1 Operaciones con números naturales

Página 11

1. Resuelve estas expresiones en el orden en que aparecen:

a) $13 - 2 \cdot 5$ **b)** $2 + 6 \cdot (13 - 2 \cdot 5)$ **c)** $2 + 6 \cdot (13 - 2 \cdot 5) - 7 \cdot 2$

a) $13 - 2 \cdot 5 = 13 - 10 = 3$

b) $2 + 6 \cdot (13 - 2 \cdot 5) = 2 + 6 \cdot 3 = 2 + 18 = 20$

c) $2 + 6 \cdot (13 - 2 \cdot 5) - 7 \cdot 2 = 20 - 7 \cdot 2 = 20 - 14 = 6$

2. Resuelve.

a) $5 \cdot 3 - 2 \cdot 6$

b) $(14 - 9) \cdot 3 - (22 - 20) \cdot 6$

c) $(7 \cdot 2 - 9) \cdot 3 - (22 - 5 \cdot 4) \cdot 6$

a) $5 \cdot 3 - 2 \cdot 6 = 15 - 12 = 3$

b) $(14 - 9) \cdot 3 - (22 - 20) \cdot 6 = 5 \cdot 3 - 2 \cdot 6 = 15 - 12 = 3$

c) $(7 \cdot 2 - 9) \cdot 3 - (22 - 5 \cdot 4) \cdot 6 = (14 - 9) \cdot 3 - (22 - 20) \cdot 6 = 5 \cdot 3 - 2 \cdot 6 = 15 - 12 = 3$

3. Calcula y comprueba que los resultados de los cuatro apartados son diferentes.

a) $3 \cdot 2^3 - 7 + 1$ **b)** $3 \cdot 2^3 - (7 + 1)$ **c)** $3 \cdot (2^3 - 7) + 1$ **d)** $3 \cdot (2^3 - 7 + 1)$

a) $3 \cdot 2^3 - 7 + 1 = 3 \cdot 8 - 7 + 1 = 24 - 7 + 1 = 18$

b) $3 \cdot 2^3 - (7 + 1) = 3 \cdot 8 - 8 = 24 - 8 = 16$

c) $3 \cdot (2^3 - 7) + 1 = 3 \cdot (8 - 7) + 1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$

d) $3 \cdot (2^3 - 7 + 1) = 3 \cdot (8 - 7 + 1) = 3 \cdot 2 = 6$

Se observa que todos los resultados son diferentes.

4. Calcula paso a paso y comprueba que el valor de cada una de estas expresiones es cero:

a) $14 - 2 \cdot (5^2 - 3 \cdot 6)$

b) $35 - 2 \cdot 4^2 - (2^3 - 10 : 2)$

c) $(6^2 : 4 + 2) - (6^2 - 5^2)$

a) $14 - 2 \cdot (5^2 - 3 \cdot 6) = 14 - 2 \cdot (25 - 18) = 14 - 2 \cdot 7 = 14 - 14 = 0$

b) $35 - 2 \cdot 4^2 - (2^3 - 10 : 2) = 35 - 2 \cdot 16 - (8 - 5) = 35 - 32 - 3 = 35 - 35 = 0$

c) $(6^2 : 4 + 2) - (6^2 - 5^2) = (36 : 4 + 2) - (36 - 25) = (9 + 2) - 11 = 11 - 11 = 0$

Página 12

5. Separa los números primos de los compuestos.

17 25 29 31 39 42 47 49 53 55

Números primos → 17, 29, 31, 47, 53 Números compuestos → 25, 39, 42, 49, 55

6. Escribe los números primos comprendidos entre 50 y 100.

Números primos entre 50 y 100: 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

7. Indica por qué cada uno de los siguientes números es compuesto:

a) 111 **b) 207** **c) 990**

a) 111 → Es compuesto, ya que, por ejemplo, $111 = 3 \cdot 37$

b) 207 → Es compuesto, ya que, por ejemplo, $207 = 9 \cdot 23$

c) 990 → Es compuesto, ya que, por ejemplo, $990 = 2 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 11$

8. Encuentra, entre los números siguientes, los múltiplos de 3 y los múltiplos de 9:

71 75 108 130 141 555 882 960

Múltiplos de 3 → 75, 108, 141, 555, 882, 960

Múltiplos de 9 → 108, 882

9. ¿Cuáles de estos números son múltiplos de 2 y también de 5? ¿Cuáles son múltiplos de 11?

34 35 40 72 85 90 108 115 140

Múltiplos de 2 y de 5 → 40, 90, 140

Múltiplos de 11 → No hay.

10. Averigua si el número 107 es primo o compuesto.

107 es un número primo ya que solo tiene por divisores a 1 y a él mismo.

Página 13

11. **Descompón en factores estos números y calcula:**

12 15 18 30

a) mín.c.m. (12, 18) **b) mín.c.m. (12, 30)** **c) mín.c.m. (18, 30)**

d) mín.c.m. (12, 15, 18) **e) mín.c.m. (12, 15, 30)** **f) mín.c.m. (12, 18, 30)**

$12 = 2^2 \cdot 3$ $15 = 3 \cdot 5$ $18 = 2 \cdot 3^2$ $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

a) mín.c.m. $(12, 18) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$

b) mín.c.m. $(12, 30) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

c) mín.c.m. $(18, 30) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$

d) mín.c.m. $(12, 15, 18) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$

e) mín.c.m. $(12, 15, 30) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

f) mín.c.m. $(12, 18, 30) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$

12. **Calcula mentalmente el mín.c.m. de:**

a) 8 y 12 **b) 20 y 30** **c) 6, 8 y 12**

d) 4, 10 y 15 **e) 2, 4 ,5 y 8** **f) 4, 6, 9 y 12**

a) 8 y 12 → 24 b) 20 y 30 → 60 c) 6, 8 y 12 → 24

d) 4, 10 y 15 → 60 e) 2, 4, 5 y 8 → 40 f) 4, 6, 9 y 12 → 36

13. **Calcula.**

a) mín.c.m. (126, 168) **b) mín.c.m. (90, 125, 150)**

a)
$$\begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 168 & 2 \\ 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$

$168 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$

mín.c.m. $(126, 168) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 252$

b)
$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

$125 = 5^3$

$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$

mín.c.m. $(90, 125, 150) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 = 2\,250$

2 Números enteros

Página 14

1. Calcula.

a) $-5 - 12 + 8 - 6 + 4 - 3$

b) $+(+8) + (-6) - (+5) - (-2) + (-3)$

c) $(12 - 15 + 9 - 7) - (2 - 13 + 6 - 1)$

d) $(-9) - (9 - 11) + (-8) - (10 - 7)$

a) $-5 - 12 + 8 - 6 + 4 - 3 = 12 - 26 = -14$

b) $+(+8) + (-6) - (+5) - (-2) + (-3) = 8 - 6 - 5 + 2 - 3 = 10 - 14 = -4$

c) $(12 - 15 + 9 - 7) - (2 - 13 + 6 - 1) = (21 - 22) - (8 - 14) = (-1) - (-6) = -1 + 6 = 5$

d) $(-9) - (9 - 11) + (-8) - (10 - 7) = (-9) - (-2) + (-8) - (3) = -9 + 2 - 8 - 3 = -18$

2. Hemos ido midiendo la temperatura en un cierto lugar a diferentes horas del día, observando estas variaciones: subió 2 °C, después bajó 3 °C y luego bajó otros 5 °C.

Si inicialmente había –1 °C, ¿cuál fue la temperatura final?

Temperatura inicial, –1 °C

Temperatura final $\rightarrow$ $-1 + 2 - 3 - 5 = -7$ °C

Página 15

3. Resuelve expresando el proceso paso a paso.

a) $5 - 6[(12 - 9) + (7 - 11)]$

b) $21 + 4[1 + 2 \cdot (6 - 10)]$

c) $15 - 3[5 \cdot (2 - 8) - (-14)]$

d) $5 - 32 : [9 : (7 - 10) + (-5)]$

e) $7 - 2 \cdot [(3 - 8) : (-5) + 3]$

f) $3 - (-4) \cdot (-6) - [(5 - 9) \cdot (-2) + 1] \cdot (-3)$

a) $5 - 6[(12 - 9) + (7 - 11)] = 5 - 6 \cdot [3 + (-4)] = 5 - 6 \cdot (3 - 4) = 5 - 6(-1) = 5 + 6 = 11$

b) $21 + 4[1 + 2 \cdot (6 - 10)] = 21 + 4 \cdot [1 + 2(-4)] = 21 + 4 \cdot [1 + (-8)] = 21 + 4 \cdot (1 - 8) =$
$= 21 + 4 \cdot (-7) = 21 - 28 = -7$

c) $15 - 3[5 \cdot (2 - 8) - (-14)] = 15 - 3 \cdot [5 \cdot (-6) + 14] = 15 - 3 \cdot [-30 + 14] =$
$= 15 - 3 \cdot (-16) = 15 + 48 = 63$

d) $5 - 32 : [9 : (7 - 10) + (-5)] = 5 - 32 : [9 : (-3) + (-5)] = 5 - 32 : [(-3) + (-5)] =$
$= 5 - 32 : (-8) = 5 + 4 = 9$

e) $7 - 2 \cdot [(3 - 8) : (-5) + 3] = 7 - 2 \cdot [(-5) : (-5) + 3] = 7 - 2 \cdot (1 + 3) = 7 - 2 \cdot 4 = 7 - 8 = -1$

f) $3 - (-4) \cdot (-6) - [(5 - 9) \cdot (-2) + 1] \cdot (-3) = 3 - (+24) - [-4 \cdot (-2) + 1] \cdot (-3) =$
$= 3 - 24 - [8 + 1] \cdot (-3) = 3 - 24 - 9(-3) =$
$= 3 - 24 + 27 = 6$

4. Resuelve.

a) $(-5)^2 + (-4)^3$

b) $(4 - 1)^3 + (1 - 4)^3$

c) $(7 - 2)^2 + (2 - 7)^2$

d) $(3 - 7)^2 + (3 - 4)^3 + (-3)^3$

e) $(1 - 7)^2 - (7 - 5)^3 + (3 - 5)^5$

f) $(12 - 4 - 5)^4 - [(2 - 6)^2 - (1 - 5)^3]$

a) $(-5)^2 + (-4)^3 = 25 + (-64) = -39$

b) $(4 - 1)^3 + (1 - 4)^3 = 3^3 + (-3)^3 = 27 + (-27) = 0$

c) $(7 - 2)^2 + (2 - 7)^2 = 5^2 + (-5)^2 = 25 + 25 = 50$

d) $(3 - 7)^2 + (3 - 4)^3 + (-3)^3 = (-4)^2 + (-1)^3 + (-3)^3 = 16 - 1 - 27 = -12$

e) $(1 - 7)^2 - (7 - 5)^3 + (3 - 5)^5 = (-6)^2 - 2^3 + (-2)^5 = 36 - 8 - 32 = -4$

f) $(12 - 4 - 5)^4 - [(2 - 6)^2 - (1 - 5)^3] = 3^4 - [(-4)^2 - (-4)^3] = 81 - [16 - (-64)] =$
$= 81 - (16 + 64) = 81 - 80 = 1$

3 Números decimales

Página 16

Aún más sencillo

Calcula mentalmente:

a) 1,5 + 0,25	**b) 3,25 + 2,2**	**c) 2,75 – 0,5**	**d) 3 – 2,8**
e) 2,75 · 100	**f) 3,2 : 10**	**g) 6 · 0,5**	**h) 6 · 0,25**
i) 4,8 : 2	**j) 4,8 : 4**		
a) 1,75	b) 5,45	c) 2,25	d) 0,2
e) 275	f) 0,32	g) 3	h) 1,5
i) 2,4	j) 1,2		

Aún más sencillo

Calcula mentalmente:

a) ¿Cuánto le falta a 0,5 para llegar a 1? **b) ¿Cuánto le falta a 2,6 para llegar a 3?**

a) 0,5 b) 0,4

Aún más sencillo

Estima mentalmente, calcula y después compara:

a) 2,9 · 3,1	**b) 5,99 : 1,9**	**c) (4,9 + 1,01) · 2,99**
a) 8,99	b) 3,15	c) 17,67

Página 18

1. Indica qué tipo de número decimal es cada uno de los siguientes:

3,52 2,888... 1,5454... 3,222…

2,7333... 3,5222… 1,030030003…

Exactos $\rightarrow$ 3,52

Periódicos puros $\rightarrow$ 2,888…; 1,5454…; 3,222…

Periódicos mixtos $\rightarrow$ 2,7333…; 3,5222…

Irracionales $\rightarrow$ 1,030030003…

2. Indica qué tipo de número decimal se obtiene en cada división:

a) 7 : 16 b) 13 : 25 c) 1,6 : 0,9

d) 4 : 11 e) 0,04 : 0,3 f) 13,41 : 0,11

a) Exacto (0,4375).

b) Exacto (0,52).

c) Periódico puro $(1,\overset{\frown}{7})$.

d) Periódico puro $(0,\overset{\frown}{36})$.

e) Periódico mixto $(0,1\overset{\frown}{3})$.

f) Periódico puro $(121,\overset{\frown}{90})$.

3. Ordena de menor a mayor estos números:

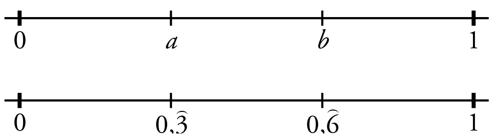
2,5 $2,\overset{\frown}{5}$ $2,3\overset{\frown}{5}$ 2,505005…

$2,3\overset{\frown}{5} < 2,5 < 2,505005\ldots < 2,\overset{\frown}{5}$

4. Escribe tres números decimales comprendidos entre 2,5 y $2,\overset{\frown}{5}$.

Por ejemplo: 2,51; 2,52; 2,53

5. Escribe dos números, *a* y *b*, que dividen el intervalo entre cero y uno en tres partes iguales.



Página 19

6. ¿Qué podemos decir del error absoluto de estas mediciones?

a) Ballena → 37 toneladas

b) Pavo → 3 kg

a) Ballena → 37 toneladas; 365 < 37 < 37,25

Cometemos un error absoluto de 0,5 toneladas.

$\frac{0,5}{37} = 0,0\widehat{135} \rightarrow 0,0\widehat{135}$ error relativo.

b) Pavo → 3 kg; 2,52 < 3 < 3,5

Cometemos un error absoluto de 0,5 kg.

$\frac{0,5}{3} = 0,1\widehat{6} \rightarrow 0,1\widehat{6}$ error relativo.

7. ¿Cuál de las mediciones del ejercicio anterior es más precisa?

Razona tu respuesta.

La medición del peso de la ballena es más precisa que la del peso del pavo puesto que, aunque el error absoluto que cometemos es mayor en el peso de la ballena, el error relativo es mucho menor que el que cometemos al medir el peso del pavo.

Ejercicios y problemas

Página 20

Practica

1. Ordena de menor a mayor estos números:

+11 –15 –1 +12 +1 0 –22 –3 +13

–22 < –15 < –3 < –1 < 0 < 1 < 11 < 12 < 13

2. ¿Qué podemos decir del error absoluto en cada una de estas mediciones?

a) Volumen de una bañera → 326 litros

b) Volumen de una piscina → 320 m^3

¿Cuál de las dos se ha realizado con mayor precisión?

Explica tu respuesta.

a) Cometemos un error absoluto de 0,5 litros debido al redondeo → 325,5 < 326 < 326,5

b) Cometemos un error absoluto de 0,5 m^3 debido al redondeo → 319,5 < 320 < 320,5

Para saber cuál se ha realizado con mayor precisión calculamos el error relativo.

Error relativo del volumen de una bañera → $\frac{0,5}{326} \approx 0,001534$

Error relativo del volumen de una piscina → $\frac{0,5}{320} \approx 0,00156$

La medición que se ha hecho con más precisión es la del volumen de la bañera, ya que el error relativo es menor.

3. Escribe dos números decimales comprendidos entre los dos que se dan en cada caso:

a) 2,8 y 2,9 **b) 3,25 y $2,\widehat{25}$** **c) 0,25 y 0,5** **d) 3,83 y $2,\widehat{83}$**

a) 2,81; 2,83 b) 3,251; 3,2511 c) 0,3; 0,4 d) 3,831; 3,832

4. Ordena de menor a mayor los siguientes números:

5,28 5,2 5,8 5,285 5,08 5,58

5,08 < 5,2 < 5,28 < 5,285 < 5,58 < 5,8

5. Calcula mentalmente.

a) 7 – 2 + 4 **b) 7 – (2 + 4)** **c) 7 – (2 – 4)** **d) –7 + 2 – 4**

e) 11 + 3 · 5 – 2 **f) (7 + 3) · 5 – 2** **g) 11 + 3 · (5 – 2)** **h) (7 + 3) · (5 – 2)**

a) 9 b) 1 c) 9 d) –9

e) 24 f) 48 g) 20 h) 30

6. Halla mentalmente.

a) 20 · (–350) **b) (50 · 60) : 20** **c) (–2) · 75 · (–2)** **d) 1 640 · 4**

a) –7 000 b) 150 c) 300 d) 6 560

7. **Calcula mentalmente.**

a) $(-2)^5$ **b)** $(-2)^8$ **c)** $(-1)^{10}$

d) $(-1)^{23}$ **e)** $(-5)^2 - 5^2$ **f)** $(-2)^3 - 2^3$

a) -32 b) 256 c) 1

d) -1 e) 0 f) -16

8. **Calcula, escribiendo el proceso de resolución paso a paso.**

a) $-2 + 4 \cdot (-1) - 3 : (-3)$ **b)** $(-5)^2 - 2 \cdot 4 - (-3) \cdot (-1)$ **c)** $5 - 3 \cdot [4 - 8 : (-2) - 9]$

d) $-3 + 2 \cdot (-2) - 6 : (-1)$ **e)** $(-2)^2 - (-2)^3 + (-1)^2 - (-3)$ **f)** $6 + 2 \cdot [5 - 4 - 2 : (-2) - 7]$

a) $-2 + 4 \cdot (-1) - 3 : (-3) = -2 - 4 + 1 = -6 + 1 = -5$

b) $(-5)^2 - 2 \cdot 4 - (-3) \cdot (-1) = 25 - 8 - 3 = 25 - 11 = 14$

c) $5 - 3 \cdot [4 - 8 : (-2) - 9] = 5 - 3 \cdot (4 + 4 - 9) = 5 - 3 \cdot (-1) = 5 + 3 = 8$

d) $-3 + 2 \cdot (-2) - 6 : (-1) = -3 + (-4) + 6 = -3 - 4 + 6 = -1$

e) $(-2)^2 - (-2)^3 + (-1)^2 - (-3) = 4 - (-8) + 1 + 3 = 4 + 8 + 1 + 3 = 16$

f) $6 + 2 \cdot [5 - 4 - 2 : (-2) - 7] = 6 + 2 \cdot (5 - 4 + 1 - 7) = 6 + 2 \cdot (-5) = 6 - 10 = -4$

9. **Resuelve.**

a) $6 - 5 \cdot [-4 - 1 + (-2)^2 - 3^2]$ **b)** $12 - 8 \cdot [-2 + 4 : (-1) - (-3 + 2)^4]$

c) $(-2)^5 : (3 + 1)^2 + 2 \cdot (-5 - 4 + 3)$ **d)** $10 - 10 \cdot [-6 + 5 \cdot (-4 + 7 - 3)]$

e) $8 - (-3) \cdot (-5) - [(1 - 6) \cdot (-4) + 2] \cdot (-2)$ **f)** $[(5 - 9) \cdot (-2) + 1] - (-3) \cdot (-7) + (-11)$

g) $[(7 - 3) \cdot (-1)] \cdot (-2) + (-13) - (+4) \cdot (-7)$ **h)** $-[(-2)^2 \cdot (3 - 4)] + (-3)^3 - (5 \cdot 4 - 10)$

a) $6 - 5 \cdot [-4 - 1 + (-2)^2 - 3^2] = 6 - 5 \cdot (-4 - 1 + 4 - 9) = 6 - 5 \cdot (-10) = 6 + 50 = 56$

b) $12 - 8 \cdot [-2 + 4 : (-1) - (-3 + 2)^4] = 12 - 8 \cdot [-2 + 4 : (-1) - (-1)^4] =$

$= 12 - 8 \cdot (-2 - 4 - 1) = 12 - 8 \cdot (-7) = 12 + 56 = 68$

c) $(-2)^5 : (3 + 1)^2 + 2 \cdot (-5 - 4 + 3) = -32 : (4)^2 + 2 \cdot (-6) = -32 : 16 - 12 = -2 - 12 = -14$

d) $10 - 10 \cdot [-6 + 5 \cdot (-4 + 7 - 3)] = 10 - 10 \cdot [-6 + 5 \cdot (0)] = 10 - 10 \cdot (-6) = 10 + 60 = 70$

e) $8 - (-3) \cdot (-5) - [(1 - 6) \cdot (-4) + 2] \cdot (-2) = 8 - 15 - [(-5) \cdot (-4) + 2] \cdot (-2) =$

$= 8 - 15 - (20 + 2) \cdot (-2) = 8 - 15 - 22 \cdot (-2) =$

$= 8 - 15 - (-44) = 8 - 15 + 44 = 52 - 15 = 37$

f) $[(5 - 9) \cdot (-2) + 1] - (-3) \cdot (-7) + (-11) = [-4 \cdot (-2) + 1] - 21 - 11 =$

$= (8 + 1) - 21 - 11 = 9 - 21 - 11 = -23$

g) $[(7 - 3) \cdot (-1)] \cdot (-2) + (-13) - (+4) \cdot (-7) = [4 \cdot (-1)] \cdot (-2) + (-13) - (-28) =$

$= -4 \cdot (-2) - 13 + 28 = 8 - 13 + 28 = 36 - 13 = 23$

h) $-[(-2)^2 \cdot (3 - 4)] + (-3)^3 - (5 \cdot 4 - 10) = -[4 \cdot (-1)] + (-27) - (20 - 10) =$

$= -(-4) - 27 - 10 = 4 - 27 - 10 = -33$

10. **Calcula.**

a) $(+3) \cdot (-2)^3 - (+2) \cdot (-3)^3$

b) $(+3) \cdot [(-2)^3 - (+2)] \cdot (-3)^3$

c) $(-20) - (10 - 15)^2 + [(-5)^2 + (8 - 13)^2]$

d) $60 - (8 - 5)^3 + (-2) \cdot [(-2)^4 + 3 \cdot (2 - 7)]$

a) $(+3) \cdot (-2)^3 - (+2) \cdot (-3)^3 = 3 \cdot (-8) - 2 \cdot (-27) = -24 + 54 = 30$

b) $(+3) \cdot [(-2)^3 - (+2)] \cdot (-3)^3 = 3 \cdot (-8 - 2) \cdot (-27) = 3 \cdot (-10) \cdot (-27) = 810$

c) $(-20) - (10 - 15)^2 + [(-5)^2 + (8 - 13)^2] = -20 - (-5)^2 + [25 + (-5)^2] =$

$= -20 - 25 + (25 + 25) = -20 - 25 + 50 = -45 + 50 = 5$

d) $60 - (8 - 5)^3 + (-2) \cdot [(-2)^4 + 3 \cdot (2 - 7)] = 60 - (3)^3 + (-2) \cdot [16 + 3 \cdot (-5)] =$

$= 60 - 27 + (-2) \cdot (16 - 15) = 60 - 27 + (-2) \cdot 1 =$

$= 60 - 27 - 2 = 60 - 29 = 31$

11. **Copia en tu cuaderno y coloca los paréntesis necesarios para que cada igualdad sea cierta:**

a) $1 - 2^3 + 3 \cdot 2 - 2 = +3$

b) $1 - 2^3 + 3 \cdot 2 - 2 = -3$

c) $1 - 2^3 + 3 \cdot 2 - 2 = -7$

d) $1 - 2^3 + 3 \cdot 2 - 2 = -1$

a) $(1 - 2)^3 + 3 \cdot 2 - 2 = 3$

b) $1 - 2^3 + 3 \cdot 2 - 2 = -3$

c) $1 - 2^3 + 3 \cdot (2 - 2) = -7$

d) $(1 - 2)^3 + 3 \cdot (2 - 2) = -1$

12. **Opera mentalmente.**

a) 2,75 + 3,25	**b)** 8,75 – 3,25	**c)** 3,47 + 2,2
d) 14,8 – 2,3	**e)** 45,3 · 100	**f)** 45,3 : 100
g) 7,46 · 1 000	**h)** 74,6 : 1 000	**i)** 14,5 · 0,1
j) 28 · 0,01	**k)** 14,5 : 0,1	**l)** 28 : 0,01
a) 6	b) 5,50	c) 5,67
d) 12,5	e) 4 530	f) 0,453
g) 7 460	h) 0,0746	i) 1,45
j) 0,28	k) 145	l) 2 800

13. **Resuelve.**

a) 135,87 + 25,3 + 35,185	**b)** 125,3 – 34,85 + 27,14	**c)** 25,3 · 0,85
d) 12,8 · 6,07	**e)** 0,89 · 0,47	**f)** 1,875 · 8
a) 196,355	b) 117,59	c) 21,505
d) 77,696	e) 0,4183	f) 15

14. **Calcula los cocientes de estas divisiones, dando el resultado redondeado a las centésimas:**

a) 134,2 : 0,31	**b)** 2,53 : 2,5	**c)** 0,345 : 0,28	**d)** 58,2 : 0,47
a) 432,90	b) 1,01	c) 1,23	d) 123,83

Página 21

15. **Calcula.**

a) 10 : 2 – (15,875 + 12,34 – 3,215) : 5

b) (3,4 – 2,8) · 12 + 15,4 : 2

c) 7,5 – 3 · (12,6 – 15)

d) 15,45 + 0,45 · (28,2 : 3 – 4)

a) 10 : 2 – (15,875 + 12,34 – 3,215) : 5 = 5 – 25 : 5 = 5 – 5 = 0

b) (3,4 – 2,8) · 12 + 15,4 : 2 = 0,6 · 12 + 15,4 : 2 = 7,2 + 7,7 = 14,9

c) 7,5 – 3 · (12,6 – 15) = 7,5 – 3 · (–2,4) = 7,5 + 7,2 = 14,7

d) 15,45 + 0,45 · (28,2 : 3 – 4) = 15,45 + 0,45 · (9,4 – 4) = 15,45 + 0,45 · 5,4 = 17,88

16. **Opera con la calculadora y da cada resultado redondeado a las milésimas:**

a) 3,845 – 2,83 · (4,53 : 2,8 + 2,75)

b) 12,4 – 3,85 · 2,6 – (3 – 4,7 : 2,6)

c) 5,47 · 2,83 – (5,28 + 4,5 : 2,7)

a) –8,516

b) 1,198

c) 8,533

Piensa y resuelve

17. **María ha comprado 2,5 kg de manzanas a 1,65 €/kg, y 3,2 kg de peras a 2,1 €/kg. Tenía un vale descuento por valor de 3 €.**

a) ¿Cuánto ha tenido que pagar en total?

b) Si ha pagado con un billete de 20 €, ¿cuánto le ha sobrado?

