro a 96 m, aproximadamente.

104. Página 152

$$tg\ \alpha = \frac{0{,}5}{18} \rightarrow tg\ \alpha = 0{,}03 \rightarrow \alpha = 1{,}72°$$



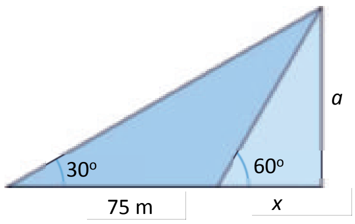
El ángulo máximo que nos podemos desviar es de 1,72°.

.

105. Página 152

$$\begin{cases} tg\ 60° = \dfrac{a}{x} \rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{a}{x} \rightarrow a = x\sqrt{3} \\ tg\ 30° = \dfrac{a}{x+75} \rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a}{x+75} \rightarrow a = \dfrac{(x+75)\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$x\sqrt{3} = \frac{(x+75)\sqrt{3}}{3} \rightarrow 3x = x + 75 \rightarrow 2x = 75 \rightarrow x = 37{,}5 \rightarrow a = 37{,}5\sqrt{3} = 64{,}95$$



La torre mide 65 metros de altura, aproximadamente.

106. Página 152

$$\begin{cases} tg\ 50° = \dfrac{h-1}{x} \rightarrow 1{,}19 = \dfrac{h-1}{x} \rightarrow h = 1{,}19x + 1 \\ tg\ 40° = \dfrac{h-2}{x} \rightarrow 0{,}84 = \dfrac{h-2}{x} \rightarrow h = 0{,}84x + 2 \end{cases}$$

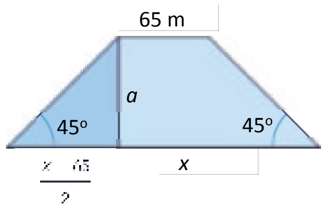
$$1{,}19x + 1 = 0{,}84x + 2 \rightarrow 0{,}35x = 1 \rightarrow x = 2{,}86 \rightarrow h = 4{,}40$$

El árbol mide 4,40 metros de altura y ellos se encuentran a 2,86 metros de él.

107. Página 152

Como tiene dos ángulos agudos iguales, podemos afirmar que es un trapecio isósceles.

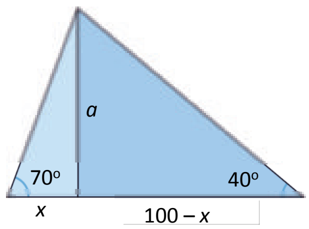
$$\begin{cases} tg\ 45° = \dfrac{a}{\dfrac{x-65}{2}} \rightarrow tg\ 45° = \dfrac{2a}{x-65} \rightarrow x-65 = 2a \rightarrow x = 2a+65 \\ a\cdot\dfrac{65+x}{2} = 1200 \rightarrow 65a+ax = 2400 \rightarrow x = \dfrac{2400-65a}{a} \end{cases}$$



$$2a^2+65a = 2400-65a \rightarrow 2a^2+130a-2400 = 0 \rightarrow a = 15 \rightarrow x = 95$$

La base mayor del trapecio mide 95 m y la altura (distancia entre las bases) 15 m.

108. Página 152



$$\begin{cases} tg\ 70° = \dfrac{a}{x} \rightarrow 2{,}75 = \dfrac{a}{x} \rightarrow a = 2{,}75x \\ tg\ 40° = \dfrac{a}{100-x} \rightarrow 0{,}84 = \dfrac{a}{100-x} \rightarrow a = 84-0{,}84x \end{cases}$$

$$2{,}75x = 84-0{,}84x \rightarrow 3{,}59x = 84 \rightarrow x = 23{,}40 \rightarrow a = 64{,}34$$

$$d = \sqrt{64{,}34^2+23{,}40^2} = \sqrt{4139{,}64+547{,}56} = 68{,}46$$

La distancia entre el coche y el helicóptero es de 68,46 m. La altura del helicóptero es de 64,34 m.

109. Página 153

$tg\ 30° = \dfrac{2}{h} \rightarrow h = \dfrac{2}{tg\ 30°} \rightarrow h = 2\sqrt{3} = 3{,}46$ ⟶ El pozo mide 3,46 metros de altura.

110. Página 153

$$18\text{ s}\cdot\frac{1\text{ hora}}{3\,600\text{ s}}\cdot\frac{400\text{ millas}}{1\text{ hora}} = 2\text{ millas}$$

$$\begin{cases} tg\ 30° = \dfrac{h}{2+x} \rightarrow 0{,}58 = \dfrac{h}{2+x} \rightarrow h = 1{,}16+0{,}58x \\ tg\ 55° = \dfrac{h}{x} \rightarrow 1{,}43 = \dfrac{h}{x} \rightarrow h = 1{,}43x \end{cases}$$

$1{,}16+0{,}58x = 1{,}43x \rightarrow 0{,}85x = 1{,}16 \rightarrow x = 1{,}36 \rightarrow h = 1{,}95$ ⟶ El avión vuela a 1,95 millas de altitud.

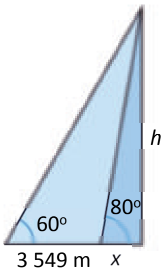
111. Página 153

$$\begin{cases} tg\ 45° = \dfrac{h}{100-x} \rightarrow 1 = \dfrac{h}{100-x} \rightarrow h = 100-x \\ tg\ 60° = \dfrac{h}{x} \rightarrow 1{,}73 = \dfrac{h}{x} \rightarrow h = 1{,}73x \end{cases}$$

$$100-x = 1{,}73x \rightarrow 2{,}73x = 100 \rightarrow x = 36{,}63 \rightarrow h = 63{,}37$$

El mástil mide 63,37 metros.

112. Página 153



$$\begin{cases} tg\ 60° = \dfrac{h}{3549 + x} \rightarrow 1{,}73 = \dfrac{h}{3549 + x} \rightarrow h = 6139{,}77 + 1{,}73x \\ tg\ 80° = \dfrac{h}{x} \rightarrow 5{,}67 = \dfrac{h}{x} \rightarrow h = 5{,}67x \end{cases}$$

$$6139{,}77 + 1{,}73x = 5{,}67x \rightarrow 3{,}94x = 6139{,}77 \rightarrow x = 1558{,}32 \rightarrow h = 8\,835{,}66$$

El Everest mide 8 835,66 metros, y ellos están a una distancia de 1 558,32m.

DEBES SABER HACER

1. Página 153

a) $x = \dfrac{7\pi}{5} \cdot \dfrac{360}{2\pi} = 252°$

b) $x = 460 \cdot \dfrac{2\pi}{360} = 2{,}56 \text{ rad}$

2. Página 153

$$b = \sqrt{9^2 - 6^2} = \sqrt{81 - 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$sen\ \alpha = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$ $\quad cos\ \alpha = \dfrac{3\sqrt{5}}{9} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ $\quad tg\ \alpha = \dfrac{6}{3\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

3. Página 153

a) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow cos\ \alpha = \sqrt{1 - sen^2\alpha} = \sqrt{1 - 0{,}9063^2} = 0{,}4226$

b) $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \dfrac{0{,}9063}{0{,}4226} = 2{,}1446$

c) $\alpha = 65°$

4. Página 153

Por ser un triángulo rectángulo isósceles, sus ángulos miden 90°, 45° y 45°.

$sen\ 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad cos\ 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad tg\ 45° = 1$

5. Página 153

a) $\begin{cases} sen\ 225° = -sen\ 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ cos\ 225° = -cos\ 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ tg\ 225° = tg\ 45° = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} sen\ 315° = -sen\ 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ cos\ 315° = cos\ 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ tg\ 315° = -tg\ 45° = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} sen\ 420° = sen\ 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ cos\ 420° = cos\ 60° = \dfrac{1}{2} \\ tg\ 420° = tg\ 60° = \sqrt{3} \end{cases}$

d) $\begin{cases} sen\ 1\,590° = sen\ 30° = \dfrac{1}{2} \\ \cos\ 1\,590° = -\cos\ 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ tg\ 1\,590° = -tg\ 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

e) $\begin{cases} sen(-450°) = -sen\ 90° = -1 \\ \cos(-450°) = \cos\ 90° = 0 \\ tg(-450°) = -tg\ 90° = -\infty \end{cases}$

f) $\begin{cases} sen(-570°) = sen\ 30° = \dfrac{1}{2} \\ \cos(-570°) = -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ tg(-570°) = -tg\,30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

6. Página 153

$$sen\ 30° = \frac{5}{h} \rightarrow h = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 10$$

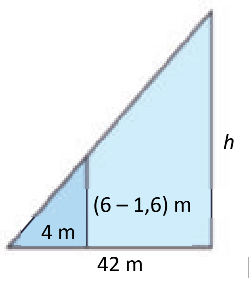
$$c = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

$$\hat{C} = 90° - 30° = 60°$$

COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

113. Página 154

a) Tomamos dos triángulos rectángulos con vértice común en los ojos de la chica. Estos dos triángulos son semejantes por estar colocados en posición de Thales. Aplicando el teorema de Thales:



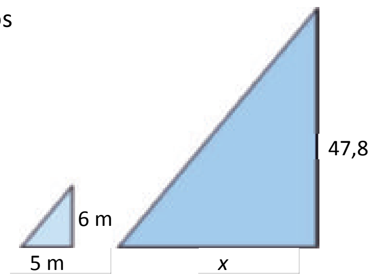
$$\frac{h}{6-1{,}6} = \frac{42}{4} \rightarrow 4h = 184{,}8 \rightarrow h = 46{,}2\ \text{m}$$

La altura del faro es 46,2 + 1,6 = 47,8 m.

b) Como la inclinación del sol es la misma para la farola y para el faro, los triángulos que forman los vértices de las sombras y los extremos de la farola y el faro tienen que ser semejantes. Aplicando el teorema de Thales:

$$\frac{47{,}8}{6} = \frac{x}{5} \rightarrow 239 = 6x \rightarrow x = 39{,}83\ \text{m}$$

Como la farola está a 42 – 4 = 38 m del faro, la sombra del faro sobrepasa la farola.



FORMAS DE PENSAR. Razonamiento matemático

114. Página 154

Las rectas tangentes a la esfera terrestre forman un ángulo de 90° con el radio. Tenemos un triángulo rectángulo cuyos catetos son *R* y *d*.

a) $\alpha = 28° \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 14° \rightarrow tg\ 14° = \frac{6\,370}{d} \rightarrow d = \frac{6\,370}{tg\ 14°} \rightarrow d = 25\,548{,}67$

La nave está a 25 548,67 km del centro de la Tierra.

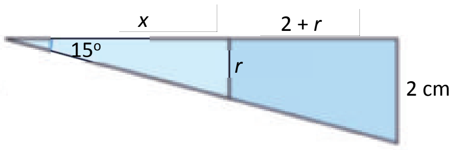
b) $\alpha = 24° \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 12° \rightarrow tg\ 12° = \frac{6\,370}{d} \rightarrow d = \frac{6\,370}{tg\ 12°} \rightarrow d = 29\,968{,}49$

La nave está a 29 968,49 km del centro de la Tierra.

c) $\alpha = 18° \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 9° \rightarrow tg\ 9° = \frac{6\,370}{d} \rightarrow d = \frac{6\,370}{tg\ 9°} \rightarrow d = 40\,218{,}60$

La nave está a 40 218,60 km del centro de la Tierra.

115. Página 154



$$\left.\begin{array}{l} tg\ 15° = \frac{r}{x} \rightarrow r = 0{,}27x \\ tg\ 15° = \frac{2}{x+(2+r)} \rightarrow x+2+r = \frac{2}{tg\ 15°} = 7{,}41 \rightarrow r = 5{,}41 - x \end{array}\right\} \rightarrow 0{,}27x = 5{,}41 - x$$

$0{,}27x = 5{,}41 - x \rightarrow 1{,}27x = 5{,}41 \rightarrow x = 4{,}26$

$r = 0{,}27x \rightarrow r = 1{,}15$

El radio de la circunferencia menor mide 1,15 cm.

116. Página 154

Si tomamos como base del triángulo el lado que mide 20 cm, la altura del triángulo puede coincidir con el lado que mide 15 cm (si es un triángulo rectángulo) o no coincidir. En el caso de que no coincida, la altura será menor que 15 cm, con lo cual el área buscada será menor que el área del triángulo rectángulo.

Por tanto el área mayor del triángulo será el caso en el que sea un triángulo rectángulo de catetos de 20 cm y 15 cm.

$$\text{Área} = \frac{20 \cdot 15}{2} = 150 \text{ cm}$$

117. Página 154

a) $sen\ 113° = sen(180° - 67°) = sen\ 67° = cos\ 23°$

$cos\ 292° = cos(360° - 68°) = cos\ 68°$

$\cos(292°) < \cos(24°) < sen(113°)$

b) $tg\ 150° = -tg\ 30°$

$tg\ 150° < tg\ 30° < tg\ 45°$

PRUEBAS PISA

118. Página 155

a) Sea *x* la longitud de la cuerda. Entonces:

$$sen\ 45° = \frac{150}{x} \rightarrow x = \frac{150}{sen\ 45°} \rightarrow x = \frac{150 \cdot 2}{\sqrt{2}} \rightarrow x = 150\sqrt{2} = 212,13$$

La longitud de la cuerda debe ser de 212,13 m.

b) Coste anual sin cometa: $3\,500\,000 \cdot 0,42 = 1\,470\,000$ zeds

Coste anual con cometa: $(3\,500\,000 - 3\,500\,000 \cdot 0,20) \cdot 0,42 = 1\,176\,000$ zeds

Ahorro anual con cometa: $1\,470\,000 - 1\,176\,000 = 294\,000$ zeds

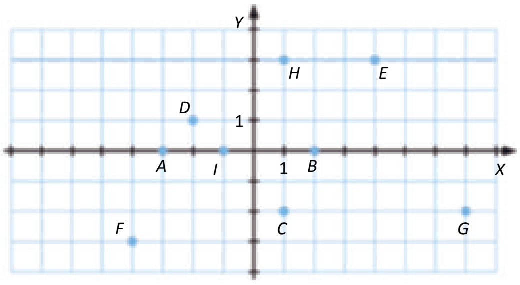
Años necesarios para cubrir los gastos: $\frac{2\,500\,000}{294\,000} = 8,5$ años

Vectores y rectas

8

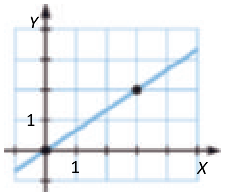
CLAVES PARA EMPEZAR

1. Página 156

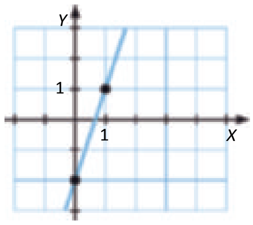


2. Página 156

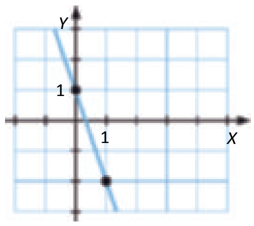
a) $y = \frac{2}{3}x$ pasa por los puntos (0, 0) y (3, 2).



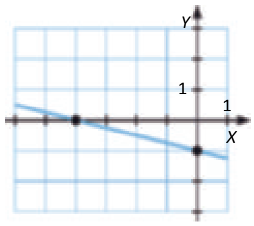
b) $y = 3x - 2$ pasa por los puntos (0, –2) y (1, 1).



c) $y = -3x + 1$ pasa por los puntos (0, 1) y (1, –2).



d) $y = -\frac{1}{4}x - 1$ pasa por los puntos (0, –1) y (–4, 0).



VIDA COTIDIANA

EL GPS. Página 157

Las coordenadas son (–230, –100).

ACTIVIDADES

1. Página 158

a) $A(a_1, a_2) = A(1, 4)$ y $B(b_1, b_2) = B(3, -2) \to \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (2, -6)$

Las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ son (2, –6).

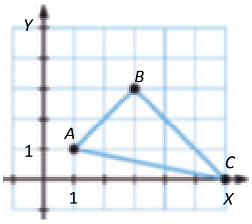
b) $A(a_1, a_2) = A(9, -1)$ y $B(b_1, b_2) = B(5, 7) \to \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (-4, 8)$

Las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ son (–4, 8).

c) $A(a_1, a_2) = A(2, 3)$ y $B(b_1, b_2) = B(1, 6) \to \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (-1, 3)$

Las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ son (–1, 3).

2. Página 158



$A(a_1, a_2) = A(1, 1)$ y $B(b_1, b_2) = B(3, 3) \to \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (2, 2)$

$B(b_1, b_2) = B(3, 3)$ y $C(c_1, c_2) = C(6, 0) \to \overrightarrow{BC} = (c_1 - b_1, c_2 - b_2) = (3, -3)$

$C(c_1, c_2) = C(6, 0)$ y $A(a_1, a_2) = A(1, 1) \to \overrightarrow{CA} = (a_1 - c_1, a_2 - c_2) = (-5, 1)$

3. Página 158

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{matrix} A(a_1, a_2) \\ B(b_1, b_2) \end{matrix}\right\} \to \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (5, 3)$$

Dos parejas de puntos que cumplen esta condición serían:

$A(1, 1)$ y $B(6, 4)$ $\qquad$ $A(0, -1)$ y $B(5, 2)$

4. Página 159

a) $A(a_1, a_2) = A(0, 0)$ y $B(b_1, b_2) = B(3, 4) \to \overrightarrow{AB} = (3, 4) \to |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9 + 16} = 5$

b) $A(a_1, a_2) = A(1, 2)$ y $B(b_1, b_2) = B(6, 14) \to \overrightarrow{AB} = (5, 12) \to |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{25 + 144} = 13$

c) $A(a_1, a_2) = A(2, -1)$ y $B(b_1, b_2) = B(5, 3) \to \overrightarrow{AB} = (3, 4) \to |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9 + 16} = 5$

d) $A(a_1, a_2) = A(1, 3)$ y $B(b_1, b_2) = B(4, 5) \to \overrightarrow{AB} = (3, 2) \to |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$

e) $A(a_1, a_2) = A(-2, 4)$ y $B(b_1, b_2) = B(5, -1) \to \overrightarrow{AB} = (7, -5) \to |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{49 + 25} = \sqrt{74}$

5. Página 159

a) $\frac{u_2}{u_1} = \frac{v_2}{v_1} \rightarrow \frac{3}{1} = \frac{-3}{-1} \rightarrow$ Son paralelos.

b) $\frac{u_2}{u_1} = \frac{v_2}{v_1} \rightarrow \frac{2}{3} = \frac{-4}{-6} \rightarrow$ Son paralelos.

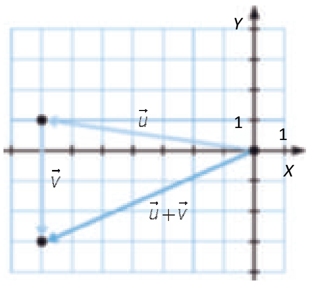
c) $u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 = 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) = 0 \rightarrow$ Son perpendiculares.

6. Página 159

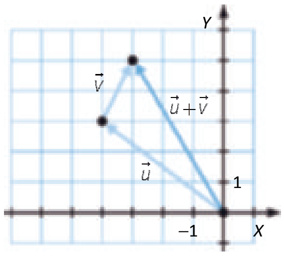
$\vec{v} = (v_1, v_2)$ y $\vec{v'} = (-v_2, v_1) \rightarrow -v_1 \cdot v_2 + v_1 \cdot v_2 = 0 \rightarrow$ Son perpendiculares.

7. Página 160

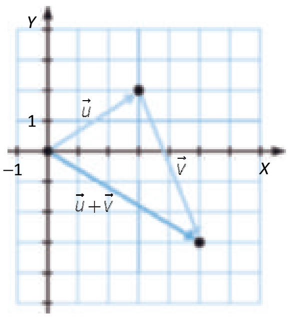
a) $\vec{u} + \vec{v} = (-7, 1) + (0, -4) = (-7, -3)$



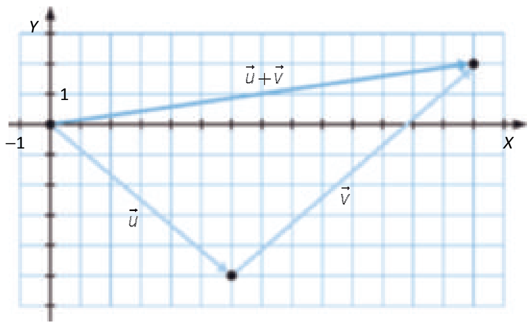
c) $\vec{u} + \vec{v} = (-4, 3) + (1, 2) = (-3, 5)$



b) $\vec{u} + \vec{v} = (3, 2) + (2, -5) = (5, -3)$



d) $\vec{u} + \vec{v} = (6, -5) + (8, 7) = (14, 2)$



8. Página 160

$\overrightarrow{AB} = (-1, 3)$ $\quad$ $\overrightarrow{CD} = (3, -1)$

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (2, 2)$

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = (-4, 4)$

c) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB} = (4, -4)$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = (-2, 6)$

e) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CD} = (0, 0)$

f) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} = (2, 2)$

9. Página 160

$\vec{u} = (u_1, u_2) \rightarrow -\vec{u} = (-u_1, -u_2)$ $\quad$ $\vec{u} + (-\vec{u}) = (0, 0)$

10. Página 161

a) $2\cdot(1,2)=(2,4)$

b) $-1\cdot(3,-1)=(-3,1)$

c) $3\cdot(2,5)=(6,15)$

d) $2\cdot(4,10)+3\cdot(-2,7)=(8,20)+(-6,21)=(2,41)$

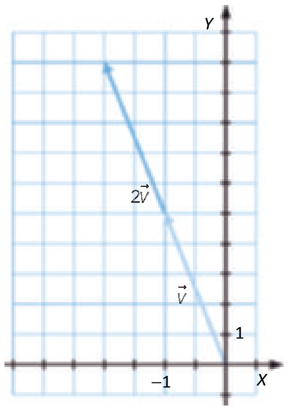
e) $-1\cdot(2,-3)-3\cdot(1,1)=(-2,3)+(-3,-3)=(-5,0)$

f) $5\cdot(-3,4)+3\cdot(8,4)=(-15,20)+(24,12)=(9,32)$

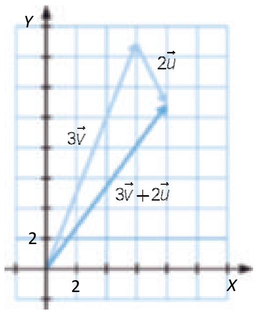
g) $6\cdot(1,-1)-2\cdot(2,3)=(6,-6)+(-4,-6)=(2,-12)$

11. Página 161

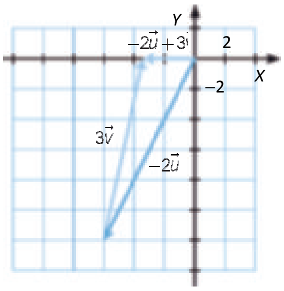
a) $2\vec{v}=(-2,10)$



b) $3\vec{v}+2\vec{u}=(6,15)+(2,-4)=(8,11)$



c) $-2\vec{u}+3\vec{v}=(-6,-12)+(3,12)=(-3,0)$



12. Página 161

$\vec{v}=(2,6)\rightarrow|\vec{v}|=\sqrt{4+36}=2\sqrt{10}$

Un vector con la misma dirección, sentido contrario y módulo la mitad sería:

$\vec{u}=(-1,3)\rightarrow|\vec{u}|=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

Para volver a obtener $\vec{v}$ a partir de $\vec{u}$ tenemos que multiplicarlo por –2, es decir, $\vec{v}=-2\vec{u}$.

13. Página 162

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) Si $t=1\rightarrow(x,y)=(1,2)+(4,-1)=(5,1)$

Si $t=-1\rightarrow(x,y)=(1,2)+(-1)\cdot(4,-1)=(-3,3)$

Si $t=2\rightarrow(x,y)=(1,2)+2\cdot(4,-1)=(9,0)$

b) Si $t=1\rightarrow(x,y)=(2,0)+(3,5)=(5,5)$

Si $t=-1\rightarrow(x,y)=(2,0)+(-1)\cdot(3,5)=(-1,-5)$

Si $t=2\rightarrow(x,y)=(2,0)+2\cdot(3,5)=(8,10)$

c) Si $t=1\rightarrow(x,y)=(0,4)+(-3,2)=(-3,6)$

Si $t=-1\rightarrow(x,y)=(0,4)+(-1)\cdot(-3,2)=(3,2)$

Si $t=2\rightarrow(x,y)=(0,4)+2\cdot(-3,2)=(-6,8)$

d) Si $t=1\rightarrow(x,y)=(-3,6)+(2,-4)=(-1,2)$

Si $t=-1\rightarrow(x,y)=(-3,6)+(-1)\cdot(2,-4)=(-5,10)$

Si $t=2\rightarrow(x,y)=(-3,6)+2\cdot(2,-4)=(1,-2)$

e) Si $t=1\rightarrow(x,y)=(0,-2)+(-1,5)=(-1,3)$

Si $t=-1\rightarrow(x,y)=(0,-2)+(-1)\cdot(-1,5)=(1,-7)$

Si $t=2\rightarrow(x,y)=(0,-2)+2\cdot(-1,5)=(-2,8)$

f) Si $t=1\rightarrow(x,y)=(-1,3)+(6,-1)=(5,2)$

Si $t=-1\rightarrow(x,y)=(-1,3)+(-1)\cdot(6,-1)=(-7,4)$

Si $t=2\rightarrow(x,y)=(-1,3)+2\cdot(6,-1)=(11,1)$

14. Página 162

a) $(x,y)=(4,4)+t(2,2)$

b) $(x,y)=(5,-3)+t(-1,1)$

c) $(x,y)=(2,3)+t(4,5)$

d) $(x,y)=(-1,3)+t(1,5)$

15. Página 162

Un vector paralelo al vector director de la recta es (6, 2) $\rightarrow(x,y)=(-1,5)+t\cdot(6,2)$.

16. Página 163

Los puntos son respuestas abiertas.

a) $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 3-2t \end{cases} \rightarrow \text{Vector director} = (1, -2)$

Puntos: $t = 0 \rightarrow (1, 3)$ $t = 1 \rightarrow (2, 1)$ $t = -1 \rightarrow (0, 5)$

b) $\begin{cases} x = -1+3t \\ y = 2+2t \end{cases} \rightarrow \text{Vector director} = (3, 2)$

Puntos: $t = 0 \rightarrow (-1, 2)$ $t = 1 \rightarrow (2, 4)$ $t = -1 \rightarrow (-4, 0)$

c) $\begin{cases} x = 2+t \\ y = -2t \end{cases} \rightarrow \text{Vector director} = (1, -2)$

Puntos: $t = 0 \rightarrow (2, 0)$ $t = 1 \rightarrow (3, -2)$ $t = -1 \rightarrow (1, 2)$

d) $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 5-4t \end{cases} \rightarrow \text{Vector director} = (3, -4)$

Puntos: $t = 0 \rightarrow (1, 5)$ $t = 1 \rightarrow (4, 1)$ $t = -1 \rightarrow (-2, 9)$

17. Página 163

a) $A(8, 3)$ y $B(6, 5) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2, 2) \rightarrow \left.\begin{matrix} x = 8-2t \\ y = 3+2t \end{matrix}\right\}$

b) $A(1, 7)$ y $B(-1, 4) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2, -3) \rightarrow \left.\begin{matrix} x = 1-2t \\ y = 7-3t \end{matrix}\right\}$

18. Página 163

$$\left.\begin{matrix} x = 6t \\ y = 2+10t \end{matrix}\right\}$$

Sí, existe solo una recta que cumple esta condición, aunque podamos obtener infinitas expresiones para ella, ya que hay infinitos vectores paralelos a $\vec{u}$; pero la recta obtenida es la misma en todos los casos.

19. Página 164

$$r: \left.\begin{matrix} x = 3+2t \\ y = 4+t \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} t = \dfrac{x-3}{2} \\ t = \dfrac{y-4}{1} \end{matrix}\right\} \rightarrow r: \frac{x-3}{2} = y-4$$

20. Página 164

a) $A(4, 2)$ y $B(0, 0) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-4, -2) \rightarrow \dfrac{x-4}{-4} = \dfrac{y-2}{-2}$

b) $A(6, 3)$ y $B(-1, 3) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-7, 0) \rightarrow y = 3$

21. Página 164

a) $(x,y)=(2,1)+t\cdot(2,3)\rightarrow\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{3}$

b) $(x,y)=(-3,-1)+t\cdot(4,1)\rightarrow\dfrac{x+3}{4}=y+1$

c) $(x,y)=(4,-5)+t\cdot(-1,3)\rightarrow\dfrac{x-4}{-1}=\dfrac{y+5}{3}$

22. Página 165

a) $y-2=3\cdot(x+7)\rightarrow y-2=3x+21\rightarrow y=3x+23$

b) $y-5=-2\cdot(x-1)\rightarrow y-5=-2x+2\rightarrow y=-2x+7$

23. Página 165

$y-3=2\cdot(x-4)\rightarrow y=2x-5\rightarrow$ La pendiente es 2 y la ordenada en el origen es –5.

24. Página 165

a) $y=\dfrac{2}{3}x$

b) $1=-2+c\rightarrow c=3\rightarrow y=-2x+3$

25. Página 166

$\overrightarrow{PQ}=(6,-1)=(B,-A)\rightarrow Ax+By+C=0\xrightarrow{A=1,\,B=6}x+6y+C=0$

$\xrightarrow{x=-2,\,y=3}-2+18+C=0\rightarrow C=-16\rightarrow x+6y-16=0$

26. Página 166

a) Vector director: $m=\dfrac{-1}{-4}\rightarrow\vec{v}=(-4,-1)$

b) Punto de la recta: $y=0\rightarrow x+5=0\rightarrow x=-5\rightarrow(-5,0)$

c) Vector perpendicular: $(1,-4)$ ya que $(-4)\cdot 1+(-1)\cdot(-4)=0$

27. Página 166

La recta pasa por $A(-1,-1)$ y por $B(1,2)$ entonces:

$\overrightarrow{AB}=(2,3)=(B,-A)\rightarrow Ax+By+C=0\xrightarrow{A=-3,\,B=2}-3x+2y+C=0$

$\xrightarrow{x=-1,\,y=-1}3-2+C=0\rightarrow C=-1\rightarrow-3x+2y-1=0$

28. Página 167

a) $P(0,0)$ y $Q(-3,4) \rightarrow \overrightarrow{PQ}=(-3,4)$

Ecuación vectorial: $(x,y)=(0,0)+t(-3,4)$

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x=-3t \\ y=4t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\left.\begin{array}{l} t=-\dfrac{x}{3} \\ t=\dfrac{y}{4} \end{array}\right\} \rightarrow -\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}$

Ecuación punto-pendiente: $y=-\dfrac{4}{3}x$

Ecuación explícita: $y=-\dfrac{4}{3}x$

Ecuación general: $3y=-4x \rightarrow 4x+3y=0$

b) $P(0,1)$ y $Q(2,0) \rightarrow \overrightarrow{PQ}=(2,-1)$

Ecuación vectorial: $(x,y)=(0,1)+t(2,-1)$

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x=2t \\ y=1-t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\left.\begin{array}{l} t=\dfrac{x}{2} \\ t=\dfrac{y-1}{-1} \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}$

Ecuación punto-pendiente: $y-1=-\dfrac{1}{2}x$

Ecuación explícita: $y=-\dfrac{1}{2}x+1$

Ecuación general: $2y=-x+2 \rightarrow x+2y-2=0$

c) $P(-7,4)$ y $Q(1,2) \rightarrow \overrightarrow{PQ}=(8,-2)$

Ecuación vectorial: $(x,y)=(1,2)+t(8,-2)$

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x=1+8t \\ y=2-2t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\left.\begin{array}{l} t=\dfrac{x-1}{8} \\ t=\dfrac{y-2}{-2} \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y-2}{-2}$

Ecuación punto-pendiente: $y-2=\dfrac{x-1}{-4} \rightarrow y-2=-\dfrac{1}{4}(x-1)$

Ecuación explícita: $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{9}{4}$

Ecuación general: $4y=-x+9 \rightarrow x+4y-9=0$

d) $P(5,1)$ y $Q(0,4) \rightarrow \overrightarrow{PQ}=(-5,3)$

Ecuación vectorial: $(x,y)=(0,4)+t(-5,3)$

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x=-5t \\ y=4+3t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\left.\begin{array}{l} t=-\dfrac{x}{5} \\ t=\dfrac{y-4}{3} \end{array}\right\} \rightarrow -\dfrac{x}{5}=\dfrac{y-4}{3}$

Ecuación punto-pendiente: $y-4=-\dfrac{3}{5}x$

Ecuación explícita: $y=-\dfrac{3}{5}x+4$

Ecuación general: $5y=-3x+20 \rightarrow 3x+5y-20=0$

e) $P(3,-2)$ y $Q(1,3) \rightarrow \overrightarrow{PQ}=(-2,5)$

Ecuación vectorial: $(x,y)=(1,3)+t(-2,5)$

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x=1-2t \\ y=3+5t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\left.\begin{array}{l} t=\dfrac{x-1}{-2} \\ t=\dfrac{y-3}{5} \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-3}{5}$

Ecuación punto-pendiente: $y-3=5\left(\dfrac{x-1}{-2}\right) \rightarrow y-3=-\dfrac{5}{2}(x-1)$

Ecuación explícita: $y=-\dfrac{5}{2}x+\dfrac{11}{2}$

Ecuación general: $2y=-5x+11 \rightarrow 5x+2y-11=0$

f) $P(-2,0)$ y $Q(0,-1) \rightarrow \overrightarrow{PQ}=(2,-1)$

Ecuación vectorial: $(x,y)=(-2,0)+t(2,-1)$

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x=-2+2t \\ y=-t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\left.\begin{array}{l} t=\dfrac{x+2}{2} \\ t=\dfrac{y}{-1} \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{-1}$

Ecuación punto-pendiente: $y=-\left(\dfrac{x+2}{2}\right) \rightarrow y=-\dfrac{1}{2}(x+2)$

Ecuación explícita: $y=-\dfrac{1}{2}x-1$

Ecuación general: $2y=-x-2 \rightarrow x+2y+2=0$

29. Página 167

Ecuación vectorial: $(x, y) = (2, 1) + t(-4, -3)$

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x = 2 - 4t \\ y = 1 - 3t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\left.\begin{array}{l} t = \dfrac{x-2}{-4} \\ t = \dfrac{y-1}{-3} \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{x-2}{-4} = \dfrac{y-1}{-3}$

Ecuación punto-pendiente: $y - 1 = -3\left(\dfrac{x-2}{-4}\right) \rightarrow y - 1 = \dfrac{3}{4}(x-2)$

Ecuación explícita: $y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{2}$

Ecuación general: $4y = 3x - 2 \rightarrow 3x - 4y - 2 = 0$

30. Página 167

a) La ecuación explícita: $2x + y - 3 = 0 \rightarrow y = -2x + 3$

b) La ecuación continua: $2x + y - 3 = 0 \rightarrow \dfrac{y-3}{-2} = x$

c) La ecuación vectorial: $2x + y - 3 = 0 \rightarrow (x, y) = (0, 3) + t \cdot (1, -2)$

31. Página 167

a) Su pendiente es –1 y pasa por el punto (0, –2).

Ecuación punto-pendiente $y + 2 = -1 \cdot (x - 0) \rightarrow y + 2 = -x$

Ecuación explícita: $y = -x - 2$

Ecuación general: $x + y + 2 = 0$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, -2) + t(1, -1)$

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = -2 - t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $x = \dfrac{y+2}{-1}$

b) Su pendiente es 2 y su ordenada en el origen es –3.

Ecuación explícita: $y = 2x - 3$

Ecuación punto-pendiente: $y + 3 = 2x$

Ecuación general: $-2x + y + 3 = 0$

Ecuación continua: $x = \dfrac{y+3}{2}$

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = -3 + 2t \end{array}\right\}$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, -3) + t(1, 2)$

c) Pasa por el punto $P(2, 1)$ y es perpendicular a la recta $3x - 2y + 1 = 0$.

El vector (−2, 3) es el director de $3x - 2y + 1 = 0$, por tanto, el vector director de la nueva recta es (3, −2).

Ecuación vectorial: $(x, y) = (2, 1) + t(3, -2)$

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\left.\begin{array}{l} t = \dfrac{x-2}{3} \\ t = \dfrac{y-1}{-2} \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{-2}$

Ecuación punto-pendiente: $y - 1 = -2\left(\dfrac{x-2}{3}\right) \rightarrow y - 1 = -\dfrac{2}{3}(x-2)$

Ecuación explícita: $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{7}{3}$

Ecuación general: $3y = -2x + 7 \rightarrow 2x + 3y - 7 = 0$

d) Pasa por el punto $P(-1, 0)$ y es paralela a la recta $y - 2 = 3(x - 2)$.

El vector (1, 3) es el director de $y - 2 = 3(x - 2)$, por tanto, un vector director de la nueva recta es (2, 6).

Ecuación vectorial: $(x, y) = (-1, 0) + t(2, 6)$

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x = -1 + 2t \\ y = 6t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\left.\begin{array}{l} t = \dfrac{x+1}{2} \\ t = \dfrac{y}{6} \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{6}$

Ecuación punto-pendiente: $y = 6\left(\dfrac{x+1}{2}\right) \rightarrow y = 3(x+1)$

Ecuación explícita: $y = 3x + 3$

Ecuación general: $-3x + y - 3 = 0$

32. Página 168

a) $\left.\begin{array}{l} y = -2x + 1 \rightarrow \text{Pendiente} = -2 \\ 2x - 3y + 2 = 0 \rightarrow \text{Pendiente} = \dfrac{2}{3} \end{array}\right\} \rightarrow$ Las pendientes son distintas, luego las rectas son secantes.

b) $\left.\begin{array}{l} (x, y) = (2, 3) + t(1, 4) \rightarrow \text{Pendiente} = 4 \\ \dfrac{x-3}{-8} = \dfrac{y-1}{-2} \qquad \rightarrow \text{Pendiente} = \dfrac{1}{4} \end{array}\right\} \rightarrow$ Las pendientes son distintas, luego las rectas son secantes.

33. Página 168

El vector (1, 2) es director de la recta $y = 2x + 3$. Por tanto, un vector perpendicular puede ser (−2, 1), es decir, la recta perpendicular tiene pendiente $m = -\dfrac{1}{2}$.

34. Página 168

El vector director de s es (2, 4) y su pendiente es $m = 2$. Por tanto, las pendientes son iguales cuando $A = 2$. Pero en este caso son coincidentes ya que $\frac{-2}{4}=\frac{1}{-2}=\frac{-6}{12}$.

35. Página 169

a) $3x+y-1=0 \rightarrow \vec{v}=(1,-3)$ es vector director de la recta.

Un vector perpendicular es $\vec{v'}=(3,1)$ y, por tanto, la recta perpendicular que pasa por el punto $P(3,-1)$ es: $(x,y)=(3,-1)+t\cdot(3,1)$.

El punto $P(3,-1)$ no pertenece a la recta dada ya que $3x+y-1=0 \xrightarrow{x=3,\,y=-1} 9-1-1\neq 0$.

El vector director de la recta paralela puede ser el mismo que el de la recta original. Por tanto, la ecuación vectorial de la recta paralela es: $(x,y)=(3,-1)+t\cdot(1,-3)$.

b) $5x+2y-4=0 \rightarrow \vec{v}=(2,-5)$ es vector director de la recta.

Un vector perpendicular es $\vec{v'}=(5,2)$ y, por tanto, la recta perpendicular que pasa por el punto $P(3,-1)$ es: $(x,y)=(3,-1)+t\cdot(5,2)$.

El punto $P(3,-1)$ no pertenece a la recta dada ya que $5x+2y-4=0 \xrightarrow{x=3,\,y=-1} 15-2-4\neq 0$.

El vector director de la recta paralela puede ser el mismo que el de la recta original. Por tanto, la ecuación vectorial de la recta paralela es: $(x,y)=(3,-1)+t\cdot(2,-5)$.

c) $-x+y+2=0 \rightarrow \vec{v}=(1,1)$ es vector director de la recta.

Un vector perpendicular es $\vec{v'}=(1,-1)$ y, por tanto, la recta perpendicular pasa que por el punto $P(3,-1)$ es: $(x,y)=(3,-1)+t\cdot(1,-1)$.

El punto $P(3,-1)$ no pertenece a la recta dada ya que $-x+y+2=0 \xrightarrow{x=3,\,y=-1} -3-1+2\neq 0$.

El vector director de la recta paralela puede ser el mismo que el de la recta original. Por tanto, la ecuación vectorial de la recta paralela es: $(x,y)=(3,-1)+t\cdot(1,1)$.

d) $-2x+2y-1=0 \rightarrow \vec{v}=(2,2)$ es vector director de la recta.

Un vector perpendicular es $\vec{v'}=(2,-2)$ y, por tanto, la recta perpendicular que pasa por el punto $P(3,-1)$ es: $(x,y)=(3,-1)+t\cdot(2,-2)$.

El punto $P(3,-1)$ no pertenece a la recta dada ya que $-2x+2y-1=0 \xrightarrow{x=3,\,y=-1} -6-2-1\neq 0$.

El vector director de la recta paralela puede ser el mismo que el de la recta original. Por tanto, la ecuación vectorial de la recta paralela es: $(x,y)=(3,-1)+t\cdot(2,2)$.

e) $4x+3y+2=0 \rightarrow \vec{v}=(3,-4)$ es vector director de la recta.

Un vector perpendicular es $\vec{v'}=(4,3)$ y, por tanto, la recta perpendicular que pasa por el punto $P(3,-1)$ es: $(x,y)=(3,-1)+t\cdot(4,3)$.

El punto $P(3,-1)$ no pertenece a la recta dada ya que $4x+3y+2=0 \xrightarrow{x=3,\,y=-1} 12-3+2\neq 0$.

El vector director de la recta paralela puede ser el mismo que el de la recta original. Por tanto, la ecuación vectorial de la recta paralela es: $(x,y)=(3,-1)+t\cdot(6,-8)$.

36. Página 169

$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{7} \rightarrow \vec{v_r} = (2, 7)$ es un vector director de la recta.

Un vector paralelo es $\vec{v_s} = (4, 14)$. El punto $P(0, 0)$ no pertenece a la recta dada ya que:

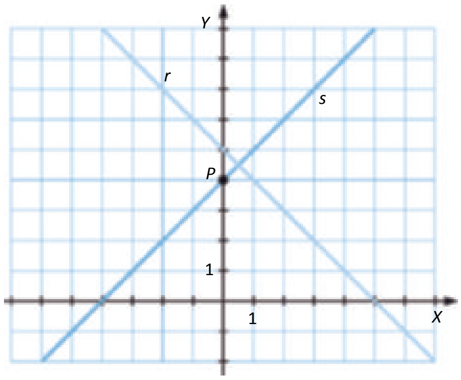
$\frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{7} \xrightarrow{x=0,\, y=0} \frac{-1}{2} \neq \frac{-5}{7}$

Por tanto, la ecuación vectorial de la recta paralela es $s: (x, y) = (0, 0) + t \cdot (4, 14)$.

37. Página 169

$r: x + y - 5 = 0 \rightarrow \vec{v_r} = (1, -1)$ es un vector director de la recta.

Un vector perpendicular es $\vec{v_s} = (1, 1)$ y, por tanto, la recta perpendicular que pasa por el punto $P(0, 4)$ es: $s: (x, y) = (0, 4) + t \cdot (1, 1)$.



38. Página 169

$r: (x, y) = (2, 0) + t(-1, 4) \rightarrow \vec{v_r} = (-1, 4)$ es un vector director de la recta.

Un vector paralelo es $\vec{v_s} = (-2, 8)$. El punto $P(1, 1)$ no pertenece a la recta dada ya que:

$\frac{x-2}{-1} = \frac{y}{4} \xrightarrow{x=1,\, y=1} 1 \neq \frac{1}{4}$

Por tanto, la ecuación vectorial de la recta paralela es $s: (x, y) = (1, 1) + t \cdot (-2, 8)$.

39. Página 169

$y = \frac{3}{2}x + 1 \rightarrow \vec{v} = (2, 3)$ es un vector director de la recta.

a) Un vector paralelo es $\vec{v_s} = (4, 6)$. El punto $P(0, 2)$ no pertenece a la recta dada ya que:

$y = \frac{3}{2}x + 1 \xrightarrow{x=0,\, y=2} 2 \neq 1$

Por tanto, la ecuación vectorial de la recta paralela es $s: (x, y) = (0, 2) + t \cdot (4, 6)$.

b) Un vector perpendicular es $\vec{v_s} = (3, -2)$ y, por tanto, la recta perpendicular que pasa por el punto $P(0, 0)$ es:

$s: y = \frac{-2}{3}x$.

c) Un vector paralelo es $\vec{v_s}=(4,6)$. El punto $Q(0,3)$ no pertenece a la recta dada ya que:

$$y=\frac{3}{2}x+1\xrightarrow{x=0,\,y=3}3\neq 1$$

Por tanto, la ecuación continua de la recta paralela es $s:\frac{x}{4}=\frac{y-3}{6}$.

40. Página 169

$y=7\rightarrow(x,y)=(0,7)+t(1,0)$. Para que pase por el (1, 2) la recta tiene que ser $y=2$.

41. Página 169

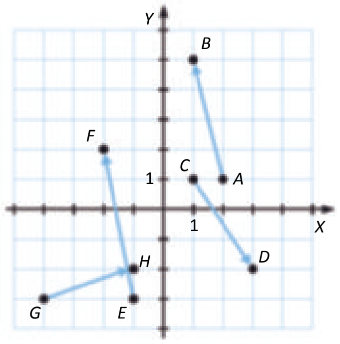
La recta pasa por los puntos $A(0,3)$ y $B(-2,-2)\rightarrow\overrightarrow{AB}=(-2,-5)\rightarrow r:(x,y)=(0,3)+t(-2,-5)$

a) Un vector paralelo es $\vec{v_s}=(4,10)$. Una recta paralela que pasa por el origen es $s:(x,y)=(0,0)+t(4,10)$.

b) Un vector perpendicular es $\vec{v_t}=(-5,2)$. Una recta perpendicular que pasa por $A(0,-1)$ es $t:(x,y)=(0,-1)+t(-5,2)$.

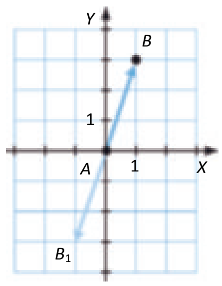
ACTIVIDADES FINALES

42. Página 170



43. Página 170

$\overrightarrow{AB}=(1-0,3-0)=(1,3)$, y un vector con sentido contrario $\overrightarrow{AB_1}=(-1,-3)$.



44. Página 170

a) El origen es $A(0,0)$ y el extremo es $(5,2)\rightarrow\overrightarrow{AB}=(5,2)$.

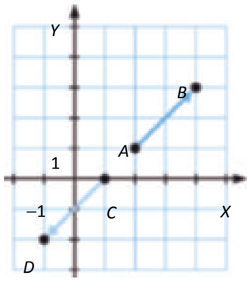
b) El origen es $A(0,0)$ y el extremo es $(-2,1)\rightarrow\overrightarrow{AB}=(-2,1)$.

c) El origen es $A(0,0)$ y el extremo es $(3,2)\rightarrow\overrightarrow{AB}=(3,2)$.

d) El origen es $A(0,0)$ y el extremo es $(2{,}5;7)=\overrightarrow{AB}=(2{,}5;7)$.

45. Página 170

$\overrightarrow{AB}=(4-2,3-1)=(2,2)\rightarrow|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, y un vector con el mismo módulo y la misma dirección es $\overrightarrow{CD}=(-2,-2)$.



46. Página 170

El origen es el punto $A(2,1)$ y el extremo $B(5,2)$.

47. Página 170

$P(5,2)$ y $B(b_1,b_2)\rightarrow\vec{a}=\overrightarrow{PB}=(b_1-5,b_2-2)=(3,-1)\rightarrow B(8,1)$

48. Página 170

$A(a_1,a_2)$ y $Q(3,-1)\rightarrow\vec{a}=\overrightarrow{AQ}=(3-a_1,-1-a_2)=(-2,4)\rightarrow A(5,-5)$

49. Página 170

a) $P(-2,-7)$ y $B(b_1,b_2)\rightarrow\vec{a}=(b_1+2,b_2+7)=(-3,2)\rightarrow B(-5,-5)$

b) $P(1,-6)$ y $B(b_1,b_2)\rightarrow\vec{b}=(b_1-1,b_2+6)=(4,-5)\rightarrow B(5,-11)$

c) $P(5,3)$ y $B(b_1,b_2)\rightarrow\vec{c}=(b_1-5,b_2-3)=(4,11)\rightarrow B(9,14)$

d) $P(7,-2)$ y $B(b_1,b_2)\rightarrow\vec{d}=(b_1-7,b_2+2)=(-5,7)\rightarrow B(2,5)$

50. Página 170

a) El origen es $A(4,4)$, el extremo $B(2,1)$ y las coordenadas $\overrightarrow{AB}=(-2,-3)$.

b) El origen es $A(1,0)$, el extremo $B(-2,1)$ y las coordenadas $\overrightarrow{AB}=(-3,1)$.

c) El origen es $A(-1,2)$, el extremo $B(6,2)$ y las coordenadas $\overrightarrow{AB}=(7,0)$.

d) El origen es $A(0,5)$, el extremo $B(5,7)$ y las coordenadas $\overrightarrow{AB}=(5,2)$.

51. Página 170

a) $P(-6,-7)$ y $A(a_1,a_2)\rightarrow\vec{a}=(-6-a_1,-7-a_2)=(-3,5)\rightarrow A(-3,-12)$

b) $P(0,1)$ y $A(a_1,a_2)\rightarrow\vec{b}=(0-a_1,1-a_2)=(1,-5)\rightarrow A(-1,6)$

c) $P(2,8)$ y $A(a_1,a_2)\rightarrow\vec{c}=(2-a_1,8-a_2)=(4,7)\rightarrow A(-2,1)$

d) $P(-1,-3)$ y $A(a_1,a_2)\rightarrow\vec{c}=(-1-a_1,-3-a_2)=(-1,1)\rightarrow A(0,-4)$

52. Página 170

Los vectores que forman los puntos son:

$\overrightarrow{AB} = (1, 3)$ $\overrightarrow{BC} = (-1, 1)$ $\overrightarrow{CA} = (0, -4)$

Si los puntos están alineados, los vectores que forman deben tener la misma dirección, es decir, sus coordenadas deben ser múltiplos. Tenemos que comprobar si existe un número, λ, de forma que al multiplicar uno de los vectores por ese número obtengamos otro de los vectores:

$\overrightarrow{AB} = (1, 3) = \lambda \cdot \overrightarrow{BC} = \lambda \cdot (-1, 1) \rightarrow$ Imposible. Los puntos no están alineados, forman un triángulo.

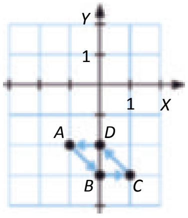
53. Página 170

Puntos: $A(2, -2)$ $B(4, 2)$ $C(0, 6)$

Vectores: $\overrightarrow{AB} = (2, 4)$ $\overrightarrow{BC} = (-4, 4)$ $\overrightarrow{CA} = (2, -8)$

54. Página 170

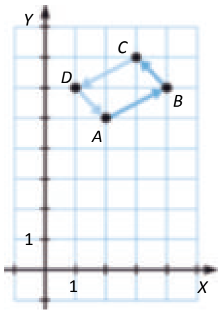
Obtenemos gráficamente el punto D:



El punto es $D(0, -2)$.

55. Página 170

Obtenemos gráficamente el punto D:



El punto es $D(1, 6)$.

56. Página 171

a) $A(1, -2)$ y $B(4, 2) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (3, 4) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{25} = 5$

b) $A(0, 0)$ y $B(-4, 3) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-4, 3) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{25} = 5$

c) $A(2, -3)$ y $B(1, 2) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-1, 5) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{26}$

d) $A(3, 7)$ y $B(0, 3) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-3, -4) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{25} = 5$

57. Página 171

a) $A(1, 5)$ y $B(4, 8) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (3, 3) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

b) $C(4, -1)$ y $D(9, 10) \rightarrow \overrightarrow{CD} = (5, 11) \rightarrow |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{146}$

c) $E(-2, -6)$ y $F(-1, 0) \rightarrow \overrightarrow{EF} = (1, 6) \rightarrow |\overrightarrow{EF}| = \sqrt{37}$

d) $G(-3, 0)$ y $H(0, -1) \rightarrow \overrightarrow{GH} = (3, -1) \rightarrow |\overrightarrow{EF}| = \sqrt{10}$

58. Página 171

$\vec{v} = (5, 12) \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{169} = 13$

Vector con módulo igual a la unidad: $\vec{u} = (0, 1) \rightarrow |\vec{v}_2| = \sqrt{1^2} = 1$

Vector con módulo el doble de $\vec{v}$: $\vec{v_2} = (26, 0) \rightarrow |\vec{v}_3| = \sqrt{26^2} = 26$

59. Página 171

Calculamos los vectores que forman los puntos y sus módulos:

$\overrightarrow{AB} = (1, -1) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2}$ $\overrightarrow{CD} = (-1, 1) \rightarrow |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{2}$

$\overrightarrow{BC} = (1, 1) \rightarrow |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2}$ $\overrightarrow{DA} = (-1, -1) \rightarrow |\overrightarrow{DA}| = \sqrt{2}$

Veamos si los vectores consecutivos son perpendiculares:

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0 \rightarrow$ Son perpendiculares.

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0 \rightarrow$ Son perpendiculares.

$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DA} = (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = 0 \rightarrow$ Son perpendiculares.

$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} = (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = 0 \rightarrow$ Son perpendiculares.

Como todos los vectores tienen el mismo módulo, y los vectores consecutivos son perpendiculares, determinan un cuadrado.

60. Página 171

Las diagonales miden: $\overrightarrow{AC} = (0, -4) \rightarrow |\overrightarrow{AC}| = 4$

$\overrightarrow{BD} = (2, 0) \rightarrow |\overrightarrow{BD}| = 2$

Por tanto, el área del rombo es $\dfrac{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}|}{2} = \dfrac{4 \cdot 2}{2} = 4$.

61. Página 171

Los vértices del triángulo son: $A(0, 0)$ $B(-4, 3)$ $C(6, 3)$

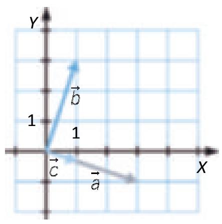
Los lados del triángulo miden:

$\overrightarrow{AB} = (-4, 3) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 5$ $\overrightarrow{BC} = (10, 0) \rightarrow |\overrightarrow{BC}| = 10$ $\overrightarrow{CA} = (-6, -3) \rightarrow |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$\text{Perímetro} = 15 + 3\sqrt{5}$

62. Página 171

Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{c}$ tienen la misma dirección y el mismo sentido. El vector $\vec{b}$ es perpendicular a los otros dos.



63. Página 171

a) $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0 \rightarrow$ Son perpendiculares.

b) $\frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} \rightarrow -\frac{1}{2} = -\frac{2}{4} \rightarrow$ Son paralelos.

c) $e_1 \cdot f_1 + e_2 \cdot f_2 = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) = 0 \rightarrow$ Son perpendiculares.

d) $\frac{g_2}{g_1} = \frac{b_2}{b_1} \rightarrow \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \rightarrow$ Son paralelos.

64. Página 171

Los vectores que forman los puntos son:

$\overrightarrow{AB} = (-1, 3)$ $\quad \overrightarrow{BC} = (2, -2)$ $\quad \overrightarrow{CA} = (-1, -1)$

Comprobamos si dos de los vectores son perpendiculares.

$\overrightarrow{AB} = (-1, 3)$ y $\overrightarrow{BC} = (2, -2) \rightarrow (-1) \cdot 2 + 3 \cdot (-2) = -8 \neq 0 \rightarrow$ No son perpendiculares.

$\overrightarrow{BC} = (2, -2)$ y $\overrightarrow{CA} = (-1, -1) \rightarrow 2 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-1) = 0 \rightarrow$ Son perpendiculares.

Los puntos no están alineados y dos de sus lados son perpendiculares, por tanto, forman un triángulo rectángulo.

65. Página 171

$\vec{u} = (2, x)$ y $\vec{v} = (x - 1, 4)$ perpendiculares $\rightarrow 2 \cdot (x - 1) + x \cdot 4 = 0 \rightarrow 2x - 2 + 4x = 0 \rightarrow 6x = 2 \rightarrow x = \frac{1}{3}$

66. Página 171

$\vec{u} = (x, 8)$ y $\vec{v} = (2, x)$ paralelos $\rightarrow \frac{8}{x} = \frac{x}{2} \rightarrow 16 = x^2 \rightarrow x = \pm 4$

67. Página 171

a) $\vec{w} = 2 \cdot (1, -3) = (2, -6)$

b) $\vec{w} = (-1) \cdot (3, 2) = (-3, -2)$

c) $\vec{w} = \frac{3}{2} \cdot (5, -1) = \left(\frac{15}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

d) $\vec{w} = \frac{1}{2} \cdot (-2, 4) = (-1, 2)$

68. Página 171

a) $\vec{u} = (4, 2)$ y $\vec{v} = (1, -2) \rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (5, 0)$

b) $\vec{u} = (2, 2)$ y $\vec{v} = (5, -3) \rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (7, -1)$

c) $\vec{u} = (1, 2)$ y $\vec{v} = (2, -3) \rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (3, -1)$

d) $\vec{u} = (2, 1)$ y $\vec{v} = (3, 1) \rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (5, 2)$

69. Página 171

a) $\vec{v} + \vec{w} = (3, -2) + (-1, 7) = (2, 5)$

b) $\vec{v} - \vec{w} = (3, -2) - (-1, 7) = (4, -9)$

c) $2\vec{v} - 3\vec{w} = (6, -4) - (-3, 21) = (9, -25)$

d) $5\vec{v} + 2\vec{w} = (15, -10) + (-4, 14) = (11, 4)$

70. Página 171

a) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(2,-5)+(3,7)+(5,-1)=(10,1)$

b) $-2\vec{a}+5\vec{b}+\vec{c}=(-4,10)+(15,35)+(5,-1)=(16,44)$

c) $\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}=(2,-5)+(6,14)+(-15,3)=(-7,12)$

d) $-\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+4\vec{c}=(-2,5)+\left(-\frac{3}{2},-\frac{7}{2}\right)+(20,-4)=\left(\frac{33}{2},-\frac{5}{2}\right)$

72. Página 172

a) $A(2,2)$ y $B(4,2)\rightarrow\overrightarrow{AB}=(2,0)\rightarrow M=A+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(2,2)+(1,0)=(3,2)$

b) $A(3,5)$ y $B(1,7)\rightarrow\overrightarrow{AB}=(-2,2)\rightarrow M=A+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(3,5)+(-1,1)=(2,6)$

c) $A(2,3)$ y $B(4,1)\rightarrow\overrightarrow{AB}=(2,-2)\rightarrow M=A+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(2,3)+(1,-1)=(3,2)$

d) $A(5,7)$ y $B(1,3)\rightarrow\overrightarrow{AB}=(-4,-4)\rightarrow M=A+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(5,7)+(-2,-2)=(3,5)$

73. Página 172

a) $A(1,-3)$ y $B(-1,2)\rightarrow\overrightarrow{AB}=(-2,5)\rightarrow M=A+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(1,-3)+\left(-1,\frac{5}{2}\right)=\left(0,-\frac{1}{2}\right)$

b) $A(1,-1)$ y $B(5,7)\rightarrow\overrightarrow{AB}=(4,8)\rightarrow M=A+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(1,-1)+(2,4)=(3,3)$

c) $A(-3,-3)$ y $B(-4,2)\rightarrow\overrightarrow{AB}=(-1,5)\rightarrow M=A+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(-3,-3)+\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)=\left(-\frac{7}{2},-\frac{1}{2}\right)$

d) $A(2,-7)$ y $B(-1,3)\rightarrow\overrightarrow{AB}=(-3,10)\rightarrow M=A+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(2,-7)+\left(-\frac{3}{2},5\right)=\left(\frac{1}{2},-2\right)$

74. Página 172

a) $\overrightarrow{AB}=(b_1-0,b_2-3)\rightarrow M=A+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\rightarrow(2,2)=(0,3)+\left(\frac{b_1}{2},\frac{b_2-3}{2}\right)\rightarrow(2,2)=\left(\frac{b_1}{2},\frac{b_2+3}{2}\right)\rightarrow B=(4,1)$

b) $\overrightarrow{AB}=(b_1-2,b_2+1)\rightarrow M=A+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\rightarrow(0,0)=(2,-1)+\left(\frac{b_1-2}{2},\frac{b_2+1}{2}\right)\rightarrow(0,0)=\left(\frac{b_1+2}{2},\frac{b_2-1}{2}\right)\rightarrow B=(-2,1)$

c) $\overrightarrow{AB}=(b_1+3,b_2-3)\rightarrow M=A+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\rightarrow(0,5)=(-3,3)+\left(\frac{b_1+3}{2},\frac{b_2-3}{2}\right)\rightarrow(0,5)=\left(\frac{b_1-3}{2},\frac{b_2+3}{2}\right)\rightarrow B=(3,7)$

d) $\overrightarrow{AB}=(b_1-5,b_2-3)\rightarrow M=A+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\rightarrow(-2,-2)=(5,3)+\left(\frac{b_1-5}{2},\frac{b_2-3}{2}\right)\rightarrow(-2,-2)=\left(\frac{b_1+5}{2},\frac{b_2+3}{2}\right)\rightarrow B=(-9,-7)$

75. Página 172

$A(0,0)$ y $B(5,2)\rightarrow\overrightarrow{AB}=(5,2)\rightarrow M=A+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(0,0)+\left(\frac{5}{2},1\right)=\left(\frac{5}{2},1\right)$

76. Página 172

$$\overrightarrow{PQ}=(6,-6)\rightarrow M=P+\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}=(-2,3)+(3,-3)=(1,0)$$

77. Página 172

$$\overrightarrow{AB}=(2,-4)\rightarrow M=A+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(2,1)+(1,-2)=(3,-1)$$

78. Página 172

a) $\vec{v}(2,3)$ y $A(1,3)\rightarrow(x,y)=(1,3)+t(2,3)$

b) $\vec{v}(-1,1)$ y $A(0,5)\rightarrow(x,y)=(0,5)+t(-1,1)$

c) $\vec{v}(-4,1)$ y $A(-1,-2)\rightarrow(x,y)=(-1,-2)+t(-4,1)$

d) $\vec{v}(5,-3)$ y $A(3,-1)\rightarrow(x,y)=(3,-1)+t(5,-3)$

79. Página 172

a) $A(0,3)$ y $B(2,1)\rightarrow\overrightarrow{AB}=(2,-2)\rightarrow(x,y)=(0,3)+t(2,-2)$

b) $A(3,-2)$ y $B(5,1)\rightarrow\overrightarrow{AB}=(2,3)\rightarrow(x,y)=(3,-2)+t(2,3)$

c) $A(-6,-1)$ y $B(4,-3)\rightarrow\overrightarrow{AB}=(10,-2)\rightarrow(x,y)=(-6,-1)+t(10,-2)$

d) $A(3,-7)$ y $B(4,2)\rightarrow\overrightarrow{AB}=(1,9)\rightarrow(x,y)=(3,-7)+t(1,9)$

80. Página 172

a) La recta pasa por los puntos $A(0,1)$ y $B(1,3)\rightarrow\overrightarrow{AB}=(1,2)\rightarrow(x,y)=(0,1)+t(1,2)$.

b) La recta pasa por los puntos $A(-1,0)$ y $B(0,3)\rightarrow\overrightarrow{AB}=(1,3)\rightarrow(x,y)=(-1,0)+t(1,3)$.

c) La recta pasa por los puntos $A(0,-2)$ y $B(-1,2)\rightarrow\overrightarrow{AB}=(-1,4)\rightarrow(x,y)=(0,-2)+t(-1,4)$.

d) La recta pasa por los puntos $A(-4,0)$ y $B(0,-4)\rightarrow\overrightarrow{AB}=(4,-4)\rightarrow(x,y)=(-4,0)+t(4,-4)$.

81. Página 172

a) $\vec{v}(-1,1)$ y $A(-9,4)\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=-9-t\\y=4+t\end{array}\right\}$

b) $\vec{v}(8,-1)$ y $A(6,9)\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=6+8t\\y=9-t\end{array}\right\}$

c) $\vec{v}(-1,-5)$ y $A(-3,1)\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=-3-t\\y=1-5t\end{array}\right\}$

d) $\vec{v}(-4,-7)$ y $A(-2,3)\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=-2-4t\\y=3-7t\end{array}\right\}$

82. Página 172

a) $A(-3,-8)$ y $B(0,10)\rightarrow\overrightarrow{AB}=(3,18)\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=-3+3t\\y=-8+18t\end{array}\right\}$

b) $A(-8,-6)$ y $B(1,5)\rightarrow\overrightarrow{AB}=(9,11)\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=-8+9t\\y=-6+11t\end{array}\right\}$

c) $A(5,8)$ y $B(-9,5)\rightarrow\overrightarrow{AB}=(-14,-3)\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=5-14t\\y=8-3t\end{array}\right\}$

d) $A(0,4)$ y $B(-10,0)\rightarrow\overrightarrow{AB}=(-10,-4)\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=-10t\\y=4-4t\end{array}\right\}$

83. Página 172

a) Pasa por los puntos $A(1,0)$ y $B(0,-1) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-1,-1) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1-t \\ y = -t \end{array}\right\}$.

b) Pasa por los puntos $A(1,0)$ y $B(0,-2) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-1,-2) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1-t \\ y = -2t \end{array}\right\}$.

c) Pasa por los puntos $A(1,0)$ y $B(0,1) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-1,1) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1-t \\ y = t \end{array}\right\}$.

d) Pasa por los puntos $A(-2,-1)$ y $B(0,3) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (2,4) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -2+2t \\ y = -1+4t \end{array}\right\}$.

85. Página 173

a) $\dfrac{y+1}{5} = \dfrac{x-2}{3}$ y $P(2,3)$ $\qquad \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{x-2}{3} \xrightarrow{x=2,\,y=3} \dfrac{4}{5} \neq \dfrac{0}{3} \rightarrow$ No pertenece a la recta.

b) $\dfrac{y+1}{2} = \dfrac{x}{-3}$ y $P(-1,3)$ $\qquad \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{x}{-3} \xrightarrow{x=-1,\,y=3} \dfrac{4}{2} \neq \dfrac{1}{3} \rightarrow$ No pertenece a la recta.

c) $\dfrac{y}{3} = \dfrac{x+3}{6}$ y $P(6,9)$ $\qquad \dfrac{y}{3} = \dfrac{x+3}{6} \xrightarrow{x=6,\,y=9} 3 \neq \dfrac{3}{2} \rightarrow$ No pertenece a la recta.

86. Página 173

a) $(x,y) = (2,4) + \lambda(1,2) \rightarrow x-2 = \dfrac{y-4}{2} \xrightarrow{x=3,\,y=6} 1 = 1 \rightarrow$ Sí pertenece a la recta.

b) $\left.\begin{array}{l} x = -1+2t \\ y = 3-2t \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{-2} \xrightarrow{x=3,\,y=6} 2 \neq -\dfrac{3}{2} \rightarrow$ No pertenece a la recta.

c) $(x,y) = (3,5) + \lambda(-1,1) \rightarrow -(x-3) = y-5 \xrightarrow{x=3,\,y=6} 0 \neq 1 \rightarrow$ No pertenece a la recta.

d) $\left.\begin{array}{l} x = -1+2t \\ y = 8-t \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-8}{-1} \xrightarrow{x=3,\,y=6} 2 = 2 \rightarrow$ Sí pertenece a la recta.

87. Página 173

a) $\vec{v} = (-1,6)$ y $A(-3,-8) \rightarrow \dfrac{x+3}{-1} = \dfrac{y+8}{6}$

b) $\vec{v} = (-6,-2)$ y $A(4,-5) \rightarrow \dfrac{x-4}{-6} = \dfrac{y+5}{-2}$

c) $\vec{v} = (6,-2)$ y $A(10,-7) \rightarrow \dfrac{x-10}{6} = \dfrac{y+7}{-2}$

d) $\vec{v} = (-1,3)$ y $A(6,-7) \rightarrow \dfrac{x-6}{-1} = \dfrac{y+7}{3}$

88. Página 173

a) $A(-6,0)$ y $B(-9,-7) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-3,-7) \rightarrow \dfrac{x+6}{-3} = \dfrac{y}{-7}$

b) $A(0,-10)$ y $B(-6,-3) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-6,7) \rightarrow \dfrac{x}{-6} = \dfrac{y+10}{7}$

c) $A(7,5)$ y $B(-4,2) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-11,-3) \rightarrow \dfrac{x-7}{-11} = \dfrac{y-5}{-3}$

d) $A(-2,8)$ y $B(1,9) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (3,1) \rightarrow \dfrac{x+2}{3} = y-8$

89. Página 173

a) $y = 2x - 1 \xrightarrow{x=2,\, y=3} 3 = 4 - 1 \rightarrow 3 = 3 \rightarrow$ Sí pertenece a la recta.

b) $y - 2 = 2(x - 1) \xrightarrow{x=-1,\, y=3} 1 \neq -4 \rightarrow$ No pertenece a la recta.

c) $y = -x + 3 \xrightarrow{x=3,\, y=1} 1 \neq 0 \rightarrow$ No pertenece a la recta.