1 kg de manzanas → 1,65 €   Vale descuento → 3 €

1 kg de peras → 2,1 €

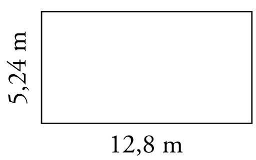
a) 2,5 · 1,65 + 3,2 · 2,1 – 3 = 7,845

María ha pagado 7,845 €.

b) 20 – 7,845 = 12,155

Le han sobrado 12,16 €.

18. **Hugo ha comprado una parcela de 5,24 m de largo por 12,8 m de ancho. Averigua cuánto le ha costado, sabiendo que ha pagado 50,20 € por cada metro cuadrado.**



Calculamos el área de la parcela:

$A = b \cdot h = 12{,}8 \text{ m} \cdot 5{,}24 \text{ m} = 67{,}072 \text{ m}^2$

Calculamos el precio total: 67,072 · 50,20 = 3 367,0144

Hugo ha pagado 3 367 € por la parcela.

19. **Un frutero compra 125 kg de naranjas a 0,45 €/kg. En el transporte se le estropean 2 kg. ¿A cuánto debe vender cada kilogramo del resto de las naranjas, si desea obtener una ganancia de unos 120 €?**

125 kg de manzanas a 0,45 €/kg $\rightarrow$ El frutero paga $125 \cdot 0,45 = 56,25$ €

Quiere ganar 120 €, con lo que deberá vender 123 kg de manzanas y obtener 176,25 €.

$176,25 : 123 = 1,433$

Deberá vender el kilo a 1,43 €.

20. **Un comerciante del mercadillo pone a la venta 100 pares de calcetines a 2,85 € el par.**

Cuando lleva vendidos 75 pares, decide rebajarlos a 1,99 € para acelerar la venta. Así, consigue agotar la mercancía antes de levantar el puesto.

¿Cuál será su ganancia, teniendo en cuenta que pagó 225 € por el lote?

$75 \cdot 2,85 + 25 \cdot 1,99 - 225 = 38,5$

El comerciante obtiene un beneficio de 38,50 €.

21. **¿A qué precio medio ha vendido el par de calcetines el comerciante del ejercicio anterior?**

$75 \cdot 2,85 + 25 \cdot 1,99 = 263,5$

$263,5 : 100 = 2,635$

El par de calcetines lo ha vendido a un precio medio de 2,64 €.

22. **En la mediana de un tramo de autopista de 24 km, se van a plantar, como barrera contra el viento, una planta de adelfa cada 1,25 m. Por motivos estéticos, se alternará una planta de flores blancas con cuatro de flores rojas. ¿Cuántas plantas de cada color se necesitan?**

Tramo de autopista $\rightarrow$ 24 km = 24 000 m

Se planta una planta cada 1,25 m.

$24\,000 : 1,25 = 19\,200$

Se van a plantar 19 200 plantas.

$19\,200 : 5 = 3\,840$; $3\,840 \cdot 4 = 15\,360$

Se plantarán 3 840 plantas de flores blancas y 15 360 de flores rojas.

23. **En un obrador han sacado una hornada de magdalenas. Si las envasan en bolsas de 10, sobran cinco, y lo mismo ocurre si las envasan en bolsas de 12. ¿Cuántas magdalenas han salido del horno, sabiendo que son más de 150 pero menos de 200?**

Múltiplos de 10 mayores que 150 y menores que 200: 160, 170, 180 y 190.

Múltiplos de 12 mayores que 150 y menores que 200: 156, 168 y 180.

Como 180 es múltiplo común, se habrán horneado 185 magdalenas.

24. **En una cooperativa tienen 420 litros de un tipo de aceite y 225 litros de otro. Quieren envasarlo, sin mezclar, con el menor número posible de garrafas iguales. ¿Qué capacidad tendrá cada garrafa?**

máx.c.d. $(420, 225) = 3 \cdot 5 = 15$

Cada garrafa tendrá una capacidad de 15 litros.

25. **Se desea cubrir con baldosas cuadradas una habitación de 330 cm de ancho por 390 cm de largo. ¿Qué tamaño deben tener las baldosas si deben ser lo más grandes posible y no se quiere cortar ninguna?**

máx.c.d. $(330, 390) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

Las baldosas tendrán un tamaño de 30 cm de largo y 30 cm de ancho.

Curiosidades matemáticas

Una cuestión de comas

Poniendo una coma en el lugar adecuado, la siguiente expresión es cierta:

“CINCO POR CUATRO VEINTE MÁS UNO, VEINTIDÓS”

¿Podrías aclarar la cuestión?

$5 \cdot 4,20 + 1 = 22$

2 Forma fraccionaria y decimal de los números racionales

Página 24

1. Pasa estas fracciones a forma decimal:

a) $\frac{7}{2}$ **b)** $\frac{3}{8}$ **c)** $\frac{5}{12}$ **d)** $\frac{29}{30}$

a) $\frac{7}{2} = 7 : 2 = 3{,}5$

b) $\frac{3}{8} = 3 : 8 = 0{,}375$

c) $\frac{5}{12} = 5 : 12 = 0{,}41\widehat{6}$

d) $\frac{29}{30} = 29 : 30 = 0{,}9\widehat{6}$

2. Pasa a forma fraccionaria.

a) 10 **b)** 1,2 **c)** 0,34 **d)** 0,005

e) $0{,}\widehat{8}$ **f)** $0{,}3\widehat{5}$ **g)** $1{,}2\widehat{7}$ **h)** $11{,}4\widehat{6}$

a) $10 = \frac{10}{1}$

b) $1{,}2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$

c) $0{,}34 = \frac{34}{100} = \frac{17}{50}$

d) $0{,}005 = \frac{5}{1000} = \frac{1}{200}$

e) $0{,}\widehat{8}$

$$\begin{array}{r} 10N = 8{,}888\ldots \\ -\ N = 0{,}888\ldots \\ \hline 9N = 8 \ \rightarrow\ N = \frac{8}{9} \end{array}$$

f) $0{,}3\widehat{5}$

$$\begin{array}{r} 100N = 35{,}5555\ldots \\ -\ 10N = 3{,}5555\ldots \\ \hline 90N = 32 \ \rightarrow\ N = \frac{32}{90} = \frac{16}{45} \end{array}$$

g) $1{,}2\widehat{7}$

$$\begin{array}{r} 100N = 127{,}7777\ldots \\ -\ 10N = 12{,}7777\ldots \\ \hline 90N = 115 \ \rightarrow\ N = \frac{115}{90} = \frac{23}{18} = 1 + \frac{5}{18} \end{array}$$

h) $11{,}4\widehat{6}$

$$\begin{array}{r} 100N = 1\,146{,}666\ldots \\ -\ 10N = 114{,}666\ldots \\ \hline 90N = 1\,032 \ \rightarrow\ N = \frac{1032}{90} = \frac{172}{15} = 11 + \frac{7}{15} \end{array}$$

3 La fracción como operador

Página 25

Cálculo mental

Calcula mentalmente.

a) Los dos quintos de 400.

b) El número cuyos dos quintos es 40.

c) Los tres séptimos de 140.

d) El número cuyos cinco sextos es 25.

a) $\frac{2}{5}$ de 400 = 160 b) 100

c) $\frac{3}{7}$ de 140 = 60 d) 30

1. Calcula.

a) $\frac{3}{4}$ **de 48** **b)** $\frac{2}{5}$ **de 350** **c)** $\frac{7}{10}$ **de 1 480**

a) $\frac{3}{4}$ de 48 = (48 : 4) · 3 = 12 · 3 = 36

b) $\frac{2}{5}$ de 350 = (350 : 5) · 2 = 150 · 2 = 300

c) $\frac{7}{10}$ de 1 480 = (1 480 : 10) · 7 = 148 · 7 = 1 036

2. Los $\frac{2}{5}$ **de un número valen 14. ¿Qué número es?**

$\frac{2}{5}$ de $C = 14 \rightarrow C = (14 : 2) \cdot 5 = 7 \cdot 5 = 35$

El número es 35.

3. Calcula el valor de *M* y *N*.

a) $\frac{3}{10}$ **de** $M = 18$ **b)** $\frac{5}{12}$ **de** $N = 120$

a) $\frac{3}{10}$ de $M = 18 \rightarrow M = (18 : 3) \cdot 10 = 60$

b) $\frac{5}{12}$ de $N = 120 \rightarrow N = (120 : 5) \cdot 12 = 288$

4. Una botella de aceite de 3/4 de litro cuesta 3,45 €. ¿A cómo sale el litro?

3/4 de litro son 3,45.

Veamos cuánto cuesta 1/4 de litro → 3,45 : 3 = 1,15 €

El litro lo forman cuatro cuartos → 1,15 · 4 = 4,60 €

El litro de aceite sale a 4,60 €.

4 Equivalencia de fracciones

Página 26

1. Expresa en forma decimal estas fracciones:

$$\mathbf{\frac{6}{16} \qquad \frac{9}{24} \qquad \frac{12}{32} \qquad \frac{15}{40}}$$

¿Qué observas?

$\frac{6}{16} = 6 : 16 = 0{,}375$ $\qquad$ $\frac{9}{24} = 9 : 24 = 0{,}375$

$\frac{12}{32} = 12 : 32 = 0{,}375$ $\qquad$ $\frac{15}{40} = 15 : 40 = 0{,}375$

Al expresar las fracciones en decimal, resulta el mismo número. Por tanto, todas las fracciones son equivalentes.

2. Simplifica las siguientes fracciones:

a) $\mathbf{\frac{70}{90}}$ $\qquad$ **b)** $\mathbf{\frac{8}{36}}$ $\qquad$ **c)** $\mathbf{\frac{15}{35}}$ $\qquad$ **d)** $\mathbf{\frac{36}{48}}$

a) $\frac{70}{90} = \frac{70:10}{90:10} = \frac{7}{9}$ $\qquad$ b) $\frac{8}{36} = \frac{8:4}{36:4} = \frac{2}{9}$

c) $\frac{15}{35} = \frac{15:5}{35:5} = \frac{3}{7}$ $\qquad$ d) $\frac{36}{48} = \frac{36:12}{48:12} = \frac{3}{4}$

3. Obtén en cada caso la fracción irreducible:

a) $\mathbf{\frac{13}{39}}$ $\qquad$ **b)** $\mathbf{\frac{84}{210}}$ $\qquad$ **c)** $\mathbf{\frac{125}{75}}$ $\qquad$ **d)** $\mathbf{\frac{450}{480}}$

a) $\frac{13}{39} = \frac{13:13}{39:13} = \frac{1}{3}$ $\qquad$ b) $\frac{84}{39} = \frac{84:21}{210:21} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

c) $\frac{125}{75} = \frac{125:25}{75:25} = \frac{5}{3}$ $\qquad$ d) $\frac{450}{480} = \frac{450:30}{480:30} = \frac{15}{16}$

4. Escribe dos fracciones equivalentes a $\mathbf{\frac{9}{12}}$, una cuyo denominador sea 4 y otra cuyo numerador sea 90.

- Para que la fracción tenga denominador 4, lo habremos tenido que dividir entre 3, por tanto, tenemos que hacer lo mismo con el numerador:

$$\frac{9}{12} = \frac{9:3}{12:3} = \frac{3}{4}$$

- Para que el numerador de la fracción sea 90, lo habremos tenido que multiplicar por 10, por tanto, tenemos que hacer lo mismo con el denominador:

$$\frac{9}{12} = \frac{9 \cdot 10}{12 \cdot 10} = \frac{90}{120}$$

Página 27

Cálculo mental

Compara mentalmente cada pareja de fracciones:

a) $\frac{3}{4}$ **y** $\frac{4}{3}$ **b)** $\frac{6}{8}$ **y** $\frac{7}{8}$ **c)** 1 **y** $\frac{6}{8}$

d) $\frac{3}{5}$ **y** $\frac{6}{10}$ **e)** 3 **y** $\frac{8}{11}$ **f)** 2 **y** $\frac{6}{3}$

a) $\frac{3}{4} < \frac{4}{3}$ b) $\frac{6}{8} < \frac{7}{8}$ c) $1 > \frac{6}{8}$

d) $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ e) $3 > \frac{8}{11}$ f) $2 = \frac{6}{3}$

5. Compara estas fracciones: $\frac{5}{6}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}$

Para comparar las fracciones, las sustituimos por sus equivalentes con denominador común:

$$\frac{5}{6}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5} \rightarrow \frac{50}{60}; \frac{45}{60}; \frac{48}{60} \rightarrow \frac{45}{60} < \frac{48}{60} < \frac{50}{60} \rightarrow \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{5}{6}$$

6. Ordena de menor a mayor: $\frac{5}{6}; \frac{7}{9}; \frac{5}{12}; \frac{3}{4}; \frac{2}{3}$

Para comparar las fracciones, las sustituimos por sus equivalentes con denominador común:

$$\frac{5}{6}; \frac{7}{9}; \frac{5}{12}; \frac{3}{4}; \frac{2}{3} \rightarrow \frac{30}{36}; \frac{28}{36}; \frac{15}{36}; \frac{27}{36}; \frac{24}{36} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{15}{36} < \frac{24}{36} < \frac{27}{36} < \frac{28}{36} < \frac{30}{36} \rightarrow \frac{5}{12} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{7}{9} < \frac{5}{6}$$

5 Operaciones con fracciones

Página 29

1. Resuelve mentalmente.

a) $1 - \frac{4}{5}$ **b)** $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ **c)** $\frac{1}{4} - \frac{1}{2}$

d) $\frac{7}{5} - 1$ **e)** $\frac{15}{5} - 3$ **f)** $\frac{1}{8} - \frac{1}{2}$

a) $1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{2}$

d) $\frac{7}{5} - 1 = \frac{2}{5}$ e) $\frac{15}{5} - 3 = 0$ f) $\frac{1}{8} - \frac{1}{2} = \frac{-3}{8}$

2. Calcula.

a) $\frac{2}{5} + \frac{3}{4} - 1$ **b)** $-\frac{1}{3} + \frac{5}{9} - \frac{1}{4}$

c) $\frac{7}{20} - \frac{1}{5} + \frac{3}{10} - \frac{3}{4}$ **d)** $2 - \frac{1}{9} + \frac{1}{6} - 1$

a) $\frac{2}{5} + \frac{3}{4} - 1 = \frac{8}{20} + \frac{15}{20} = \frac{23}{20}$

b) $-\frac{1}{3} + \frac{5}{9} - \frac{1}{4} = -\frac{12}{36} + \frac{20}{36} - \frac{9}{36} = \frac{-1}{36}$

c) $\frac{7}{20} - \frac{1}{5} + \frac{3}{10} - \frac{3}{4} = \frac{7}{20} - \frac{4}{20} + \frac{6}{20} - \frac{15}{20} = \frac{-6}{36} = \frac{-1}{6}$

d) $2 - \frac{1}{9} + \frac{1}{6} - 1 = \frac{36}{18} - \frac{2}{18} + \frac{3}{18} - \frac{18}{18} = \frac{19}{18}$

3. Ejercicio resuelto en el libro del alumno.

4. Resuelve las expresiones siguientes:

a) $5 - \left(1 + \frac{4}{5}\right) + \left(\frac{3}{10} - 2\right) - \left(1 + \frac{1}{2}\right)$ **b)** $\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{6}\right) + \left(-\frac{5}{12}\right) - \left(1 - \frac{7}{8} - \frac{5}{6}\right)$

c) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{2}{6}\right)$ **d)** $\left(\frac{1}{6} - \frac{2}{10} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{4}{5} - 3\right)$

a) $5 - \left(1 + \frac{4}{5}\right) + \left(\frac{3}{10} - 2\right) - \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 5 - \left(\frac{5}{5} + \frac{4}{5}\right) + \left(\frac{3}{10} - \frac{20}{10}\right) - \left(\frac{2}{2} + \frac{1}{2}\right) =$

$= 5 - \frac{9}{5} + \left(-\frac{17}{10}\right) - \frac{3}{2} = \frac{50}{10} - \frac{18}{10} - \frac{17}{10} - \frac{15}{10} = 0$

b) $\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{6}\right) + \left(-\frac{5}{12}\right) - \left(1 - \frac{7}{8} - \frac{5}{6}\right) = \left(\frac{9}{24} - \frac{4}{24}\right) - \frac{10}{24} - \left(\frac{24}{24} - \frac{21}{24} - \frac{20}{24}\right) = \frac{5}{24} - \frac{10}{24} - \left(-\frac{17}{24}\right) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

c) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{2}{6}\right) = \left(\frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12}\right) - \left(\frac{15}{60} + \frac{24}{60} + \frac{20}{60}\right) = \frac{13}{12} - \frac{59}{60} = \frac{65}{60} - \frac{59}{60} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$

d) $\left(\frac{1}{6} - \frac{2}{10} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{4}{5} - 3\right) = \left(\frac{5}{30} - \frac{6}{30} + \frac{15}{30}\right) - \left(\frac{4}{5} - \frac{15}{5}\right) = \frac{14}{30} - \left(\frac{-11}{5}\right) = \frac{14}{30} + \frac{11}{5} = \frac{14}{30} + \frac{66}{30} = \frac{80}{30} = \frac{8}{3}$

5. **Opera mentalmente.**

a) $5 \cdot \frac{3}{5}$ **b)** $1 : \frac{2}{3}$ **c)** $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}$

d) $\frac{4}{5} : 2$ **e)** $\frac{1}{4} \cdot 8$ **f)** $\frac{1}{3} : 2$

a) $5 \cdot \frac{3}{5} = 3$ b) $1 : \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$ c) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$

d) $\frac{4}{5} : 2 = \frac{2}{5}$ e) $\frac{1}{4} \cdot 8 = 2$ f) $\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{6}$

6. **Realiza estos productos y divisiones:**

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5}$ **b)** $\frac{5}{6} : \frac{10}{9}$ **c)** $4 \cdot \frac{3}{20}$

d) $18 : \frac{9}{10}$ **e)** $\frac{7}{18} \cdot \frac{9}{14}$ **f)** $\frac{1}{15} : \frac{1}{5}$

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 5} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$

b) $\frac{5}{6} : \frac{10}{9} = \frac{5 \cdot 9}{6 \cdot 10} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$

c) $4 \cdot \frac{3}{20} = \frac{4}{1} \cdot \frac{3}{20} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

d) $18 : \frac{9}{10} = \frac{18}{1} : \frac{9}{10} = \frac{18 \cdot 10}{1 \cdot 9} = \frac{180}{9} = 20$

e) $\frac{7}{18} \cdot \frac{9}{14} = \frac{7 \cdot 9}{18 \cdot 14} = \frac{7 \cdot 9}{2 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 2} = \frac{1}{4}$

f) $\frac{1}{15} : \frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 5}{15 \cdot 1} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

7. **Ejercicio resuelto en el libro del alumno.**

8. **Calcula.**

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{-3}{5} + \frac{1}{5}$ **b)** $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{4} - 1\right)$

c) $\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5}\right) : \frac{7}{15}$ **d)** $(-2) \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{6}{5}\right)$

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{-3}{5} + \frac{1}{5} = -\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = -\frac{1}{5}$

b) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{4} - 1\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

c) $\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5}\right) : \frac{7}{15} = \left(\frac{10}{15} - \frac{12}{15}\right) : \frac{7}{15} = -\frac{2}{15} : \frac{7}{15} = \frac{-2 \cdot 15}{7 \cdot 15} = -\frac{2}{7}$

d) $(-2) \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{6}{5}\right) = (-2) \cdot \left(\frac{20}{15} - \frac{18}{15}\right) = (-2) \cdot \frac{2}{15} = -\frac{4}{15}$

9. **Resuelve.**

a) $\frac{3}{8} - \left[\frac{2}{3} + \left(1 - \frac{1}{6}\right)\right]$ **b)** $\frac{4}{5} - \frac{2}{3} \cdot \left[\left(1 - \frac{3}{10}\right) \cdot \frac{6}{7}\right]$

a) $\frac{3}{8} - \left[\frac{2}{3} + \left(1 - \frac{1}{6}\right)\right] = \frac{3}{8} - \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{6}{6} + \frac{1}{6}\right)\right] = \frac{3}{8} - \left[\frac{2}{3} + \frac{7}{6}\right] = \frac{3}{8} - \left[\frac{4}{6} + \frac{7}{6}\right] = \frac{3}{8} - \frac{11}{6} = \frac{9}{24} - \frac{44}{24} = \frac{-35}{24}$

b) $\frac{4}{5} - \frac{2}{3} \cdot \left[\left(1 - \frac{3}{10}\right) \cdot \frac{6}{7}\right] = \frac{4}{5} - \frac{2}{3} \cdot \left[\left(\frac{10}{10} - \frac{3}{10}\right) \cdot \frac{6}{7}\right] = \frac{4}{5} - \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{7}\right] = \frac{4}{5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$

6 Problemas con fracciones

Página 31

1. Tres de cada diez habitantes de una pequeña aldea tienen 65 años o más, la mitad están entre los 18 y los 65 años, y los cuarenta y cinco restantes son niños o jóvenes de 18 años o menos. ¿Cuántos habitantes tiene la aldea?

Buscamos la fracción que representan los menores de 18.

$\frac{3}{10} + \frac{1}{2} = \frac{3}{10} + \frac{5}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ son los mayores de 18

Entonces, los jóvenes de 18 o niños son $\frac{1}{5}$ de los habitantes $\rightarrow$ $\frac{1}{5}$ son 45 habitantes.

$45 \cdot 5 = 225$

Solución: En la aldea hay 225 habitantes.

2. Un embalse estaba a los 2/3 de su capacidad al final de primavera y en verano perdió las 4/5 partes del agua que tenía. Así llegó al otoño con unas reservas de 1,6 hectómetros cúbicos. ¿Cuál es la capacidad del embalse?

En verano se pierde $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$.

Al principio de otoño quedan $\frac{2}{3} - \frac{8}{15} = \frac{10}{15} - \frac{8}{15} = \frac{2}{15}$.

$\frac{2}{15}$ de la capacidad son 1,6 hm^3 $\rightarrow$ $\frac{1}{15}$ son $1{,}6 : 2 = 0{,}8$ hm^3

$0{,}8 \cdot 15 = 12$ hm^3

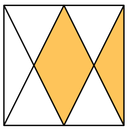
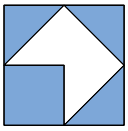
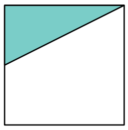
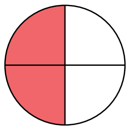
Solución: La capacidad del embalse es de 12 hm^3.

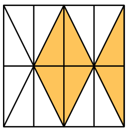
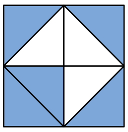
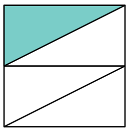
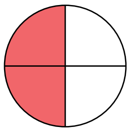
Ejercicios y problemas

Página 32

Practica

1. **Escribe la fracción que representa la parte coloreada en cada una de estas figuras y ordénalas de menor a mayor:**

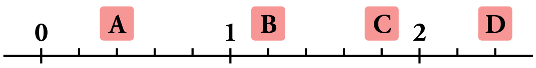
a)  **b)**  **c)**  **d)** 

a)  b)  c)  d) 

a) $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$ b) $\frac{5}{8}$ c) $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ d) $\frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

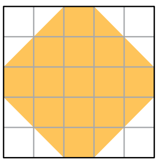
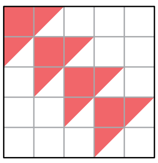
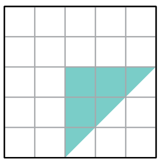
Ordenamos de menor a mayor: $\frac{1}{4} < \frac{3}{8} < \frac{1}{2} < \frac{5}{8}$

2. **Asocia una fracción a cada letra de esta recta numérica:**



A $\rightarrow \frac{2}{5}$ B $\rightarrow \frac{6}{5}$ C $\rightarrow \frac{9}{5}$ D $\rightarrow \frac{12}{5}$

3. **Expresa en forma de fracción la parte coloreada de estas figuras:**

a)  **b)**  **c)** 

En cada cuadrado hay 25 cuadraditos (50 mitades de cuadraditos).

a) $\frac{17}{25}$ b) $\frac{8}{25}$ c) $\frac{9}{50}$

4. **¿Verdadero o falso?**

a) Todas las fracciones expresan números racionales.

b) Todos los números racionales son fraccionarios.

c) Todos los números enteros se pueden expresar en forma de fracción.

d) Una fracción siempre equivale a un número decimal periódico.

e) Un número decimal periódico es un número racional.

a) Verdadero. Los números racionales son aquellos que pueden escribirse en forma de fracción.

b) Falso. Los enteros también forman parte de los racionales, y estos no son fraccionarios.

c) Verdadero. Basta con poner denominador 1.

d) Falso. A veces equivalen a decimales exactos y no exactos y no periódicos.

e) Verdadero. Puede escribirse en forma de fracción.

5. **Indica cuáles de estas fracciones son propias y cuáles impropias:**

$$\frac{7}{5} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{6}{6} \quad \frac{12}{14} \quad \frac{17}{14} \quad \frac{22}{19} \quad \frac{15}{19} \quad \frac{60}{20} \quad \frac{30}{30} \quad \frac{85}{91}$$

Propias $\rightarrow \frac{3}{8}; \frac{12}{14}; \frac{15}{19}; \frac{85}{91}$

Impropias $\rightarrow \frac{7}{5}; \frac{6}{6}; \frac{17}{14}; \frac{22}{19}; \frac{60}{20}; \frac{30}{30}$

6. **Escribe una fracción cuyo valor sea la unidad, otra cuyo valor sea el número entero 4 y otra cuyo valor sea el número entero –5.**

Con valor la unidad $\rightarrow \frac{5}{5}$ (deben coincidir numerador y denominador).

Con valor 4 $\rightarrow \frac{8}{2}$ (el numerador debe ser el denominador multiplicado por 4).

Con valor –5 $\rightarrow -\frac{10}{2}$ (El numerador debe ser el denominador multiplicado por –5).

7. **Calcula mentalmente el número decimal equivalente a cada fracción:**

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{3}{2}$ **c)** $\frac{1}{4}$ **d)** $\frac{5}{4}$ **e)** $\frac{1}{3}$ **f)** $\frac{4}{3}$

a) 0,5 b) 1,5 c) 0,25 d) 1,25 e) $0,\widehat{3}$ f) $1,\widehat{3}$

8. **Expresa en forma decimal, señalando el periodo cuando sea el caso, y después ordena de menor a mayor.**

a) $\frac{7}{5}$ **b)** $\frac{5}{8}$ **c)** $\frac{5}{6}$ **d)** $\frac{2}{11}$ **e)** $\frac{85}{22}$

a) $\frac{7}{5} = 1,4$ b) $\frac{5}{8} = 0,625$ c) $\frac{5}{6} = 0,8\widehat{3}$ d) $\frac{2}{11} = 0,\widehat{18}$ e) $\frac{85}{22} = 3,8\widehat{63}$

Ordenamos de menor a mayor: $\frac{2}{11} < \frac{5}{8} < \frac{5}{6} < \frac{7}{5} < \frac{85}{22}$

9. **Escribe cada decimal en forma de fracción:**

a) 0,8 **b) 1,8** **c) 0,17** **d) 1,17**

a) $0,8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ b) $1,8 = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$ c) $0,17 = \frac{17}{100}$ d) $1,17 = \frac{117}{100}$

10. **Transforma cada fracción impropia en un entero más una fracción propia:**

a) $\frac{6}{5}$ **b)** $\frac{9}{2}$ **c)** $\frac{17}{6}$ **d)** $\frac{23}{10}$

a) $\frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5}$ b) $\frac{9}{2} = 4 + \frac{1}{2}$ c) $\frac{17}{6} = 2 + \frac{5}{6}$ d) $\frac{23}{10} = 2 + \frac{3}{10}$

11. **Escribe en la pantalla de tu calculadora las siguientes fracciones y números mixtos:**

a) $\frac{5}{9}$ **b)** $\frac{3}{8}$ **c)** $\frac{11}{13}$ **d)** $1 + \frac{1}{7}$ **e)** $2 + \frac{2}{9}$

Cada estudiante escribe en su calculadora lo pedido.

12. **Busca en tu calculadora la tecla que intercambia la forma fraccionaria y la decimal. Después, pasa a forma decimal cada una de las fracciones del ejercicio anterior.**

Cada estudiante escribe en su calculadora lo pedido.

a) $\frac{5}{9} = 0,\widehat{5}$ b) $\frac{3}{8} = 0,375$ c) $\frac{11}{13} = 0,84615\ldots$

d) $1 + \frac{1}{7} = 1,142857\ldots$ e) $2 + \frac{2}{9} = 2,\widehat{2}$

13. **Obtén con la calculadora el valor decimal de cada una de estas fracciones:**

a) $\frac{8}{9}$ **b)** $\frac{11}{4}$ **c)** $\frac{12}{24}$ **d)** $\frac{51}{110}$

a) $\frac{8}{9} = 0,\widehat{8}$ b) $\frac{11}{4} = 2,75$ c) $\frac{12}{24} = 0,5$ d) $\frac{51}{110} = 0,4\widehat{63}$

14. **Pasa, primero, las fracciones a forma decimal y, después, los decimales a forma de fracción.**

a) $\frac{1}{9}$ **b)** $\frac{2}{9}$ **c)** $\frac{3}{9}$ **d)** $\frac{4}{9}$

e) $0,\widehat{5}$ **f)** $0,\widehat{6}$ **g)** $0,\widehat{7}$ **h)** $0,\widehat{8}$

i) $1,\widehat{5}$ **j)** $1,\widehat{6}$ **k)** $1,\widehat{7}$ **l)** $1,\widehat{8}$

a) $\frac{1}{9} = 0,\widehat{1}$ b) $\frac{2}{9} = 0,\widehat{2}$ c) $\frac{3}{9} = 0,\widehat{3}$ d) $\frac{4}{9} = 0,\widehat{4}$

e) $0,\widehat{5} = \frac{5}{9}$ f) $0,\widehat{6} = \frac{6}{9}$ g) $0,\widehat{7} = \frac{7}{9}$ h) $0,\widehat{8} = \frac{8}{9}$

i) $1,\widehat{5} = \frac{14}{9}$ j) $1,\widehat{6} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$ k) $1,\widehat{7} = \frac{16}{9}$ l) $1,\widehat{8} = \frac{17}{9}$

15. **Calcula.**

a) $\frac{3}{7}$ **de 140** **b)** $\frac{5}{8}$ **de 312** **c)** $\frac{5}{32}$ **de 224** **d)** $\frac{17}{8}$ **de 1 000**

a) $\frac{3}{7}$ de $140 = (140 : 7) \cdot 3 = 20 \cdot 3 = 60$

b) $\frac{5}{8}$ de $312 = (312 : 8) \cdot 5 = 39 \cdot 5 = 195$

c) $\frac{5}{32}$ de $224 = (224 : 32) \cdot 5 = 7 \cdot 5 = 35$

d) $\frac{17}{8}$ de $1\,000 = (1\,000 : 8) \cdot 17 = 125 \cdot 17 = 2\,125$

16. **Calcula mentalmente.**

a) Los tres cuartos de un número valen 12. ¿Cuál es el número?

b) Los dos tercios de un número valen 20. ¿De qué número se trata?

c) Los $\frac{3}{5}$ de una cantidad son 15. ¿Cuál es esa cantidad?

a) $12 \cdot \frac{4}{3} = 16$ b) $20 \cdot \frac{3}{2} = 30$ c) $15 \cdot \frac{5}{3} = 25$

Página 33

17. **Halla mentalmente.**

a) $\frac{2}{3}$ **de 60** **b)** $\frac{3}{4}$ **de 100** **c)** $\frac{3}{500}$ **de 500**

d) **La mitad de** $\frac{3}{2}$ **e)** **El triple de** $\frac{7}{12}$ **f)** **El doble de la quinta parte de** $\frac{-5}{6}$

a) 40 b) 75 c) 3 d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{21}{12}$ f) $\frac{-1}{3}$

18. **Resuelve.**

a) **Los 2/3 de un número valen 12. ¿De qué número se trata?**

b) **Averigua el número cuyos 3/5 valen 21.**

c) **¿Qué número, disminuido en su sexta parte, se queda en 25?**

d) **Si a un número le quitas sus 4/7, se reduce en 8 unidades. ¿Qué número es?**

a) $\frac{2}{3}$ de $C = 12 \rightarrow C = (12 : 2) \cdot 3 \rightarrow C = 18$

b) $\frac{3}{5}$ de $C = 21 \rightarrow C = (21 : 3) \cdot 5 \rightarrow C = 35$

c) $C - \frac{1}{6} \cdot C = 25 \rightarrow \frac{5}{6} \cdot C = 25 \rightarrow C = (25 : 5) \cdot 6 \rightarrow C = 30$

d) $C - \frac{4}{7} \cdot C = C - 8 \rightarrow 8 = C - C + \frac{4}{7} \cdot C \rightarrow \frac{4}{7} C = 8 \rightarrow (8 : 4) \cdot 7 \rightarrow C = 14$

19. **Calcula** x **en cada caso:**

a) $\frac{2}{7}$ **de** $x = 98$ **b)** $\frac{9}{10}$ **de** $x = 126$ **c)** $\frac{11}{15}$ **de** $x = 682$ **d)** $\frac{13}{25}$ **de** $x = 715$

a) $\frac{2}{7}$ de $x = 98 \rightarrow x = (98 : 2) \cdot 7 \rightarrow x = 343$

b) $\frac{9}{10}$ de $x = 126 \rightarrow x = (126 : 9) \cdot 10 \rightarrow x = 140$

c) $\frac{11}{15}$ de $x = 682 \rightarrow x = (682 : 11) \cdot 15 \rightarrow x = 390$

d) $\frac{13}{25}$ de $x = 715 \rightarrow x = (715 : 13) \cdot 25 \rightarrow x = 1\,375$

20. **a) Agrupa, entre las siguientes fracciones, las que sean equivalentes:**

$$\frac{10}{15} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{5}{15} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{2}{6} \quad \frac{15}{21}$$

b) Representa, las que lo sean, sobre rectángulos de igual tamaño.

a) Expresamos en forma decimal las fracciones:

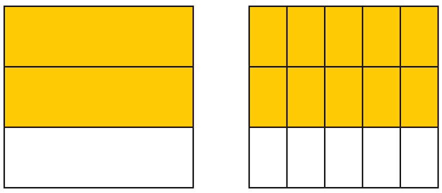
$\frac{10}{15} = 0,\widehat{6}$ $\quad \frac{5}{7} \approx 0,71$ $\quad \frac{1}{3} = 0,\widehat{3}$ $\quad \frac{5}{15} = 0,\widehat{3}$

$\frac{2}{3} = 0,\widehat{6}$ $\quad \frac{2}{6} = 0,\widehat{3}$ $\quad \frac{15}{21} \approx 0,71$

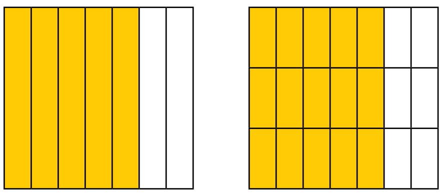
Agrupamos las equivalentes:

$\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ $\quad \frac{5}{7} = \frac{15}{21}$ $\quad \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{5}{15}$

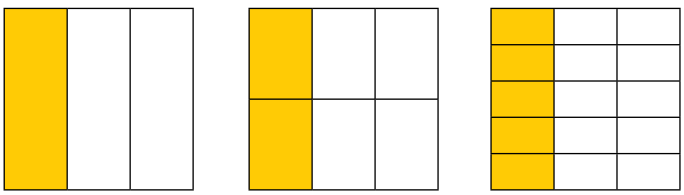
b) $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$



$\frac{5}{7} = \frac{15}{21}$



$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{5}{15}$



21. **Simplifica todo lo posible.**

a) $\frac{30}{42}$ **b)** $\frac{18}{72}$ **c)** $\frac{75}{125}$ **d)** $\frac{60}{210}$ **e)** $\frac{2000}{4000}$

a) $\frac{30}{42} = \frac{5}{7}$ b) $\frac{18}{72} = \frac{1}{4}$ c) $\frac{75}{125} = \frac{3}{5}$ d) $\frac{60}{210} = \frac{2}{7}$ e) $\frac{2000}{4000} = \frac{1}{2}$

22. **Escribe una fracción equivalente a 2/5 y otra equivalente a 7/6, pero que tengan el mismo denominador.**

mín.c.m $(6, 5) = 30 \to \frac{2}{5} = \frac{12}{30}; \ \frac{7}{6} = \frac{35}{30}$

23. **Escribe fracciones equivalentes a las que ves debajo, que tengan por denominador 24:**

a) $\frac{3}{8}$ **b)** $\frac{1}{6}$ **c)** $\frac{5}{12}$ **d)** $\frac{1}{2}$ **e)** $\frac{2}{3}$

a) $\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$ b) $\frac{1}{6} = \frac{4}{24}$ c) $\frac{5}{12} = \frac{10}{24}$ d) $\frac{1}{2} = \frac{12}{24}$ e) $\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$

24. **Reduce a común denominador y ordena de menor a mayor.**

$$\frac{7}{10} \qquad \frac{3}{5} \qquad \frac{3}{4} \qquad \frac{5}{8} \qquad \frac{13}{20}$$

mín.c.m. (4, 5, 8, 10, 20) = 40

$$\frac{7}{10} = \frac{28}{40} \qquad \frac{3}{5} = \frac{24}{40} \qquad \frac{3}{4} = \frac{30}{40} \qquad \frac{5}{8} = \frac{25}{40} \qquad \frac{13}{20} = \frac{26}{40}$$

Ordenamos de menor a mayor:

$$\frac{3}{5} < \frac{5}{8} < \frac{13}{20} < \frac{7}{10} < \frac{3}{4}$$

25. **Calcula mentalmente.**

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ **b)** $1 + \frac{1}{2}$ **c)** $2 - \frac{1}{4}$ **d)** $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ **e)** $1 + \frac{1}{3}$ **f)** $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{7}{4}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{4}{3}$ f) $\frac{1}{6}$

26. **Calcula.**

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ **b)** $\frac{5}{6} + \frac{1}{9} + \frac{3}{4}$ **c)** $\frac{1}{30} - \frac{1}{45}$ **d)** $\frac{11}{30} - \frac{3}{40} - \frac{7}{60}$

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{15}{30} - \frac{10}{30} + \frac{6}{30} = \frac{11}{30}$

b) $\frac{5}{6} + \frac{1}{9} + \frac{3}{4} = \frac{6}{36} + \frac{4}{36} + \frac{27}{36} = \frac{37}{36}$

c) $\frac{1}{30} - \frac{1}{45} = \frac{3}{90} - \frac{2}{90} = \frac{1}{90}$

d) $\frac{11}{30} - \frac{3}{40} - \frac{7}{60} = \frac{44}{120} - \frac{9}{120} - \frac{14}{120} = \frac{21}{120} = \frac{7}{40}$

27. **Halla el valor de estas expresiones:**

a) $3 - \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\right)$ **b)** $\left(2 - \frac{2}{3}\right) + \left(5 - \frac{7}{2}\right)$ **c)** $\frac{5}{32} - 2 + \frac{1}{3}$ **d)** $5 - \left(\frac{1}{3} - 2\right)$

a) $3 - \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\right) = 3 - \left(\frac{1}{6} + \frac{4}{6}\right) = 3 - \frac{5}{6} = \frac{18}{6} - \frac{5}{6} = \frac{13}{6}$

b) $\left(2 - \frac{2}{3}\right) + \left(5 - \frac{7}{2}\right) = \left(\frac{6}{3} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{10}{2} - \frac{7}{2}\right) = \frac{4}{3} + \frac{3}{2} = \frac{8}{6} + \frac{9}{6} = \frac{17}{6}$

c) $\frac{5}{32} - 2 + \frac{1}{3} = \frac{15}{96} - \frac{192}{96} + \frac{32}{96} = -\frac{145}{96}$

d) $5 - \left(\frac{1}{3} - 2\right) = 5 - \left(\frac{1}{3} - \frac{6}{3}\right) = 5 - \left(\frac{-5}{3}\right) = \frac{15}{3} + \frac{5}{3} = \frac{20}{3}$

28. **Resuelve paso a paso.**

a) $\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}\right)-\left(\frac{5}{4}-\frac{5}{6}+\frac{5}{12}\right)$

b) $\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{4}{3}-\frac{5}{9}\right)-\left(\frac{7}{12}-\frac{5}{4}-\frac{1}{6}\right)$

c) $2-\left(\frac{5}{7}-\frac{5}{3}\right)-\left(3+\frac{8}{21}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{11}{14}\right)$

a) $\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}\right)-\left(\frac{5}{4}-\frac{5}{6}+\frac{5}{12}\right)=\left(\frac{6}{36}+\frac{4}{36}+\frac{3}{36}\right)-\left(\frac{15}{12}-\frac{10}{12}+\frac{5}{12}\right)=\frac{13}{36}-\frac{10}{12}=\frac{13}{36}-\frac{30}{36}=-\frac{17}{36}$

b) $\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{4}{3}-\frac{5}{9}\right)-\left(\frac{7}{12}-\frac{5}{4}-\frac{1}{6}\right)=\left(\frac{2}{18}-\frac{3}{18}\right)+\left(-\frac{8}{9}-\frac{5}{9}\right)-\left(\frac{7}{12}-\frac{15}{12}-\frac{2}{12}\right)=$

$=-\frac{1}{18}-\frac{13}{9}-\frac{10}{12}=-\frac{1}{18}-\frac{13}{9}-\frac{5}{6}=-\frac{1}{18}-\frac{26}{18}-\frac{15}{18}=-\frac{42}{18}=-\frac{7}{3}$

c) $2-\left(\frac{5}{7}-\frac{5}{3}\right)-\left(3+\frac{8}{21}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{11}{14}\right)=2-\left(\frac{15}{21}-\frac{35}{21}\right)-\left(\frac{63}{21}+\frac{8}{21}\right)+\left(\frac{14}{14}+\frac{7}{14}-\frac{11}{14}\right)=$

$=2-\left(-\frac{20}{21}\right)-\frac{71}{21}+\frac{10}{14}=2+\frac{20}{21}-\frac{71}{21}+\frac{5}{7}=\frac{42}{21}+\frac{20}{21}-\frac{71}{21}+\frac{15}{21}=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$

29. **Calcula y expresa cada resultado en forma de número mixto:**

a) $\frac{2}{3}+\left[3-\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{5}\right)\right]$

b) $\frac{2}{11}-\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{11}-\frac{9}{22}\right)\right]$

c) $\left[1-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\right]-\left[\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{4}\right)+2\right]$

a) $\frac{2}{3}+\left[3-\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{5}\right)\right]=\frac{2}{3}+\left[3-\left(\frac{5}{30}+\frac{18}{30}\right)\right]=\frac{2}{3}+\left(3-\frac{23}{30}\right)=\frac{2}{3}+\left(\frac{90}{30}-\frac{23}{30}\right)=$

$=\frac{2}{3}+\frac{67}{30}=\frac{20}{30}+\frac{67}{30}=\frac{87}{30}=\frac{29}{10}=2+\frac{9}{10}$

b) $\frac{2}{11}-\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{11}-\frac{9}{22}\right)\right]=\frac{2}{11}-\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{6}{22}-\frac{9}{22}\right)\right]=\frac{2}{11}-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{22}\right)=\frac{2}{11}-\left(\frac{11}{22}-\frac{3}{22}\right)=$

$=\frac{2}{11}-\frac{8}{22}=\frac{2}{11}-\frac{4}{11}=-\frac{2}{11}$

c) $\left[1-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\right]-\left[\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{4}\right)+2\right]=\left[1-\left(\frac{4}{6}-\frac{1}{6}\right)\right]-\left[\left(\frac{10}{12}-\frac{3}{12}\right)+2\right]=\left(1-\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{7}{12}+2\right)=$

$=\left(\frac{6}{6}-\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{7}{12}+\frac{24}{12}\right)=\frac{5}{6}-\frac{31}{12}=\frac{10}{12}-\frac{31}{12}=-\frac{21}{12}=-\frac{7}{4}$

30. **Calcula mentalmente y simplifica.**

a) $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}$ **b)** $6\cdot\frac{3}{4}$ **c)** $5:\frac{3}{4}$ **d)** $\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}$ **e)** $\frac{8}{3}:\frac{2}{3}$ **f)** $\frac{2}{7}:4$

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{9}{2}$ c) $\frac{20}{3}$ d) $\frac{4}{15}$ e) $\frac{8}{6}$ f) $\frac{1}{14}$

Página 34

31. **Opera las expresiones siguientes:**

a) $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{-2}{3}\right)$ **b)** $\frac{-5}{3} : \left(\frac{-2}{5}\right)$

c) $\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{-2}{3}\right) \cdot \frac{5}{2}$ **d)** $(-3) \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot (-4)$

a) $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{3 \cdot (-2)}{4 \cdot 3} = \frac{-1}{2}$

b) $\frac{-5}{3} : \left(\frac{-2}{5}\right) = \frac{(-5) \cdot 5}{3 \cdot (-2)} = \frac{25}{6}$

c) $\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{-2}{3}\right) \cdot \frac{5}{2} = \frac{(-2) \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{-1}{3}$

d) $(-3) \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot (-4) = \frac{(-3) \cdot (-1) \cdot (-4)}{2} = \frac{-12}{2} = -6$

32. **Calcula:**

a) $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{10}$ **b)** $1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} : \frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{15} \cdot 5 - \frac{1}{6} \cdot 2 - \frac{1}{9} \cdot 3$ **d)** $\frac{1}{10} : \frac{1}{5} + \frac{1}{6} : \frac{1}{2} - \frac{1}{12} : \frac{1}{3}$

a) $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10} - \frac{2}{10} = -\frac{1}{10}$

b) $1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} : \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{6}{6} - \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

c) $\frac{1}{15} \cdot 5 - \frac{1}{6} \cdot 2 - \frac{1}{9} \cdot 3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{10} : \frac{1}{5} + \frac{1}{6} : \frac{1}{2} - \frac{1}{12} : \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$

33. **Reduce todo lo posible.**

a) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right)$

b) $5 : \left(\frac{2}{4} + 1\right) - 3 : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$

a) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{4}\right) - \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6} - \frac{2}{6}\right) =$

$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{6} - \frac{3}{36} = \frac{6}{36} - \frac{3}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

b) $5 : \left(\frac{2}{4} + 1\right) - 3 : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 5 : \left(\frac{2}{4} + \frac{4}{4}\right) - 3 : \left(\frac{2}{4} - \frac{1}{4}\right) = 5 : \frac{6}{4} - 3 : \frac{1}{4} = \frac{20}{6} - \frac{12}{1} = \frac{10}{3} - \frac{12}{1} = \frac{10}{3} - \frac{36}{3} = -\frac{26}{3}$

34. **Reduce a una sola fracción estas expresiones:**

a) $\frac{2}{7} \cdot \frac{7}{22} - \left(\frac{5}{11} - \frac{1}{2}\right) : \frac{1}{2}$ **b)** $13 \cdot \left(\frac{5}{26} - \frac{1}{23}\right) - \frac{4}{3} : \frac{1}{6}$

c) $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4}\right) : \frac{7}{12} + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{5}{6}$ **d)** $\left(1 - \frac{4}{7}\right) \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{7}{10} + \frac{1}{2}\right)$

a) $\frac{2}{7} \cdot \frac{7}{22} - \left(\frac{5}{11} - \frac{1}{2}\right) : \frac{1}{2} = \frac{1}{11} - \left(\frac{10}{22} - \frac{11}{22}\right) : \frac{1}{2} = \frac{1}{11} - \left(-\frac{11}{22}\right) : \frac{1}{2} = \frac{1}{11} + \frac{11}{22} : \frac{1}{2} = \frac{1}{11} + \frac{1}{11} = \frac{2}{11}$

b) $13 \cdot \left(\frac{5}{26} - \frac{1}{23}\right) - \frac{4}{3} : \frac{1}{6} = \left(\frac{13 \cdot 5}{26} - \frac{13 \cdot 1}{23}\right) - \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 1} = \left(\frac{5}{2} - \frac{13}{23}\right) - 8 = \left(\frac{115}{46} - \frac{26}{46}\right) - \frac{368}{46} = \frac{-279}{46}$

c) $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4}\right) : \frac{7}{12} + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{12}{20} - \frac{5}{20}\right) : \frac{7}{12} + \left(\frac{4}{24} - \frac{6}{24}\right) \cdot \frac{5}{6} = \frac{7}{20} : \frac{7}{12} + \left(-\frac{2}{24}\right) \cdot \frac{5}{6} =$

$= \frac{12}{20} - \frac{5}{72} = \frac{3}{5} - \frac{5}{72} = \frac{216}{360} - \frac{25}{360} = \frac{191}{360}$

d) $\left(1 - \frac{4}{7}\right) \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{7}{10} + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{7}{7} - \frac{4}{7}\right) \cdot \left(\frac{12}{30} - \frac{5}{30}\right) - \left(\frac{9}{12} - \frac{2}{12}\right) \cdot \left(\frac{7}{10} + \frac{5}{10}\right) =$

$= \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{30} - \frac{7}{12} \cdot \frac{12}{10} = \frac{1}{10} - \frac{7}{10} = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$