90. Página 173

a) $\vec{v}(-2, -1)$ y $A(0, -6) \rightarrow y = \frac{1}{2}x - 6$

b) $\vec{v}(8, 9)$ y $A(-6, 10) \rightarrow y = \frac{9}{8}x + \frac{67}{4}$

c) $\vec{v}(1, -3)$ y $A(-8, 3) \rightarrow y = -3x - 21$

d) $\vec{v}(-1, 3)$ y $A(-7, -6) \rightarrow y = -3x - 27$

91. Página 173

a) $m = -7$ y $A(0, 3) \rightarrow y - 3 = -7x$

b) $m = -4$ y $A(4, -5) \rightarrow y + 5 = -4(x - 4)$

c) $m = 3$ y $A(3, 5) \rightarrow y - 5 = 3(x - 3)$

d) $m = -1$ y $A(0, -3) \rightarrow y + 3 = -x$

92. Página 173

a) La recta pasa por los puntos $A(3, 2)$ y $B(-2, -2) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-5, -4) \rightarrow y = \frac{4}{5}x - \frac{5}{2}$.

b) La recta pasa por los puntos $A(2, 1)$ y $B(1, -2) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-1, -3) \rightarrow y = 3x - 5$.

94. Página 173

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $2x + 4y - 3 = 0 \rightarrow \vec{v} = (4, -2)$ Para $\left.\begin{array}{l} x = 0 \rightarrow y = \frac{3}{4} \\ y = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2} \end{array}\right\} \rightarrow A\left(0, \frac{3}{4}\right)$ y $B\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

b) $x - 3y + 1 = 0 \rightarrow \vec{v} = (-3, -1)$ Para $\left.\begin{array}{l} x = 0 \rightarrow y = \frac{1}{3} \\ y = 0 \rightarrow x = -1 \end{array}\right\} \rightarrow A\left(0, \frac{1}{3}\right)$ y $B(-1, 0)$

c) $\left.\begin{array}{l} x = 2 + 8t \\ y = 1 - 6t \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}(8, -6)$ Para $\left.\begin{array}{l} t = 0 \rightarrow A(2, 1) \\ t = 1 \rightarrow B(10, -5) \end{array}\right\}$

d) $x + 8y + 1 = 0 \rightarrow \vec{v} = (8, -1)$ Para $\left.\begin{array}{l} x = 0 \rightarrow y = -\frac{1}{8} \\ y = 0 \rightarrow x = -1 \end{array}\right\} \rightarrow A\left(0, -\frac{1}{8}\right)$ y $B(-1, 0)$

e) $y + 5 = 7(x - 4) \rightarrow \vec{v}(1, 7)$ Para $\left.\begin{array}{l} x = 0 \rightarrow y = -33 \\ x = 4 \rightarrow y = -5 \end{array}\right\} \rightarrow A(0, -33)$ y $B(4, -5)$

f) $\frac{y - 6}{-5} = \frac{x - 10}{2} \rightarrow \vec{v}(2, -5)$ Para $\left.\begin{array}{l} x = 0 \rightarrow y = 31 \\ y = 6 \rightarrow x = 10 \end{array}\right\} \rightarrow A(0, 31)$ y $B(10, 6)$

95. Página 174

a) $A(7,-8), B(5,-4) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2,4) = (B,-A)$

$Ax + By + C = 0 \xrightarrow{A=-4,\, B=-2} -4x - 2y + C = 0$

$B(5,-4) \in r \xrightarrow{x=5,\, y=-4} -20 + 8 + C = 0 \rightarrow C = 12 \qquad r: -4x - 2y + 12 = 0$

b) $A(-1,1), B(-2,4) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-1,3) = (B,-A)$

$Ax + By + C = 0 \xrightarrow{A=-3,\, B=-1} -3x - y + C = 0$

$A(-1,1) \in r \xrightarrow{x=-1,\, y=1} 3 - 1 + C = 0 \rightarrow C = -2 \qquad r: -3x - y - 2 = 0$

c) $A(9,-8), B(0,3) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-9,11) = (B,-A)$

$Ax + By + C = 0 \xrightarrow{A=-11,\, B=-9} -11x - 9y + C = 0$

$B(0,3) \in r \xrightarrow{x=0,\, y=3} -27 + C = 0 \rightarrow C = 27 \qquad r: -11x - 9y + 27 = 0$

d) $A(10,-6), B(0,5) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-10,11) = (B,-A)$

$Ax + By + C = 0 \xrightarrow{A=-11,\, B=-10} -11x - 10y + C = 0$

$B(0,5) \in r \xrightarrow{x=0,\, y=5} -50 + C = 0 \rightarrow C = 50 \qquad r: -11x - 10y + 50 = 0$

96. Página 174

a) La recta pasa por los puntos $A(3,0)$ y $B(0,1) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-3,1) = (B,-A)$

$Ax + By + C = 0 \xrightarrow{A=-1,\, B=-3} -x - 3y + C = 0$

$B(0,1) \in r \xrightarrow{x=0,\, y=1} -3 + C = 0 \rightarrow C = 3 \qquad r: -x - 3y + 3 = 0$

b) La recta pasa por los puntos $A(5,0)$ y $B(0,3) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-5,3) = (B,-A)$

$Ax + By + C = 0 \xrightarrow{A=-3,\, B=-5} -3x - 5y + C = 0$

$B(0,3) \in r \xrightarrow{x=0,\, y=3} -15 + C = 0 \rightarrow C = 15 \qquad r: -3x - 5y + 15 = 0$

98. Página 174

a) $\left.\begin{array}{l} r: 2x - 2y + 5 = 0 \\ s: x + 4y - 1 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{x=1-4y} 2 - 8y - 2y + 5 = 0 \rightarrow y = \dfrac{7}{10} \\ \rightarrow x = 1 - 4y \end{array} \rightarrow P\left(-\dfrac{9}{5}, \dfrac{7}{10}\right)$

b) $\left.\begin{array}{l} r: 4x - 3y + 1 = 0 \\ s: x - y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{x=y} 4y - 3y + 1 = 0 \rightarrow y = -1 \\ \rightarrow x = y \end{array} \rightarrow P(-1,-1)$

c) $\left.\begin{array}{l} r: x - 2y = 0 \\ s: 3x + 2y - 16 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow x = 2y \\ \xrightarrow{x=2y} 6y + 2y - 16 = 0 \rightarrow y = 2 \end{array} \rightarrow P(4,2)$

d) $\left.\begin{array}{l} r: x - 3y + 7 = 0 \\ s: x + y - 1 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{x=1-y} 1 - y - 3y + 7 = 0 \rightarrow y = 2 \\ \rightarrow x = 1 - y \end{array} \rightarrow P(-1,2)$

99. Página 174

a) $s:(x,y)=(1,3)+t(2,-1)\rightarrow s:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-1}$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-1}\xrightarrow{x=2+2t,\,y=-1+t}\frac{2+2t-1}{2}=\frac{-1+t-3}{-1}\rightarrow -1-2t=2t-8\rightarrow t=\frac{7}{4}$$

$$\left.\begin{matrix}x=2+2t\\ y=-1+t\end{matrix}\right\}\xrightarrow{t=\frac{7}{4}}\left.\begin{matrix}x=2+\dfrac{7}{2}=\dfrac{11}{2}\\ y=-1+\dfrac{7}{4}=\dfrac{3}{4}\end{matrix}\right\}\rightarrow P\left(\frac{11}{2},\frac{3}{4}\right)$$

b) $$\left.\begin{matrix}\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y+3}{4}\\ y-3=2(x+2)\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\xrightarrow{y=2x+7}\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{2x+7+3}{4}\rightarrow 4x+4=-4x-20\rightarrow x=-3\\ \rightarrow y=2x+7\end{matrix}\quad\rightarrow P(-3,1)$$

100. Página 174

a) $r:\left.\begin{matrix}x=2-3t\\ y=2t\end{matrix}\right\}\rightarrow\vec{v}=(-3,2)\rightarrow$ Un vector paralelo es $\vec{v}=(-6,4)\rightarrow\left.\begin{matrix}x=-3-6t\\ y=1+4t\end{matrix}\right\}$.

b) Si no corta a *r* entonces es paralela o coincidente con ella, luego tienen la misma pendiente: $y=\dfrac{2}{5}x+2$

c) La ecuación es $y=\dfrac{2}{3}x+n$. Como pasa por el punto $(-2,0)\rightarrow 0=\dfrac{2}{3}(-2)+n\rightarrow n=\dfrac{4}{3}\rightarrow y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{4}{3}$.

d) Las rectas paralelas al eje *X* son de la forma $y=k$. Como su ordenada en el origen vale $n=-1\rightarrow y=-1$.

101. Página 174

a) $\left.\begin{matrix}r:3x+y-7=0\\ s:3x+y+5=0\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\rightarrow\vec{u}=(1,-3),\ m_1=-3\\ \rightarrow\vec{v}=(1,-3),\ m_2=-3\end{matrix}$

Tienen pendientes iguales, pero $\dfrac{3}{3}=\dfrac{1}{1}\neq\dfrac{-7}{5}\rightarrow$ son rectas paralelas.

b) $\left.\begin{matrix}r:x+y-3=0\\ s:2x+2y-6=0\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\rightarrow\vec{u}=(1,-1),\ m_1=-1\\ \rightarrow\vec{v}=(2,-2),\ m_2=-1\end{matrix}$

Tienen pendientes iguales, y además $\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{-3}{-6}\rightarrow$ son rectas coincidentes.

c) $\left.\begin{matrix}r:x+3y-4=0\\ s:x+2y+5=0\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\rightarrow\vec{u}=(3,-1),\ m_1=-\dfrac{1}{3}\\ \rightarrow\vec{v}=(2,-1),\ m_2=-\dfrac{1}{2}\end{matrix}$

Tienen pendientes distintas. Por tanto, son rectas secantes.

d) $\left.\begin{matrix}r:-5x+10y-8=0\\ s:10x-20y+16=0\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\rightarrow\vec{u}=(10,5),\ m_1=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}\\ \rightarrow\vec{v}=(-20,-10),\ m_2=\dfrac{10}{20}=\dfrac{1}{2}\end{matrix}$

Tienen pendientes iguales, y además $\dfrac{-5}{10}=\dfrac{10}{-20}=\dfrac{-8}{16}\rightarrow$ son rectas coincidentes.

e) $\left.\begin{matrix}r:-x+2y-1=0\\ s:2-x+3y-8=0\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\rightarrow\vec{u}=(2,1),\ m_1=\dfrac{1}{2}\\ \rightarrow\vec{v}=(3,1),\ m_2=\dfrac{1}{3}\end{matrix}$

Tienen pendientes distintas. Por tanto, son rectas secantes.

f) $\left.\begin{array}{l} r: \frac{1}{2}x + y - 3 = 0 \\ s: x - \frac{1}{5}y + 8 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to \vec{u} = \left(1, -\frac{1}{2}\right), m_1 = -\frac{1}{2} \\ \to \vec{v} = \left(-\frac{1}{5}, -1\right), m_2 = 5 \end{array}$

Tienen pendientes distintas. Por tanto, son rectas secantes.

102. Página 174

a) $\left.\begin{array}{l} r: (x, y) = (1, 3) + t(1, 2) \\ s: \frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to \vec{u} = (1, 2) \\ \to \vec{v} = (1, 2) \end{array}$

Tienen el mismo vector director. El punto (1, 3) pertenece a ambas rectas. Por tanto, son rectas coincidentes.

b) $\left.\begin{array}{l} r: \left.\begin{array}{l} x = 2 - t \\ y = t \end{array}\right\} \\ s: (x, y) = (2, 0) + t(2, -1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to \vec{u} = (-1, 1), m_1 = -1 \\ \to \vec{v} = (2, -1), m_2 = -\frac{1}{2} \end{array}$

Tienen pendientes distintas. Por tanto, son rectas secantes.

c) $\left.\begin{array}{l} r: \left.\begin{array}{l} x = 3 + 5t \\ y = 2 - 2t \end{array}\right\} \\ s: \frac{x-8}{10} = \frac{y}{-4} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to \vec{u} = (5, -2), m_1 = -\frac{2}{5} \\ \to \vec{v} = (10, -4), m_2 = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5} \end{array}$

Tienen la misma pendiente y el punto (3, 2) pertenece a las dos rectas. Por tanto, son rectas coincidentes.

d) $\left.\begin{array}{l} r: 2x - 3y = 0 \\ s: (x, y) = t(1, -1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to \vec{u} = (-3, -2), m_1 = \frac{2}{3} \\ \to \vec{v} = (1, -1), m_2 = -1 \end{array}$

Tienen pendientes distintas. Por tanto, son rectas secantes.

e) $\left.\begin{array}{l} r: \left.\begin{array}{l} x = -2t \\ y = 3 + 2t \end{array}\right\} \\ s: x + 3y - 2 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to \vec{u} = (-2, 2), m_1 = -1 \\ \to \vec{v} = (3, -1), m_2 = \frac{-1}{3} \end{array}$

Tienen pendientes distintas. Por tanto, son rectas secantes.

103. Página 174

$2x - 3y + 1 = 0 \to \vec{v} = (-3, -2)$ es el vector director de la recta.

Un vector paralelo es $\vec{v_2} = (-6, -4)$, y el punto $A(1, 4)$ no pertenece a la recta dada ya que:

$2x - 3y + 1 = 0 \xrightarrow{x=1,\, y=4} 2 - 12 + 1 \neq 0$

Por tanto, la ecuación vectorial de la recta paralela es $(x, y) = (1, 4) + t(-6, -4)$.

104. Página 174

$y = 2x - 3 \to 2x - y - 3 = 0 \to \vec{v} = (-1, -2)$ es el vector director de la recta.

Un vector paralelo es $\vec{v_2} = (-2, -4)$, y el punto $A(-5, 2)$ no pertenece a la recta dada ya que:

$y = 2x - 3 \xrightarrow{x=-5,\, y=2} 2 \neq -10 - 3$

Por tanto, la ecuación vectorial de la recta paralela es $(x, y) = (-5, 2) + t(-2, -4)$.

105. Página 175

$r: \left.\begin{array}{l} x = 8 - t \\ y = 3 + 5t \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v} = (-1, 5)$ es el vector director de la recta.

Un vector paralelo es $\vec{v_2} = (-2, 10)$, y el punto $C(-2, 7)$ no pertenece a la recta dada ya que:

$$\left.\begin{array}{l} x = 8 - t \\ y = 3 + 5t \end{array}\right\} \rightarrow \left.\frac{x-8}{-1} = \frac{y-3}{5}\right\} \xrightarrow{x=-2,\, y=7} \frac{-10}{-1} \neq \frac{4}{5}$$

Por tanto, la ecuación vectorial de la recta paralela es $(x, y) = (-2, 7) + t(-2, 10)$.

106. Página 175

$$y = 2x - 8 \rightarrow 2x - y - 8 = 0 \rightarrow \vec{v} = (-1, -2)$$

Un vector perpendicular es $\vec{v_p}(-2, 1)$.

Así, una recta perpendicular que pasa por $A(5, 3)$ es $(x, y) = (5, 3) + t(-2, 1)$.

107. Página 175

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} \rightarrow \vec{v}(3, -1)$$

Un vector perpendicular es $\vec{v_p}(-1, -3)$

Así, una recta perpendicular que pasa por $B(0, -9)$ es $(x, y) = (0, -9) + t(-1, -3)$.

108. Página 175

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x - 4 \\ x - y - 2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x - 3x + 4 - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow P(1, -1)$$ es el punto de intersección.

El vector director de la recta $\frac{x-1}{5} = \frac{y}{-8}$ es $\vec{v}(5, -8)$. Por tanto, un vector perpendicular es $\vec{v_p}(-8, -5)$.

Así, la recta perpendicular que pasa por *P* es $(x, y) = (1, -1) + t(-8, -5)$.

109. Página 175

Calculamos la intersección.

$$(x, y) = (-2, 3) + t(3, -1) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -2 + 3t \\ y = 3 - t \end{array}\right\}$$

Sustituimos en la otra ecuación: $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{2} \xrightarrow[y=3-t]{x=-2+3t} \frac{-2+3t+2}{1} = \frac{3-t-3}{2} \rightarrow 6t = -t \rightarrow t = 0$

Ahora, sustituimos el valor de *t* en las ecuaciones paramétricas:

$\left.\begin{array}{l} x = -2 + 3t \\ y = 3 - t \end{array}\right\} \rightarrow P(-2, 3)$ es el punto de intersección de las rectas.

El vector director de la recta $\left.\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = -1 - t \end{array}\right\}$ es $\vec{v}(1, -1)$. Por tanto, un vector perpendicular es $\vec{v_p}(-1, -1)$.

Así, una recta perpendicular que pasa por *P* es $(x, y) = (-2, 3) + t(-1, -1)$.

110. Página 175

$$\frac{3x-2}{4}=\frac{-x+2}{3}\rightarrow 9x-6=-4x+8\rightarrow 13x=14\rightarrow x=\frac{14}{13}$$

Ecuación vectorial: $(x,y)=\left(\frac{14}{13},0\right)+t(0,1)$

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{matrix} x=\frac{14}{13} \\ y=t \end{matrix}\right\}$

No se puede expresar en forma continua porque no tenemos parámetro *t* en *x*.

Ecuación punto-pendiente: $x-\frac{14}{13}=0$

Ecuación explícita: $x=\frac{14}{13}$

Ecuación general: $x-\frac{14}{13}=0$

111. Página 175

Q es el punto medio del segmento *PR* $\rightarrow Q=P+\frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$

$\overrightarrow{PR}=(1,-2)\rightarrow Q=(1,5)+\frac{1}{2}(1,-2)=\left(\frac{3}{2},4\right)$

P, *Q* y *R* están alineados.

Ecuación vectorial: $(x,y)=(1,5)+t(1,-2)$

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{matrix} x=1+t \\ y=5-2t \end{matrix}\right\}$

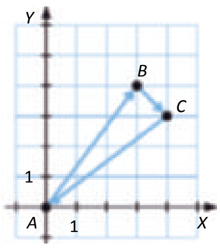
Ecuación continua: $\left.\begin{matrix} t=x-1 \\ t=\frac{y-5}{-2} \end{matrix}\right\}\rightarrow \frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-2}$

Ecuación punto-pendiente: $y-5=-2(x-1)$

Ecuación explícita: $y=-2x+7$

Ecuación general: $2x+y-7=0$

112. Página 175



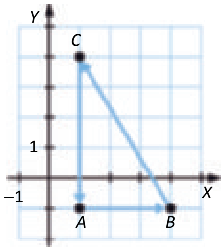
a) $\left.\begin{matrix} A(0,0) \\ B(3,4) \\ C(4,3) \end{matrix}\right\}\rightarrow \begin{matrix} \overrightarrow{AB}=(3,4) \\ \overrightarrow{BC}=(1,-1) \\ \overrightarrow{CA}=(-4,-3) \end{matrix}$

b) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=(-3,-4)$

c) $\text{Perímetro}=|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|+|\overrightarrow{CA}|=5+\sqrt{2}+5=10+\sqrt{2}$

d) Tiene dos lados con la misma longitud, 5, por tanto es un triángulo isósceles.

113. Página 175



a) $\left.\begin{array}{l} A(1,-1) \\ B(4,-1) \\ C(1,4) \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(3,0) \\ \overrightarrow{BC}=(-3,5) \\ \overrightarrow{CA}=(0,-5) \end{array}$

$M_1 = A+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\left(\frac{5}{2},-1\right)$ $\qquad M_2 = B+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$ $\qquad M_3 = C+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\left(1,\frac{3}{2}\right)$

b) Las mediatrices son rectas perpendiculares a los lados que pasan por su punto medio.

$r_1:(x,y)=\left(\frac{5}{2},-1\right)+t(0,-3)$ $\qquad r_2:(x,y)=\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)+t(5,3)$ $\qquad r_3:(x,y)=\left(1,\frac{3}{2}\right)+t(-5,0)$

114. Página 175

Los puntos forman un triángulo si no están alineados.

A, *B* y *C* están alineados si los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CA}$ son paralelos.

$\overrightarrow{AB}=(1,1)$
$\overrightarrow{BC}=(2,2)$ Son paralelos, por tanto *A*, *B* y *C* están alineados.
$\overrightarrow{CA}=(-3,-3)$

A, *B* y *C* no forman un triángulo.

115. Página 175

El punto *B* tiene que tener la primera coordenada de *A* y la segunda de *C* $\rightarrow B(1,4)$

El punto *D* tiene que tener la primera coordenada de *C* y la segunda de *A* $\rightarrow D(5,0)$

Cada lado mide: $\overrightarrow{AB}=(0,4)\rightarrow|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{0+16}=4$ u. Por tanto, el área del cuadrado es 16 u^2.

116. Página 175

a) Las mediatrices son rectas perpendiculares a los lados que pasan por su punto medio.

$\overrightarrow{AB}=(0,4)$ $\qquad \overrightarrow{BC}=(4,-2)$ $\qquad \overrightarrow{CA}=(-4,-2)$

Vectores perpendiculares son:

$\overrightarrow{AB_2}=(4,0)$ $\qquad \overrightarrow{BC_2}=(-2,-4)$ $\qquad \overrightarrow{CA_2}=(-2,4)$

Calculamos el punto medio de cada uno de los lados del triángulo.

$$M_1 = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \rightarrow (-4,-2)+(0,2)=(-4,0)$$

$$M_2 = B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \rightarrow (-4,2)+(2,-1)=(-2,1)$$

$$M_3 = C + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} \rightarrow (0,0)+(-2,-1)=(-2,-1)$$

Por tanto, las mediatrices son:

$m_1 : y = 0$ $\qquad m_2 : \frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{-4}$ $\qquad m_3 : \frac{x+2}{-2} = \frac{y+1}{4}$

El circuncentro es el punto en el que se cortan las mediatrices:

$$\frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{-4} \xrightarrow{y=0} -4(x+2) = 2 \rightarrow -4x-8=2 \rightarrow x = -\frac{5}{2} \rightarrow \left(-\frac{5}{2}, 0\right)$$

b) Las medianas son rectas que pasan por un vértice y por el punto medio del lado opuesto.

$\overrightarrow{AM_2} = (2,3) \rightarrow me_1 : \frac{x+4}{2} = \frac{y+2}{3}$ $\qquad \overrightarrow{BM_3} = (2,-3) \rightarrow me_2 : \frac{x+4}{2} = \frac{y-2}{-3}$ $\qquad \overrightarrow{CM_1} = (-4,0) \rightarrow me_3 : y = 0$

El baricentro es el punto de intersección de las medianas:

$$\frac{x+4}{2} = \frac{y+2}{3} \xrightarrow{y=0} 3(x+4) = 4 \rightarrow 3x = -8 \rightarrow x = \frac{-8}{3} \rightarrow \left(-\frac{8}{3}, 0\right)$$

c) Las alturas son rectas que pasan por un vértice y son perpendiculares al lado opuesto.

Vectores perpendiculares a los lados son:

$\overrightarrow{AB}_2 = (4,0)$ $\qquad \overrightarrow{BC}_2 = (-2,-4)$ $\qquad \overrightarrow{CA}_2 = (-2,4)$

Altura desde el vértice $A(-4, -2)$: $\quad h_1 : \frac{x+4}{-2} = \frac{y+2}{-4}$

Altura desde el vértice $B(-4, 2)$: $\quad h_2 : \frac{x+4}{-2} = \frac{y-2}{4}$

Altura desde el vértice $C(0, 0)$: $\quad h_3 : y = 0$

El ortocentro es el punto de intersección de las alturas:

$$\frac{x+4}{-2} = \frac{y+2}{-4} \xrightarrow{y=0} -4x-16 = -4 \rightarrow x = -3 \rightarrow (-3,0)$$

117. Página 175

$$\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \overrightarrow{P_3P_4} + \ldots + \overrightarrow{P_{n-2}P_{n-1}} + \overrightarrow{P_{n-1}P_n} + \overrightarrow{P_nP_1} = P_2 - P_1 + P_3 - P_2 + P_4 - P_3 + \ldots + P_{n-1} - P_{n-2} + P_n - P_{n-1} + P_1 - P_n = 0$$

La suma es 0.

DEBES SABER HACER

1. Página 175

$A(0,-3)$ y $B(1,4) \rightarrow \overrightarrow{AB}=(1,7)$ y $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{50}$

2. Página 175

$(x,y)=(1,2)+t(2,-1)$

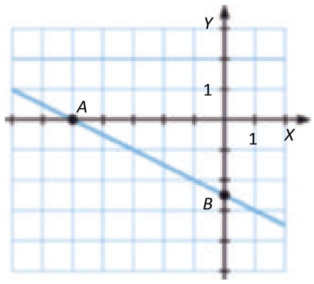
3. Página 175

Repuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} x=0+t \\ y=-1-2t \end{array}\right\} \rightarrow A(0,-1) \text{ y } B(1,-3)$$

4. Página 175

La recta pasa por los puntos $A(-5,0)$ y $B\left(0,-\frac{5}{2}\right)$.



5. Página 175

La ecuación punto-pendiente y la explícita coinciden para las rectas que pasan por el origen de coordenadas. Como tiene por vector director $\vec{u}(1,1)$, la ecuación es $y=x$.

6. Página 175

Ecuación general: $5x-y+2=0$

Ecuación vectorial: $(x,y)=(0,2)+t(-1,-5)$

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x=-t \\ y=2-5t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\left.\begin{array}{l} t=-x \\ t=\dfrac{y-2}{-5} \end{array}\right\} \rightarrow -x=\dfrac{y-2}{-5}$

Ecuación punto-pendiente: $y-2=5x$

Ecuación explícita: $y=5x+2$

7. Página 175

Un vector director de la recta paralela al eje *X* es $\vec{u}=(2,0)\rightarrow(x,y)=(1,3)+t(2,0)$.

Un vector director de la recta perpendicular al eje *X* es $\vec{v}=(0,-1)\rightarrow(x,y)=(1,3)+t(0,-1)$.

8. Página 175

$$\left.\begin{array}{l}(x,y)=(2,1)+t(-1,2)\\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{1}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\rightarrow \vec{u}=(-1,2),\ m_1=-2\\ \rightarrow \vec{v}=(2,1),\ m_2=\dfrac{1}{2}\end{array}$$

Las pendientes son distintas. Por tanto, son rectas secantes.

Hallamos su punto de intersección:

$$(x,y)=(2,1)+t(-1,2)\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=2-t\\ y=1+2t\end{array}\right\}$$

Sustituimos:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{1}\xrightarrow{x=2-t,\ y=1+2t}\frac{2-t-1}{2}=1+2t-3\rightarrow 1-t=4t-4\rightarrow t=1$$

$$\left.\begin{array}{l}x=2-t\\ y=1+2t\end{array}\right\}\xrightarrow{t=1}P(1,3)$$

COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

118. Página 176

a) Suponemos que la ubicación actual es $O(0,0)$ y la embarcación está en el punto $P(8,-3)$. Entonces:

$$\overrightarrow{OP}=(8,-3)\rightarrow|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{64+9}=\sqrt{73}=8{,}54\text{ km}$$

b) Como parten del puerto, las coordenadas son $Q(-2,12)$.

c) $\overrightarrow{OQ}=(-2,12)\rightarrow|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{148}=12{,}17\text{ km}$

FORMAS DE PENSAR. Razonamiento matemático

119. Página 176

Calculamos el punto medio del segmento *BC*.

$$M=B+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=(3,1)+\frac{1}{2}(6,2)=(6,2)$$

Consideramos el punto $A(x,y)\rightarrow\overrightarrow{MA}=(x-6,y-2)$.

$$|\overrightarrow{MA}|=\sqrt{(x-6)^2+(y-2^2)}=4\rightarrow x^2-12x+36+y^2-4y+4=16\rightarrow x^2+y^2-12x-4y+24=0$$

Por ser isósceles los módulos de los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{CA}$ son iguales:

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-9)^2+(y-3)^2}\rightarrow x^2-6x+9+y^2-2y+1=x^2-18x+81+y^2-6y+9\rightarrow 12x+4y=80$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-12x-4y=-24 \\ 3x+y=20 \end{array}\right\} \xrightarrow{y=20-3x} x^2+(20-3x)^2-12x-80+12x=-24 \to 10x^2-120x+344=0$$
$$\to y=20-3x$$

$$5x^2-60x+172=0 \to x=\frac{60\pm\sqrt{160}}{10}=\begin{cases} x_1=6+\dfrac{2\sqrt{10}}{5} \\ x_2=6-\dfrac{2\sqrt{10}}{5} \end{cases} \to \begin{cases} y_1=2-\dfrac{6\sqrt{10}}{5} \\ y_2=2+\dfrac{6\sqrt{10}}{5} \end{cases}$$

Hay dos posibles vértices que verifican el problema:

$$A_1\left(6+\frac{2\sqrt{10}}{5},\ 2-\frac{6\sqrt{10}}{5}\right) \qquad A_2\left(6-\frac{2\sqrt{10}}{5},\ 2+\frac{6\sqrt{10}}{5}\right)$$

120. Página 176

Sean $\vec{u}=(u_1, u_2)$ y $\vec{v}=(v_1, v_2)$.

a) Los vectores tienen distinta dirección $\to \dfrac{v_1}{u_1}\neq\dfrac{v_2}{u_2}$.

$$a\cdot\vec{u}=b\cdot\vec{v}\to(a\cdot u_1, a\cdot u_2)=(b\cdot v_1, b\cdot v_2)\to(a\cdot u_1-b\cdot v_1, a\cdot u_2-b\cdot v_2)=(0,0)$$

$$\to \left.\begin{array}{l} a\cdot u_1-b\cdot v_1=0 \\ a\cdot u_2-b\cdot v_2=0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} a=\dfrac{b\cdot v_1}{u_1} \\ a=\dfrac{b\cdot v_2}{u_2} \end{array}\right\} \to \frac{b\cdot v_1}{u_1}=\frac{b\cdot v_2}{u_2} \xrightarrow{\frac{v_1}{u_1}\neq\frac{v_2}{u_2}} b=0 \text{ y } a=0$$

Los números reales son $a=b=0$.

b) Si tienen la misma dirección: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{v_1}{u_1}=\dfrac{v_2}{u_2}$

121. Página 176

Tomando como base el lado horizontal, *BC*, y como altura la distancia al eje *X*, tenemos:

$$\text{Área}=\frac{(10-2)\cdot 2}{2}=8\ \text{u}^2$$

Las ecuaciones de los lados que no forman la base son $\left.\begin{array}{l} \text{Lado } AB\to y=x \\ \text{Lado } AC\to y=\dfrac{x}{5} \end{array}\right\}$.

Sea a el área del nuevo triángulo. La base del nuevo triángulo medirá $10-a$, y su altura, $2-\dfrac{a}{5}$.

Por tanto, el área será: $4=\dfrac{(10-a)\left(2-\dfrac{a}{5}\right)}{2}\to a=\begin{cases}10+2\sqrt{10}\\10-2\sqrt{10}\end{cases}$

Así, la recta vertical es $x=10-2\sqrt{10}$.

122. Página 176

El punto de corte es el de las rectas $A + a\cdot(\vec{u}+\vec{v})$ y $B + b\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = A + \vec{u} + b(\vec{u}-\vec{v})$.

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ $\qquad$ $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$

$A + a(\vec{u}+\vec{v}) = A + \vec{u} + b(\vec{u}-\vec{v}) \rightarrow a\cdot\vec{u} + a\cdot\vec{v} = (b+1)\vec{u} - b\cdot\vec{v} \rightarrow (a+b)\vec{v} = (b+1-a)\vec{u}$

Como $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son vectores paralelos:

$a + b = 0 \rightarrow a = -b$

$b + 1 - a = 0 \xrightarrow{a=-b} 2b + 1 = 0 \rightarrow b = -\dfrac{1}{2} \rightarrow a = \dfrac{1}{2}$

El punto de corte es $A + \dfrac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}) = A + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, que es el punto medio.

123. Página 176

Sean $\vec{u}+\vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ y $\vec{u}-\vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$.

Como $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen el mismo módulo, entonces:

$\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \rightarrow u_1^2 + u_2^2 = v_1^2 + v_2^2 \rightarrow u_1^2 + u_2^2 - v_1^2 - v_2^2 = 0$

Comprobamos $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$ si son perpendiculares:

$(u_1 + v_1)\cdot(u_1 - v_1) + (u_2 + v_2)\cdot(u_2 - v_2) = u_1^2 - v_1^2 + u_2^2 - v_2^2 = 0 \rightarrow$ Por tanto, $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$ forman un ángulo recto.

Como un rombo es un paralelogramo, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA}$, y sus lados tienen la misma longitud, es decir, los vectores tienen el mismo módulo.

Las diagonales del rombo vienen dadas por los vectores:

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ $\qquad$ $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$

Por el resultado anterior, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$ son perpendiculares.

PRUEBAS PISA

124. Página 177

La figura D.

125. Página 177

a) Hallamos la recta perpendicular a $y = -x + 2$ que pase por el punto (–9, –1).

$y = -x + 2 \rightarrow \vec{v}(-1, 1)$ Un vector perpendicular a esta recta es $\overrightarrow{v_p}(1, 1)$.

El barco tiene que seguir la trayectoria de la línea recta de ecuaciones: $\frac{x+9}{1} = \frac{y+1}{1} \rightarrow y = x + 8$

b) El punto será la intersección entre las dos rectas.

$$\left.\begin{array}{l} y = -x + 2 \\ y = x + 8 \end{array}\right\} \rightarrow -x + 2 = x + 8 \rightarrow x = -3 \rightarrow P(-3, 5)$$

Funciones

9

CLAVES PARA EMPEZAR

1. Página 178

Respuesta abierta.

Si $x = 1 \rightarrow f(1) = 3 \cdot 1 - 2 = 1 \rightarrow$ El punto (1, 1) pertenece a f.

Si $x = 2 \rightarrow f(2) = 3 \cdot 2 - 2 = 4 \rightarrow$ El punto (2, 4) pertenece a f.

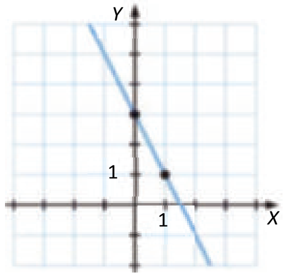
Si $x = 3 \rightarrow f(3) = 3 \cdot 3 - 2 = 7 \rightarrow$ El punto (3, 7) pertenece a f.

Si $x = 4 \rightarrow f(4) = 3 \cdot 4 - 2 = 10 \rightarrow$ El punto (4, 10) pertenece a f.

2. Página 178

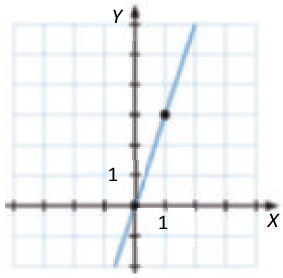
a) Si $x = 0 \rightarrow f(0) = 3 \rightarrow$ Punto (0, 3)

Si $x = 1 \rightarrow f(1) = 1 \rightarrow$ Punto (1, 1)



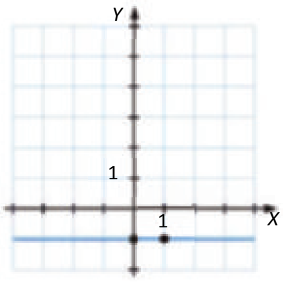
b) Si $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow$ Punto (0, 0)

Si $x = 1 \rightarrow f(1) = 3 \rightarrow$ Punto (1, 3)



c) Si $x = 0 \rightarrow f(0) = -1 \rightarrow$ Punto (0, –1)

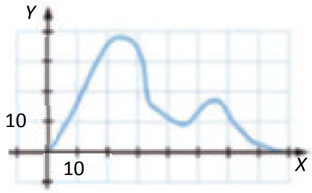
Si $x = 1 \rightarrow f(1) = -1 \rightarrow$ Punto (1, –1)



VIDA COTIDIANA

LA MONTAÑA RUSA. Página 179

Respuesta abierta. La altura mínima de cualquier montaña rusa tiene que ser cero, es decir, el suelo.



ACTIVIDADES

1. Página 180

a) No es una función, puede haber dos equipos que hayan jugado el mismo número de partidos pero los puntos obtenidos sean diferentes.

b) Sí, es una función, ya que a cada valor de x = precio de una bolsa, le corresponde un valor de y = su peso (esto suponiendo que nos refiramos a bolsas de fruta, que tienen asignado un precio según su peso, pero si por bolsa nos referimos a comprar una bolsa cualquiera, podría no ser, ya que podría haber bolsas del mismo precio, con diferentes pesos).

c) No, ya que, miembro de una familia no es una magnitud (los miembros de la familia son, por ejemplo, padre, madre, hijo, hermana, tía…)

d) Sí, es una función, ya que a cada valor de x = volumen de la esfera, le corresponde un valor de y = radio.

e) Sí, es una función si fijamos la altura h, ya que a cada valor de x = radio del cilindro, le corresponde un valor de y = volumen. Si la altura es variable, podemos tener dos cilindros con el mismo radio y dos volúmenes diferentes, por lo que para un valor de x habría más de un valor de y y no sería función.

2. Página 180

a) No es una función, ya que a un mismo valor de x le pueden corresponder dos valores de y.

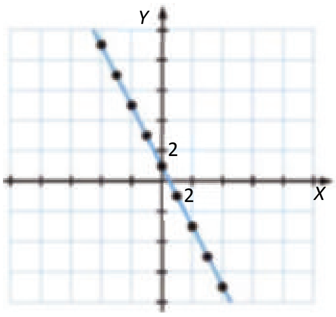
b) Es una función, a cada valor de x le corresponde un valor de y.

3. Página 180

$f(x) = x^2$, siendo $f(x)$ = área del cuadrado y x = lado.

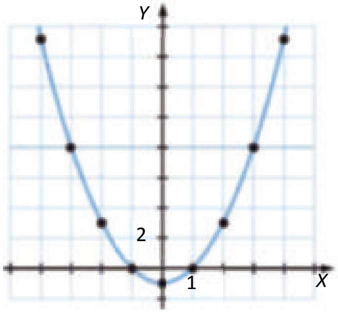
4. Página 181

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$f(x) = -2x + 1$	9	7	5	3	1	−1	−3	−5	−7



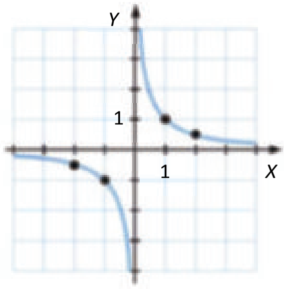
5. Página 181

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x) = x^2 - 1$	15	8	3	0	-1	0	3	8	15



6. Página 181

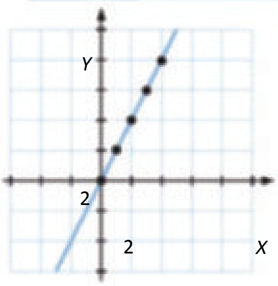
x	-2	-1	1	2
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\frac{-1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$



7. Página 181

$f(x) = 2x$, siendo $f(x)$ los metros que recorre el coche y x el tiempo transcurrido en segundos.

x	0	1	2	3	4
				6	8



8. Página 182

Dom $f = [-5, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, 5]$

Im $f = (-3, 0] \cup (1, 4)$

9. Página 182

$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow$ Dom $f = \mathbb{R} - \{2\}$

10. Página 182

$x^2 - 4 \geq 0 \rightarrow x^2 \geq 4 \rightarrow x \leq -2$ y $x \geq 2 \rightarrow$ Dom $f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

11. Página 183

Para los polinomios cuadráticos, calculamos su vértice y según este sea máximo o mínimo, tenemos el recorrido de la función.

a) Dom $f = \mathbb{R}$ y Im $f = \mathbb{R}$

b) Dom $f = \mathbb{R}$ y Im $f = \left(-\infty, -\frac{19}{4}\right]$

c) Dom $f = \mathbb{R}$ y Im $f = \left[-\frac{1}{4}, \infty\right)$

d) Dom $f = \mathbb{R}$ y Im $f = \mathbb{R}$

12. Página 183

a) $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$, Dom $f = \mathbb{R} - \{3\}$

b) $x^2 - 2x = 0 \rightarrow x = 0$ o $x = 2$, Dom $f = \mathbb{R} - \{0, 2\}$

c) $x^2 - 64 = 0 \rightarrow x = \pm 8$, Dom $f = \mathbb{R} - \{-8, 8\}$

d) $x^4 - 17x + 16 = 0 \rightarrow x = \pm 4$ o $x = \pm 1$, Dom $f = \mathbb{R} - \{-4, -1, 1, 4\}$

13. Página 183

a) $x - 2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2$, Dom $f = [2, +\infty)$

b) $-x^2 + 9 \geq 0 \rightarrow -3 \leq x \leq 3$, Dom $f = [-3, 3]$

c) $-x + 7 \geq 0 \rightarrow x \leq 7$, Dom $f = (-\infty, 7]$

d) $x^2 - 1 \geq 0 \rightarrow -1 \geq x$ o $x \geq 1$, Dom $f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

14. Página 183

a) $2x - 7 = 0 \rightarrow x = \frac{7}{2}$, Dom $f = \mathbb{R} - \left\{\frac{7}{2}\right\}$

b) $3x^2 + 5x = 0 \rightarrow x = 0$ o $x = -\frac{5}{3}$, Dom $f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{3}, 0\right\}$

c) $4x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = \pm\frac{3}{2}$, Dom $f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$

d) $x^4 - 6x^2 + 5 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{5}$ o $x = \pm 1$, Dom $f = \mathbb{R} - \left\{-\sqrt{5}, -1, 1, \sqrt{5}\right\}$

15. Página 183

a) $3x - 8 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{8}{3}$, Dom $f = \left[\frac{8}{3}, \infty\right)$

b) $-16x^2 + 9 \geq 0 \rightarrow -\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$, Dom $f = \left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right]$

c) $-7x + 2 \geq 0 \rightarrow x \leq \frac{2}{7}$, Dom $f = \left(-\infty, \frac{2}{7}\right]$

d) $25x^2 - 49 \geq 0 \rightarrow x \leq -\frac{7}{5}$ o $x \geq \frac{7}{5}$, Dom $f = \left(-\infty, -\frac{7}{5}\right] \cup \left[\frac{7}{5}, \infty\right)$

16. Página 183

El denominador se anula si: $-x+2=0 \rightarrow x=2 \rightarrow x \in \mathbb{R}-\{2\}$. Además el denominador debe ser positivo:

$\frac{3}{-x+2} \geq 0 \rightarrow x<2$.

Dom $f = (-\infty, 2)$

17. Página 184

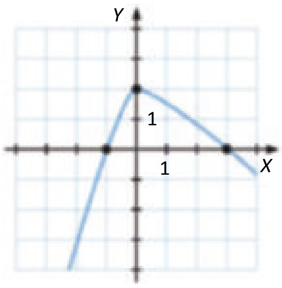
La función es continua en todos los puntos menos en los puntos $x=-2$, $x=0$.

En $x=-2$, la función tiene un salto, toma valores distintos a la derecha y a la izquierda del punto, por tanto tenemos una discontinuidad inevitable de salto finito.

En $x=0$, no está definida la función y tenemos una discontinuidad inevitable de salto infinito.

18. Página 184

Respuesta abierta.



19. Página 184

Puntos de corte con el eje X: {(–5, 0), (–4, 0), (–3, 0), (–2, 0), (–1, 0), (0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0), (5, 0)}

Punto de corte con el eje Y: (0, 0)

20. Página 185

a) $f(x)=0 \rightarrow x+1=0 \rightarrow x=-1$

$x=0 \rightarrow f(0)=0+1=1$

Punto de corte con el eje X: (–1, 0), punto de corte con el eje Y: (0, 1)

b) $f(x)=0 \rightarrow -3x+10=0 \rightarrow x=\frac{10}{3}$

$x=0 \rightarrow f(0)=-3\cdot 0+10=10$

Punto de corte con el eje X: $\left(\frac{10}{3},0\right)$, punto de corte con el eje Y: (0,10)

c) $f(x)=0 \rightarrow -x+3=0 \rightarrow x=3$

$x=0 \rightarrow f(0)=0+3=3$

Punto de corte con el eje X: (3, 0), punto de corte con el eje Y: (0, 3)

d) $f(x)=0 \rightarrow -4x+14=0 \rightarrow x=\frac{7}{2}$

$x=0 \rightarrow f(0)=-4\cdot 0+14=14$

Punto de corte con el eje X: $\left(\frac{7}{2},0\right)$, punto de corte con el eje Y: (0, 14).

21. Página 185

a) $f(x)=0 \rightarrow x^2-3x+2=0 \rightarrow x=1$ o $x=2$

$x=0 \rightarrow f(0)=0-3\cdot 0+2=2$

Puntos de corte con el eje *X*: {(1, 0), (2, 0)}, punto de corte con el eje *Y*: (0, 2)

b) $f(x)=0 \rightarrow 2x^2-3x+1=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}$ o $x=1$

$x=0 \rightarrow f(0)=2\cdot 0-3\cdot 0+1=1$

Puntos de corte con el eje *X*: $\left\{\left(\frac{1}{2},0\right),(1,0)\right\}$, punto de corte con el eje *Y*: (0, 1)

c) $f(x)=0 \rightarrow x^2-6x+5=0 \rightarrow x=1$ o $x=5$

$x=0 \rightarrow f(0)=0-6\cdot 0+5=5$

Puntos de corte con el eje *X*: {(1, 0), (5, 0)}, punto de corte con el eje *Y*: (0, 5)

d) $f(x)=0 \rightarrow 6x^2+11x-2=0 \rightarrow x=-2$ o $x=\frac{1}{6}$

$x=0 \rightarrow f(0)=6\cdot 0+11\cdot 0-2=-2$

Puntos de corte con el eje *X*: $\left\{(-2,0),\left(\frac{1}{6},0\right)\right\}$, punto de corte con el eje *Y:* (0, –2)

22. Página 185

a) $f(x)=0 \rightarrow x^2-3x=0 \rightarrow x=0$ o $x=3$

$x=0 \rightarrow f(0)=0-3\cdot 0=0$

Puntos de corte con el eje *X*: {(0, 0), (3, 0)}, punto de corte con el eje *Y*: (0, 0)

b) $f(x)=0 \rightarrow 9x^2-4=0 \rightarrow x=-\frac{2}{3}$ o $x=\frac{2}{3}$

$x=0 \rightarrow f(0)=9\cdot 0-4=-4$

Puntos de corte con el eje *X*: $\left\{\left(-\frac{2}{3},0\right),\left(\frac{2}{3},0\right)\right\}$, punto de corte con el eje *Y*: (0, –4)

c) $f(x)=0 \rightarrow -x^2+144=0 \rightarrow x=-12$ o $x=12$

$x=0 \rightarrow f(0)=0+144=144$

Puntos de corte con el eje *X*: {(–12, 0), (12, 0)}, punto de corte con el eje *Y*: (0, 144)

d) $f(x)=0 \rightarrow 5x^2-4x=0 \rightarrow x=0$ o $x=\frac{4}{5}$

$x=0 \rightarrow f(0)=5\cdot 0-4\cdot 0=0$

Puntos de corte con el eje *X*: $\left\{(0,0),\left(\frac{4}{5},0\right)\right\}$, punto de corte con el eje *Y*: (0, 0)

23. Página 185

a) $f(x)=0 \rightarrow x^3-4x=0 \rightarrow x=-2,\ x=0$ o $x=2$

$x=0 \rightarrow f(0)=0-4\cdot 0=0$

Puntos de corte con el eje *X*: {(–2, 0),(0, 0), (2, 0)}, punto de corte con el eje *Y*: (0, 0)

b) $f(x)=0 \rightarrow x^3-x^2=0 \rightarrow x=0$ o $x=1$

$x=0 \rightarrow f(0)=0-0=0$

Puntos de corte con el eje *X*: {(0, 0), (1, 0)}, punto de corte con el eje *Y*: (0, 0)

c) $f(x)=0 \rightarrow -x^3+x=0 \rightarrow x=-1,\ x=0$ o $x=1$

$x=0 \rightarrow f(0)=0+0=0$

Puntos de corte con el eje *X*: {(–1, 0), (0, 0), (1, 0)}, punto de corte con el eje *Y*: (0, 0)

d) $f(x)=0 \rightarrow x^3+3x^2=0 \rightarrow x=-3$ o $x=0$

$x=0 \rightarrow f(0)=0+3\cdot 0=0$

Puntos de corte con el eje *X*: {(–3, 0), (0, 0)}, punto de corte con el eje *Y*: (0, 0)

24. Página 185

a) $f(x)=0 \rightarrow x^3+2x^2-x-2=0 \rightarrow x=-2,\ x=-1$ o $x=1$

$x=0 \rightarrow f(0)=0+2\cdot 0-0-2=-2$

Puntos de corte con el eje *X*: {(–2, 0), (–1, 0), (1, 0)}, punto de corte con el eje *Y*: (0, –2)

b) $f(x)=0 \rightarrow 2x^3-11x^2+17x-6=0 \rightarrow x=\frac{1}{2},\ x=2$ o $x=3$

$x=0 \rightarrow f(0)=2\cdot 0-11\cdot 0+17\cdot 0-6=-6$

Puntos de corte con el eje *X*: $\left\{\left(\frac{1}{2},0\right),(2,0),(3,0)\right\}$, punto de corte con el eje *Y*: (0, –6)

c) $f(x)=0 \rightarrow x^3+4x^2+x-6=0 \rightarrow x=-3,\ x=-2$ o $x=1$

$x=0 \rightarrow f(0)=0+4\cdot 0+0-6=-6$

Puntos de corte con el eje *X*: {(–3, 0), (–2, 0), (1, 0)}, punto de corte con el eje *Y*: (0, –6)

d) $f(x)=0 \rightarrow 6x^3+x^2-4x+1=0 \rightarrow x=-1,\ x=\frac{1}{3}$ o $x=\frac{1}{2}$

$x=0 \rightarrow f(0)=6\cdot 0+0-4\cdot 0+1=1$

Puntos de corte con el eje *X*: $\left\{(-1,0),\left(\frac{1}{3},0\right),\left(\frac{1}{2},0\right)\right\}$, punto de corte con el eje *Y*: (0, 1)

25. Página 185

a) $f(x)=0 \rightarrow x^4-10x^2+9=0 \rightarrow x=-3,\ x=-1,\ x=1$ o $x=3$

$x=0 \rightarrow f(0)=0-10\cdot 0+9=9$

Puntos de corte con el eje *X*: {(–3, 0), (–1, 0), (1, 0), (3, 0)}, punto de corte con el eje *Y*: (0, 9)

b) $f(x)=0 \rightarrow 4x^4-17x^2+4=0 \rightarrow x=-2,\ x=-\frac{1}{2},\ x=\frac{1}{2}$ o $x=2$

$x=0 \rightarrow f(0)=4\cdot 0-17\cdot 0+4=4$

Puntos de corte con el eje *X*: $\left\{(-2,0),\left(-\frac{1}{2},0\right),\left(\frac{1}{2},0\right),(2,0)\right\}$, punto de corte con el eje *Y*: (0, 4)

c) $f(x)=0 \rightarrow x^4+21x^2-100=0 \rightarrow x=-2$ o $x=2$

$x=0 \rightarrow f(0)=0+21\cdot 0-100=-100$

Puntos de corte con el eje *X*: {(–2, 0), (2, 0)}, punto de corte con el eje *Y*: (0, –100)

d) $f(x)=0 \rightarrow x^4+1=0 \rightarrow$ No tiene solución

$x=0 \rightarrow f(0)=0+1=1$

Puntos de corte con el eje *X*: no tiene. Punto de corte con el eje *Y*: (0, 1)

26. Página 186

a) La función es creciente en cualquier punto a la izquierda del eje *Y*. Y es decreciente en cualquier punto a la derecha del eje *Y*.

La función no tiene máximos ni mínimos, ya que no hay un punto en el que esté definida la función que se pase de creciente a decreciente o a la inversa.

b) La función es creciente en los intervalos (–∞, –1) y (1, ∞) y es decreciente en el intervalo (–1, 1).

La función tiene un máximo en el punto $x = -1$ y un mínimo en el punto $x = 1$.

27. Página 186

El intervalo de decrecimiento de la función es (–∞, 2) y el intervalo de crecimiento es (2, ∞).

No existe mínimo porque la función no está definida en el punto $x = 2$, en el que pasa de ser decreciente a creciente.

28. Página 186

Una función creciente no tiene máximos ni mínimos, ya que no cambia de creciente a decreciente, ni viceversa.

29. Página 187

La función crece del día 1 al día 2, decrece del día 2 al día 4, crece de nuevo del día 4 al 5, decrece del día 5 al 7, crece del 7 al 9, decrece del 9 al 10 y por último crece del día 10 al 11.

Los días que llovió más fueron los días 2 y 5, aunque también el día 9 hay un máximo. Y el día que llovió menos fue el día 7, aunque también hubo mínimos los días 4 y 10.

30. Página 187

El mayor número de ventas fue en el año 2014. Y el peor año en ventas el 2013.

31. Página 188

a) $f(x)=x^2$, $f(-x)=(-x)^2=x^2 \rightarrow f(-x)=f(x)$ esta función es par.

b) $f(x)=x^3-2x$, $f(-x)=(-x)^3-2(-x)=-x^3+2x \rightarrow f(-x)=-f(x)$ esta función es impar.

c) $f(x)=x^4+2x$, $f(-x)=(-x)^4+2(-x)=x^4-2x \rightarrow f(-x)\neq f(x)$ y $f(-x)\neq -f(x)$ esta función no tiene simetría par ni simetría impar.

32. Página 188

a) La función es impar, ya que es simétrica respecto del origen. No es periódica.

b) La función es par, ya que es simétrica respecto del eje *Y*. No es periódica.

33. Página 188

Tanto la gráfica azul como la roja son periódicas.

La gráfica azul es simétrica respecto al eje *Y* y la gráfica roja es simétrica respecto del origen.

34. Página 189

En el eje *X*, la función toma todos los valores comprendidos entre $-\infty$ y $+\infty \rightarrow$ Dom $f = \mathbb{R}$.

En el eje *Y*, la función toma todos los valores comprendidos entre $-\infty$ y $+\infty \rightarrow$ Im $f = \mathbb{R}$.

La función es continua.

Punto de corte con el eje *X*: (–4, 0) Punto de corte con el eje *Y*: (0, 2)

La función crece en $(-\infty, -2) \cup (4, \infty)$, decrece en (0,5; 1) y es constante en (–2; 0,5) $\cup$ (1, 4).

La función no tiene máximos ni mínimos, ya que no pasa de creciente a decreciente o viceversa.

La función no es periódica, ni simétrica.

35. Página 189

a) En el eje *X*, la función toma todos los valores comprendidos entre $-\infty$ y $+\infty \rightarrow$ Dom $f = \mathbb{R}$.

En el eje *Y*, la función toma todos los valores comprendidos entre $-\infty$ y $3 \rightarrow$ Im $f = (-\infty, 3)$.

La función es continua.

La función corta al eje *X* en 6 puntos, en cada uno de los siguientes intervalos: (–3, –2), (–2,–1), (–1, 0), (0, 1), (1, 2) y (2, 3), una vez en cada intervalo.

Punto de corte con el eje *Y*: (0, 3)

La función crece en $(-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (1, 2)$, decrece en $(-2, -1) \cup (0, 1) \cup (2, \infty)$.

Hay dos máximos relativos, en (–2, 1) y (2, 1), un máximo absoluto en (0, 3) y dos mínimos relativos en (–1, –1) y (1, –1).

La función no es periódica.

La función tiene simetría par.

b) En el eje *X*, la función toma todos los valores comprendidos entre $-\infty$ y $+\infty \rightarrow$ Dom $f = \mathbb{R}$.

En el eje *Y*, la función toma todos los valores comprendidos entre $-\infty$ y $+\infty \rightarrow$ Im $f = \mathbb{R}$.

La función es continua.

Punto de corte con el eje *X*: (1, 0) y otro punto de corte está en el intervalo (3, 4).

Punto de corte con el eje *Y*: (0, –1).

La función crece en $(-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (3, \infty)$, decrece en $(-2, -1) \cup (1, 3)$.

Hay dos máximos relativos, en (–2, –1) y (1, 0), y dos mínimos relativos en (–1, –2) y (3, –1).

La función no es periódica.

La función no es simétrica.

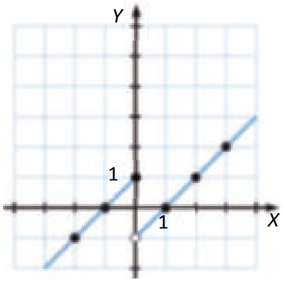
36. Página 190

$f(x) = x + 1$

x	−2	−1	0
f(x)	−1	0	1

$f(x) = x - 1$

x	1	2	3
f(x)	0	1	2



37. Página 190

$$f(x) = \begin{cases} -x & x \le 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

38. Página 190

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & -\infty < x \le -2 \\ 2x + 4 & -2 < x \le 0 \\ -2x + 4 & 0 < x \le 2 \\ -x + 2 & 2 < x < \infty \end{cases}$$

39. Página 191

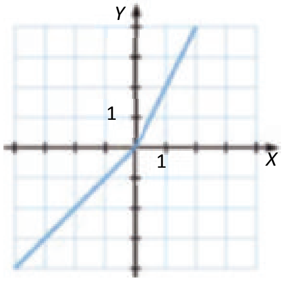
a) $f(x) = \begin{cases} x & x \le 0 \\ 2x & x > 0 \end{cases}$

$f(x) = x$

x	−2	−1	0
f(x)	−2	−1	0

$f(x) = 2x$

x	1	2	3
f(x)	2	4	6



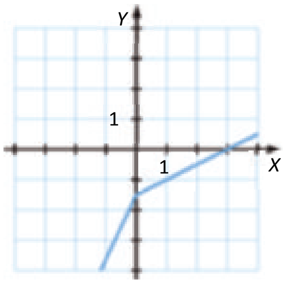
b) $f(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{3}{2} & x \le 0 \\ \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2} & x > 0 \end{cases}$

$f(x) = 2x - \dfrac{3}{2}$

x	−2	−1	0
f(x)	−11/2	−7/2	−3/2

$f(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$

x	1	2	3
f(x)	−1	−1/2	0



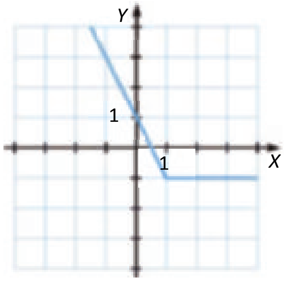
c) $f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & x \le 1 \\ -1 & x > 1 \end{cases}$

$f(x) = -2x + 1$

x	−1	0	1
f(x)	3	1	−1

$f(x) = -1$

x	2	3	4
f(x)	−1	−1	−1



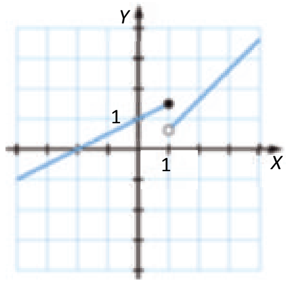
d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x + 1 & x \le 1 \\ x - \dfrac{1}{4} & x > 1 \end{cases}$

$f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$

x	−1	0	1
f(x)	1/2	1	3/2

$f(x) = x - \dfrac{1}{4}$

x	2	3	4
f(x)	7/4	11/4	15/4



40. Página 191

$$f(x)=\begin{cases}-x-2 & x\le -2\\ x+2 & -2<x\le 0\\ 2 & x>0\end{cases}$$

41. Página 191

a) $f(x)=\begin{cases}-1 & x\le -2\\ x & -2<x\le 2\\ 1 & x>2\end{cases}$

$f(x)=-1$

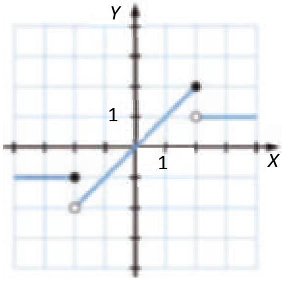
x	−3	−2
f(*x*)	−1	−1

$f(x)=x$

x	0	2
f(*x*)	0	2

$f(x)=1$

x	3	4
f(*x*)	1	1



b) $f(x)=\begin{cases}-3 & x\le -1\\ -x+1 & -1<x\le 1\\ 3x & x>1\end{cases}$

$f(x)=-3$

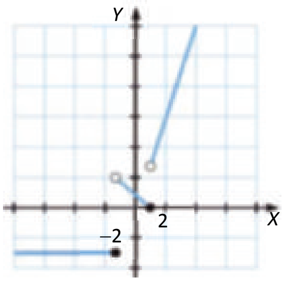
x	−2	−1
f(*x*)	−3	−3

$f(x)=-x+1$

x	0	1
f(*x*)	1	0

$f(x)=3x$

x	2	3
f(*x*)	6	9



ACTIVIDADES FINALES

42. Página 192

a) Sí, es una función, dado un volumen para la botella, solo le va a corresponder una posible capacidad.

b) Sí, es una función, el precio de la luz es acorde con el tiempo de consumo.

c) No es una función, porque los profesores no son una magnitud.

d) No es una función, los corredores no son una magnitud.

43. Página 192

a) $f(x) = 4x$, siendo x la longitud del lado del cuadrado y $f(x)$ su perímetro.

b) $f(x) = 1{,}25x$, siendo x los kilos de tomates que compramos y $f(x)$ el precio final que tenemos que pagar.

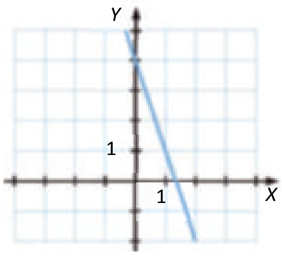
c) $f(x) = 2\pi x$, siendo x el radio y $f(x)$ la longitud de la circunferencia.

d) $f(x) = 1{,}5x$, siendo x el tiempo y $f(x)$ el espacio.

44. Página 192

$f(x) = -3x + 4$

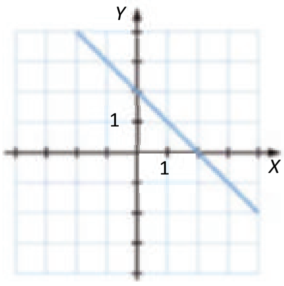
x	-1	0	1	2
$f(x)$	7	4	1	-2



45. Página 192

$f(x) = -x + 2$

x	-1	0	1	2
$f(x)$	3	2	1	0



46. Página 192

a) $f(2) = 5 \cdot 2^2 - 1 = 19$ $\quad f(-2) = 5 \cdot (-2)^2 - 1 = 19$ $\quad f(3) = 5 \cdot 3^2 - 1 = 44$

$f(-3) = 5 \cdot (-3)^2 - 1 = 44$ $\quad f(1) = 5 \cdot 1^2 - 1 = 4$ $\quad f(-1) = 5 \cdot (-1)^2 - 1 = 4$

b) $f(2) = 2 \cdot 2^2 - 2 = 6$ $\quad f(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - (-2) = 10$ $\quad f(3) = 2 \cdot 3^2 - 3 = 15$

$f(-3) = 2 \cdot (-3)^2 - (-3) = 21$ $\quad f(1) = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1$ $\quad f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - (-1) = 3$

c) $f(2) = 2^2 - 2 - 1 = 1$ $\quad f(-2) = (-2)^2 - (-2) - 1 = 5$ $\quad f(3) = 3^2 - 3 - 1 = 5$

$f(-3) = (-3)^2 - (-3) - 1 = 11$ $\quad f(1) = 1^2 - 1 - 1 = -1$ $\quad f(-1) = (-1)^2 - (-1) - 1 = 1$

d) $f(2) = -2^2 + 1 = -3$ $\quad f(-2) = -(-2)^2 + 1 = -3$ $\quad f(3) = -3^2 + 1 = -8$

$f(-3) = -(-3)^2 + 1 = -8$ $\quad f(1) = -1^2 + 1 = 0$ $\quad f(-1) = -(-1)^2 + 1 = 0$

47. Página 192

a) $f(-2) = (-2)^3 - 1 = -9$ $\quad f(-1) = (-1)^3 - 1 = -2$

$f(0) = 0^3 - 1 = -1$ $\quad f(1) = 1^3 - 1 = 0$ $\quad f(2) = 2^3 - 1 = 7$

b) $f(-2)=\dfrac{1}{(-2)^2+2}=\dfrac{1}{6}$ $f(-1)=\dfrac{1}{(-1)^2+2}=\dfrac{1}{3}$

$f(0)=\dfrac{1}{0^2+2}=\dfrac{1}{2}$ $f(1)=\dfrac{1}{1^2+2}=\dfrac{1}{3}$ $f(2)=\dfrac{1}{2^2+2}=\dfrac{1}{6}$

c) $f(-2)=\sqrt{\dfrac{(-2)}{2}+5}=2$ $f(-1)=\sqrt{\dfrac{(-1)}{2}+5}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

$f(0)=\sqrt{\dfrac{0}{2}+5}=\sqrt{5}$ $f(1)=\sqrt{\dfrac{1}{2}+5}=\sqrt{\dfrac{11}{2}}$ $f(2)=\sqrt{\dfrac{2}{2}+5}=\sqrt{6}$

d) $f(-2)=\dfrac{(-2)^2}{3}-2\cdot(-2)+\dfrac{3}{5}=\dfrac{89}{15}$ $f(-1)=\dfrac{(-1)^2}{3}-2\cdot(-1)+\dfrac{3}{5}=\dfrac{44}{15}$

$f(0)=\dfrac{0^2}{3}-2\cdot 0+\dfrac{3}{5}=\dfrac{3}{5}$ $f(1)=\dfrac{1^2}{3}-2\cdot 1+\dfrac{3}{5}=\dfrac{1}{3}-2+\dfrac{3}{5}=-\dfrac{16}{15}$

$f(2)=\dfrac{2^2}{3}-2\cdot 2+\dfrac{3}{5}=\dfrac{4}{3}-4+\dfrac{3}{5}=-\dfrac{31}{15}$

48. Página 192

$f(x)=x^3-3x$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	2	0	-2	2

49. Página 192

$f(x)=3x-x^2$

x	0	1	-1	$\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}$	2
$f(x)$	0	2	-4	-2	2

50. Página 192

$f(x)=\dfrac{4}{3}\pi\cdot x^3$

$f(3)=\dfrac{4}{3}\pi\cdot 3^3=36\pi$

51. Página 192

$f(x)=\sqrt{x^2+9}$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{10}$	3	$\sqrt{10}$	$\sqrt{13}$

52. Página 192

$f(x)=2\cdot\text{sen } x$

54. Página 192

a) Dom f: $\mathbb{R}$, Im f: $(0, \infty)$

b) Dom f: $(-2, 2)$, Im f: $(-\infty, \infty)$

c) Dom f: $(-\infty, \infty)$, Im f: $[-1, 0)$

d) Dom f: $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$, Im f: $(-1, \infty)$

55. Página 193

a) Dom $f = (-\infty, 0] \cup [2, 5] \cup [6, \infty)$, Im $f = \{-1\} \cup (0, \infty)$

b) Dom $f = \mathbb{R}$, Im $f = [-2, 2]$

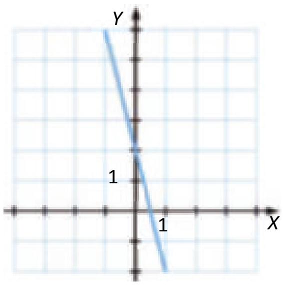
c) Dom $f = [-2, 1] \cup [2, 5) \cup [6, 8]$, Im $f = [0, 3] \cup \{4\}$

56. Página 193

a) $f(x) = -4x + 2$

Dom $f = \mathbb{R}$, Im $f = \mathbb{R}$

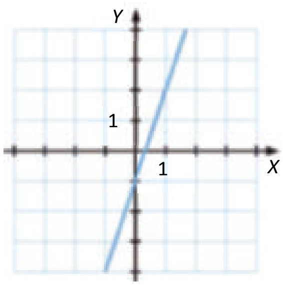
x	-1	0	1
$f(x)$	6	2	-2



b) $f(x) = 3x - 1$

Dom $f = \mathbb{R}$, Im $f = \mathbb{R}$

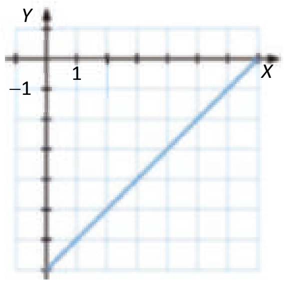
x	-1	0	1
$f(x)$	-4	-1	2



c) $f(x) = x - 7$

Dom $f = \mathbb{R}$, Im $f = \mathbb{R}$

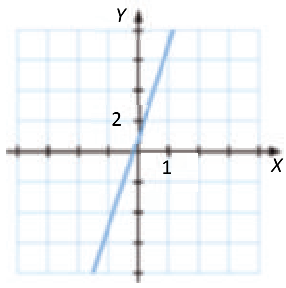
x	3	4	5
$f(x)$	-4	-3	-2



d) $f(x) = 6x + 1$

Dom $f = \mathbb{R}$, Im $f = \mathbb{R}$

x	-1	0	1
$f(x)$	-5	1	7



57. Página 193

a) Dom $f = \mathbb{R}$

b) Dom $f = \mathbb{R} - \{1\}$

c) Dom $f = \mathbb{R}$

d) Dom $f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

58. Página 193

a) Dom $f = [-3, \infty)$

b) Dom $f = \left[-\frac{4}{3}, \infty\right)$

c) Dom $f = \left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$

d) Dom $f = \left[\frac{1}{5}, \infty\right)$

59. Página 193

Dom $f = \mathbb{R}$, Im $f = [-1, 1) - \{0\}$

60. Página 193

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{-7\}$

b) Dom $f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$

c) Dom $f = \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$

d) Dom $f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{7}\right\}$

61. Página 193

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, -2\}$

b) Dom $f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right\}$

c) Dom $f = \mathbb{R} - \{0, 4\}$

d) Dom $f = \mathbb{R} - \left\{0, -\frac{5}{7}\right\}$

62. Página 193

a) Dom $f = (-\infty, -4] \cup [4, \infty)$

b) Dom $f = (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$

c) Dom $f = \varnothing$

d) Dom $f = (-\infty, 0] \cup \left[\frac{3}{4}, \infty\right)$

63. Página 193

a) Dom $f = \mathbb{R}$

b) Dom $f = (0, \infty)$

c) Dom $f = (0, \infty)$

d) Dom $f = (-1, \infty)$

64. Página 193

a) La función es continua en todos los puntos, excepto en el punto $x = 0$, que presenta una discontinuidad evitable.

b) La función es continua en todos los puntos, excepto en los puntos $x = -1$ y $x = 1$, en los que presenta una discontinuidad evitable.

c) La función es continua en todos los puntos, excepto en $x = 0$, donde presenta una discontinuidad de salto finito.