35. **Comprueba que el resultado de cada una de estas expresiones es un número entero:**

a) $\left(\frac{1}{6} - 1\right) \cdot \left(3 - \frac{2}{5}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)$

b) $2 : \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) - 3 : \left(1 + \frac{1}{2}\right)$

c) $-\frac{3}{8} \cdot \left[1 - \frac{3}{5} - \left(\frac{17}{20} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - 3\right)\right]$

d) $\left[\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{9}\right) + 13 \cdot \left(\frac{2}{3} - 1\right)^2\right] : \left(\frac{1}{3} - 1\right)$

a) $\left(\frac{1}{6} - 1\right) \cdot \left(3 - \frac{2}{5}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{6} - \frac{6}{6}\right) \cdot \left(\frac{15}{5} - \frac{2}{5}\right) - \left(\frac{2}{6} - \frac{3}{6}\right) = -\frac{5}{6} \cdot \frac{13}{5} - \left(\frac{-1}{6}\right) = -\frac{13}{6} + \frac{1}{6} = \frac{-12}{6} = -2$

b) $2 : \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) - 3 : \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 2 : \left(\frac{1}{6} - \frac{3}{6}\right) - 3 : \left(\frac{2}{2} + \frac{1}{2}\right) = 2 : \left(-\frac{2}{6}\right) - 3 : \frac{3}{2} = -6 - 2 = -8$

c) $-\frac{3}{8} \cdot \left[1 - \frac{3}{5} - \left(\frac{17}{20} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - 3\right)\right] = -\frac{3}{8} \cdot \left[1 - \frac{3}{5} - \left(\frac{17}{20} - \frac{20}{20}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{9}{3}\right)\right] = -\frac{3}{8} \cdot \left[1 - \frac{3}{5} - \left(-\frac{3}{20}\right) \cdot \left(-\frac{8}{3}\right)\right] =$

$= -\frac{3}{8} \cdot \left[1 - \frac{3}{5} - \frac{2}{5}\right] = -\frac{3}{8} \cdot \left(\frac{5}{5} - \frac{3}{5} - \frac{2}{5}\right) = -\frac{3}{8} \cdot 0 = 0$

d) $\left[\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{9}\right) + 13 \cdot \left(\frac{2}{3} - 1\right)^2\right] : \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \left[\left(\frac{6}{9} - \frac{1}{9}\right) + 13 \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{3}\right)^2\right] : \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{3}\right) = \left[\frac{5}{9} + 13 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2\right] : \left(-\frac{2}{3}\right) =$

$= \left(\frac{5}{9} + 13 \cdot \frac{1}{9}\right) : \left(-\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{5}{9} + \frac{13}{9}\right) : \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{18 \cdot 3}{9 \cdot 2} = -3$

36. **Ejercicio resuelto en el libro del alumno.**

37. **Reduce a una sola fracción.**

a) $\dfrac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}$ **b)** $\dfrac{3 - \frac{5}{3}}{3 + \frac{5}{3}}$ **c)** $\dfrac{\frac{1}{4} - \frac{3}{5}}{\frac{7}{10} - \frac{3}{4}}$

a) $\dfrac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{2}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{2}{2} - \frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} : \frac{1}{2} = 3$

b) $\dfrac{3 - \frac{5}{3}}{3 + \frac{5}{3}} = \dfrac{\frac{9}{3} - \frac{5}{3}}{\frac{9}{3} + \frac{5}{3}} = \dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{14}{3}} = \frac{4}{3} : \frac{14}{3} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$

c) $\dfrac{\frac{1}{4} - \frac{3}{5}}{\frac{7}{10} - \frac{3}{4}} = \dfrac{\frac{5}{20} - \frac{12}{20}}{\frac{14}{20} - \frac{15}{20}} = \dfrac{\frac{-7}{20}}{\frac{-1}{20}} = \left(\frac{-7}{20}\right) : \left(\frac{-1}{20}\right) = 7$

Piensa y resuelve

38. Tres socios invierten sus ahorros en un negocio. El primero aporta 1/3 del capital; el segundo, 2/5, y el tercero, el resto. Al cabo de tres años, reparten unos beneficios de 150 000 €. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

Primer socio $\rightarrow$ $\frac{1}{3}$ de 150 000 = 150 000 : 3 = 50 000 €

Segundo socio $\rightarrow$ $\frac{2}{5}$ de 150 000 = (150 000 : 5) · 2 = 60 000 €

Tercer socio $\rightarrow$ 150 000 – (50 000 + 60 000) = 150 000 – 110 000 = 40 000 €

Solución: Al primero le corresponden 50 000 €; al segundo, 60 000 € y al tercero, 40 000 €.

39. Elvira salió de su casa con 30 €. Se gastó 2/3 del dinero en un disco y 1/5 en un libro.

a) ¿Qué fracción del total ha gastado Elvira?

b) ¿Qué fracción le queda?

c) ¿Cuánto dinero le ha sobrado?

a) $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=\frac{10}{15}+\frac{3}{15}=\frac{13}{15}$

Ha gastado $\frac{2}{5}$ del total.

b) Le quedan $\frac{2}{15}$.

c) Le han sobrado $\frac{2}{15}$ de 30 = 30 : 15 · 2 = 4 €.

40. Luis ha gastado 3/8 del dinero que llevaba en comprar un regalo. Sabiendo que le han sobrado 30 €, ¿cuánto dinero tenía al principio?

Si gasta $\frac{3}{8}$, le quedan $\frac{5}{8}$.

30 : 5 = 6 $\rightarrow$ $\frac{1}{8}$ son 6 € $\rightarrow$ 6 · 8 = 48 €

Solución: Al principio tenía 48 €.

41. En mi clase, el número de chicas es igual a los cuatro séptimos del número de chicos. ¿Cuántos somos entre unos y otros si pasamos de 20 pero no llegamos a 30?

$x+\frac{4}{7}x=\frac{7}{7}x+\frac{4}{7}x=\frac{11}{7}x$

x tiene que ser múltiplo de 7.

$20<\frac{11}{7}x<30 \rightarrow \frac{140}{11}<x<\frac{210}{11} \rightarrow 13 \le x \le 19$

Es decir, buscamos un múltiplo de 7 entre 13 y 19 $\rightarrow$ x = 14 chicos

$\frac{4}{7}$ de 14 = (14 : 7) · 4 = 8 chicas

Solución: En total somos 14 + 8 = 22 estudiantes, entre chicos y chicas.

42. **Compro a plazos un equipo de música que vale 600 €. Hago un pago de 60 €; después, otro igual a los 2/3 de lo que me queda por pagar, y luego, otro más por 1/5 de lo que aún debo.**

a) ¿Cuánto he devuelto cada vez?

b) ¿Qué parte de la deuda he pagado?

c) ¿Cuánto me queda por pagar?

a) Tras el primer pago, quedan 600 – 60 = 540 € por pagar.

En el 2.º pago $\rightarrow$ $\frac{2}{3}$ de 540 = (540 : 3) · 2 = 360 €

Por tanto, quedan 540 – 360 = 180 €.

En el tercer pago $\rightarrow$ $\frac{1}{5}$ de 180 = (180 : 5) · 1 = 36 €

He devuelto 60 € en el primer pago, 360 € en el segundo y 36 € en el tercero.

b) 60 + 360 + 36 = 456 € $\rightarrow$ $\frac{456}{600} = \frac{19}{25}$

He pagado $\frac{19}{25}$ de la deuda

c) 600 – 456 = 144 €.

Me quedan por pagar 144 €.

Página 35

43. Un informe sobre la titulación académica de los habitantes de cierta región arroja los siguientes datos:

— Estudios de educación primaria: 97 %

— Estudios educación secundaria: 65 %

— Bachilleres: 35 %

— Estudios universitarios: 15 %

a) ¿Qué fracción de la población tiene solo estudios primarios?

b) ¿Qué fracción de la población tiene estudios secundarios, pero no universitarios?

c) ¿Cuántos ciudadanos de cada diez tienen título de bachiller pero no tienen título universitario?

a) $97 - 65 = 32\,\% \to \frac{32}{100} = \frac{8}{25}$ de la población solo tiene estudios primarios.

b) $65 - 15 = 50\,\% \to \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ de la población tiene estudios secundarios pero no universitarios.

c) $35 - 15 = 20\,\% \to \frac{50}{100} = \frac{5}{10} \to$ 5 de cada 10 tienen título de Bachiller pero no universitario.

44. Se adquieren 10 kg de ciruelas para hacer mermelada. Al deshuesarlas, se reduce en 1/5 su peso. Lo que queda se cuece con una cantidad igual de azúcar, perdiéndose en la cocción 1/4 del peso. ¿Cuántos kilos de mermelada se obtienen?

Se reduce $\frac{1}{5} \to$ quedan $\frac{4}{5}$

$\frac{4}{5}$ de $10 = (10 : 5) \cdot 4 = 8$ kg quedan al deshuesar las ciruelas.

Al añadir el azúcar se tienen $8 + 8 = 16$ kg de mezcla.

Se reduce $\frac{1}{4} \to$ quedan $\frac{3}{4}$

$\frac{3}{4}$ de $16 = (16 : 4) \cdot 3 = 12$ kg

Solución: Se obtienen 12 kg de mermelada.

45. Si a un número se le suman sus tres décimas partes, se obtiene 143. ¿Qué número es?

Llamamos x al número.

$$x + \frac{3}{10}x = 143 \to \frac{10}{10}x + \frac{3}{10}x = \frac{1430}{10} \to \frac{13}{10}x = \frac{1430}{10} \to 13x = 1430 \to x = \frac{1430}{13}$$

Solución: El número es 110.

46. **Los beneficios de este año en una empresa han ascendido a un millón ochocientos mil euros, lo que supone un aumento de dos séptimos respecto al año pasado. ¿Cuáles fueron los beneficios del año pasado?**

$x \to$ Beneficio del año pasado.

$$x + \frac{2}{7}x = 1\,800\,000 \;\to\; \frac{7}{7}x + \frac{2}{7}x = 1\,800\,000 \;\to\; \frac{9}{7}x = 1\,800\,000 \;\to$$

$$\to\; x = \frac{1\,800\,000 \cdot 7}{9} = 1\,400\,000\text{ €}$$

Solución: El año pasado los beneficios fueron de 1 400 000 €.

47. **La familia García ha invertido la cuarta parte de su presupuesto para vacaciones en los billetes de avión; la tercera parte, en el hotel; y el resto, que son 600 €, en gastos varios. ¿A cuánto ascendía el presupuesto?**

$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$ gastan en el hotel y el avión $\to$ $\frac{5}{12}$ son 600 €

$600 : 5 = 120$

$120 \cdot 12 = 1\,440$ €

Solución: El presupuesto ascendía a 1 440 €.

48. **En un puesto de frutas y verduras, los 5/6 del importe de las ventas de un día corresponden al apartado de frutas. Del dinero recaudado en la venta de fruta, los 3/8 corresponden a las naranjas.**

Si la venta de naranjas asciende a 195 €, ¿qué caja ha hecho el establecimiento?

$\frac{3}{8}$ de $\frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 5}{8 \cdot 6} = \frac{5}{16}$ del total $\to$ $\frac{5}{16}$ son 195 €

$195 : 5 = 39$ €

$39 \cdot 16 = 624$ €

Solución: El establecimiento ha hecho 624 € de caja.

49. **En una carrera ciclista de cuatro etapas, el primer día abandonó 1/15 de los corredores. El segundo día abandonó la décima parte de los que quedaban. El tercer día, tras una caída, abandonaron 3 corredores, terminando la carrera 123.**

a) ¿Qué fracción de los corredores tomaron la salida el segundo día? ¿Y el tercer día?

b) ¿Cuántos corredores participaron en la carrera?

a) Tomaron la salida $\frac{14}{15}$ de los corredores el segundo día.

$\frac{9}{10}$ de $\frac{14}{15} = \frac{126}{150} = \frac{21}{15}$

Tomaron la salida $\frac{21}{25}$ de los corredores el tercer día.

b) Llamamos x al número de corredores iniciales.

$$\frac{21}{25}x - 3 = 123 \;\to\; \frac{21}{25}x - \frac{75}{25} = \frac{3\,075}{25} \;\to\; 21x - 75 = 3\,075 \;\to\; 21x = 3\,150 \;\to\; x = 150$$

Solución: Participaron 150 corredores en la carrera.

50. **¿Cuál o cuáles de las expresiones que tienes debajo resuelven el problema que te planteamos? Justifica tu respuesta.**

En un depósito municipal lleno de agua había 3 000 litros. Un día se gastó 1/6 del depósito, y otro, 1 250 litros. ¿Qué fracción queda?

a) $\left(1-\frac{1}{6}\right)-\frac{1250}{3000}$ **b)** $\frac{3000-1250}{3000}-\frac{1}{6}$

c) $1-\frac{1}{6}-\frac{1250}{3000}$ **d)** $1-\left(\frac{1250}{3000}+\frac{1}{6}\right)$

a) Sí resuelve el problema:

$\left(1-\frac{1}{6}\right)$ representa la fracción que queda tras el primer día.

$\frac{1250}{3000}$ representa la fracción que se gasta el segundo día, porque tomamos 1 250 del total.

Al restarlas, obtenemos la fracción que queda.

b) Sí resuelve el problema:

$\frac{3000-1250}{3000}$ representa lo que queda al gastarse 1 250 litros.

Al restar $\frac{1}{6}$ a lo anterior, se calcula la fracción que queda tras el gasto de los dos días.

c) Sí resuelve el problema:

Al total le quitamos la fracción que extraemos el primer día y $\frac{1250}{3000}$ que corresponde con la fracción que extraemos el segundo día (1 250 litros de los 3 000 litros totales).

d) Sí resuelve el problema:

$\left(\frac{1250}{3000}+\frac{1}{6}\right)$ representa lo que se gasta en total entre los dos días.

Al restar esto a la unidad, obtenemos la fracción de agua que queda en el depósito.

51. **Repite los problemas del 38 al 42, pero ahora escribe una expresión que resuelva cada una de las preguntas planteadas.**

Ejercicio 38

Al primer socio le corresponden $\frac{1}{3}$ de $150\,000 = 150\,000 : 3 = 50\,000$ €

Al segundo socio le corresponden $\frac{2}{5}$ de $150\,000 = (150\,000 : 5) \cdot 2 = 60\,000$ €

Al tercer socio le corresponden $150\,000 - \left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right) \cdot 150\,000 = 40\,000$ €

Ejercicio 39

a) $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=\frac{10}{15}+\frac{3}{15}=\frac{13}{15}$

b) $1-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)=1-\left(\frac{10}{15}+\frac{3}{15}\right)=1-\frac{13}{15}=\frac{2}{15}$

c) $30-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)\cdot 30=30-\left(\frac{10}{15}+\frac{3}{15}\right)\cdot 30=30-\frac{13}{15}\cdot 30=30-26=4$ €

Ejercicio 40

$\left(1 - \frac{3}{8}\right)$ de $C = 30 \rightarrow \frac{5}{8}C = (30 : 5) \cdot 8 = 48$ €

Ejercicio 41

$20 < \left(1 + \frac{4}{7}\right) \cdot C < 30 \rightarrow 20 < \frac{11}{7} \cdot 7K < 30 \rightarrow \frac{20}{11} < K < \frac{30}{11} \rightarrow 1{,}8 < K < 2{,}7 \rightarrow$

$\rightarrow K = 2 \rightarrow$ C = 14 chicos en clase

$\left(1 - \frac{4}{7}\right) \cdot 14 = \frac{11}{7} \cdot 14 = 22$ estudiantes en total

Ejercicio 42

a) En el primer pago devuelvo 60 €.

En el segundo pago devuelvo $\frac{2}{3}$ de $(600 - 60) = \frac{2}{3} \cdot 540 = (540 : 3) \cdot 2 = 360$ €

En el tercer pago devuelvo $\frac{1}{5} \cdot \left[\left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot (600 - 60)\right] = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot 540 = \frac{1}{15} \cdot 540 =$

$= (540 : 15) \cdot 1 = 36$ €

b) $\frac{60}{600} + \frac{2}{3} \cdot \frac{(600 - 60)}{600} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{(600 - 60)}{600} = \frac{1}{10} + \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{10} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{10} =$

$= \frac{1}{10} + \frac{3}{5} + \frac{3}{50} = \frac{5}{50} + \frac{30}{50} + \frac{3}{50} = \frac{38}{50}$

c) $600 - \left[60 + \frac{2}{3} \cdot (600 - 60) + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot (600 - 60)\right] = 600 - \left(60 + \frac{2}{3} \cdot 540 + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 540\right) =$

$= 600 - (60 + 360 + 36) = 600 - 456 = 144$ €

Curiosidades matemáticas

- **Escribe en tu calculadora estas fracciones y después pásalas a forma decimal:**

$\frac{13}{99}$ $\frac{15}{99}$ $\frac{25}{99}$ $\frac{36}{99}$ **¿Qué observas?**

$\frac{13}{99} = 0,\overset{\frown}{13}$ $\frac{15}{99} = 0,\overset{\frown}{15}$ $\frac{25}{99} = 0,\overset{\frown}{25}$ $\frac{36}{99} = 0,\overset{\frown}{36}$

- **¿Serías capaz ahora, sin ningún cálculo más, de poner en forma de fracción estos números decimales?**

0,191919… $\quad 0,\overset{\frown}{37}$ $\quad 0,\overset{\frown}{52}$ $\quad 0,\overset{\frown}{86}$

$0{,}191919... = \frac{19}{99}$ $\quad 0,\overset{\frown}{37} = \frac{37}{99}$ $\quad 0,\overset{\frown}{52} = \frac{52}{99}$ $\quad 0,\overset{\frown}{86} = \frac{86}{99}$

- **¿Y estos otros?**

0,129129129… $\quad 0,\overset{\frown}{327}$ $\quad 0,\overset{\frown}{542}$ $\quad 0,\overset{\frown}{856}$

Compruébalo con la calculadora.

$0{,}129129129... = \frac{129}{999}$ $\quad 0,\overset{\frown}{327} = \frac{327}{999}$ $\quad 0,\overset{\frown}{542} = \frac{542}{999}$ $\quad 0,\overset{\frown}{856} = \frac{856}{999}$

1 Potencias

Página 37

1. Calcula.

a) 5^3 **b)** 2^6 **c)** $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ **d)** 8^1

e) $(-5)^3$ **f)** $(-2)^6$ **g)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$ **h)** $(-8)^1$

a) $5^3 = 125$ b) $2^6 = 64$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ d) $8^1 = 8$

e) $(-5)^3 = -125$ f) $(-2)^6 = 64$ g) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{-1}{8}$ h) $(-8)^1 = -8$

2. Expresa como una potencia de base 10.

a) 100 000 **b) Mil millones** **c) 100 000 000** **d) Un billón**

a) $100\,000 = 10^5$ b) Mil millones $= 10^9$ c) $100\,000\,000 = 10^8$ d) Un billón $= 10^{12}$

3. Escribe el cubo de todos los números enteros comprendidos entre –5 y +5.

$(-5)^3 = -125$ $(-1)^3 = -1$ $3^3 = 27$

$(-4)^3 = -64$ $0^3 = 0$ $4^3 = 64$

$(-3)^3 = -27$ $1^3 = 1$ $5^3 = 125$

$(-2)^3 = -8$ $2^3 = 8$

4. Escribe la descomposición polinómica de:

a) 250 467 **b) 8 400 900** **c) 42 800 500 000**

a) $250\,467 = 2 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 7$

b) $8\,400\,900 = 8 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^2$

c) $42\,800\,500\,000 = 4 \cdot 10^{10} + 2 \cdot 10^9 + 8 \cdot 10^8 + 5 \cdot 10^5$

5. ¿Qué número corresponde a cada descomposición?

a) $4 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 2$

b) $5 \cdot 10^7 + 2 \cdot 10^6 + 8 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10$

a) $4 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 2 = 478\,602$

b) $5 \cdot 10^7 + 2 \cdot 10^6 + 8 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10 = 52\,086\,020$

Página 39

6. Reduce cada expresión a una sola potencia:

a) $x \cdot x^4 \cdot x^2$ **b)** $x^9 : x^7$ **c)** $x^2 \cdot (x^7 : x^6)$ **d)** $(a^9 : a^6) \cdot a^2$

e) $(a^3 \cdot a^5) : (a^4 \cdot a^4)$ **f)** $\frac{x^3 \cdot x^6}{x^7}$ **g)** $\frac{x^7 : x^2}{x^4 : x^3}$ **h)** $\frac{x^4 \cdot x^2}{x \cdot x^3}$

a) $x \cdot x^4 \cdot x^2 = x^{1+4+2} = x^7$ (Propiedad ③)

b) $x^9 : x^7 = x^{9-7} = x^2$ (Propiedad ④)

c) $x^2 \cdot (x^7 : x^6) = x^{2+(7-6)} = x^{2+1} = x^3$ (Propiedades ③ y ④)

d) $(a^9 : a^6) \cdot a^2 = a^{(9-6)+2} = a^{3+2} = a^5$ (Propiedades ③ y ④)

e) $(a^3 \cdot a^5) : (a^4 \cdot a^4) = a^{3+5} : a^{4+4} = a^8 : a^8 = 1$ (Propiedades ③ y ④)

f) $\frac{x^3 \cdot x^6}{x^7} = \frac{x^{3+6}}{x^7} = \frac{x^9}{x^7} = x^{9-7} = x^2$ (Propiedades ③ y ④)

g) $\frac{x^7 : x^2}{x^4 : x^3} = \frac{x^{7-2}}{x^{4-3}} = \frac{x^5}{x} = x^{5-1} = x^4$ (Propiedad ④)

h) $\frac{x^4 \cdot x^2}{x \cdot x^3} = \frac{x^{4+2}}{x^{1+3}} = \frac{x^6}{x^4} = x^{6-4} = x^2$ (Propiedades ③ y ④)

7. Opera.

a) $(x^3)^4$ **b)** $(x^2)^5$ **c)** $(x^3)^5 : x^{10}$

d) $a^9 : (a^4)^2$ **e)** $(a^2)^2 \cdot (a^2)^2$ **f)** $(a^2)^4 : (a^3)^2$

a) $(x^3)^4 = x^{3 \cdot 4} = x^{12}$

b) $(x^2)^5 = x^{2 \cdot 5} = x^{10}$

c) $(x^3)^5 : x^{10} = x^{15} : x^{10} = x^5$

d) $a^9 : (a^4)^2 = a^9 : a^8 = a$

e) $(a^2)^2 \cdot (a^2)^2 = a^4 \cdot a^4 = a^8$

f) $(a^2)^4 : (a^3)^2 = a^8 : a^6 = a^2$

8. Reduce a una sola potencia y después calcula.

a) $7^5 : 7^3$ **b)** $(-2)^2 \cdot (-2)^3$ **c)** $(-5)^7 : 5^6$

d) $[(-3)^2]^2$ **e)** $(7^2)^3 : (7^3)^2$ **f)** $(-2)^3 : (-2)$

a) $7^5 : 7^3 = 7^2 = 49$

b) $(-2)^2 \cdot (-2)^3 = (-2)^5 = -32$

c) $(-5)^7 : 5^6 = -5^7 : 5^6 = -5$

d) $[(-3)^2]^2 = (-3)^4 = 81$

e) $(7^2)^3 : (7^3)^2 = 7^6 : 7^6 = 7^0 = 1$

f) $(-2)^3 : (-2) = (-2)^2 = 4$

9. **Calcula por el camino más corto, aplicando las propiedades 1 y 2, como en el ejemplo:**

- $18^4 : 9^4 = (18 : 9)^4 = 2^4 = 16$

a) $2^5 \cdot 5^5$ **b)** $24^3 : 8^3$ **c)** $4^3 \cdot (-5)^3$

d) $(-10)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$ **e)** $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4$

a) $2^5 \cdot 5^5 = (2 \cdot 5)^5 = 10^5 = 100\,000$

b) $24^3 : 8^3 = (24 : 8)^3 = 3^3 = 27$

c) $4^3 \cdot (-5)^3 = [4 \cdot (-5)]^3 = (-20)^3 = -8\,000$

d) $(-10)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left[(-10) \cdot \frac{1}{2}\right]^2 = (-5)^2 = 25$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\right)^4 = 1^4 = 1$

10. **Reduce a un único número racional en cada caso:**

a) $2^3 \cdot 5^4$ **b)** $20^5 : 2^6$ **c)** $9^6 : (-3)^6$ **d)** $2^8 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^4$

e) $\frac{6^5}{2^4} : 3^5$ **f)** $(-2)^8 : \left(\frac{1}{4}\right)^5$ **g)** $\left(\frac{1}{3}\right)^6 : \left(\frac{1}{9}\right)^3$ **h)** $\left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4$

a) $2^3 \cdot 5^4 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 5 = (2 \cdot 5)^3 \cdot 5 = 10^3 \cdot 5 = 5\,000$

b) $20^5 : 2^6 = (20^5 : 2^5) : 2 = (20 : 2)^5 : 2 = 10^5 : 2 = 50\,000$

c) $9^6 : (-3)^6 = [9 : (-3)]^6 = (-3)^6 = 729$

d) $2^8 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^4 = \frac{2^8 \cdot 5^4}{2^4} = 2^4 \cdot 5^4 = 10^4 = 10\,000$

e) $\frac{6^5}{2^4} : 3^5 = \frac{(2 \cdot 3)^5}{2^4} : 3^5 = \frac{2^5 \cdot 3^5}{2^4} : 3^5 = (2 \cdot 3^5) : 3^5 = 2$

f) $(-2)^8 : \left(\frac{1}{4}\right)^5 = (-2)^8 : \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^5 = (-2)^8 : \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{(-2)^8}{2^{10}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

g) $\left(\frac{1}{3}\right)^6 : \left(\frac{1}{9}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^6 : \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^6 : \left(\frac{1}{3}\right)^6 = 1$

h) $\left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{2^6}{3^6} \cdot \frac{3^4}{4^4} = \frac{2^6 \cdot 3^4}{3^6 \cdot (2^2)^4} = \frac{2^6 \cdot 3^4}{3^6 \cdot 2^8} = \frac{1}{3^2 \cdot 2^2} = \frac{1}{36}$

2 Potencias de exponente cero o negativo

Página 41

1. Expresa en cada caso con una fracción irreducible o con un número entero:

a) 7^0 **b)** 3^{-3} **c)** $(-3)^{-2}$ **d)** 8^{-1}

e) $\left(\frac{3}{8}\right)^0$ **f)** $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$ **g)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ **h)** $\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}$

a) $7^0 = 1$ b) $3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$ c) $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$ d) $8^{-1} = \frac{1}{8}$

e) $\left(\frac{3}{8}\right)^0 = 1$ f) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{2}$ g) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$ h) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

2. Calcula.

a) $6^2 \cdot 3^{-4}$ **b)** $2^{-3} : 2^2$ **c)** $5^{-2} \cdot 5^{-3}$ **d)** $(2 \cdot 3^2)^{-2} \cdot 6^2$

e) $(3^2 \cdot 5^{-3}) \cdot (3^3 \cdot 5^{-2})$ **f)** $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$ **g)** $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

a) $6^2 \cdot 3^{-4} = (3 \cdot 2)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{3^2 \cdot 2^2}{3^4} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

b) $2^{-3} : 2^2 = 2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

c) $5^{-2} \cdot 5^{-3} = 5^{-5} = \frac{1}{5^5} = \frac{1}{3125}$

d) $(2 \cdot 3^2)^{-2} \cdot 6^2 = \frac{1}{(2 \cdot 3^2)^2} \cdot (2 \cdot 3)^2 = \frac{2^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 3^4} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

e) $(3^2 \cdot 5^{-3}) \cdot (3^3 \cdot 5^{-2}) = \frac{3^2}{5^3} \cdot \frac{3^3}{5^2} = \frac{3^5}{5^5} = \frac{243}{3125}$

f) $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{-1} = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2$

g) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{2^2}{3^2} \cdot 3 = \frac{2^2}{3} = \frac{4}{3}$

3. Reduce a una sola potencia cada expresión:

a) $x^4 \cdot x^{-5}$ **b)** $x^2 : x^{-1}$ **c)** $x^{-3} \cdot (x^5 : x^6)$

d) $(a^2)^3 : a^7$ **e)** $a^8 \cdot (a^2)^{-3}$ **f)** $b^6 : (b^4 \cdot b^{-2})$

g) $\frac{x^2}{x^{-3}}$ **h)** $\frac{x^{-2}}{x}$ **i)** $\frac{x^7 : x^5}{x \cdot x^3}$

a) $x^4 \cdot x^{-5} = x^{-1}$ b) $x^2 : x^{-1} = x^3$ c) $x^{-3} \cdot (x^5 : x^6) = x^{-3} \cdot x^{-1} = x^{-4}$

d) $(a^2)^3 : a^7 = a^6 : a^7 = a^{-1}$ e) $a^8 \cdot (a^2)^{-3} = a^8 \cdot a^{-6} = a^2$ f) $b^6 : (b^4 \cdot b^{-2}) = b^6 : b^2 = b^4$

g) $\frac{x^2}{x^{-3}} = x^2 : x^{-3} = x^5$ h) $\frac{x^{-2}}{x} = x^{-3}$ i) $\frac{x^7 : x^5}{x \cdot x^3} = \frac{x^2}{x^4} = x^{-2}$

4. Reduce estas expresiones:

a) $\left(\frac{1}{x}\right)^{-2} \cdot x$

b) $\left(\frac{1}{a}\right)^{4} : a^{-3}$

c) $\left(\frac{1}{x}\right)^{-2} \cdot x^{-2}$

d) $\left(\frac{1}{a}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$

e) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-8} \cdot \frac{x^6}{y^7}$

f) $\frac{a^5}{b^3} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-2}$

a) $\left(\frac{1}{x}\right)^{-2} \cdot x = x^2 \cdot x = x^3$

b) $\left(\frac{1}{a}\right)^{4} : a^{-3} = a^{-4} : a^{-3} = a^{-1}$

c) $\left(\frac{1}{x}\right)^{-2} \cdot x^{-2} = x^2 \cdot x^{-2} = x^0 = 1$

d) $\left(\frac{1}{a}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} \; a \cdot \frac{b}{a} = b$

e) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-8} \cdot \frac{x^6}{x^2} = \frac{y^8}{x^8} \cdot \frac{x^6}{y^7} = \frac{y}{x^2}$

f) $\frac{a^5}{b^3} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-2} = \frac{a^5}{b^3} \cdot \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^3}{b}$

3 Notación científica

Página 42

Cálculo mental

Di el valor de *n* para que se verifique cada igualdad:

a) $513\,000 = 5{,}13 \cdot 10^n$ **b)** $2\,577{,}6 = 2{,}5776 \cdot 10^n$

c) $453 \cdot 10^3 = 4{,}53 \cdot 10^n$ **d)** $125{,}3 \cdot 10^6 = 1{,}253 \cdot 10^n$

a) $n = 5$ b) $n = 3$ c) $n = 5$ d) $n = 8$

1. Expresa estas cantidades en notación científica:

a) 2 800 000 **b)** 169 000 000

c) 7 020 000 000 **d)** 53 420 000 000 000

a) $2\,800\,000 = 2{,}8 \cdot 10^6$ b) $169\,000\,000 = 1{,}69 \cdot 10^8$

c) $7\,020\,000\,000 = 7{,}02 \cdot 10^9$ d) $53\,420\,000\,000\,000 = 5{,}342 \cdot 10^{13}$

2. Expresa con todas sus cifras.

a) $3{,}6 \cdot 10^5$ **b)** $8{,}253 \cdot 10^8$ **c)** $2{,}27 \cdot 10^{11}$

a) $3{,}6 \cdot 10^5 = 360\,000$ b) $8{,}253 \cdot 10^8 = 825\,300\,000$ c) $2{,}27 \cdot 10^{11} = 227\,000\,000\,000$

3. Compara estas expresiones del mismo número:

$$2\,370\,000\,000\,000\,000\,000 \leftrightarrow 2{,}37 \cdot 10^{18}$$

¿Cuál te parece más manejable? Explica por qué.

La primera expresión está escrita con todas las cifras del número, mientras que la segunda es una expresión en notación científica.

Es más manejable la segunda, porque se puede comparar con mayor facilidad y ocupa menos espacio al escribirla.

4. Expresa 6 274 344 825 en notación científica, redondeándolo a las decenas de millón.

6 274 344 825 $\rightarrow$ Redondeo: 6 270 000 000

Notación científica: $6{,}27 \cdot 10^9$

Página 43

Cálculo mental

Di el valor de n para que se verifique cada igualdad:

a) $0{,}000007 = 7 \cdot 10^n$

b) $0{,}00513 = 5{,}13 \cdot 10^n$

c) $0{,}45 \cdot 10^{-2} = 4{,}5 \cdot 10^n$

d) $0{,}0018 \cdot 10^{-5} = 1{,}8 \cdot 10^n$

a) $n = -6$ b) $n = -3$ c) $n = -3$ d) $n = -8$

5. Expresa estas cantidades en notación científica:

a) $0{,}00016$

b) $0{,}00000387$

c) $0{,}00000000083$

d) $0{,}000000000000000629$

a) $0{,}00016 = 1{,}6 \cdot 10^{-4}$

b) $0{,}00000387 = 3{,}87 \cdot 10^{-6}$

c) $0{,}00000000083 = 8{,}3 \cdot 10^{-10}$

d) $0{,}000000000000000629 = 6{,}29 \cdot 10^{-16}$

6. Expresa con todas sus cifras.

a) $2{,}65 \cdot 10^{-4}$

b) $8{,}253 \cdot 10^{-6}$

c) $2{,}27 \cdot 10^{-11}$

a) $2{,}65 \cdot 10^{-4} = 0{,}000265$

b) $8{,}253 \cdot 10^{-6} = 0{,}000008253$

c) $2{,}27 \cdot 10^{-11} = 0{,}0000000000227$

7. Observa dos notaciones del mismo número:

$$6{,}3 \cdot 10^{-18} \leftrightarrow 0{,}0000000000000000063$$

¿Cuál te parece más práctica? Explica por qué.

La primera expresión está en notación científica, mientras que la segunda está expresada con todas las cifras del número.

Es más práctica la primera, porque es más manejable y más fácil de comparar.

8. Calcula.

a) $4{,}73 \cdot 10^7 - 7{,}5 \cdot 10^6$

b) $1{,}8 \cdot 10^9 + 2{,}25 \cdot 10^8$

c) $(5{,}84 \cdot 10^{12}) \cdot (7{,}5 \cdot 10^8)$

d) $(4{,}38 \cdot 10^{21}) : (5{,}84 \cdot 10^{12})$

a) $4{,}73 \cdot 10^7 - 7{,}5 \cdot 10^6 = 47{,}3 \cdot 10^6 - 7{,}5 \cdot 10^6 = 39{,}8 \cdot 10^6 = 3{,}98 \cdot 10^7$

b) $1{,}8 \cdot 10^9 + 2{,}25 \cdot 10^8 = 18 \cdot 10^8 + 2{,}25 \cdot 10^8 = 20{,}25 \cdot 10^8 = 2{,}025 \cdot 10^9$

c) $(5{,}84 \cdot 10^{12}) \cdot (7{,}5 \cdot 10^8) = (5{,}84 \cdot 7{,}5) \cdot 10^{12+8} = 43{,}8 \cdot 10^{20} = 4{,}38 \cdot 10^{21}$

d) $(4{,}38 \cdot 10^{21}) : (5{,}84 \cdot 10^{12}) = (4{,}38 : 5{,}84) \cdot 10^{21-12} = 0{,}75 \cdot 10^9 = 7{,}5 \cdot 10^8$

9. **En 18 gramos de agua (H_2O) hay $6{,}022 \cdot 10^{23}$ moléculas elementales (número de Avogadro).**

a) ¿Cuántas moléculas elementales hay en un gramo de agua?

b) ¿Cuál es la masa de una molécula elemental?

a) En un gramo de agua hay $(6{,}022 \cdot 10^{23}) : 18 \approx 0{,}3346 \cdot 10^{23} = 3{,}346 \cdot 10^{22}$ moléculas elementales.

b) La masa de una molécula elemental son $18 : (6{,}022 \cdot 10^{23}) \approx 2{,}989 \cdot 10^{-23}$ gramos.

Página 44

10. **Resuelve con la calculadora las actividades 5, 8 y 9 de la página anterior.**

Ejercicio 5

a) 1,6 $\boxed{\times10^x}$ $\boxed{(-)}$ 4 [ó 1,6 $\boxed{EXP}$ 4 $\boxed{+/-}$] $\boxed{=}$ $\boxed{1.6\times10^{-4}}$

b) 3,8 $\boxed{\times10^x}$ $\boxed{(-)}$ 6 [ó 3,8 $\boxed{EXP}$ 6 $\boxed{+/-}$] $\boxed{=}$ $\boxed{3.8\times10^{-6}}$

c) 8,3 $\boxed{\times10^x}$ $\boxed{(-)}$ 10 [ó 8,3 $\boxed{EXP}$ 10 $\boxed{+/-}$] $\boxed{=}$ $\boxed{8.3\times10^{-10}}$

d) 6,29 $\boxed{\times10^x}$ $\boxed{(-)}$ 16 [ó 6,29 $\boxed{EXP}$ 16 $\boxed{+/-}$] $\boxed{=}$ $\boxed{6.29\times10^{-16}}$

Ejercicio 8

a) 4,73 $\boxed{\times10^x}$ 7 $\boxed{-}$ 7,5 $\boxed{\times10^x}$ 6 $\boxed{=}$ $\boxed{3.980\times10^{7}}$

b) 1,8 $\boxed{\times10^x}$ 9 $\boxed{+}$ 2,25 $\boxed{\times10^x}$ 8 $\boxed{=}$ $\boxed{2.025\times10^{9}}$

c) 5,84 $\boxed{\times10^x}$ 12 $\boxed{\times}$ 7,5 $\boxed{\times10^x}$ 8 $\boxed{=}$ $\boxed{4.380\times10^{21}}$

d) 4,38 $\boxed{\times10^x}$ 21 $\boxed{\div}$ 5,84 $\boxed{\times10^x}$ 12 $\boxed{=}$ $\boxed{7.5\times10^{8}}$

Ejercicio 9

a) 6,022 $\boxed{\times10^x}$ 23 $\boxed{\div}$ 18 $\boxed{=}$ $\boxed{3.346\times10^{22}}$

b) 18 $\boxed{\div}$ 6,022 $\boxed{\times10^x}$ 23 $\boxed{=}$ $\boxed{2.989\times10^{-23}}$

4 Raíces exactas

Página 45

1. Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt[6]{64}$ **b)** $\sqrt[3]{216}$ **c)** $\sqrt{14\,400}$

d) $\sqrt[6]{\dfrac{1}{64}}$ **e)** $\sqrt[3]{\dfrac{64}{216}}$ **f)** $\sqrt[3]{\dfrac{3\,375}{1\,000}}$

a) $\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

b) $\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3} = 2 \cdot 3 = 6$

c) $\sqrt{14\,400} = \sqrt{2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2} = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$

d) $\sqrt[6]{\dfrac{1}{64}} = \sqrt[6]{\dfrac{1}{2^6}} = \dfrac{1}{2}$

e) $\sqrt[3]{\dfrac{64}{216}} = \sqrt[3]{\dfrac{2^6}{2^3 \cdot 3^3}} = \dfrac{2^2}{2 \cdot 3} = \dfrac{2}{3}$

f) $\sqrt[3]{\dfrac{3\,375}{1\,000}} = \sqrt[3]{\dfrac{3^3 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 5^3}} = \dfrac{3 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \dfrac{3}{2}$

2. ¿Verdadero o falso?

a) Como $(-5)^2 = 25$, entonces $\sqrt{25} = -5$.

b) –5 es una raíz cuadrada de 25.

c) 81 tiene dos raíces cuadradas: 3 y –3.

d) 27 tiene dos raíces cúbicas: 3 y –3.

a) Falso. Cuando escribimos $\sqrt{25}$ nos referimos a la raíz positiva, luego $\sqrt{25} = 5$.

b) Verdadero. $(-5)^2 = 25$.

c) Falso. 81 sí tiene dos raíces cuadradas pero son 9 y –9. 3 y (–3) no son raíces de 81 ya que $3^2 = (-3)^2 = 9 \neq 81$.

d) Falso. 3 sí es raíz cúbica de 27, pues $3^3 = 27$. Sin embargo, (–3) no lo es, pues $(-3)^3 = -27 \neq 27$.

Ejercicios y problemas

Página 46

Practica

1. Escribe la descomposición polinómica de estos números:

a) $3\,450\,300$ **b)** $0{,}470286$ **c)** $583{,}735$ **d)** $39{,}084$

a) $3\,450\,300 = 3 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^2$

b) $0{,}470286 = 4 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-4} + 8 \cdot 10^{-5} + 5 \cdot 10^{-6}$

c) $583{,}735 = 5 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 3 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}$

d) $39{,}084 = 3 \cdot 10 + 9 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-3}$

2. Escribe el número que corresponde a cada descomposición:

a) $4 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^0$

b) $8 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4}$

c) $2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 3 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}$

a) $4 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^0 = 492\,607$

b) $8 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4} = 0{,}8495$

c) $2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 3 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} = 263{,}74$

3. Calcula las potencias siguientes:

a) $(-3)^3$ **b)** $(-2)^4$ **c)** $(-2)^{-3}$

d) -3^2 **e)** -4^{-1} **f)** $(-1)^{-2}$

g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ **h)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$ **i)** $\left(\frac{4}{3}\right)^{0}$

a) $(-3)^3 = -27$ b) $(-2)^4 = 16$ c) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{-1}{8}$

d) $-3^2 = -9$ e) $-4^{-1} = \frac{-1}{4}$ f) $(-1)^{-2} = \frac{1}{(-1)^2} = 1$

g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$ h) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{-1}\right)^2 = 4$ i) $\left(\frac{4}{3}\right)^{0} = 1$

4. Expresa como una potencia de base 2 o 3.

a) 64 **b)** 243 **c)** $\frac{1}{32}$ **d)** $\frac{1}{3}$ **e)** $-\frac{1}{27}$

a) $64 = 2^6$ b) $243 = 3^5$ c) $\frac{1}{32} = 2^{-5}$ d) $\frac{1}{3} = 3^{-1}$ e) $-\frac{1}{27} = (-3)^{-3}$

5. **Expresa como potencia única.**

a) $\dfrac{3^4}{3^{-3}}$ **b)** $\left(\dfrac{2^{-3}}{2^{-2}}\right)^{-1}$ **c)** $\dfrac{2^5 \cdot 2^{-7}}{2^{-4}}$ **d)** $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-3} : \left(\dfrac{3}{4}\right)^{2}$ **e)** $\left[\left(\dfrac{1}{2}+1\right)^{-1}\right]^3$

a) $\dfrac{3^4}{3^{-3}} = 3^7$

b) $\left(\dfrac{2^{-3}}{2^{-2}}\right)^{-1} = \dfrac{2^3}{2^2} = 2$

c) $\dfrac{2^5 \cdot 2^{-7}}{2^{-4}} = \dfrac{2^{-2}}{2^{-4}} = 2^2$

d) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-3} : \left(\dfrac{3}{4}\right)^{2} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{-5} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^{5}$

e) $\left[\left(\dfrac{1}{2}+1\right)^{-1}\right]^3 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{3}$

6. **Simplifica.**

a) $\dfrac{2a}{b^2} : \dfrac{3a^2}{b}$ **b)** $\dfrac{4ab}{9} : \dfrac{b^2}{3a}$ **c)** $(6a)^{-1} : (3a^{-2})^{-2}$

d) $(a^{-1}\, b^2)^2 \cdot (ab^{-2})^{-1}$ **e)** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-4} \cdot \dfrac{a^3}{b^2}$ **f)** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-3} \cdot (a^{-1})^{-2}$

a) $\dfrac{2a}{b^2} : \dfrac{3a^2}{b} = \dfrac{2ab}{3a^2 b^2} = \dfrac{2}{3ab}$

b) $\dfrac{4ab}{9} : \dfrac{b^2}{3a} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot b}{9b^2} = \dfrac{4a^2}{3b}$

c) $(6a)^{-1} : (3a^{-2})^{-2} = (6a)^{-1} : (3^{-2} \cdot a^4) = \dfrac{1}{6a} : \dfrac{a^4}{3^2} = \dfrac{9}{6a^5} = \dfrac{3}{2a^5}$

d) $(a^{-1}\, b^2)^2 \cdot (ab^{-2})^{-1} = (a^{-2} \cdot b^4) \cdot (a^{-1} \cdot b^2) = \dfrac{b^4}{a^2} \cdot \dfrac{b^2}{a} = \dfrac{b^6}{a^3}$

e) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-4} \cdot \dfrac{a^3}{b^2} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{4} \cdot \dfrac{a^3}{b^2} = \dfrac{b^4}{a^4} \cdot \dfrac{a^3}{b^2} = \dfrac{b^2}{a}$

f) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-3} (a^{-1})^{-2} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{3} \cdot a^2 = \dfrac{b^3}{a^3} \cdot a^2 = \dfrac{b^3}{a}$

7. **Calcula siguiendo el proceso que se indica en el primer apartado.**

a) $\dfrac{6^4 \cdot 8^2}{3^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4} = \dfrac{2^4 \cdot 3^4 \cdot (2^3)^2}{3^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4} = \ldots$

NOTA: en el libro del alumno hay una errata: $8^2 = (2^3)^2$

b) $\dfrac{15^2 \cdot 4^2}{12^2 \cdot 10}$ **c)** $\dfrac{2^{-5} \cdot 4^3}{16}$

d) $\dfrac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 4^{-1}}{2^3 \cdot 9^{-1}}$ **e)** $\dfrac{6^2 \cdot 9^2}{2^3 \cdot (-3)^2 \cdot 4^2}$

a) $\dfrac{6^4 \cdot 8^2}{3^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4} = \dfrac{2^4 \cdot 3^4 \cdot (2^3)^2}{3^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4} = \dfrac{2^4 \cdot 3^4 \cdot 2^6}{3^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4} = \dfrac{2^{10} \cdot 3^4}{2^7 \cdot 3^2} = 2^3 \cdot 3^2 = 72$

b) $\dfrac{15^2 \cdot 4^2}{12^2 \cdot 10} = \dfrac{3^2 \cdot 5^2 \cdot (2^2)^2}{3^2 \cdot 4^2 \cdot 2 \cdot 5} = \dfrac{3^2 \cdot 5^2 \cdot (2^2)^2}{3^2 \cdot (2^2)^2 \cdot 2 \cdot 5} = \dfrac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^4}{3^2 \cdot 2^4 \cdot 2 \cdot 5} = \dfrac{5}{2}$

c) $\dfrac{2^{-5} \cdot 4^3}{16} = \dfrac{2^{-5} \cdot (2^2)^3}{2^4} = \dfrac{2^{-5} \cdot 2^6}{2^4} = \dfrac{2}{2^4} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

d) $\dfrac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 4^{-1}}{2^3 \cdot 9^{-1}} = \dfrac{2^5 \cdot 3^2 \cdot (2^2)^{-1}}{2^3 \cdot (3^2)^{-1}} = \dfrac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 2^{-2}}{2^3 \cdot 3^{-2}} = \dfrac{2^3 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 3^{-2}} = 3^4 = 81$

e) $\dfrac{6^2 \cdot 9^2}{2^3 \cdot (-3)^2 \cdot 4^2} = \dfrac{2^2 \cdot 3^2 \cdot (3^2)^2}{2^3 \cdot (-3)^2 \cdot (2^2)^2} = \dfrac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3^4}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 2^4} = \dfrac{2^2 \cdot 3^6}{2^7 \cdot 3^2} = \dfrac{3^4}{2^5} = \dfrac{81}{32}$

8. **La raíz de índice par de un número positivo tiene dos valores. Cuando escribimos $-\sqrt{4}$ nos referimos a la raíz negativa. Es decir, $-\sqrt{4} = -2$.**

¿Cuál es el valor de las siguientes expresiones?

a) $-\sqrt{64}$ **b)** $\sqrt[4]{81}$ **c)** $-\sqrt{1}$

d) $\sqrt[6]{1}$ **e)** $-\sqrt{9}$ **f)** $\sqrt[3]{-8}$

g) $\sqrt{\dfrac{16}{25}}$ **h)** $\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}}$ **i)** $\sqrt[3]{-1}$

a) $-\sqrt{64} = -8$ b) $\sqrt[4]{81} = 3$ c) $-\sqrt{1} = -1$

d) $\sqrt[6]{1} = 1$ e) $-\sqrt{9} = -3$ f) $\sqrt[3]{-8} = -2$

g) $\sqrt{\dfrac{16}{25}} = \dfrac{4}{5}$ h) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} = \dfrac{1}{2}$ i) $\sqrt[3]{-1} = -1$

9. **Justifica cuál debe ser el valor de a, en cada caso, para que se verifique la igualdad:**

a) $a^3 = 26$ **b)** $a^{-1} = 2$ **c)** $\sqrt{a} = \dfrac{4}{5}$ **d)** $\sqrt[4]{a} = 1$ **e)** $a^{-2} = \dfrac{1}{4}$ **f)** $a^{-5} = -1$

a) $a = \sqrt[3]{26}$ porque $\left(\sqrt[3]{26}\right)^3 = 26$

b) $a = \dfrac{1}{2}$ porque $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} = 2$

c) $a = \dfrac{16}{25}$ porque $\sqrt{\dfrac{16}{25}} = \dfrac{4}{5}$

d) $a = 1$ porque $\sqrt[4]{1} = 1$

e) $a = 2$ porque $2^{-2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$

f) $a = -1$ porque $(-1)^{-5} = \dfrac{1}{(-1)^5} = -1$

10. **Simplifica, si se puede, como en el ejemplo.**

- $6\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

a) $7\sqrt{2} - 4\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ **c)** $4\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$

d) $\sqrt{6} - 3\sqrt{2}$ **e)** $2\sqrt{5} - \dfrac{1}{3}\sqrt{5}$ **f)** $\sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

a) $7\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

b) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ no se puede simplificar.

c) $4\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = -\sqrt{3}$

d) $\sqrt{6} - 3\sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - 3\sqrt{2}$ no se puede simplificar.

e) $2\sqrt{5} - \dfrac{1}{3}\sqrt{5} = \dfrac{6}{3}\sqrt{5} - \dfrac{1}{3}\sqrt{5} = \dfrac{5}{3}\sqrt{5}$

f) $\sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

11. **Simplifica, si es posible, teniendo en cuenta que:**

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$$

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ **b)** $\sqrt{5}\cdot\sqrt{16}$ **c)** $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{5}$

d) $\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt{2}$ **e)** $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{27}$ **f)** $\sqrt{10}\cdot\sqrt[3]{6}$

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{2\cdot 8}=\sqrt{16}=4$

b) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{16}=\sqrt{5\cdot 16}=\sqrt{5\cdot 2^4}=2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$

c) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{4\cdot 5}=\sqrt[3]{2^2\cdot 5}=\sqrt[3]{20}$

d) $\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt{2}$ → No tienen el mismo índice.

e) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{27}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$

f) $\sqrt{10}\cdot\sqrt[3]{6}$ → No tienen el mismo índice.