65. Página 193

a) La función es continua en todos los puntos, excepto en $x = 3$, donde presenta una discontinuidad de salto finito.

b) La función es continua en todos los puntos, excepto en $x = 2$, donde presenta una discontinuidad de salto finito.

c) La función es continua en todos los puntos, excepto en $x = 0$ y en $x = 2$, donde no está definida la función y presenta una discontinuidad evitable.

d) La función es continua en todos los puntos, excepto en $x = 0$, donde presenta una discontinuidad de salto infinito.

66. Página 193

a) $f(x) = 7x - 6$

Puntos de corte con el eje *X*: $f(x) = 0 \to 7x - 6 = 0 \to x = \frac{6}{7} \to \left(\frac{6}{7}, 0\right)$

Punto de corte con el eje *Y*: $f(0) = -6 \to (0, -6)$

b) $f(x) = 12x + 4$

Puntos de corte con el eje *X*: $f(x) = 0 \to 12x + 4 = 0 \to x = -\frac{1}{3} \to \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$

Punto de corte con el eje *Y*: $f(0) = 4 \to (0, 4)$

c) $f(x) = x^2 - 5x - 14$

Puntos de corte con el eje *X*: $f(x) = 0 \to x^2 - 5x - 14 = 0 \to x = -2$ o $x = 7 \to \{(-2,0),(7,0)\}$

Punto de corte con el eje *Y*: $f(0) = -14 \to (0, -14)$

d) $f(x) = x^2 + 14x + 33$

Puntos de corte con el eje *X*: $f(x) = 0 \to x^2 + 14x + 33 = 0 \to x = -11$ o $x = -3 \to \{(-11,0),(-3,0)\}$

Punto de corte con el eje *Y*: $f(0) = 33 \to (0, 33)$

67. Página 193

a) $f(x) = 144x^2 - 16$

Puntos de corte con el eje *X*: $f(x) = 0 \to 144x^2 - 16 = 0 \to x = -\frac{1}{3}$ o $x = \frac{1}{3} \to X$: $\left\{\left(-\frac{1}{3}, 0\right), \left(\frac{1}{3}, 0\right)\right\}$

Punto de corte con el eje *Y*: $f(0) = -16 \to (0, -16)$

b) $f(x) = 4x^2 - 7x$

Puntos de corte con el eje *X*: $f(x) = 0 \to 4x^2 - 7x = 0 \to x = 0$ o $x = \frac{7}{4} \to \left\{(0,0), \left(\frac{7}{4}, 0\right)\right\}$

Punto de corte con el eje *Y*: $f(0) = 0 \to (0, 0)$

c) $f(x) = x^3 - 16x$

Puntos de corte con el eje *X*: $f(x) = 0 \to x^3 - 16x = 0 \to x = -4$, $x = 0$ o $x = 4 \to \{(-4,0),(0,0),(4,0)\}$

Punto de corte con el eje *Y*: $f(0) = 0 \to (0, 0)$

d) $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$

$f(x) = 0 \rightarrow x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \rightarrow x = -3,\ x = -2,\ x = 2$ o $x = 3 \rightarrow$

Puntos de corte con el eje X: $\{(-3,0),(-2,0),(2,0),(3,0)\}$

Punto de corte con el eje Y: $f(0) = 36 \rightarrow (0, 36)$

68. Página 193

a) La función es continua en todos los puntos, excepto en el punto $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de salto finito.

Los puntos de corte con el eje X: $\{(-2, 0), (3, 0)\}$

El punto de corte con el eje Y: $(0, 2)$

b) La función es continua en todos los puntos, excepto en el punto $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de salto infinito y en un punto entre $x = -3$ y $x = -4$, donde tiene una discontinuidad de salto infinito.

El punto de corte con el eje X: $(0, 0)$

El punto de corte con el eje Y: $(0, 0)$

c) La función es continua en todos los puntos, excepto en el punto $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de salto infinito y en el punto $x = 2$, donde tiene una discontinuidad de salto finito.

Los puntos de corte con el eje X: $\{(1, 0), (3, 0)\}$

El punto de corte con el eje Y: $(0, 1)$

d) La función es continua en todos los puntos.

Los puntos de corte con el eje X: $\{4n + 2, 0), n € \mathbb{Z}\}$

El punto de corte con el eje Y: $(0, 2)$

69. Página 194

a) $f(x) = x^4 + 5x^2 - 36$

Puntos de corte con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow x^4 + 5x^2 - 36 = 0 \rightarrow x = -2$ o $x = 2 \rightarrow \{(-2,0),(2,0)\}$

Punto de corte con el eje Y: $f(0) = -36 \rightarrow (0,-36)$

b) $f(x) = x^4 - 7x^3 - x^2 + 7x$

Puntos de corte con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow x^4 - 7x^3 - x^2 + 7x = 0 \rightarrow x = -1,\ x = 0,\ x = 1$ o $x = 7 \rightarrow$ $\{(-1,0),(0,0),(1,0),(7,0)\}$

Punto de corte con el eje Y: $f(0) = 0 \rightarrow (0,0)$

c) $f(x) = x^4 + x^2$

Puntos de corte con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow x^4 + x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0,0)$

Punto de corte con el eje Y: $f(0) = 0 \rightarrow (0,0)$

d) $f(x) = x^3 - 10x^2 + 33x - 36$

Puntos de corte con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow x^3 - 10x^2 + 33x - 36 = 0 \rightarrow x = 3$ o $x = 4 \rightarrow \{(3,0),(4,0)\}$

Punto de corte con el eje Y: $f(0) = -36 \rightarrow (0,-36)$

70. Página 194

$f(x) = ax + b$, como pasa por los puntos (2, 0) y (0, 2) tenemos que:

$f(0) = 2 \rightarrow b = 2$

$f(2) = 0 \rightarrow 2a + 2 = 0 \rightarrow a = -1$

Por tanto: $f(x) = -x + 2$

71. Página 194

$f(x) = ax + b$, como pasa por los puntos (–1, 0) y (0, 3) tenemos que:

$f(0) = 3 \rightarrow b = 3$

$f(-1) = 0 \rightarrow -a + 3 = 0 \rightarrow a = 3$

Por tanto: $f(x) = 3x + 3$

72. Página 194

$f(x) = g(x) \rightarrow x^2 - x + 2 = 4x - 2 \rightarrow x = 1$ y $x = 4$

73. Página 194

$f(x) = ax^2 + bx + c$, como pasa por los puntos (2, 0), (–4, 0) y (0, 3) tenemos que:

$f(0) = 3 \rightarrow c = 3$

$f(2) = 0 \rightarrow 4a + 2b + 3 = 0$

$f(-4) = 0 \rightarrow 16a - 4b + 3 = 0$

Resolviendo el sistema $a = -\frac{3}{8}$ y $b = -\frac{3}{4}$

Por tanto: $f(x) = -\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + 3$

74. Página 194

$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{x+2}{x-3}$

Puntos de corte con el eje *X*: $f(x) = 0 \rightarrow \frac{x+2}{x-3} = 0 \rightarrow x = -2 \rightarrow (-2, 0)$

Punto de corte con el eje *Y*: $f(0) = -\frac{2}{3} \rightarrow \left(0, -\frac{2}{3}\right)$

75. Página 194

a) La función decrece en el intervalo (–∞, 0) y crece en el intervalo (0, ∞).

b) La función decrece en el intervalo (–∞, –1) y crece en el intervalo (–1, ∞).

c) La función crece en el intervalo (–∞, –1) ∪ (3, ∞) y decrece en el intervalo (–1, 3).

d) La función crece en el intervalo (0, 2) y decrece en el intervalo (–∞, 0) ∪ (2, ∞).

76. Página 194

a) La función crece en el intervalo: $(-\infty, -2)$ y decrece en el intervalo: $(-2, \infty)$, por tanto la función tiene un máximo en el punto $x = -2$.

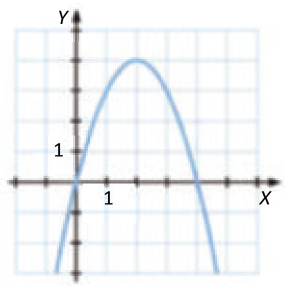
b) La función pasa de ser decreciente a creciente en los puntos $x = -2$ y $x = 2$, donde la función presenta mínimos. En el punto $x = 0$ la función tiene un máximo, ya que pasa de ser creciente a ser decreciente.

c) En el punto $x = -2$, la función tiene un máximo y en el punto $x = 0$ tiene un mínimo.

d) La función tiene máximos en los puntos $x = -1$ y $x = 1$, también presenta un mínimo en el punto $x = 0$.

77. Página 194

Respuesta abierta. Por ejemplo:



79. Página 194

a) Variación de x: $1 - 0 = 1$

Variación de $f(x)$: $f(1) - f(0) = 4 - 7 = -3$

Tasa de variación media: $\dfrac{-3}{1} = -3$

b) Variación de x: $3 - (-2) = 5$

Variación de $f(x)$: $f(3) - f(-2) = 20 - (-15) = 35$

Tasa de variación media: $\dfrac{35}{5} = 7$

c) Variación de x: $-2 - (-4) = 2$

Variación de $f(x)$: $f(-2) - f(-4) = 9 - 5 = 4$

Tasa de variación media: $\dfrac{4}{2} = 2$

d) Variación de x: $3 - 1 = 2$

Variación de $f(x)$: $f(3) - f(1) = -17 - (-7) = -10$

Tasa de variación media: $\dfrac{-10}{2} = -5$

80. Página 194

a) Variación de x: $\dfrac{1}{3} - \left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2}{3}$

Variación de $f(x)$: $f\left(\dfrac{1}{3}\right) - f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = -11 - 7 = -18$

Tasa de variación media: $\dfrac{-18}{\dfrac{2}{3}} = -27$

b) Variación de x: $\dfrac{3}{4} - \left(-\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{3}{2}$

Variación de $f(x)$: $f\left(\dfrac{3}{4}\right) - f\left(-\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{7}{6} - \left(-\dfrac{5}{6}\right) = 2$

Tasa de variación media: $\dfrac{2}{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{2 \cdot 2}{3} = \dfrac{4}{3}$

81. Página 194

a) Variación de x: $0 - (-2) = 2$

Variación de $f(x)$: $f(0) - f(-2) = -7 - 3 = -10$

Tasa de variación media: $-\frac{10}{2} = -5$

b) Variación de x: $2 - (-4) = 6$

Variación de $f(x)$: $f(2) - f(-4) = -17 - 13 = -30$

Tasa de variación media: $-\frac{30}{6} = -5$

c) Variación de x: $1 - (-1) = 2$

Variación de $f(x)$: $f(1) - f(-1) = 15 - 11 = 4$

Tasa de variación media: $\frac{4}{2} = 2$

d) Variación de x: $4 - 2 = 2$

Variación de $f(x)$: $f(4) - f(2) = 100 - 2 = 98$

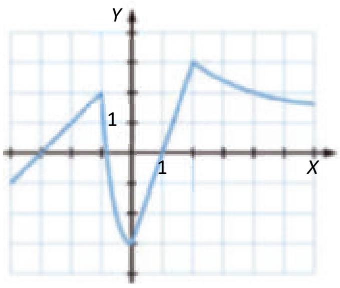
Tasa de variación media: $\frac{98}{2} = 49$

82. Página 195

No podemos crear un gráfica con estas características, ya que para que tenga un mínimo en $B(0, 0)$ tiene que decrecer antes del punto 0 y crecer después y eso no se cumple.

83. Página 195

Respuesta abierta.



84. Página 195

La función crece en el intervalo $(-3, 0)$, es constante en el intervalo $(0, 2)$ y vuelve a crecer en el intervalo $(2, 3)$ y decrece en el intervalo $(3, 5)$, por tanto, la función tiene un máximo en el punto $x = 3$.

85. Página 195

La función crece en el intervalo $(-3, 0) \cup (0, 3)$, es constante en el intervalo $(3, 5)$ y es decreciente en el intervalo $(5, \infty)$, su valor máximo es $y = 3$ y su valor mínimo es $-\infty$. La función no pasa de creciente a decreciente en ningún punto, ni de decreciente a creciente, por tanto no tiene máximos ni mínimos.

86. Página 195

a) La temperatura máxima es 5 y se alcanza a las 9 y representa un máximo absoluto, la temperatura mínima es de 0 y se alcanza a las 24.

b) Los intervalos de crecimiento son (0; 4,5) ∪ (6, 9) ∪ (16,5; 18), es constante en el intervalo (105; 15) y decreciente en los intervalos (4,5; 6) ∪ (9; 10,5) ∪ (15; 16,5) ∪ (18, 24). Con estos datos podemos determinar que en los puntos $x = 4{,}5$; $x = 9$ y $x = 18$ la función tiene máximos y en los puntos $x = 6$ y $x = 16{,}5$ la función tiene mínimos.

87. Página 195

a) La función crece en los intervalos $(-\infty, -2) \cup (0, 2) \cup (4, \infty)$ y decrece en los intervalos $(-2, 0) \cup (2, 4)$, por tanto, en los puntos $x = -2$ y $x = 2$ la función tiene máximos relativos y el los puntos $x = 0$ y $x = 4$ la función tiene mínimos relativos.

b) La función crece en el intervalo (0, 2), decrece en los intervalos $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ y es constante en el intervalo (–2, 0). En el punto $x = 2$ la función tiene un máximo relativo.

c) La función crece en los intervalos $(-\infty, -2) \cup (2, 4) \cup (4, \infty)$, decrece en el intervalo (0, 2) y es constante en el intervalo (–2, 0). En el punto $x = 2$ la función pasa de decreciente a creciente, por lo que es un mínimo.

d) La función es siempre creciente, no tiene máximos ni mínimos.

88. Página 195

La función crece en los intervalos de la forma $\{(4k-1, 4k+1), k \in \mathbb{Z}\}$ y decrece en los intervalos de la forma $\{(4k+1, 4k+3), k \in \mathbb{Z}\}$. Tiene máximos relativos en los puntos de la forma $x = 4k + 1$ y mínimos relativos en los puntos de la forma $x = 4k - 1$.

89. Página 195

a) $f(-x) = (-x)^3 - 5(-x) = -x^3 + 5x = -f(x)$. La función tiene simetría impar.

b) $f(-x) = (-x)^5 - (-x) = -x^5 + x = -f(x)$. La función tiene simetría impar.

c) $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x)$. La función tiene simetría par.

d) $f(-x) = (-x)^6 + 8(-x)^4 = x^6 + 8x^4 = f(x)$. La función tiene simetría par.

90. Página 195

a) La función tiene simetría par.

b) La función tiene simetría par.

c) La función tiene simetría impar.

d) la función tiene simetría par.

91. Página 195

a) $f(-x) = (-x)^3 - 11(-x) + 3 = -x^3 + 11x + 3$. Esta función no tiene simetrías.

b) $f(-x) = (-x)^3 - 15(-x)^2 = -x^3 - 15x^2$. Esta función no tiene simetrías.

c) $f(-x) = (-x)^4 + 13(-x)^2 = x^4 + 13x^2 = f(x)$. Esta función tiene simetría par.

d) $f(-x) = (-x)^4 - 21(-x)^2 + 3 = x^4 - 21x^2 + 3 = f(x)$. Esta función tiene simetría par.

92. Página 195

a) La función presenta simetría impar.

b) La función presenta simetría par.

c) La función presenta simetría impar.

d) La función presenta simetría impar.

93. Página 195

a) $f(-x) = \frac{1}{(-x)^3} = -\frac{1}{x^3} = -f(x)$. La función tiene simetría impar.

b) $f(-x) = \frac{3}{(-x)^3 - (-x)} = -\frac{3}{x^3 - x} = -f(x)$. La función tiene simetría impar.

c) $f(-x) = \frac{(-x)}{2(-x)^2 - 1} = -\frac{x}{2x^2 - 1} = -f(x)$. La función tiene simetría impar.

94. Página 195

a) La función es periódica.

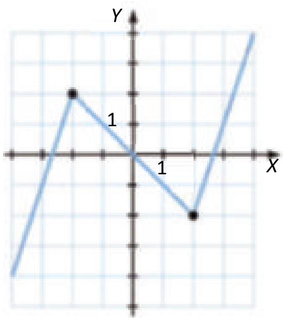
b) La función es periódica.

c) La función no es periódica.

d) La función no es periódica.

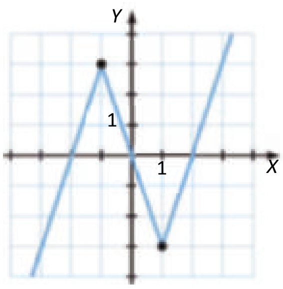
96. Página 196

Respuesta abierta.



97. Página 196

Respuesta abierta.



98. **Página 196**

No podemos hallar una gráfica que cumpla todas estas características, ya que no puede cumplir ser creciente en el intervalo dado y tener un mínimo en *B*.

99. **Página 196**

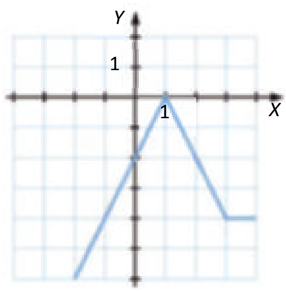
a) La función tiene período 2.

b) La función tiene período 2.

c) La función tiene período 2,5.

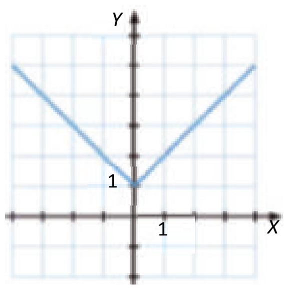
d) La función tiene período 4.

100. **Página 196**



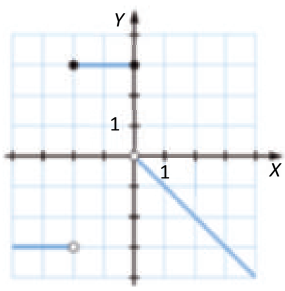
Dom $f = \mathbb{R}$, Im $f = (-\infty, 0]$

101. **Página 196**



Dom $f = \mathbb{R}$, Im $f = [1, \infty)$

102. **Página 196**



La función es continua en todos los puntos, excepto en $x = -2$ y $x = 0$, donde tiene discontinuidades de salto finito.

103. Página 196

a) $f(x)=\begin{cases} -\frac{3}{2}x-2 & x\le 0 \\ \frac{3}{2}x-2 & 0<x\le 2 \\ 1 & x>2 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\le -2 \\ -1 & -2<x\le 2 \\ x-3 & x>2 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} -2 & x\le -1 \\ -\frac{1}{2}x-\frac{5}{2} & -1<x\le 1 \\ 3x-6 & x>1 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} -4x-12 & x\le -3 \\ -\frac{3}{2}x-\frac{9}{2} & -3<x\le -1 \\ x-2 & x>-1 \end{cases}$

104. Página 196

$$f(x)=\begin{cases} -5x-10 & -8<x\le -2 \\ 1 & -2<x<0 \\ x+3 & 0\le x<8 \end{cases}$$

105. Página 196

$$f(x)=\begin{cases} -3 & x\le -4 \\ -x-3 & -4<x\le -2 \\ \frac{2}{3}x-\frac{1}{3} & x>-1 \end{cases}$$

106. Página 197

a) La función crece en los intervalos: $\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right)\cup\left(2,\frac{9}{4}\right)\cup\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)\cup\left(4,\frac{9}{2}\right)\cup\left(5,\frac{21}{4}\right)\cup\left(\frac{11}{2},6\right)$

Decrece en los intervalos: $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{7}{4},2\right)\cup\left(\frac{9}{4},\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{7}{2},4\right)\cup\left(\frac{9}{2},5\right)\cup\left(\frac{21}{4},\frac{11}{2}\right)$

b) Alcanza el valor más alto en $x=\frac{7}{2}$

c) Alcanza el valor más bajo en $x=2$

107. Página 197

Cuando la vida útil del electrodoméstico va decreciendo, cuando esta sea 0, se puede considerar que el electrodoméstico ha alcanzado su valor medio en años funcionando, por tanto:

$$0=\frac{54}{x+1}-6 \rightarrow 6(x+1)=54 \rightarrow x=8$$

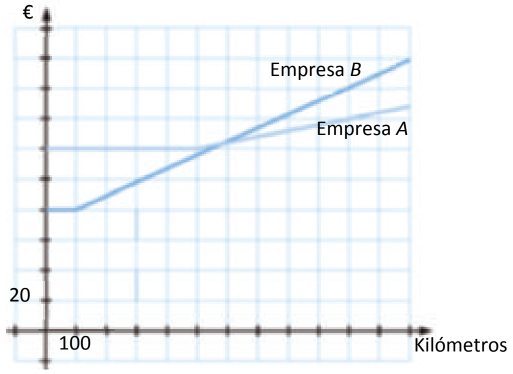
El electrodoméstico funcionará de media 8 años.

108. Página 197

No, ya que el corazón tiene una actividad coronaria irregular y no podremos encontrar un período.

109. Página 197

a)



b) Observando la gráfica, vemos que el precio menor para $x = 600$ es con la empresa *A*, este sería $120 + 0{,}04\,(x - 500) = 124$ €.

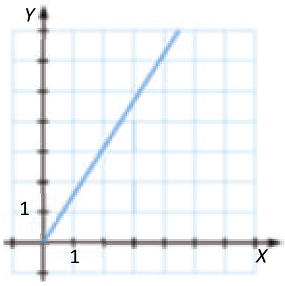
c) Nos sigue saliendo más barato con la empresa *A,* siendo ahora la diferencia de precio mayor que antes respecto al precio de la empresa *B*.

DEBES SABER HACER

1. Página 197

$f(x) = 1{,}54x$

x	0	1	2
$f(x)$	0	1,54	3,08



2. Página 197

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{6}{7}, \frac{6}{7}\right\}$ $\qquad$ $\text{Im } f = \left(-\infty, -\frac{5}{24}\right] \cup (0, \infty)$

b) $\text{Dom } f = (-\infty, 1]$ $\qquad$ $\text{Im } f = [0, \infty)$

3. Página 197

La función es continua en todos los puntos excepto en $x = 0$, $x = 3$ y $x = 5$, en estos tres puntos la función presenta discontinuidades de salto finito.

Puntos de corte con el eje *X*: {(–1,5; 0), (0, 0)} $\qquad$ Punto de corte con el eje *Y*: (0, 0)

4. Página 197

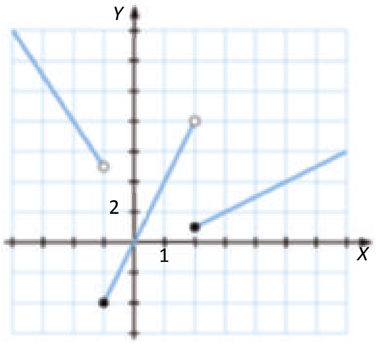
La función decrece en (0,75; 3,25) y crece en el resto de $\mathbb{R}$.

5. Página 197

La gráfica roja es periódica y la azul no lo es.

La función roja tiene simetría par y la azul tiene simetría impar.

6. Página 197



COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

110. Página 198

a) Sí, a cada punto desde la salida al final del trayecto le corresponde una altura específica.

b) El dominio es desde la salida al final del trayecto, 105. El recorrido va de 0 a 15 · 2 · 2,5 = 75 m.

c) Su máximo absoluto lo toma en la cima de la subida más alta, que son 75 m. Los máximos relativos los toma en la cima de las otras subidas y son 15 m y 30 m respectivamente.

El mínimo absoluto lo toma en la salida y en el final del trayecto y es 0 m.

d) No, ya que no se puede comparar con una gráfica de una función.

FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

111. Página 198

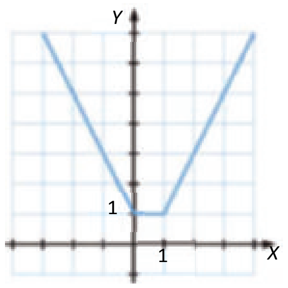
a) La diagonal del rectángulo mide lo mismo que el diámetro.

$A = x \cdot y\ ,\ y = \sqrt{100 - x^2} \ \rightarrow\ A = f(x) = x \cdot \sqrt{100 - x^2}$

Dom $f = [-10, 10]$

b) El valor máximo que puede tomar es $x = 5\sqrt{2}$. Si $x = 5\sqrt{2}$ el área del rectángulo sería 50, y el área de la circunferencia es $25 \cdot \pi$, en consecuencia el rectángulo ocupa sobre un 63,66 %.

112. Página 198



113. Página 198

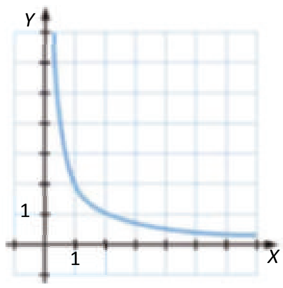
Conocemos el área de los 3, que es la misma, *S*.

a) Sabemos que $S = \frac{b \cdot h}{2}$, por tanto $f(b) = \frac{2S}{h}$

b) $f(h) = \frac{2S}{b}$

c) En ambos casos la representación es similar, se trata de una función del tipo $\frac{C}{x}$, donde *C* es una constante, en este caso, 2*S*. Una función inversamente proporcional.

Por ejemplo, en el caso de que el área fuese 1, sería:



114. Página 198

a) $f(-6) = 3$ y $f(3) = 6$, por ser creciente.

b) La función no tiene máximos ni mínimos relativos porque es creciente en todo su dominio.

PRUEBAS PISA

115. Página 199

La que mejor lo representa es la figura A, ya que la figura B sería si siempre tomase la misma altura, la figura C no representa una función y la figura D no puede ser porque los pies toman alturas oscilantes.

Funciones polinómicas y racionales

10

CLAVES PARA EMPEZAR

1. Página 200

a) $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

b) $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} \rightarrow$ No tiene solución.

c) $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4}}{2 \cdot 4} = -\dfrac{1}{2}$

2. Página 200

Las magnitudes son inversamente proporcionales ya que si duplicamos la cantidad de ordenadores, la velocidad de la conexión de cada uno se reduciría a la mitad.

N.º de ordenadores		**Velocidad**
2	$\rightarrow$	256
6	$\rightarrow$	x

$\dfrac{2}{6} = \dfrac{x}{256} \rightarrow x = \dfrac{2 \cdot 256}{6} = 85{,}33$ kbps

Cada ordenador tendría una velocidad de 85,33 kbps.

VIDA COTIDIANA

LA CINTA DE CORRER. Página 201

Sea x el número de vueltas e y los kilómetros recorridos. En cada vuelta se recorren $\dfrac{1}{250}$ km $\rightarrow y = \dfrac{1}{250}x$

RESUELVE EL RETO

RETO 1. Página 202

a) Es una recta horizontal, paralela al eje X y que está por encima del eje. Una función constante.

b) Es una función de proporcionalidad directa, cuya gráfica es una recta que pasa por (0, 0) y tiene pendiente negativa.

c) Es una función lineal, que no pasa por el origen.

ACTIVIDADES

1. Página 202

La función $f(x)$ (representada por la recta r) es una función de proporcionalidad directa por ser una recta que pasa por el origen de coordenadas.

La función $g(x)$ (representada por la recta t) es una función lineal por ser una recta con ordenada en el origen distinta de cero.

La función $h(x)$ (representadga por la recta s) es una función constante por ser una recta paralela al eje X.

2. Página 202

La recta *r* se corta con los ejes en (0, 1) y (2, 0). Si la función asociada es *f*(*x*), tenemos:

$f(0) = a \cdot 0 + b = 1 \rightarrow b = 1$ $\qquad f(2) = a \cdot 2 + 1 = 0 \rightarrow a = -\dfrac{1}{2}$

De modo que $r \equiv y = -\dfrac{1}{2}x + 1$

La recta *s* se corta con los ejes en (0, 2) y (–3, 0). Si la función asociada es *g*(*x*), tenemos:

$g(0) = a \cdot 0 + b = 2 \rightarrow b = 2$ $\qquad g(-3) = a \cdot (-3) + 2 = 0 \rightarrow a = \dfrac{2}{3}$

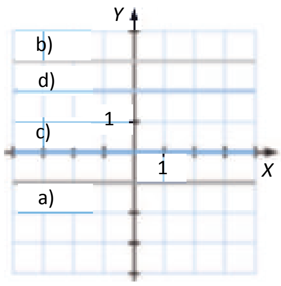
De modo que $s \equiv y = \dfrac{2}{3}x + 2$

3. Página 202

$$f(x) = mx + n \rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ f(0) = 3 \rightarrow n = 3 \end{cases} \rightarrow f(x) = 3x + 3$$

4. Página 203

Son las 4 funciones constantes.

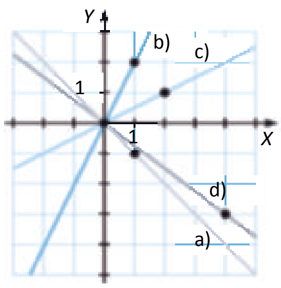


5. Página 203

Las cuatro son funciones de proporcionalidad directa, por lo que pasarán por (0, 0). Calculamos otro punto para cada una de ellas para poder dibujar la recta.

a) $f(1) = -1$ $\qquad$ c) $f(2) = 1$

b) $f(1) = 2$ $\qquad$ d) $f(4) = -3$



6. Página 203

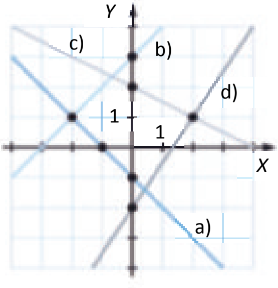
Las cuatro son funciones lineales. Calculamos dos puntos de cada función para trazarlas.

a) $f(0) = -0 - 1 = -1$ $\quad f(-1) = -(-1) - 1 = 0$

b) $f(0) = 0 + 3 = 3$ $\quad f(-2) = -2 + 3 = 1$

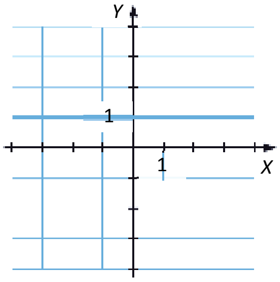
c) $f(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0 + 2 = 2$ $\quad f(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2 + 2 = 1$

d) $f(0) = \frac{3}{2} \cdot 0 - 2 = -2$ $\quad f(2) = \frac{3}{2} \cdot 2 - 2 = 1$

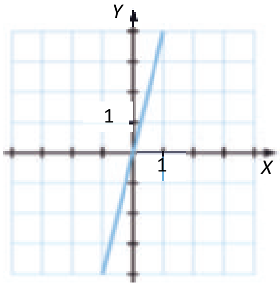


7. Página 203

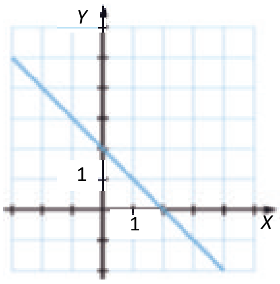
a) $\begin{cases} f(-1) = 1 \\ f(3) = 1 \end{cases} \rightarrow$ Es una función constante $\rightarrow f(x) = 1$



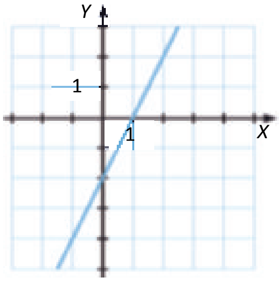
b) $\begin{cases} f(0) = 0 \rightarrow n = 0 \\ m = 4 \end{cases} \rightarrow f(x) = 4x$



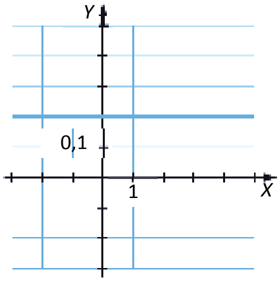
c) $\begin{cases} f(0) = 2 \rightarrow n = 2 \\ m = -1 \end{cases} \rightarrow f(x) = -x + 2$



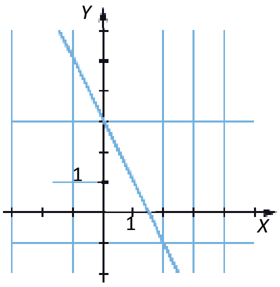
d) $\begin{cases} f(0) = -2 \rightarrow n = -2 \\ m = 2 \end{cases} \rightarrow f(x) = 2x - 2$



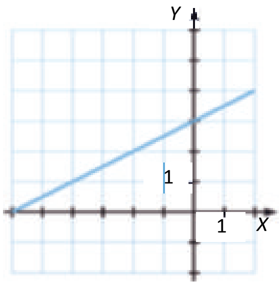
e) $\begin{cases} f(2) = \frac{1}{5} \rightarrow n = \frac{1}{5} \\ m = 0 \end{cases} \rightarrow$ Con pendiente nula es una función constante $\rightarrow f(x) = \frac{1}{5}$



f) $\begin{cases} f(0) = 3 \rightarrow n = 3 \\ f(1) = m + 3 = 1 \rightarrow m = -2 \end{cases} \rightarrow f(x) = -2x + 3$



g) $f(x) = \frac{x}{2} + 3$

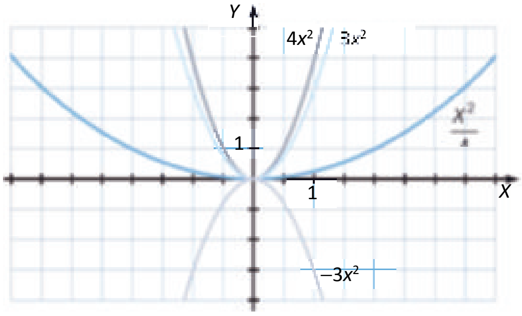


8. Página 204

El vértice de las parábolas es el punto (0, 0) y su eje de simetría es el eje *Y*.

Construimos tablas de valores alrededor del vértice y después dibujamos las parábolas.

	−2	−1	0	1	2
$-3x^2$	−12	−3	0	−3	−12
$3x^2$	12	3	0	3	12
$x^2/4$	1	0,25	0	0,25	1
$4x^2$	16	4	0	4	16



9. Página 204

$$y = ax^2 \xrightarrow{x=2} y = 4a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{4} \rightarrow y = \frac{1}{4}x^2$$

10. Página 204

Son funciones del tipo $y = ax^2$. Sea *f*(*x*) la gráfica verde (*r*); *g*(*x*) la gráfica azul (*t*) y *h*(*x*) la gráfica roja (*s*).

$$(2,-2) \rightarrow f(2) = -2 = 4a \rightarrow a = -\frac{1}{2} \rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}x^2$$

$$(1,2) \rightarrow g(1) = 2 = a \rightarrow a = 2 \rightarrow g(x) = 2x^2$$

$$(1,1) \rightarrow h(1) = 1 = a \rightarrow a = 1 \rightarrow g(x) = x^2$$

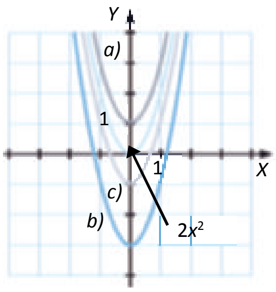
11. Página 205

La función $y = 2x^2$ tiene como vértice (0, 0) y su eje de simetría es el eje *Y*.

Damos valores en un entorno del vértice y representamos.

x	−2	−1	0	1	2
$2x^2$	8	2	0	2	8

Para representar las otras funciones desplazamos el vértice verticalmente.



12. Página 205

a) $y = 2x^2 + x \xrightarrow{a=2,b=1}$ Vértice $\rightarrow \left(\dfrac{-1}{2\cdot 2}, \dfrac{-1^2}{4\cdot 2}\right) = \left(-\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{8}\right)$

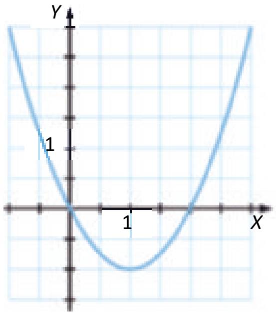
b) $y = 3x^2 - 2x \xrightarrow{a=3,b=-2}$ Vértice $\rightarrow \left(\dfrac{-(-2)}{2\cdot 3}, \dfrac{-(-2)^2}{4\cdot 3}\right) = \left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$

c) $y = x^2 - 3x \xrightarrow{a=1,b=-3}$ Vértice $\rightarrow \left(\dfrac{-(-3)}{2\cdot 1}, \dfrac{-(-3)^2}{4\cdot 1}\right) = \left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{9}{4}\right)$

13. Página 205

a) $y = (x-1)^2 - 1 \longrightarrow y = x^2 - 2x + 1 - 1$

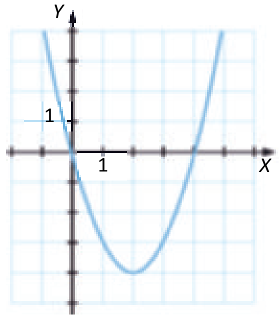
$y = x^2 - 2x \xrightarrow{a=1,b=-2}$ Vértice: $(1, -1)$



Se traslada $y = x^2$ 1 a la derecha y 1 hacia abajo.

c) $y = (x-2)^2 - 4 \longrightarrow y = x^2 - 4x + 4 - 4$

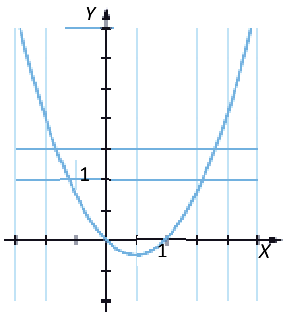
$y = x^2 - 4x \xrightarrow{a=1,b=-4}$ Vértice: $(2, -4)$



Se traslada $y = x^2$ 2 a la derecha y 4 hacia abajo.

b) $y = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} \rightarrow y = x^2 - x + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}$

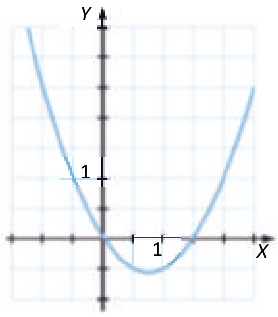
$y = x^2 - x \xrightarrow{a=1,b=-1}$ Vértice: $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$



Se traslada $y = x^2$ 1/2 a la derecha y 1/4 hacia abajo.

d) $y = \left(x - \dfrac{3}{4}\right)^2 - \dfrac{9}{16} \rightarrow y = x^2 - \dfrac{3}{2}x + \dfrac{9}{16} - \dfrac{9}{16}$

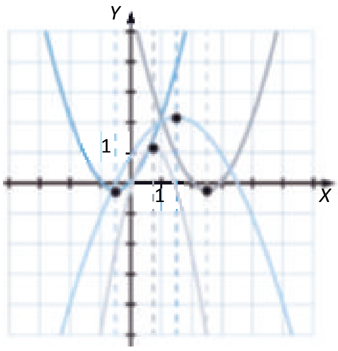
$y = x^2 - \dfrac{3}{2}x \xrightarrow{a=1,b=\frac{-3}{2}}$ Vértice: $\left(\dfrac{3}{4}, -\dfrac{9}{16}\right)$



Se traslada $y = x^2$ 3/4 a la derecha y 9/16 hacia abajo.

Todas las parábolas son del tipo $y = ax^2 + bx$.

14. Página 206



La orientación de las parábolas azul oscuro (azul en el libro) y gris oscuro (roja en el libro) es hacia arriba, tienen un mínimo. La orientación de las parábolas azul claro (verde en el libro) y gris claro (rosa en el libro) es hacia abajo, tienen un máximo.

15. Página 206

Todas las funciones son parábolas.

a) $a = 2 > 0 \rightarrow$ El vértice de la función es un mínimo.

$b = 1 \rightarrow$ *a* y *b* son del mismo signo $\rightarrow$ El vértice está a la izquierda del eje *Y*.

Vértice $\rightarrow \left(-\frac{1}{2\cdot 2}, \frac{-1^2 + 4\cdot 2}{4\cdot 2}\right) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{7}{8}\right)$ Eje de simetría $\rightarrow x = -\frac{1}{4}$

b) $a = -1 < 0 \rightarrow$ El vértice de la función es un máximo.

$b = 3 \rightarrow$ *a* y *b* son de distinto signo $\rightarrow$ El vértice está a la derecha del eje *Y*.

Vértice $\rightarrow \left(-\frac{3}{-2}, \frac{-3^2 - 4\cdot 2}{-4}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{17}{4}\right)$ Eje de simetría $\rightarrow x = \frac{3}{2}$

c) $a = 1 > 0 \rightarrow$ El vértice de la función es un mínimo.

$b = -5 \rightarrow$ *a* y *b* son de distinto signo $\rightarrow$ El vértice está a la derecha del eje *Y*.

Vértice $\rightarrow \left(-\frac{-5}{2}, \frac{-(-5)^2 - 4}{4}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{-29}{4}\right)$ Eje de simetría $\rightarrow x = \frac{5}{2}$

d) $a = -1 < 0 \rightarrow$ El vértice de la función es un máximo.

$b = 4 \rightarrow$ *a* y *b* son de distinto signo $\rightarrow$ El vértice está a la derecha del eje *Y*.

Vértice $\rightarrow \left(-\frac{4}{-2}, \frac{-4^2 + 4\cdot 8}{-4}\right) = (2, -4)$ Eje de simetría $\rightarrow x = 2$

16. Página 206

a) $y = (x-1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 + 1 \rightarrow y = x^2 - 2x + 2 \rightarrow$ Vértice $\rightarrow \left(-\frac{-2}{2}, \frac{-(-2)^2 + 4\cdot 2}{4}\right) = (1, 1)$

b) $y = (x+1)^2 - 2 = x^2 + 2x + 1 - 2 \rightarrow y = x^2 + 2x - 1 \rightarrow$ Vértice $\rightarrow \left(-\frac{2}{2}, \frac{-2^2 + 4\cdot 1\cdot(-1)}{4}\right) = (-1, -2)$

La primera coordenada del vértice es la cantidad que aparece restando a *x* en las expresiones dentro del paréntesis. La segunda coordenada del vértice es lo que aparece fuera del paréntesis.

Sí, se podrían representar así todas las parábolas.

17. Página 207

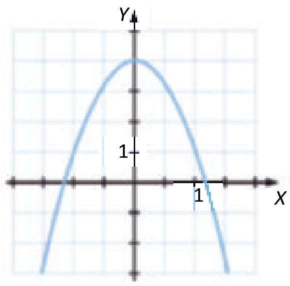
a) $a = -3$, $b = 0$, $c = 4 \rightarrow$ Vértice: $\left(0, \frac{-4\cdot 3\cdot 4}{-4\cdot 3}\right) = (0, 4)$

$a = -3 < 0 \rightarrow$ El vértice es un máximo.

Corte con el eje *X*: $-3x^2 + 4 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \rightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right) \\ x_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \rightarrow \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right) \end{cases}$

Corte con el eje *Y*: (0, 4)

x	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	−1	0	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
y	0	1	4	1	0



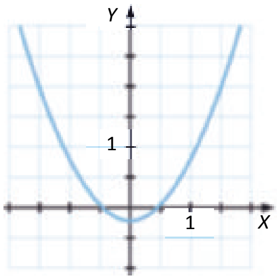
b) $a = 1,\ b = 0,\ c = \frac{1}{4} \rightarrow$ Vértice: $\left(0, \frac{-1}{4}\right)$

$a = 1 > 0 \rightarrow$ El vértice es un mínimo.

Corte con el eje *X*: $x^2 - \frac{1}{4} = 0 \rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ x_2 = -\frac{1}{2} \rightarrow \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \end{cases}$

Corte con el eje *Y*: $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
y	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$



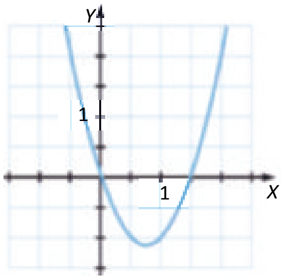
c) $a = 2,\ b = -3,\ c = 0 \rightarrow$ Vértice: $\left(\frac{3}{4}, -\frac{3^2}{4 \cdot 2}\right) = \left(\frac{3}{4}, -\frac{9}{8}\right)$

$a = 2 > 0 \rightarrow$ El vértice es un mínimo.

Corte con el eje *X*: $2x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(2x - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x_2 = \frac{3}{2} \rightarrow \left(\frac{3}{2}, 0\right) \end{cases}$

Corte con el eje *Y*: (0, 0)

x	-1	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{2}$
y	5	0	$-\frac{9}{8}$	-1	0



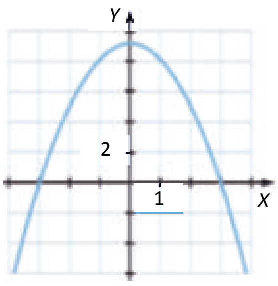
d) $a = -1,\ b = 0,\ c = 9 \rightarrow$ Vértice: $\left(0, \frac{-4 \cdot 9}{-4}\right) = (0, 9)$

$a = -1 < 0 \rightarrow$ El vértice es un máximo.

Corte con el eje *X*: $-x^2 + 9 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \rightarrow (3, 0) \\ x_2 = -3 \rightarrow (-3, 0) \end{cases}$

Corte con el eje *Y*: (0, 9)

x	-3	-1	0	1	3
y	0	8	9	8	0



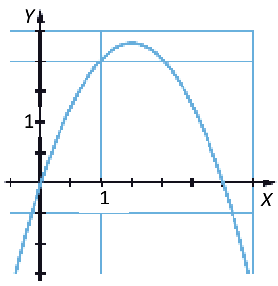
e) $a = -1,\ b = 3,\ c = 0 \rightarrow$ Vértice: $\left(\frac{-3}{-2}, -\frac{3^2}{-4}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$

$a = -1 < 0 \rightarrow$ El vértice es un máximo.

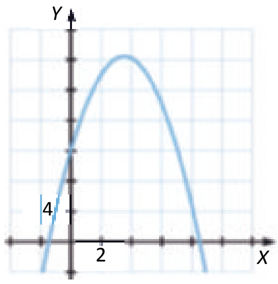
Corte con el eje *X*: $-x^2 + 3x = 0 \rightarrow x(-x + 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x_2 = 3 \rightarrow (3, 0) \end{cases}$

Corte con el eje *Y*: (0, 0)

x	-1	0	1	$\frac{3}{2}$	3
y	-4	0	2	$\frac{9}{4}$	0



f) $a = 4$, $b = -1$, $c = 0 \rightarrow$ Vértice: $\left(\frac{1}{2 \cdot 4}, -\frac{1^2}{4 \cdot 4}\right) = \left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}\right)$



$a = 4 > 0 \rightarrow$ El vértice es un mínimo.

Corte con el eje *X:* $4x^2 - x = 0 \rightarrow x(4x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow (0,0) \\ x_2 = \frac{1}{4} \rightarrow \left(\frac{1}{4}, 0\right) \end{cases}$

Corte con el eje *Y:* (0, 0)

Construimos una tabla de valores alrededor del vértice.

x	-1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	1
y	5	0	$-\frac{1}{16}$	0	3

18. Página 207

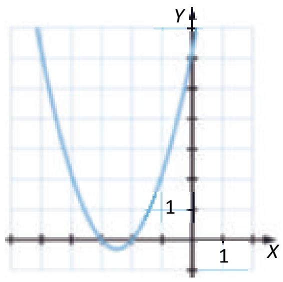
a) $a = 1$, $b = 5$, $c = 6 \rightarrow$ Vértice: $\left(\frac{-5}{2}, \frac{-5^2 + 4 \cdot 6}{4}\right) = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

$a = 1 > 0 \rightarrow$ El vértice es un mínimo.

Corte con el eje *X:* $x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \rightarrow (-2,0) \\ x_2 = -3 \rightarrow (-3,0) \end{cases}$

Corte con el eje *Y:* (0, 6)

x	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	0	1
y	0	$\frac{1}{4}$	0	6	12



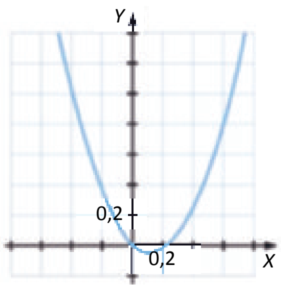
b) $a = -1$, $b = 7$, $c = 12 \rightarrow$ Vértice: $\left(\frac{-7}{2 \cdot (-1)}, \frac{-7^2 + 4 \cdot (-1) \cdot 12}{4 \cdot (-1)}\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{97}{4}\right)$

$a = -1 < 0 \rightarrow$ El vértice es un máximo.

Corte con el eje *X:* $-x^2 + 7x + 12 = 0 \rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 12}}{2 \cdot (-1)} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7 + \sqrt{97}}{2} \\ x_2 = \frac{7 - \sqrt{97}}{2} \end{cases}$

Corte con el eje *Y:* (0, 12)

x	-1	0	1	$\frac{7}{2}$	4	6
y	4	12	16	$\frac{97}{4}$	24	18



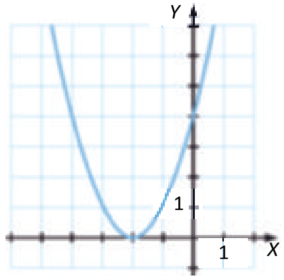
c) $a=1$, $b=4$, $c=4 \rightarrow$ Vértice: $\left(\frac{-4}{2},\frac{-4^2+4\cdot 4}{4}\right)=(-2,0)$

$a=1>0 \rightarrow$ El vértice es un mínimo.

Corte con el eje *X*: $x^2+4x+4=0 \rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 4}}{2} \rightarrow x_1=-2 \rightarrow (-2,0)$

Corte con el eje *Y*: (0, 4)

x	−4	−3	−2	−1	0
y	4	1	0	1	4



d) $a=-1$, $b=1$, $c=-6 \rightarrow$ Vértice: $\left(\frac{-1}{2\cdot(-1)},\frac{-1^2+4\cdot(-1)\cdot(-6)}{4\cdot(-1)}\right)=\left(\frac{1}{2},-\frac{23}{4}\right)$

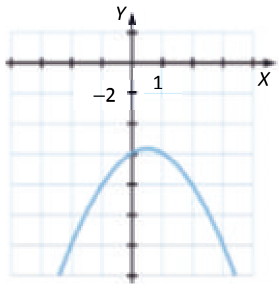
$a=-1<0 \rightarrow$ El vértice es un máximo.

Corte con el eje *X*: $-x^2+x-6=0 \rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot(-1)\cdot(-6)}}{2\cdot(-1)}=\frac{-1\pm\sqrt{-23}}{-2}$

$\rightarrow$ No corta al eje *X*.

Corte con el eje *Y*: (0, −6)

x	−2	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	−12	−6	$-\frac{23}{4}$	−6	−8



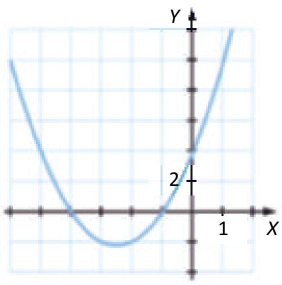
e) $a=1$, $b=5$, $c=4 \rightarrow$ Vértice: $\left(\frac{-5}{2},\frac{-5^2+4\cdot 4}{4}\right)=\left(-\frac{5}{2},-\frac{9}{4}\right)$

$a=1>0 \rightarrow$ El vértice es un mínimo.

Corte con el eje *X*: $x^2+5x+4=0 \rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 4}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \rightarrow (-1,0) \\ x_2=-4 \rightarrow (-4,0) \end{cases}$

Corte con el eje *Y*: (0, 4)

x	−4	$-\frac{5}{2}$	−2	−1	0
y	0	$-\frac{9}{4}$	−2	0	4



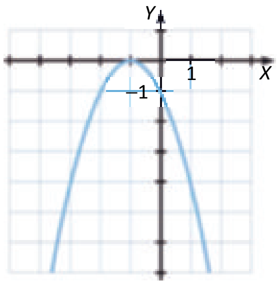
f) $a = -1$, $b = -2$, $c = -1 \rightarrow$ Vértice: $\left(-\dfrac{-2}{-2}, \dfrac{-2^2+4}{-4}\right) = (-1, 0)$

$a = -1 < 0 \rightarrow$ El vértice es un máximo.

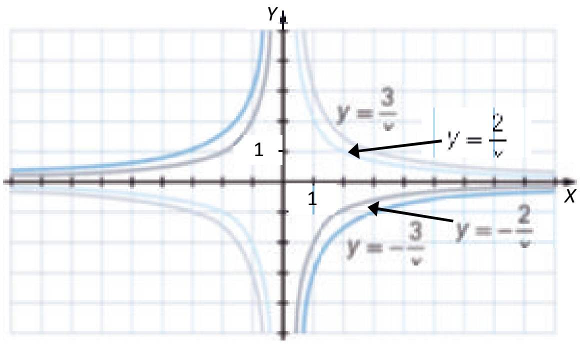
Corte con el eje *X:* $-x^2 - 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-1)} \rightarrow x_1 = -1 \rightarrow (-1, 0)$

Corte con el eje *Y:* (0, −1)

x	−3	−2	−1	0	1
y	−4	−1	0	−1	−4



19. Página 208



20. Página 208

$$y = \frac{k}{x} \xrightarrow{x=1, y=-2} k = -2 \rightarrow y = -\frac{2}{x}$$

21. Página 208

Sea *f*(*x*) la gráfica verde y *g*(*x*) la gráfica roja.

f(*x*) es una función de proporcionalidad inversa que pasa por el punto (1,2):

$$f(x) = \frac{k}{x} \xrightarrow{x=1, y=2} k = 2 \rightarrow f(x) = \frac{2}{x}$$

g(*x*) es una función de proporcionalidad inversa que pasa por el punto (−2,2):

$$g(x) = \frac{k}{x} \xrightarrow{x=-2, y=2} k = -4 \rightarrow g(x) = -\frac{4}{x}$$

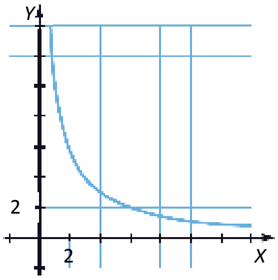
22. Página 209

$1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 12 \rightarrow$ Es una función de proporcionalidad inversa.

La constante de proporcionalidad es $k = 12 > 0 \rightarrow$ La función es decreciente y está en el 1.er y 3.er cuadrantes.

Sea x los días e y el número de obreros, entonces $y = \frac{12}{x}$.

Representamos solo la gráfica en el primer cuadrante, ya que no hay obreros ni días de trabajo negativos.



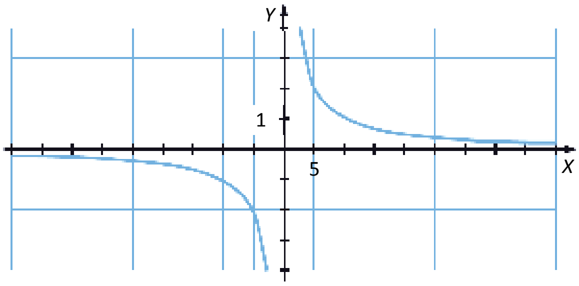
(Para obtener resultados realistas solo podemos considerar los casos en que nos dé un número de obreros entero, lo otro son aproximaciones del número de obreros que habría que considerar o plantear el contratar a una persona una parte de la jornada, ya que aunque podemos considerar una parte de un día, no podemos considerar una parte de un obrero)

23. Página 209

$x \cdot y = 10 \rightarrow y = \frac{10}{x} \rightarrow k = 10 > 0 \rightarrow$ La gráfica es creciente y está en los cuadrantes 1.º y 3.º.

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica:

x	−10	−5	−1	1	5	10
y	−1	−2	−10	10	2	1



24. Página 209

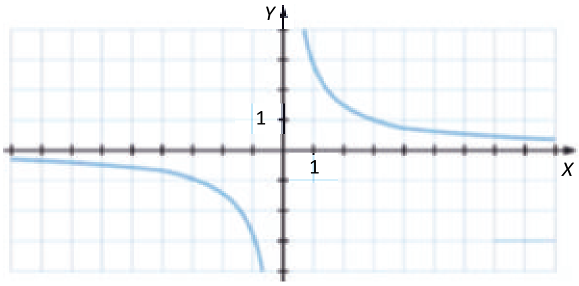
Es una función de proporcionalidad inversa.

$1 \cdot 3 = -2 \cdot a = b \cdot 1 = c \cdot (-0{,}75) = 3 \rightarrow a = -\frac{3}{2} = -1{,}5; b = 3; c = -\frac{3}{0{,}75} = -4$

La constante de proporcionalidad es $k = 3 > 0 \rightarrow$ La función es decreciente y está en el 1.er y 3.er cuadrantes.

Representamos la gráfica teniendo en cuenta los valores de la tabla

x	1	−2	3	−4
y	3	−1,5	1	−0,75



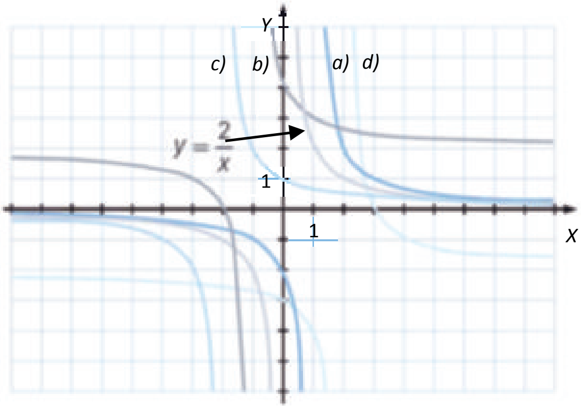
25. Página 210

$y = \frac{2}{x} \rightarrow k = 2 > 0 \rightarrow$ La función es decreciente y la gráfica está en los cuadrantes 1.º y 3.º.

Realizamos una tabla de valores:

x	−3	−2	−1	1	2	3
y	$-\frac{2}{3}$	−1	−2	2	1	$\frac{2}{3}$

Representamos la gráfica y las otras funciones desplazando los ejes de simetría a partir de ésta.



26. Página 210

$f(x)=\frac{1}{x} \rightarrow y=-\frac{1}{x} \rightarrow y=-f(x) \rightarrow$ Para representar la gráfica de $y=-\frac{1}{x}$ tenemos que representar la función simétrica respecto al eje *Y* de $y=\frac{1}{x}$.

27. Página 210

La función $g(x)$ es la función $f(x)$ trasladada 1 unidad a la derecha y 2 unidades hacia arriba.

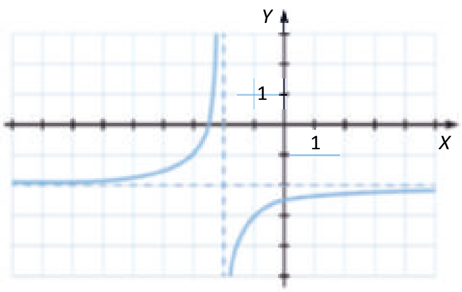
Su expresión algebraica es $g(x)=\frac{1}{x-1}+2$.

28. Página 211

a) $a=-2$, $b=-2 \longrightarrow$ Las asíntotas son $x=-2$ e $y=-2$.

$k=-1<0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en el 2.º y 4.º cuadrantes.

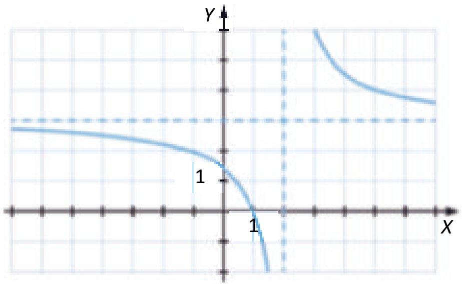
Dibujamos la gráfica de $y=-\frac{1}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.



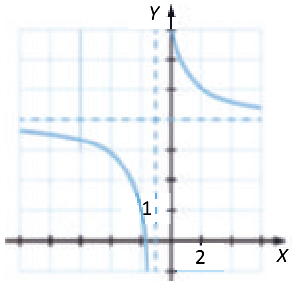
b) $a=2$, $b=3 \longrightarrow$ Las asíntotas son $x=2$ e $y=3$.

$k=3>0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en el 1.º y 3.º cuadrantes.

Dibujamos la gráfica de $y=\frac{3}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.



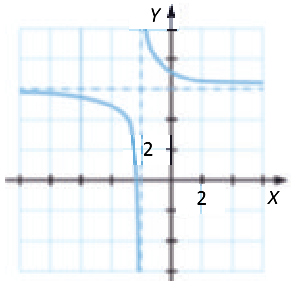
29. Página 211



a) $a = -1$, $b = 4 \longrightarrow$ Las asíntotas son $x = -1$ e $y = 4$.

$k = 3 > 0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en el 1.º y 3.º cuadrante.

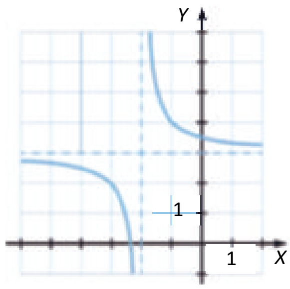
Dibujamos la gráfica de $y = \frac{3}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.



b) $a = -2$, $b = 6 \longrightarrow$ Las asíntotas son $x = -2$ e $y = 6$.

$k = 2 > 0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en el 1.º y 3.º cuadrante.

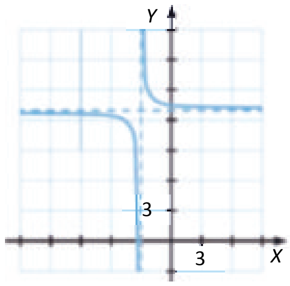
Dibujamos la gráfica de $y = \frac{2}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.



c) $a = -2$, $b = 3 \longrightarrow$ Las asíntotas son $x = -2$ e $y = 3$.

$k = 1 > 0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en el 1.º y 3.º cuadrante.

Dibujamos la gráfica de $y = \frac{1}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.

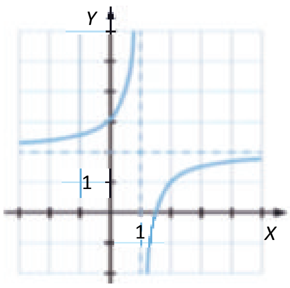


d) $a = -3$, $b = 13 \longrightarrow$ Las asíntotas son $x = -3$ e $y = 13$.

$k = 4 > 0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en el 1.º y 3.º cuadrante.

Dibujamos la gráfica de $y = \frac{4}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.

30. Página 211



a) $a = 1$, $b = 2 \longrightarrow$ Las asíntotas son $x = 1$ e $y = 2$.

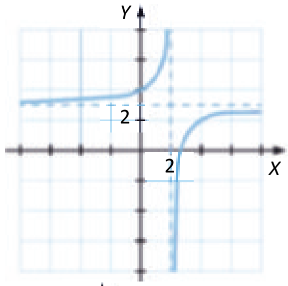
$k = -1 < 0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en el 2.º y 4.º cuadrante.

Dibujamos la gráfica de $y = -\frac{1}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.

b) $a = 2$, $b = 3 \longrightarrow$ Las asíntotas son $x = 2$ e $y = 3$.

$k = -2 < 0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en el 2.º y 4.º cuadrante.

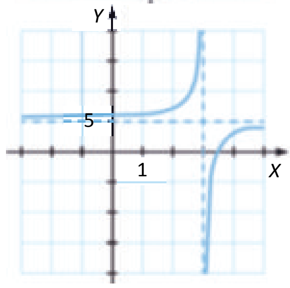
Dibujamos la gráfica de $y = -\dfrac{2}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.



c) $a = 3$, $b = 5 \longrightarrow$ Las asíntotas son $x = 3$ e $y = 5$.

$k = -2 < 0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en el 2.º y 4.º cuadrante.

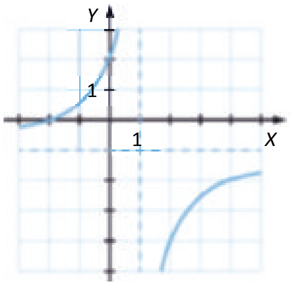
Dibujamos la gráfica de $y = -\dfrac{2}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.



d) $a = 1$, $b = -1 \longrightarrow$ Las asíntotas son $x = 1$ e $y = -1$.

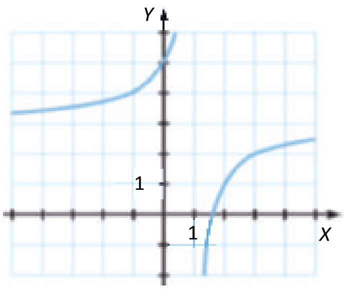
$k = -3 < 0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en el 2.º y 4.º cuadrante.

Dibujamos la gráfica de $y = -\dfrac{3}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.

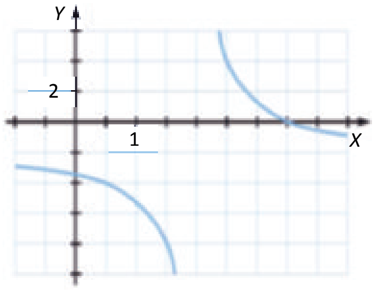


31. Página 211

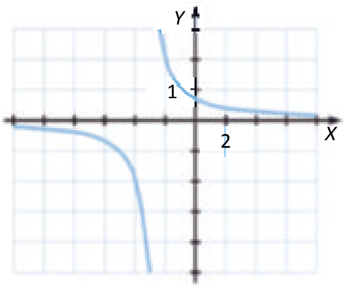
a)



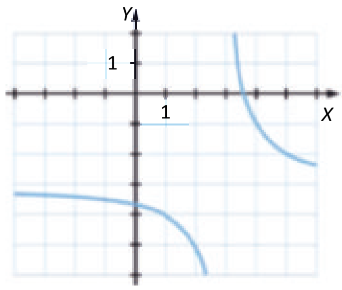
c)



b)



d)



32. Página 211

$f(x)=\dfrac{k}{x-a}+b \rightarrow$ Las asíntotas son $x=-2$ e $y=-1 \rightarrow a=-2, b=-1$. La función pasa por el punto (1,0).