12. **Escribe estos números con todas sus cifras:**

a) $4\cdot 10^7$ **b)** $5\cdot 10^{-4}$ **c)** $9{,}73\cdot 10^8$

d) $8{,}5\cdot 10^{-6}$ **e)** $3{,}8\cdot 10^{10}$ **f)** $1{,}5\cdot 10^{-5}$

a) $4\cdot 10^7 = 40\,000\,000$

b) $5\cdot 10^{-4} = 0{,}0005$

c) $9{,}73\cdot 10^8 = 973\,000\,000$

d) $8{,}5\cdot 10^{-6} = 0{,}0000085$

e) $3{,}8\cdot 10^{10} = 38\,000\,000\,000$

f) $1{,}5\cdot 10^{-5} = 0{,}000015$

13. **Escribe estos números en notación científica:**

a) **13 800 000** **b)** **0,000005** **c)** **4 800 000 000** **d)** **0,0000173**

a) $13\,800\,000 = 1{,}38\cdot 10^7$

b) $0{,}000005 = 5\cdot 10^{-6}$

c) $4\,800\,000\,000 = 4{,}8\cdot 10^9$

d) $0{,}0000173 = 1{,}73\cdot 10^{-5}$

14. **Expresa en notación científica.**

a) Distancia Tierra-Sol: 150 000 000 km.

b) Caudal de una catarata: 1 200 000 *l*/s.

c) Velocidad de la luz: 300 000 000 m/s.

d) Emisión de CO_2: 54 900 000 000 kg.

a) $1{,}5\cdot 10^8$ km

b) $1{,}2\cdot 10^6$ *l*/s

c) $3\cdot 10^8$ m/s

d) $5{,}49\cdot 10^{10}$ kg

15. **Calcula, expresa el resultado en notación científica y comprueba con la calculadora:**

a) $(2{,}5\cdot 10^7)\cdot(8\cdot 10^3)$

b) $(5\cdot 10^{-3}):(8\cdot 10^5)$

c) $(7{,}4\cdot 10^{13})\cdot(5\cdot 10^{-6})$

d) $(1{,}2\cdot 10^{11}):(2\cdot 10^{-3})$

a) $(2{,}5\cdot 10^7)\cdot(8\cdot 10^3)=(2{,}5\cdot 8)\cdot 10^{7+3}=20\cdot 10^{10}=2\cdot 10^{11}$

b) $(5\cdot 10^{-3}):(8\cdot 10^5)=(5:8)\cdot 10^{-3-5}=0{,}625\cdot 10^{-8}=6{,}25\cdot 10^{-9}$

c) $(7{,}4\cdot 10^{13})\cdot(5\cdot 10^{-6})=(7{,}4\cdot 5)\cdot 10^{13-6}=37\cdot 10^7=3{,}7\cdot 10^8$

d) $(1{,}2\cdot 10^{11}):(2\cdot 10^{-3})=(1{,}2:2)\cdot 10^{11-(-3)}=0{,}6\cdot 10^{14}=6\cdot 10^{13}$

Página 47

16. **Efectúa las operaciones como en el ejemplo y comprueba el resultado con la calculadora:**

- $\mathbf{2 \cdot 10^{-5} + 1{,}8 \cdot 10^{-6} = 20 \cdot 10^{-6} + 1{,}8 \cdot 10^{-6} = (20 + 1{,}8) \cdot 10^{-6} = 21{,}8 \cdot 10^{-6} = 2{,}18 \cdot 10^{-5}}$

a) $\mathbf{3{,}6 \cdot 10^{12} - 4 \cdot 10^{11}}$ **b)** $\mathbf{5 \cdot 10^{9} + 8{,}1 \cdot 10^{10}}$

c) $\mathbf{8 \cdot 10^{-8} - 5 \cdot 10^{-9}}$ **d)** $\mathbf{5{,}32 \cdot 10^{-4} + 8 \cdot 10^{-6}}$

a) $3{,}6 \cdot 10^{12} - 4 \cdot 10^{11} = 36 \cdot 10^{11} - 4 \cdot 10^{11} = 32 \cdot 10^{11} = 3{,}2 \cdot 10^{12}$

b) $5 \cdot 10^{9} + 8{,}1 \cdot 10^{10} = 5 \cdot 10^{9} + 81 \cdot 10^{9} = 86 \cdot 10^{9} = 8{,}6 \cdot 10^{10}$

c) $8 \cdot 10^{-8} - 5 \cdot 10^{-9} = 80 \cdot 10^{-9} - 5 \cdot 10^{-9} = 75 \cdot 10^{-9} = 7{,}5 \cdot 10^{-8}$

d) $5{,}32 \cdot 10^{-4} + 8 \cdot 10^{-6} = 532 \cdot 10^{-6} + 8 \cdot 10^{-6} = 540 \cdot 10^{-6} = 5{,}4 \cdot 10^{-4}$

17. **El diámetro de un virus es $5 \cdot 10^{-4}$ mm. ¿Cuántos de esos virus son necesarios para rodear la Tierra? (Radio medio de la Tierra: 6 370 km).**

Una vuelta a la Tierra: $2 \cdot \pi \cdot 6\,370 = 12\,740\pi$ km $\approx 40\,023{,}89$ km

$$40\,023{,}89 \text{ km} = 40\,023\,890\,000 \text{ mm}$$

Aproximamos $40\,023\,890\,000$ mm $\approx 4{,}0024 \cdot 10^{10}$ mm

$$(4{,}0024 \cdot 10^{10}) : (5 \cdot 10^{-4}) = (4{,}0024 : 5) \cdot 10^{10+4} = 0{,}80048 \cdot 10^{14} = 8{,}0048 \cdot 10^{13}$$

Solución: $8{,}0048 \cdot 10^{13}$ virus.

18. **El presupuesto en educación de una comunidad autónoma ha pasado de $8{,}4 \cdot 10^{6}$ € a $1{,}3 \cdot 10^{7}$ € en tres años. ¿Cuál ha sido la variación porcentual?**

$$\frac{1{,}3 \cdot 10^{7}}{8{,}4 \cdot 10^{6}} \cdot 100 = \frac{1{,}3}{8{,}4} \cdot 10 \cdot 100 = 0{,}15476 \cdot 1\,000 = 154{,}76\,\%$$

Solución: Ha aumentado un 54,76 %.

19. **En España se consumen unos 8,5 millones de toneladas de papel al año. ¿Cuál es el consumo anual per cápita? (Población de España: 46,5 millones).**

8,5 millones de toneladas = $8{,}5 \cdot 10^{6}$ toneladas = $8{,}5 \cdot 10^{9}$ kg

46,5 millones de personas = $46{,}5 \cdot 10^{6}$ personas = $4{,}65 \cdot 10^{7}$ personas

$$(8{,}5 \cdot 10^{9}) : (4{,}65 \cdot 10^{7}) = (8{,}5 : 4{,}46) \cdot 10^{9-7} = 182{,}8 \text{ kg/persona}$$

Solución: Se consumen anualmente 182,8 kg per cápita.

20. **La velocidad de la luz es $3 \cdot 10^{8}$ m/s. Un *año luz* es la distancia que recorre la luz en un año.**

a) ¿Qué distancia recorre la luz del Sol en un año?

b) ¿Cuánto tarda la luz del Sol en llegar a Plutón? (Distancia del Sol a Plutón: $5{,}914 \cdot 10^{6}$ km).

c) La estrella Alfa-Centauro está a 4,3 años luz de la Tierra. Expresa en kilómetros esa distancia.

a) 1 año = 365 días = 8 760 horas = 525 600 min = 31 536 000 s

Recorre: $31\,536\,000 \cdot (3 \cdot 10^{8}) = 9{,}4608 \cdot 10^{15}$ m $= 9{,}4608 \cdot 10^{12}$ km

Solución: Recorre $9{,}4608 \cdot 10^{12}$ km en un año.

b) $5{,}914 \cdot 10^6$ km = $5{,}914 \cdot 10^9$ m

$(5{,}914 \cdot 10^9) : (8 \cdot 10^3) = (5{,}914 : 8) \cdot 10^6 = 739\,250$ segundos

$739\,250 : 3\,600 = 205{,}35$ horas = 8,56 días

Solución: Tarda unos 8 días y medio en llegar.

c) 4,3 A.L. = $4{,}3 \cdot (9{,}4608 \cdot 10^{12}) = 4{,}068 \cdot 10^{13}$ km

Solución: 4,3 años luz son $4{,}068 \cdot 10^{13}$ km.

21. **Consulto en Internet un reloj que mide, segundo a segundo, la población mundial y observo que en el último cuarto de hora ha aumentado en 876 personas. A ese ritmo, ¿cuándo llegaremos a los ocho mil millones? (Población actual: $7{,}2 \cdot 10^9$).**

$8\,000\,000\,000 = 8 \cdot 10^9$

$8 \cdot 10^9 - 7{,}2 \cdot 10^9 = 0{,}8 \cdot 10^9 = 8 \cdot 10^8$ personas faltan.

En 15 minutos aumentan 876 personas $\rightarrow$ En una hora aunmentan $876 \cdot 4 = 3\,504$ personas.

$8 \cdot 10^8 : 3\,504 = 228\,310{,}5$ horas

$228\,310{,}5$ horas = 9 512, 94 días ≈ 26 años

Solución: Tardaremos 26 años en llegar a los ocho mil millones.

22. **El tamaño de un archivo informático se mide en bytes (B), conjunto de 8 bits.**

a) ¿Cuántos bytes tiene un archivo de 1 750 KB (kilobytes)? ¿Y otro de 20 MB (megabytes)?

b) ¿Cuántos bytes puede almacenar mi disco duro, de 100 GB (gigabytes)? ¿Y archivos de 20 megas?

c) Quiero hacer una copia de seguridad de mi disco duro. ¿Cuántos CD de 700 megas necesitaría? ¿Y si utilizo DVD de 4,7 gigas?

a) 1 750 KB = $1\,750 \cdot 10^3 = 1{,}75 \cdot 10^6$ B

20 MB = $20 \cdot 10^6 = 2 \cdot 10^7$ B

b) 100 GB = $100 \cdot 10^9 = 1 \cdot 10^{11}$ B

$(1 \cdot 10^{11}) : (2 \cdot 10^7) = (1 : 2) \cdot 10^4 = 0{,}5 \cdot 10^4 = 5\,000$ archivos

c) 700 MB = $700 \cdot 10^6 = 7 \cdot 10^8$ B

$(1 \cdot 10^{11}) : (7 : 10^8) = (1 : 7) \cdot 10^3 = 142{,}86 \approx 143$ CD

4,7 GB = $4{,}7 \cdot 10^9$ B

$(1 \cdot 10^{11}) : (4{,}7 \cdot 10^9) = (1 : 47) \cdot 10^2 = 21{,}28 \approx 22$ DVD

Necesitaré 143 CD o 22 DVD.

23. **Naciones Unidas estima que durante la década de 2001-2010 se produjo en el mundo una pérdida anual de $1{,}3 \cdot 10^7$ hectáreas de bosques.**

Por otra parte, en cierta página web, leo que la pérdida anual ha sido superior a la superficie de diez millones de campos de fútbol de 120 m × 75 m. Comprueba si es cierta esta información.

10 millones de campos 120 × 75:

$(10 \cdot 10^6) \cdot (120 \cdot 75) = 9 \cdot 10^{10}$ m^2

$9 \cdot 10^{10}$ m^2 $= 9 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-4} = 9 \cdot 10^6$ hm^2

$9 \cdot 10^6$ ha $< 1{,}3 \cdot 10^7$ ha

Solución: La información es cierta, pues $9 \cdot 10^6 < 1{,}3 \cdot 10^7$.

24. **La combustión de un litro de gasolina produce 2 370 g de CO_2. El consumo medio de un coche es de 6 litros por cada 100 km. En España hay aproximadamente 480 coches por cada 1 000 habitantes, que hacen una media de 15 000 km al año.**

a) Calcula la cantidad de CO_2 que emite un coche por kilómetro recorrido.

b) ¿Cuántas toneladas de CO_2 se emiten en España en un año? (Población de España: 46,5 millones).

c) Cierta organización ecologista propone una batería de medidas para reducir las emisiones a 120 g/km. ¿Cuántas toneladas de CO_2 se dejarían de emitir en España si fuera efectiva esa propuesta?

a) En 1 km gasta $\frac{6}{100} = 0{,}06$ litros.

$0{,}06 \cdot 2\,370 = 142{,}2$ g de CO_2

Solución: Emite 142,2 g de CO_2 por kilómetro recorrido.

b) 46,5 millones de habitantes $= 4{,}65 \cdot 10^7$ habitantes

$4{,}65 \cdot 10^7 \cdot \frac{480}{1000} = 22\,320\,000$ coches en España

$22\,320\,000 \cdot 15\,000 = 3{,}348 \cdot 10^{11}$ km al año

$3{,}348 \cdot 10^{11} \cdot 142{,}2 = 4{,}761 \cdot 10^{13}$ g de CO_2

$4{,}761 \cdot 10^{13} : 10^6 = 47\,610\,000$ toneladas de CO_2

Solución: En un año se emiten, aproximadamente, 47 610 000 toneladas de CO_2 en España.

c) $142{,}2 - 120 = 22{,}2$ g se reducen por cada km

$3{,}348 \cdot 10^{11} \cdot 22{,}2 = 7{,}43256 \cdot 10^{12}$ g de CO_2 se reducen

$7{,}43256 \cdot 10^{12} : 10^6 = 7\,432\,560$ toneladas de CO_2 se reducen

Solución: Se dejarán de emitir 7 432 560 toneladas de CO_2.

1 Razones y proporciones

Página 49

1. Escribe la razón de cada pareja de números:

a) 6 y 7 **b) 6 y 10** **c) 20 y 30** **d) 12 y 48**

a) $\frac{6}{7}$ b) $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ c) $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ d) $\frac{12}{48} = \frac{1}{4}$

2. Elige la respuesta correcta en cada caso:

a) La razón de 3 y 18 es: $\mathbf{\frac{3}{8}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}}$

b) La razón de 18 y 24 es: $\mathbf{\frac{3}{4}, \frac{6}{12}, \frac{1}{9}}$

a) $\frac{1}{6}$ porque $\frac{3}{18} = \frac{1}{6}$

b) $\frac{3}{4}$ porque $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$

3. Laura tiene 15 años y su hermano, 18. ¿Cuál es la razón de sus edades?

La razón entre las edades de Laura y su hermano es $\frac{15}{18} = \frac{5}{6}$

4. Escribe tres parejas de números que estén en razón de 2 a 3.

Por ejemplo: 2 y 3, 4 y 6, 10 y 15, 12 y 18

5. Calcula el término desconocido en cada una de las siguientes proporciones:

a) $\mathbf{\frac{5}{9} = \frac{65}{x}}$ **b)** $\mathbf{\frac{52}{8} = \frac{x}{10}}$ **c)** $\mathbf{\frac{49}{x} = \frac{28}{60}}$

a) $\frac{5}{9} = \frac{65}{x} \rightarrow x = \frac{65 \cdot 9}{5} = 117$

b) $\frac{52}{8} = \frac{x}{10} \rightarrow x = \frac{52 \cdot 10}{8} = 65$

c) $\frac{49}{x} = \frac{28}{60} \rightarrow x = \frac{60 \cdot 49}{28} = 105$

6. Mi peso y el de mi hermana pequeña están en razón de 5 a 4. Si yo peso 60 kilos, ¿cuánto pesa mi hermana pequeña?

x = peso de mi hermana

$\frac{5}{4} = \frac{60}{x} \rightarrow x = \frac{60 \cdot 4}{5} = 48$

Mi hermana pequeña pesa 48 kg.

2 Proporcionalidad simple

Página 50

1. Resuelve mentalmente.

a) En la fuente, hemos tardado 40 segundos en llenar un bidón de 20 litros. ¿Cuántos litros arroja la fuente por minuto?

b) Hemos pagado 220 € por una estancia de hotel de cuatro días. ¿Cuánto habríamos pagado si hubiéramos permanecido un día más?

c) Un caminante ha recorrido 7,5 km en hora y media. Si sigue al mismo ritmo, ¿qué distancia recorrerá en dos horas?

d) Un ciclista ha recorrido 10 km en 40 minutos. Si continúa a la misma velocidad, ¿cuánto tardará en recorrer otros 12 kilómetros?

e) Un melón de dos kilos y medio ha costado 5 €. ¿Cuánto costará otro melón de tres kilos?

f) Un aparcamiento cobra a 2,40 euros la hora. ¿Cuánto pagaré por una estancia de dos horas y quince minutos?

a) $(20 : 40) \cdot 60 = 30$ litros

b) $(220 : 4) \cdot 5 = 275$ €

c) $(7{,}5 : 1{,}5) \cdot 2 = 10$ km

d) $(40 : 10) \cdot 12 = 48$ min

e) $(5 : 2{,}5) \cdot 3 = 6$ kg

f) $2{,}4 \cdot 2{,}25 = 5{,}4$ €

2. Pablo ha pagado 3 € por 2,5 kg de peras. ¿Cuánto le costarán a Alicia 3,8 kg de esas mismas peras?

$$\left.\begin{array}{l} 2{,}5 \text{ kg} \rightarrow 3\text{ €} \\ 3{,}8 \text{ kg} \rightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow \frac{2{,}5}{3{,}8} = \frac{3}{x} \rightarrow x = \frac{3 \cdot 3{,}8}{2{,}5} = 4{,}56\text{ €}$$

3,8 kilos de esas mismas peras costarán 4,56 €

3. Una bomba que extrae agua de un pozo llena una cisterna de 7 000 litros en 1 h 10 min. ¿Cuánto tardará en llenar otra cisterna de 11 000 litros?

$$\left.\begin{array}{l} 7\,000\ l \rightarrow 70 \text{ min} \\ 11\,000\ l \rightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow \frac{7\,000}{11\,000} = \frac{70}{x} \rightarrow x = \frac{70 \cdot 11\,000}{7\,000} = 110 \text{ min}$$

110 min = 1 hora y 50 min

Tardará 1 hora y 50 minutos en llenar otra cisterna de 11 000 litros.

4. **El peaje de un tramo de autopista contabilizó el lunes el paso de 13 584 vehículos y recaudó 98 891,52 €. ¿Cuántos vehículos se estima que pasaron el martes, que tuvo una recaudación de 105 427,59 €?**

$$\left.\begin{array}{l} 13\,584 \text{ vehículos} \rightarrow 98\,891,52\text{ €} \\ x \rightarrow 105\,427,59\text{ €} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{13\,584}{x} = \frac{98\,891,52}{105\,427,59} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{13\,584 \cdot 105\,427,59}{98\,891,52} = 14\,481,81 \approx 14\,482 \text{ vehículos}$$

Se estima que el martes pasaron 14 482 vehículos.

5. **La tabla informa del precio (€) de ciertas piedras preciosas según su masa (quilates):**

QUILATES	0,25	0,5	1	1,5	2	2,5
€	375	560	1 265	2 850	6 500	14 500

Está claro que, a más masa, más precio, pero… ¿se trata de una relación de proporcionalidad? Explica tu respuesta.

Calculamos las razones entre cada par de datos y las comparamos:

$$\frac{0,25}{375} = \frac{1}{1\,500} \neq \frac{0,5}{560} = \frac{1}{1\,120} \neq \frac{1}{1\,265} \neq \frac{1,5}{2\,850} = \frac{1}{1\,900} \neq \frac{2}{6\,500} = \frac{1}{3\,250} \neq \frac{2,5}{14\,500} = \frac{1}{5\,800}$$

No se trata de una relación de proporcionalidad, pues las razones de proporcionalidad entre los pares de datos son diferentes.

Página 51

6. Resuelve mentalmente. Si no sale, utiliza lápiz y papel.

a) Alberto tiene un álbum de fotos, de 30 páginas, con 4 fotos en cada página. ¿Cuántas páginas habría ocupado colocando 6 fotos en cada una?

b) Un granjero tiene pienso para alimentar a sus 8 terneros durante 30 días. ¿Cuánto le duraría el pienso si fueran 10 terneros?

c) Una cuadrilla de 10 trabajadores recolecta un huerto de frutales en 6 horas. ¿Cuántas horas habrían tardado con un trabajador menos?

d) Para servir un pedido de pañuelos, un taller de confección prepara 36 cajas con 15 pañuelos en cada una. ¿Cuántas habría necesitado si hubiera puesto 20 pañuelos en cada caja?

e) Un grifo con un caudal de tres litros por segundo llena un depósito en 12 horas. ¿Cuál debería ser el caudal para llenar el depósito en solo 9 horas?

f) Un ciclista, a 10 km/h, tarda 30 minutos en ir desde su casa al pueblo vecino.

¿Cuánto tardaría si fuera a 15 km/h?

¿A qué velocidad debería ir para cubrir ese mismo recorrido en 40 minutos?

a) $(30 \cdot 4) : 6 = 20$ páginas

b) $(8 \cdot 30) : 10 = 24$ días

c) $(10 \cdot 6) : (10 - 1) = 60 : 9 = \frac{60}{9} = 6 + \frac{2}{3} = 6$ horas y 40 min

d) $(36 \cdot 15) : 20 = 540 : 20 = 27$ cajas

e) $(12 \cdot 3) : 9 = 4$ litros por segundo

f) $(10 \cdot 30) : 15 = 20$ minutos

$(10 \cdot 30) : 40 = 7{,}5$ km/h

7. Un granjero envasa su producción de huevos en 150 cajas de 10 unidades. ¿Cuántas cajas habría necesitado si hubieran sido de 12 unidades?

$$\left.\begin{array}{l} 10 \text{ huevos} \rightarrow 150 \text{ cajas} \\ 12 \text{ huevos} \rightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow \frac{12}{10} = \frac{150}{x} \rightarrow x = \frac{150 \cdot 10}{12} = 125 \text{ cajas}$$

Habría necesitado 125 cajas.

8. Un mayorista de fruta compra 1700 kg de manzanas a 0,40 €/kg. ¿Cuántos kilos habría podido adquirir con el mismo presupuesto pagando las manzanas a 35 céntimos el kilo?

$$\left.\begin{array}{l} 0,40 \text{ €/kg} \rightarrow 1700 \text{ kg} \\ 0,35 \text{ €/kg} \rightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow \frac{0,35}{0,40} = \frac{1700}{x} \rightarrow x = \frac{1700 \cdot 0,40}{0,35} = 1\,942{,}86 \text{ kg de manzanas}$$

Con el mismo presupuesto habría podido adquirir 1 942,86 kg

9. Un camión, a 80 km/h, realiza un trayecto en cuatro horas y media. ¿Qué velocidad debería llevar para hacer el trayecto en cuatro horas?

$$\left.\begin{array}{lcl} 80 \text{ km/h} & \to & 4,5 \text{ horas} \\ x & \to & 4 \text{ horas} \end{array}\right\} \to \frac{4}{4,5} = \frac{80}{x} \to x = \frac{80 \cdot 4,5}{4} = 90 \text{ km/h}$$

Debería llevar una velocidad de 90 km/h.

10. En un pueblo agrícola, que padece sequía, cada regante tiene asignada una cuota fija de agua. Un hortelano hace esta cuenta: si riego mi huerta completa, tengo agua para 60 días. ¿Podrá regar todo el verano si solo riega las tres cuartas partes?

$$\left.\begin{array}{lcl} 1 \text{ huerta} & \to & 160 \text{ días} \\ \frac{3}{4} \text{ de huerta} & \to & x \end{array}\right\} \to \frac{\frac{3}{4}}{1} = \frac{60}{x} \to x = \frac{60}{\frac{3}{4}} = 60 : \frac{3}{4} = (60 : 3) \cdot 4 = 80 \text{ días}$$

Si riega las tres cuartas partes del huerto tendría agua para 80 días, por tanto, no podría regar todo el verano.

11. La tabla informa de los puntos que se obtienen en un juego de ordenador según los fallos cometidos:

FALLOS	0	1	2	3	4 o más
PUNTOS	1 000	500	100	10	0

A más fallos, menos puntos, pero… ¿se trata de una relación de proporcionalidad? Explica tu respuesta.

No, no es una relación de proporcionalidad porque $0 \cdot 1\,000 \neq 1 \cdot 500 \neq 2 \cdot 100 \neq 3 \cdot 10$.

3 Proporcionalidad compuesta

Página 52

Resuelve

- **Transportar 1 kg a 1 km cuesta 0,032 €.**
- **Transportar 15 kg a 1 km cuesta** $15 \cdot 0{,}032 = 0{,}48$ **euros.**
- **Transportar 15 kg a 120 km cuesta** $(15 \cdot 0{,}032) \cdot 120 = 57{,}60$ **euros.**

Resuelve

- **Un caballo, con un kilo de pienso, come 0,8 días.**
- **Un caballo, con 450 kilos de pienso, come** $450 \cdot 0{,}8 = 360$ **días.**
- **18 caballos, con 450 kilos de pienso, comen** $(450 \cdot 0{,}8) : 18 = 20$ **días.**

Página 53

Resuelve

- **Una pala, trabajando una hora al día, tarda 180 días.**
- **Una pala, trabajando 12 horas al día, tarda** 180 : 12 = 15 **días.**
- **Tres palas, trabajando 12 horas al día, tardan** (180 : 12) : 13 = 5 **días.**

1. Resuelve mentalmente.

a) Dos operarios pintan 12 metros de pared en tres horas. ¿Cuántos metros pintan cuatro operarios en tres horas? ¿Y cuatro operarios en una hora?

b) Para alimentar a 12 vacas durante 4 días, se necesitan 4 cargas de heno. ¿Cuántas cargas se necesitan para alimentar a 6 vacas durante 8 días?

c) Tres máquinas cosechadoras, trabajando jornadas de 10 horas, recolectan un campo de cebada en 4 días. ¿Cuántas horas al día deberían trabajar para hacer el trabajo en solo dos días? ¿Y para hacerlo en dos días con cuatro máquinas?

a) Cuatro operarios pintan (4 : 2) · 12 = 24 m de pared en 3 horas. Y, en una hora pintan 24 : 3 = 8 m de pared.

b) Para alimentar a una vaca durante un día se necesita (4 : 12): 3 = $\frac{1}{9}$ de carga de heno.

Por tanto, para alimentar a 6 vacas durante 8 días se necesitan $\frac{1}{9} \cdot 6 \cdot 8 = \frac{16}{3}$ cargas.

c) Para hacer el trabajo en solo dos días debería trabajar 10 · 2 = 20 horas al día.

P. INVERSA — P. INVERSA

Máquinas	Horas	Días
3	10	4
4	x	2

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{10}{x} \rightarrow x = \frac{10 \cdot 3}{2} = 15 \text{ horas}$$

Y, para hacerlo en cuatro días con cuatro máquinas, deberían trabajar 15 horas al día.

2. 500 gallinas, en una semana, han dado una producción de 3 045 huevos. ¿Qué producción se puede esperar de 700 gallinas en 15 días?

P. DIRECTA
P. DIRECTA

Gallinas	Días	Huevos
500	7	3 045
700	15	x

$$\frac{500}{700} \cdot \frac{7}{15} = \frac{3\,045}{x} \rightarrow x = \frac{3\,045 \cdot 700 \cdot 153}{500 \cdot 7} = 9\,135 \text{ huevos}$$

Con 700 gallinas en 15 días, se producirán 9135 huevos.

3. **Un vehículo, a la velocidad de 3 m/s, da 14 vueltas a un circuito en 4 horas. ¿Cuántas vueltas dará a ese mismo circuito, en 6 horas, si va a una velocidad de 5 metros por segundo?**

P. DIRECTA — P. DIRECTA

m/s	Vueltas	Horas
3	14	4
5	x	6

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} = \frac{14}{x} \;\rightarrow\; x = \frac{14 \cdot 5 \cdot 6}{3 \cdot 4} = 35 \text{ vueltas}$$

A 5m/s durante 6 horas, dará 35 vueltas a ese mismo circuito.

4. **Para alimentar a 250 terneros durante un mes, se necesitan 240 sacos de leche en polvo de 40 kilos. ¿Cuántos sacos de 25 kilos, de ese mismo producto, se necesitarían para alimentar a 100 terneros durante el mismo tiempo?**

P. DIRECTA — P. INVERSA

Terneros	Sacos	kg/saco
250	240	40
100	x	25

$$\frac{250}{100} \cdot \frac{25}{40} = \frac{240}{x} \;\rightarrow\; x = \frac{240 \cdot 100 \cdot 40}{250 \cdot 25} = 153{,}6 \text{ sacos}$$

Para alimentar a 100 terneros con sacos de 25 kg se necesitan 154 sacos.

5. **18 recolectores invierten 18 horas de trabajo en cosechar un huerto de melocotones de 2,1 hectáreas. ¿Cuántos recolectores habrá que contratar para recolectar otro huerto de similares características, con una superficie de 3,5 hectáreas, si se desea realizar la cosecha en 20 horas?**

P. DIRECTA

P. INVERSA

Recolectores	Horas	Hectáreas
18	18	2,1
x	20	3,5

$$\frac{18}{x} = \frac{20}{18} \cdot \frac{2{,}1}{3{,}5} \;\rightarrow\; x = \frac{18 \cdot 18 \cdot 3{,}5}{20 \cdot 2{,}1} = 27 \text{ recolectores}$$

Para recolectar 3,5 hectáreas en 20 horas habrá que contratar a 27 recolectores.

6. Tres bocas de riego, con un caudal de 15 litros/segundo, llenan el depósito de abastecimiento de agua de una población en 45 minutos. ¿Cuánto tiempo tardaría en llenarse el depósito si los grifos tuvieran un caudal de 1,8 litros/segundo y se abrieran solo dos grifos?

P. INVERSA

P. INVERSA

Bocas de riego	Caudal (*l*/s)	Tiempo (min)
3	15	45
2	1,8	x

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1,8}{15}=\frac{45}{x} \rightarrow x=\frac{45\cdot 15\cdot 3}{2\cdot 1,8}=562,5 \text{ min} = 9 \text{ horas y } 22,5 \text{ minutos}$$

El depósito tardaría en llenarse 9 horas y 22,5 minutos.

7. Un granjero necesita 50 pacas de alfalfa para alimentar a 85 vacas durante 30 días.

a) ¿Cuántas pacas necesita para alimentar a 20 vacas durante 45 días?

b) ¿Cuántos días podrá alimentar a 25 vacas con 35 pacas?

a)

P. DIRECTA

P. DIRECTA

Pacas de alfalfa	Vacas	Días
50	85	30
x	20	45

$$\frac{50}{x}=\frac{85}{20}\cdot\frac{30}{45} \rightarrow x=\frac{50\cdot 20\cdot 45}{85\cdot 30}=17,65 \text{ pacas}$$

Necesitará 18 pacas de alfalfa para alimentar a 20 vacas durante 45 días.

b)

P. DIRECTA

P. INVERSA

Pacas de alfalfa	Vacas	Días
50	85	30
35	25	x

$$\frac{50}{35}\cdot\frac{25}{85}=\frac{30}{x} \rightarrow x=\frac{30\cdot 35\cdot 85}{50\cdot 25}=71,4 \text{ días}$$

Podrá alimentar a 25 vacas con 35 pacas durante 71,4 días.

8. Una población de 50 000 habitantes consume 150 000 m^3 de agua en cuatro meses.

a) ¿Cuántos metros cúbicos se prevé que consumirá en tres meses otra población, de características similares, con 40 000 habitantes?

b) ¿Para cuántos meses tiene asegurado el abastecimiento de agua una población de 40 000 habitantes que tiene unas reservas de 90 000 m^3?

a)

P. DIRECTA — P. DIRECTA

Habitantes	Agua (m^3)	Meses
50 000	150 000	4
40 000	x	3

$$\frac{150\,000}{x} = \frac{50\,000}{40\,000} \cdot \frac{4}{3} \rightarrow x = \frac{150\,000 \cdot 40\,000 \cdot 3}{50\,000 \cdot 4} = 90\,000 \text{ m}^3 \text{ de agua}$$

Se prevé que se consumirán 90 000 m^3 de agua.

b)

P. INVERSA

P. DIRECTA

Habitantes	Agua (m^3)	Meses
50 000	150 000	4
40 000	90 000	x

$$\frac{40\,000}{50\,000} \cdot \frac{150\,000}{90\,000} = \frac{4}{x} \rightarrow x = \frac{4 \cdot 50\,000 \cdot 90\,000}{40\,000 \cdot 150\,000} = 3 \text{ meses}$$

Durante 3 meses tendrán el abastecimiento asegurado.

4 Porcentajes

Página 54

Resuelve mentalmente

Con el 16 %

De 100 tomo → **16**

De 200 tomo → 32

De 300 tomo → 48

De 50 tomo → 8

De 25 tomo → 4

De 350 tomo → 56

Resuelve con una regla de tres

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{De 100 … hay reservadas … 88}\\ \textbf{De } \boldsymbol{x} \textbf{ … hay reservadas … 418}\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{100 \cdot 418}{88} = 475$$

Página 55

Resuelve con una regla de tres

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{De 475 ... hay reservadas ... 418}\\ \textbf{De 100 ... hay reservadas ...}\ \boldsymbol{x}\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{100 \cdot 418}{475} = 88$$

1. Escribe el número decimal asociado a cada porcentaje:

a) 29 %	**b) 83 %**	**c) 7 %**
d) 2 %	**e) 3,5 %**	**f) 130 %**
g) 165 %	**h) 200 %**	**i) 350 %**

a) 29 % = 0,29	b) 83 % = 0,83	c) 7 % = 0,07
d) 2 % = 0,02	e) 3,5 % = 0,035	f) 130 % = 1,3
g) 165 % = 1,65	h) 200 % = 2	i) 350 % = 3,5

2. ¿Qué porcentaje asocias a cada uno de estos números decimales?:

a) 0,25	**b) 0,44**	**c) 0,05**
d) 0,064	**e) 1,7**	**f) 1,80**
g) 1,06	**h) 2,5**	**i) 3,01**

a) 0,25 = 25 %	b) 0,44 = 44 %	c) 0,05 = 5 %
d) 0,064 = 6,4 %	e) 1,7 = 170 %	f) 1,80 = 180 %
g) 1,06 = 106 %	h) 2,5 = 250 %	i) 3,01 = 301 %

3. Calcula mentalmente.

a) 50 % de 428	**b) 75 % de 444**	**c) 10 % de 63**
d) 40 % de 250	**e) 150 % de 150**	**f) 150 % de 64**

a) 50 % de 428 = 214	b) 75 % de 444 = 333	c) 10 % de 63 = 6,3
d) 40 % de 250 = 100	e) 150 % de 150 = 225	f) 150 % de 64 = 96

4. Calcula.

a) 22 % de 1450	**b) 58 % de 120**	**c) 2,5 % de 140**
d) 11 % de 416	**e) 14 % de 2 380**	**f) 120 % de 685**

a) 22 % de 1450 = $\frac{22 \cdot 1450}{100} = 319$ b) 58 % de 120 = $\frac{58 \cdot 120}{100} = 69{,}6$

c) 2,5 % de 140 = $\frac{2{,}5 \cdot 140}{100} = 3{,}5$ d) 11 % de 416 = $\frac{11 \cdot 416}{100} = 45{,}76$

e) 14 % de 2 380 = $\frac{14 \cdot 2\,380}{100} = 333{,}2$ f) 120 % de 685 = $\frac{120 \cdot 685}{100} = 822$

5. Calcula aproximando a las décimas.

a) 27 % de 41 **b) 42 % de 216** **c) 79 % de 348**

d) 14,8 % de 146 **e) 5,3 % de 324** **f) 112 % de 56**

a) 27 % de 41 = $\frac{27 \cdot 41}{100}$ = 11,07 ≈ 11,1

b) 42 % de 216 = $\frac{42 \cdot 216}{100}$ = 90,72 ≈ 90,7

c) 79 % de 348 = $\frac{79 \cdot 348}{100}$ = 274,92 ≈ 274,9

d) 14,8 % de 146 = $\frac{14{,}8 \cdot 146}{100}$ = 21,608 ≈ 21,6

e) 5,3 % de 324 = $\frac{5{,}3 \cdot 324}{100}$ = 17,172 ≈ 17,2

f) 112 % de 56 = $\frac{112 \cdot 56}{100}$ = 62,72 ≈ 62,7

6. En una población que tiene 30 000 habitantes, el 27 % de ellos puede acceder a Internet desde su propio domicilio. ¿Cuántos habitantes disfrutan de dicho servicio?

$$27\,\%\text{ de }30\,000\text{ habitantes} = \frac{27 \cdot 30\,000}{100} = 8\,100\text{ habitantes}$$

8 100 habitantes disfrutan de internet en su domicilio.

7. Una jugadora de baloncesto ha lanzado 18 veces a canasta y ha encestado 13. ¿Cuál es su porcentaje de aciertos?

$$\left.\begin{array}{r}\text{Ha encestado} \ldots\ 13\text{ de }18\\ x\ \text{ de }100\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{13 \cdot 100}{18} = 72{,}2\,\%$$

La jugadora de baloncesto acierta un 72,2 % de las veces.

8. Un comerciante del mercadillo abre su puesto, por la mañana, con 350 pares de calcetines y 240 pañuelos. Al cerrar, al mediodía, le quedan 210 pares de calcetines y 174 pañuelos. ¿Qué tanto por ciento ha vendido de cada mercancía?

Al cerrar, ha vendido 350 – 210 = 140 pares de calcetines y 240 – 174 = 66 pañuelos.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Ha vendido} \ldots\ 140\text{ de }350\\ x\ \text{ de }100\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{140 \cdot 100}{350} = 40\,\%$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Ha vendido} \ldots\ 66\text{ de }240\\ x\ \text{ de }100\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{66 \cdot 100}{240} = 27{,}5\,\%$$

El comerciante ha vendido 40 % de calcetines y 27,5 % de pañuelos.

9. Según las estadísticas de cierta región, el 44 % de los accidentes de tráfico tienen relación con el consumo de alcohol u otras drogas. ¿En cuántos de los 987 accidentes registrados el trimestre pasado se encontró presencia de alcohol u otro tipo de drogas?

$$44\,\%\text{ de }987 = \frac{44 \cdot 987}{100} = 434{,}28\text{ accidentes}$$

Se encontró presencia de alcohol u otro tipo de drogas en 434 accidentes.

10. Por el control del peaje de una autopista, han pasado hoy 322 camiones, lo que supone un 18,4 % del total de vehículos contabilizados. ¿Cuántos vehículos han pasado hoy ese control?

Vehículos que han pasado hoy el control $\rightarrow x$

$$18{,}4\,\% \text{ de } x = 322 \rightarrow x = \frac{322 \cdot 100}{18{,}4} = 1\,750$$

Hoy han pasado ese control 1 750 vehículos.

11. Un portero de balonmano ha recibido en un partido 21 goles, con un porcentaje de paradas del 58 %. ¿Cuántos tiros le han lanzado?

Tiros que le han lanzado al portero $\rightarrow x$

$$42\,\% \text{ de } x = 21 \rightarrow x = \frac{21 \cdot 100}{42} = 50$$

Durante el partido han lanzado 50 tiros al portero.

12. Un *ferry* presta su servicio de enlace entre dos ciudades costeras. De los 8 340 viajeros transportados este mes, 2 650 eran turistas foráneos, y el resto, residentes en la zona. ¿Qué porcentaje de los usuarios del *ferry* reside en la zona?

Los usuarios del ferry que residen en la zona son 8 340 – 2 650 = 5 690 personas.

$$\left.\begin{array}{l} \text{De } 8\,340 \ldots \text{ son residentes} \ldots 5\,690 \\ \text{De } 100 \ldots \text{ son residentes} \ldots x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{5\,690 \cdot 100}{8\,340} = 68{,}23\,\%$$

El 68,23 % de los usuarios del ferry reside en la zona.

13. El 67 % del aceite que vende un supermercado es de oliva; el 21 %, de girasol, y el resto, de soja. Si se han vendido 132 litros de soja, ¿qué cantidad se ha vendido de las otras dos clases?

El porcentaje de aceite de soja que se ha vendido es un 100 % – (67 % + 21 %) = 12 %.

Litros totales de aceite $\rightarrow x$

$$12\,\% \text{ de } x = 132 \rightarrow x = \frac{132 \cdot 100}{12} = 1\,100$$

En total hay 1 100 litros de aceite entre todas las clases.

$$21\,\% \text{ de } 1\,100 = \frac{21 \cdot 1\,100}{100} = 231$$

$$67\,\% \text{ de } 1\,100 = \frac{67 \cdot 1\,100}{100} = 737$$

Se han vendido 737 litros de aceite de oliva y 231 litros de aceite de girasol.

14. De las 635 ovejas que tiene un rebaño, 286 de ellas dieron a luz un corderito en la pasada primavera. ¿Qué tanto por ciento de las ovejas del rebaño tuvieron un corderito la última primavera?

$$\left.\begin{array}{l} \text{De } 635 \ldots \text{ dieron a luz} \ldots 286 \\ \text{De } 100 \ldots \text{ dieron a luz} \ldots x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{286 \cdot 100}{635} = 45{,}04\,\%$$

Un 45 % de las ovejas dieron a luz a un corderito la última primavera.

5 Aumentos y disminuciones porcentuales

Página 56

Resuelve mentalmente

¿Qué obtengo al…

a) … aumentar 80 en un 10 %?

b) … aumentar 300 en un 15 %?

c) … aumentar 50 en un 60 %?

d) … aumentar 500 en un 20 %?

a) $80 \cdot 1,1 = 88$

b) $300 \cdot 1,15 = 345$

c) $50 \cdot 1,6 = 80$

d) $500 \cdot 1,2 = 600$

Resuelve mentalmente

¿Qué obtengo al…

a) … disminuir 60 en un 10 %?

b) … disminuir 200 en un 15 %?

c) … disminuir 10 en un 60 %?

d) … disminuir 500 en un 20 %?

a) $60 \cdot 0,9 = 54$

b) $200 \cdot 0,85 = 170$

c) $10 \cdot 0,4 = 4$

d) $500 \cdot 0,8 = 400$

Página 57

Resuelve mentalmente

Me gasto 5 € en una entrada para el cine, lo que supone el 25 % de mi paga. ¿Cuál es mi paga completa?

$(5 : 25) \cdot 100 = 20$

Mi paga completa son 20 €.

Resuelve mentalmente

Pago 9 € por una camiseta que costaba 12 €. ¿Qué tanto por ciento me han rebajado?

$(9 : 12) = 0{,}75$

Me han rebajado un 25 %.

1. **Un jugador juvenil de baloncesto mide 1,87 m y aún espera crecer un 10 % más. ¿Cuánto espera medir cuando esté en el campeonato sénior?**

$$\left.\begin{array}{l} \text{Cantidad inicial } \to 1{,}87 \text{ m} \\ \text{Índice de variación } \to 1{,}1 \\ \text{Cantidad final } \to x \end{array}\right\} x = 1{,}87 \cdot 1{,}1 = 2{,}057$$

Cuando esté en el campeonato senior, medirá 2,057 m.

2. **Un bosque, que tenía el año pasado medio millón de árboles aproximadamente, ha sufrido un incendio en el último verano que ha arrasado el 30 % de su superficie. ¿Cuántos árboles quedan en el bosque, aproximadamente?**

$$\left.\begin{array}{l} \text{Cantidad inicial } \to 500\,000 \text{ árboles} \\ \text{Índice de variación } \to 0{,}7 \\ \text{Cantidad final } \to x \end{array}\right\} x = 500\,000 \cdot 0{,}7 = 350\,000$$

En el bosque quedan aproximadamente 350 000 árboles.

3. **A un asalariado, que ganaba 1 400 euros al mes, le suben el suelo un 5 %. ¿Cuánto ganará a partir de ahora?**

$$\left.\begin{array}{l} \text{Cantidad inicial } \to 1\,400 \text{ €} \\ \text{Índice de variación } \to 1{,}05 \\ \text{Cantidad final } \to x \end{array}\right\} x = 1\,400 \cdot 1{,}05 = 1\,470$$

A partir de ahora ganará 1 470 euros.

4. **Un centro escolar, que tenía el curso pasado 780 alumnas y alumnos, ha registrado este año un descenso de su matrícula de un 10 %. ¿Cuántos alumnos y alumnas se han matriculado este año?**

$$\left.\begin{array}{l} \text{Cantidad inicial } \to 780 \text{ alumnos} \\ \text{Índice de variación } \to 0{,}9 \\ \text{Cantidad final } \to x \end{array}\right\} x = 780 \cdot 0{,}9 = 702$$

Este año se han matriculado 702 alumnos y alumnas.

5. Una empresa facturó el año pasado 2,8 millones de euros, y este año, 3,5 millones. ¿En qué tanto por ciento ha aumentado la facturación respecto al año pasado?

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cantidad inicial } \to \ 2,8 \text{ millones}\\ \text{Índice de variación } \to \ x\\ \text{Cantidad final } \to \ 3,5 \text{ millones}\end{array}\right\} \ 2\,800\,000 \cdot x = 3\,500\,000 \ \to \ x = 1{,}25$$

La facturación ha aumentado un 125 % – 100 % = 25 % respecto al año pasado.

6. Un estudio sobre la población de buitres leonados en la comarca informa de que en la actualidad hay 180 parejas, lo que supone un descenso de un 35 % respecto a la población de hace veinticinco años. ¿Cuál era la población hace veinticinco años?

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cantidad inicial } \to \ x\\ \text{Índice de variación } \to \ 0,65\\ \text{Cantidad final } \to \ 360 \text{ ejemplares}\end{array}\right\} \ x \cdot 0{,}65 = 360 \ \to \ x = 553{,}8$$

Hace veinticinco años había 554 buitres leonados.

7. Una persona gruesa, que pesaba 110 kg, se pone a régimen por orden del médico, y en dos meses baja a 95 kg. ¿Qué tanto por ciento del peso ha perdido?

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cantidad inicial } \to \ 110 \text{ kg}\\ \text{Índice de variación } \to \ x\\ \text{Cantidad final } \to \ 95 \text{ kg}\end{array}\right\} \ 110 \cdot x = 95 \ \to \ x = 0{,}86 \ \to \ 86\,\%$$

Ha perdido un 100 % – 86 % = 14 % de su peso.

8. Marta comprueba que, tras una salida de vacaciones de varios días, el saldo de su cuenta ha descendido un 15 %, quedando en 3 179 €. ¿Cuál era el saldo antes de los días de descanso?

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cantidad inicial } \to \ x\\ \text{Índice de variación } \to \ 0,85\\ \text{Cantidad final } \to \ 3\,179 \text{ €}\end{array}\right\} \ x \cdot 0{,}85 = 3\,179 \ \to \ x = 3\,740$$

Antes de los días de descanso el saldo de Marta era de 3 740 €.

9. Un edificio, presupuestado inicialmente en un millón y medio de euros, costó finalmente dos millones cien mil euros. ¿En qué tanto por ciento el coste real superó al presupuestado?

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cantidad inicial } \to \ 1,5 \text{ millones}\\ \text{Índice de variación } \to \ x\\ \text{Cantidad final } \to \ 2,1 \text{ millones}\end{array}\right\} \ 1\,500\,000 \cdot x = 2\,100\,000 \ \to \ x = 1{,}4$$

El coste real superó en un 140 % – 100 % = 40 % al presupuestado.

10. El litro de gasolina ha subido un 2,5 % al inicio del periodo estival, llegando a 1,54 € el litro. ¿Cuál era el precio de la gasolina antes de la subida?

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cantidad inicial } \to \ x\\ \text{Índice de variación } \to \ 1,025\\ \text{Cantidad final } \to \ 1,54 \text{ €}/l\end{array}\right\} \ x \cdot 1{,}025 = 1{,}54 \ \to \ x = 1{,}50$$

Antes de la subida, la gasolina costaba 1,50 €/*l*.

Ejercicios y problemas

Página 58

Practica

Proporciones y porcentajes

1. **Calcula el término desconocido en cada proporción:**

a) $\frac{18}{40} = \frac{x}{24}$ **b)** $\frac{15}{21} = \frac{35}{x}$ **c)** $\frac{x}{56} = \frac{27}{63}$ **d)** $\frac{72}{x} = \frac{30}{45}$

a) $\frac{18}{40} = \frac{x}{24} \to x = \frac{18 \cdot 24}{40} = \frac{432}{40} = \frac{54}{5}$

b) $\frac{15}{21} = \frac{35}{x} \to x = \frac{21 \cdot 35}{15} = \frac{735}{15} = 49$

c) $\frac{x}{56} = \frac{27}{63} \to x = \frac{56 \cdot 27}{63} = \frac{1512}{63} = 24$

d) $\frac{72}{x} = \frac{30}{45} \to x = \frac{72 \cdot 45}{30} = \frac{3240}{30} = 108$

2. **Escribe el número decimal asociado a cada porcentaje:**

a) 87 % **b) 16 %** **c) 1 %** **d) 9 %**

e) 2,6 % **f) 14,4 %** **g) 138 %** **h) 215 %**

a) 87 % = 0,87 b) 16 % = 0,16 c) 1 % = 0,01 d) 9 % = 0,09

e) 2,6 % = 0,026 f) 14,4 % = 0,144 g) 138 % = 1,38 h) 215 % = 2,15

3. **Calcula.**

a) 25 % de 3 574 **b) 7 % de 930** **c) 5,8 % de 600**

d) 17 % de 290 **e) 10 % de 14,90** **f) 150 % de 2 300**

a) 25 % de 3 574 = $\frac{25 \cdot 3574}{100} = 893,5$

b) 7 % de 930 = $\frac{7 \cdot 930}{100} = 65,1$

c) 5,8 % de 600 = $\frac{5,8 \cdot 600}{100} = 34,8$

d) 17 % de 290 = $\frac{17 \cdot 290}{100} = 49,3$

e) 10 % de 14,90 = $\frac{10 \cdot 14,90}{100} = 1,49$

f) 150 % de 2 300 = $\frac{150 \cdot 2300}{100} = 3450$

Cálculo mental

4. **Calcula mentalmente el 30 % de los números de cada serie:**

a) 10 - 5 - 40 - 45 **b) 140 - 145 - 150** **d) 50 - 400 - 450** **e) 500 - 1 000 - 1 500**

a) 3 - 1,5 - 12 - 13,5 b) 42 - 43,5 - 45 c) 15 - 120 - 135 d) 150 - 300 - 450

5. **Resuelve mentalmente.**

a) Aumenta 60 en un 25 %. **b) Aumenta 250 en un 40 %.**

c) Aumenta 350 en un 50 %. **d) Disminuye 380 en un 10 %.**

e) Disminuye 300 en un 5 %. **f) Disminuye 400 en un 90 %.**

a) 1,25 · 60 = 75 b) 1,4 · 250 = 350 c) 1,5 · 350 =525

d) 0,9 · 380 = 342 e) 0,95 · 300 = 285 f) 0,1 · 400 = 40

6. **¿Verdadero o falso?**

a) Multiplicar por 1,15 es aumentar un 15 %.

b) Multiplicar por 1,9 es aumentar un 9 %.

c) Multiplicar por 0,75 es rebajar un 25 %.

d) Calcular el 10 % es lo mismo que rebajar un 10 %.

e) Para disminuir un 1 %, se multiplica por 0,99.

f) Dividir por 1,2 es rebajar un 20 %.

a) Verdadero.

b) Falso. Para un aumento del 9 % habría que multiplicar por 1,09.

c) Verdadero.

d) Falso. Para calcular el 10 % multiplicamos por 0,1 mientras que para rebajar un 10 % tendríamos que multiplicar por 0,9.

e) Verdadero.

f) Falso. Multiplicar por 0,8 es rebajar un 20 %. Si dividimos por 1,2 estamos averiguando la cantidad inicial de un aumento del 20 %.