$f(x)=\dfrac{k}{x+2}-1 \xrightarrow{x=1, y=0} 0=\dfrac{k}{3}-1 \rightarrow k=3 \rightarrow f(x)=\dfrac{3}{x+2}-1$

ACTIVIDADES FINALES

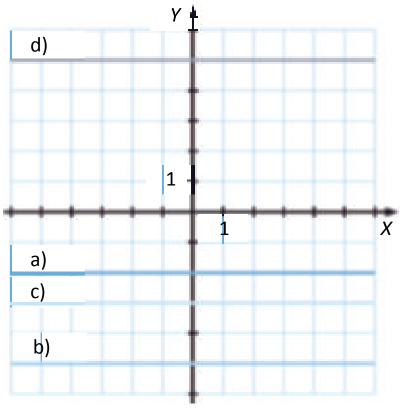
33. Página 212

a) Es una función de proporcionalidad directa por ser una recta que pasa por el origen de coordenadas.

b) Es una función lineal por ser una recta de pendiente y ordenada en el origen distintas de cero.

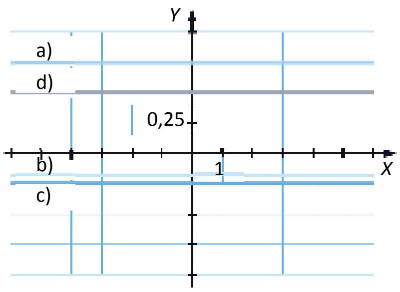
34. Página 212

Son funciones constantes.



35. Página 212

Son funciones constantes.



36. Página 212

Son funciones de proporcionalidad directa, pasan por (0, 0).

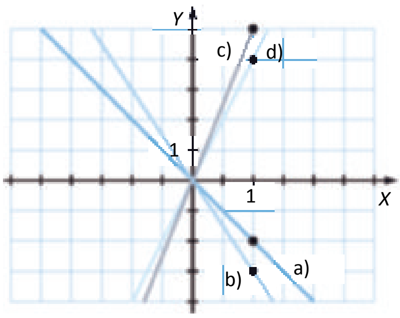
Para hallar su representación gráfica, calculamos un punto de la función además del (0, 0).

a) $f(1)=-2\cdot 1=-2$

b) $f(1)=-3\cdot 1=-3$

c) $f(1)=5\cdot 1=5$

d) $f(1)=4\cdot 1=4$

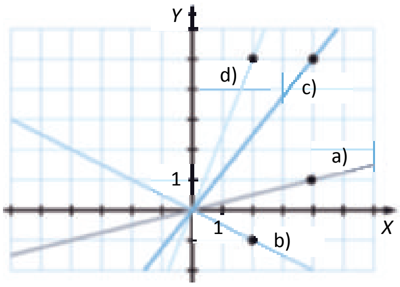


37. Página 212

Son funciones de proporcionalidad directa, pasan por (0, 0).

Para hallar su representación gráfica, calculamos un punto de la función además del (0, 0).

a) $f(4) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$ b) $f(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$ c) $f(4) = \frac{5}{4} \cdot 4 = 5$ d) $f(2) = \frac{5}{2} \cdot 2 = 5$



38. Página 212

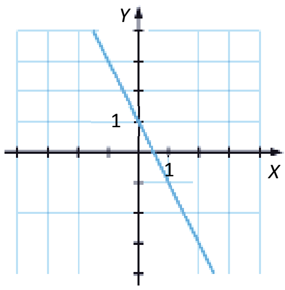
a) Función lineal

$m = -2 < 0 \rightarrow$ Función decreciente

Ordenada en el origen $\rightarrow n = 1$

Punto de corte con el eje $Y \rightarrow (0, 1)$

$f(x) = -2x + 1 \xrightarrow{x=1} f(1) = -1 \rightarrow (1, -1)$



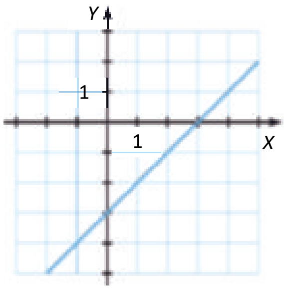
c) Función lineal

$m = 1 > 0 \rightarrow$ Función creciente

Ordenada en el origen $\rightarrow n = -3$

Punto de corte con el eje $Y \rightarrow (0, -3)$

$f(x) = x - 3 \xrightarrow{x=1} f(1) = -2 \rightarrow (1, -2)$



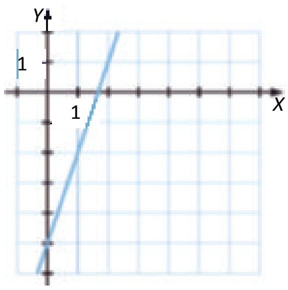
b) Función lineal

$m = 3 > 0 \rightarrow$ Función creciente

Ordenada en el origen $\rightarrow n = -5$

Punto de corte con el eje $Y \rightarrow (0, -5)$

$f(x) = 3x - 5 \xrightarrow{x=1} f(1) = -2 \rightarrow (1, -2)$



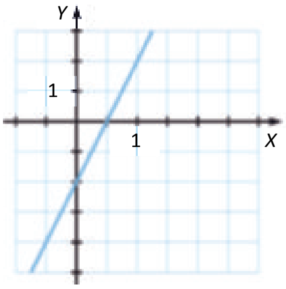
d) Función lineal

$m = 4 > 0 \rightarrow$ Función creciente

Ordenada en el origen $\rightarrow n = -2$

Punto de corte con el eje $Y \rightarrow (0, -2)$

$f(x) = 4x - 2 \xrightarrow{x=1} f(1) = 2 \rightarrow (1, 2)$



39. Página 212

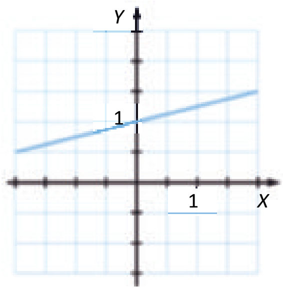
a) Función lineal

$m = \frac{1}{4} > 0 \rightarrow$ Función creciente

Ordenada en el origen $\rightarrow n = 1$

Punto de corte con el eje $Y \rightarrow (0,1)$

$f(x) = \frac{1}{4}x + 1 \xrightarrow{x=1} f(1) = \frac{5}{4} \rightarrow \left(1, \frac{5}{4}\right)$



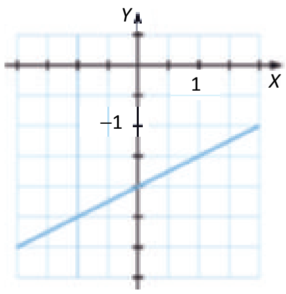
b) Función lineal

$m = \frac{1}{2} > 0 \rightarrow$ Función creciente

Ordenada en el origen $\rightarrow n = -2$

Punto de corte con el eje $Y \rightarrow (0,-2)$

$f(x) = \frac{1}{2}x - 2 \xrightarrow{x=1} f(1) = -\frac{3}{2} \rightarrow \left(1, -\frac{3}{2}\right)$



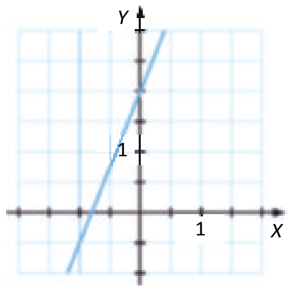
c) Función lineal

$m = \frac{5}{2} > 0 \rightarrow$ Función creciente

Ordenada en el origen $\rightarrow n = 2$

Punto de corte con el eje $Y \rightarrow (0,2)$

$f(x) = \frac{5}{2}x + 2 \xrightarrow{x=-1} f(-1) = \frac{-1}{2} \rightarrow \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$



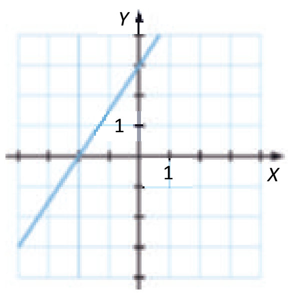
d) Función lineal

$m = \frac{3}{2} > 0 \rightarrow$ Función creciente

Ordenada en el origen $\rightarrow n = 3$

Punto de corte con el eje $Y \rightarrow (0,3)$

$f(x) = \frac{3}{2}x + 3 \xrightarrow{x=-2} f(-2) = 0 \rightarrow (-2,0)$



40. Página 212

a) $f(x) = mx + n \rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ f(0) = 0 \rightarrow n = 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = 3x$

b) $f(x) = mx + n \rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ f(0) = 2 \rightarrow n = 2 \end{cases} \rightarrow f(x) = -x + 2$

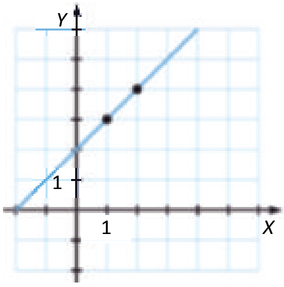
c) $f(x) = mx + n \rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ f(0) = -1 \rightarrow n = -1 \end{cases} \rightarrow f(x) = -2x - 1$

d) $f(x) = mx + n \rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ f(-1) = -2 \rightarrow -3 + n = -2 \rightarrow n = 1 \end{cases} \rightarrow f(x) = 3x + 1$

41. Página 212

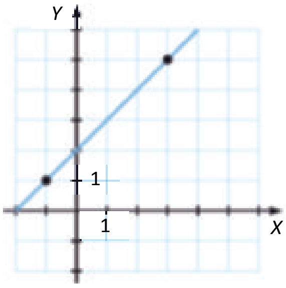
a) $f(x)=mx+n \to \begin{cases} f(1)=3 \\ f(2)=4 \end{cases} \to \begin{cases} m+n=3 \\ 2m+n=4 \end{cases} \to 3-m=4-2m \to m=1$

$n=3-m \xrightarrow{m=1} n=2 \to f(x)=x+2$



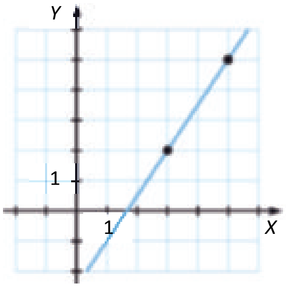
b) $f(x)=mx+n \to \begin{cases} f(-1)=1 \\ f(3)=5 \end{cases} \to \begin{cases} -m+n=1 \\ 3m+n=5 \end{cases} \to 1+m=5-3m \to m=1$

$n=1+m \xrightarrow{m=1} n=2 \to f(x)=x+2$



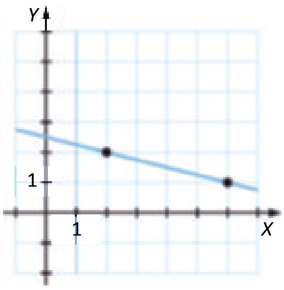
c) $f(x)=mx+n \to \begin{cases} f(3)=2 \\ f(5)=5 \end{cases} \to \begin{cases} 3m+n=2 \\ 5m+n=5 \end{cases} \to 2-3m=5-5m \to m=\frac{3}{2}$

$n=2-3m \xrightarrow{m=\frac{3}{2}} n=-\frac{5}{2} \to f(x)=\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$



d) $f(x)=mx+n \to \begin{cases} f(2)=2 \\ f(6)=1 \end{cases} \to \begin{cases} 2m+n=2 \\ 6m+n=1 \end{cases} \to 2-2m=1-6m \to m=-\frac{1}{4}$

$n=2-2m \xrightarrow{m=-\frac{1}{4}} n=\frac{5}{2} \to f(x)=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{2}$



42. Página 212

$$f(x)=mx+n \rightarrow \begin{matrix} f(1)=3 \\ f(3)=5 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} m+n=3 \\ 3m+n=5 \end{cases} \rightarrow 3-m=5-3m \rightarrow \text{Pendiente: } m=1$$

Ordenada en el origen: $n=3-m \xrightarrow{m=1} n=2$

44. Página 212

a) La recta pasa por los puntos (0, 3) y (–1, 1).

$$f(x)=mx+n \rightarrow \begin{cases} f(0)=3 \rightarrow n=3 \\ f(-1)=1 \rightarrow -m+3=1 \rightarrow m=2 \end{cases} \rightarrow f(x)=2x+3$$

b) La recta pasa por los puntos (0, –1) y (–1, 0).

$$f(x)=mx+n \rightarrow \begin{cases} f(0)=-1 \rightarrow n=-1 \\ f(-1)=0 \rightarrow -m-1=0 \rightarrow m=-1 \end{cases} \rightarrow f(x)=-x-1$$

c) La recta pasa por los puntos (0, 2) y (1, –1).

$$f(x)=mx+n \rightarrow \begin{cases} f(0)=2 \rightarrow n=2 \\ f(1)=-1 \rightarrow m+2=-1 \rightarrow m=-3 \end{cases} \rightarrow f(x)=-3x+2$$

d) La recta pasa por los puntos (0, 2) y (–1, –2).

$$f(x)=mx+n \rightarrow \begin{cases} f(0)=2 \rightarrow n=2 \\ f(-1)=-2 \rightarrow -m+2=-2 \rightarrow m=4 \end{cases} \rightarrow f(x)=4x+2$$

45. Página 212

a) La recta pasa por los puntos (0, 2) y (4, 0).

$$f(x)=mx+n \rightarrow \begin{cases} f(0)=2 \rightarrow n=2 \\ f(4)=0 \rightarrow 4m+2=0 \rightarrow m=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \rightarrow f(x)=-\frac{1}{2}x+2$$

b) La recta pasa por los puntos (0, –3) y (9, 0).

$$f(x)=mx+n \rightarrow \begin{cases} f(0)=-3 \rightarrow n=-3 \\ f(9)=0 \rightarrow 9m-3=0 \rightarrow m=\dfrac{1}{3} \end{cases} \rightarrow f(x)=\frac{1}{3}x-3$$

c) La recta pasa por los puntos (0, 1) y (–3, –1).

$$f(x)=mx+n \rightarrow \begin{cases} f(0)=1 \rightarrow n=1 \\ f(-3)=-1 \rightarrow -3m+1=-1 \rightarrow m=\dfrac{2}{3} \end{cases} \rightarrow f(x)=\frac{2}{3}x+1$$

d) La recta pasa por los puntos (0, 0) y (3, 4).

$$f(x)=mx+n \rightarrow \begin{cases} f(0)=0 \rightarrow n=0 \\ f(3)=4 \rightarrow 3m=4 \rightarrow m=\dfrac{4}{3} \end{cases} \rightarrow f(x)=\frac{4}{3}x$$

46. Página 213

a) Es la función constante $y=2$.

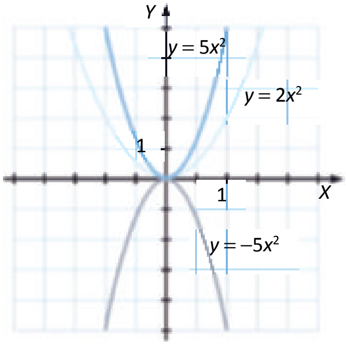
b) Es la función constante $y=-1$.

47. Página 213

El vértice de las parábolas es el punto (0, 0) y su eje de simetría es el eje Y.

Construimos tablas de valores alrededor del vértice y después dibujamos las parábolas.

	−2	−1	0	1	2
$-5x^2$	−20	−5	0	−5	−20
$5x^2$	20	5	0	5	20
$2x^2$	8	2	0	2	8

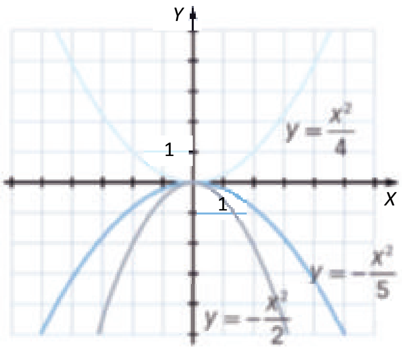


48. Página 213

El vértice de las parábolas es el punto (0, 0) y su eje de simetría es el eje Y.

Construimos tablas de valores alrededor del vértice y después dibujamos las parábolas.

	−2	−1	0	1	2
$x^2/4$	1	1/4	0	1/4	1
$-x^2/5$	−4/5	−1/5	0	−1/5	−4/5
$-x^2/2$	−2	−1/2	0	−1/2	−2



49. Página 213

Son parábolas con vértice (0, 0). Son funciones de la forma $f(x) = ax^2$

a) Pasa por el punto (1, 3) $\rightarrow f(1) = 3 \rightarrow a = 3 \rightarrow f(x) = 3x^2$

b) Pasa por el punto (3, 3) $\rightarrow f(3) = 3 \rightarrow a \cdot 3^2 = 3 \rightarrow a = \frac{1}{3} \rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^2$

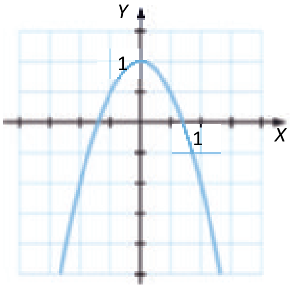
50. Página 213

a) Vértice: (0, 1)

$a = -2 < 0 \rightarrow$ El vértice es un máximo.

Su eje de simetría es el eje *Y*.

x	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
y	-1	0	1	0	-1

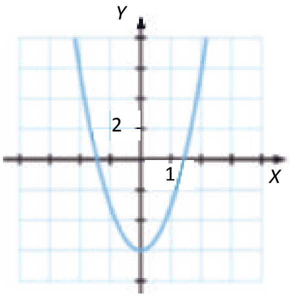


b) Vértice: (0, −6)

$a = 3 > 0 \rightarrow$ El vértice es un mínimo.

Su eje de simetría es el eje *Y*.

x	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$
y	0	-3	-6	-3	0

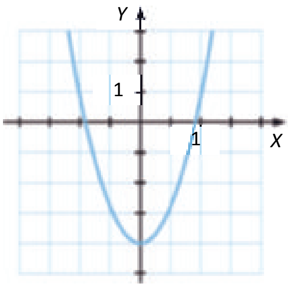


c) Vértice: (0, −4)

$a = 5 > 0 \rightarrow$ El vértice es un mínimo.

Su eje de simetría es el eje *Y*.

x	-1	$-\frac{2}{\sqrt{5}}$	0	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	1
y	1	0	-4	0	1

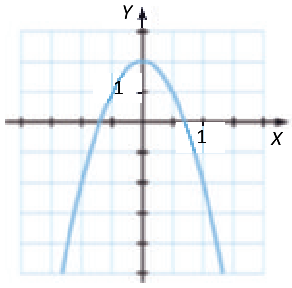


d) Vértice: (0, 2)

$a = -4 < 0 \rightarrow$ El vértice es un máximo.

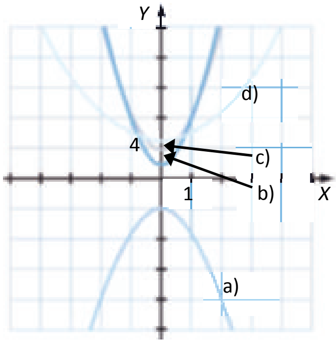
Su eje de simetría es el eje *Y*.

x	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
y	-2	0	2	0	-2



51. Página 213

Procediendo de manera análoga al ejercicio anterior tenemos:



52. Página 213

a) El vértice es (0, −3), por tanto la función es de la forma $f(x) = ax^2 - 3$.

Pasa por el punto (1, 0) $\rightarrow f(1) = 0 \rightarrow a - 3 = 0 \rightarrow a = 3 \rightarrow f(x) = 3x^2 - 3$.

b) El vértice es (0, 1), por tanto la función es de la forma $f(x) = ax^2 + 1$.

Pasa por el punto (1, −1) $\rightarrow f(1) = -1 \rightarrow a + 1 = -1 \rightarrow a = -2 \rightarrow f(x) = -2x^2 + 1$.

c) El vértice es (0,0), por tanto la función es de la forma $f(x) = ax^2$.

Pasa por el punto (2, 2) $\rightarrow f(2) = 2 \rightarrow 4a = 2 \rightarrow a = \frac{1}{2} \rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

d) El vértice es (0, 3), por tanto la función es de la forma $f(x) = ax^2 + 3$.

Pasa por el punto (2, 1) $\rightarrow f(2) = 1 \rightarrow 4a + 3 = 1 \rightarrow a = -\frac{1}{2} \rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$.

53. Página 213

a) El vértice es (0, 1), por tanto la función es de la forma $f(x) = ax^2 + 1$.

Pasa por el punto (2, 2) $\rightarrow f(2) = 2 \rightarrow 4a + 1 = 2 \rightarrow a = \frac{1}{4} \rightarrow f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$.

b) El vértice es (0, –1), por tanto la función es de la forma $f(x) = ax^2 - 1$.

Pasa por el punto (2, –3) $\rightarrow f(2) = -3 \rightarrow 4a - 1 = -3 \rightarrow a = -\frac{1}{2} \rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 1$.

c) El vértice es (0, 1), por tanto la función es de la forma $f(x) = ax^2 + 1$.

Pasa por el punto (3, –2) $\rightarrow f(3) = -2 \rightarrow 9a + 1 = -2 \rightarrow a = -\frac{1}{3} \rightarrow f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 1$.

d) El vértice es (0, –4), por tanto la función es de la forma $f(x) = ax^2 - 4$.

Pasa por el punto (1, –1) $\rightarrow f(1) = -1 \rightarrow a - 4 = -1 \rightarrow a = 3 \rightarrow f(x) = 3x^2 - 4$.

54. Página 213

Vértice: $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a}\right)$ Eje de simetría: $-\frac{b}{2a}$

a) $a = 1$, $b = -4 \longrightarrow$ Vértice: (2, –4)

Eje de simetría: $x = 2$

b) $a = 3$, $b = -9 \longrightarrow$ Vértice: $\left(\frac{3}{2}, -\frac{27}{4}\right)$

Eje de simetría: $x = \frac{3}{2}$

c) $a = -1$, $b = 8 \longrightarrow$ Vértice: (4, 16)

Eje de simetría: $x = 4$

d) $a = 1$, $b = -6 \longrightarrow$ Vértice: (3, –9)

Eje de simetría: $x = 3$

55. Página 213

a) Vértice: (–1, –2) Eje de simetría: $x = -1$

Puntos de corte con el eje X: (–2, 0) y (0, 0) Punto de corte con el eje Y: (0, 0)

b) Vértice: (1, –1) Eje de simetría: $x = 1$

Puntos de corte con el eje X: (2, 0) y (0, 0) Punto de corte con el eje Y: (0, 0)

c) Vértice: (–1, 1) Eje de simetría: $x = -1$

Puntos de corte con el eje X: (–2, 0) y (0, 0) Punto de corte con el eje Y: (0, 0)

d) Vértice: (–2, 6) Eje de simetría: $x = -2$

Puntos de corte con el eje X: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y $\left(-\frac{9}{2}, 0\right)$ Punto de corte con el eje Y: (0, 2)

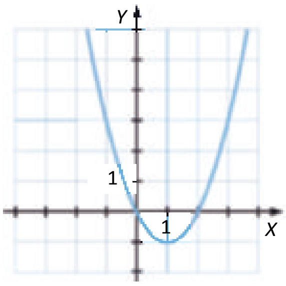
56. Página 213

Vértice: $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a}\right)$ Eje de simetría: $-\frac{b}{2a}$

a) $a = 1$, $b = -2 \longrightarrow$ Vértice: $(1, -1)$ y eje de simetría: $x = 1$

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica:

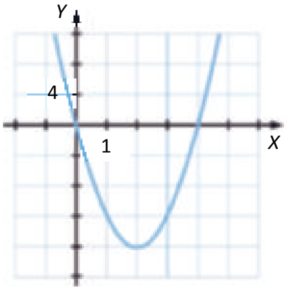
x	–1	0	1	2	3
y	3	0	–1	0	3



b) $a = 4$, $b = -16 \longrightarrow$ Vértice: $(2, -16)$ y eje de simetría: $x = 2$

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica:

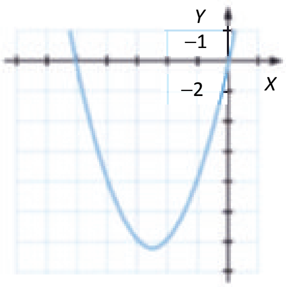
x	0	1	2	3	4
y	0	–12	–16	–12	0



c) $a = 2$, $b = 10 \longrightarrow$ Vértice: $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{25}{2}\right)$ y eje de simetría: $x = -\frac{5}{2}$

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica:

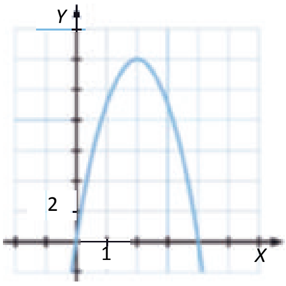
x	–5	–3	$-\frac{5}{2}$	–2	0
y	0	–12	$-\frac{25}{2}$	–12	0



d) $a = -3$, $b = 12 \rightarrow$ Vértice: (2, 12) y eje de simetría: $x = 2$

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica:

x	0	1	2	3	4
y	0	9	12	9	0



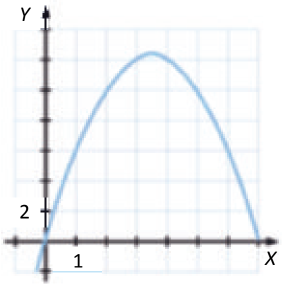
57. Página 213

Vértice: $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a}\right)$ Eje de simetría: $-\frac{b}{2a}$

a) $a = -1$, $b = 7 \rightarrow$ Vértice: $\left(\frac{7}{2}, \frac{49}{4}\right)$ y eje de simetría: $x = \frac{7}{2}$

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica:

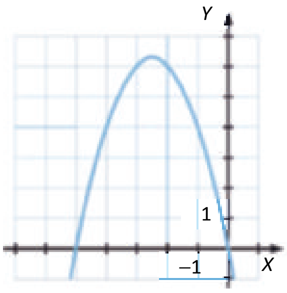
x	0	2	$\frac{7}{2}$	5	7
y	0	10	$\frac{49}{4}$	10	0



b) $a = -1$, $b = -5 \rightarrow$ Vértice: $\left(-\frac{5}{2}, \frac{25}{4}\right)$ y eje de simetría: $x = -\frac{5}{2}$

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica:

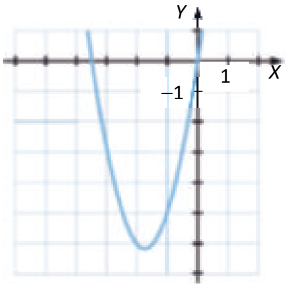
x	–5	–4	$-\frac{5}{2}$	–1	0
y	0	4	$\frac{25}{4}$	4	0



c) $a = 2$, $b = 7 \longrightarrow$ Vértice: $\left(-\frac{7}{4}, -\frac{49}{8}\right)$ y eje de simetría: $x = -\frac{7}{4}$

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica:

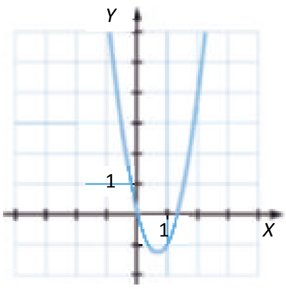
x	-3	-2	$-\frac{7}{4}$	-1	0
y	-3	-6	$-\frac{49}{8}$	-5	0



d) $a = 3$, $b = -4 \longrightarrow$ Vértice: $\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ y eje de simetría: $x = \frac{2}{3}$

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica:

x	-1	0	$\frac{2}{3}$	1	2
y	7	0	$-\frac{4}{3}$	-1	4



58. Página 213

a) $y = (x+1)^2 - 1 \rightarrow y = x^2 + 2x$. Vértice $\xrightarrow{a=1, b=2} (-1, -1)$

Es la función representada por la gráfica azul.

b) $y = -(x+2)^2 + 4 \rightarrow y = -x^2 - 4x$. Vértice $\xrightarrow{a=-1, b=-4} (-2, 4)$

Es la función representada por la gráfica verde.

c) $y = 2(x+1)^2 - 2 \rightarrow y = 2x^2 + 4x$. Vértice $\xrightarrow{a=2, b=4} (-1, -2)$

Es la función representada por la gráfica rosa.

d) $y = -(x-3)^2 + 5 \rightarrow y = -x^2 + 6x - 4$. Vértice $\xrightarrow{a=-1, b=6, c=-4} (3, 5)$

Es la función representada por la gráfica roja.

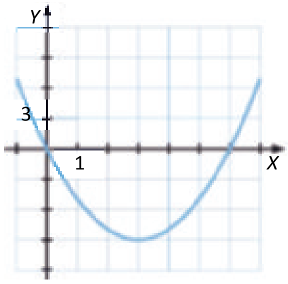
59. Página 214

a) Vértice: (3, –9)

Eje de simetría: $x = 3$

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica:

x	0	2	3	4	6
y	0	–8	–9	–8	0

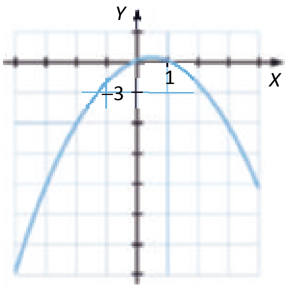


b) Vértice: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

Eje de simetría: $x = \frac{1}{2}$

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica:

x	–1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	–2	0	$\frac{1}{4}$	0	–2

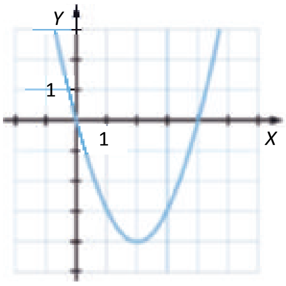


c) Vértice: (2, –4)

Eje de simetría: $x = 2$

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica:

x	0	1	2	3	4
y	0	–3	–4	–3	0

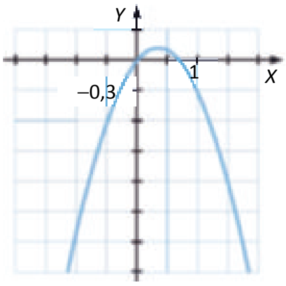


d) Vértice: $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{9}\right)$

Eje de simetría: $x=\frac{1}{3}$

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica:

x	-1	0	$\frac{1}{3}$	1	2
y	$-\frac{5}{3}$	0	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{8}{3}$



60. Página 214

Pasa por el punto (0, 0) $\rightarrow y=ax^2+bx$

Su vértice es (–1, 2) $\rightarrow y=a(x+1)^2+2$

Pasa por el punto (–2, 0) $\xrightarrow{x=-2,y=0} 0=a+2\rightarrow a=-2\rightarrow y=-2(x+1)^2+2\rightarrow y=-2x^2-4x$

61. Página 214

Pasa por el punto (0, 0) $\rightarrow y=ax^2+bx$

Su vértice es (2, 4) $\rightarrow y=a(x-2)^2+4$

Pasa por el punto (4, 0) $\xrightarrow{x=4,y=0} 0=4a+4\rightarrow a=-1\rightarrow y=-(x-2)^2+4\rightarrow y=-x^2+4x$

62. Página 214

a) $a=2$, $b=10$, $c=12$. Vértice: $\left(-\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right)$ y eje de simetría: $x=-\frac{5}{2}$

Puntos de corte con el eje *X*: $2x^2+10x+12=0\rightarrow x=\frac{-10\pm\sqrt{10^2-4\cdot 2\cdot 12}}{2\cdot 2}\rightarrow\begin{cases}x_1=-3\rightarrow(-3,0)\\x_2=-2\rightarrow(-2,0)\end{cases}$

Punto de corte con el eje *Y*: $y=12\rightarrow(0,12)$

b) $a=1$, $b=-6$, $c=-7$. Vértice: (3, –16) y eje de simetría: $x=3$

Puntos de corte con el eje *X*: $x^2-6x-7=0\rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{6^2+4\cdot 7}}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=7\rightarrow(7,0)\\x_2=-1\rightarrow(-1,0)\end{cases}$

Punto de corte con el eje *Y*: $y=-7\rightarrow(0,-7)$

c) $a = 1$, $b = -8$, $c = 15$. Vértice: $(4, -1)$ y eje de simetría: $x = 4$.

Puntos de corte con el eje X: $x^2 - 8x + 15 = 0 \rightarrow x = \dfrac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 15}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \rightarrow (5,0) \\ x_2 = 3 \rightarrow (3,0) \end{cases}$

Punto de corte con el eje Y: $y = 15 \rightarrow (0,15)$

d) $a = 1$, $b = 9$, $c = 18$. Vértice: $\left(-\dfrac{9}{2}, -\dfrac{9}{4}\right)$ y eje de simetría: $x = -\dfrac{9}{2}$

Puntos de corte con el eje X: $x^2 + 9x + 18 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 18}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \rightarrow (-3,0) \\ x_2 = -6 \rightarrow (-6,0) \end{cases}$

Punto de corte con el eje Y: $y = 18 \rightarrow (0,18)$

63. Página 214

Vértice: $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2}{4a}\right)$ Eje de simetría: $-\dfrac{b}{2a}$

a) $a = 1$, $b = 2$, $c = -3 \rightarrow$ Vértice: $(-1, -4)$ Eje de simetría: $x = -1$

b) $a = -2$, $b = 4$, $c = 6 \rightarrow$ Vértice: $(1, 8)$ Eje de simetría: $x = 1$

c) $a = -5$, $b = 1$, $c = -1 \rightarrow$ Vértice: $\left(\dfrac{1}{10}, -\dfrac{19}{20}\right)$ Eje de simetría: $x = \dfrac{1}{10}$

d) $a = 2$, $b = -2$, $c = 3 \rightarrow$ Vértice: $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$ Eje de simetría: $x = \dfrac{1}{2}$

64. Página 214

$f(x)$ gráfica verde, $g(x)$ gráfica roja, $h(x)$ gráfica morada.

$f(x) \rightarrow$ Vértice: $(0,0)$, eje de simetría: $x = 0$. El vértice es un mínimo. Ramas hacia arriba.

$g(x) \rightarrow$ Vértice: $(0,1)$, eje de simetría: $x = 0$. El vértice es un máximo. Ramas hacia abajo.

$h(x) \rightarrow$ Vértice: $(-2,1)$, eje de simetría: $x = -2$. El vértice es un mínimo. Ramas hacia arriba.

65. Página 214

a) $a = 1$, $b = 6$, $c = 8$. Vértice: $\left(-3, \dfrac{-6^2 + 4 \cdot 8}{4}\right) = (-3, -1)$

$a = 1 > 0 \rightarrow$ El vértice es un mínimo.

Corte con el eje X: $x^2 + 6x + 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \rightarrow (-2,0) \\ x_2 = -4 \rightarrow (-4,0) \end{cases}$

Corte con el eje Y: $y = 8 \rightarrow (0,8)$

x	–4	–3	–2	–1	0
y	0	–1	0	3	8

b) $a=1$, $b=4$, $c=-5$. Vértice: $\left(-2,\frac{-4^2-4\cdot 5}{4}\right)=(-2,-9)$

$a=1>0 \rightarrow$ El vértice es un mínimo.

Corte con el eje *X*: $x^2+4x-5=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=1 \rightarrow (1,0) \\ x_2=-5 \rightarrow (-5,0) \end{cases}$

Corte con el eje *Y*: $y=-5 \rightarrow (0,-5)$

x	−5	−3	−2	0	1
y	0	−8	−9	−5	0

c) $a=-1$, $b=-6$, $c=-8$. Vértice: $\left(-3,\frac{-6^2+4\cdot 8}{-4}\right)=(-3,1)$

$a=-1<0 \rightarrow$ El vértice es un máximo.

Corte con el eje *X*: $-x^2-6x-8=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=-2 \rightarrow (-2,0) \\ x_2=-4 \rightarrow (-4,0) \end{cases}$

Corte con el eje *Y*: $y=-8 \rightarrow (0,-8)$

x	−4	−3	−2	−1	0
y	0	1	0	−3	−8

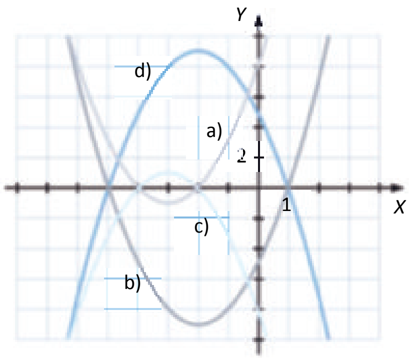
d) $a=-1$, $b=-4$, $c=5$. Vértice: $\left(-2,\frac{-4^2-4\cdot 5}{-4}\right)=(-2,9)$

$a=-1<0 \rightarrow$ El vértice es un máximo.

Corte con el eje *X*: $-x^2-4x+5=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=1 \rightarrow (1,0) \\ x_2=-5 \rightarrow (-5,0) \end{cases}$

Corte con el eje *Y*: $y=5 \rightarrow (0,5)$

x	−5	−3	−2	0	1
y	0	8	9	5	0



66. Página 214

Sea *f*(*x*) la gráfica roja, *g*(*x*) la gráfica azul y *h*(*x*) la gráfica verde.

El vértice es $(0,0) \rightarrow f(x)=ax^2$. Ramas hacia arriba.

El vértice es $(0,3) \rightarrow g(x)=ax^2+3$. Ramas hacia arriba.

El vértice es $(-1,0)$ y no pasa por $(0,0) \rightarrow h(x)=ax^2+bx+c$. Ramas hacia abajo.

67. Página 214

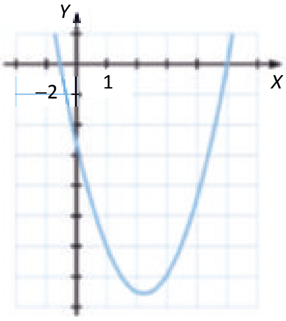
a) $a = 2$, $b = -9$, $c = -5$. Vértice: $\left(-\frac{-9}{2\cdot 2}, \frac{-9^2 - 4\cdot 5\cdot 2}{4\cdot 2}\right) = \left(\frac{9}{4}, -\frac{121}{8}\right)$

$a = 2 > 0 \rightarrow$ El vértice es un mínimo.

Puntos de corte con el eje *X*: $2x^2 - 9x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 + 4\cdot 5\cdot 2}}{2\cdot 2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \rightarrow (5,0) \\ x_2 = -\frac{1}{2} \rightarrow \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \end{cases}$

Puntos de corte con el eje *Y*: $y = -5 \rightarrow (0,-5)$

x	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{9}{4}$	5
y	21	0	-5	$-\frac{121}{8}$	0



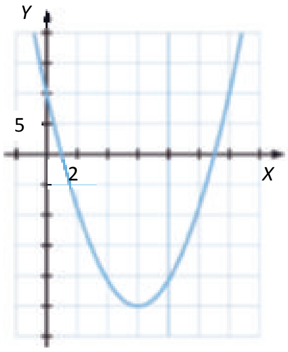
b) $a = 1$, $b = -12$, $c = 11$. Vértice: $\left(6, \frac{-12^2 + 4\cdot 11}{4}\right) = (6,-25)$

$a = 1 > 0 \rightarrow$ El vértice es un mínimo.

Puntos de corte con el eje *X*: $x^2 - 12x + 11 = 0 \rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4\cdot 11}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 11 \rightarrow (11,0) \\ x_2 = 1 \rightarrow (1,0) \end{cases}$

Puntos de corte con el eje *Y*: $y = 11 \rightarrow (0,11)$

x	0	1	6	8	11
y	11	0	−25	−21	0



68. Página 214

a) $y = (x+1)^2 + 1 \rightarrow y = x^2 + 2x + 2$

Vértice: $(-1,1)$ Eje de simetría: $x = -1$ $a = 1 > 0 \rightarrow$ El vértice es un mínimo.

b) $y=-(x-4)^2-2 \rightarrow y=-x^2+8x-18$

Vértice: $(4,-2)$ Eje de simetría: $x=4$ $a=-1<0 \rightarrow$ El vértice es un máximo.

c) $y=2(x-1)^2-5 \rightarrow y=2x^2-4x-3$

Vértice: $(1,-5)$ Eje de simetría: $x=1$ $a=2>0 \rightarrow$ El vértice es un mínimo.

d) $y=-(x+5)^2+3 \rightarrow y=-x^2-10x-22$

Vértice: $(-5,3)$ Eje de simetría: $x=-5$ $a=-1<0 \rightarrow$ El vértice es un máximo.

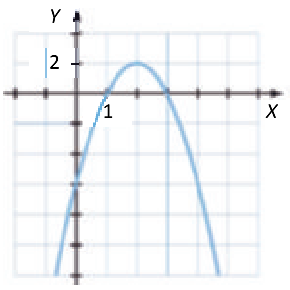
69. Página 214

Vértice: $(2,2) \rightarrow f(x)=a(x-2)^2+2 \xrightarrow{a=-2} f(x)=-2x^2+8x-6$

Puntos de corte con el eje *X:* $-2x^2+8x-6=0 \rightarrow x=\dfrac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot2\cdot6}}{-2\cdot2} \rightarrow \begin{cases} x_1=1 \rightarrow (1,0) \\ x_2=3 \rightarrow (3,0) \end{cases}$

Punto de corte con el eje *Y:* $y=-6 \rightarrow (0,-6)$

x	0	1	2	3	4
y	−6	0	2	0	−6



70. Página 214

a) Vértice: $(3,0) \rightarrow$ Corresponde a la gráfica azul.

b) Eje de simetría: $x=-\dfrac{3}{2} \rightarrow$ Corresponde a la gráfica verde.

c) Vértice: $(0,-1) \rightarrow$ Corresponde a la gráfica roja.

d) $a<0 \rightarrow$ El vértice es un máximo $\rightarrow$ Corresponde a la gráfica morada.

71. Página 214

a) $f(x)=ax^2+bx+c$

Pasa por el punto $(0,2) \rightarrow f(0)=2 \rightarrow c=2$

$\begin{cases} f(-2)=0 \\ f(2)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a-2b+2=0 \\ 4a+2b+2=0 \end{cases} \rightarrow 2a+1=-2a-1 \rightarrow a=-\dfrac{1}{2}$

$b=2a+1 \xrightarrow{a=-\frac{1}{2}} b=0 \rightarrow f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+2$

b) $f(x)=ax^2+bx+c$

Pasa por el punto $(0,-3)\rightarrow f(0)=-3\rightarrow c=-3$

$$\begin{cases} f(-4)=0 \\ f(4)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 16a-4b-3=0 \\ 16a+4b-3=0 \end{cases} \rightarrow \frac{16a-3}{4}=\frac{-16a+3}{4}\rightarrow a=\frac{3}{16}$$

$$b=\frac{16a-3}{4}\xrightarrow{a=\frac{3}{16}} b=0\rightarrow f(x)=\frac{3}{16}x^2-3$$

c) $f(x)=ax^2+bx+c$

$$\begin{cases} f(1)=0 \\ f(5)=0 \\ f(3)=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ 25a+5b+c=0 \\ 9a+3b+c=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c=-a-b \\ 25a+5b-a-b=0\rightarrow b=-6a \\ 9a+3b-a-b=3\xrightarrow{b=-6a} a=-\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=-6a \\ c=5a \end{cases} \xrightarrow{a=-\frac{3}{4}} \begin{cases} b=\frac{9}{2} \\ c=-\frac{15}{4} \end{cases} \rightarrow f(x)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}x-\frac{15}{4}$$

d) $f(x)=ax^2+bx+c$

$$\begin{cases} f(2)=0 \\ f(4)=0 \\ f(1)=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a+2b+c=0 \\ 16a+4b+c=0 \\ a+b+c=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c=-4a-2b \\ 16a+4b-4a-2b=0\rightarrow b=-6a \\ a+b-4a-2b=1\xrightarrow{b=-6a} a=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=-6a \\ c=8a \end{cases} \xrightarrow{a=\frac{1}{3}} \begin{cases} b=-2 \\ c=\frac{8}{3} \end{cases} \rightarrow f(x)=\frac{1}{3}x^2-2x+\frac{8}{3}$$

73. Página 215

$$y=-x^2+2x+2\xrightarrow{y=x}-x^2+x+2=0\rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot 2}}{-2}\rightarrow \begin{cases} x_1=-1\xrightarrow{y=x}(-1,-1) \\ x_2=2\xrightarrow{y=x}(2,2) \end{cases}$$

74. Página 215

$$y=-x^2+2x+3\xrightarrow{y=x+1}-x^2+x+2=0\rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot 2}}{-2}\rightarrow \begin{cases} x_1=-1\xrightarrow{y=x+1}(-1,0) \\ x_2=2\xrightarrow{y=x+1}(2,3) \end{cases}$$

75. Página 215

La recta $y=mx+n$. Pasa por el punto $(0,3)\rightarrow n=3$ y pasa por $(-3,0)\rightarrow 0=-3m+3\rightarrow m=1$

La recta es $y=x+3$.

La parábola $y=ax^2+bx+c$. Tiene como vértice el punto $(-1,0)\rightarrow y=a(x+1)^2$ y pasa por el punto $(0,1)\rightarrow a=1$.

La parábola es $y=(x+1)^2\rightarrow y=x^2+2x+1$

Los puntos de intersección son $(-2,1)$ y $(1,4)$.

76. Página 215

a) Calculamos la ecuación de la parábola $f(x)=ax^2+bx+c$

Pasa por el punto $(0,0)\rightarrow f(0)=0\rightarrow c=0$

Pasa por los puntos $(1,3)$ y $(3,3)\rightarrow \begin{matrix} f(1)=3 \\ f(3)=3 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ 9a+3b=3 \end{cases} \rightarrow 3-a=1-3a\rightarrow a=-1$

$b=1-3a\xrightarrow{a=-1} b=4\rightarrow f(x)=-x^2+4x$

Vemos ahora dónde se corta con la función dada: $x+2=-x^2+4x\rightarrow x^2-3x+2=0\rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=2 \end{cases}$

Los puntos de corte son (1, 3) y (2, 4).

b) Calculamos la ecuación de la parábola $f(x)=ax^2+bx+c$

Pasa por el punto $(0,2)\rightarrow f(0)=2\rightarrow c=2$

Pasa por los puntos $(-1,5)$ y $(2,2)\rightarrow \begin{matrix} f(-1)=5 \\ f(2)=2 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} a-b+2=5 \\ 4a+2b+2=2 \end{cases} \rightarrow a-3=-2a\rightarrow a=1$

$b=a-3\xrightarrow{a=1} b=-2\rightarrow f(x)=x^2-2x+2$

Calculamos ahora la función lineal $y=mx+n$.

Para por (0, 5) $\rightarrow 5=n$ y pasa por (–4, 0) $\rightarrow 0=-4m+5\rightarrow m=\frac{5}{4}$. Luego $y=\frac{5}{4}x+5$

Vemos ahora dónde se cortan: $\frac{5}{4}x+5=x^2-2x+2\rightarrow x^2-\frac{13}{4}x-3=0\rightarrow 4x^2-13x-12=0\rightarrow \begin{cases} x_1=4 \\ x_2=-\frac{3}{4} \end{cases}$

Los puntos de corte son (4, 10) y $\left(-\frac{3}{4},\frac{65}{16}\right)$

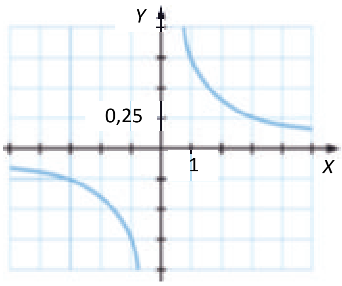
77. Página 215

a)

x	1	2	3	4	5
y	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{20}$

b) $y=\frac{3}{4x}$

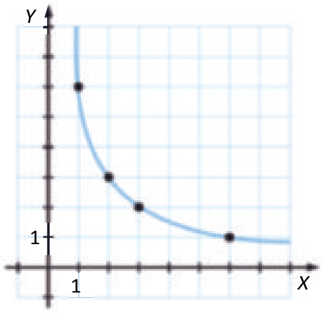
c)



78. Página 215

a) $0{,}02 \cdot 300 = 0{,}1 \cdot 60 = 0{,}2 \cdot 30 = 0{,}5 \cdot 12 = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3 = k = 6 \longrightarrow$ Es una función de proporcionalidad inversa.

b)



c) Los valores de y crecen hasta infinito.

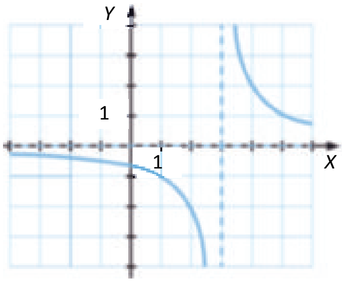
x	0,00001	0,0001	0,001	0,01
y	600 000	60 000	6 000	600

79. Página 215

a) $a = 3$, $b = 0 \longrightarrow$ Las asíntotas son $x = 3$ e $y = 0$.

$k = 2 > 0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 1.º y 3.º.

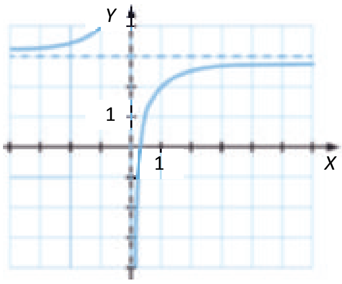
Dibujamos la gráfica de $y = 2/x$ desplazada a los nuevos ejes.



b) $a = 0$, $b = 3 \longrightarrow$ Las asíntotas son $x = 0$ e $y = 3$.

$k = -1 < 0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 2.º y 4.º.

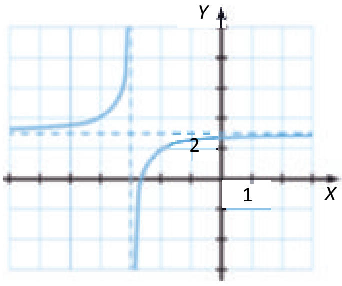
Dibujamos la gráfica de $y = -1/x$ desplazada a los nuevos ejes.



c) $a=-3$, $b=3 \longrightarrow$ Las asíntotas son $x=-3$ e $y=3$.

$k=-1<0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 2.º y 4.º.

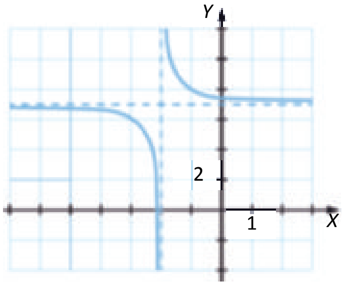
Dibujamos la gráfica de $y=-1/x$ desplazada a los nuevos ejes.



d) $a=-2$, $b=7 \longrightarrow$ Las asíntotas son $x=-2$ e $y=7$.

$k=1>0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 1.º y 3.º.

Dibujamos la gráfica de $y=1/x$ desplazada a los nuevos ejes.



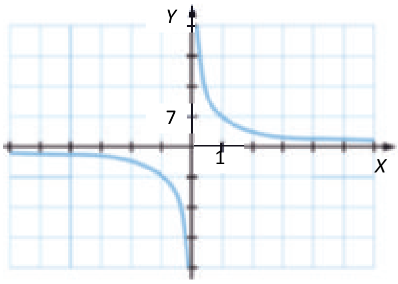
80. Página 215

a) La función no está definida para $x=0$. Es simétrica respecto del origen: $f(-x)=\frac{7}{-x}=-\frac{7}{x}=-f(x)$

$k=7>0 \longrightarrow$ La función es decreciente y la gráfica está en los cuadrantes 1.º y 3.º.

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
y	$-\frac{7}{2}$	-7	-14	14	7	$\frac{7}{2}$

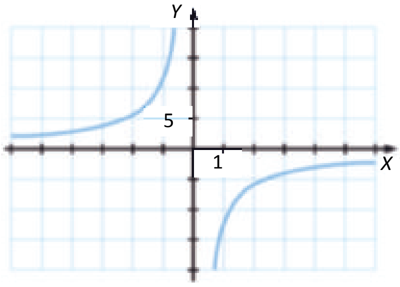


b) La función no está definida para $x = 0$. Es simétrica respecto del origen: $f(-x) = -\frac{11}{-x} = \frac{11}{x} = -f(x)$

$k = -11 < 0 \rightarrow$ La función es creciente y la gráfica está en los cuadrantes 2.º y 4.º.

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica:

x	-3	-2	-1	1	2	3
y	$\frac{11}{3}$	$\frac{11}{2}$	11	-11	$-\frac{11}{2}$	$-\frac{11}{3}$

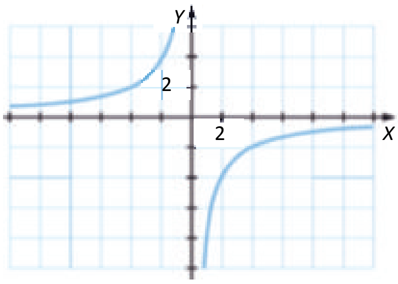


c) La función no está definida para $x = 0$. Es simétrica respecto del origen: $f(-x) = -\frac{8}{-x} = \frac{8}{x} = -f(x)$

$k = -8 < 0 \rightarrow$ La función es creciente y la gráfica está en los cuadrantes 2.º y 4.º.

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
y	4	8	16	-16	-8	-4



81. Página 215

a) Es una función de la forma $f(x) = \frac{k}{x-a} + b$.

Los ejes de simetría son $x = 1$ e $y = 3$, por tanto $a = 1$ y $b = 3$. La función pasa por el punto (2,5).

$$f(x) = \frac{k}{x-1} + 3 \xrightarrow{x=2, y=5} 5 = k + 3 \rightarrow k = 2 \rightarrow f(x) = \frac{2}{x-1} + 3$$

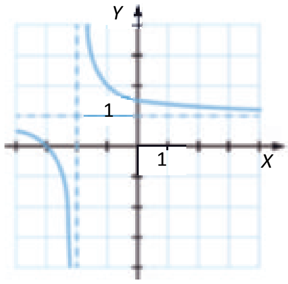
b) Es una función de la forma $f(x) = \frac{k}{x-a} + b$.

Los ejes de simetría son $x = 3$ e $y = 3$, por tanto $a = 3$ y $b = 3$. La función pasa por el punto (4,0).

$$f(x) = \frac{k}{x-3} + 3 \xrightarrow{x=4, y=0} 0 = k + 3 \rightarrow k = -3 \rightarrow f(x) = -\frac{3}{x-3} + 3$$

83. Página 216

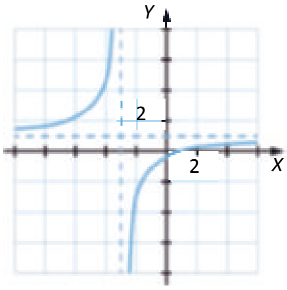
a) $y=\dfrac{x+3}{x+2}=\dfrac{1}{x+2}+1 \rightarrow\ a=-2, b=1 \rightarrow$ Las asíntotas son $x=-2$ e $y=1$.



$k=1>0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 1.º y 3.º.

Dibujamos la gráfica de $y=\dfrac{1}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.

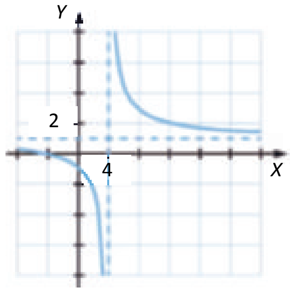
b) $y=\dfrac{x-1}{x+3}=\dfrac{-4}{x+3}+1 \rightarrow\ a=-3, b=1 \rightarrow$ Las asíntotas son $x=-3$ e $y=1$.



$k=-4<0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 2.º y 4.º.

Dibujamos la gráfica de $y=-\dfrac{4}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.

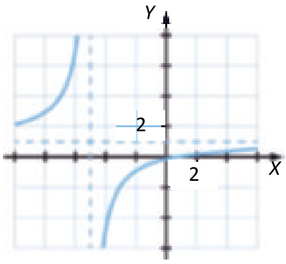
c) $y=\dfrac{x+5}{x-4}=\dfrac{9}{x-4}+1 \rightarrow\ a=4, b=1 \rightarrow$ Las asíntotas son $x=4$ e $y=1$.



$k=9>0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 1.º y 3.º.

Dibujamos la gráfica de $y=\dfrac{9}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.

d) $y=\dfrac{x-1}{x+5}=\dfrac{-6}{x+5}+1 \rightarrow\ a=-5, b=1 \rightarrow$ Las asíntotas son $x=-5$ e $y=1$.

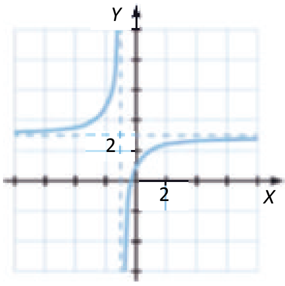


$k=-6<0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 2.º y 4.º.

Dibujamos la gráfica de $y=-\dfrac{6}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.

84. Página 216

a) $y=\dfrac{3x+1}{x+1}=\dfrac{-2}{x+1}+3 \rightarrow\ a=-1, b=3 \rightarrow$ Las asíntotas son $x=-1$ e $y=3$.



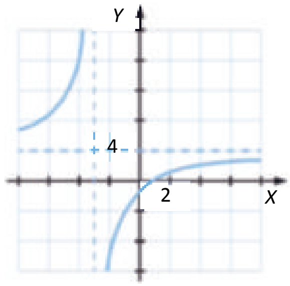
$k=-2<0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 2.º y 4.º.

Dibujamos la gráfica de $y=-\dfrac{2}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.

b) $y=\frac{4x-2}{x+3}=\frac{-14}{x+3}+4 \rightarrow \; a=-3, b=4 \rightarrow$ Las asíntotas son $x=-3$ e $y=4$.

$k=-14<0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 2. º y 4.º.

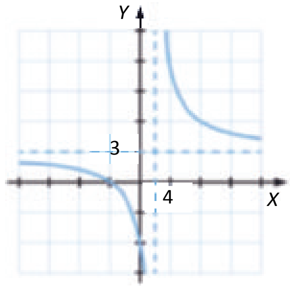
Dibujamos la gráfica de $y=-\frac{14}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.



c) $y=3\frac{x+4}{x-2}=\frac{18}{x-2}+3 \rightarrow \; a=2, b=3 \rightarrow$ Las asíntotas son $x=2$ e $y=3$.

$k=18>0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 1.º y 3.º.

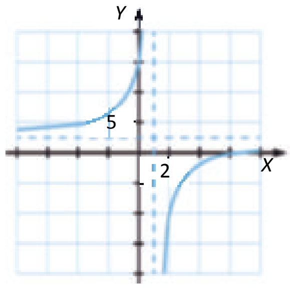
Dibujamos la gráfica de $y=\frac{18}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.



d) $y=2\frac{x-7}{x-1}=\frac{-12}{x-1}+2 \rightarrow \; a=1, b=2 \rightarrow$ Los ejes son $x=1$ e $y=2$.

$k=-12<0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 2.º y 4.º.

Dibujamos la gráfica de $y=-\frac{12}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.



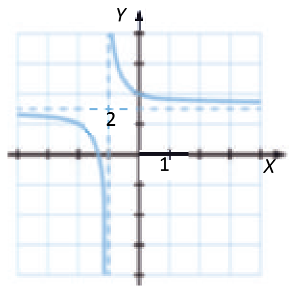
85. Página 216

a) $y=\frac{3x+4}{x+1}=\frac{1}{x+1}+3 \rightarrow \; a=-1, b=3$

Las asíntotas son $x=-1$ e $y=3$.

$k=1>0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 1.º y 3.º.

Dibujamos la gráfica de $y=\frac{1}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.

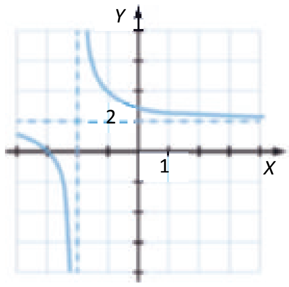


b) $y=\frac{2x+6}{x+2}=\frac{2}{x+2}+2 \rightarrow \; a=-2, b=2$

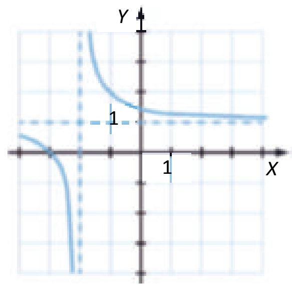
Las asíntotas son $x=-2$ e $y=2$.

$k=2>0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 1.º y 3.º.

Dibujamos la gráfica de $y=\frac{2}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.



c) $y = \dfrac{x+3}{x+2} = \dfrac{1}{x+2} + 1 \rightarrow \; a = -2, b = 1$

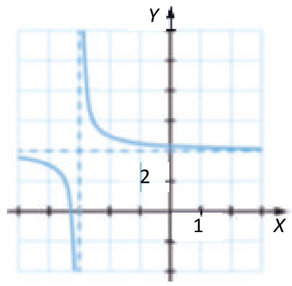


Las asíntotas son $x = -2$ e $y = 1$.

$k = 1 > 0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 1.º y 3.º.

Dibujamos la gráfica de $y = \dfrac{1}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.

d) $y = \dfrac{4x+13}{x+3} = \dfrac{1}{x+3} + 4 \rightarrow \; a = -3, b = 4$



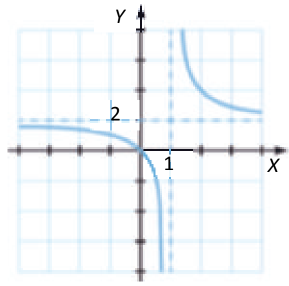
Las asíntotas son $x = -3$ e $y = 4$.

$k = 1 > 0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 1.º y 3.º.

Dibujamos la gráfica de $y = \dfrac{1}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.

86. Página 216

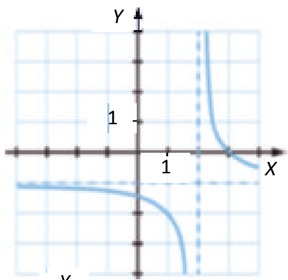
a) $y = \dfrac{2x}{x-1} = \dfrac{2}{x-1} + 2 \rightarrow a = 1, b = 2 \rightarrow$ Las asíntotas son $x = 1$ e $y = 2$.



$k = 2 > 0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 1.º y 3.º.

Dibujamos la gráfica de $y = \dfrac{2}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.

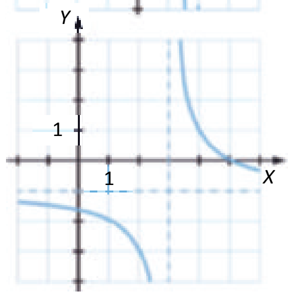
b) $y = \dfrac{3-x}{x-2} = \dfrac{1}{x-2} - 1 \rightarrow \; a = 2, b = -1 \rightarrow$ Las asíntotas son $x = 2$ e $y = -1$.



$k = 1 > 0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 1.º y 3.º.

Dibujamos la gráfica de $y = \dfrac{1}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.

c) $y = \dfrac{5-x}{x-3} = \dfrac{2}{x-3} - 1 \rightarrow \; a = 3, b = -1 \rightarrow$ Los ejes son $x = 3$ e $y = -1$.



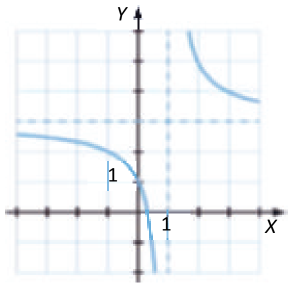
$k = 2 > 0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 1.º y 3.º.

Dibujamos la gráfica de $y = \dfrac{2}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.

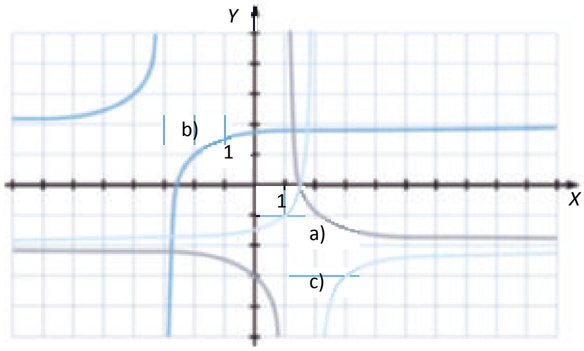
d) $y = \dfrac{3x-1}{x-1} = \dfrac{2}{x-1} + 3 \rightarrow\ a = 1, b = 3 \rightarrow$ Las asíntotas son $x = 1$ e $y = 3$.

$k = 2 > 0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 1.º y 3.º.

Dibujamos la gráfica de $y = \dfrac{2}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.



87. Página 216



88. Página 216

a) Los ejes de simetría son $x = 2$ e $y = 1$. La función es decreciente y la función de la que procede está definida en los cuadrantes 1.º y 3.º.

b) Los ejes de simetría son $x = -2$ e $y = 2$. La función es decreciente y la función de la que procede está definida en los cuadrantes 1.º y 3.º.

c) Los ejes de simetría son $x = 1$ e $y = 2$. La función es creciente y la función de la que procede está definida en los cuadrantes 2.º y 4.º.

d) Los ejes de simetría son $x = -1$ e $y = -2$. La función es creciente y la función de la que procede está definida en los cuadrantes 2.º y 4.º.

89. Página 216

f(*x*) gráfica verde, *g*(*x*) gráfica roja, *h*(*x*) gráfica marrón

Son funciones hiperbólicas de la forma $y = \dfrac{k}{x-a} + b$.

Los ejes de simetría de *f*(*x*) son $x = -1$ e $y = 0$. La gráfica pasa por el punto (0,1).

$$y = \frac{k}{x+1} \xrightarrow{x=0, y=1} k = 1 \rightarrow f(x) = \frac{1}{x+1}$$

Los ejes de simetría de *g*(*x*) son $x = 1$ e $y = 3$. La gráfica pasa por el punto (3,2).

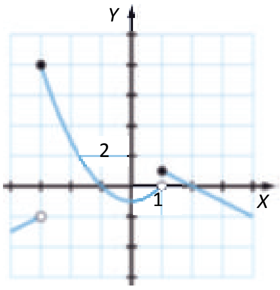
$$y = \frac{k}{x-1} + 3 \xrightarrow{x=3, y=2} 2 = \frac{k}{2} + 3 \rightarrow k = -2 \rightarrow g(x) = \frac{-2}{x-1} + 3$$

Los ejes de simetría de *h*(*x*) son $x = 0$ e $y = 0$. La gráfica pasa por el punto (5,1).

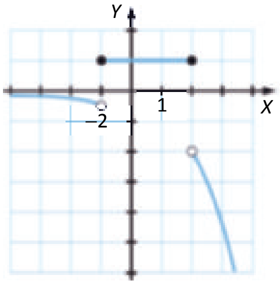
$$y = \frac{k}{x} \xrightarrow{x=5, y=1} k = 5 \rightarrow h(x) = \frac{5}{x}$$

91. Página 216

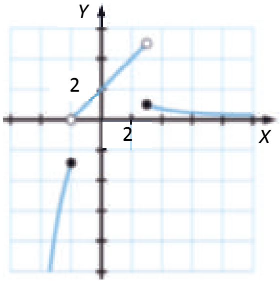
a)



b)



c)



92. Página 217

$h(t)$ es una parábola. Tenemos que $a = -1 \rightarrow$ el vértice es un máximo.

Calculamos el vértice para obtener la altura y el tiempo necesario para alcanzar el punto más alto de la trayectoria $\rightarrow \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a}\right) \xrightarrow{a=-1, b=2} (1,1)$.

La altura máxima es 1 m y el tiempo necesario 1 s.

93. Página 217

a) El punto de ebullición en la cima del Aneto ha disminuido 34,04 décimas de grado. La temperatura de ebullición es 100 − 3,404 = 96,596 °C.

El punto de ebullición en la cima del Everest ha disminuido 88,5 décimas de grado. La temperatura de ebullición es 100 − 8,85 = 91,15 °C.

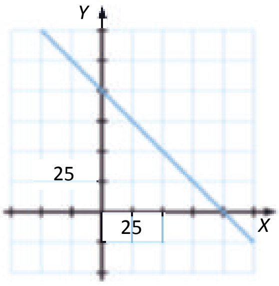
b) Por cada metro de altitud la temperatura disminuye una centésima de décima de grado. La expresión de la función *Temperatura de ebullición del agua (°C)* − *Altitud (m)* viene dada por $f(x) = 100 - \frac{1}{1\,000}x$.

94. Página 217

a) Tenemos que representar la temperatura que debe de ser calentada una sustancia para alcanzar los 100 ºC. Esta función viene dada por $f(x) = 100 - x$, donde x es la temperatura actual de la sustancia.

b)

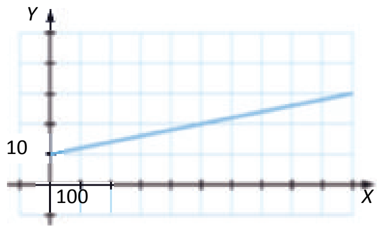
x	0	10	15	20	25
y	100	90	85	80	75



95. Página 217

Gasto	0	25	50	75	100	125	150
Importe	10	10,5	11	11,5	12	12,5	13

$f(x) = 0{,}02x + 10$



96. Página 217

a) La función que representa esta trayectoria es una parábola.

b) $f(x) = ax^2 + bx + c$

El punto más alto de la trayectoria aparece en el vértice de la parábola.

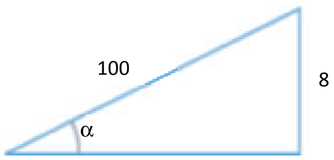
$(2{,}3;3{,}5) \to f(x) = a(x - 2{,}3)^2 + 3{,}5$

El punto de partida es $(0;4{,}6) \to 4{,}6 = a(-2{,}3)^2 + 3{,}5 \to a = 0{,}208$

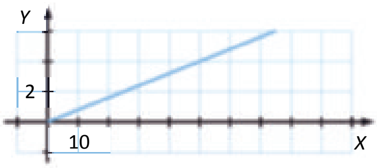
$f(x) = 0{,}208(x - 2{,}3)^2 + 3{,}5$

97. Página 217

Sea x la distancia recorrida y $f(x)$ la altura alcanzada.



$$\frac{8}{100} = \frac{f(x)}{x} \to f(x) = \frac{8x}{100} = \frac{2x}{25}$$



DEBES SABER HACER

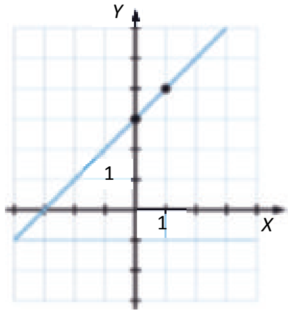
1. Página 217

a) Función lineal

$m=1>0 \rightarrow$ Función creciente

Ordenada en el origen $\rightarrow n=3$ Punto de corte con el eje $Y \rightarrow (0,3)$

$f(x)=x+3 \xrightarrow{x=1} f(1)=4 \rightarrow (1,4)$

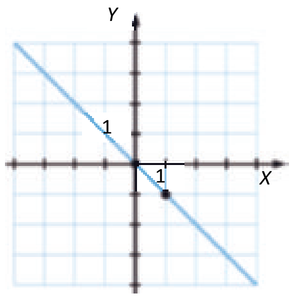


b) Función de proporcionalidad directa

$m=-1<0 \rightarrow$ Función decreciente

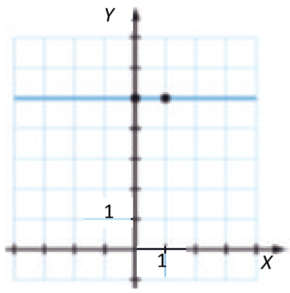
Ordenada en el origen $\rightarrow n=0$ Punto de corte con el eje $Y \rightarrow (0,0)$

$f(x)=-x \xrightarrow{x=1} f(1)=-1 \rightarrow (1,-1)$



c) Función constante

$f(x)=5$



2. Página 217

$y = mx + n \rightarrow$ Ordenada en el origen $\rightarrow n = 5$

Pasa por el punto $(-2,2) \xrightarrow{x=-2,\,y=2} 2 = -2m + 5 \rightarrow m = \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{3}{2}x + 5$

3. Página 217

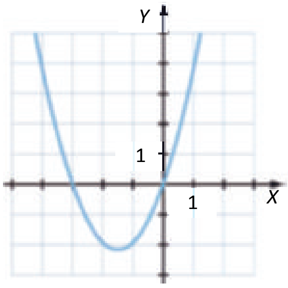
a) $a = 1$, $b = 3$, $c = 0$. Vértice: $\left(\frac{-3}{2}, \frac{-3^2}{4}\right) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$

$a = 1 > 0 \rightarrow$ El vértice es un mínimo.

Corte con el eje X: $x^2 + 3x = 0 \rightarrow (x+3)x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \rightarrow (-3,0) \\ x_2 = 0 \rightarrow (0,0) \end{cases}$

Corte con el eje Y: (0, 0)

x	-4	-3	$-\frac{3}{2}$	0	1
y	4	0	$-\frac{9}{4}$	0	4

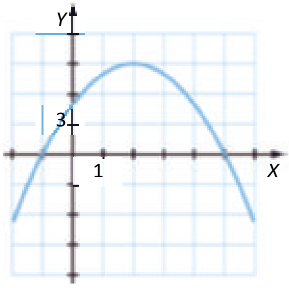


b) $a = -1$, $b = 4$, $c = 5$. Vértice: $\left(\frac{-4}{-2}, \frac{-4^2 - 4 \cdot 5}{-4}\right) = (2,9)$

$a = -1 < 0 \rightarrow$ El vértice es un máximo.

Corte con el eje X: $-x^2 + 4x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 + 4 \cdot 5}}{-2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \rightarrow (-1,0) \\ x_2 = 5 \rightarrow (5,0) \end{cases}$ Corte con el eje Y: (0, 5)

x	-1	0	2	3	5
y	0	5	9	8	0

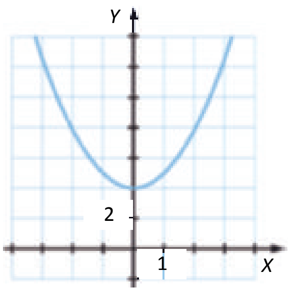


c) $a = 1$, $b = 0$, $c = 4$. Vértice: (0, 4)

$a = 1 > 0 \rightarrow$ El vértice es un mínimo.

Corte con el eje X: $x^2 + 4 = 0 \rightarrow x^2 = -4 \rightarrow$ No tiene solución. Corte con el eje Y: (0, 4)

x	-2	-1	0	1	2
y	8	5	4	5	8



d) $a = 1$, $b = 3$, $c = -1$. Vértice: $\left(\frac{-3}{2}, \frac{-3^2 - 4}{4}\right) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{13}{4}\right)$

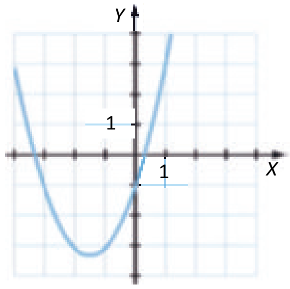
$a = 1 > 0 \rightarrow$ El vértice es un mínimo.

Corte con el eje X: $x^2 + 3x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 + 4}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{13} - 3}{2} \\ x_2 = -\frac{\sqrt{13} + 3}{2} \end{cases}$

Corte con el eje Y: $(0, -1)$

Construimos una tabla de valores alrededor del vértice.

x	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	0	1
y	-1	-3	$-\frac{13}{4}$	-1	3



4. Página 217

a) $x = x^2 + 2 \rightarrow x^2 - x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2}}{2} \rightarrow$ No tiene solución. La intersección es vacía.

b) $-x + 4 = x^2 + 3x + 8 \rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4}}{2} = -2$

$f(x) = -x + 4 \xrightarrow{x=-2} f(x) = 6 \rightarrow$ La intersección es el punto $(-2, 6)$.

c) $5 = x^2 + 5x + 11 \rightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

$f(x) = 5 \xrightarrow{x=-2,\, x=-3} f(x) = 5 \rightarrow$ La intersección son los puntos $(-2, 5)$ y $(-3, 5)$.

5. Página 217

a) $\frac{x+4}{x-2} = \frac{6}{x-2} + 1 \rightarrow$ Los ejes de simetría son $x = 2$ e $y = 1$. Se corresponde con la gráfica azul.

b) $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1} + 1 \rightarrow$ Los ejes de simetría son $x = 1$ e $y = 1$. Se corresponde con la gráfica roja.

c) $\frac{x-1}{x+2} = \frac{-3}{x+2} + 1 \rightarrow$ Los ejes de simetría son $x = -2$ e $y = 1$. Se corresponde con la gráfica verde.

COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

98. Página 218

a) Llamamos x al número de máquinas compradas. La función viene dada por $f(x) = 1200x + 2\,250$.

b) $f(13) = 1\,200 \cdot 13 + 2\,250 = 17\,850$ €.

c) La función que relaciona el coste por mantenimiento con el número de máquinas es $g(x) = x^2 + 100$.

$g(x) \le 500 \to x^2 \le 400 \to -20 \le x \le 20 \to$ Solo nos interesa las cantidades positivas. El máximo de cintas que se pueden comprar para pagar menos de 500 € por el mantenimiento son 20.

FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

99. Página 218

a) $f(x) = ax^2 + bx + c$

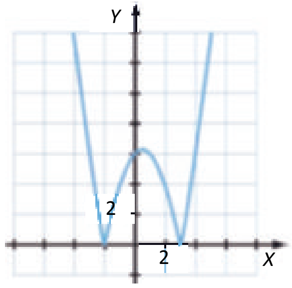
$$\begin{matrix} f(0)=3 \\ f(1)=2 \\ f(-1)=8 \end{matrix} \to \begin{cases} c = 3 \\ a+b+c=2 \xrightarrow{c=3} a+b+1=0 \to a=-b-1 \\ a-b+c=8 \end{cases}$$

$$a-b-5=0 \xrightarrow{a=-b-1} b=-3,\ a=-b-1 \xrightarrow{b=-3} a=2 \to f(x)=2x^2-3x+3$$

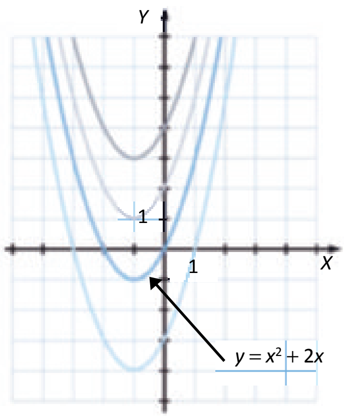
Tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, al resolverlo vemos que tiene una sola solución, por lo que hay una función polinómica de grado 2 que cumpla esas condiciones.

b) Hay infinitas funciones polinómicas de grado superior a 2 que cumplen las condiciones, ya que si construimos el sistema dado, tendremos un sistema de 3 ecuaciones no linealmente dependientes, con al menos 4 incógnitas.

100. Página 218



101. Página 218



La gráfica se desplaza verticalmente según los valores de c.

102. Página 218

a) La gráfica solo alcanza el valor $y = 10$ para un valor de x. Tiene una solución.

b) La gráfica alcanza el valor $y = 2$ para tres valores de x. Tiene tres soluciones.

c) La gráfica alcanza el valor $y = -3$ para dos valores de x. Tiene dos soluciones.

103. Página 218

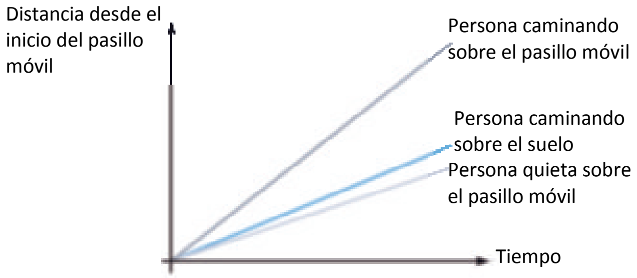
La ecuación tiene tres soluciones para a perteneciente al intervalo $(-3, 5)$.

La ecuación no tiene 4 o más soluciones para ningún valor del parámetro a.

PRUEBAS PISA

104. Página 219

La velocidad de una persona quieta sobre el pasillo móvil, será la diferencia entre las dos velocidades anteriores.



Funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas

11

CLAVES PARA EMPEZAR

1. Página 220

a) $\log_3 81 = 4$ porque $3^4 = 81$

b) $\log_4 16 = 2$ porque $4^2 = 16$

c) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ porque $2^{-3} = \frac{1}{8}$

d) $\log_5 1 = 0$ porque $5^0 = 1$

2. Página 220

a) $sen\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $sen\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $sen\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $sen\frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

g) $cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

h) $cos\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

VIDA COTIDIANA

LA INCUBADORA. Página 221

$3^5 = 243$ bacterias al cabo de 5 horas.

RESUELVE EL RETO

RETO 1. Página 226

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$f(x) = \log_a (-x)$

ACTIVIDADES

1. Página 222

Las gráficas I) y II) son decrecientes entonces $a < 1$. La gráfica II) es más cerrada por tanto:

Gráfica I): $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ y gráfica II): $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$

Las gráficas III) y IV) son crecientes entonces $a > 1$. La gráfica III) es más cerrada por tanto:

Gráfica III): $y = 9^x$ y gráfica IV): $y = 6^x$

2. Página 222

a) $f(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^x$, la función es decreciente ya que $a < 1$.

b) $f(x)=\left(\frac{2}{5}\right)^x$, la función es decreciente ya que $a < 1$ y la gráfica es más cerrada que la anterior ya que a es menor.

c) $f(x)=\left(\frac{5}{2}\right)^x$, la función es creciente ya que $a > 1$.

3. Página 222

Son la misma función.

$$f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x=\left(\frac{1}{\frac{5}{3}}\right)^x=\frac{1}{\left(\frac{5}{3}\right)^x}=\left(\frac{5}{3}\right)^{-x}=g(x)$$

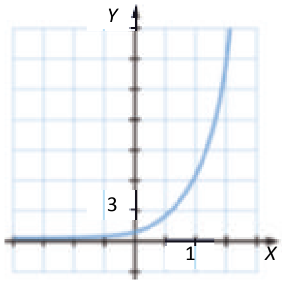
4. Página 223

a) $y=7^x$ es creciente ya que $7 > 1$.

Como es una función exponencial pasa por el punto (0, 1) y en este caso $a=7$, luego pasa por (1, 7).

Construimos una tabla de valores:

x	-1	0	1	$\frac{3}{2}$	2
7^x	$\frac{1}{7}$	1	7	$\sqrt{343}$	49

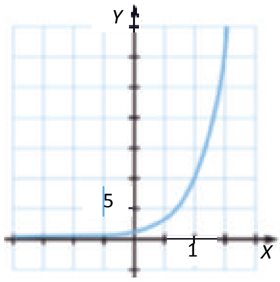


b) $y=10^x$ es creciente ya que $10 > 1$.

Como es una función exponencial pasa por el punto (0, 1) y en este caso $a=10$, luego pasa por (1, 10).

Construimos una tabla de valores:

x	-1	0	1	$\frac{3}{2}$	2
10^x	$\frac{1}{10}$	1	10	$\sqrt{1000}$	100

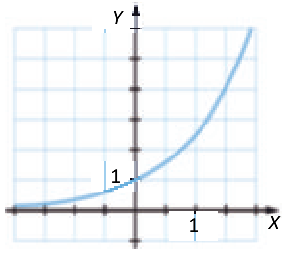


c) $y=2{,}5^x$ es creciente ya que $2{,}5 > 1$.

Como es una función exponencial pasa por el punto (0, 1) y en este caso $a=2{,}5$, luego pasa por (1; 2,5).

Construimos una tabla de valores:

x	-1	0	1	$\frac{3}{2}$	2
$2{,}5^x$	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{5}{2}$	$\sqrt{\frac{125}{8}}$	$\frac{25}{4}$



5. Página 223

La gráfica I) corresponde a la función $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ por ser la más cerrada de las tres ya que tiene el *a* mayor.

Por otro lado $1{,}3<\frac{4}{3}=1{,}33333...$ Luego la gráfica II) se corresponde con $y=\left(\frac{4}{3}\right)^x$ y la gráfica III) con la función $y=1{,}3^x$.

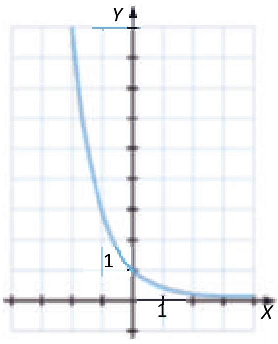
6. Página 223

a) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ es decreciente ya que $\frac{1}{3}<1$.

Como es una función exponencial pasa por el punto (0, 1) y en este caso $a=\frac{1}{3}$, luego pasa por $\left(1,\frac{1}{3}\right)$.

Construimos una tabla de valores:

x	−2	−1	0	1	2
y	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

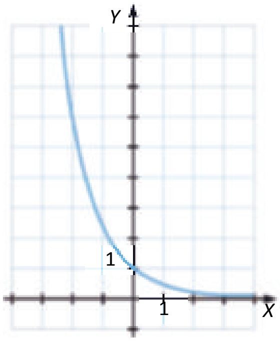


b) $y=\left(\frac{2}{5}\right)^x$ es decreciente ya que $\frac{2}{5}<1$.

Como es una función exponencial pasa por el punto (0, 1) y en este caso $a=\frac{2}{5}$, luego pasa por $\left(1,\frac{2}{5}\right)$.

Construimos una tabla de valores:

x	−2	−1	0	1	2
y	$\frac{25}{4}$	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{25}$

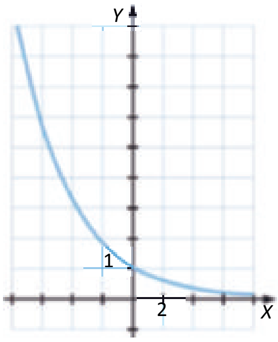


c) $y=\left(\frac{3}{4}\right)^x$ es decreciente ya que $\frac{3}{4}<1$.

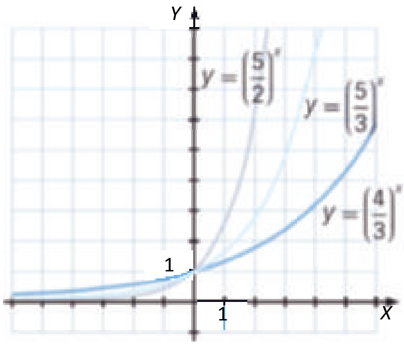
Como es una función exponencial pasa por el punto (0, 1) y en este caso $a=\frac{3}{4}$, luego pasa por $\left(1,\frac{3}{4}\right)$.

Construimos una tabla de valores:

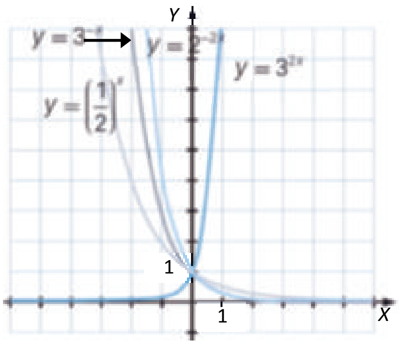
x	−2	−1	0	1	2
y	$\frac{16}{9}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{16}$



7. Página 223



8. Página 223



9. Página 224

La gráfica verde corresponde con la función $f(x)=2^x$ ya que corta en el punto (0,1). La azul con la función $g(x)=2^{x+2}$ ya que se traslada la gráfica de $f(x)=2^x$ 2 unidades hacia a la izquierda. Por último la roja corresponde con la gráfica de $h(x)=2^x+2$ ya que se traslada la gráfica $f(x)=2^x$ 2 unidades hacia arriba.

10. Página 224

A partir de $g(x)=3^x$ se obtendría $f(x)=3^{x-1}+3$, trasladándola 3 unidades hacia arriba y 1 unidad a la derecha.

11. Página 224

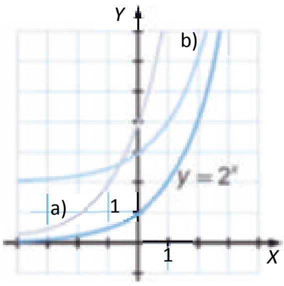
La función $f(x)$ pasa por (0, 1) y (−1, 2), a partir de esos puntos vemos como se traslada la función representada.

$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}-2$ ya que traslada $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ en 2 unidades hacia abajo y 3 hacia la izquierda.

12. Página 225

Representamos $f(x)$ y a partir de ella trasladamos la función, en el caso de $g(x)$ la trasladamos 2 unidades a la izquierda y en el caso de $h(x)$ la trasladamos 2 unidades hacia arriba.

x	−2	−1	0	1	2
f(x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4



13. Página 225

Representamos $f(x)$ y a partir de ella trasladamos la función

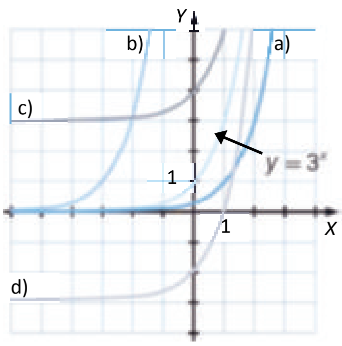
x	−2	−1	0	1	2
f(x)	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

a) Se traslada 1 unidad a la derecha.

b) Se traslada 3 unidades a la izquierda.

c) Se traslada 3 unidades hacia arriba.

d) Se traslada 3 unidades hacia abajo.



14. Página 225

Todas estas funciones son traslaciones de la función $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, como $\frac{1}{2}<1$ todas son decrecientes. La representamos y trasladamos según corresponda.

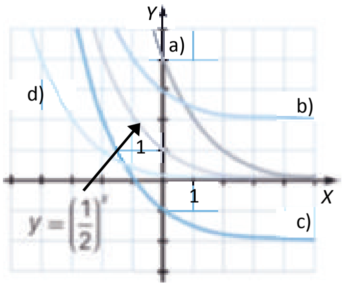
x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

a) Se traslada 2 unidades a la derecha.

b) Se traslada 2 unidades hacia arriba.

c) Se traslada 2 unidades hacia abajo.

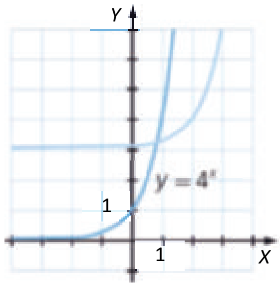
d) Se traslada 2 unidades a la izquierda.



15. Página 225

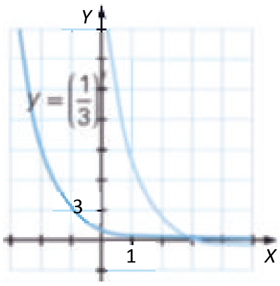
a) $f(x)=4^{x-2}+3$ es traslación de la función 4^x, moviéndola 2 unidades a la derecha y 3 unidades hacia arriba.

x	-1	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	1	4	16



b) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}-1$ es traslación de la función $\left(\frac{1}{3}\right)^x$, moviéndola 3 unidades a la derecha y una hacia abajo.

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	9	3	1	$\frac{1}{3}$



16. Página 226

Las gráficas III) y IV) son decrecientes entonces $a < 1$. La gráfica III) pasa por el punto (5, –1).

Gráfica III): $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ y gráfica IV): $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.

Las gráficas I) y II) son crecientes entonces $a > 1$. La gráfica II) es más cerrada, por tanto:

Gráfica I): $y = \log_2 x$ y gráfica II): $y = \log_5 x$.

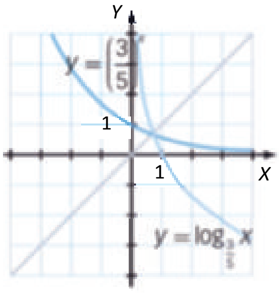
17. Página 226

Las tres pasan por el punto (1, 0).

La a) y c) son crecientes y b) es decreciente. Además, a) es más cerrada que c) porque 2 > 5/3.

La gráfica a) pasa por el punto (2, 1), la b) por el (2/3, 1) y la c) por la (5/3, 1).

18. Página 226



Son simétricas respecto de la recta $y = x$. La composición de las dos es la identidad (son funciones inversas).

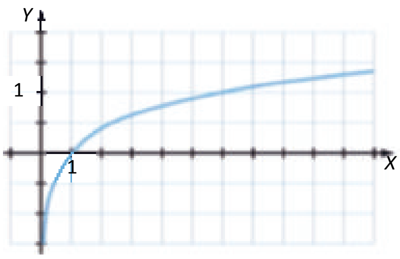
$$\left.\begin{array}{l} g(f(x)) = g\left(\left(\frac{3}{5}\right)^x\right) = \log_{\frac{3}{5}}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^x\right) = x \\ f(g(x)) = f\left(\log_{\frac{3}{5}} x\right) = \left(\frac{3}{5}\right)^{\log_{\frac{3}{5}} x} = x \end{array}\right\}$$

19. Página 227

a) $y = \log_6 x$ es una función creciente ya que 6 > 1. Pasa por los puntos (1, 0) y (6, 1).

Hacemos una tabla con algunos de sus valores:

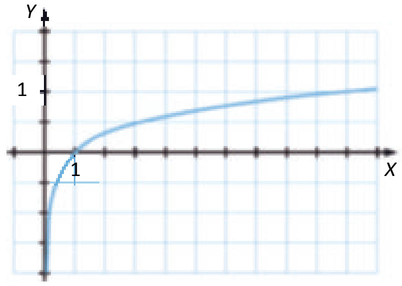
x	$\frac{1}{6}$	1	6	36
$f(x)$	–1	0	1	2



b) $y = \log x$ es una función creciente ya que $10 > 1$. Pasa por los puntos (1, 0) y (10, 1).

Hacemos una tabla con algunos de sus valores:

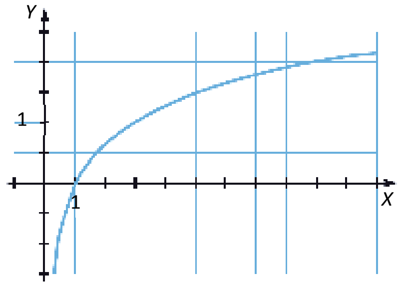
x	$\frac{1}{10}$	1	$\sqrt{10}$	10
***f*(*x*)**	−1	0	$\frac{1}{2}$	1



c) $y = \log_3 x$ es una función creciente ya que $3 > 1$. Pasa por los puntos (1, 0) y (3, 1).

Hacemos una tabla con algunos de sus valores:

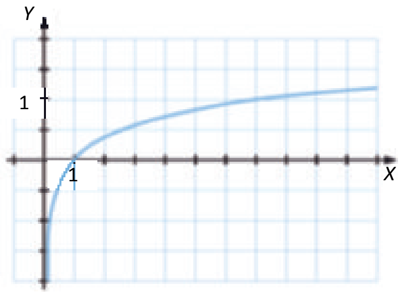
x	$\frac{1}{3}$	1	3	9
***f*(*x*)**	−1	0	1	2



d) $y = \log_7 x$ es una función creciente ya que $7 > 1$. Pasa por los puntos (1, 0) y (7, 1).

Hacemos una tabla con algunos de sus valores:

x	$\frac{1}{7}$	1	$\sqrt{7}$	7
***f*(*x*)**	−1	0	$\frac{1}{2}$	1



20. Página 227

La gráfica verde corresponde con la función $y = \log_2 x$ porque pasa por el punto (2, 1).

La gráfica azul pasa por el punto (7, 1), luego se corresponde con $y = \log_7 x$.

La gráfica roja es la más cerrada, además pasa por (8, 1) por lo que se corresponde con $y = \log_8 x$.

Finalmente, la gráfica morada se corresponde con la función $y = \log_5 x$.

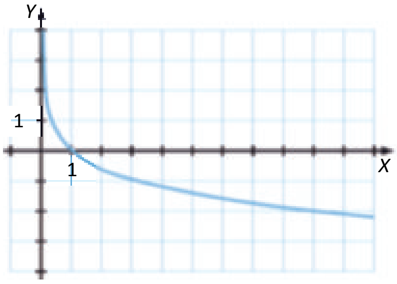
21. Página 227

a) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ es una función decreciente $\frac{1}{3} < 1$.

Pasa por los puntos (1, 0) y $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$.

Hacemos una tabla con algunos de sus valores:

x	$\frac{1}{3}$	1	3	9
***f*(*x*)**	1	0	−1	−2

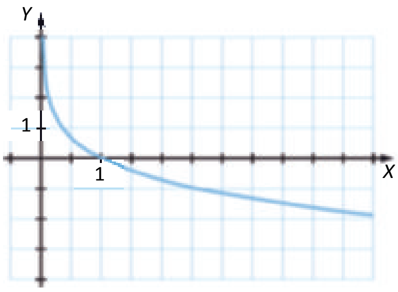


b) $y = \log_{\frac{2}{5}} x$ es una función decreciente $\frac{2}{5} < 1$.

Pasa por los puntos (1, 0) y $\left(\frac{2}{5}, 1\right)$.

Hacemos una tabla con algunos de sus valores:

x	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{4}$
***f*(*x*)**	1	0	−1	−2

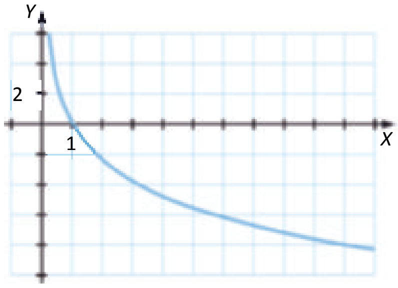


c) $y = \log_{\frac{3}{4}} x$ es una función decreciente $\frac{3}{4} < 1$.

Pasa por los puntos (1, 0) y $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$.

Hacemos una tabla con algunos de sus valores:

x	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{16}{9}$
***f*(*x*)**	1	0	−1	−2

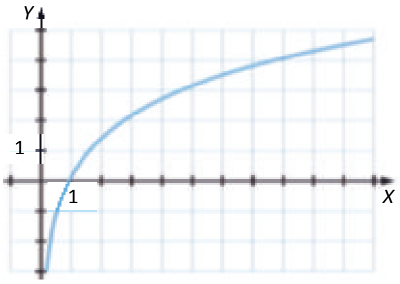


22. Página 227

a) $y = \log_{\frac{5}{3}} x$ es una función creciente $\frac{5}{3} > 1$. Pasa por los puntos (1, 0) y $\left(\frac{5}{3}, 1\right)$.

Hacemos una tabla con algunos de sus valores:

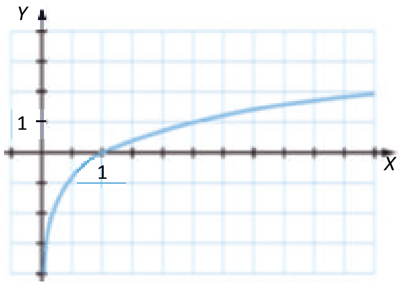
x	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{25}{9}$
***f*(*x*)**	−1	0	1	2



b) $y = \log_{\frac{5}{2}} x$ es una función creciente $\frac{5}{2} > 1$. Pasa por los puntos (1, 0) y $\left(\frac{5}{2}, 1\right)$.

Hacemos una tabla con algunos de sus valores:

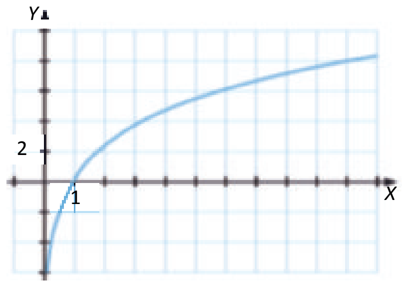
x	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{4}$
***f*(*x*)**	−1	0	1	2



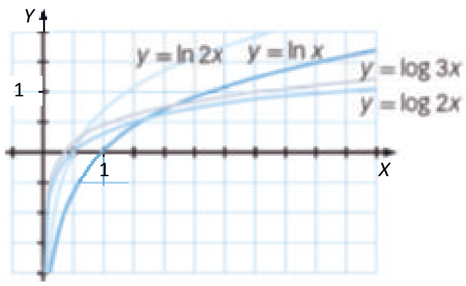
c) $y = \log_{\frac{4}{3}} x$ es una función creciente $\frac{4}{3} > 1$. Pasa por los puntos (1, 0) y $\left(\frac{4}{3}, 1\right)$.

Hacemos una tabla con algunos de sus valores:

x	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{16}{9}$
$f(x)$	−1	0	1	2



23. Página 227



24. Página 228

La gráfica roja corresponde a la función $f(x) = \log x$ ya que pasa (1, 0).

Las otras dos son traslaciones de la roja.

La azul corresponde a la función $h(x) = \log(x+2)$ ya que la traslada 2 unidades a la izquierda a *f*(*x*) y la verde a $g(x) = \log(x-2)$ porque la traslada 2 unidades hacia la derecha.

25. Página 228

Se determinaría trasladándola 3 unidades a la derecha y 1 unidad hacia arriba.

26. Página 228

Como pasa por el (4, 2) y su asíntota es $x = 3$, es una traslación de $y = \log x$ que va 3 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba. Entonces $f(x) = \log(x-3) + 2$.

27. Página 229

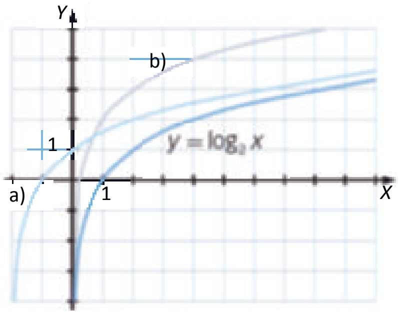
$y = \log_2 x$ es una función creciente 2 > 1.

Pasa por los puntos (1, 0) y (2, 1).

Hacemos una tabla con algunos de sus valores:

x	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	−1	0	1	2

$g(x) = \log_2(x+2)$ 2 unidades a la izquierda y $h(x) = \log_2 x + 2$ 2 unidades hacia arriba.



28. Página 229

$y = \log x$ es una función creciente 10 > 1. Pasa por los puntos (1, 0) y (10, 1).

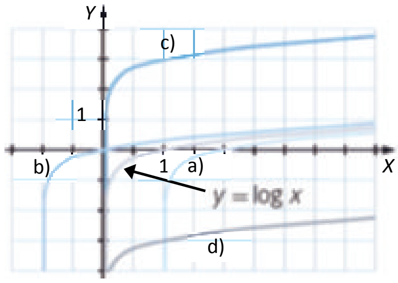
x	$\frac{1}{10}$	1	$\sqrt{10}$	10
$f(x)$	−1	0	$\frac{1}{2}$	2

a) Se traslada $f(x)$ 1 unidad a la derecha.

b) Se traslada $f(x)$ 1 unidad a la izquierda.

c) Se traslada $f(x)$ 3 unidades hacia arriba.

d) Se traslada $f(x)$ 3 unidades hacia abajo.



29. Página 229

Se usa la función $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ como referente y los diferentes apartados son traslaciones de esta.

$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ es una función decreciente $\frac{1}{2} < 1$. Pasa por los puntos (1, 0) y $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

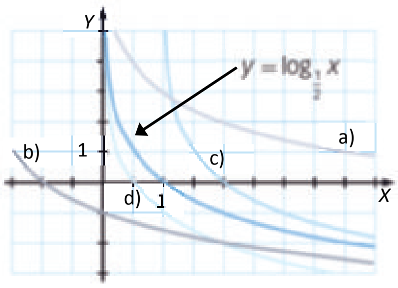
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	2	1	0	−1

a) Se traslada $f(x)$ 3 unidades hacia arriba.

b) Se traslada $f(x)$ 2 unidades a la izquierda.

c) Se traslada $f(x)$ 1 unidad a la derecha.

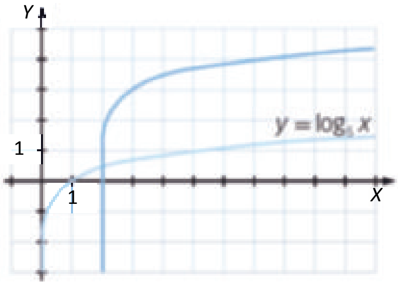
d) Se traslada $f(x)$ 1 unidad hacia abajo.



30. Página 229

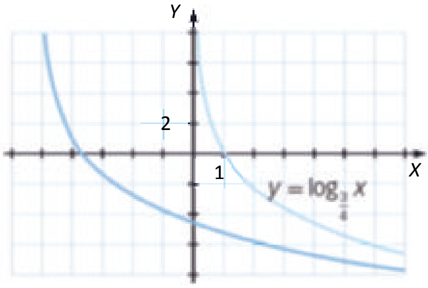
a) $f(x) = \log_5(x-2)+3$ es la traslación de la función $g(x) = \log_5 x$, 2 unidades a la derecha y 3 unidades hacia arriba.

x	$\frac{1}{5}$	1	$\sqrt{5}$	5
f(x)	−1	0	$\frac{1}{2}$	1



b) $f(x) = \log_{\frac{3}{4}}(x+5)+1$ es la traslación de la función $g(x) = \log_{\frac{3}{4}} x$, 5 unidades a la izquierda y 1 unidad hacia arriba.

x	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{4}{3}$
f(x)	2	1	0	−1



31. Página 230

La función $y = sen\, x$ está definida en cualquier valor, dominio $\mathbb{R}$, y como $-1 \le sen\, x \le 1$, recorrido $[-1,1]$, y es una función periódica de período 2π : $sen\, x = sen\,(x+2k\pi), k \in \mathbb{Z}$

El dominio en todas las funciones de los apartados siguientes seguirá siendo $\mathbb{R}$.

a) $y = 2sen\, x$, el factor 2 solo cambia el recorrido: $-2 \le 2sen\, x \le 2$.

b) $y = sen\,(2x)$, el factor solo cambia el período: $2(x+T)-2x = 2\pi \rightarrow T = \pi$

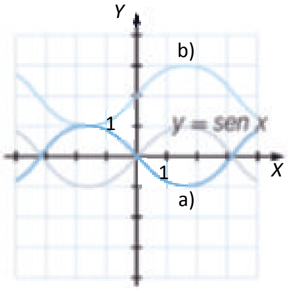
c) $y = -2sen\, x$, el factor 2 solo cambia el recorrido: $-2 \le -2sen\, x \le 2$. Los valores de ***sen x*** se verán multiplicados por 2 y cambiados de signo.

d) $y = sen\,(-2x)$, el factor solo cambia el período: $-2(x+T)+2x = 2\pi \rightarrow T = \pi$.

32. Página 230

a) Se traslada la función *sen x* en π unidades a la izquierda.

b) Se traslada la función 2 unidades hacia arriba.



33. Página 230

$y = sen(x) \to \begin{cases} \text{Eje } X \to (\pi k, 0), k \in \mathbb{Z} \\ \text{Eje } Y \to (0,1) \end{cases}$. Tiene infinitos puntos de corte.

Los máximos y mínimos son $x = \pi k - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ $\longrightarrow$ tiene infinitos.

34. Página 231

La función $y = \cos x$ está definida en cualquier valor, dominio $\mathbb{R}$, y como $-1 \le \cos x \le 1$, recorrido $[-1,1]$, y es una función periódica de período 2π : $\cos x = \cos (x + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$

El dominio en todas las funciones de los apartados siguientes seguirá siendo $\mathbb{R}$.

a) $y = 2\cos x$, el factor 2 solo cambia el recorrido: $-2 \le 2\cos x \le 2$.

b) $y = \cos (2x)$, el factor solo cambia el período: $2(x+T) - 2x = 2\pi \to T = \pi$

c) $y = -2\cos x$, el factor 2 solo cambia el recorrido: $-2 \le -2\cos x \le 2$.

d) $y = \cos (-2x)$, el factor solo cambia el período: $-2(x+T) + 2x = 2\pi \to T = \pi$

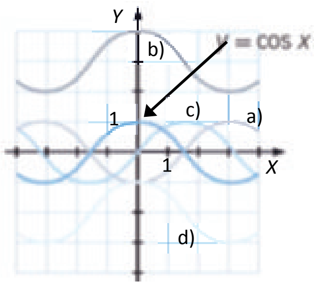
35. Página 231

a) Se traslada la función *cos x* en π unidades a la izquierda.

b) Se traslada la función 3 unidades hacia arriba.

c) Se traslada la función $\frac{\pi}{2}$ unidades a la derecha.

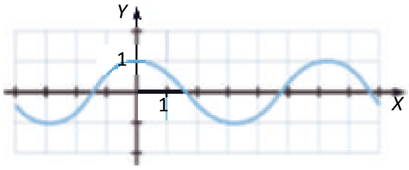
d) Se traslada la función 2 unidades hacia abajo.



36. Página 231

Coinciden ambas funciones.

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$	0	1	0	-1	0
$\cos x$	0	1	0	-1	0



ACTIVIDADES FINALES

37. Página 232

Las gráficas verde y azul son crecientes, la azul es más cerrada que la verde; por tanto, la gráfica azul corresponde a la función $y=3^x$ y la gráfica verde corresponde a la función $y=1{,}2^x$.

Las gráficas roja y morada son decrecientes, la roja es más cerrada que la azul; por tanto, la gráfica roja corresponde a la función $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ y la gráfica azul corresponde a la función $y=\left(\frac{3}{4}\right)^x$.

38. Página 232

a) $f(x)=2^{2x}$

x	-1	0	1
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	1	4

b) $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x}{2}}$

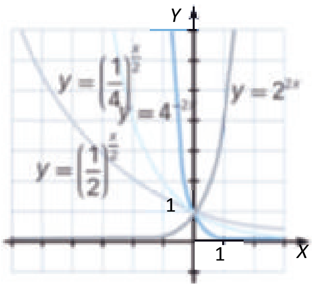
x	-1	0	1
$f(x)$	2	1	$\frac{1}{2}$

c) $f(x)=4^{-2x}$

x	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$f(x)$	4	1	$\frac{1}{4}$

d) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{2}}$

x	-2	0	2
$f(x)$	2	1	$\frac{1}{2}$



40. Página 232

a) La gráfica pasa por el punto (1, 3) $\rightarrow y=a^x \xrightarrow{x=1,y=3} 3=a \rightarrow y=3^x$

b) La gráfica pasa por el punto (–1, 5) $\rightarrow y=a^x \xrightarrow{x=-1,y=5} 5=a^{-1} \rightarrow a=\frac{1}{5} \rightarrow y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$

c) La gráfica pasa por el punto (1, 4) $\rightarrow y=a^x \xrightarrow{x=1,y=4} 4=a \rightarrow y=4^x$

d) La gráfica pasa por el punto (–1, 4) $\rightarrow y=a^x \xrightarrow{x=-1,y=4} 4=a^{-1} \rightarrow a=\frac{1}{4} \rightarrow y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$

41. Página 232

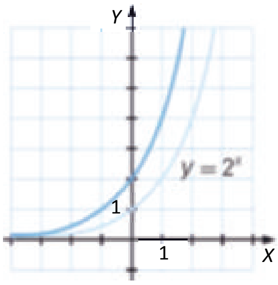
a) Es la gráfica de la función $y=3^x$ trasladada una unidad hacia arriba; por tanto, es la función: $y=3^x+1$.

b) Es la gráfica de la función $y=3^x$ trasladada una unidad hacia la derecha; por tanto, es la función $y=3^{x-1}$.

42. Página 232

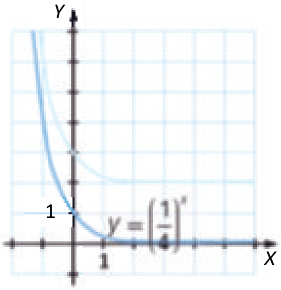
a) $y=2^{x+1}$ es una traslación de la función $f(x)=2^x$ 1 unidad a la izquierda.

x	−1	0	1	2
***f*(*x*)**	$\frac{1}{2}$	1	2	4



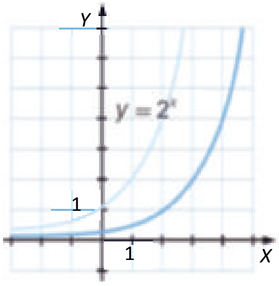
b) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x+2$ es una traslación de la función $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ 2 unidades hacia arriba.

x	−1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
***f*(*x*)**	4	2	1	$\frac{1}{2}$



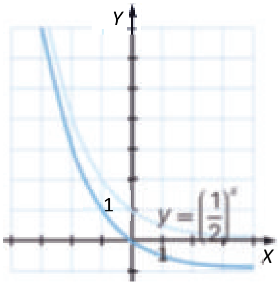
c) $y=2^{x-2}$ es una traslación de la función $y=2^x$ 2 unidades a la derecha.

x	−1	0	1	2
***f*(*x*)**	$\frac{1}{2}$	1	2	4



d) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-1$ es una traslación de la función $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ 1 unidad hacia abajo.

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	4	2	1	$\frac{1}{2}$



43. Página 232

a) Es la traslación de $y = 2^x$ una unidad hacia arriba y dos unidades a la derecha: $f(x) = 2^{x-2} + 1$.

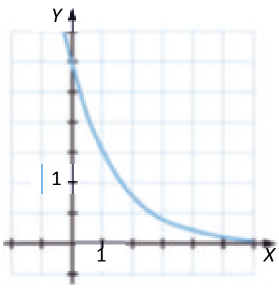
b) Es la traslación de $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ dos unidades hacia abajo y una unidad a la izquierda: $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}-2$.

c) Es la traslación de $y = 3^x$ dos unidades hacia abajo y una unidad a la derecha: $f(x) = 3^{x-1} - 2$.

d) Es la traslación de $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ una unidad hacia arriba y dos unidades a la izquierda: $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}+1$.

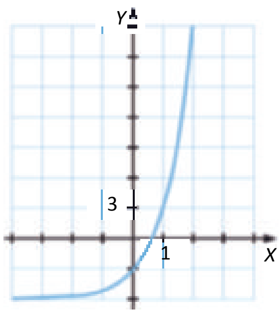
45. Página 233

Conociendo la forma que tiene la gráfica de la función exponencial, y teniendo en cuenta las condiciones del enunciado, una posible gráfica sería $y=3\cdot 2^{-x}$.



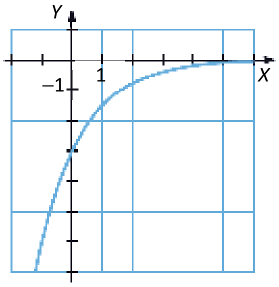
46. Página 233

Conociendo la forma que tiene la gráfica de la función exponencial, y teniendo en cuenta las condiciones del enunciado, una posible gráfica sería $y=3^{x+1}-6$.



47. Página 233

Conociendo la forma que tiene la gráfica de la función exponencial, y teniendo en cuenta las condiciones del enunciado, una posible gráfica sería $y = -3 \cdot 2^{-x}$.



48. Página 233

Pasa por los puntos (1, 1) y (2, 5).

$$\left.\begin{array}{l} 1 = a^{1+b} \\ 5 = a^{2+b} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 1 = a \cdot a^b \\ 5 = a^2 \cdot a^b \end{array}\right\} \xrightarrow{a \neq 0} \left.\begin{array}{l} a^b = \dfrac{1}{a} \\ a^b = \dfrac{5}{a^2} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{1}{a} = \frac{5}{a^2} \rightarrow a = \frac{5}{1} = 5$$

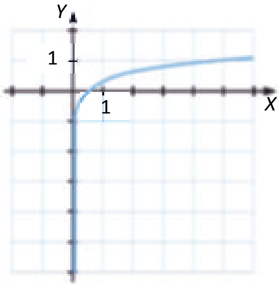
$$1 = 5^{1+b} \rightarrow 1 + b = 0 \rightarrow b = -1$$

La función es $y = 5^{(x-1)}$.

49. Página 233

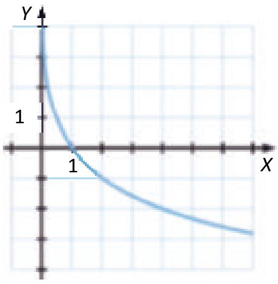
a) $f(x) = \log 2x$ es creciente ya que $10 > 1$.

x	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{2}$	5
$f(x)$	−1	0	1



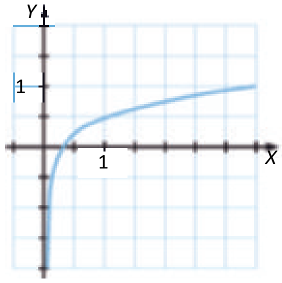
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ es decreciente ya que $\frac{1}{2} < 1$.

x	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	1	0	−1	−2



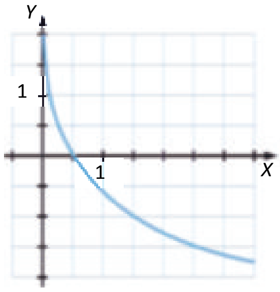
c) $f(x) = \log 3x$ es creciente ya que $10 > 1$.

x	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$
$f(x)$	-1	0	1



d) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} 2x$ es decreciente ya que $\frac{1}{3} < 1$.

x	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$
$f(x)$	1	0	-1	-2



50. Página 233

Las gráficas azul y morada son decrecientes, entonces $a < 1$. La gráfica morada pasa por $(4, -1)$, entonces gráfica morada: $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ y gráfica azul: $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

Las gráficas roja y verde son crecientes, entonces $a > 1$. La gráfica roja es más cerrada; por tanto, gráfica roja: $y = \log x$ y gráfica verde: $y = \log_2 x$.

52. Página 234

a) La gráfica pasa por el punto (3, 1).

$y = \log_a x \xrightarrow{x=3,\, y=1} 1 = \log_a 3 \rightarrow a^1 = 3 \rightarrow y = \log_3 x$

b) La gráfica pasa por el punto (2, –1).

$y = \log_a x \xrightarrow{x=2,\, y=-1} -1 = \log_a 2 \rightarrow a^{-1} = 2 \rightarrow y = \log_{\frac{1}{2}} x$

c) La gráfica pasa por el punto (6, 1).

$y = \log_a x \xrightarrow{x=6,\, y=1} 1 = \log_a 6 \rightarrow a = 6 \rightarrow y = \log_6 x$

d) La gráfica pasa por el punto (5, –1).

$y = \log_a x \xrightarrow{x=5,\, y=-1} -1 = \log_a 5 \rightarrow a^{-1} = 5 \rightarrow y = \log_{\frac{1}{5}} x$

53. Página 234

a) Corresponde a la traslación de la función $y = \log_3 x$ en la que se mueve la gráfica 2 unidades hacia arriba. Por tanto, $y = \log_3 x + 2$

b) Corresponde a la traslación de la función $y = \log_3 x$ en la que se mueve la gráfica 1 unidad a la derecha. Por tanto, $y = \log_3 (x - 1)$

54. Página 234

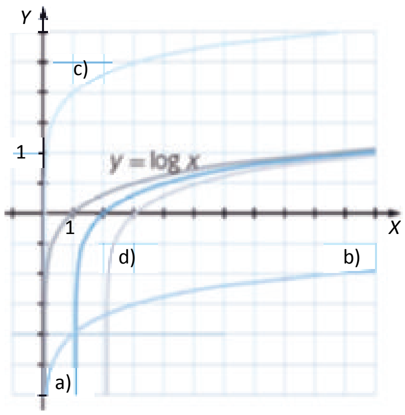
Todas las funciones son traslaciones de $f(x) = \log x$

a) $g(x) = \log(x - 1)$, traslada 1 unidad a la derecha.

b) $h(x) = \log x - 2$, traslada 2 unidades hacia abajo.

c) $p(x) = \log x + 2$, traslada 2 unidades hacia arriba.

d) $q(x) = \log(x - 2)$, traslada 2 unidades a la derecha.



55. Página 234

Las expresiones son todas traslaciones de la función $f(x) = \log x$.

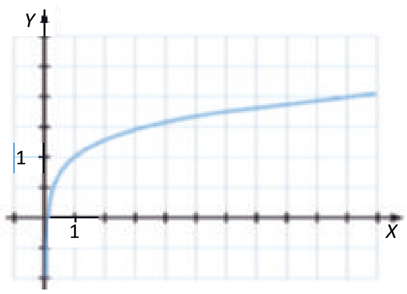
a) Es la traslación de la función $\log x$, trasladada 3 unidades a la izquierda: $\log(x + 3)$

b) Es la traslación de la función $\log x$, trasladada 3 unidades a la derecha: $\log(x - 3)$

c) Es la traslación de la función $\log x$, trasladada 3 unidades hacia arriba: $\log x + 3$

d) Es la traslación de la función $\log x$, trasladada 3 unidades hacia abajo: $\log x - 3$

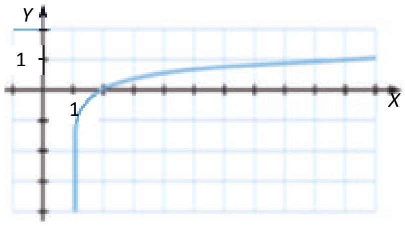
56. Página 234



Al representarlas se ve que coinciden: $f(x) = \log(10x) = \log 10 + \log x = \log x + 1$

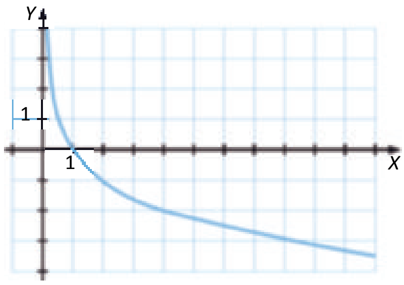
58. Página 234

Respuesta abierta. Por ejemplo: $\log_9(x-1)$



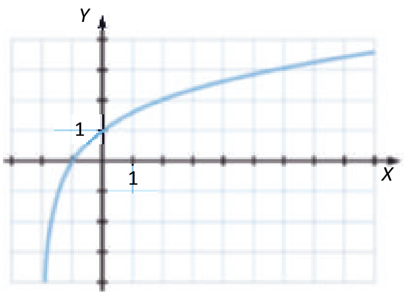
59. Página 234

$$y=\log_a x \xrightarrow{x=4, y=-2} -2=\log_a 4 \rightarrow a^{-2}=4 \rightarrow a=\frac{1}{2} \rightarrow y=\log_{\frac{1}{2}} x$$



60. Página 234

Respuesta abierta. Por ejemplo: $\log_2(x+2)$



61. Página 234

Consideramos que la escala es tanto en el eje vertical como en el horizontal 2 cuadrículas = 1 unidad.

Roja: El período es 4, la función es simétrica respecto del origen de coordenadas. Es la función $sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Verde: El período es 1, es simétrica respecto al eje *Y*. Representa la función $cos(2\pi x)$.

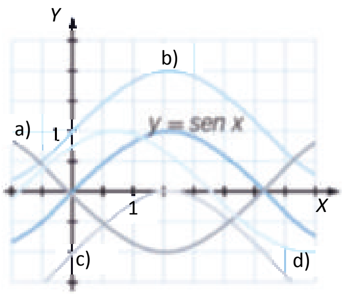
62. Página 235

a) $g(x)=sen\,(x+\pi)=-sen\,x=-f(x)$

b) $g(x)=senx+1=f(x)+1$

c) $g(x)=senx-1=f(x)-1$

d) $g(x)=sen\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$



63. Página 235

a) $y = \cos(2x)$, el factor solo cambia el período: $2(x+T) - 2x = 2\pi \rightarrow T = \pi$.

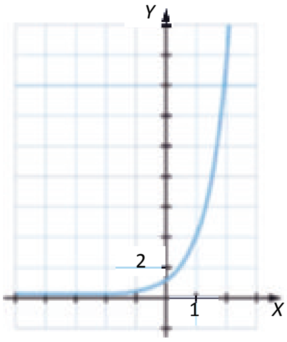
Dominio: $\mathbb{R}$ Recorrido: $[-1, 1]$

b) $y = 2\cos x$, el factor 2 solo cambia el recorrido: $-2 \leq 2\cos x \leq 2$.

Dominio: $\mathbb{R}$ Período: $T = 2\pi$

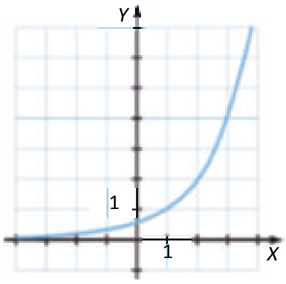
64. Página 235

Horas	1	2	n
Partes	4	16	4^n



65. Página 235

Días	1	2	3	n
Céntimos	1	2	4	2^{n-1}

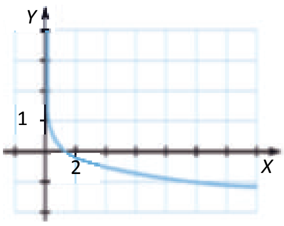


66. Página 235

$C_F = C_I(1+0{,}02)^n = C_I \cdot 1{,}02^n$ donde C_F es el capital final, C_I capital inicial y n el número de períodos.

67. Página 235

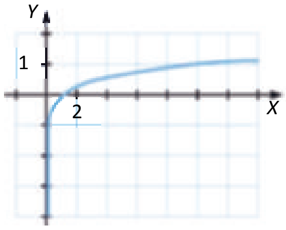
Concentración	$\frac{1}{10}$	1	10
pH	1	0	-1



$\text{pH} = -\log 10^{-7} = 7$

68. Página 235

$$y = A\log n \xrightarrow{y=2,n=100} 2 = A\log 100 \rightarrow 2 = A2 \rightarrow A = 1 \rightarrow y = \log x$$



69. Página 235

$$y = A\mathrm{sen}(x+T) \xrightarrow{A=2,T=\pi/2} y = 2\mathrm{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

DEBES SABER HACER

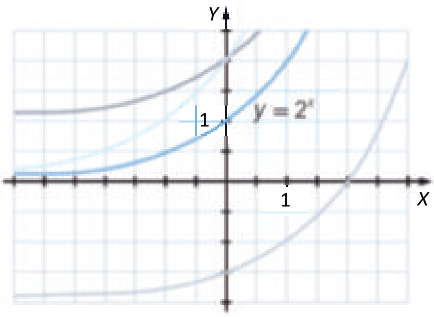
1. Página 235

x	-1	0	1	2
2^x	$\frac{1}{2}$	1	2	4

a) $g(x) = 2^{x+1} \rightarrow$ 1 unidad a la izquierda.

b) $h(x) = 2^x + 1 \rightarrow$ 1 unidad hacia arriba.

c) $p(x) = 2^{x-1} - 2 \rightarrow$ 1 unidad a la derecha y 2 hacia abajo.



2. Página 235

La función es del tipo $y = a^{(x+b)} + c$.

La representación es una traslación, 1 unidad hacia abajo y 2 unidades hacia la izquierda. Pasa por el punto $(-3, 4) \rightarrow 4 = a^{-3+2} - 1 \rightarrow 5 = a^{-1} \rightarrow a = \frac{1}{5} \rightarrow \quad y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+2} - 1$

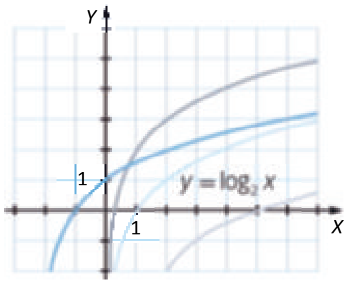
3. Página 235

x	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$\log_2 x$	-1	0	1	2

a) $g(x) = \log_2(x+2) \rightarrow$ 2 unidades a la izquierda.

b) $h(x) = \log_2 x + 2 \rightarrow$ 2 unidades hacia arriba.

c) $p(x) = \log_2(x-1) - 2 \rightarrow$ 1 unidad a la derecha y dos hacia abajo.



4. Página 235

Es una traslación 1 unidad hacia arriba de una función logarítmica y pasa por el punto (3, 2).

$$2 = \log_a 3 + 1 \rightarrow 1 = \log_a 3 \rightarrow a^1 = 3 \rightarrow y = \log_3 x + 1$$

5. Página 235

Está definida para cualquier valor, el dominio es $\mathbb{R}$. Su recorrido es $[2,6]$ y su período es 12.

La función es $f(x)=2sen\left(\frac{\pi x}{6}\right)+4$.

COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

70. Página 236

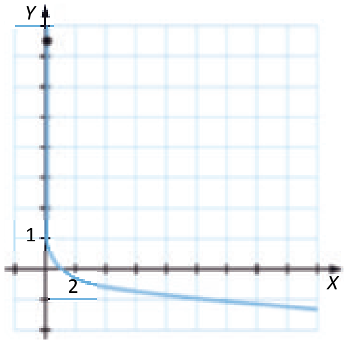
a) $f(x)=2^{2x}$

Tiempo	12 horas	1 día	2 días	3 días	*n* días
N.º células	2	4	16	64	2^{2n}

b) Al cabo de dos días: $2^{2\cdot 2}=16$ células y al cabo de 4 días: $2^{2\cdot 4}=256$ células.

c)

Concentración	$\frac{1}{10}$	1	10
pH	1	0	−1



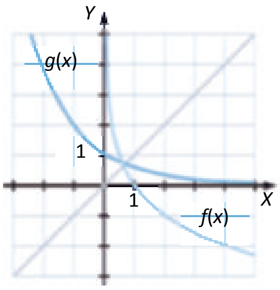
FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

71. Página 236

a)

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
f(x)	2	1	0	−1

x	−2	−1	0	1
g(x)	4	2	1	$\frac{1}{2}$



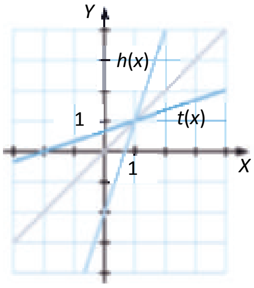
Las gráficas son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante, por tanto, son inversas.

Analíticamente: $g(f(x))=g\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}x}=x$. Su composición es la identidad, son inversas.

b)

x	–1	0	1	2
$h(x)$	–5	–2	1	4

x	–2	–1	0	1
$t(x)$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1



Las gráficas son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante, por tanto, son inversas.

Analíticamente: $t(h(x)) = t\left(\frac{x+2}{3}\right) = 3\frac{x+2}{3} - 2 = x$. Su composición es la identidad, son inversas.

72. Página 236

El número de cifras es igual a la parte entera de logaritmo decimal más uno.

$\log 4^{16} \cdot 5^{25} = \log 4^{16} + \log 5^{25} = 16\log 4 + 25\log 5 = 27{,}11 \rightarrow 28$ cifras.

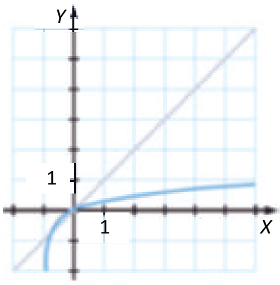
73. Página 236

$\left.\begin{array}{l} a^b = b^a \\ b = 9a \end{array}\right\} \rightarrow a^{9a} = 9^a \cdot a^a \rightarrow a^{8a} = 9^a \rightarrow a^8 = 3^2 \rightarrow a = \sqrt[4]{3} \text{ y } b = 9\sqrt[4]{3}$

74. Página 236

a) Es falso, pues si $x = 99 \rightarrow \log(100) > \frac{99}{100} \rightarrow 2 > \frac{99}{100}$.

b) Verdadera, para comprobarlo representaremos ambas funciones. Para $x > 0$, la recta siempre está por encima de la función logarítmica.



c) Es falso, pues si $x = 1 \rightarrow \log 2 < \frac{1}{2} \rightarrow 0{,}30 < 0{,}50$.

75. Página 236

$$\left(10^{2009n}+1\right)^2=10^{4018n}+2\cdot 10^{2009n}+1$$

Considerando que *n* es un número entero positivo, la suma de las cifras no depende del valor de *n* pues solo añadirá ceros al número.

La suma de las cifras de cada sumando es $1+2+1=4$.

PRUEBAS PISA

76. Página 237

La respuesta es b) Subiendo.

La foca tarda 3 minutos en bajar al fondo y 8 en subir. Con lo cual la foca baja y sube en períodos de 11 minutos. El minuto 60 (al cabo de una hora) es igual a $5 \cdot 11 + 5$. Es decir es la sexta vez que realiza el proceso y ya ha consumido los tres minutos de bajada, por lo que estará subiendo.

Estadística

12

CLAVES PARA EMPEZAR

1. Página 238

N.º de goles	0	1	2	3	4	5
Frecuencia	6	7	8	6	2	1

2. Página 238

a) $-2,\ -\frac{1}{2},\ -1$ b) $4,\ 5,\ \frac{11}{2}$ c) $\frac{3}{2},\ \frac{7}{4},\ 2$ d) $3,\ \frac{7}{2},\ 4$ e) –1, 0, 1 f) –3, –2, 3

VIDA COTIDIANA

LA MOTOCICLETA. Página 239

En una semana hace $18\cdot 10+12\cdot 6=252$ km. Por tanto, en una semana hace de media $\frac{252}{7}=36$ km diarios.

RESUELVE EL RETO

RETO 1. Página 251

Respuesta abierta. Por ejemplo, las variables «tiempo que se tarda en pintar una casa» y «número de personas que se dedican a pintar esa casa». En esta situación, las dos variables representan dos magnitudes inversamente proporcionales, por tanto, presentan dependencia pero no es lineal, ya que la nube de puntos generada se aproximará a una hipérbola. Es decir, no presentan correlación.

ACTIVIDADES

1. Página 240

Las variables son:

- Día de nacimiento ⟶ Cuantitativa discreta.
- Lugar de nacimiento ⟶ Cualitativa.
- Estatura ⟶ Cuantitativa continua.

2. Página 240

Respuesta abierta. La muestra no es necesariamente representativa de la población, dependerá de la variable que se quiera estudiar. En el caso de la estatura sí lo sería, en el caso de la letra del apellido no.

3. Página 240

a) Primero tendríamos que escoger el país que queremos estudiar.

b) Si escogemos un muestreo aleatorio, por ejemplo, todos los individuos tienen la misma posibilidad de ser elegidos. Así, nos aseguraríamos de tener ciudadanos de todas las edades y condiciones.

c) Para realizar la encuesta primero realizaremos las preguntas. Luego tenemos que decidir en qué lugares o por qué medios la realizaremos; puede ser a pie de calle o telefónica, por ejemplo. Según el método de recogida de datos el coste será diferente. Y dependiendo del tamaño de la muestra y el tiempo que le podamos dedicar tenemos que decidir cuántas personas hacen las encuestas.

Una vez tengamos escogidos todos los elementos, pasamos a la recogida de datos, para luego procesarlos y hacer la encuesta.

4. Página 241

a) Suponemos que estos datos provienen de una variable estadística cuantitativa discreta.

Datos	f_i	h_i	F_i	H_i
1	1	0,05	1	0,05
2	4	0,2	5	0,25
3	2	0,1	7	0,35
4	7	0,35	14	0,7
5	3	0,15	17	0,85
6	3	0,15	20	1

b) Suponemos que estos datos provienen de una variable estadística cuantitativa discreta.

Datos	f_i	h_i	F_i	H_i
1	3	0,27	3	0,27
2	6	0,55	9	0,82
3	2	0,18	11	1

c) Suponemos que estos datos provienen de una variable estadística cualitativa.

Datos	f_i	h_i	F_i	H_i
D	1	0,06	1	0,06
E	2	0,11	3	0,17
R	4	0,22	7	0,39
S	5	0,28	12	0,67
T	6	0,33	18	1

d) Suponemos que estos datos provienen de una variable estadística cualitativa.

Datos	f_i	h_i	F_i	H_i
Azul	1	0,14	1	0,14
Blanco	2	0,29	3	0,43
Rojo	4	0,57	7	1

5. Página 241

Vamos a calcular N, es decir, el número total de datos.

$$\frac{5}{N}+\frac{8}{N}+\frac{1}{9}+\frac{1}{6}=1 \rightarrow \frac{5N+234}{18N}=1 \rightarrow N=\frac{234}{13}=18$$

$$\frac{5}{18}=0{,}28 \qquad \frac{8}{18}=0{,}44 \qquad \frac{1}{9}=\frac{2}{18} \qquad \frac{1}{6}=\frac{3}{18}$$

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4
f_i	**5**	2	**8**	3
h_i	0,28	**1/9**	0,44	**1/6**

6. Página 241

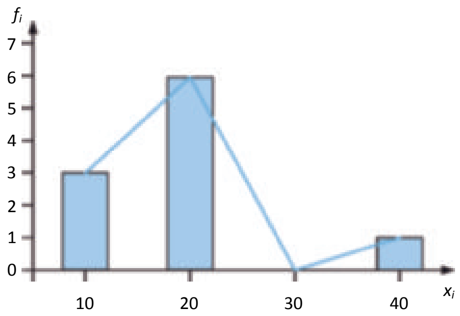
Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r}2+2+f_3+f_4+4=19\\ 2+2+f_3=7\end{array}\right\}\rightarrow f_3=3,\ f_4=8$$

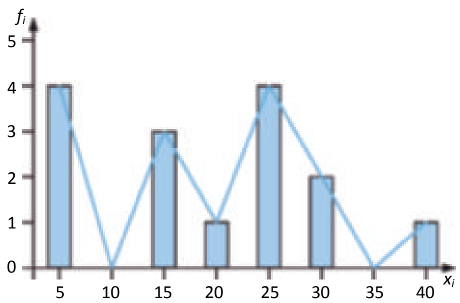
Datos	f_i	h_i	F_i	H_i
x_1	2	0,11	2	0,11
x_2	2	0,11	4	0,22
x_3	3	0,15	7	0,37
x_4	8	0,42	15	0,79
x_5	4	0,21	19	1

7. Página 242

a) $f_{10}=3$ $f_{20}=6$ $f_{40}=1$

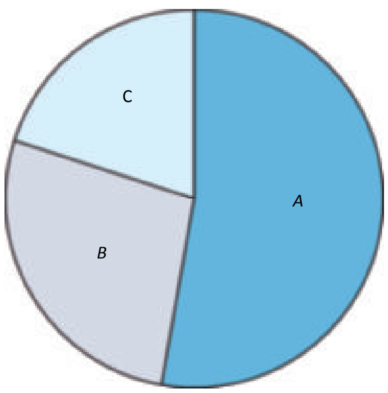


b) $f_5=4$ $f_{15}=3$ $f_{20}=1$ $f_{25}=4$ $f_{30}=2$ $f_{40}=1$



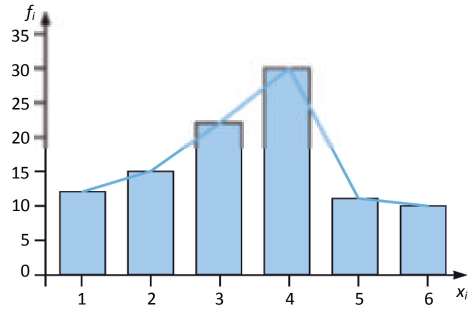
8. Página 242

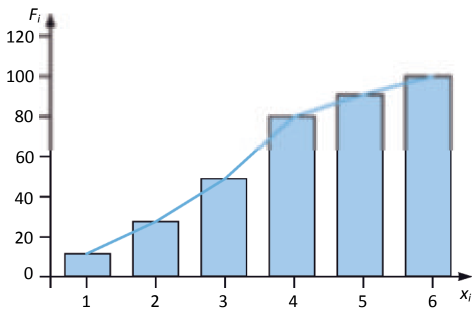
x_i	f_i	h_i
A	8	0,53
B	4	0,27
C	3	0,2



9. Página 242

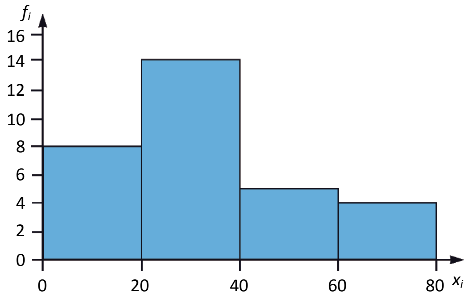
x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	12	15	22	30	11	10
F_i	12	27	49	79	90	100





10. Página 242

Clases	[0, 20)	[20, 40)	[40, 60)	[60, 80)
f_i	**8**	14	5	**4**
F_i	8	**22**	**27**	31

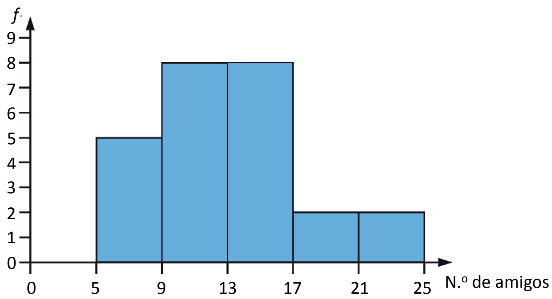


11. Página 243

Vemos la amplitud de los intervalos:

$\frac{23-6}{\sqrt{25}} = \frac{17}{5} = 3{,}4 \rightarrow$ Tomamos intervalos de amplitud 4.

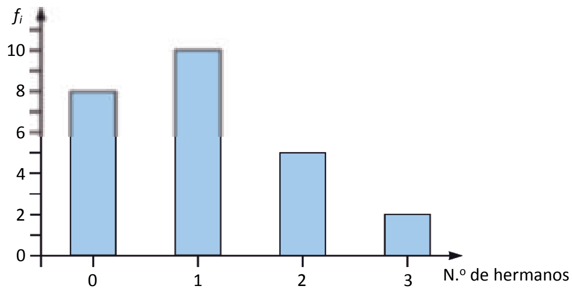
Clases	[5, 9)	[9, 13)	[13, 17)	[17, 21)	[21, 25)
f_i	5	8	8	2	2



12. Página 243

Respuesta abierta. Por ejemplo:

N.º hermanos	0	1	2	3
f_i	8	10	5	2



13. Página 243

Datos	f_i	h_i	F_i	H_i
[5, 9)	2	0,11	2	0,11
[9, 13)	1	0,06	3	0,17
[13, 17)	5	0,28	8	0,45
[17, 21)	6	0,33	14	0,78
[21, 25)	4	0,22	18	1

x_i	h_i	H_i
A	0,1	0,1
B	0,12	0,22
C	0,15	0,37
D	0,18	0,55
E	0,2	0,75
F	0,25	1

14. Página 244

a)

x_i	f_i	F_i
3	1	1
4	2	3
5	1	4
6	1	4
8	2	6
9	1	7

Media aritmética: $\overline{X} = \frac{3\cdot 1 + 4\cdot 2 + 5\cdot 1 + 6\cdot 1 + 8\cdot 2 + 9\cdot 1}{8} = \frac{47}{8} = 5{,}875$

Moda: $Mo = \{4, 8\}$

Mediana: $Me = 5{,}5$

b)

x_i	f_i	F_i
11	4	4
12	4	8
13	1	9
14	1	10
16	1	11

Media aritmética: $\overline{X} = \frac{11\cdot 4 + 12\cdot 4 + 13\cdot 1 + 14\cdot 1 + 16\cdot 1}{11} = \frac{135}{11} = 12{,}27$

Moda: $Mo = \{11, 12\}$

Mediana: $Me = 12$

c)

x_i	f_i	F_i
0	4	4
1	5	9
2	1	10
3	2	12
5	1	13

Media aritmética: $\overline{x} = \frac{0 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 1}{13} = \frac{18}{13} = 1{,}38$

Moda: $Mo = 1$ Mediana: $Me = 1$

15. Página 244

Vamos a ordenar los datos para calcular el valor de la mediana:

7, 8, 9, 12, 12, 15, 18, 21

El valor de la mediana es 12.

Por ejemplo, si añadimos un solo valor menor que 12 la mediana seguirá siendo 12.

16. Página 244

a) $\overline{x} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5}{1 + 2 + 3 + 4 + 5} = \frac{55}{15} = 3{,}67$ $Mo = 5$

Los datos son: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5 $\rightarrow$ $Me = 4$

b)

x_i	f_i	F_i
2	1	1
4	4	5
6	7	12
8	10	22
10	13	35
12	16	51

$\overline{x} = \frac{2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 6 \cdot 7 + 8 \cdot 10 + 10 \cdot 13 + 12 \cdot 16}{51} = \frac{462}{51} = 9{,}06$

$Mo = 12$ $Me = 10$

c)

x_i	f_i	F_i
1	2	2
7	5	7
9	10	17
11	17	34

$\overline{x} = \frac{1 \cdot 2 + 7 \cdot 5 + 9 \cdot 10 + 11 \cdot 17}{34} = \frac{314}{34} = 9{,}24$

$Mo = 11$ $Me = \frac{9 + 11}{2} = 10$

17. Página 245

a)

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	F_i
2	3	6	3
4	1	4	4
6	5	30	9
8	2	16	11
10	7	70	18
Total	18	126	

$\overline{x} = \frac{126}{18} = 7$

$Mo = 10$ $\qquad$ $Me = \frac{6+8}{2} = 7$

El valor de la media es menor que el valor de la mediana, 7, y hay dos valores modales.

b)

Clases	x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	F_i
[0, 15)	7,5	6	45	6
[15, 30)	22,5	3	67,5	9
[30, 45)	37,5	5	187,5	14
[45, 60)	52,5	6	315	20
Total		20	615	

$\overline{x} = \frac{615}{20} = 30{,}75$

Intervalo modal = [0,15) y [45,60) $\rightarrow$ $Mo = 7{,}5$ y $52{,}5$

Intervalo mediano = [30,45) $\rightarrow$ $Me = 37{,}5$

El valor de la media es menor que el valor modal. Hay dos modas.

18. Página 245

a)

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	F_i
3	1	3	1
6	5	30	6
9	7	63	13
12	8	96	21
15	3	45	24
Total	24	237	

$\overline{x} = \frac{237}{24} = 9{,}875$

$Mo = 12$ $\qquad$ $Me = 9$

El valor de la media es menor que la moda, pero mayor que la mediana.

b)

Clases	x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	F_i
[4, 6)	5	4	20	5
[6, 8)	7	8	56	12
[8, 10)	9	12	108	21
[10, 12)	11	10	110	34
Total		34	294	

$$\overline{x} = \frac{294}{34} = 8,65$$

Intervalo modal = [8, 10) $\longrightarrow$ $Mo = 9$

Intervalo mediano = [8, 10) $\longrightarrow$ $Me = 9$

La media es menor que la moda y la mediana, y estas tienen el mismo valor.

19. Página 246

a)

x_i	f_i	F_i
1	1	1
2	2	3
3	1	4
4	2	6
5	3	9
6	2	11
7	3	14
8	3	17
9	2	19

25 % de 19 = 4,75 $\longrightarrow$ 6 > 4,75 $\longrightarrow$ $Q_1 = 4$

50 % de 19 = 9,5 $\longrightarrow$ 11 > 9,5 $\longrightarrow$ $Q_2 = 6$

75 % de 19 = 14,25 $\longrightarrow$ 17 > 14,25 $\longrightarrow$ $Q_3 = 8$

b)

x_i	f_i	F_i
0	10	10
1	9	19
2	10	29
3	2	31
4	7	38

25 % de 38 = 9,5 $\longrightarrow$ 10 > 9,5 $\longrightarrow$ $Q_1 = 0$

50 % de 38 = 19 $\longrightarrow$ 19 = 19 $\longrightarrow$ $Q_2 = 1$

75 % de 38 = 28,5 $\longrightarrow$ 29 > 28,5 $\longrightarrow$ $Q_3 = 2$

20. Página 246

x_i	f_i	F_i
0	2	2
1	6	8
2	5	13
3	3	16
4	4	20
5	3	23

8 % de 23 = 1,84 $\rightarrow$ 2 > 1,84 $\rightarrow P_8 = 0$

34 % de 23 = 7,82 $\rightarrow$ 8 > 7,82 $\rightarrow P_{34} = 1$

21. Página 246

Notas	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	6	25	34	42	50	27	13	3
F_i	6	31	65	107	157	184	197	200

Hay 200 − 20 = 180 personas que suspenden la oposición. Como 180 es el 90 % de 200 y $P_{90} = 8$, entonces 8 es la nota mínima para aprobar (no todos los que saquen 8 conseguirán plaza).

Ordenados los datos, del 32º al 65º tienen de nota 5, luego 5 es el percentil P_{16}, P_{17}, …, P_{32} porque el 16 % de 200 = 32 y 32 % de 200 = 64, pero 33 % de 200 = 66 > 65.

22. Página 247

a)

x_i	f_i	F_i
2	12	12
4	26	38
5	16	54
6	15	69
7	21	90
10	14	104

Mínimo = 2

25 % de 104 = 26 $\rightarrow$ 38 > 26 $\rightarrow Q_1 = 4$

50 % de 104 = 52 $\rightarrow$ 54 > 52 $\rightarrow Q_2 = 5$

75 % de 104 = 78 $\rightarrow$ 90 > 78 $\rightarrow Q_3 = 7$

Máximo = 10

Los datos tienden a estar concentrados equitativamente.

b)

x_i	f_i	F_i
1	16	16
2	7	23
4	7	30
7	15	45
8	13	58
11	2	60

Mínimo = 1

25 % de 60 = 15 ⟶ 16 > 15 ⟶ $Q_1 = 1$

50 % de 60 = 30 ⟶ 30 = 30 ⟶ $Q_2 = 4$

75 % de 60 = 45 ⟶ 45 = 45 ⟶ $Q_3 = 7$

Máximo = 11

Como el mínimo y Q_1 son iguales, entonces los datos menores que Q_1 son todos iguales.

23. Página 247

Clases	x_i	f_i	F_i
[0, 8)	4	7	7
[8, 16)	12	9	16
[16, 24)	20	4	20
[24, 32)	28	6	26

Mínimo = 4

25 % de 26 = 6,5 ⟶ 7 > 6,5 ⟶ $Q_1 = 4$

50 % de 26 = 13 ⟶ 16 > 13 ⟶ $Q_2 = 12$

75 % de 26 = 19,5 ⟶ 20 > 19,5 ⟶ $Q_3 = 20$

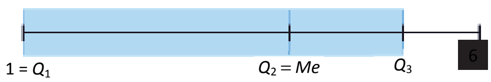
Máximo = 28

Los datos tienden a estar más concentrados en valores bajos.

24. Página 247

x_i	f_i	F_i
1	3	3
2	1	4
3	2	6
4	1	7
5	4	11
6	1	12

Mínimo = 1 $\qquad Q_1 = 1{,}75 \qquad$ Mediana = 3,5 $\qquad Q_3 = 5 \qquad$ Máximo = 6



25. Página 248

Alba:

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$	$f_i \cdot \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
4	1	4	16	0,775
5	1	5	25	0,225
4,5	1	4,5	20,25	0,275
5,6	1	5,6	31,36	0,825
Total	4	19,1	92,61	2,1

$\bar{x} = \frac{19,1}{4} = 4,775$

$R = 5,6 - 4 = 1,6$ $\quad DM = \frac{2,1}{4} = 0,525$

$\sigma^2 = \frac{92,61}{4} - 4,775^2 = 0,35$ $\quad \sigma = \sqrt{0,35} = 0,59$ $\quad CV = \frac{0,59}{4,775} = 0,124 = 12,4\ \%$

Javier:

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$	$f_i \cdot \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
2	1	2	4	2,625
3,5	1	3,5	12,25	1,125
7	1	7	49	2,375
6	1	6	36	1,375
Total	4	18,5	101,25	7,5

$\bar{x} = \frac{18,5}{4} = 4,625$

$R = 7 - 2 = 5$ $\quad DM = \frac{7,5}{4} = 1,875$

$\sigma^2 = \frac{101,25}{4} - 4,625^2 = 3,92$ $\quad \sigma = \sqrt{3,92} = 1,98$ $\quad CV = \frac{1,98}{4,625} = 0,4281 = 42,81\%$

Pedro:

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$	$f_i \cdot \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
1	1	1	1	3,6875
1	1	1	1	3,6875
8	1	8	64	3,3125
8,75	1	8,75	76,56	4,0625
Total	4	18,75	142,56	14,75

$\bar{x} = \frac{18,75}{4} = 4,6875$

$R = 8,75 - 1 = 7,75$ $\quad DM = \frac{14,75}{4} = 3,6875$

$\sigma^2 = \frac{142,5625}{4} - 4,6875^2 = 13,67$ $\quad \sigma = \sqrt{13,67} = 3,697$ $\quad CV = \frac{3,697}{4,6875} = 0,7887 = 78,87\ \%$

26. Página 248

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$	$f_i \cdot \lvert x_i - \overline{x} \rvert$
1	4	4	4	6,76
2	2	4	8	1,38
3	5	15	45	1,55
4	5	20	80	6,55
Total	16	43	137	16,24

$$\overline{x} = \frac{43}{16} = 2{,}69$$

$R = 4 - 1 = 3$ $\qquad\qquad$ $DM = \dfrac{16{,}24}{16} = 1{,}015$

$\sigma^2 = \dfrac{137}{16} - 2{,}69^2 = 1{,}33$ $\qquad\qquad$ $\sigma = \sqrt{1{,}33} = 1{,}15$

$$CV = \frac{1{,}15}{2{,}69} = 0{,}4275 = 42{,}75\ \%$$

27. Página 248

$$\left.\begin{array}{l} CV_{\text{Elefante}} = \dfrac{100}{2000} = 0{,}05 = 5\ \% \\ CV_{\text{Ratón}} = \dfrac{0{,}02}{0{,}05} = 0{,}4 = 40\ \% \end{array}\right\} \rightarrow \text{La dispersión en el peso de los ratones es mayor.}$$

28. Página 249

Clases	x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
[0, 6)	3	7	7	21	63
[6, 12)	9	4	11	36	324
[12, 18)	15	1	12	15	225
[18, 24)	21	8	20	168	3 528
[24, 30)	27	9	29	243	6 561
Total		29		483	10 701

$$\overline{x} = \frac{483}{29} = 16{,}655$$

50 % de 29 = 14,5 $\rightarrow$ 20 >14,5 $\rightarrow$ $Me = 21$

$Mo = 27$

$\sigma^2 = \dfrac{10\,701}{29} - 16{,}655^2 = 91{,}61$ $\qquad\qquad$ $\sigma = \sqrt{91{,}61} = 9{,}57$

$$CV = \frac{9{,}57}{16{,}655} = 0{,}5746 = 57{,}46\ \%$$

Los datos tienden a estar agrupados hacia el máximo. El coeficiente de variación es alto. Por tanto, los datos están dispersos respecto de la media.

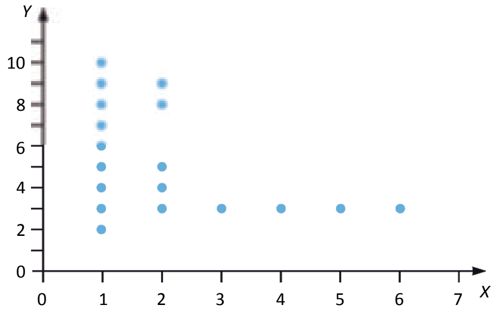
29. Página 249

x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
1	2	2	2	2
2	5	7	10	20
3	6	13	18	54
4	1	14	4	16
Total	14		34	92

$\overline{x} = \frac{34}{14} = 2{,}43$ 50 % de 14 = 7 $\rightarrow Me = 2{,}5$ $Mo = 3$

$\sigma^2 = \frac{92}{14} - 2{,}43^2 = 0{,}667$ $\sigma = \sqrt{0{,}667} = 0{,}81$ $CV = \frac{0{,}81}{2{,}43} = 0{,}3333 = 33{,}33\ \%$

30. Página 250



31. Página 250

Respuesta abierta.

32. Página 250

Los datos que definen una bisectriz representan variables dependientes.

33. Página 251

a) Correlación positiva. b) Correlación negativa.

34. Página 251

Existe correlación positiva.

35. Página 251

a) $y = 3(x+2) = 3x + 6 \rightarrow$ Correlación positiva.

b) $y = x - 2 \rightarrow$ Correlación positiva.

c) $y = 5 - x \rightarrow$ Correlación negativa.

d) $y = 2x + 2 \rightarrow$ Correlación positiva.

e) $y = 8 - x \rightarrow$ $\rightarrow$Correlación negativa.

f) $y = x + 5 \rightarrow$ $\rightarrow$Correlación positiva.

ACTIVIDADES FINALES

36. Página 252

a) Cualitativa.

b) Cuantitativa continua.

c) Cuantitativa discreta.

d) Cuantitativa continua.

e) Cuantitativa discreta.

f) Cuantitativa discreta.

g) Cualitativa.

h) Cuantitativa discreta.

37. Página 252

a) Cuantitativa discreta.

b) Cuantitativa continua.

c) Cualitativa.

38. Página 252

Respuesta abierta. Por ejemplo:

«Ciudad favorita en la que hayas estado» es una variable cualitativa.

39. Página 252

«Tiempo que dedican al trabajo» → Variable cuantitativa continua.

«La edad» → Variable cuantitativa discreta.

«El estado civil» → Variable cualitativa.

«El número de hijos» → Variable cuantitativa discreta.

40. Página 252

x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
Aventuras	104	0,416	104	0,416
Novela histórica	45	0,18	149	0,596
Terror	28	0,112	177	0,708
Drama	12	0,048	189	0,756
Biografía	4	0,016	193	0,772
Comedia romántica	57	0,228	250	1

41. Página 252

a)

x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
0	5	0,167	5	0,167
1	5	0,167	10	0,334
2	2	0,067	12	0,401
3	3	0,1	15	0,501
4	8	0,266	23	0,767
5	3	0,1	26	0,867
6	1	0,033	27	0,9
7	1	0,033	28	0,933
8	2	0,067	30	1

b) No utilizaron el cajero 5 personas de 30 ⟶ 0,167 ⟶ 16,7 %

c) El total de personas que fueron 4, 5, 6 o 7 veces es de 13 de 30 ⟶ 0,432 = 43,2 %

d) El total de personas que fueron 4 o más veces fueron 15 de 30 ⟶ 0,499 = 49,9 %

42. Página 252

Notas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
f_i	**2**	**3**	**6**	7	5	2
F_i	2	5	11	**18**	23	25
h_i	0,08	0,12	0,24	0,28	**0,2**	0,08
H_i	0,08	0,2	0,44	0,72	0,92	1

Inventar la posible encuesta es una respuesta abierta.

Por ejemplo, se encuesta a 25 personas para preguntarles de qué temática fue el último libro que leyeron, dando las siguientes opciones: histórico, romántico, de ciencia ficción, de poesía, de teatro, otro.

43. Página 252

a)

x_i	f_i	h_i	%
x_1	**5**	0,2	**20**
x_2	9	**0,36**	36
x_3	3	0,12	**12**
x_4	**8**	0,32	32

b)

x_i	f_i	h_i	%
x_1	4	0,2	**20**
x_2	3	**0,15**	15
x_3	**2**	0,1	10
x_4	7	**0,35**	35
x_5	4	$\mathbf{\frac{1}{5}}$	20

44. Página 252

x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
x_1	**3**	0,12	3	0,12
x_2	9	0,36	**12**	0,48
x_3	**6**	0,24	18	0,72
x_4	2	**0,08**	20	0,8
x_5	**5**	**0,2**	25	1

45. Página 252

Clases	x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
[2, 14)	8	2	0,05	2	0,05
[14, 26)	20	4	0,1	6	0,15
[26, 38)	32	7	0,175	13	0,325
[38, 50)	44	7	0,175	20	0,5
[50, 62)	56	10	0,25	30	0,75
[62, 74)	68	4	0,1	34	0,85
[74, 86)	80	4	0,1	38	0,95
[86, 98)	92	2	0,05	40	1

46. Página 252

a)

Clases	x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
[1,9; 3,9)	2,9	3	0,107	3	0,107
[3,9; 5,9)	4,9	11	0,393	14	0,5
[5,9; 7,9)	6,9	7	0,25	21	0,75
[7,9; 9,9]	8,9	7	0,25	28	1

b)

Clases	x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
[1,9; 4,9)	3,4	7	0,25	7	0,25
[4,9; 7,9)	6,4	14	0,5	21	0,75
[7,9; 10,9)	8,4	7	0,25	28	1

47. Página 252

a)

Clases	x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
[10, 22)	16	4	0,1	4	0,1
[22, 34)	28	12	0,3	16	0,4
[34, 46)	40	14	0,35	30	0,75
[46, 58)	52	8	0,2	38	0,95
[58, 70]	64	2	0,05	40	1

b)

Clases	x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
[10, 20)	15	3	0,075	3	0,075
[20, 30)	25	11	0,275	14	0,35
[30, 40)	35	9	0,225	23	0,575
[40, 50)	45	10	0,25	33	0,825
[50, 60)	55	5	0,125	38	0,95
[60, 70]	65	2	0,05	40	1

48. Página 252

Medida	f_i	h_i	F_i	H_i
[2, 10)	50	**50**	0,1	0,1
[10, 18)	**150**	200	0,3	0,4
[18, 26)	200	400	**0,4**	0,8
[26, 34)	100	**500**	0,2	**1**

a) Se han realizado 500 mediciones.

b) El 20 %.

c) [18, 26)

49. Página 253

Respuesta (en minutos)	f_i	h_i	F_i	H_i
[0, 60)	250	0,125	250	**0,125**
[60, 120)	825	0,4125	**1 075**	0,5375
[120, 180)	**510**	0,255	1 585	0,7925
[180, 240)	140	**0,07**	1 725	0.8625
[240, 300)	275	0,1375	**2 000**	1

a) Se le han realizado la encuesta a 2 000 individuos.

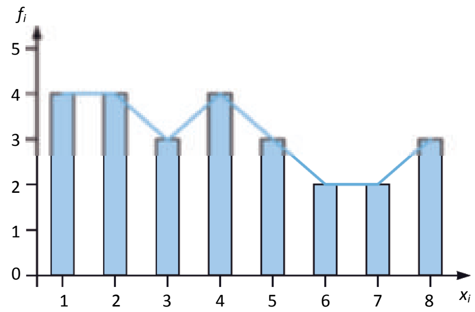
b) El 53,75 %.

c) El 66,75 %.

50. Página 253

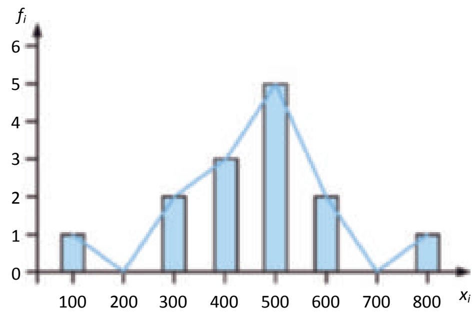
a)

x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
1	4	0,16	4	0,16
2	4	0,16	8	0,32
3	3	0,12	11	0,44
4	4	0,16	15	0,6
5	3	0,12	18	0,72
6	2	0,08	20	0,8
7	2	0,08	22	0,88
8	3	0,12	25	1

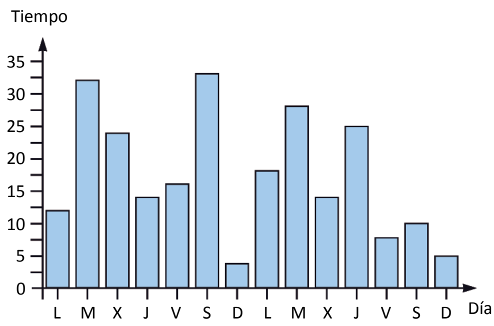


b)

x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
100	1	0,071	1	0,071
300	2	0,143	3	0,214
400	3	0,215	6	0,429
500	5	0,357	11	0,786
600	2	0,143	13	0,929
800	1	0,071	14	1



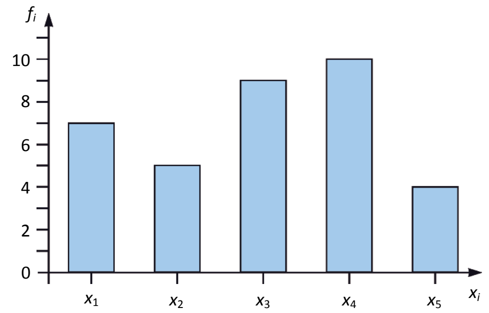
51. Página 253



52. Página 253

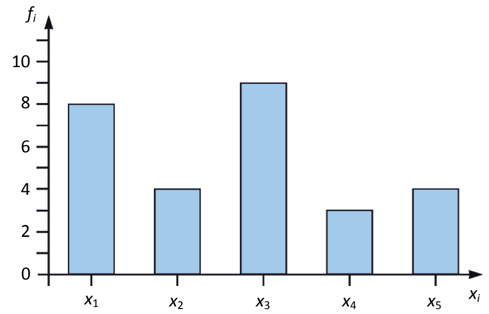
x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
f_i	7	5	9	10	4

Representamos los datos en un diagrama de barras.



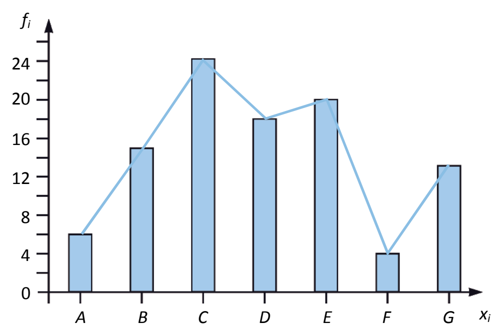
53. Página 253

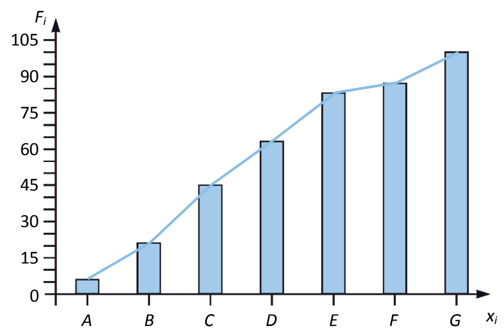
x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
f_i	8	4	9	3	4



54. Página 253

x_i	A	B	C	D	E	F	G
f_i	6	15	24	18	20	4	13
F_i	6	21	45	63	83	87	100





55. Página 253

Día de la semana	f_i	h_i	F_i	H_i
L	3	0,171	3	0,171
M	3,5	0,2	6,5	0,371
X	2	0,114	8,5	0,485
J	3	0,171	11,5	0,656
V	1,5	0,087	13	0,743
S	2	0,114	15	0,857
D	2,5	0,143	17,5	1

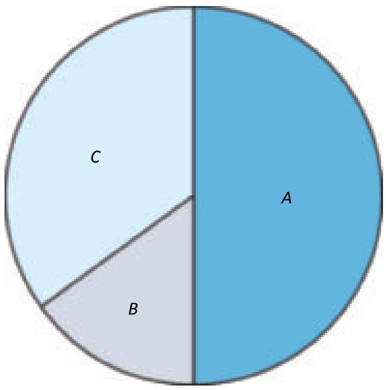
56. Página 253

a)

Marca	f_i	h_i	F_i	H_i
A	20	0,5	20	0,5
B	6	0,15	26	0,65
C	14	0,35	40	1

La variable es la preferencia de marca, es una variable cuantitativa.

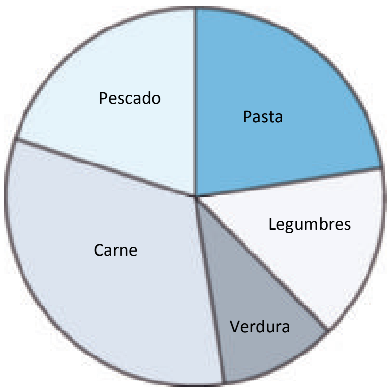
b)



57. Página 253

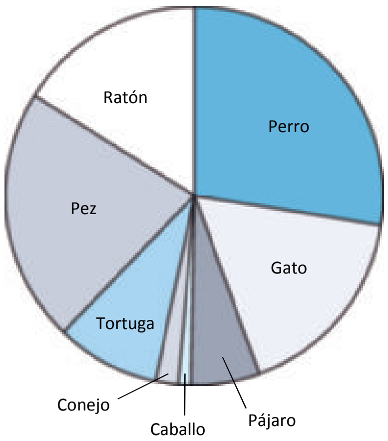
a)

Comidas	Pasta	Legumbres	Verdura	Carne	Pescado
f_i	45	30	20	65	40
h_i	0,225	0,15	0,1	0,325	0,2



b)

Mascota	Perro	Gato	Pájaro	Caballo	Conejo	Tortuga	Pez	Ratón
f_i	50	30	10	2	4	16	40	28
h_i	0,278	0,167	0,056	0,011	0,022	0,09	0,22	0,156



58. Página 253

Calculamos por reglas de tres los ángulos correspondientes.

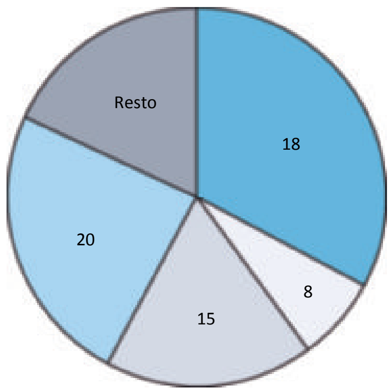
La frecuencia absoluta 6 tiene un sector de 25,71º.

La frecuencia absoluta 15 tiene un sector de 64,29º.

La frecuencia absoluta 20 tiene un sector de 85,71º.

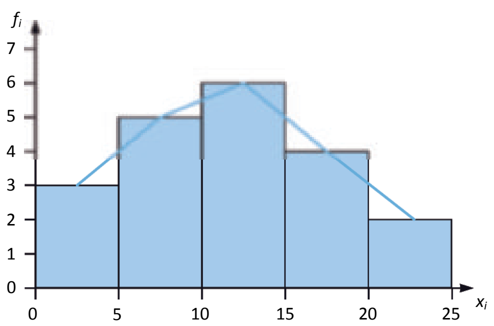
Por tanto queda un sector de 64,29º libre.

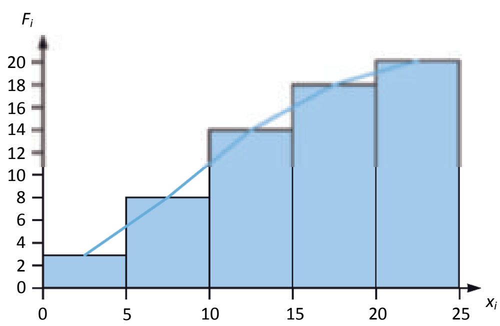
El diagrama de sectores sería:



59. Página 253

Clases	[0, 5)	[5, 10)	[10, 15)	[15, 20)	[20, 25)
f_i	3	5	6	4	2
F_i	3	8	14	18	20

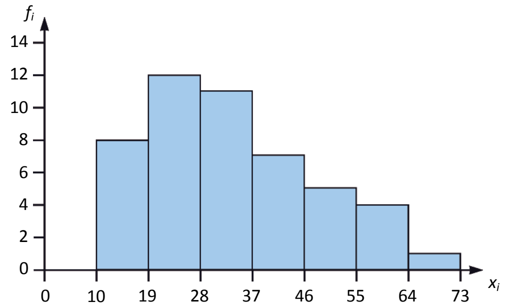




60. Página 253

$\frac{66-10}{\sqrt{48}} = 8{,}08 \rightarrow$ Los intervalos son de amplitud 9.

Clases	x_i	f_i
[10, 19)	14,5	8
[19, 28)	23,5	12
[28, 37)	32,5	11
[37, 46)	41,5	7
[46, 55)	50,5	5
[55, 64)	59,5	4
[64, 73)	68,5	1



61. Página 253

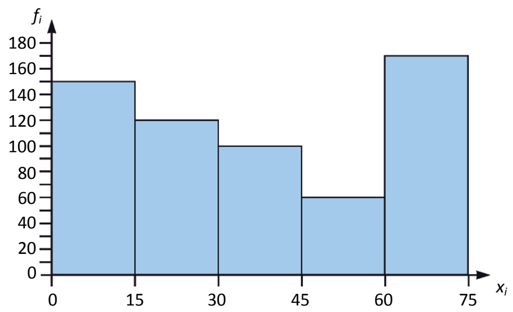
Clases	x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
[0, 5)	2,5	7	0,259	7	0,259
[5, 10)	7,5	8	0,297	15	0,556
[10, 15)	12,5	3	0,111	18	0,667
[15, 20)	17,5	4	0,148	22	0,815
[20, 25)	22,5	5	0,185	27	1

62. Página 254

Clases	x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
[20, 30)	25	6	0,171	6	0,171
[30, 40)	35	4	0,114	10	0,285
[40, 50)	45	3	0,086	13	0,371
[50, 60)	55	7	0,2	20	0,571
[60, 70)	65	1	0,029	21	0,6
[70, 80)	75	9	0,257	30	0,857
[80, 90)	85	5	0,143	35	1

63. Página 254

Clases	x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
[0, 15)	7,5	150	0,25	150	0,25
[15, 30)	22,5	120	0,2	270	0,45
[30, 45)	37,5	100	0,17	370	0,62
[45, 60)	52,5	60	0,1	430	0,72
[60, 75)	67,5	170	0,28	600	1



64. Página 254

Clases	x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
[8, 14)	11	5	0,128	5	0,128
[14, 20)	17	6	0,154	11	0,282
[20, 26)	23	4	0,103	15	0,385
[26, 32)	29	3	0,077	18	0,462
[32, 38)	35	7	0,179	25	0,641
[38, 44)	41	5	0,128	30	0,769
[44, 50)	47	9	0,231	39	1

a) $N = 39$

b) Hay 7 intervalos.

c) El cuarto intervalo es [26, 32).

d) $f_2 = 6$ $\quad$ $f_5 = 7$

e) $F_3 = 15$ $\quad$ $F_4 = 18$

f) $h_1 = 0{,}128$ $\quad$ $h_6 = 0{,}128$

g) $H_3 = 0{,}385$ $\quad$ $H_5 = 0{,}641$

65. Página 254

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$	$f_i \cdot \lvert x_i - \overline{x} \rvert$
2	3	6	12	11,49
5	8	40	200	6,64
6	2	12	72	0,34
7	1	7	49	1,17
10	4	40	400	16,68
Total	18	105	733	36,32

$\overline{x} = \dfrac{105}{18} = 5{,}83$ $\quad$ $Mo = 5$ $\quad$ $Me = 5$

$R = 10 - 2 = 8$ $\quad$ $DM = \dfrac{36{,}32}{18} = 2{,}018$ $\quad$ $\sigma^2 = \dfrac{733}{18} - 5{,}83^2 = 6{,}733$ $\quad$ $\sigma = \sqrt{6{,}733} = 2{,}595$

$CV = \dfrac{2{,}595}{5{,}83} = 0{,}4451 = 44{,}51\,\%$

66. Página 254

a) $\overline{x} = 2{,}14$, $Me = 2$, $Mo = 2$ $\quad$ b) $\overline{x} = 5{,}2$, $Me = 6$, $Mo = \{4, 6, 8\}$ $\quad$ c) $\overline{x} = 190$, $Me = 200$, $Mo = \{100, 250\}$

67. Página 254

a) $\overline{x} = \dfrac{1 \cdot 5 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 6 + x_4 \cdot 4 + 9 \cdot 1}{18} = 5 \rightarrow x_4 = 8$

b) $\overline{x} = \dfrac{40 + 3 \cdot x_4}{14} = 5 \rightarrow x_4 = 10$

c) $\overline{x} = \dfrac{97 + 16x_4}{39} = 5 \rightarrow x_4 = 6{,}125$

68. Página 254

x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$	$f_i \cdot \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
8	2	2	16	128	24,02
10	6	8	60	600	60,06
14	8	16	112	1 568	48,08
17	9	25	153	2 601	27,09
20	12	37	240	4 800	0,12
24	15	52	360	8 640	59,85
25	20	72	500	12 500	99,8
Total	72		1 441	30 837	319,02

$\bar{x} = \frac{1441}{72} = 20,01$ $\quad Me = 20$ $\quad Mo = 25$

$R = 25 - 8 = 17$ $\quad DM = \frac{319,02}{72} = 4,43$ $\quad \sigma^2 = \frac{30837}{72} - 20,01^2 = 27,89$ $\quad \sigma = \sqrt{27,89} = 5,28$

$CV = \frac{5,28}{20,01} = 0,264 = 26,4\ \%$

69. Página 254

x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$	$f_i \cdot \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
3	4	4	12	36	20,592
5	7	11	35	175	22,036
8	5	16	40	320	0,74
9	3	19	27	243	2,556
11	2	21	22	242	5,704
14	6	27	84	1 176	35,112
Total	27		220	2 192	86,74

$\bar{x} = \frac{220}{27} = 8,148$ $\quad Me = 8$ $\quad Mo = 5$

$R = 14 - 3 = 11$ $\quad DM = \frac{86,74}{27} = 3,213$ $\quad \sigma^2 = \frac{2\,192}{27} - 8,148^2 = 14,795$ $\quad \sigma = \sqrt{14,795} = 3,846$

$CV = \frac{3,846}{8,148} = 0,472 = 47,20\ \%$

70. Página 254

Clases	x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$
[0, 4)	2	15	15	30
[4, 8)	6	12	27	72
[8, 12)	10	9	36	90
[12, 16)	14	10	46	140
[16, 20)	18	7	53	126
Total		53		458

$\bar{x} = \frac{458}{53} = 8,642$ $\quad Mo = 2$ $\quad Me = 6$

71. **Página 254**

Clases	x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$	$f_i \cdot \lvert x_i - \overline{x} \rvert$
[2, 8)	5	8	8	40	200	63,28
[8, 14)	11	5	13	55	605	9,55
[14, 20)	17	3	16	51	867	12,27
[20, 26)	23	6	22	138	3 174	60,54
Total		22		284	4 846	145,64

$\overline{x} = \frac{284}{22} = 12{,}91$ $\quad Mo = 5$ $\quad Me = 11$

$R = 23 - 5 = 18$ $\quad DM = \frac{145{,}64}{22} = 6{,}62$ $\quad \sigma^2 = \frac{4846}{22} - 12{,}91^2 = 53{,}605$ $\quad \sigma = \sqrt{53{,}605} = 7{,}322$

$CV = \frac{7{,}322}{12{,}91} = 0{,}5672 = 56{,}72\ \%$

72. **Página 255**

Clases	x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$	$f_i \cdot \lvert x_i - \overline{x} \rvert$
[10, 12)	11	1	1	11	121	6,148
[12, 14)	13	4	5	52	676	16,592
[14, 16)	15	5	10	75	1 125	10,74
[16, 18)	17	8	18	136	2 312	1,184
[18, 20)	19	2	20	38	722	3,704
[20, 22)	21	5	25	105	2 205	19,26
[22, 24)	23	2	27	46	1 058	11,704
Total		27		463	8 219	69,332

$\overline{x} = \frac{463}{27} = 17{,}148$ $\quad Me = 17$ $\quad Mo = 17$

$R = 23 - 11 = 12$ $\quad DM = \frac{69{,}332}{27} = 2{,}568$ $\quad \sigma^2 = \frac{8219}{27} - 17{,}148^2 = 10{,}3535$ $\quad \sigma = \sqrt{10{,}3535} = 3{,}218$

$CV = \frac{3{,}218}{17{,}148} = 0{,}1877 = 18{,}77\ \%$

73. **Página 255**

Clases	x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$	$f_i \cdot \lvert x_i - \overline{x} \rvert$
[0, 8)	4	2	2	8	32	45,34
[8, 16)	12	2	4	24	288	29,34
[16, 24)	20	1	5	20	400	6,67
[24, 32)	28	1	6	28	784	1,33
[32, 40)	36	3	9	108	3 888	27,99
[40, 48)	44	3	12	132	5 808	51,99
Total		12		320	11 200	162,66

$\overline{x} = \frac{320}{12} = 26{,}67$ $\quad Me = 32$ $\quad Mo = 36$ y 44

$R = 44 - 4 = 40$ $\quad DM = \frac{162{,}66}{12} = 13{,}555$ $\quad \sigma^2 = \frac{11200}{12} - 26{,}67^2 = 222{,}044$ $\quad \sigma = \sqrt{222{,}044} = 14{,}9$

$CV = \frac{14{,}9}{26{,}67} = 0{,}5587 = 55{,}87\%$

75. Página 255

$\bar{x} = \frac{70}{10} = 7 \qquad N + 2 = 12$

a) $\bar{x}' = \frac{70+m}{12} = 7 \to m = 14 \to$ La suma de los dos datos debe ser 14. Podemos añadir, por ejemplo, 7 y 7.

b) $\bar{x}' = \frac{70+m}{12} = 8 \to m = 26 \to$ La suma de los dos datos debe ser 26. Podemos añadir, por ejemplo, 13 y 13.

c) $\bar{x}' = \frac{70+m}{12} = 6 \to m = 2 \to$ La suma de los dos datos debe ser 2. Podemos añadir, por ejemplo, 1 y 1.

76. Página 255

$\bar{x} = \frac{52+x}{11} = 5 \to x = 5 \cdot 11 - 52 = 3$

77. Página 255

$\bar{x} = \frac{105+3y}{14} = 9 \to y = \frac{9 \cdot 14 - 105}{3} = 7$

78. Página 255

$\bar{x} = \frac{75+x+y}{6} = 20 \to x + y = 20 \cdot 6 - 75 \to x + y = 45$

Para que 23 sea la moda tenemos que $x = 23 \to y = 45 - 23 = 22$.

79. Página 255

Ordenamos los datos: 10, 17, x, 19, 21, y, 25

$\bar{x} = \frac{92+x+y}{7} = 19 \to x + y = 19 \cdot 7 - 92 \to x + y = 41$

Para cumplir las condiciones $x = 19 \to y = 41 - 19 = 22$.

81. Página 255

a) Uno de los datos debe ser mayor o igual que 9 y el otro dato debe ser menor o igual que 8, por ejemplo, 8 y 9.

b) Los datos tienen que ser menores o iguales que 8, por ejemplo 7 y 8.

c) Los datos tienen que ser mayores o iguales que 9, por ejemplo 9 y 10.

82. Página 255

25 % de $36 = 9 \to Q_1 = 6$

50 % de $36 = 18 \to Q_2 = 9$

75 % de $36 = 27 \to Q_3 = 11$

83. Página 255

Clases	[2, 4)	[4, 6)	[6, 8)	[8, 10)
x_i	3	5	7	9
f_i	9	13	7	1
F_i	9	22	29	30

25 % de 30 = 7,5 $\longrightarrow Q_1 = 3$

50 % de 30 = 15 $\longrightarrow Q_2 = 5$

75 % de 30 = 22,5 $\longrightarrow Q_3 = 7$

84. Página 255

x_i	f_i	h_i	F_i	H_i	$f_i \cdot x_i$
10	10	0,1818	10	0,1818	100
11	5	0,0909	15	0,2727	55
12	10	0,1818	25	0,4545	120
13	15	0,2727	40	0,7272	195
14	5	0,0909	45	0,8181	70
15	10	0,1818	55	1	150
Total	55				690

$\overline{X} = \frac{690}{55} = 12{,}55$ $Me = 13$ $Mo = 13$

25 % de 55 = 13,75 $\longrightarrow Q_1 = 11$

75 % de 55 = 41,25 $\longrightarrow Q_3 = 14$

32 % de 55 = 17,6 $\longrightarrow P_{32} = 12$

85. Página 256

a) No hay dependencia lineal.

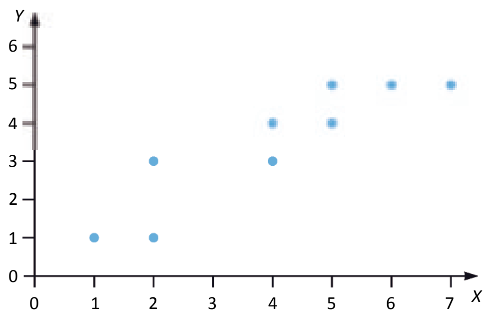
b) Hay dependencia lineal fuerte y negativa.

c) Hay dependencia lineal débil y positiva.

d) Hay dependencia lineal fuerte y positiva.

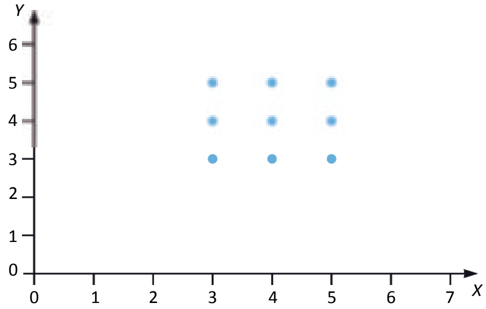
86. Página 256

a)



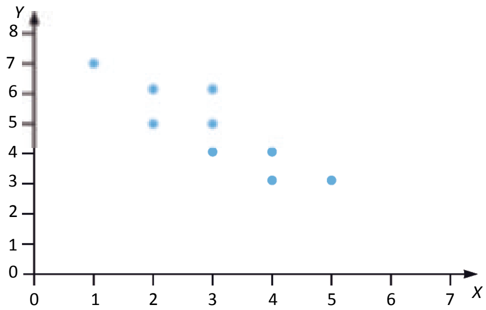
Tienen dependencia lineal, existe correlación positiva.

b)



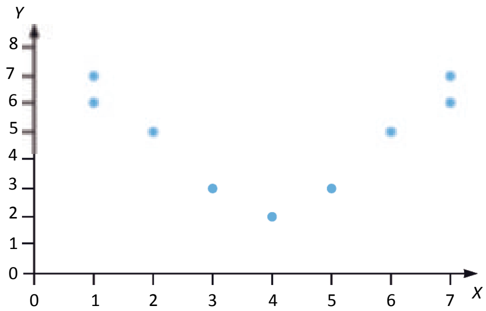
No tienen dependencia lineal.

c)



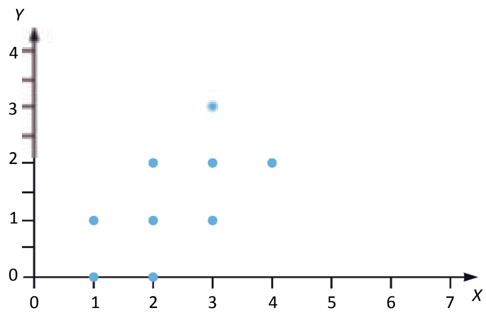
Tienen dependencia lineal, existe correlación negativa.

d)



No tienen dependencia lineal.

e)

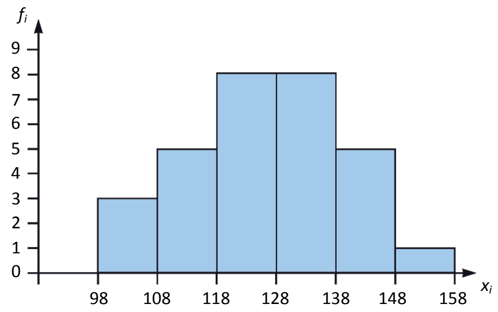


Tienen dependencia lineal, existe correlación positiva.

87. Página 256

a)

Clases	x_i	f_i	h_i	F_i	H_i	$f_i \cdot x_i$
[98, 108)	103	3	0,1	3	0,1	309
[108, 118)	113	5	0,167	8	0,267	565
[118, 128)	123	8	0,267	16	0,534	984
[128, 138)	133	8	0,267	24	0,801	1 064
[138, 148)	143	5	0,167	29	0,968	715
[148, 158)	153	1	0,033	30	1	153
Total		30				3 790



b) $\bar{x} = \dfrac{3790}{30} = 126,\widehat{3}$

c) 25 % de 30 = 7,5 $\longrightarrow Q_1 = 113$

50 % de 30 = 15 $\longrightarrow Q_2 = 123$

75 % de 30 = 22,5 $\longrightarrow Q_3 = 133$

27 % de 30 = 8,1 $\longrightarrow P_{27} = 123$

65 % de 30 = 19,5 $\longrightarrow P_{65} = 133$

90 % de 30 = 27 $\longrightarrow P_{90} = 143$

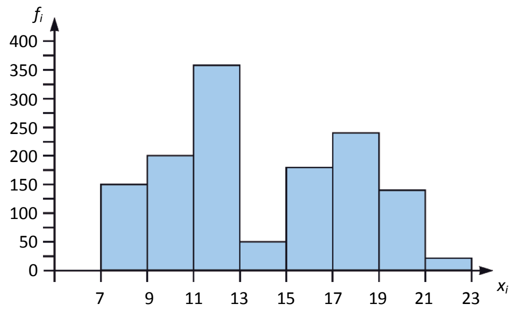
88. Página 256

a) A las once de la mañana se sirven 200 cafés. A las cinco de la tarde se sirven 100 cafés.

b) La hora a la que se sirven menos cafés es a las dos de la tarde.

c)

Clases	x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$
[7, 9)	8	150	150	1 200
[9, 11)	10	200	350	2 000
[11, 13)	12	360	710	4 320
[13, 15)	14	50	760	700
[15, 17)	16	180	940	2 880
[17, 19)	18	240	1 180	4 320
[19, 21)	20	140	1 320	2 800
[21, 23)	22	20	1 340	440
Total		1 340		18 660



d)

x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$
7	50	50	350
8	100	150	800
9	120	270	1 080
10	80	350	800
11	200	550	2 200
12	160	710	1 920
13	40	750	520
14	10	760	140
15	60	820	900
16	120	940	1 920
17	100	1 040	1 700
18	140	1 180	2 520
19	90	1 270	1 710
20	50	1 320	1 000
21	20	1 340	420
Total	1 340		17 980

Datos agrupados:

$\overline{x} = \frac{18\,660}{1\,340} = 13{,}93$ $Me = 12$ $Mo = 12$

Datos no agrupados:

$\overline{x} = \frac{17\,980}{1\,340} = 13{,}42$ $Me = 12$ $Mo = 11$

89. Página 256

x_i	f_i	h_i	F_i	H_i	$f_i \cdot x_i$
2	3	0,1	3	0,1	6
5	6	0,2	9	0,3	30
7	9	0,3	18	0,6	63
10	12	0,4	30	1	120
Total	30				219

$\overline{x} = \frac{219}{30} = 7{,}3$ $Me = 7$ $Mo = 10$

Con reglas de tres calculamos los ángulos de cada sector:

$x_1 = 36^o$ $x_2 = 72^o$ $x_3 = 108^o$ $x_4 = 144^o$

90. Página 256

Clases	x_i	f_i	F_i
[18, 26)	22	6	6
[26, 34)	30	7	13
[34, 42)	38	8	21
[42, 50)	46	4	25
[50, 58)	54	4	29
[58, 66)	62	1	30
[18, 26)	22	6	6
[26, 34)	30	7	13
Total		30	

34 % de 30 = 10,2 $\rightarrow P_{34} = 30$

78 % de 30 = 23,4 $\rightarrow P_{78} = 46$

El 34 % de los datos son menores o iguales que 30, y el 78 % de los datos son menores o iguales que 46.

91. Página 256

x_i	f_i	h_i	F_i	H_i	$f_i \cdot x_i$
1	144	0,12	144	0,12	144
2	120	0,10	264	0,22	240
3	216	0,18	480	0,4	648
4	300	0,25	780	0,65	1200
5	420	0,35	1200	1	2100
Total	1 200				4 332

a) $\bar{x} = \frac{4332}{1200} = 3{,}61$ $\qquad$ $Me = 4$ $\qquad$ $Mo = 5$

b) 25 % de 1200 = 300 $\rightarrow Q_1 = 3$, el 25 % de las puntuaciones son 3 o inferiores.

50 % de 1200 = 600 $\rightarrow Q_2 = 4$, el 50 % de las puntuaciones son 4 o inferiores.

75 % de 1200 = 900 $\rightarrow Q_3 = 5$, el 75 % de las puntuaciones son 5 o inferiores.

c) El porcentaje de puntuaciones que puntuó más de 3 es del 60 %. Por tanto, el percentil correspondiente es P_{40}.

92. Página 257

Sea y la distancia que debe recorrer el sábado.

$$\bar{x} = \frac{22}{5} = 4{,}4 \text{ km} \rightarrow \bar{x} = \frac{22+y}{6} = 4{,}4 \rightarrow y = 4{,}4 \cdot 6 - 22 = 4{,}4 \text{ km}$$

Ordenamos los datos: 2, 3, 5, 5, 7.

La mediana de los datos es 5, para que no se modifique debemos incluir un dato mayor o igual que 5, por ejemplo 6.

La moda de los datos es 5, para que no se modifique tenemos que añadir el dato 5, o un dato distinto de 2, 7 y 3.

94. Página 257

a) La media es la misma para las dos empresas: $\overline{x} = \frac{67}{12} = 5{,}583$

b)

	Empresa A	Empresa B
Media	5,583	5,583
Rango	8	11
Desviación Media	2,986	3,347
Varianza	9,747	12,913
Desviación típica	3,122	3,593
Coeficiente de variación	0,5592	0,6436

c) La dispersión es mayor en la empresa B.

95. Página 257

	Tiempo	Calificaciones
Media	379,167	4,917
Rango	730	7
Desviación Media	170,97	1,444
Varianza	43 007,386	3,573
Desviación típica	207,382	1,891
Coeficiente de variación	0,5469	0,3845

Para comparar su variabilidad calculamos los coeficientes de variación.

Los datos están más dispersos en el conjunto de los tiempos.

96. Página 257

Para poder comparar ambas ofertas vamos a medir sus beneficios en unidades de desviación típica.

Sabiendo que un diplomado en Informática de gestión tiene un salario medio de 1080 €, con una desviación típica de 180 €, podemos decir que la oferta de 1200 € se desvía por encima de la media:

$\frac{1200 - 1080}{180} = 0{,}667$ unidades de desviación típica

Sin embargo, una oferta de 1 140 € a un diplomado en Informática de sistemas, con un sueldo medio de 960 € y 150 € de desviación típica, también se desvía por encima de la media:

$\frac{1140 - 960}{150} = 1{,}2$ unidades de desviación típica

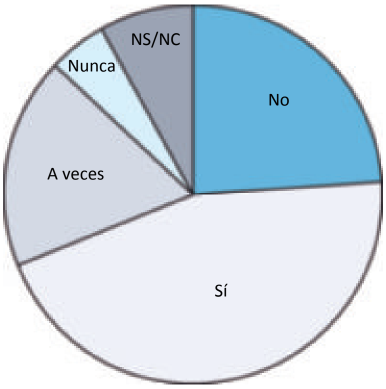
Esto indica que el diplomado en Informática de sistemas es quien recibe la mejor oferta.

DEBES SABER HACER

1. Página 257

x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
NO	48	0,24	48	0,24
SI	90	0,45	138	0,69
A VECES	36	0,18	174	0,87
NUNCA	10	0,05	184	0,92
NS/NC	16	0,08	200	1

Elaboramos un diagrama de sectores.



2. Página 257

Clases	x_i	f_i	h_i	F_i	H_i	$f_i \cdot x_i$
[7, 12)	9,5	4	0,14	4	0,14	38
[12, 17)	14,5	2	0,07	6	0,21	29
[17, 22)	19,5	8	0,28	14	0,49	156
[22, 27)	24,5	7	0,24	21	0,73	171,5
[27, 32)	29,5	8	0,27	29	1	236
Total		29				630,5

$\overline{x} = \frac{630,5}{29} = 21,7$ $\qquad Me = 24,5$ $\qquad Mo = 19,5$ y $29,5$

3. Página 257

25 % de 25 = 6,25 $\longrightarrow Q_1 = 6$

50 % de 25 = 12,5 $\longrightarrow Q_2 = 8$

75 % de 25 = 18,75 $\longrightarrow Q_3 = 12$

16 % de 25 = 4 $\longrightarrow P_{16} = 5$

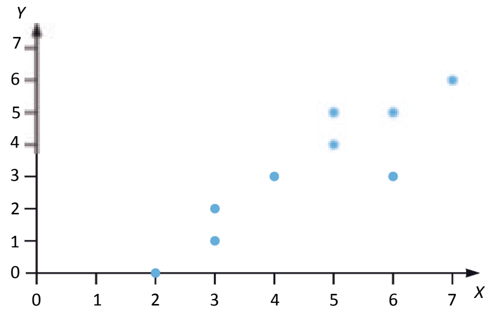
34 % de 25 = 8,5 $\longrightarrow P_{34} = 6$

4. Página 257

	Juan	Ana
Media	5	5
Desviación típica	1,67	3,74

Los datos de Ana están más dispersos que los de Juan, ya que, aunque tienen la misma media, la desviación típica de los datos de Ana es mucho mayor.

5. Página 257



Los datos presentan correlación positiva.

COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

97. Página 258

a) Parece que a menor consumo, mayor precio; salvo en el modelo *D* que es el más barato y no es el que más consume.

b) Veamos cuánto gastaría de gasolina con cada moto en los 5 años de contrato.

El total de kilómetros que recorrería sería:

- En un día laborable: $2 \cdot 23 = 46$ km.
- En una semana: $46 \cdot 5 = 230$ km.
- En un mes (suponiendo que tiene siempre 4 semanas): $230 \cdot 4 = 920$ km.
- En un año laboral (11 meses): $920 \cdot 11 = 10\,120$ km.
- En 5 años: $10\,120 \cdot 5 = 50\,600$ km.

En función de cada moto, el gasto en combustible sería distinto. Así, el gasto que le supondría cada modelo sería:

- Modelo *A*: $\frac{50\,600 \cdot 2{,}1}{100} \cdot 1{,}2 + 3200 = 4475{,}12$ €
- Modelo *B*: $\frac{50\,600 \cdot 2{,}7}{100} \cdot 1{,}2 + 2650 = 4289{,}44$ €
- Modelo *C*: $\frac{50\,600 \cdot 1{,}75}{100} \cdot 1{,}2 + 4100 = 5\,162{,}6$ €
- Modelo *D*: $\frac{50\,600 \cdot 2{,}5}{100} \cdot 1{,}2 + 2400 = 3918$ €

Por tanto, el modelo que le saldrá más rentable a Julia es el *D*.

FORMAS DE PENSAR. Razonamiento matemático

98. Página 258

La media de los datos es $\bar{x} = \frac{3+18+12+6+9+24}{6} = \frac{72}{6} = 12$.

La media que resulta de dividir los datos entre 3 es $\bar{x} = \frac{1+6+4+2+3+8}{6} = \frac{24}{6} = 4$.

La segunda media es el resultado de dividir entre 3 a la primera.

99. Página 258

Es imposible, ya que, si la edad media aumenta quitando 5 músicos de 19 años, esto quiere decir que la media era mayor de 19 años, y si aumenta añadiendo 5 músicos de 17 años, significa que la media es inferior a 17, por lo que es imposible.

100. Página 258

$\bar{x} = \frac{4 \cdot 90 - 18}{4} = 85{,}5 \rightarrow$ El peso medio es 85,5 kg.

101. Página 258

La mediana, ya que la moda nos da el valor mínimo del salario mensual, mientras que la mayoría de la empresa cobra menos de la media (3 740 €).

102. Página 258

La correlación es mayor cuanto más se aproximan los puntos a una recta. Es este caso, las tres nubes de puntos se encuentran en una recta, por lo que la correlación es igual de fuerte en los tres casos.

PRUEBAS PISA

103. Página 258

$\bar{x} = \frac{60 \cdot 4 + 80}{5} = 64$ La media de las notas de los cinco exámenes es 64 puntos.

104. Página 258

a) Sumamos todas las estaturas y dividimos el resultado entre el número total de chicas, es decir 25.

b) 1) Falso

2) Falso

3) Falso

4) Falso

c) $\bar{x} = \frac{25 \cdot 130 - (1455 - 120)}{25} = 129 \text{ cm}$ La estatura media de las chicas es 129 cm.

Combinatoria

13

CLAVES PARA EMPEZAR

1. Página 260

a) Sucesos simples:

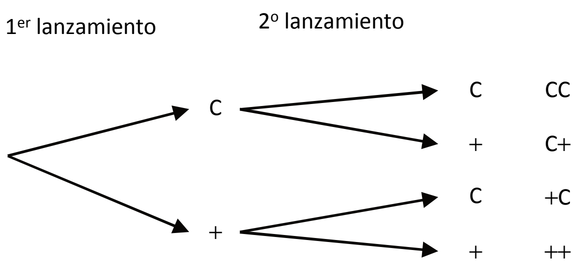
- Lanzar un dado rojo.
- Lanzar un dado azul.

b) Sucesos simples:

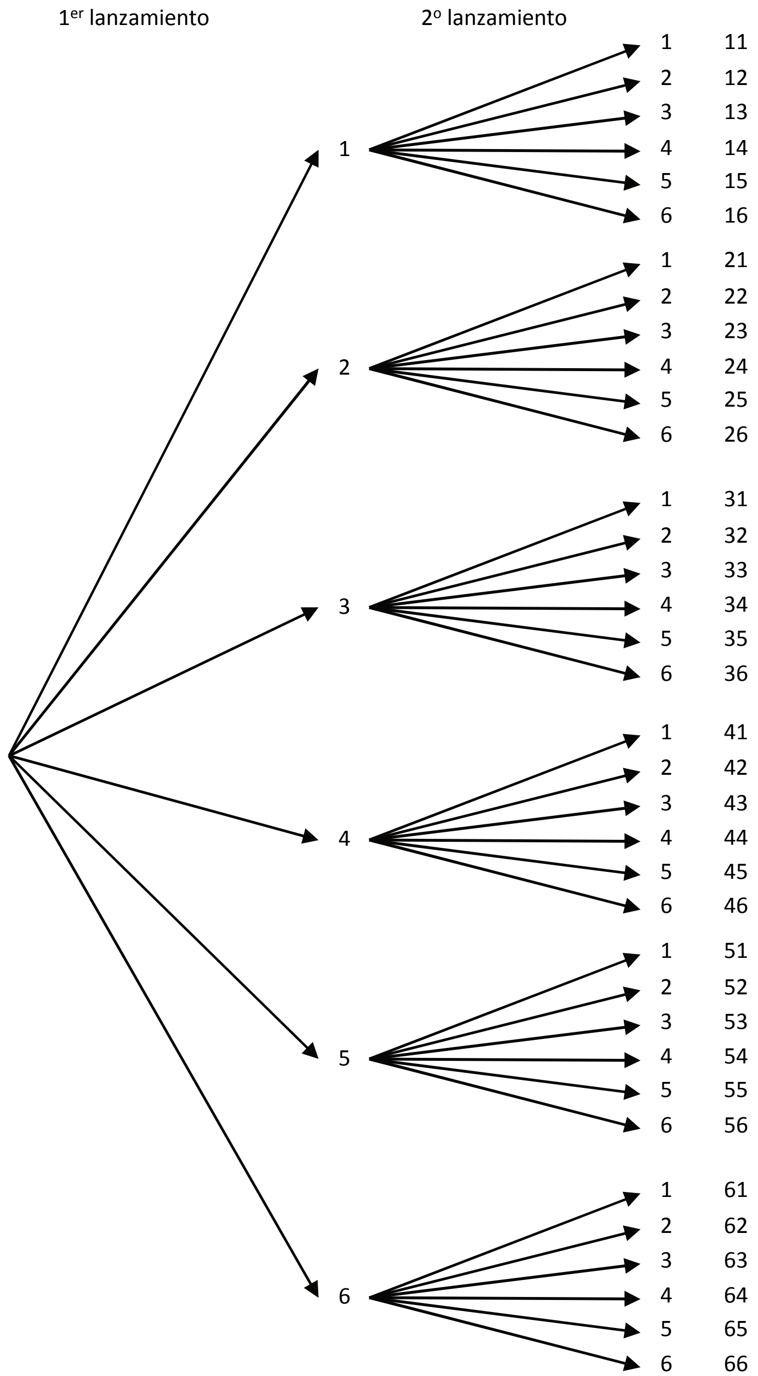
- Elegir 1 bola entre 3 y anotar el color.
- Elegir 1 bola entre las 2 que quedan y anotar el color de esta y de la que queda.

2. Página 260

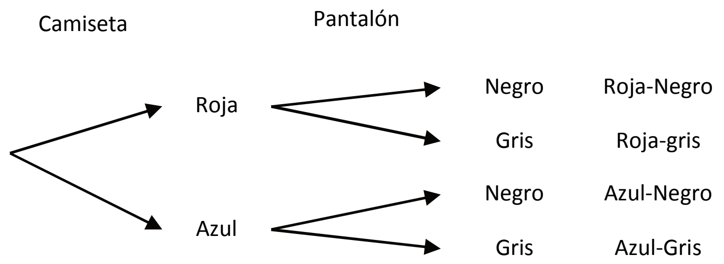
a)



b)


1^er lanzamiento
2º lanzamiento
1
2
3
4
5
6
1 11
2 12
3 13
4 14
5 15
6 16
1 21
2 22
3 23
4 24
5 25
6 26
1 31
2 32
3 33
4 34
5 35
6 36
1 41
2 42
3 43
4 44
5 45
6 46
1 51
2 52
3 53
4 54
5 55
6 56
1 61
2 62
3 63
4 64
5 65
6 66

c)


Camiseta
Pantalón
Roja
Azul
Negro Roja-Negro
Gris Roja-gris
Negro Azul-Negro
Gris Azul-Gris

VIDA COTIDIANA

EL LIBRO DIGITAL. Página 261

Cada libro, si lo consideramos indistinguibles, lo podemos introducir en cada una de las tres carpetas.

Si hubiera 1 solo libro habría 3 posibilidades.

Si hubiera 2 libros habría 6 posibilidades.

Si hubiera 3 libros habría 10 posibilidades.

Si hubiera 4 libros habría 15 posibilidades.

Si hubiera 5 libros habría 21 posibilidades.

Si hubiera 6 solo libro habría 28 posibilidades.

Si hubiera 7 libros habría 36 posibilidades.

Si hubiera 8 libros habría 45 posibilidades.

Si hubiera 9 libros habría 55 posibilidades.

Como hay 10 libros habrá 66 posibilidades de repartirlos en las 3 carpetas.

RESUELVE EL RETO

RETO 1. Página 265

$$\binom{m}{n}=\binom{m}{m-n}\rightarrow\binom{m}{1}=\binom{m}{m-1}\rightarrow\binom{m}{1}+\binom{m}{m-1}=2\cdot\binom{m}{1}=2\cdot\frac{m!}{1!(m-1)!}=2m$$

RETO 2. Página 267

Si todas las bolas fuesen distintas serían $P_6=6!$ extracciones.

Tenemos que eliminar las extracciones que son iguales, pero varían las bolas del mismo color. Por ejemplo, la extracción B1B2B3R1R2N es igual que la extracción B1B3B2R2R1N, ya que las dos serían la extracción «sacar primero las bolas blancas, después las rojas y después la negra», pero se han sacado las bolas de forma distinta.

Para ello, dividimos el total de extracciones entre las formas de escoger los conjuntos de bolas de cada color:

$\frac{P_6}{3!2!1!}=\frac{6!}{3!2!1!}=60$ formas hay de extraer las bolas.

ACTIVIDADES

1. Página 262

Es posible formar $6\cdot 6\cdot 6=216$ números.

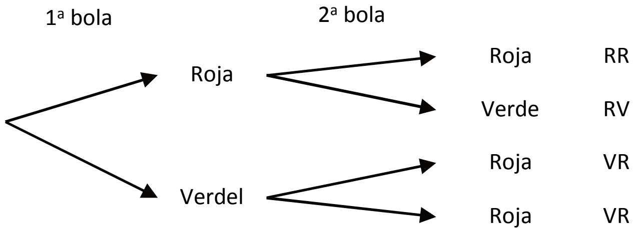
2. Página 262

El primer partido se escoge entre 12, el segundo entre 11, el tercero entre 10, ..., es decir el número de posibilidades es el producto: 12 · 11 · 10 · 9 · ...· 3 · 2 = 479 001 600

3. Página 262

Se pueden formar $2\cdot 4\cdot 3=24$ menús.

4. Página 262



Hay 3 posibilidades distintas.

5. Página 263

Las distintas combinaciones que se pueden dar son AA, AB, BA, BB, BC, CA y AC ⟶ Hay 7 posibilidades.

6. Página 263

Sea R = «Roja», Z = «Azul» y A = «Amarilla». Tenemos las siguientes posibilidades:

RAZ RZA ZRA ZAR ARZ AZR

Hay 6 formas de ordenarlas.

7. Página 263

Sea R = «Roja», A = «Azul» y N = «Amarilla». Tenemos las siguientes posibilidades:

RR RA RN AR AA AN NR NA

Hay 8 combinaciones posibles.

8. Página 263

Sea R = «Roja», A = «Azul», C = «Cara» y + = «Cruz». Tenemos las siguientes posibilidades:

CR CA +R +A

Hay 4 posibilidades.

9. Página 263

a) Se cumple si sale dos veces (6-6) ⟶ Hay 1 posibilidad.

b) Se cumple si sale 6-4 y 4-6 ⟶ Hay 2 posibilidades.

c) Estas son las posibilidades de que la suma sea 7:

2-5 4-3 6-1 3-4 5-2

Hay 5 posibilidades.

10. Página 264

a) $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{210}{6} = 35$

b) $\binom{5}{4}=\frac{5!}{4!(5-4)!}=\frac{5\cdot\cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{\cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot 1}=\frac{5}{1}=5$

c) $\binom{8}{5}=\frac{8!}{5!(8-5)!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot\cancel{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{\cancel{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{336}{6}=56$

d) $\binom{3}{1}=\frac{3!}{1!(3-1)!}=\frac{3\cdot\cancel{2\cdot 1}}{1\cdot\cancel{2\cdot 1}}=\frac{3}{1}=3$

e) $\binom{10}{0}=\frac{10!}{0!(10-0)!}=\frac{\cancel{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{1\cdot\cancel{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}=1$

f) $\binom{6}{4}=\frac{6!}{4!(6-4)!}=\frac{6\cdot 5\cdot\cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{\cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot 2\cdot 1}=\frac{30}{2}=15$

11. Página 264

a) $\binom{7}{3}+\binom{7}{4}=\frac{7!}{3!(7-3)!}+\frac{7!}{4!(7-4)!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot\cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{3\cdot 2\cdot 1\cdot\cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}+\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot\cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{\cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{210}{6}+\frac{210}{6}=35+35=70$

b) $\binom{3}{2}+\binom{5}{3}=\frac{3!}{2!(3-2)!}+\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{3\cdot\cancel{2\cdot 1}}{\cancel{2\cdot 1}\cdot 1}+\frac{5\cdot 4\cdot\cancel{3\cdot 2\cdot 1}}{\cancel{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 2\cdot 1}=\frac{3}{1}+\frac{20}{2}=13$

12. Página 264

a) $\frac{\binom{12}{3}}{3!}=\frac{\frac{12!}{3!(12-3)!}}{3!}=\frac{12!}{3!3!9!}=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot\cancel{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot\cancel{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}=\frac{1320}{36}=\frac{110}{3}$

b) $\frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{5}\cdot 5!}=\frac{\frac{4!}{2!(4-2)!}}{\frac{7!}{5!(7-5)!}\cdot 5!}=\frac{4!}{2!7!}=\frac{\cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 1\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot\cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}=\frac{1}{420}$

13. Página 265

a) $\binom{7}{6}+\binom{6}{6}+\binom{6}{0}=7+1+1=9$

b) $\binom{7}{3}-\binom{6}{2}-\binom{6}{3}=\binom{7}{3}-\binom{7}{3}=0$

c) $\binom{5}{5}+\binom{5}{1}-2\cdot\binom{5}{4}=1+5-2\cdot 5=-4$

d) $\binom{7}{6}-\binom{6}{6}-2\cdot\binom{5}{1}=7-1-2\cdot 5=-4$

14. Página 265

a) $\binom{11}{6}+\binom{11}{7}-5\cdot\binom{12}{11}=\binom{12}{7}-5\cdot 12=792-60=732$

b) $\binom{12}{7}+\binom{12}{5}=\binom{12}{7}+\binom{12}{7}=792+792=1584$

15. Página 265

Si $n=1\rightarrow\binom{1}{0}-\binom{1}{1}=1-1=0$

Si $n=2\rightarrow\binom{2}{0}-\binom{2}{1}+\binom{2}{2}=1-2+1=0$

Si $n=3\rightarrow\binom{3}{0}-\binom{3}{1}+\binom{3}{2}-\binom{3}{3}=1-3+3-1=0$

Si $n=4\rightarrow\binom{4}{0}-\binom{4}{1}+\binom{4}{2}-\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=1-4+6-4+1=0$

16. Página 266

a) $V_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2 \cdot 1}}{\cancel{2 \cdot 1}} = 12$

b) $VR_{6,3} = 6^3 = 216$

c) $V_{20,3} = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \cancel{17!}}{\cancel{17!}} = 6840$

d) $VR_{2,5} = 2^5 = 32$

e) $VR_{7,3} = 7^3 = 343$

17. Página 266

a) Tenemos que escoger 2 equipos tomados de un conjunto de 18.

- Importa el orden; no es lo mismo que un equipo juegue como local que como visitante.
- No se pueden repetir los elementos; un equipo no puede jugar contra él mismo.

$V_{18,2} = \frac{18!}{(18-2)!} = \frac{18 \cdot 17 \cdot \cancel{16!}}{\cancel{16!}} = 306$ partidos se tienen que jugar.

b) $\frac{306}{10} = 30,6 \rightarrow$ Habrá 31 jornadas en la liga.

18. Página 266

Tenemos que escoger 3 elementos de un conjunto de 5 elementos.

- Importa el orden; no es lo mismo que una cifra ocupe el lugar de las unidades, las decenas o las centenas.
- Se pueden repetir elementos; un número puede estar formado por cifras iguales.

$VR_{5,3} = 5^3 = 125$ números distintos se pueden formar.

19. Página 266

Tenemos que escoger 3 elementos de un conjunto de 10 elementos.

- Importa el orden; no es lo mismo que una letra ocupe un lugar u otro.
- No se pueden repetir elementos; tenemos 10 letras diferentes para escoger.

$V_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ palabras distintas se pueden formar.

Hay 5 opciones para que empiece por vocal. Después nos quedan 2 letras por escoger de entre 9 diferentes que siguen las mismas pautas que antes.

$5 \cdot V_{9,2} = 5 \cdot \frac{9!}{(9-2)!} = 5 \cdot 9 \cdot 8 = 360$ palabras empiezan por vocal.

20. Página 267

a) $P_2 = 2! = 2 \cdot 1 = 2$

b) $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

c) $P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040$

d) $P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$

21. Página 267

Tenemos que contar las posibles listas de 8 candidatos que se podrían formar.

- Importa el orden; no es lo mismo que un candidato aparezca primero o segundo en la lista.
- No se pueden repetir elementos; un candidato no puede aparecer dos veces en la lista.

$P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$

22. Página 267

Tenemos que ver el número de banderas que podemos formar.

- Influye el orden de los colores.
- No se pueden repetir.

Número de banderas de 2 colores en horizontal: $V_{3,2} = \dfrac{3!}{(3-2)!} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Número de banderas de 2 colores en vertical: $V_{3,2} = \dfrac{3!}{(3-2)!} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Número de banderas de 3 colores en horizontal: $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Número de banderas de 3 colores en vertical: $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Número total de banderas posibles: $6 + 6 + 6 + 6 = 24$

23. Página 268

a) $C_{7,4} = \binom{7}{4} = \dfrac{7!}{4!(7-4)!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{210}{6} = 35$

b) $C_{8,3} = \binom{8}{3} = \dfrac{8!}{3!(8-3)!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{5!}} = \dfrac{336}{6} = 56$

c) $C_{5,1} = \binom{5}{1} = 5$

d) $C_{10,7} = \binom{10}{7} = \dfrac{10!}{7!(10-7)!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{720}{6} = 120$

24. Página 268

Tenemos que escoger 2 sabores de un conjunto de 6 sabores distintos.

- No importa el orden; da igual que sabor escojamos antes y cual después.
- No se pueden repetir elementos; queremos comprar un helado de dos sabores distintos

$C_{6,2} = \binom{6}{2} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2!(6-2)!} = \dfrac{30}{2} = 15$

25. Página 268

Tenemos que escoger 1, 2, 3 o 4 colores para mezclar.

- No importa el orden; da igual que el color echemos antes o después a la mezcla.
- No podemos repetir elementos.

Mezclas de un color: $C_{4,1}=\binom{4}{1}=4$

Mezclas de dos colores: $C_{4,2}=\binom{4}{2}=\frac{4\cdot 3\cdot 2!}{2!(4-2)!}=\frac{12}{2}=6$

Mezclas de tres colores: $C_{4,3}=\binom{4}{3}=4$

Mezclas de cuatro colores: $C_{4,4}=\binom{4}{4}=1$

Mezclas posibles: $4+6+4+1=15$

26. Página 268

$$C_{x+5,\,x+1}=C_{x+5,\,2x}\rightarrow\binom{x+5}{x+1}=\binom{x+5}{2x}\rightarrow\begin{cases}x+5-x-1=2x\rightarrow x=2\rightarrow C_{7,3}=C_{7,4}\\ x+1=2x\rightarrow x=1\rightarrow C_{6,2}=C_{6,2}\end{cases}$$

27. Página 269

El alumno tiene que escoger 4 preguntas de un total de 5.

- No importa el orden; da igual el orden en que haga las preguntas.
- No se pueden repetir elementos; no puede hacer la misma pregunta 2 veces.

$C_{5,4}=\binom{5}{4}=5\rightarrow$ El alumno puede hacer 5 exámenes distintos.

28. Página 269

Tenemos que distribuir 2 alumnos entre 4 cuatro clases distintas.

- Importa el orden; importa qué hermano va en cada clase.
- No se pueden repetir elementos; un hermano no puede ir a dos clases distintas.

$V_{4,2}=\frac{4!}{(4-2)!}=\frac{4\cdot 3\cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}}=12\rightarrow$ Hay 12 formas posibles de asignar a los hermanos en las 4 clases.

29. Página 269

Hay tantas pulseras distintas como ordenaciones de las diferentes bolas.

$P_{10}=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=3628800$

Hay 3 628 800 formas diferentes de colocar las bolas.

30. Página 269

$P_3=3\cdot 2\cdot 1=6\rightarrow$ El estudiante tiene 6 formas distintas de organizarse.

31. Página 269

Tenemos que coger 7 camisetas de un conjunto de 10.

- Importa el orden; no es lo mismo ponerse una camiseta un día que otro.
- No se pueden repetir elementos; Cristina se pone una camiseta diferente cada día.

$V_{10,7} = \frac{10!}{(10-7)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 604800$ formas distintas de ponerse las camisetas.

Para escoger pantalones, tenemos que elegir un pantalón para cada día:

- Importa el orden; importa el día que se pone cada pantalón.
- Se pueden repetir elementos; se pone el mismo pantalón varios días.

$VR_{3,7} = 3^7 = 2187$ formas distintas de ponerse los pantalones.

La elección del pantalón es independiente de la elección de la camiseta. Por la regla del producto, podemos obtener el número de conjuntos distintos:

$604\,800 \cdot 2187 = 1\,322\,697\,600$ conjuntos de ropa distintos se pueden formar.

32. Página 269

Tenemos que escoger un o dos tipos de aceitunas de un conjunto de 5.

- No importa el orden; da igual qué aceituna echemos antes o después.
- No se pueden repetir elementos; nos interesa ver los aceites con distintos tipos de aceitunas.

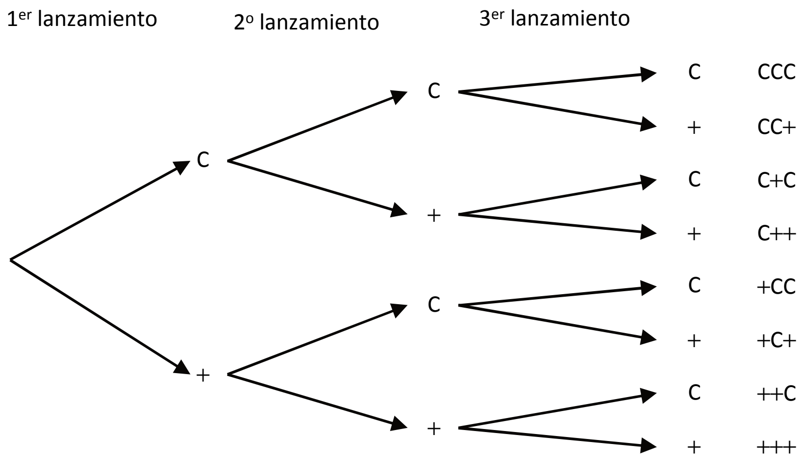
Aceites de un tipo de aceituna: $C_{5,1} = \binom{5}{1} = 5$

Aceites de dos tipos de aceituna: $C_{5,2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{3!}} = 10$

Pueden hacer $5 + 10 = 15$ tipos diferentes de aceite.

ACTIVIDADES FINALES

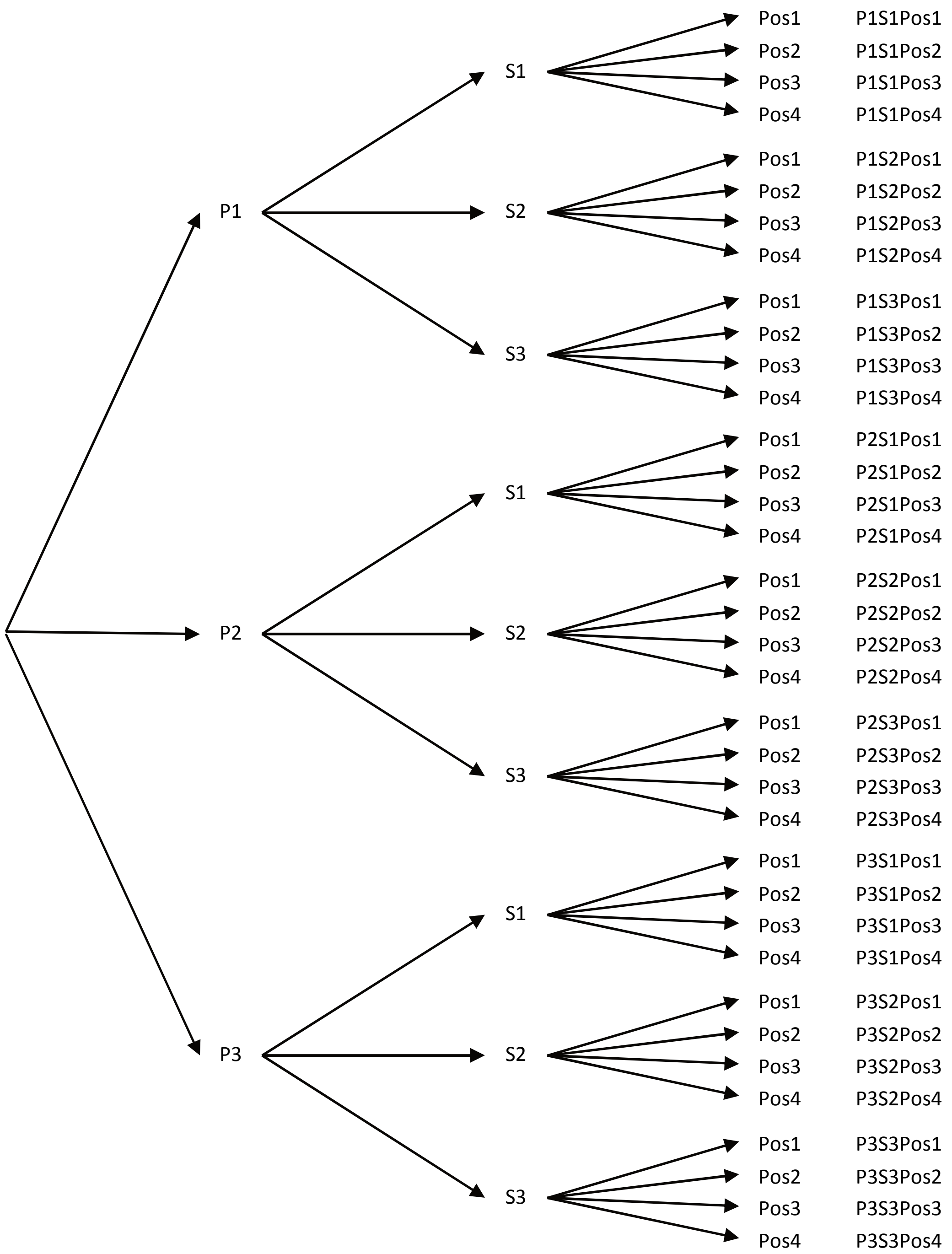
33. Página 270



Hay 8 resultados posibles.

34. Página 270

Sea P = «Primero», S = «Segundo» y Pos = «Postre». Tenemos las siguientes posibilidades:



Hay $3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$ menús diferentes.

35. Página 270

Sea A = «Azul», N = «Negra» y Na = «Naranja». Tenemos las siguientes posibilidades:

AA AN ANa NA NN NNa NaA NaN NaNa

Hay 9 posibilidades.

36. Página 270

Sea T = «Tipo de árbol». Tenemos las siguientes posibilidades:

T1T1T1 T1T1T2 T1T2T1 T1T2T2 T2T1T1 T2T1T2 T2T2T1 T2T2T2

Hay 8 posibilidades.

37. Página 270

Para que comiencen por una cifra par, estas son las posibilidades:

211	212	213	214	221	222	223	224
231	232	233	234	241	242	243	244
411	412	413	414	421	422	423	424
431	432	433	434	441	442	443	444

Hay 32 números que empiecen por cifra par.

Para que comiencen y terminen por una cifra impar, estas son las posibilidades:

111	113	121	123	131	133	141	146
311	313	321	323	331	333	341	346

Hay 16 números que empiezan y terminan en cifra impar.

38. Página 270

Los números que podríamos formar son:

11	12	13	14	15	16	21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36	41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56	61	62	63	64	65	66

El número más grande es 66.

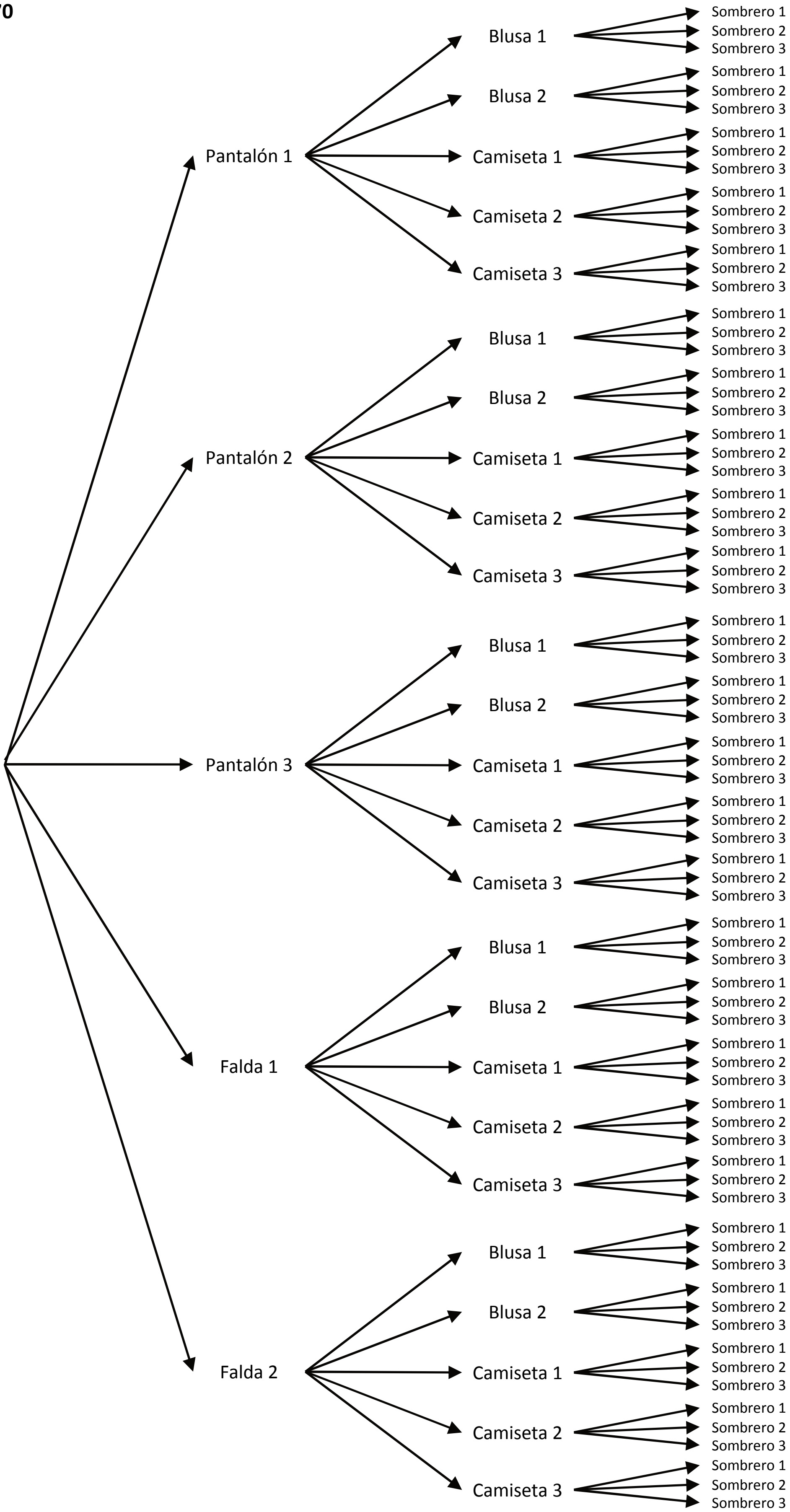
Empiezan por 3 seis números.

39. Página 270

Sea L = «Limón», F = «Fresa», M = «Menta» y N = «Naranja». Tenemos las siguientes posibilidades:

1L 1F 2L 2F 3M 3N 4M 4N 5M 5N 6M 6N

40. Página 270



Pueden crearse 75 combinaciones distintas.

41. Página 270

a) $\binom{17}{15}=\dfrac{17!}{15!(17-15)!}=\dfrac{17\cdot16\cdot15!}{15!\cdot2\cdot1}=136$

b) $\binom{14}{11}=\dfrac{14!}{11!(14-11)!}=\dfrac{14\cdot13\cdot12\cdot11!}{11!\cdot3\cdot2\cdot1}=364$

c) $\binom{8}{4}=\dfrac{8!}{4!(8-4)!}=\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4!}{4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot4!}=\dfrac{1680}{24}=70$

d) $\binom{9}{3}=\dfrac{9!}{3!(9-3)!}=\dfrac{9\cdot8\cdot7\cdot6!}{3\cdot2\cdot1\cdot6!}=\dfrac{504}{6}=84$

e) $\binom{13}{11}=\dfrac{13!}{11!(13-11)!}=\dfrac{13\cdot12\cdot11!}{11!\cdot2\cdot1}=78$

f) $\binom{22}{21}=\dfrac{22!}{21!(22-21)!}=\dfrac{22\cdot21!}{21!\cdot1}=22$

42. Página 270

a) $\binom{16}{14}=\dfrac{16!}{14!(16-14)!}=\dfrac{16\cdot15\cdot14!}{14!\cdot2\cdot1}=120$

b) $\binom{70}{3}+\binom{70}{4}=\binom{71}{4}=\dfrac{71\cdot70\cdot69\cdot68\cdot67!}{4!\cdot67!}=971635$

43. Página 270

a) $\binom{17}{16}-\binom{8}{1}-\binom{9}{1}+\binom{15}{0}=17-8-9+1=1$

b) $3\binom{3}{2}-2\binom{4}{2}+\binom{10}{9}-\binom{2}{2}=3\cdot3-2\cdot\dfrac{4!}{2!2!}+10-1=18-2\cdot\dfrac{4\cdot3\cdot2!}{2\cdot1\cdot2!}=18-12=6$

c) $\binom{15}{0}-\binom{7}{1}-\binom{5}{2}+\binom{11}{10}=1-7-\dfrac{5!}{2!3!}+11=5-\dfrac{5\cdot4\cdot3!}{2\cdot1\cdot3!}=5-10=-5$

d) $\binom{7}{5}-5\binom{8}{0}-\binom{7}{1}+2\binom{5}{2}=\dfrac{7!}{5!2!}-5-7+2\cdot\dfrac{5!}{2!3!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5!}{5!\cdot2\cdot1}-12+2\cdot\dfrac{5\cdot4\cdot3!}{2\cdot1\cdot3!}=21-12+20=29$

44. Página 270

a) $\binom{7}{6}-\binom{8}{0}-\binom{5}{1}=7-1-5=1$

b) $\binom{4}{3}-\binom{12}{2}+\binom{12}{10}=4-\binom{12}{10}+\binom{12}{10}=4$

c) $2\binom{6}{5}-4\binom{7}{5}+\binom{7}{1}+2\binom{6}{4}=2\binom{7}{5}-4\binom{7}{5}+7=-2\binom{7}{5}+7=-2\cdot\dfrac{7!}{5!2!}+7=-2\cdot\dfrac{7\cdot6\cdot5!}{5!\cdot2\cdot1}+7=-42+7=-35$

d) $\binom{8}{3}-\binom{7}{4}-\binom{7}{5}-2\binom{8}{5}=\binom{8}{5}-\binom{8}{5}-2\binom{8}{5}=-2\binom{8}{5}=-2\cdot\dfrac{8!}{5!3!}=-2\cdot\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5!}{5!\cdot3\cdot2\cdot1}=-112$

45. Página 270

a) $\binom{9}{5}+\binom{9}{6}=\binom{10}{6}=210$

b) $\binom{10}{4}+\binom{10}{0}=\binom{10}{6}+1=211$

46. Página 270

a) Si $n=1 \longrightarrow \binom{1}{0}=1$

Si $n=2 \longrightarrow \binom{2}{1}=\frac{2!}{1!1!}=2$

Si $n=3 \longrightarrow \binom{3}{2}=\frac{3!}{2!1!}=3$

Si $n=4 \longrightarrow \binom{4}{3}=\frac{4!}{3!1!}=4$

b) Si $n=2 \longrightarrow \binom{2}{0}=1=\frac{1}{2}(2^2-2)$

Si $n=3 \longrightarrow \binom{3}{1}=\frac{3!}{1!2!}=3=\frac{1}{2}(3^2-3)$

Si $n=4 \longrightarrow \binom{4}{2}=\frac{4!}{2!2!}=6=\frac{1}{2}(4^2-4)$

Si $n=5 \longrightarrow \binom{5}{3}=\frac{5!}{3!2!}=10=\frac{1}{2}(5^2-5)$

47. Página 271

a) $V_{6,3}=\frac{6!}{3!}=6\cdot 5\cdot 4=120$

b) $V_{10,2}=\frac{10!}{8!}=10\cdot 9=90$

c) $V_{19,4}=\frac{19!}{15!}=19\cdot 18\cdot 17\cdot 16=93024$

d) $VR_{4,3}=4^3=64$

e) $VR_{20,5}=20^5=3200000$

f) $VR_{17,4}=17^4=83521$

48. Página 271

a) $V_{4,2}=\frac{4!}{2!}=4\cdot 3=12$

b) $VR_{3,1}=3^1=3$

c) $V_{8,3}=\frac{8!}{5!}=8\cdot 7\cdot 6=336$

d) $VR_{5,3}=5^3=125$

e) $VR_{7,2}=7^2=49$

f) $V_{10,5}=\frac{10!}{5!}=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6=30240$

g) $VR_{6,4}=6^4=1296$

h) $V_{10,9}=\frac{10!}{1!}=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2=3628800$

49. Página 271

a) $V_{m,2}=\frac{m!}{(m-2)!}=m\cdot(m-1)=12\rightarrow m^2-m-12=0\rightarrow m=\frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot 12}}{2}\rightarrow\begin{cases}m_1=4\\ m_2=3\end{cases}$

b) $VR_{3,m}=3^m=81\rightarrow 3^m=3^4\rightarrow m=4$

c) $V_{m,4}=\frac{m!}{(m-4)!}=m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot(m-3)=360\rightarrow\left\{\begin{array}{l}m=4\rightarrow 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24\neq 360\\ m=5\rightarrow 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2=120\neq 360\\ m=6\rightarrow 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3=360\end{array}\right\}\rightarrow m=6$

d) $VR_{m,5}=m^5=32\rightarrow m^5=2^5\rightarrow m=2$

50. Página 271

Para elegir los números tenemos que escoger 4 elementos de entre 10 cifras posibles. Para elegir las letras tenemos que escoger 3 elementos de entre 21 letras posibles.

- Importa el orden; la matrícula 1222ABB es distinta de 2122BAB.
- Se pueden repetir elementos; una misma cifra o letra puede aparecer varias veces en la misma matrícula.

Posibles números: $VR_{10,4} = 10^4 = 10000$

Posibles letras: $VR_{21,3} = 21^3 = 9261$

La elección de los números y de las letras es independiente. Por tanto, el número de matrículas diferentes se deduce por la regla del producto.

Se pueden hacer 10 000 · 9 261 = 92 610 000 matrículas diferentes.

51. Página 271

Tenemos que escoger 6 números de 50 posibles.

- No importa el orden; es un conjunto de 6 números.
- No se pueden repetir elementos; una vez escogido un número no lo podemos volver a elegir.

$C_{50,6} = \binom{50}{6} = 15890700$ $\rightarrow$ Hay 15 890 700 posibles conjuntos de 6 números distintos.

52. Página 271

Tenemos que escoger entre 3 opciones para cada fila.

- Importa el orden; no es lo mismo determinar el resultado del primer partido que del último.
- Se pueden repetir elementos; se puede determinar que dos partidos van a tener el mismo resultado.

$VR_{3,14} = 3^{14} = 4782969$ posibilidades para rellenar una columna de la quiniela.

53. Página 271

Tenemos que escoger 15 butacas de un conjunto de 19.

- Importa el orden; depende de qué espectador se sienta en cada butaca.
- No se pueden repetir elementos; dos espectadores no se pueden sentar en la misma butaca.

$V_{19,15} = \frac{19!}{4!} = 5068545850368000$ formas de sentarse en la fila del cine los 15 espectadores.

54. Página 271

Tenemos que escoger 4 elementos de un conjunto de 5.

- Importa el orden; AMIG y MIGA son palabras distintas.
- No se pueden repetir elementos; tenemos 5 letras diferentes para formar palabras.

$V_{5,4} = \frac{5!}{1!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ palabras se podrían formar.

55. Página 271

Tenemos que escoger 4 elementos de un conjunto de 7.

- Importa el orden; dos banderas con los mismos colores pueden ser diferentes.
- No se pueden repetir elementos; tenemos 7 colores disponibles para elegir 4.

$V_{7,4}=\frac{7!}{3!}=7\cdot 6\cdot 5\cdot 4=840$ $\rightarrow$ Se podrían formar 840 banderas.

56. Página 271

Tenemos que escoger entre 2 elementos 3 veces.

- Importa el orden de las rondas.
- Se pueden repetir elementos; dos rondas pueden ser iguales.

$VR_{2,3}=2^3=8$ $\rightarrow$ Pueden darse 8 combinaciones diferentes en 3 rondas.

57. Página 271

Para ganar, en cada ronda yo puedo sacar cualquiera de los 3 elementos y mi rival tiene que sacar el elemento que pierda contra el que yo saque. Por tanto, tenemos que escoger entre 3 elementos 4 veces.

- Importa el orden de las rondas.
- Se pueden repetir elementos; dos rondas pueden ser iguales.

$VR_{3,4}=3^4=81$ $\rightarrow$ Pueden darse 81 combinaciones diferentes de ganar en 4 rondas.

58. Página 271

a) $P_4=4!=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$

b) $P_7=7!=7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=5040$

c) $P_8=8!=8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=40320$

d) $P_2=2!=2\cdot 1=2$

59. Página 271

a) $P_6=6!=720$

b) $P_{11}=11!=39916800$

c) $P_{19}=19!=121645100408832000$

d) $P_8=8!=40320$

e) $P_{20}=20!=2432902008176640000$

f) $P_{17}=17!=355687428096000$

g) $P_{10}=10!=3628800$

h) $P_{15}=15!=1307674368000$

60. Página 271

a) $P_m=6\rightarrow m!=6\rightarrow 3!=3\cdot 2\cdot 1\rightarrow m=3$

b) $P_m=120\rightarrow m!=120\rightarrow 5!=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120\rightarrow m=5$

c) $P_m=720\rightarrow m!=720\rightarrow 6!=6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=720\rightarrow m=6$

d) $P_m=5040\rightarrow m!=5040\rightarrow 7!=7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=5040$

61. Página 271

Podemos formar palabras de 1, 2, 3 o 4 letras:

De 4 letras: $P_4 = 4! = 24$

De 2 letras: $V_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$

De 3 letras: $V_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$

De 1 letra: $V_{4,1} = \frac{4!}{(4-1)!} = 4$

En total podemos formar $24 + 24 + 12 + 4 = 64$ palabras.

62. Página 271

a) Los posibles números son las distintas ordenaciones de los números 1, 2, 3 y 4.

$P_4 = 4! = 24$

b) Acaban en cifra impar si acaban en 1 o en 3. Y tenemos que ordenar las otras 3 cifras.

$2 \cdot P_3 = 2 \cdot 3! = 12$

c) Empiezan por 3, tenemos que contar las posibles ordenaciones de las otras 3 cifras.

$P_3 = 3! = 6$

63. Página 271

a) $C_{6,4} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

b) $C_{10,2} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$

c) $C_{19,4} = \binom{19}{4} = \frac{19!}{4!15!} = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3876$

d) $C_{4,3} = \binom{4}{3} = 4$

e) $C_{20,5} = \binom{20}{5} = \frac{20!}{5!15!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15504$

64. Página 271

a) $C_{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$

b) $C_{3,1} = \binom{3}{1} = 3$

c) $C_{8,3} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$

d) $C_{5,3} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

e) $C_{7,2} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$

f) $C_{10,5} = \binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 252$

g) $C_{6,4} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

h) $C_{10,9} = \binom{10}{9} = 10$

65. Página 271

a) $C_{27,m} = C_{27,2m} \rightarrow \binom{27}{m} = \binom{27}{2m} \rightarrow \begin{cases} m = 2m \rightarrow m = 0 \\ m = 27 - 2m \rightarrow m = 9 \end{cases}$

b) $C_{101,1} = C_{101,m^2} \rightarrow \binom{101}{1} = \binom{101}{m^2} \rightarrow \begin{cases} 1 = m^2 \rightarrow m = \pm 1 \\ 1 = 101 - m^2 \rightarrow m = \pm 10 \end{cases}$

c) $C_{5,m+1}=10 \rightarrow \binom{5}{m+1}=10$

Si $m=-1$ o $m=4 \rightarrow \binom{5}{0}=\binom{5}{5}=1\neq 10$

Si $m=0$ o $m=3 \rightarrow \binom{5}{1}=\binom{5}{4}=5\neq 10$

Si $m=2$ o $m=2 \rightarrow \binom{5}{2}=\binom{5}{3}=\frac{5!}{2!3!}=10 \rightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=3 \end{cases}$

d) $C_{10,2m}=1 \rightarrow \binom{10}{2m}=1 \rightarrow \begin{cases} 2m=0 \rightarrow m=0 \\ 2m=10 \rightarrow m=5 \end{cases}$

66. Página 271

La suma de los lados y de las diagonales de un hexágono regular viene dada por las posibles elecciones de dos de los vértices del hexágono.

- No importa el orden; el mismo lado o diagonal une un vértice con otro, y este último con el primero.
- No se pueden repetir elementos; un vértice no se une con el mismo mediante un lado o diagonal.

$C_{6,2}=\binom{6}{2}=\frac{6!}{2!4!}=\frac{6\cdot 5}{2}=15$ $\rightarrow$ Un hexágono regular tiene 15 lados y diagonales.

Un eneágono regular tiene 9 vértices.

$C_{9,2}=\binom{9}{2}=\frac{9!}{2!7!}=\frac{9\cdot 8}{2}=36$ $\rightarrow$ Un eneágono tiene 36 lados y diagonales.

Un polígono con n vértices tiene $C_{n,2}=\binom{n}{2}$ lados y diagonales.

67. Página 272

Tenemos que ver las distintas posiciones que cada jugador puede ocupar en la fila.

- Importa el orden; no es lo mismo que un jugador tire el primero o el segundo.
- No se pueden repetir elementos; un jugador no tira dos veces.

$P_5=5!=120$ $\rightarrow$ Se pueden poner de 120 formas posibles.

68. Página 272

Tenemos que escoger 4 elementos de un conjunto de 7.

- Importa el orden; no es lo mismo la palabra DECI que EDCI.
- No se pueden repetir elementos; tenemos 7 letras distintas para escoger.

$V_{7,4}=\frac{7!}{3!}=7\cdot 6\cdot 5\cdot 4=840$ $\rightarrow$ Se pueden formar 840 palabras de 4 letras.

Para ver la posición que ocupa LEMA por orden alfabético, tenemos que contar las palabras que empiezan por M y las palabras que empiezan por LM, todas las demás estarán antes que LEMA.

Palabras que empiezan por M: $V_{6,3}=\frac{6!}{3!}=6\cdot 5\cdot 4=120$ Palabras que empiezan por LM: $V_{5,3}=\frac{5!}{3!}=5\cdot 4=20$

En orden alfabético, LEMA ocupa la posición $840-120-20=600$.

69. Página 272

Tenemos que escoger 5 elementos de un conjunto de 25.

- No importa el orden; da igual en qué lugar elijamos a cada alumno.
- No se pueden repetir elementos; los grupos están formados por 5 alumnos distintos.

$C_{25,5} = \binom{25}{5} = \frac{25!}{5!20!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 53130$ posibilidades para hacer el primer grupo de 5.

$C_{20,5} = \binom{20}{5} = \frac{20!}{5!15!} = 15504$ posibilidades para hacer el segundo grupo de 5.

$C_{15,5} = \binom{15}{5} = \frac{15!}{5!10!} = 3003$ posibilidades para hacer el tercer grupo de 5.

$C_{10,5} = \binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = 252$ posibilidades para hacer el cuarto grupo de 5.

El número total de posibilidades es el producto de las anteriores:

53 130 · 15 504 · 3 003 · 252 = 623 360 743 125 120

70. Página 272

a) Tenemos que elegir 5 elementos en un conjunto de 5 juguetes.

- Importa el orden; importa quién coge cada juguete.
- Se pueden repetir elementos; dos niños pueden jugar con el mismo juguete.

$VR_{5,5} = 5^5 = 3125 \rightarrow$ Se pueden repartir de 3 125 formas.

b) Tenemos que escoger 3 juguetes entre 7 niños.

$VR_{3,7} = 3^7 = 2187 \rightarrow$ Se pueden repartir de 2 187 formas.

71. Página 272

Tenemos que escoger 4 elementos de un conjunto de 7.

- Importa el orden; no es lo mismo 2 034 que 3 240.
- No se pueden repetir elementos; tenemos 7 cifras distintas para escoger.

$V_{7,4} = \frac{7!}{3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

Tenemos que restarle a esta cantidad los números que empiezan por 0. Para saber cuántos hay, debemos escoger 3 elementos de un conjunto de 6.

$V_{6,3} = \frac{6!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120 \rightarrow$ Se pueden formar $840 - 120 = 720$ números de 4 cifras.

Para ver los números de 5 cifras tenemos que elegir 5 elementos de un conjunto de 7.

$V_{7,5} = \frac{7!}{2!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$

Tenemos que restarle a esta cantidad los números que empiezan por 0. Para saber cuántos hay, debemos escoger 4 elementos de un conjunto de 6.

$V_{6,4} = \frac{6!}{2!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360 \rightarrow$ Se pueden formar $2\,520 - 360 = 2\,160$ números de 5 cifras.

72. Página 272

Tenemos que escoger 4 elementos de un conjunto de 20.

- No importa el orden; da igual en qué lugar elijamos a cada bombero.
- No se pueden repetir elementos; las cuadrillas están formadas por 4 bomberos distintos.

$C_{20,4} = \binom{20}{4} = \frac{20!}{4!16!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 4845$ cuadrillas diferentes se pueden hacer.

73. Página 272

Tenemos que escoger 6 elementos de un conjunto de 12.

- No importa el orden; da igual en qué lugar elijamos a cada remero.
- No se pueden repetir elementos; las tripulaciones están formadas por 6 remeros distintos.

$C_{12,6} = \binom{12}{6} = \frac{12!}{6!6!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 924$ tripulaciones diferentes se pueden hacer.

74. Página 272

Tenemos que ver los conjuntos de 2 directivos de un conjunto de 10 personas.

- No importa el orden; los directivos se saludan mutuamente, no importa quién saluda a quién.
- No se pueden repetir elementos; un directivo no se saluda a sí mismo.

$C_{10,2} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ apretones de manos diferentes.

75. Página 272

Tenemos que escoger 4 elementos de un conjunto de 20.

- No importa el orden; da igual en qué lugar elijamos a cada invitado.
- No se pueden repetir elementos; los grupos están formados por 4 personas distintas.

$C_{20,4} = \binom{20}{4} = \frac{20!}{4!16!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 4845 \rightarrow$ Se pueden hacer 4 845 grupos diferentes.

76. Página 272

Tenemos que escoger 9 elementos de un conjunto de 200.

- Importa el orden; importa qué puesto ocupa cada persona.
- No se pueden repetir elementos; cada persona ocupa un puesto de trabajo.

$V_{200,9} = \frac{200!}{191!} = 426545572966216704000$ formas diferentes de completar los puestos de trabajo.

77. Página 272

Primero veamos las posibles colocaciones de los dígitos. Tenemos que ver las posibles ordenaciones de los elementos 1, 2, 3, 4 ,5, 7.

- Importa el orden; no es lo mismo 123 457, que 132 457.
- No se pueden repetir elementos; una misma cifra no aparece 2 veces.

$P_7 = 7! = 5040$

Ahora, tenemos que decidir donde situamos los símbolos «·». Hay que escoger 2 posiciones entre 5 posibles.

- No importa el orden; da igual el lugar que escojamos primero para poner el producto.
- No podemos repetir elementos; cada símbolo va en una posición diferente.

$$C_{5,2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

La elección del orden de los números y la posición de los productos es independiente. Utilizamos la regla del producto: se pueden obtener 5 040 · 10 = 50 400 productos distintos.

78. Página 272

a) Tenemos que escoger 2 ingredientes entre 4 posibles.

- No importa el orden; da igual el lugar en que escojamos cada ingrediente.
- No podemos repetir elementos; cada ingrediente aparece una vez.

$C_{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \longrightarrow$ Se pueden elaborar 6 platos diferentes con dos ingredientes.

b) Tenemos que escoger 3 ingredientes de un conjunto de 4.

$C_{4,3} = \binom{4}{3} = 4$ platos diferentes se pueden hacer con 3 ingredientes.

79. Página 272

Tenemos que ver los conjuntos de 2 pueblos de un conjunto de 9 pueblos.

- No importa el orden; da igual en qué orden elijamos los pueblos que se quieren unir.
- No se pueden repetir elementos; un pueblo no se une con sí mismo.

$C_{9,2} = \binom{9}{2} = \frac{9!}{2!7!} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ caminos diferentes.

80. Página 272

Tenemos que escoger 4 elementos de un conjunto de 10 cifras.

- Importa el orden; importa qué puesto ocupa cada cifra.
- Se pueden repetir elementos; se puede repetir cada cifra.

$VR_{10,4} = 10^4 = 10000$ códigos PIN diferentes.

82. Página 272

a) Tenemos que escoger 5 elementos de un conjunto de 4 números.

- Importa el orden; importa qué puesto ocupa cada cifra.
- Se pueden repetir elementos; en dos lanzamientos distintos puede salir la misma cifra.

$VR_{4,5} = 4^5 = 1024 \rightarrow$ Se pueden formar 1 024 números.

b) Para dar números pares la última cifra tiene que ser par, por tanto, hay dos opciones para la última cifra. Tenemos que escoger 4 elementos de 4 posibilidades para las primeras 4 tiradas.

$2 \cdot VR_{4,4} = 2 \cdot 4^4 = 512 \rightarrow$ Se pueden formar 512 números pares.

c) Tenemos que escoger 3 elementos de un conjunto de 4.

$VR_{4,3} = 4^3 = 64 \rightarrow$ Se pueden formar 64 números que empiecen por 43.

d) Tenemos que escoger 3 elementos de un conjunto de 4.

$VR_{4,3} = 4^3 = 64 \rightarrow$ Se pueden formar 64 números que empiecen por 3 y acaben en 1.

83. Página 273

a) Tenemos que escoger 4 elementos de un conjunto de 5 letras.

- Importa el orden; no es lo mismo la palabra ENTR que NETR.
- No se pueden repetir letras.

$V_{5,4} = \frac{5!}{1!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120 \rightarrow$ Hay 120 palabras distintas de 4 letras sin repetir letras.

b) Tenemos que escoger 4 elementos de un conjunto de 5 letras.

- Importa el orden; no es lo mismo la palabra ENTR que NETR.
- Se pueden repetir letras.

$VR_{5,4} = 5^4 = 625 \rightarrow$ Hay 625 palabras distintas de 4 letras repitiendo letras.

c) Tenemos que escoger 6 elementos de un conjunto de 5 letras.

- Importa el orden; no es lo mismo la palabra ENTERO que NETERO.
- Se pueden repetir letras: sin repetir no podríamos hacer palabras de 6 letras.

$VR_{5,6} = 5^6 = 15625 \rightarrow$ Hay 15 625 palabras distintas de 6 letras.

d) Tenemos que contar todas las palabras que empiezan por T, menos las que empiezan por TEE, las que empiezan por TEN y por TEO.

Para escoger las que empiezan por T tenemos que escoger 3 elementos de entre 5, pudiendo repetir letras.

$VR_{5,3} = 5^3 = 125$

Para escoger las que empiezan por TEE, TEN y TEO tenemos que escoger 1 elemento de entre 5 posibles, pudiendo repetir letras.

$3 \cdot VR_{5,1} = 3 \cdot 5 = 15$

En orden alfabético, hay $125 - 15 = 110$ palabras después de la palabra TERE.

La palabra TERE ocupa el lugar $625 - 110 = 505$.

84. Página 273

Tenemos que contar las posibles listas de siete candidatos que se podrían formar.

- Importa el orden; no es lo mismo que un candidato aparezca primero o segundo en la lista.
- No se pueden repetir elementos; un candidato no puede aparecer dos veces en la lista.

$P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ → La lista se puede organizar de 5 040 formas.

Tenemos que escoger 3 elementos de un conjunto de 7.

- No importa el orden; una vez elegido el concejal da igual la posición que ocupase en la lista.
- No se pueden repetir elementos; un candidato no puede aparecer dos veces en la lista.

$C_{7,3} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$ son las formas en las que se pueden cubrir los puestos.

85. Página 273

Tenemos que contar las posibles ordenaciones de los 7 libros que se podrían formar.

- Importa el orden; importa la posición de cada libro en la estantería.
- No se pueden repetir elementos; un libro no se coloca dos veces en la estantería.

$P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ son las formas diferentes en las que se pueden organizar los libros.

Tenemos que escoger 4 elementos de un conjunto de 7.

- No importa el orden; da igual el orden en el que escojamos los libros para regalar.
- No se pueden repetir elementos; un libro no se puede regalar dos veces.

$C_{7,4} = \binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$ lotes de libros diferentes pueden hacerse.

86. Página 273

Para el primer carácter hay que escoger entre 27 letras mayúsculas.

Para los dos siguientes caracteres tenemos que escoger 2 elementos entre 10 cifras.

- Importa el orden; importa la posición en que va cada cifra.
- Se pueden repetir elementos; la misma cifra puede aparecer dos veces.

$VR_{10,2} = 10^2 = 100$

Para los cinco últimos caracteres tenemos que escoger 5 elementos entre 27 posibles.

- Importa el orden; importa la posición en que va cada letra.
- Se pueden repetir elementos; la misma letra puede aparecer dos veces.

$VR_{27,5} = 27^5 = 14348907$

La elección de cada carácter es independiente de los otros, por tanto, el número de contraseñas viene dado por la regla del producto: $27 \cdot 100 \cdot 14\,348\,907 = 38\,742\,048\,900$ contraseñas.

87. Página 273

Tenemos que contar las posibles ordenaciones de los 5 amigos que se podrían formar.

- Importa el orden; importa la posición de cada amigo en el banco.
- No se pueden repetir elementos; un chico no se puede sentar en dos sitios.

$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ son las formas como se pueden sentar los 5 amigos.

88. Página 273

Tenemos que escoger 7 elementos de entre 5 posibles.

- Importa el orden; importa a qué asignatura le corresponde cada nota.
- Se pueden repetir elementos; dos asignaturas diferentes pueden tener la misma nota.

$VR_{5,7} = 5^7 = 78125$ boletines distintos podría haber.

89. Página 273

Tenemos que escoger 7 elementos de entre 50 posibles.

- No importa el orden; da igual que día de la semana veamos cada serie.
- No se pueden repetir elementos; vemos series de 7 canales diferentes.

$C_{50,7} = \binom{50}{7} = \frac{50!}{7!43!} = 99884400$ combinaciones de series diferentes podemos ver.

90. Página 273

Tenemos que escoger 2 elementos de entre 30 posibles.

- Importa el orden; es distinta la posición de delegado y la de subdelegado.
- No se pueden repetir elementos; una misma persona no puede ser delegado y subdelegado a la vez.

$V_{30,2} = \frac{30!}{28!} = 30 \cdot 29 = 870$ combinaciones de los cargos distintos podría haber.

91. Página 273

Tenemos que repartir 4 reyes entre 4 jugadores.

- Importa el orden; importa qué jugador recibe cada rey.
- Se pueden repetir elementos; un mismo jugador puede recibir dos o más reyes.

$VR_{4,4} = 4^4 = 256$ son las formas como podrían quedar repartidos los 4 reyes.

92. Página 273

Tenemos que escoger 2 equipos tomados de un conjunto de 20.

- Importa el orden; no es lo mismo que un equipo juegue como local que como visitante.
- No se pueden repetir los elementos: un equipo no puede jugar contra sí mismo.

$V_{20,2} = \frac{20!}{18!} = 20 \cdot 19 = 380$ partidos se tienen que jugar.

93. Página 273

Tenemos que ordenar 5 amigos en el coche.

- Importa el orden; importa el asiento que ocupa cada amigo.
- No se pueden repetir los elementos: un amigo no se puede sentar en dos sitios.

Para el asiento del conductor sólo tenemos 2 opciones. Tenemos que repartir a los cuatro restantes en los asientos que quedan.

$2 \cdot P_4 = 2 \cdot 4! = 48$ son las diferentes formas en las que se pueden sentar.

94. Página 273

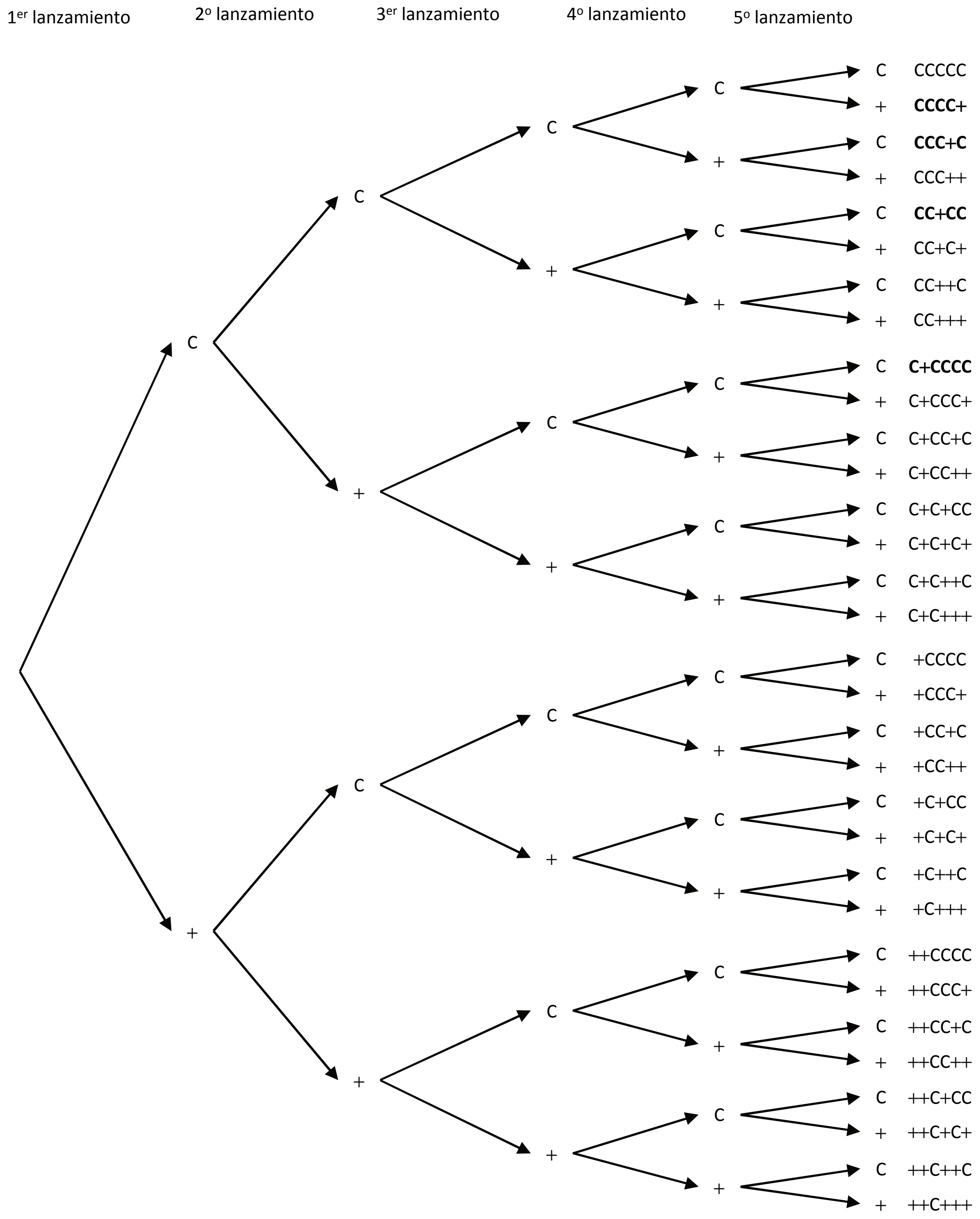
Tenemos que escoger 3 elementos de un conjunto de 6.

- No importa el orden; no importa qué sándwich come antes y cuál después.
- Se pueden repetir los elementos: puede comer dos sándwiches iguales.

$VR_{6,3} = 6^3 = 216$ son las formas diferentes en las que se puede comer los 3 sándwiches.

DEBES SABER HACER

1. Página 273



Podemos obtener 4 caras de 5 formas.

2. Página 273

a) $\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!3!} = 4$

b) $\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$

c) $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$

d) $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

e) $\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$

f) $\binom{11}{4} = \frac{11!}{4!7!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 330$

3. Página 273

Tenemos que reordenar las letras de la palabra CALCULADORA para formar palabras.

Si todas las letras fuesen distintas serían $P_{10} = 10!$ palabras.

Teniendo en cuenta que la letra A aparece tres veces y las letras L y C aparecen dos veces estamos contando como palabras distintas las que tienen las tres A en la misma posición y las que tienen las dos L y C en las mismas posiciones. Por eso, tenemos que dividir la cantidad total entre la cantidad dada por las posibles ordenaciones de las tres A en los mismos sitios y las de las L y C, es decir, el número total de palabras es:

$\frac{P_{10}}{3!2!2!} = \frac{10!}{3!2!2!} = 151200 \rightarrow$ Se pueden formar 151 200 palabras.

4. Página 273

Tenemos que ordenar 6 personas en las sillas.

- Importa el orden; importa la silla que ocupa cada persona.
- No se pueden repetir los elementos: una persona no se puede sentar en dos sitios.

$P_6 = 6! = 720 \rightarrow$ Se pueden sentar de 720 formas.

5. Página 273

Tenemos que escoger 5 elementos de un conjunto de 30.

- No importa el orden; da igual en qué lugar elijamos a cada alumno.
- No se pueden repetir elementos; los grupos están formados por 5 alumnos distintos.

$C_{30,5} = \binom{30}{5} = \frac{30!}{5!25!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 9828$

Se pueden hacer 9 828 grupos diferentes.

6. Página 273

a) Tenemos que escoger 2 equipos tomados de un conjunto de 10.

- Importa el orden; no es lo mismo que un equipo juegue como local que como visitante.
- No se pueden repetir los elementos: un equipo no puede jugar contra sí mismo.

$$V_{10,2} = \frac{10!}{8!} = 10 \cdot 9 = 90$$

Se tienen que jugar 90 partidos.

b) Tenemos que escoger 2 equipos tomados de un conjunto de 10.

- No importa el orden; no influye si un equipo juega como local o como visitante.
- No se pueden repetir los elementos: un equipo no puede jugar contra sí mismo.

$$C_{10,2} = \binom{10}{8} = \frac{10!}{8!2!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45 .$$

Se tienen que jugar 45 partidos.

COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

95. Página 274

Para la primera parte tenemos que escoger entre 12 meses posibles.

Para la última parte, la letra viene determinada por la primera parte. Para los números tenemos que escoger entre 0, 1, 2 y 3, es decir, entre 4 posibilidades.

Por último, tenemos que elegir si mete primero el número o la letra: otras dos posibilidades.

Todas estas elecciones son independientes las unas de las otras, por tanto, el número total de contraseñas viene dado, mediante la regla del producto, por $12 \cdot 4 \cdot 2 = 96$.

Mónica es capaz de meter 4 claves por minuto, por tanto, como mucho tardará $\frac{96}{4} = 24 \text{ min} = 0{,}4 \text{ horas}$.

FORMAS DE PENSAR. Razonamiento matemático.

96. Página 274

Consideramos el punto *E* dado por la intersección de las diagonales del cuadrilátero.

Los triángulos que se pueden dar en el cuadrilátero vienen determinados por la elección de 3 vértices entre *A*, *B*, *C*, *D* y *E*.

- No importa el orden; da igual qué vértice elijamos antes y cuál después.
- No se pueden repetir elementos; cada triángulo tiene 3 vértices diferentes.

$$C_{5,3} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

Tenemos que descontar las dos diagonales determinadas por los puntos *BED* y *AEC*. Por tanto, el número de triángulos que se pueden formar es de $10 - 2 = 8$.

97. Página 274

La suma de los lados y de las diagonales de un pentágono viene dada por las posibles elecciones de 2 de sus vértices.

- No importa el orden; el mismo lado o diagonal une un vértice con otro, y este último con el primero.
- No se pueden repetir elementos; un vértice no se une con el mismo mediante un lado o diagonal.

$$C_{5,2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

Un pentágono tiene 10 lados y diagonales. Como tiene 5 lados, tiene 10 – 5 = 5 diagonales.

98. Página 274

El número de rectas viene dado por las posibles elecciones de dos de los seis puntos.

- No importa el orden; dos puntos determinan una recta, independientemente del orden en que los elijamos.
- No se pueden repetir elementos; un punto no determina una recta.

$$C_{6,2} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

Determinan 15 rectas.

99. Página 274

Puede haber sumas con 2, 3, 4 o 5 sumandos.

Si tenemos en cuenta el orden de los sumandos, las diferentes opciones son:

1+1+1+1+1	1+1+1+2	1+1+2+1	1+1+3	1+2+1+1	1+2+2	1+3+1	1+4
2+1+1+1	2+1+2	2+2+1	2+3				
3+1+1	3+2						
4+1							

Se podrían hacer 15 sumas distintas.

Si tenemos en cuenta el orden de los sumandos, se podrían hacer 5 sumas distintas.

100. Página 274

En los números capicúas, las tres primeras cifras son iguales a las tres últimas, por tanto, son de la forma *abccba*, con $a \neq 0$.

Tenemos que escoger 3 elementos de entre un conjunto de 10 cifras.

- Importa el orden; no es el mismo número 123321 que 321123.
- Se pueden repetir elementos; el número 111111 es capicúa.

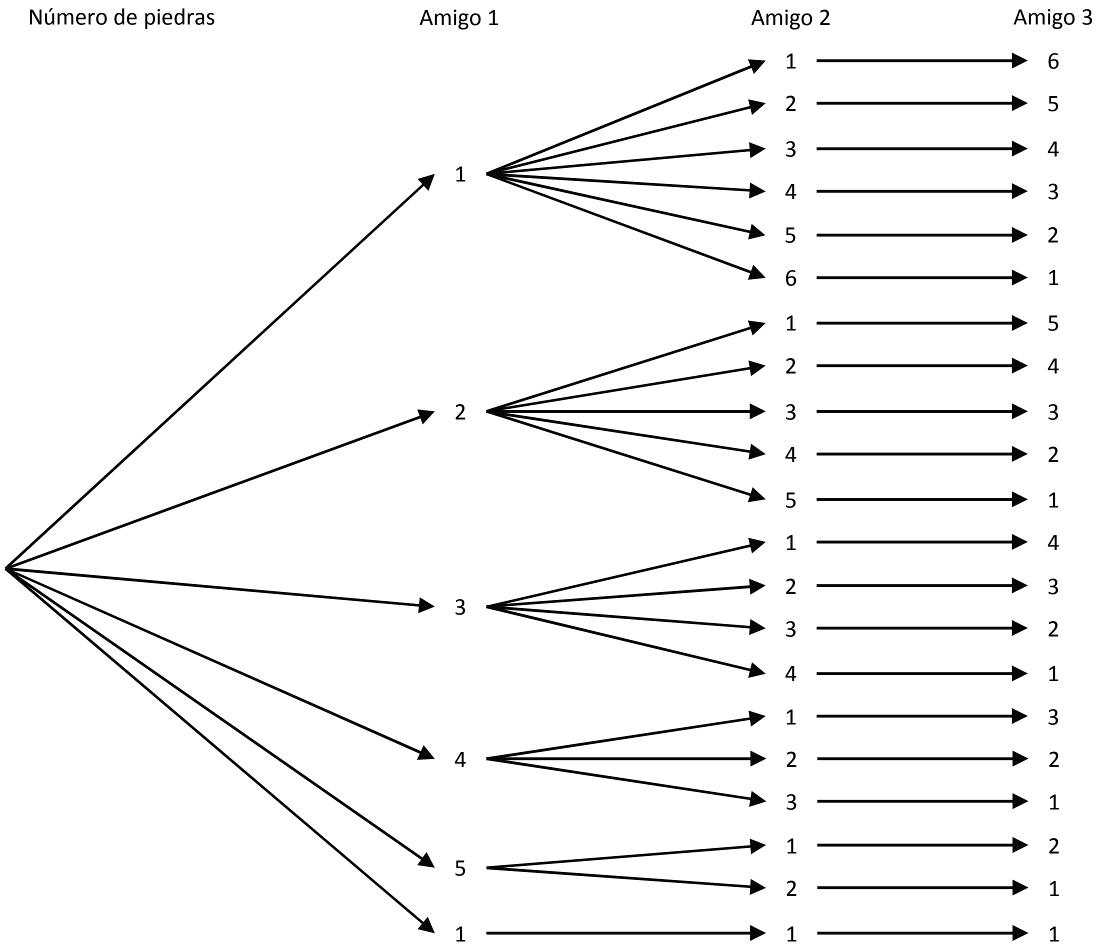
$$VR_{10,3} = 10^3 = 1000$$

Tenemos que descontar las posibles elecciones en las que el 0 aparezca como primer número. Para ver los números que empiezan por 0, tenemos que escoger 2 cifras entre 10 posibles.

$VR_{10,2} = 10^2 = 100 \rightarrow$ Hay 1 000 – 100 = 900 números capicúa de 6 cifras.

101. Página 274

Tenemos que repartir 8 piedras entre 3 personas. Cada amigo recibe entre 1 y 6 piedras. Hacemos un diagrama de árbol para ver las posibles opciones.



Pueden repartirlas de 21 formas distintas.

102. Página 274

El comité estará formado por 3 estudiantes y 3 profesores o 4 estudiantes y 2 profesores.

Tanto para la elección de los estudiantes como para la de los profesores:

- No importa el orden; da igual el orden en que escojamos los miembros del tribunal.
- No se pueden repetir elementos; el tribunal está formado por 6 personas distintas.

El número de tribunales formado por 3 estudiantes y 3 profesores viene dado por:

$$C_{8,3} \cdot C_{6,3} = \binom{8}{3} \cdot \binom{6}{3} = \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{6!}{3!3!} = 56 \cdot 20 = 1120$$

El número de tribunales formado por 4 estudiantes y 2 profesores viene dado por:

$$C_{8,4} \cdot C_{6,2} = \binom{8}{4} \cdot \binom{6}{2} = \frac{8!}{4!4!} \cdot \frac{6!}{2!4!} = 70 \cdot 15 = 1050$$

Podemos elegir el tribunal de $1\,120 + 1\,050 = 1\,170$ formas diferentes.

103. Página 274

El número de palabras que se pueden formar son las posibles ordenaciones de las 5 letras.

$P_5 = 5! = 120$ palabras

La palabra NADIE es la primera palabra que empieza por N. Las palabras que empiezan por N vienen dadas por las posibles ordenaciones de las 4 letras que quedan.

$P_4 = 4! = 24$ palabras

Por tanto, hay 23 palabras después de NADIE. Así, la palabra NADIE ocupa la posición 120 – 23 = 97 en orden alfabético.

104. Página 274

Contamos el conjunto de letras AEIOU como un solo elemento que debe ir unido. Así, tenemos que contar las posibles ordenaciones de los elementos AEIOU, P, R, M, T, C y N.

$P_7 = 7! = 5040$

Aparecen las 5 vocales juntas y ordenadas en 5 040 palabras.

PRUEBAS PISA

105. Página 275

Dibujamos un diagrama de árbol para ver las distintas posibilidades para los partidos de 2ª y 3ª ronda.

2ª ronda

MESA 1: Tomás-Luis MESA 2: Ricardo-David
MESA 1: Ricardo-David MESA 2: Tomás-Luis

3ª Ronda

MESA 1: Tomás-David MESA 2: Ricardo-Luis
MESA 1: Ricardo-Luis MESA 2: Tomás-David

2ª ronda

MESA 1: Tomás-David MESA 2: Ricardo-Luis
MESA 1: Ricardo-Luis MESA 2: Tomás-David

3ª Ronda

MESA 1: Tomás-Luis MESA 2: Ricardo-David
MESA 1: Ricardo-David MESA 2: Tomás-Luis

Podemos rellenar la tabla de 8 formas distintas con los datos dados en el diagrama.

106. Página 275

Tenemos que escoger 150 notas entre 7 posibles.

- Importa el orden; importa la posición que ocupa cada nota dentro de la melodía.
- Se pueden repetir elementos; una misma melodía contiene repetida la misma nota más de una vez.

Se pueden hacer $VR_{7,150} = 7^{150}$ melodías diferentes pueden hacerse con 150 notas.

Probabilidad

14

CLAVES PARA EMPEZAR

1. Página 276

a)

Color de coche	f_i	h_i
Rojo	20	0,2
Blanco	25	0,25
Verde	30	0,3
Amarillo	5	0,05
Azul	20	0,2
TOTAL	100	1

b) Eran de color amarillo un 5 % de los coches que han pasado por el cruce.

2. Página 276

a) m.c.m. $(3, 4) = 12 \rightarrow \frac{2}{3} = \frac{8}{12}, \frac{3}{4} = \frac{9}{12} \rightarrow \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$

b) m.c.m. $(11, 17) = 187 \rightarrow \frac{24}{11} = \frac{408}{187}, \frac{36}{17} = \frac{396}{187} \rightarrow \frac{24}{11} > \frac{36}{17}$

c) m.c.m. $(55, 110) = 110 \rightarrow \frac{14}{55} = \frac{28}{110}, \frac{28}{110} \rightarrow \frac{14}{55} = \frac{28}{110}$

VIDA COTIDIANA

EL DNI ELECTRÓNICO. Página 277

El DNI puede terminar en 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Todas las cifras tienen la misma probabilidad, y hay 5 cifras pares de 10 totales. Por tanto, la probabilidad de que el DNI sea par es $\frac{5}{10} = 0{,}5$.

RESUELVE EL RETO

RETO 1. Página 278

Tiene 4 sucesos distintos. Sean A y B los sucesos elementales. Los sucesos serán, $\varnothing$, A, B, $E = \{A, B\}$.

ACTIVIDADES

1. Página 278

a) Aleatorio
b) Determinista
c) Aleatorio
d) Determinista
e) Aleatorio
f) Aleatorio
g) Determinista

2. Página 278

a) El espacio muestral tiene 8 sucesos elementales.

$E = \{$tarjeta 1, tarjeta 2, tarjeta 3, tarjeta 4, tarjeta 5, tarjeta 6, tarjeta 7, tarjeta 8$\}$

b) El espacio muestral tiene 4 sucesos elementales.

$E = \{$2 céntimos, 5 céntimos, 10 céntimos, 20 céntimos$\}$

c) El espacio muestral tiene 11 sucesos elementales.

$E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

3. Página 278

a) El espacio muestral tiene 3 sucesos elementales: $E = \{0, 1, 2\}$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo: un suceso compuesto es que el resto sea mayor que 0.

c) Respuesta abierta. Por ejemplo: un suceso que no sea el conjunto vacío cuyo resto sea mayor que 0.

4. Página 279

$A \cup B =$ «as de oros, as de copas, as de espadas, as de bastos, dos de bastos, tres de bastos, cuatro de bastos, cinco de bastos, seis de bastos, siete de bastos, sota de bastos, caballo de bastos, rey de bastos»

$A \cap B =$ «Salir as de bastos»

A y B son compatibles porque la intersección es no vacía.

5. Página 279

$\overline{A} =$ «No salir as»

$\overline{B} =$ «No salir bastos»

Son compatibles porque es posible que la carta extraída no sea ni as ni de bastos.

6. Página 279

a) $A \cup A = A$

b) $A \cap A = A$

7. Página 279

No es cierto. Si A es el contrario de B, entonces $\overline{A} = B \rightarrow \overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$

$B \cap A = B \cap \overline{B} = \varnothing \rightarrow \overline{B \cap A} = E$

8. Página 280

La frecuencia relativa del suceso salir cruz es $\frac{80-54}{80} = \frac{26}{80} = \frac{13}{40} \rightarrow$ La respuesta es la c).

9. Página 280

El proceso sería coger un número elevado de bombillas N y contar las defectuosas n. La probabilidad de que escogida una bombilla al azar sea defectuosa viene dada por $\frac{n}{N}$.

10. Página 280

a) Los sucesos favorables son $45 + 52 = 97 \longrightarrow P(\text{múltiplo de } 3) = \frac{97}{300} = 0{,}323$

b) Los sucesos favorables son $57 + 52 = 109 \longrightarrow P(\text{mayor que } 7) = \frac{109}{300} = 0{,}363$

11. Página 281

El espacio muestral está formado por 3 sucesos elementales: $E = \{\text{bola blanca, bola negra, bola verde}\}$.

La probabilidad de coger una bola u otra es la misma, por tanto, repartimos la probabilidad entre los tres sucesos elementales.

a) $P(\text{bola negra}) = \frac{1}{3}$

b) $P(\text{bola blanca}) = \frac{1}{3}$

c) Si sacamos una bola de la bolsa siempre será blanca, negra o verde. Es decir, es un suceso seguro.

$P(\text{bola negra, blanca o verde}) = 1$

12. Página 281

El espacio muestral está formado por 40 sucesos elementales, las cuarenta cartas de la baraja.

La probabilidad de extraer una carta u otra es la misma. Repartimos la probabilidad entre los sucesos elementales.

a) $P(\text{caballo de copas}) = \frac{1}{40}$

b) $P(\text{tres de bastos}) = \frac{1}{40}$

c) $P(\text{bastos}) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$

d) $P(\text{as de oros}) = \frac{1}{40}$

e) $P(\text{caballo}) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$

f) $P(\text{as}) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$

13. Página 281

El espacio muestral está formado por 6 sucesos elementales:

$$E = \{\text{atún, sardinas, navajas, mejillones, pulpo, berberechos}\}$$

La probabilidad de elegir una lata u otra es la misma. Repartimos la probabilidad entre los sucesos elementales.

a) $P(\text{atún}) = \frac{1}{6}$

b) $P(\text{pulpo o berberechos}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

c) $P(\text{nombre con } s) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

d) $P(\text{nombre con } z) = \frac{0}{6} = 0$

14. Página 282

Es un experimento regular porque tenemos la misma posibilidad de escoger cualquiera de los alumnos.

a) $P(\text{chico}) = \frac{17}{36}$

b) $P(\text{chica}) = \frac{19}{36}$

15. Página 282

Es un experimento regular porque todas las caras tienen la misma probabilidad de salir.

- Los casos favorables son 2, 4 y 6 $\longrightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- Los casos favorables son 3 y 6 $\longrightarrow P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- Los casos favorables son 4, 5 y 6 $\longrightarrow P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- Los casos favorables son 1, 3 y 5 $\longrightarrow P(D) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

16. Página 282

El espacio muestral está formado por 5 sucesos elementales: $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

No todos los sucesos elementales son equiprobables porque hay dos caras con 1, es decir, la probabilidad de que salga el 1 es el doble que la de los otros sucesos elementales.

$P(1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $\quad$ $P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = \frac{1}{6}$

17. Página 282

$P(\text{moneda } 2\ €) = \frac{3}{4} P(\text{moneda } 1\ €)$

$P(\text{moneda } 2\ €) + P(\text{moneda } 1\ €) = 1 \longrightarrow \frac{3}{4} P(\text{moneda } 1\ €) + P(\text{moneda } 1\ €) = 1 \longrightarrow P(\text{moneda } 1\ €) = \frac{4}{7}$

$P(\text{moneda } 2\ €) = \frac{3}{4} P(\text{moneda } 1\ €) = \frac{3}{7}$

No es necesario conocer el número de monedas, ya que, a través de la relación entre la cantidad de monedas de 1 € y de 2 €, conocemos la probabilidad.

18. Página 283

Es un suceso regular, ya que tenemos la misma probabilidad de escoger cada una de las 21 pinturas.

a) $P(\text{roja}) = \frac{4}{21}$ $\quad$ b) $P(\text{azul}) = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$ $\quad$ c) $P(\text{verde}) = \frac{2}{21}$

19. Página 283

Es un suceso regular, ya que tenemos la misma probabilidad de escoger cada una de las 20 prendas.

a) $P(\text{camisa manga larga}) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

b) $P(\text{camiseta}) = \frac{7}{20}$

c) $P(\text{camisa}) = \frac{13}{20}$

20. Página 283

Es un suceso regular, ya que tenemos la misma probabilidad de escoger cada uno de los 40 bocadillos.

Tortilla $\longrightarrow$ 20 bocadillos

Chorizo $\longrightarrow$ 5 bocadillos

Jamón $\longrightarrow 2x$

Queso $\longrightarrow x$

Jamón o queso $\longrightarrow 40 - 25 = 15 \longrightarrow x + 2x = 15 \longrightarrow x = 5$ bocadillos de queso $\longrightarrow$ 10 bocadillos de jamón

a) $P(\text{jamón}) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$

b) $P(\text{queso o tortilla}) = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$

c) $P(\text{no sea de tortilla}) = \frac{40-20}{40} = \frac{1}{2}$

d) $P(\text{no sea de queso ni de tortilla}) = \frac{40-25}{40} = \frac{3}{8}$

21. Página 283

Es un suceso regular, ya que tenemos la misma probabilidad de que salga cualquiera de las 6 caras.

a) $A \cap B = \{4\} \rightarrow (A \cap B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6\} \rightarrow P((A \cap B) \cup C) = \frac{5}{6}$

b) $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\} \rightarrow (A \cup B) \cap C = \{2, 6\} \rightarrow P((A \cup B) \cap C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

c) $\overline{A} = \{1, 3, 5\} \rightarrow P(\overline{A}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\qquad \overline{B} = \{1, 2, 3, 6\} \rightarrow P(\overline{B}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ $\qquad \overline{C} = \{4, 5\} \rightarrow P(\overline{C}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

d) $\overline{A \cup C} = \{5\} \rightarrow P(\overline{A \cup C}) = \frac{1}{6}$

22. Página 284

a) $P(\text{no sea oro}) = 1 - P(\text{oro}) = 1 - \frac{10}{40} = \frac{3}{4}$

b) $P(\text{sota y caballo}) = 0 \longrightarrow P(\text{sota o caballo}) = P(\text{sota}) + P(\text{caballo}) = \frac{4}{40} + \frac{4}{40} = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$

c) $P(\text{figura de espadas}) = \frac{3}{40}$

d) $P(\text{oro menor que 6}) = P(\text{copas menor que 6}) = P(\text{basto menor que 6}) = P(\text{espada menor que 6}) = \frac{5}{40}$

$P(\text{número menor que 6}) = \frac{5}{40} + \frac{5}{40} + \frac{5}{40} + \frac{5}{40} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$

23. Página 284

a) $P(\text{figura}) = \frac{12}{40}$ $\qquad P(\text{espada}) = \frac{10}{40}$ $\qquad P(\text{figura y espada}) = \frac{3}{40}$

$P(\text{figura o espada}) = P(\text{figura}) + P(\text{espada}) - P(\text{ figura y espada}) = \frac{12}{40} + \frac{10}{40} - \frac{3}{40} = \frac{19}{40}$

b) $P(\text{bastos}) = \frac{10}{40}$ $\qquad P(\text{menor que 3}) = \frac{8}{40}$ $\qquad P(\text{bastos menor que 3}) = \frac{2}{40}$

$P(\text{bastos o menor que 3}) = P(\text{bastos}) + P(\text{menor que 3}) - P(\text{bastos menor que 3}) = \frac{10}{40} + \frac{8}{40} - \frac{2}{40} = \frac{16}{40} = \frac{2}{5}$

24. Página 284

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \rightarrow P(B) = P(A \cup B) - P(A) = 0,6 - 0,2 = 0,4$

25. Página 285

$P(\text{blanca}) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$ $\quad P(\text{negra}) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$ $\quad P(\text{azul}) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ $\quad P(\text{verde}) = \frac{1}{18}$

a) $P(\text{blanca o verde}) = P(\text{blanca}) + P(\text{verde}) = \frac{3}{18} + \frac{1}{18} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9} = 0,22$

b) $P(\text{negra o azul}) = P(\text{negra}) + P(\text{azul}) = \frac{8}{18} + \frac{6}{18} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9} = 0,78$

c) $P(\text{blanca o azul}) = P(\text{blanca}) + P(\text{azul}) = \frac{3}{18} + \frac{6}{18} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2} = 0,5$

$P(\text{ni blanca ni azul}) = 1 - P(\text{blanca o azul}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0,5$

d) $P(\text{verde o negra}) = P(\text{verde}) + P(\text{negra}) = \frac{1}{18} + \frac{8}{18} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2} = 0,5$

$P(\text{ni verde ni negra}) = 1 - P(\text{verde o negra}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0,5$

26. Página 285

$P(\text{as}) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$ $\quad P(\text{figura}) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$

$P(\text{as o figura}) = P(\text{as}) + P(\text{figura}) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 0,4$

$P(\text{ni as ni figura}) = 1 - P(\text{as o figura}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} = 0,6$

27. Página 285

$P(\text{fútbol o baloncesto}) = 0,7$ $\quad P(\text{fútbol y baloncesto}) = 0,12$ $\quad P(\text{no fútbol}) = 0,74$

$P(\text{fútbol}) = 1 - P(\text{no fútbol}) = 1 - 0,74 = 0,26$

$P(\text{fútbol o baloncesto}) = P(\text{fútbol}) + P(\text{baloncesto}) - P(\text{fútbol y baloncesto}) \rightarrow$

$\rightarrow P(\text{baloncesto}) = 0,7 - 0,26 + 0,12 = 0,56$

28. Página 285

$P(2) = P(3) = P(5) = 2P(1) = 2P(4) = 2P(6)$

$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1 \xrightarrow{P(1)=x} x + 2x + 2x + x + 2x + x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{9} = 0,11$

$P(2) = P(3) = P(5) = 2x = \frac{2}{9}$

$P(1) = P(4) = P(6) = x = \frac{1}{9} = 0,11$

$P(\text{par}) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9} = 0,44$

29. Página 285

a) «Extraer una tarjeta roja o azul» es un suceso seguro $\longrightarrow P(\text{tarjeta roja o azul}) = 1$.

b) Casos favorables: {4, 5, 6, 7, 8, 9} $\longrightarrow P(\text{tarjeta con número mayor que 3}) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} = 0{,}67$

c) «Extraer una tarjeta roja con el número 6» es un suceso imposible $\longrightarrow P(\text{tarjeta roja con número 6}) = 0$.

d) Casos favorables: {6, 8}

$P(\text{tarjeta azul con número par}) = \frac{2}{9} = 0{,}22$

e) Casos favorables: {4, 8} $\longrightarrow P(\text{tarjeta con número múltiplo de 4}) = \frac{2}{9} = 0{,}22$

30. Página 286

a) $P(\text{chico}) = \frac{11}{26}$ $\qquad P(\text{lee periódico/chico}) = \frac{6}{11}$

$P(\text{chico y lee el periódico}) = P(\text{chico}) \cdot P(\text{lee periódico/chico}) = \frac{11}{26} \cdot \frac{6}{11} = \frac{6}{26} = \frac{3}{13} = 0{,}23$

b) $P(\text{chico}) = \frac{11}{26}$ $\qquad P(\text{lee el periódico}) = \frac{16}{26} = \frac{8}{13}$ $\qquad P(\text{lee el periódico/chico}) = \frac{6}{11}$

$P(\text{no lee el periódico}) = 1 - P(\text{lee el periódico}) = 1 - \frac{8}{13} = \frac{5}{13}$

$P(\text{no lee el periódico/chico}) = 1 - P(\text{lee el periódico/chico}) = 1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11}$

$P(\text{no lee el periódico y chico}) = P(\text{chico}) \cdot P(\text{no lee el periódico/chico}) = \frac{11}{26} \cdot \frac{5}{11} = \frac{5}{26}$

$P(\text{no lee el periódico o chico}) = P(\text{chico}) + P(\text{no lee el periódico}) - P(\text{no lee el periódico y chico}) =$

$$= \frac{11}{26} + \frac{5}{13} - \frac{5}{26} = \frac{8}{13} = 0{,}62$$

c) $P(\text{chica/lee el periódico}) = \frac{10}{16} = 0{,}625$

d) $P(\text{lee el periódico/chica}) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} = 0{,}67$

31. Página 286

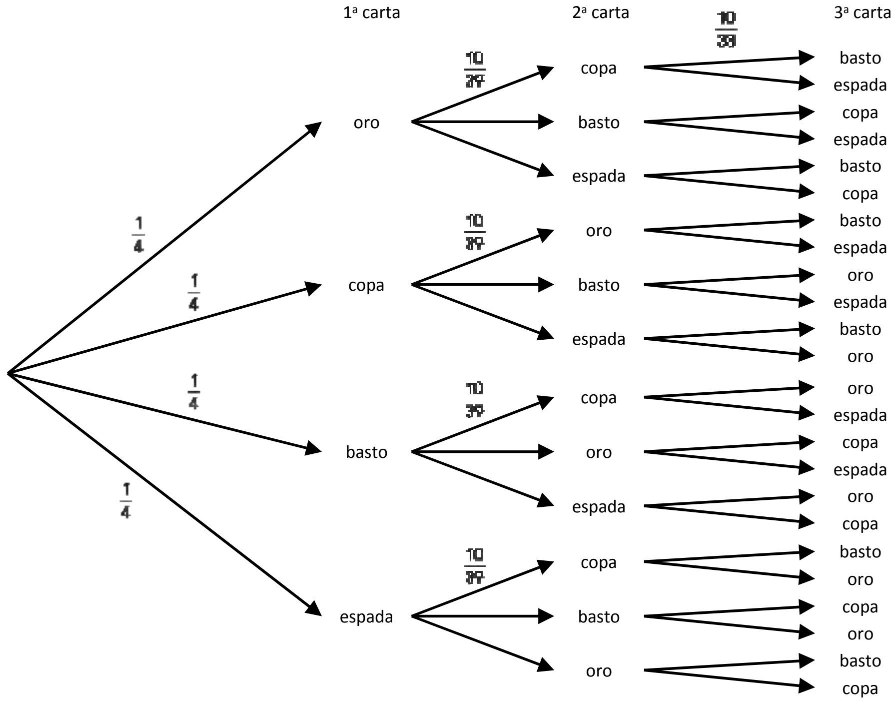
$P(\text{niño}) = \frac{10}{22} = \frac{5}{11}$

$P(\text{sabe andar/niño}) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$P(\text{no sabe andar/niño}) = 1 - P(\text{sabe andar/niño}) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

$P(\text{niño y no sabe andar}) = P(\text{niño}) \cdot P(\text{no sabe andar/niño}) = \frac{5}{11} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{11} = 0{,}18$

32. Página 286



$P(\text{tres cartas distinto palo}) = 24 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{10}{39} \cdot \frac{10}{38} = \frac{100}{247} = 0{,}4$

33. Página 287

a) $P(3 \text{ y sota}) = P(3) \cdot P(\text{sota/tres}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{40} = \frac{1}{60} = 0{,}02$

b) $P(\text{sota}) = P(\{2, 3, 4, 5, 6\} \text{ y sota}) = P(\{2, 3, 4, 5, 6\}) \cdot P(\text{sota}/\{2, 3, 4, 5, 6\}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{40} = \frac{1}{12} = 0{,}08$

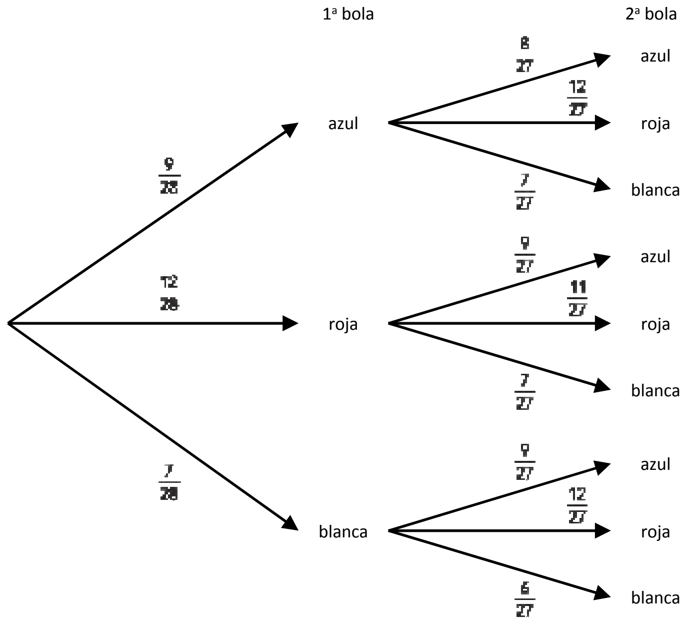
c) $P(\text{cara en la moneda}) = P(1 \text{ y cara}) = P(1) \cdot P(\text{cara}/1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12} = 0{,}08$

d) $P(\text{par y figura}) = P(\text{par}) \cdot P(\text{figura/par}) = \frac{3}{6} \cdot \frac{12}{40} = \frac{3}{20} = 0{,}15$

e) $P(\text{impar y as}) = P(\{3, 5\}) \cdot P(\text{as}/\{3, 5\}) + P(1) \cdot P(\text{as}/1) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{40} + \frac{1}{6} \cdot 0 = \frac{1}{30} = 0{,}03$

f) $P(\text{impar y cruz}) = P(\{3, 5\}) \cdot P(\text{cruz}/\{3, 5\}) + P(1) \cdot P(\text{cruz}/1) = \frac{2}{6} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12} = 0{,}08$

34. Página 287



a) P(dos bolas iguales) = P(2 azules) + P(2 rojas) + P(2 blancas)

$$P(\text{dos bolas iguales}) = \frac{9}{28}\cdot\frac{8}{27}+\frac{12}{28}\cdot\frac{11}{27}+\frac{7}{28}\cdot\frac{6}{27}=\frac{41}{126}=0{,}33$$

b) $P(\text{dos bolas distintas}) = 1 - P(\text{dos bolas iguales}) = 1-\frac{41}{126}=\frac{85}{126}=0{,}67$

c) $P(\text{una bola blanca}) = \frac{9}{28}\cdot\frac{7}{27}+\frac{12}{28}\cdot\frac{7}{27}+\frac{7}{28}=\frac{4}{9}=0{,}44$

d) $P(\text{segunda bola blanca}) = \frac{9}{28}\cdot\frac{7}{27}+\frac{12}{28}\cdot\frac{7}{27}+\frac{7}{28}\cdot\frac{6}{27}=\frac{1}{4}=0{,}25$

35. Página 287

a) $P(\text{chocolate negro y relleno}) = P(\text{chocolate negro})\cdot P(\text{relleno/chocolate negro}) = \frac{15}{20}\cdot\frac{10}{15}=\frac{1}{2}=0{,}5$

b) $P(\text{chocolate blanco o no relleno}) = 1 - P(\text{chocolate negro y relleno}) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

c) $P(\text{chocolate blanco/relleno}) = \frac{2}{12}=\frac{1}{6}=0{,}17$

d) $P(\text{relleno/chocolate negro}) = \frac{10}{15}=\frac{2}{3}=0{,}67$

36. Página 287

a) $P(\text{cara, cara, cara}) = P(\text{cara})\cdot P(\text{cara})\cdot P(\text{cara}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}=0{,}125$

b) $P(\text{cruz, cruz, 6}) = P(\text{cruz})\cdot P(\text{cruz})\cdot P(6) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{24}=0{,}04$

c) $P(\text{cara, cruz, 2}) = P(\text{cara})\cdot P(\text{cruz})\cdot P(6) + P(\text{cruz})\cdot P(\text{cara})\cdot P(6) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}=0{,}083$

ACTIVIDADES FINALES

37. Página 288

a) Aleatorio
b) Aleatorio
c) Aleatorio
d) Aleatorio
e) Determinista
f) Determinista
g) Aleatorio
h) Determinista
i) Aleatorio

38. Página 288

Contar los lunes de un mes es un experimento determinista.

Escoger una pieza de fruta en una caja de manzanas es un experimento aleatorio.

39. Página 288

a) El espacio muestral está formado por 9 sucesos elementales $E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

b) Respuesta abierta. Por ejemplo: A = «El resultado es mayor que 4» y B = «El resultado es menor que 6»

40. Página 288

a) El espacio muestral de Adela tiene 12 sucesos elementales:

$E = \{12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43\}$

El espacio muestral de Jorge tiene 16 sucesos elementales:

$E = \{11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44\}$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

Un suceso no elemental en el experimento de Adela es A = «Obtener un número que empiece por 2»

Un suceso no elemental en el experimento de Jorge es B = «Obtener un número que empiece por 2»

c) Respuesta abierta. Por ejemplo:

En el experimento de Adela no se puede dar el suceso {11}, mientras que en el de Jorge sí.

41. Página 288

a) $E = \{1, 3, 5, 7\}$

b) El suceso «Anotar número par» es un suceso vacío.

c) El suceso «Anotar número impar» es el suceso seguro.

42. Página 288

a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$

b) Los sucesos elementales incluidos en el suceso «Salir un número con un sólo factor primo» son 2, 3 y 5.

43. Página 288

a) $E = \left\{\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{13}, \sqrt{17}, \sqrt{18}, \sqrt{20}, 5, \sqrt{32}\right\}$

b) Se pueden formar 10 triángulos distintos, sin tener en cuenta la orientación.

44. Página 288

a) E = {bola grande, bola mediana, bola pequeña}

b) E = {bola blanca, bola negra}

c) E = {bola grande blanca, bola grande negra, bola mediana blanca, bola mediana negra, bola pequeña blanca, bola pequeña negra}.

45. Página 288

El espacio muestral está formado por 8 sucesos elementales: E = {P, R, O, B, A, I, L, D}.

46. Página 288

a) El espacio muestral está formado por 4 sucesos elementales.

E = {D, ND, NND, $NNND$}, donde N = No defectuoso, D = Defectuoso

b) Si se devuelven los tornillos a la caja el espacio muestral tiene infinitos sucesos elementales, ya que podríamos escoger el primer tornillo defectuoso en cualquier posición, porque siempre habrá en la caja tornillos defectuosos y no defectuosos.

47. Página 288

a) $A \cap B$ = «Sacar as de bastos»

$A \cap C$ = «Sacar as y caballo» = $\varnothing$

$A \cap D$ = «Sacar as»

$A \cap F$ = «Sacar as y una figura de oros» = $\varnothing$

$B \cap C$ = «Sacar caballo de bastos»

$B \cap D$ = «Sacar una carta de bastos que no sea figura»

$B \cap F$ = «Sacar figura de oros y de bastos» = $\varnothing$

$C \cap D$ = «Sacar caballo y carta no figura» = $\varnothing$

$C \cap F$ = «Sacar caballo de oros»

$D \cap F$ = «Sacar una no figura y una figura de oros» = $\varnothing$

$A \cup B$ = «Sacar as o bastos»

$A \cup C$ = «Sacar as o caballo»

$A \cup D$ = «Sacar carta que no sea figura»

$A \cup F$ = «Sacar as o figura de oros»

$B \cup C$ = «Sacar bastos o caballo»

$B \cup D$ = «Sacar bastos o carta que no sea figura»

$B \cup F$ = «Sacar bastos o figura de oros»

$C \cup D$ = «Sacar caballo o carta que no sea figura»

$C \cup F$ = «Sacar caballo o figura de oros»

$D \cup F$ = «Sacar una no figura o una figura de oros»

b) Son compatibles los sucesos *A* y *B*, *A* y *D*, *B* y *C*, *B* y *D*, *C* y *F*.

Son incompatibles los sucesos *A* y *C*, *A* y *F*, *B* y *F*, *C* y *D*, *D* y *F*.

48. Página 289

a) $\overline{A} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ $\overline{C} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$ $\overline{F} = \{7, 8, 9\}$ $\overline{H} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$\overline{B} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ $\overline{D} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\overline{G} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

b) Son compatibles: $A \cap B = \{6\}$, $A \cap C = \{4, 8\}$, $A \cap D = \{6, 8\}$, $A \cap F = \{2, 4, 6\}$, $A \cap G = \{8\}$, $B \cap D = \{6, 9\}$

$B \cap F = \{3, 6\}$, $B \cap G = \{9\}$, $C \cap D = \{8\}$, $C \cap F = \{4\}$, $C \cap G = \{8\}$, $D \cap F = \{6\}$, $D \cap G = \{8, 9\}$, $F \cap H = \{1\}$

Son incompatibles: $A \cap H = \varnothing$, $B \cap C = \varnothing$, $B \cap H = \varnothing$, $C \cap H = \varnothing$, $D \cap H = \varnothing$, $F \cap G = \varnothing$, $G \cap H = \varnothing$

c) $A\cup B\cup C=\{2,3,4,6,8,9\}$

d) $F\cap B\cap D=\{6\}$

e) $(A\cup B\cup C)\cap G=\{8,9\}$

f) $(G\cup C)\cap(A\cup D)=\{4,8,9\}$

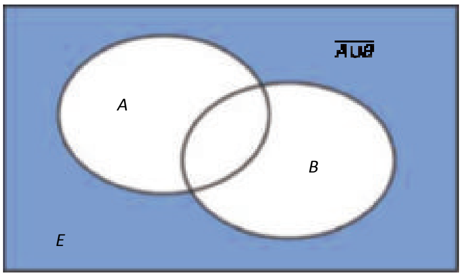
g) $\overline{F}\cap(A\cup G)=\{8,9\}$

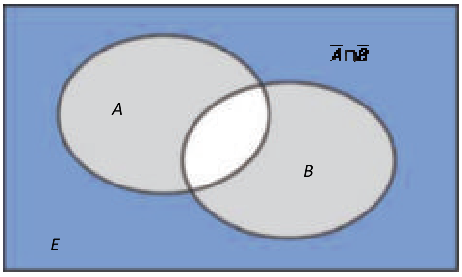
h) $\overline{(H\cup C)}\cap F=\{2,3,5,6\}$

i) $\overline{(F\cap C)}\cap\overline{A}=\{1,3,5,7,9\}$

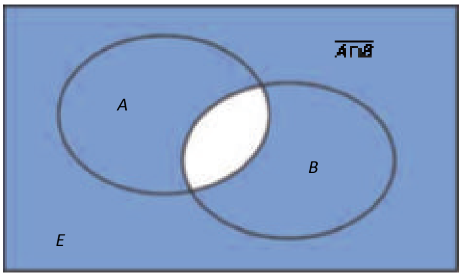
49. Página 289

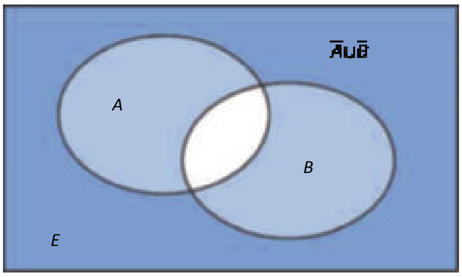
a)





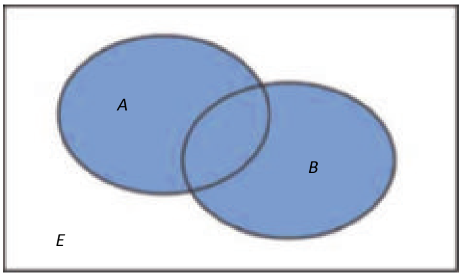
b)



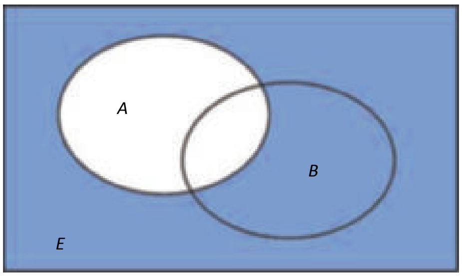


50. Página 289

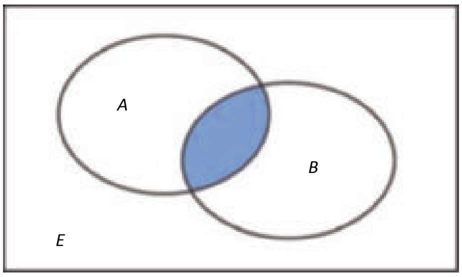
a)



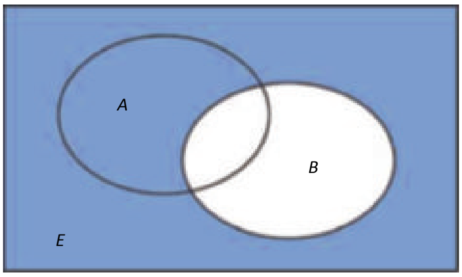
c)



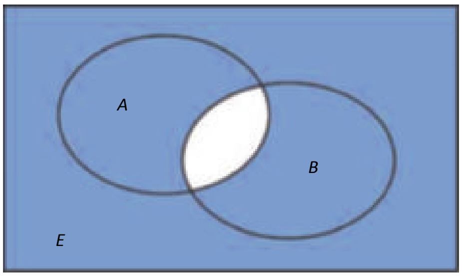
b)



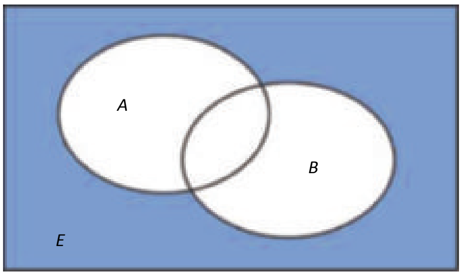
d)



e)

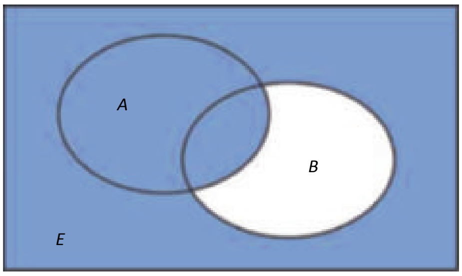


f)

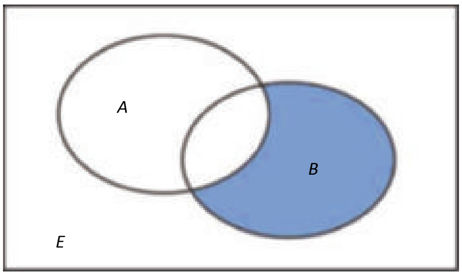


51. Página 289

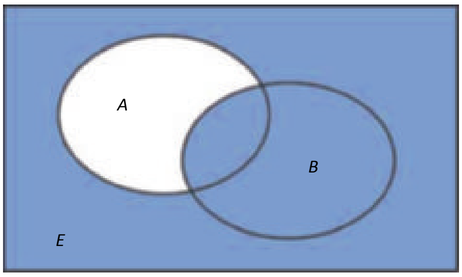
a)



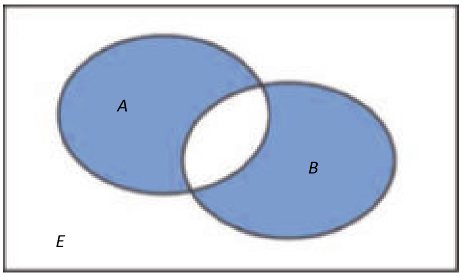
d)



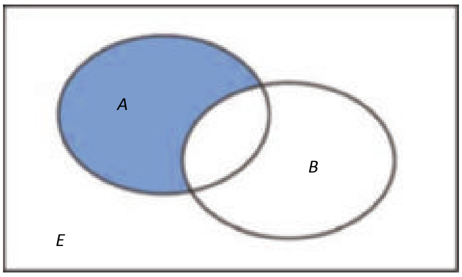
b)



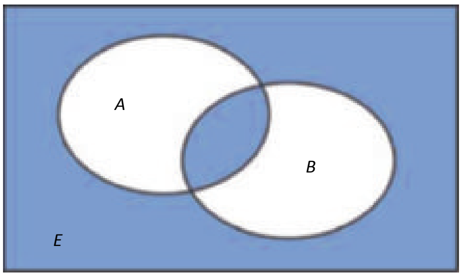
e)



c)



f)



52. Página 289

a) $A\cap B$ b) $\overline{A}$ c) $A\cap\overline{B}$ d) $A\cup\overline{B}$ e) $(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})$

53. Página 289

La igualdad que no es correcta es la c) $\overline{A}\cup B=E$, ya que, como son sucesos contrarios $\overline{A}=B\rightarrow\overline{A}\cup B=B$.

54. Página 289

a) $P(\text{conexión a Internet}) = 0{,}65$

b) $P(\text{moreno}) = 0{,}46$

c) $P(\text{acierto}) = \frac{1}{5} = 0{,}2$

d) $P(\text{curación}) = \frac{3}{4} = 0{,}75$

e) $P(\text{sí}) = \frac{5}{6} = 0{,}83$

f) $P(\text{leer Star}) = 0$

55. Página 289

a) $A = \{3, 6, 9\} \to h_A = \frac{12+12+11}{100} = \frac{35}{100} = 0{,}35$

$B = \{1, 3, 5, 7, 9\} \to h_B = \frac{13+12+10+6+11}{100} = \frac{52}{100} = 0{,}52$

$C = \{1, 2, 3, 6\} \to h_C = \frac{13+11+12+12}{100} = \frac{48}{100} = 0{,}48$

b) $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\} \to h_{A\cup B} = \frac{13+12+10+12+6+11}{100} = \frac{64}{100} = 0{,}64$

$A \cap B = \{3, 9\} \to h_{A\cap B} = \frac{12+11}{100} = \frac{23}{100} = 0{,}23$

$A \cup C = \{1, 2, 3, 6, 9\} \to h_{A\cup C} = \frac{13+11+12+12+11}{100} = \frac{59}{100} = 0{,}59$

$A \cap C = \{3, 6\} \to h_{A\cap C} = \frac{12+12}{100} = \frac{24}{100} = 0{,}24$

c) La probabilidad coincide con la frecuencia relativa.

56. Página 289

a) $h_3 = \frac{30}{100} = 0{,}3$

b) $h_{\{2, 4\}} = \frac{22+20}{100} = 0{,}42$

c) $h_{\{2, 3, 4\}} = \frac{22+30+20}{100} = 0{,}72$

d) $h_0 = 0$

57. Página 289

a) Sí, es un experimento aleatorio porque antes de lanzar la moneda no sabemos con total certeza qué va a suceder.

b) Los sucesos elementales son dos:

A = «Caer con la punta hacia arriba»

B = «Caer con la punta hacia abajo»

c) No son sucesos equiprobables. La forma de la chincheta hace más probable que caiga con la punta hacia abajo que hacia arriba.

58. Página 289

Es un experimento regular, ya que tenemos la misma probabilidad de escoger cualquiera de las 16 latas.

a) $P(\text{naranja}) = \frac{6}{16} = 0{,}375$

b) $P(\text{limón}) = \frac{2}{16} = 0{,}125$

c) $P(\text{cola o manzana}) = \frac{8}{16} = 0{,}5$

d) $P(\text{no manzana}) = \frac{13}{16} = 0{,}8125$

e) $P(\text{ni cola ni limón}) = \frac{9}{16} = 0{,}5625$

f) $P(\text{ni naranja ni limón}) = \frac{8}{16} = 0{,}5$

59. Página 290

a) $P(\text{as}) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

b) $P(\text{oro}) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

c) $P(\text{rey de bastos}) = \frac{1}{40} = 0{,}025$

d) $P(\text{as o figura}) = P(\text{as}) + P(\text{figura}) = \frac{4}{40} + \frac{4 \cdot 3}{40} = \frac{16}{40} = 0{,}4$

60. Página 290

a) $P(\text{verdes}) = 0{,}3$

b) $P(\text{marrones}) = 0{,}45$

$P(\text{grises}) = 1 - (P(\text{azules}) + P(\text{marrones}) + P(\text{verdes})) = 1 - (0{,}15 + 0{,}45 + 0{,}30) = 0{,}1$

$P(\text{marrones o grises}) = P(\text{marrones}) + P(\text{grises}) = 0{,}45 + 0{,}1 = 0{,}55$

c) $P(\text{no azules}) = 1 - P(\text{azules}) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$

61. Página 290

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} = \frac{12 + 40 + 6 + 3}{60} = \frac{61}{60} \neq 1$$

La afirmación no es cierta porque la suma de las probabilidades de los sucesos elementales tiene que ser 1.

62. Página 290

Es un experimento regular, ya que tenemos la misma probabilidad de que salga cada una de las seis caras.

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0{,}33$

C es un suceso seguro $\longrightarrow P(C) = 1$

D es un suceso imposible $\longrightarrow P(D) = 0$

$P(D) < P(B) < P(A) < P(C)$

64. Página 290

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1 \rightarrow \frac{3}{7} + 3x = 1 \rightarrow x = \frac{4}{21}$$

65. Página 290

$$P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1 \xrightarrow{P(A)=x} x + x + x + 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{5}$$

Por tanto:

$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{5}$

$P(D) = \frac{2}{5}$

66. Página 290

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1 \rightarrow 3 \cdot 0{,}14 + 3x = 1 \rightarrow x = 0{,}193$$

67. Página 290

No son sucesos contrarios. Para que lo fuesen, la probabilidad de su unión tendría que valer 1 y la de su intersección 0.

68. Página 290

a) $P(\text{chica}) = 1 - P(\text{chico}) = 1 - 0{,}625 = 0{,}375$

b) Hay x chicos $\longrightarrow P(\text{chico}) = \frac{x}{32} = 0{,}625 \rightarrow x = 20$

Hay 20 chicos y $32 - 20 = 12$ chicas en la clase.

69. Página 290

a) $P(\text{chica}) = 1 - P(\text{chico}) = 1 - 0{,}48 = 0{,}52$

b) Sea x el número total de miembros de la peña.

$P(\text{chica}) = \frac{13}{x} = 0{,}52 \rightarrow x = 25$ miembros tiene la peña.

70. Página 290

a) $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1 \xrightarrow{a=2b} 4 \cdot 0{,}1 + 3b = 1 \rightarrow b = 0{,}2$

$a = 2b \xrightarrow{b=0{,}2} a = 0{,}4$

b) $P(\text{par}) = P(2) + P(4) + P(6) = 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}6$

71. Página 290

a) $P(1) = P(2) = P(3) = 0{,}1$ $\qquad P(4) = 0{,}4$

b) $P(\text{múltiplo de } 3) = P(\{3, 6\}) = P(3) + P(6) = 0{,}2$

c) $P(\text{mayor que } 1) = 1 - P(1) = 0{,}9$

d) $P(\text{menor que } 1) = 0$

72. Página 291

El espacio muestral está formado por sucesos elementales equiprobables: $E = \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$.

a) $P(15) = \frac{1}{6}$

b) $P(\text{par}) = P(16) + P(18) + P(20) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

c) $P(17 \text{ o } 19) = P(17) + P(19) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

d) $P(\text{múltiplo de } 3) = P(15) + P(18) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

e) $P(\text{mayor que } 16) = 1 - (P(15) + P(16)) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

f) $P(\text{primo}) = P(17) + P(19) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

73. Página 291

El espacio muestral está formado por 8 sucesos elementales equiprobables:

$E = \{CCC, CC+, C+C, C++, +CC, +C+, ++C, +++\}$

a) $P(\text{tres caras}) = P(\text{CCC}) = \frac{1}{8} = 0{,}125$

b) $P(\text{dos caras y una cruz}) = P(\text{CC+}) + P(\text{C+C}) + P(\text{+CC}) = \frac{3}{8} = 0{,}375$

c) $P(\text{una cara y dos cruces}) = P(\text{C++}) + P(\text{++C}) + P(\text{+C+}) = \frac{3}{8} = 0{,}375$

d) $P(\text{ninguna cara}) = P(\text{+++}) = \frac{1}{8} = 0{,}125$

e) $P(\text{al menos una cara}) = 1 - P(\text{+++}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0{,}875$

f) $P(\text{al menos dos cruces}) = P(\text{una cara y dos cruces}) + P(\text{tres cruces}) = 0{,}375 + P(\text{+++}) = 0{,}375 + 0{,}125 = 0{,}5$

74. Página 291

El espacio muestral está formado por 16 sucesos elementales equiprobables:

$E = \{CCCC, CCC+, CC+C, CC++, C+CC, C+C+, C++C, C+++, +CCC, +CC+, +C+C, +C++, ++CC, ++C+, +++C, ++++\}$

a) $P(\text{cuatro caras}) = \frac{1}{16}$

b) $P(\text{una cara}) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

c) $P(\text{al menos una cara}) = 1 - P(\text{ninguna cara}) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

d) $P(\text{al menos dos caras}) = P(\text{dos caras}) + P(\text{tres caras}) + P(\text{cuatro caras}) = \frac{6}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{11}{16}$

e) $P(\text{ninguna cara}) = \frac{1}{16}$

f) $P(\text{como máximo dos caras}) = P(\text{ninguna cara}) + P(\text{una cara}) + P(\text{dos caras}) = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{6}{16} = \frac{11}{16}$

75. Página 291

El espacio muestral está formado por 4 sucesos elementales equiprobables:

$E = \{\text{niño-niño, niño-niña, niña-niño, niña-niña}\}$

a) $P(\text{dos niños}) = \frac{1}{4} = 0{,}25$

b) $P(\text{dos niñas}) = \frac{1}{4} = 0{,}25$

c) $P(\text{un niño y una niña}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

76. Página 291

Es un experimento regular, ya que tenemos la misma probabilidad de extraer cada una de las 22 monedas.

a) P(mayor de 20 céntimos) = 1 – P(20 céntimos) = $1-\frac{4}{22}=\frac{18}{22}=\frac{9}{11}=0{,}818$

b) P(mayor de 50 céntimos) = P(1 €) + P(2 €) = $\frac{5}{22}+\frac{3}{22}=\frac{8}{22}=\frac{4}{11}=0{,}364$

c) P(mayor de 1,50 €) = P(2 €) = $\frac{3}{22}=0{,}136$.

d) P(menor o igual a 1 €) = 1 – P(2 €) = $1-\frac{3}{22}=\frac{19}{22}=0{,}864$

77. Página 291

Cada pregunta se acierta con una probabilidad de $\frac{1}{4}=0{,}25$ y se falla con una probabilidad de $\frac{3}{4}=0{,}75$.

a) P(acertar una) = P(acertar 1ª) + P(acertar 2ª) + P(acertar 3ª) + P(acertar 4ª) =

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{27}{64}=0{,}42$$

b) P(acertar cuatro) = $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{256}$.

c) P(acertar al menos dos) = 1 – (P(acertar una) + P(no acertar ninguna)) = $1-\frac{27}{64}-\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{67}{256}$

78. Página 291

En lenguaje cotidiano estas probabilidades significan:

$P(A) = 0{,}1 \rightarrow$ 1 de cada 10 compra carne del tipo A.

$P(B) = 0{,}25 \rightarrow$ 1 de cada 4 compra carne de tipo B.

$P(C) = 0{,}3 \rightarrow$ 3 de cada 10 compran carne de tipo C.

$P(A\cap B)=0{,}06 \rightarrow$ 6 de cada 100 compran carne de los tipos A y B.

$P(A\cap C)=0{,}015 \rightarrow$ 15 de cada 1 000 compran carne de los tipos A y C.

$P(B\cap C)=0{,}04 \rightarrow$ 4 de cada 100 compran carne de los tipos B y C.

$P(A\cap B\cap C)=0{,}003 \rightarrow$ 3 de cada 1 000 compran carne de los tres tipos.

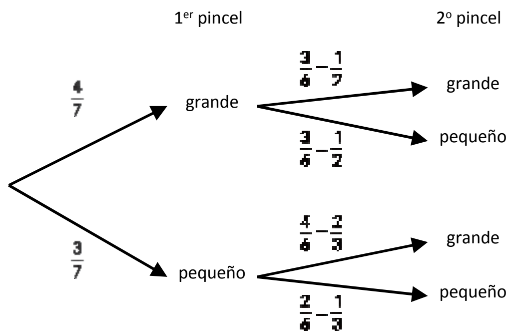
a) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}1+0{,}25-0{,}06=0{,}29$

b) $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)=$

$=0{,}1+0{,}25+0{,}3-0{,}06-0{,}015-0{,}04+0{,}003=0{,}538$

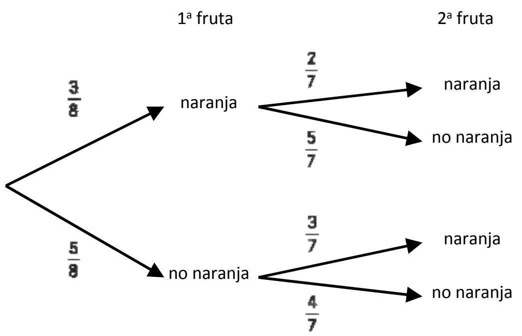
c) P(ningún tipo de carne) = $1-P(A\cup B\cup C)=1-0{,}538=0{,}462$

79. Página 291



P(al menos uno grande) = 1 – P(dos pequeños) = $1-\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{3}=\frac{6}{7}=0{,}86$

80. Página 291



a) P(dos naranjas) = $\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}=\frac{3}{28}=0{,}11$

b) P(ninguna naranja) = $\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}=\frac{5}{14}=0{,}36$

c) P(al menos una naranja) = 1 – P(ninguna naranja) = $1-\frac{5}{14}=\frac{9}{14}=0{,}64$

81. Página 291

Caras pares = {2, 4, 6} ⟶ P(6/par) = $\frac{1}{3}=0{,}33$

82. Página 291

En la baraja hay 4 sotas y 12 figuras ⟶ P(sota/figura) = $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}=0{,}33$

83. Página 291

P(2 caras/1.ª cara) = $\frac{1}{2}=0{,}5$

84. Página 291

Casos que suman 5 = {1 – 4, 2 – 3, 3 – 2, 4 – 1}   Casos favorables = {2 – 3, 3 – 2}

$P(3/\text{suma es } 5) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

85. Página 291

Casos posibles = {+++, ++C, +C+, +CC}

$P(\text{al menos una cara}/1^{a} \text{ cruz}) = \frac{3}{4} = 0{,}75$

86. Página 291

Primos impares = {3, 5}   Primos = {2, 3, 5} $P(\text{impar}/\text{primo}) = \frac{2}{3} = 0{,}67$

87. Página 291

En la baraja hay 4 ases y 40 – 4 = 36 cartas que no son reyes $\rightarrow P(\text{as}/\text{no rey}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = 0{,}11$

88. Página 291

Daniel tiene 4 monedas de 20 céntimos y 6 monedas menores de 1 €.

$P(20 \text{ céntimos}/\text{menor } 1\ €) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0{,}67$

90. Página 292

Número total de pinzas = 10 + 18 + 19 + 23 = 70

a) $P(\text{grande}) = \frac{10+18}{70} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

c) $P(\text{grande}/\text{de plástico}) = \frac{18}{41}$

b) $P(\text{grande y de plástico}) = \frac{18}{70} = \frac{9}{35}$

91. Página 292

	V	M	Total
Mascota	40	25	65
No mascota	20	15	35
Total	60	40	100

a) $P(\text{mujer}/\text{mascota}) = \frac{25}{65} = \frac{5}{13}$

b) $P(\text{mascota}/\text{mujer}) = \frac{25}{40} = 0{,}625$

c) $P(\text{ni tiene mascota ni mujer}) = P(\text{hombre y no mascota}) = \frac{20}{100} = 0{,}2$

92. Página 292

	V	M	Total
Moreno	10	12	22
Rubio	10	4	14
Total	20	16	36

a) $\frac{20}{36}=\frac{5}{9}=0{,}56$

b) $\frac{10}{36}=\frac{5}{18}=0{,}278$

c) $\frac{10+10+12}{36}=\frac{8}{9}=0{,}889$

d) $\frac{12}{16}=\frac{3}{4}=0{,}75$

e) $\frac{4}{14}=\frac{2}{7}=0{,}286$

f) $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}=0{,}11$

93. Página 292

a) $P(\text{dos ases})=P(1^a\text{ as})\cdot P(\text{as}/1^a\text{ as})=\frac{4}{40}\cdot\frac{3}{39}=\frac{1}{130}$

b) $P(\text{dos figuras})=P(1^a\text{ figura})\cdot P(2^a\text{ figura}/1^a\text{ figura})=\frac{12}{40}\cdot\frac{11}{39}=\frac{11}{130}$

c) $P(\text{rey y 7})=P(1^a\text{ rey})\cdot P(2^a\text{ siete}/1^a\text{ rey})+P(1^a\text{ siete})\cdot P(2^a\text{ rey}/1^a\text{ siete})=\frac{4}{40}\cdot\frac{4}{39}+\frac{4}{40}\cdot\frac{4}{39}=\frac{4}{195}$

d) $P(\text{copa y basto})=P(1^a\text{ copa})\cdot P(2^a\text{ basto}/1^a\text{ copa})+P(1^a\text{ basto})\cdot P(2^a\text{ copa}/1^a\text{ basto})=\frac{10}{40}\cdot\frac{10}{39}+\frac{10}{40}\cdot\frac{10}{39}=\frac{5}{39}$

94. Página 292

a) $P(\text{distintos palos})=P(1^a\text{ palo 1})\cdot P(2^a\text{ palo 2}/1^a\text{ palo 1})\cdot P(3^a\text{ palo 3 o 4}/1^a\text{ palo 1 y }2^a\text{ palo 2})$

$P(\text{distintos palos})=\frac{40}{40}\cdot\frac{30}{39}\cdot\frac{20}{38}=\frac{100}{247}=0{,}405$

b) $P(\text{de igual palo})=P(1^a\text{ palo 1})\cdot P(2^a\text{ palo 1}/1^a\text{ palo 1})\cdot P(3^a\text{ palo 1}/1^a\text{ palo 1})=\frac{40}{40}\cdot\frac{9}{39}\cdot\frac{8}{38}=\frac{12}{247}=0{,}049$

c) $P(\text{sota, caballo y rey})=P(\text{sota, caballo o rey})\cdot P(\text{sota, caballo o rey, distinta primera})\cdot$

$\cdot P(\text{sota, caballo o rey, distinta primera y segunda})=\frac{12}{40}\cdot\frac{8}{39}\cdot\frac{4}{38}=\frac{8}{1\,235}$

d) $P(\text{dos figuras y as})=P(1^a\text{ fig})\cdot P(2^a\text{ fig})\cdot P(3^a\text{ as})+P(1^a\text{ fig})\cdot P(2^a\text{ as})\cdot P(3^a\text{ fig})+P(1^a\text{ as})\cdot P(2^a\text{ fig})\cdot P(3^a\text{ fig})$

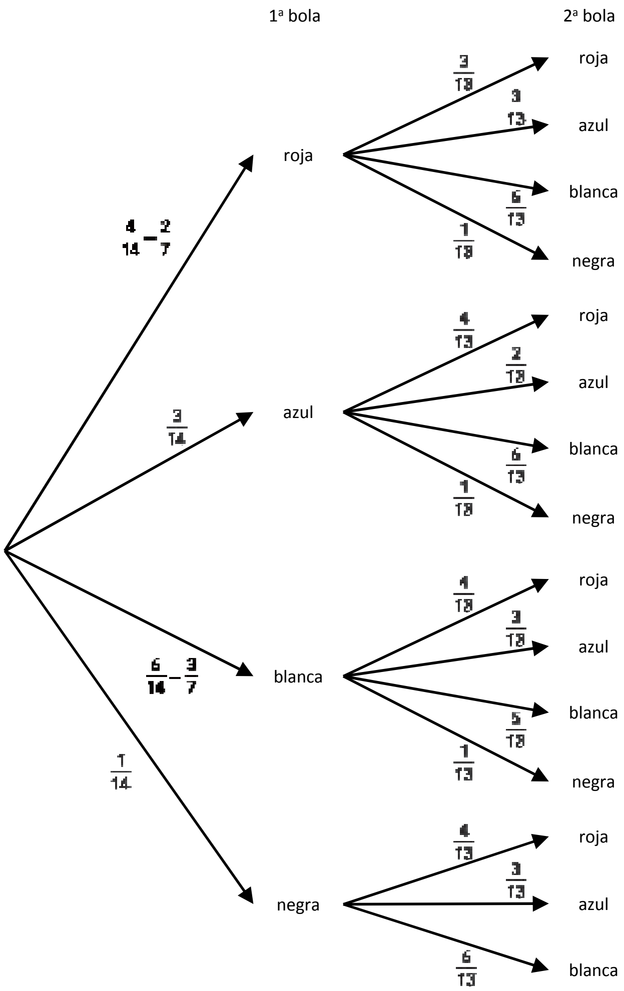
$P(\text{dos figuras y as})=\frac{12}{40}\cdot\frac{11}{39}\cdot\frac{4}{38}+\frac{12}{40}\cdot\frac{4}{39}\cdot\frac{11}{38}+\frac{4}{40}\cdot\frac{12}{39}\cdot\frac{11}{38}=\frac{33}{1235}$

95. Página 292

$P(\text{caballo y oro})=P(1^a\text{ caballo de oros})\cdot P(2^a\text{ oro o caballo})+P(1^a\text{ caballo distinto de oro})\cdot P(2^a\text{ oro})+$

$+P(1^a\text{ oro distinto de caballo})\cdot P(2^a\text{ caballo})=\frac{1}{40}\cdot\frac{12}{39}+\frac{3}{40}\cdot\frac{10}{39}+\frac{9}{40}\cdot\frac{4}{39}=\frac{1}{20}$

96. Página 292



a) $P(\text{2 bolas rojas}) = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{13} = \frac{6}{91} = 0{,}066$

b) $P(\text{mismo color}) = P(\text{2 rojas}) + P(\text{2 azules}) + P(\text{2 blancas}) = \frac{6}{91} + \frac{3}{14} \cdot \frac{2}{13} + \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{13} = \frac{24}{91} = 0{,}26$

c) $P(\text{distinto color}) = 1 - P(\text{mismo color}) = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91} = 0{,}74$

d) $P(1^{\text{a}}\ \text{azul}) = \frac{3}{14}$

97. Página 292

a) $P(3\text{ iguales}) = P(3\text{ rojas}) + P(3\text{ azules}) + P(3\text{ amarilla}) = \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2} + 0 + 0 = \frac{5}{28} = 0{,}18$

b) $P(2\text{ rojas y azul}) = \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{3} + \frac{5}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{3} = \frac{5}{14} = 0{,}36$

c) $P(2\text{ azules y amarilla}) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{56} = 0{,}018$

98. Página 292

$P(\text{falla Jorge}) = 1 - P(\text{acierta Jorge}) = 1 - 0{,}68 = 0{,}32$

$P(\text{falla Luisa}) = 1 - P(\text{acierta Luisa}) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$

$P(\text{fallan los dos}) = P(\text{falla Jorge}) \cdot P(\text{falla Luisa}) = 0{,}32 \cdot 0{,}25 = 0{,}08$

$P(\text{algún acierto}) = 1 - P(\text{fallan los dos}) = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$

99. Página 293

a) $P(\text{carne}) = 1 - P(\text{no carne}) = 1 - 0{,}52 = 0{,}48$

$P(\text{solo carne}) = P(\text{carne}) - P(\text{carne y pescado}) = 0{,}48 - 0{,}08 = 0{,}4$

b) $P(\text{carne o pescado}) = P(\text{carne}) + P(\text{pescado}) - P(\text{carne y pescado})$

$P(\text{pescado}) = 0{,}68 - 0{,}48 + 0{,}08 = 0{,}28$

$P(\text{solo pescado}) = P(\text{pescado}) - P(\text{carne y pescado}) = 0{,}28 - 0{,}08 = 0{,}2$

c) $P(\text{solo uno de los dos platos}) = P(\text{solo carne}) + P(\text{solo pescado}) = 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6$

d) $P(\text{ni carne ni pescado}) = 1 - P(\text{carne o pescado}) = 1 - 0{,}68 = 0{,}32$

100. Página 293

Mario no ha estudiado dos temas de los siete posibles. En los tres elegidos por el profesor siempre hay alguno que ha estudiado. Por tanto, que Mario pueda elegir un tema que sabe es un suceso seguro:

$P(\text{puede elegir un tema que sabe}) = 1$

101. Página 293

	V	M	Total
Gafas	36 %	16 %	52 %
Lentillas	5 %	13 %	18 %
Ni gafas ni lentillas	19 %	11 %	30 %
Total	60 %	40 %	100 %

a) $P(\text{lentillas}) = 0{,}18$

b) $P(\text{chica sin gafas ni lentillas}) = 0{,}11$

c) $P(\text{chico con gafas}) = 0{,}36$

d) $P(\text{lentillas/chico}) = \frac{5}{60} = \frac{1}{12} = 0{,}0833$

102. Página 293

a) P(no viajado al extranjero) = P(mujer y no viajado al extranjero) + P(hombre y no viajado al extranjero)

P(hombre) + P(mujer) = 1 $\xrightarrow{P(mujer)=x} \frac{x}{2}+x=1 \rightarrow x=\frac{2}{3}$

P(hombre) = $\frac{1}{3}$ P(mujer) = $\frac{2}{3}$

P(mujer y no viajado al extranjero) = P(mujer) · P(no viajado al extranjero/mujer) = $\frac{2}{3}\cdot 0{,}58=0{,}3867$

P(no viajado al extranjero/hombre) = 1 − P(viajado al extranjero/hombre) = 1 − 0,45 = 0,55

P(hombre y no viajado al extranjero) = P(hombre) · P(no viajado al extranjero/hombre) = $\frac{1}{3}\cdot 0{,}55=0{,}183$

P(no viajado al extranjero) = 0,387 + 0,183 = 0,57

b) P(viajado al extranjero/mujer) = 1 − P(no viajado al extranjero/mujer) = 1 − 0,58 = 0,42

P(mujer y viajado al extranjero) = P(mujer) · P(viajado al extranjero/mujer) = $\frac{2}{3}\cdot 0{,}42=0{,}28$

DEBES SABER HACER

1. Página 293

a) El espacio muestral está formado por 5 sucesos elementales: $E = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

A = «Extraer una bola con un número mayor que 5»

B = «Extraer una bola con un número primo»

c) Los posibles resultados son 3, 5 y 7.

2. Página 293

Tomamos un gran número de habitantes de la ciudad, N. Se cuentan dentro de ese grupo los que empiezan por «Z», n. La probabilidad de escoger un habitante cuyo nombre empiece por Z es $\frac{n}{N}$.

3. Página 293

Es un experimento regular, ya que tenemos la misma probabilidad de extraer cada una de las 20 bolas.

P(amarilla) = $\frac{8}{20}=\frac{2}{5}=0{,}4$

4. Página 293

a) P(no 2 divisores) = $P(\{1, 4, 6\})$ = 1 − P(2 divisores) = $1-\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=0{,}5$

b) P(2 o 3 divisores) = $P(\{2, 3, 4, 5\})$ = P(2 divisores) + P(3 divisores) = $\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}=0{,}67$

c) P(3 o más divisores) = $P(\{4, 6\})$ = 1 − P(2 divisores) − P(1 divisor) = $1-\frac{3}{6}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}=0{,}33$

5. Página 293

a) $P(4\text{ reyes}) = P(\text{rey}) \cdot P(\text{rey}) \cdot P(\text{rey}) \cdot P(\text{rey}) = \left(\dfrac{4}{40}\right)^4 = \dfrac{1}{10\,000} = 0{,}0001$

b) $P(4\text{ reyes}) = P(\text{rey}) \cdot P(\text{rey/rey}) \cdot P(\text{rey/2 reyes}) \cdot P(\text{rey/3 reyes}) = \dfrac{4}{40} \cdot \dfrac{3}{39} \cdot \dfrac{2}{38} \cdot \dfrac{1}{37} = \dfrac{1}{91\,390}$

6. Página 293

P(una arriba y otra abajo) $= P$(1ª arriba y 2ª abajo) $+ P$(1ª abajo y 2ª arriba)

P(una arriba y otra abajo) $= P$(1ª arriba) $\cdot P$(2ª abajo/1ª arriba) $+ P$(1ª abajo) $\cdot P$(2ª arriba/1ª abajo)

P(una arriba y otra abajo) $= 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}48$.

COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

103. Página 294

a) $99\,999\,999 = 23 \cdot 4\,347\,826 + 1$

El número total de DNI son 99 999 999.

Los casos favorables para tener una letra distinta de «T» y «R» son 4 347 826.

Los casos favorables para tener la letra «T» o «R» son 4 347 827.

No hay dos DNI iguales, por lo tanto, para ver los casos favorables de que los 32 DNI tengan la misma letra tenemos que escoger 32 elementos del conjunto de todos los que tienen la misma letra, no podemos repetir elementos y no importa el orden.

- Casos favorables de 32 DNI con la misma letra, distinta de «T» o «R»:

$$C_{4\,347\,826,\,32} = \binom{4\,347\,826}{32}$$

- Casos favorables de 32 DNI con la misma letra, «T» o «R»:

$$C_{4\,347\,827,\,32} = \binom{4\,347\,827}{32}$$

- Casos posibles de elección de 32 DNI:

$$C_{99\,999\,999,\,32} = \binom{99\,999\,999}{32}$$

Hay 23 letras posibles, por lo tanto, para obtener la probabilidad de que todos los alumnos tengan la misma letra hay que sumar las probabilidades de las 23 letras posibles:

$$2 \cdot \frac{C_{4\,347\,827,\,32}}{C_{99\,999\,999,\,32}} + 21 \cdot \frac{C_{4\,347\,826,32}}{C_{99\,999\,999,\,32}} = 6{,}114906 \cdot 10^{-43}$$

b) Como hay 32 alumnos y 23 letras posibles, es imposible que cada alumno tenga una letra diferente. Por tanto, es un suceso imposible con probabilidad 0.

c) Para que los DNI terminen en letra *A*, el resto de dividir el número del DNI entre 23 debe ser 3. Por tanto, hay 4 347 826 posibilidades.

Para que el DNI termine en 5 y cumpla lo anterior tiene que ser de la forma $23 \cdot a + 3$, donde a es un número que termina en 4. Por tanto, hay 434 782 posibilidades.

- Casos favorables de 2 DNI con la letra «A», que terminan en 5:

$$C_{434\,782,\,2} = \binom{434\,782}{2}$$

- Casos posibles de 2 DNI que terminan en 5:

$$C_{4\,347\,826,\,2} = \binom{4\,347\,826}{2}$$

$$P(\text{los dos DNI tengan la letra «A»}) = \frac{C_{434\,782,\,2}}{C_{4\,347\,826,\,2}} = 0{,}00999995$$

FORMAS DE PENSAR. Razonamiento matemático

104. Página 294

a) Cada hijo, por orden, puede ser niño o niña. Los casos posibles son $2^4 = 16$.

Para tener un hijo y tres hijas hay cuatro casos favorables, dependiendo del orden en que tengan al niño:

$$P(\text{niño y 3 niñas}) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Para tener dos hijas hay 6 casos favorables:

niña-niña-niño-niño	niña-niño-niña-niño	niña-niño-niño-niña
niño-niña-niña-niño	niño-niña-niño-niña	niño-niño-niña-niña

$$P(\text{2 niños y 2 niñas}) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

Es más probable que tenga dos hijos y dos hijas a que tenga un hijo y tres hijas.

b) La situación más probable es que tengan dos hijos y dos hijas, ya que hay más casos favorables, porque podemos obtener más ordenaciones. La situación menos probable es que los cuatro niños sean del mismo sexo, ya que para cada uno de ellos solo hay un caso favorable.

c) Si tuviera cinco hijos, la situación más probable sería que tuviesen dos hijos y tres hijas o tres hijos y dos hijas, ya que obtenemos más casos favorables porque hay más posibles ordenaciones que cumplen esa condición.

La situación menos probable sería que los cinco hijos fuesen del mismo sexo, ya que solo hay un caso favorable de todos los posibles.

105. Página 294

Tenemos que obtener la probabilidad de que los tres trozos de barra sean de longitud menor que 0,5 m.

Se dan dos cortes en la barra, eligiendo dos puntos al azar. Tenemos la misma probabilidad de que cada corte mida entre 0 y 0,5 m o entre 0,5 y 1 m.

$P(\text{podemos formar triángulo}) = 1 - P(\text{dos cortes entre 0 y 0,5}) - P(\text{dos cortes entre 0,5 y 1})$

$$P(\text{podemos formar triángulo}) = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

106. Página 294

a) P(Villarriba gane los tres partidos) = P(Villarriba gana P1) · P(Villarriba gana P2) · P(Villarriba gana P3)

P(Villarriba gane los tres partidos) = $\frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8}=\frac{125}{512}=0{,}24$

b) P(dos partidos empate) = P(EEG o EEP) + P(EGE o EPE) + P(GEE o PEE) = $\frac{2}{8}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{6}{8}+\frac{2}{8}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{2}{8}+\frac{6}{8}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{2}{8}=\frac{9}{64}=0{,}14$

107. Página 294

El suceso que para un experimento tiene probabilidad 1 es el que representa al total de posibilidades del experimento.

El suceso vacío dentro del experimento es el único que tiene probabilidad 0.

108. Página 294

a) El espacio muestral está formado por 8 sucesos: el suceso vacío, A, B, C, $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{B, C\}$ y $\{A, B, C\}$.

b) $\{A,B\}=\{A\}\cup\{B\}$ $\quad$ $\{A,C\}=\{A\}\cup\{C\}$ $\quad$ $\{B,C\}=\{B\}\cup\{C\}$ $\quad$ $\{A,B,C\}=\{A\}\cup\{B\}\cup\{C\}$

PRUEBAS PISA

109. Página 295

a) La primera afirmación es falsa. Como término medio cada día se fabrican 8 000 reproductores, de los cuales 2 000 son de vídeo. Esto representa, como término medio, un cuarto de todos los reproductores totales.

La segunda afirmación es falsa, ya que los datos de la tabla recogen los datos en término medio, no los datos exactos.

La tercera afirmación es cierta, un porcentaje del 3 % representa una probabilidad de 0,03.

b) Como media, cada día se envían a reparar:

- El 5 % de 2 000 = $\frac{5}{100}\cdot 2000=100$ reproductores de vídeo
- El 3 % de 6 000 = $\frac{3}{100}\cdot 6000=180$ reproductores de audio

Por tanto, la afirmación es falsa.

Dirección de arte: José Crespo

Proyecto gráfico: Pep Carrió
Interiores: Manuel García

Ilustración: Esther Gili, José Zarzo y Eduardo Leal
Fotografía de cubierta: Leila Méndez

Jefa de proyecto: Rosa Marín
Coordinación de ilustración: Carlos Aguilera
Jefe de desarrollo de proyecto: Javier Tejeda
Desarrollo gráfico: Raúl de Andrés y Jorge Gómez

Dirección técnica: Jorge Mira

Coordinación técnica: Alejandro Retana
Confección y montaje: Luis González y Alfonso García
Corrección: Livia Villaluenga
Corrección matemática: Lidu Gómez Adell y Cristina Rodríguez Pastor
Documentación y selección fotográfica: Nieves Marinas

Fotografías: ARCHIVO SANTILLANA.

Avda. de los Artesanos, 6
28760 Tres Cantos, Madrid
PRINTED IN SPAIN

EAN: 8431300269675
CP: 784338