Piensa y resuelve

7. **En una población de 350 000 habitantes se venden 82 500 periódicos cada día. Estima el número de periódicos que se venderán en otra población de características similares con 275 000 habitantes.**

Es una relación de proporcionalidad directa.

$$\left.\begin{array}{l} 350\,000 \text{ habitantes} \rightarrow 82500 \text{ periódicos} \\ 275\,000 \text{ habitantes} \rightarrow x \end{array}\right\}$$

$$\frac{350\,000}{275\,000} = \frac{82\,500}{x} \rightarrow x = \frac{275\,000 \cdot 85\,000}{350\,000} = 64\,821{,}43 \approx 64\,821 \text{ periódicos}$$

En una población de características similares con 270 000 habitantes se venderán unos 64 821 periódicos.

8. **Veinticinco vacas comen una carga de heno en 12 días. ¿Durante cuánto tiempo abastecerá de heno esa misma carga a 30 vacas?**

Es una relación de proporcionalidad inversa.

$$\left.\begin{array}{l} 25 \text{ vacas} \rightarrow 12 \text{ días} \\ 30 \text{ vacas} \rightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow \frac{30}{25} = \frac{12}{x} \rightarrow x = \frac{12 \cdot 25}{30} = 10$$

Esa misma carga de heno podrá abastecerlas durante 10 días.

9. **Un mayorista de frutas compra una partida de k kilos de manzanas a 0,40 €/kg. ¿Qué cantidad habría adquirido con el mismo presupuesto si las hubiera pagado a 0,30 €/kg?**

Es una relación de proporcionalidad inversa.

$$\left.\begin{array}{l} k \text{ kilos} \rightarrow 0{,}40 \text{ €} \\ x \rightarrow 0{,}30 \text{ €} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{k}{x} = \frac{0,30}{0,40} \rightarrow x = \frac{0,40 \cdot k}{0,30} = \frac{4}{3}k$$

El mayorista habría adquirido $\frac{4}{3}k$ si hubiera pagado las manzanas a 0,30 €/kg, es decir, un tercio más de manzanas.

10. **Un tren de mercancías, a una media de 70 km/h, cubre un recorrido en dos horas y veinticuatro minutos. ¿Cuál ha sido la velocidad media de otro tren que ha hecho el mismo recorrido en dos horas y cuarenta y ocho minutos?**

$$2 \text{ horas y } 24 \text{ min} = 2 + \frac{24}{60} = 2{,}4 \text{ horas}$$

$$2 \text{ horas y } 48 \text{ min} = 2 + \frac{48}{60} = 2{,}8 \text{ horas}$$

Es una relación de proporcionalidad inversa.

$$\left.\begin{array}{lcl} 70 \text{ km/h} & \rightarrow & 2{,}4 \text{ h} \\ x & \rightarrow & 2{,}8 \text{ h} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{70}{x} = \frac{2{,}8}{2{,}4} \rightarrow x = \frac{2{,}4 \cdot 70}{2{,}8} = 60 \text{ km/h}$$

La velocidad media habrá sido de 60 km/h.

11. **Un taller metalúrgico produce 4 800 tapacubos al día trabajando con cinco máquinas en dos turnos de 8 horas.**

a) ¿Cuántos tapacubos producirá cada día, si se añade una máquina más y se aumenta a 10 el número de horas de cada turno?

b) ¿Cuántas horas debería durar cada turno para cubrir un cupo de 7 320 piezas al día con seis máquinas en funcionamiento?

a)

P. DIRECTA

P. DIRECTA

Tapacubos	Máquinas	Horas
4 800	5	8
x	6	10

$$\frac{4\,800}{x} = \frac{5}{6} \cdot \frac{8}{10} \rightarrow x = \frac{4\,800 \cdot 6 \cdot 10}{5 \cdot 8} = 7\,200 \text{ tapacubos}$$

Cada día producirá 7 200 tapacubos.

b)

P. DIRECTA

P. INVERSA

Tapacubos	Máquinas	Horas
4 800	5	8
7 320	6	x

$$\frac{4\,800}{7\,320} \cdot \frac{6}{5} = \frac{8}{x} \rightarrow x = \frac{8 \cdot 7\,320 \cdot 5}{4\,800 \cdot 6} = \frac{61}{6} = 10 \text{ horas y } 10 \text{ min}$$

Cada turno debería durar 10 horas y 10 min.

12. **En un comedor de empresa, con 113 comensales, se han consumido 840 yogures en 20 días laborables.**

¿Será suficiente una reserva de 200 yogures para los próximos cinco días en los que se prevé una afluencia media de 120 comensales/día?

Comensales	Yogures	Días
113	840	20
120	x	5

P. DIRECTA (Comensales–Yogures); P. DIRECTA (Días–Yogures)

$$\frac{113}{120} \cdot \frac{20}{5} = \frac{840}{x} \rightarrow x = \frac{840 \cdot 5 \cdot 120}{113 \cdot 20} = 223 \text{ yogures}$$

Para los próximos cinco días el comedor de empresa necesitará 223 yogures, por tanto, 200 yogures no serán suficientes.

13. **Una fábrica de automóviles con cuatro cadenas de montaje, funcionando en jornadas de 18 horas, tiene previsto cubrir un cupo de producción en quince días.**

¿Cuánto tardará en cubrir ese mismo cupo si se estropea una de las cadenas de montaje y las otras tres aumentan su jornada a 20 horas?

Cadenas	Días	Horas
4	15	18
3	x	20

P. INVERSA (Cadenas–Días); P. INVERSA (Horas–Días)

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{20}{18} = \frac{15}{x} \rightarrow x = \frac{15 \cdot 4 \cdot 18}{3 \cdot 20} = 18 \text{ días}$$

Tardarán 18 días en cubrir ese mismo cupo.

14. **Si gasto cuatro hojas de mi cuaderno cada día, tengo para 12 días, pero si gasto tres, me durará 17 días. ¿Cuánto me duraría si solo gastara dos hojas diarias?**

4 hojas cada día $\rightarrow$ 12 días

3 hojas cada día $\rightarrow$ 17 días

El cuaderno como mínimo tiene $4 \cdot 12 = 48$ hojas.

Si sobran algunas hojas para el día 13, podría ser que hubiera 49, 50 o 51 hojas. Puesto que, si hubiera $52 = 4 \cdot 13$, el cuaderno nos serviría para el día 13 también.

Pero si gastamos 3 hojas nos dicen que dura 17 días, por lo que habrá al menos de 52 hojas.

Es decir, el cuaderno tiene $3 \cdot 17 = 51$ hojas.

$$51 : 2 = 25{,}5$$

Por tanto, si gasto 2 hojas cada día, el cuaderno me duraría $51 : 2 = 25{,}5$ días.

Página 59

15. **Una empresa de transporte cobra, por cada envío, un tanto fijo más una cantidad por kilogramo. Si por un paquete de 7 kg cobra 23,40 €, y por uno de 10 kg cobra 30 €, ¿cuánto cuesta un envío de 5 kg?**

Si restamos ambos costes, obtenemos lo que cuesta transportar 3 kilos sin el coste fijo:

$$30 - 23{,}40 = 6{,}6\ €$$

Cada kilo cuesta $\rightarrow$ $6{,}6 : 3 = 2{,}2\ €$

Coste fijo $\rightarrow$ $30 - 10 \cdot 2{,}2 = 30 - 22 = 8\ €$

Por tanto, transportar un envío de 5 kg tendrá un coste de costará $8 + 2{,}2 \cdot 5 = 8 + 11 = 19\ €$.

16. **En un partido de baloncesto, el equipo de casa ha lanzado 52 tiros y ha encestado 39. El equipo visitante ha lanzado 45 veces y ha conseguido 35 canastas.**

¿Cuál de los dos ha tenido mejor porcentaje de aciertos?

El equipo de casa ha encestado 39 de 52 tiros $\rightarrow$ $\frac{39}{52} \cdot 100 = 75\,\%$

El equipo visitante ha encestado 35 de 45 tiros $\rightarrow$ $\frac{35}{45} \cdot 100 = 77{,}78\,\%$

El equipo de casa ha acertado un 75 % de las veces, y el equipo visitante ha acertado un 77,78 % de las veces, por tanto, han tenido mejor porcentaje de aciertos el equipo visitante.

17. **La familia García ha pagado ya 39 de las mensualidades acordadas con la financiera para la compra de un coche. Así han abonado ya el 65 % del total. ¿Cuántas mensualidades quedan aún pendientes?**

Mensualidades totales $\rightarrow$ x

$$65\,\% \text{ de } x = 39 \rightarrow x = \frac{39 \cdot 100}{65} = 60$$

Quedan, aún pendientes, 60 – 39 = 21 mensualidades.

18. **Calcula el importe final de estas facturas, tras cargarles el 21 % de IVA:**

800 € **32 €** **57,40 €** **361,28 €**

Un aumento del 21 % $\rightarrow$ Índice de variación 1,21

$800 \cdot 1{,}21 = 968\ €$ $32 \cdot 1{,}21 = 38{,}72\ €$

$57{,}40 \cdot 1{,}21 = 69{,}45\ €$ $361{,}28 \cdot 1{,}21 = 437{,}15\ €$

19. **Calcula el nuevo precio de estos artículos al aplicarles una rebaja del 30 %:**

$28 \cdot 0{,}7 = 19{,}6\ €$ $120 \cdot 0{,}7 = 84\ €$ $35 \cdot 0{,}7 = 24{,}5\ €$ $50{,}80 \cdot 0{,}7 = 35{,}56\ €$

20. **La entrada para el cine cuesta 7,50 €, y para los jubilados, un 40 % menos. ¿Cuánto cuesta una entrada de jubilado?**

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cantidad inicial} \;\to\; 750\text{ €}\\ \text{Índice de variación} \;\to\; 0{,}6\\ \text{Cantidad final} \;\to\; x\end{array}\right\}\; 7{,}50 \cdot 0{,}6 = x \;\to\; x = 4{,}5$$

Una entrada de jubilado cuesta 4,5 €.

21. **El zoo ha recibido en julio 18 300 visitantes, y en agosto, un 12 % más que en julio. ¿Cuántas personas han visitado el zoo en agosto?**

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cantidad inicial} \;\to\; 18\,300\text{ visitantes}\\ \text{Índice de variación} \;\to\; 1{,}12\\ \text{Cantidad final} \;\to\; x\end{array}\right\}\; 18\,000 \cdot 1{,}12 = x \;\to\; x = 20\,496$$

En agosto han visitado el zoo 20 496 personas.

22. **Las ventas de una gasolinera suben un 35 % durante el fin de semana. Si en un día normal vende, por término medio, 14 800 litros, ¿cuáles son, redondeando a los miles de litros, las ventas en un día del fin de semana?**

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cantidad inicial} \;\to\; 14\,800\\ \text{Índice de variación} \;\to\; 1{,}35\\ \text{Cantidad final} \;\to\; x\end{array}\right\}\; 14\,800 \cdot 1{,}35 = x \;\to\; x = 19\,980$$

En un día del fin de semana se venden unos 20 000 litros.

23. **Un vehículo realiza un viaje de ida y vuelta. En la ida hace una media de 85 km/h, y en la vuelta, con más tráfico, una media de 68 km/h. ¿En qué tanto por ciento la velocidad de vuelta ha sido inferior a la velocidad de ida?**

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cantidad inicial} \;\to\; 85\text{ km/h}\\ \text{Índice de variación} \;\to\; x\\ \text{Cantidad final} \;\to\; 68\text{ km/h}\end{array}\right\}\; 85 \cdot x = 68 \;\to\; x = 0{,}8$$

La velocidad de vuelta ha sido un 100 % – 80 % = 20 % inferior que la velocidad de ida.

24. **Un hospital registra, por término medio, un descenso del 60 % en la atención de urgencias cuando hay un partido de fútbol de la selección. Hoy ha habido partido y el servicio de urgencias ha registrado 148 actuaciones. Con ese dato, estima el número de actuaciones en un día normal.**

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cantidad inicial} \;\to\; x\\ \text{Índice de variación} \;\to\; 0{,}4\\ \text{Cantidad final} \;\to\; 148\text{ actuaciones}\end{array}\right\}\; x \cdot 0{,}4 = 148 \;\to\; x = 370$$

El número de actuaciones en un día normal es 370.

25. **La tabla informa del caudal de un río, en m^3/s, a lo largo de un semestre:**

E	F	M	A	My	J
5,2	5,9	6,5	8,3	9,1	6,3

Calcula la variación porcentual:

a) De enero a marzo.

b) Entre marzo y mayo.

c) De mayo a junio.

a) Índice de variación: $\frac{6,5}{5,2} = 1{,}25 \rightarrow$ Aumento del 25 %

b) Índice de variación: $\frac{9,1}{6,5} = 1{,}4 \rightarrow$ Aumento del 40 %

c) Índice de variación: $\frac{6,3}{9,1} = 0{,}69 \rightarrow$ Disminución del 31 %

26. **Un pantano tiene a finales de agosto un 20 % menos de agua que en julio. Y a finales de julio, un 15 % menos que en junio. ¿Qué tanto por ciento ha descendido en los dos meses?**

Disminución del 20 % $\rightarrow$ Índice de variación 0,8

Disminución del 15 % $\rightarrow$ Índice de variación 0,85

$0{,}85 \cdot 0{,}8 = 0{,}68 \rightarrow$ Disminución del 32 %

Ha descendido un 32 % en los dos meses.

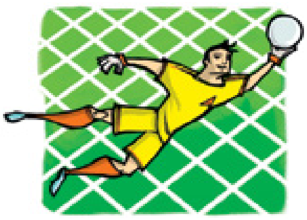
Curiosidades matemáticas

No es lo mismo

En un equipo de fútbol de primera división, las fichas del portero titular y del delantero estrella son las siguientes:

a) ¿Qué tanto por ciento tendría que aumentar su ficha para ganar lo mismo que la estrella del equipo?

FICHA: 800 000 €



b) ¿Qué tanto por ciento tendría que rebajar su ficha para ganar lo mismo que el guardameta titular?

FICHA: 1 000 000 €

a) $\left.\begin{array}{l}\text{Cantidad inicial } \rightarrow \text{ } 800\,000 \text{ €}\\ \text{Índice de variación } \rightarrow x\\ \text{Cantidad final } \rightarrow \text{ } 1\,000\,000 \text{ €}\end{array}\right\}$ $800\,000 \cdot x = 1\,000\,000 \rightarrow x = 1{,}25$

Para ganar lo mismo que la estrella del equipo, debería aumentar un 25 % su ficha.

b) $\left.\begin{array}{l}\text{Cantidad inicial } \rightarrow \text{ } 1\,000\,000 \text{ €}\\ \text{Índice de variación } \rightarrow x\\ \text{Cantidad final } \rightarrow \text{ } 800\,000 \text{ €}\end{array}\right\}$ $1\,000\,000 \cdot x = 800\,000 \rightarrow x = 0{,}8$

Para ganar lo mismo que el guardamenta titular debería rebajar un 20 % su ficha.

1 Sucesiones

Página 61

1. Añade los tres términos siguientes en cada una de estas sucesiones:

a) 10, 15, 20, 25, 30, …

b) 80, 70, 60, 50, 40, …

c) 3, 6, 12, 24, 48, …

d) 1, 3, 4, 6, 7, …

e) 2, 5, 7, 12, 19, …

f) 4, 6, 5, 7, 6, 8, 7, …

a) 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45

b) 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10

c) 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384

d) 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12

e) 2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, 81

f) 4, 6, 5, 7, 6, 8, 7, 9, 8, 10

2. Describe el criterio con el que se ha formado cada una de las seis sucesiones del ejercicio anterior.

a) 10, 15, 20, 25, 30, …

Esta sucesión se ha construido empezando por 10 y sumando 5 a cada termino para obtener el siguiente.

b) 80, 70, 60, 50, 40, …

Esta sucesión se ha construido empezando por 80 y restando 10 a cada término para obtener el siguiente.

c) 3, 6, 12, 24, 48, …

Esta sucesión se ha construido empezando por 3 y multiplicando por 2 cada término para obtener el siguiente.

d) 1, 3, 4, 6, 7, …

Esta sucesión se ha construido empezando por 1 y alternando la suma de 2 y 1 a cada término para obtener el siguiente.

e) 2, 5, 7, 12, 19, …

Los dos primeros términos son 2 y 5 y, a partir de ahí, cada término se obtiene sumando los dos anteriores.

f) 4, 6, 5, 7, 6, 8, 7, …

El primer término de la sucesión es 4 y se construye alternando la suma de 2 y la resta de 1 a cada término para obtener el siguiente.

3. Forma seis sucesiones que empiecen por 6 y que se construyan con los mismos criterios que las del ejercicio 1.

a) 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, …

b) 6, –4, –14, –24, –34, –44, …

c) 6, 12, 24, 48, 96, 192, …

d) 6, 8, 9, 11, 12, 14, 15, …

e) 6, 5, 11, 16, 27, 43, …

f) 6, 8, 7, 9, 8, 10, 9, …

4. Añade a esta sucesión los cuatro términos siguientes, y describe el criterio con el que se ha formado:

10, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 21, …

Los cuatro términos siguientes $\rightarrow$ 22, 23, 25, 26

El primer término de la sucesión es el 10 y se ha formado alternando la suma de 2 y 1 a cada término para obtener así el siguiente.

Página 62

5. Asocia cada sucesión con su término general, y exprésalo como en el ejemplo:

- **k) 4, 9, 14, 19, 24, … → $k_n = 5n - 1$**

a) 7, 8, 9, 10, 11, …

b) –2, –1, 0, 1, 2, …

c) 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; …

d) 0, 2, 4, 6, 8, …

e) 3, 6, 9, 12, …

f) 4, 7, 10, 13, …

g) 0, 3, 8, 15, 24, …

$n^2 - 1$
$n : 2$
$3n + 1$
$n - 3$
$2(n - 1)$
$3n$
$n + 6$

a) 7, 8, 9, 10, 11, … → $a_n = n + 6$

b) –2, –1, 0, 1, 2, … → $b_n = n - 3$

c) 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; … → $c_n = n : 2$

d) 0, 2, 4, 6, 8, … → $d_n = 2(n - 1)$

e) 3, 6, 9, 12, … → $e_n = 3n$

f) 4, 7, 10, 13, … → $f_n = 3n + 1$

g) 0, 3, 8, 15, 24, … → $g_n = n^2 - 1$

6. Halla el término general de cada una de estas sucesiones:

a) 2, 3, 4, 5, 6, …

b) 0, 1, 2, 3, 4, …

c) 4, 8, 12, 16, 20, …

d) 4, 7, 10, 13, 16, …

e) 10, 20, 30, 40, 50, …

f) 12, 22, 32, 42, 52, …

g) 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000, …

h) 11, 102, 1 003, 10 004, 100 005, …

a) 2, 3, 4, 5, 6, … → $a_n = n + 1$

b) 0, 1, 2, 3, 4, … → $b_n = n - 1$

c) 4, 8, 12, 16, 20, … → $c_n = 4n$

d) 4, 7, 10, 13, 16, … → $d_n = 3n + 1$

e) 10, 20, 30, 40, 50, … → $e_n = 10n$

f) 12, 22, 32, 42, 52, … → $f_n = 10n + 2$

g) 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000, … → $g_n = 10^n$

h) 11, 102, 1 003, 10 004, 100 005, … → $h_n = 10^n + n$

2 Sucesiones definidas de forma recurrente

Página 63

1. Para construir estas sucesiones, se han utilizado, no consecutivamente, los criterios que ves a su lado:

a) 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, …

b) 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, …

c) 10, 2, 8, –6, 14, –20, 34, …

d) 10; 2; 6; 4; 5; 4,5; 4,75; …

e) 4, 2, 5, 11, 18, 34, 63, …

— Añadir sucesivamente 1, 2, 3, 4, …

— Sumar los dos términos anteriores.

— Sumar los tres términos anteriores.

— Restar los dos términos anteriores.

— Promediar los dos términos anteriores.

Identifica cuál corresponde a cada una y continúalas hasta el término s_{10}.

a) Sumar los dos términos anteriores → 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123

b) Añadir sucesivamente 1, 2, 3, 4, … → 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37, 46

c) Restar los dos términos anteriores → 10, 2, 8, –6, 14, –20, 34, –54, 88, –142

d) Promediar los dos términos anteriores → 10; 2; 6; 4; 5; 4,5; 4,75; 4,625; 4,6875; 4,65625

e) Sumar los tres términos anteriores → 4, 2, 5, 11, 18, 34, 63, 115, 212, 390

2. Asocia cada sucesión con una de las igualdades que ves a la derecha, y describe verbalmente el criterio con el que se han construido:

a) 40, 39, 37, 34, 30, …

b) 1, 3, 5, 11, 21, 43, …

c) 1, 1, 0, 1, –1, 2, –3, …

$$a_{n+2} = 2a_n + a_{n+1}$$
$$a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$$
$$a_{n+1} = a_n - n$$

a) 40, 39, 37, 34, 30, … → $a_{n+1} = a_n - n$

a_{n+1} es el término anterior menos la posición que ocupa este último.

b) 1, 3, 5, 11, 21, 43, … → $a_{n+2} = 2a_n + a_{n+1}$

a_{n+2} es el doble del término que ocupa dos lugares menos más el término anterior.

c) 1, 1, 0, 1, –1, 2, –3, … → $a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$

a_{n+2} es el término que ocupa dos lugares menos, menos el término anterior.

3. Observa esta sucesión y calcula los tres términos siguientes:

$$1 \xrightarrow{+2\cdot 1} 3 \xrightarrow{+2\cdot 2} 7 \xrightarrow{+2\cdot 3} 13 \xrightarrow{+2\cdot 4} 21 \quad \ldots$$

Escribe una igualdad que exprese la relación entre dos términos consecutivos, a_n y a_{n+1}.

Los tres términos siguientes son 31, 43, 57.

La relación entre dos términos consecutivos es $a_{n+1} = a_n + 2n$.

3 Progresiones aritméticas

Página 65

1. Escribe los diez primeros términos de una progresión aritmética cuyo primer término es 8 y cuya diferencia es 7. Calcula su suma.

$a_1 = 8 \qquad d = 7$

8, 15, 22, 29, 36, 43, 50, 57, 64, 71

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = \frac{(8 + 71) \cdot 10}{2} = 395$$

2. En una progresión aritmética, $a_1 = 10$ y $a_{12} = 54$. Halla:

a) La suma de los doce primeros términos, S_{12}.

b) La diferencia, d, y el término general, a_n.

a) $S_{12} = \dfrac{(a_1 + a_{12}) \cdot 12}{2} = \dfrac{(10 + 54) \cdot 12}{2} = 384$

b) $a_{12} = a_1 + (12 - 1)d \to 54 = 10 + 11d \to d = \dfrac{(54 - 10) \cdot 12}{11} = 4$

$a_n = a_1 + (n - 1)d \to a_n = 10 + (n - 1)4 \to a_n = 6 + 4n$

3. El término general de una progresión aritmética es $a_n = 10 + 2{,}5n$. Halla a_1, a_{50} y S_{50} (la suma de los 50 primeros términos).

$d = 2{,}5$

$a_1 = 12{,}5$

$a_{50} = 12{,}5 + 2{,}5 \cdot 50 = 135$

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} = \frac{(12{,}5 + 135) \cdot 50}{2} = 3\,687{,}5$$

4. En una progresión aritmética, $a_1 = 84$ y $a_2 = 79$.

a) Halla d y escribe los ocho primeros términos.

b) Halla el término general.

c) Obtén a_{20} y S_{20}.

a) $d = a_2 - a_1 = 79 - 84 = -5$

Los ocho primeros términos son $\to$ 84, 79, 74, 69, 64, 59, 54, 49

b) $a_n = a_1 + (n - 1)d \to a_n = 84 - 5 \cdot (n - 1) = 89 - 5n$

c) $a_{20} = 89 - 5 \cdot 20 = -11$

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(84 - 11) \cdot 20}{2} = 730$$

4 Progresiones geométricas

Página 67

1. Halla los seis primeros términos de las progresiones geométricas definidas así:

a) Primer término: 5 000; razón: 1,2

b) Primer término: 8; razón: 2,5

c) Primer término: 1 000 000; razón: 0,2

d) Primer término: 1; razón: 10

a) 5 000; 6 000; 7 200; 8 640; 10 368; 12 441,6

b) 8; 20; 50; 125; 312,5; 781,25

c) 1 000 000, 200 000, 40 000, 8 000, 1 600, 320

d) 1, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000

2. Considera la progresión 1, 2, 4, 8, 16, …

a) Escribe los cuatro términos siguientes.

b) ¿Cuál es la razón?

c) ¿Qué lugar ocupa el término $2^7 = 128$?

d) Expresa con una potencia de base 2 el término a_{10} de la progresión.

a) Los cuatro términos siguientes son 32, 64, 128, 256.

b) La razón de esta progresión es $r = 2$.

c) $2^7 = 128$ ocupa la posición 8.

d) $a_{10} = 2^9 = 512$

3. Escribe los cuatro primeros términos de las progresiones geométricas siguientes:

a) $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$ **b) $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$** **c) $c_n = 5 \cdot 10^{n-1}$** **d) $d_n = 5 \cdot 0{,}1^{n-1}$**

a) 5, 10, 20, 40 b) 2, 6, 18, 54 c) 5, 50, 500,5 000 d) 5; 0,5; 0,05; 0,005

4. Asocia cada progresión geométrica con su término general:

a) 3, 6, 12, 24, …

b) 3; 0,3; 0,03; 0,003; …

c) 3, 30, 300, 3 000, …

d) 2, 6, 18, 54, …

$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$
$a_n = 3 \cdot 10^{n-1}$
$a_n = 3 \cdot 0{,}1^{n-1}$
$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

a) 3, 6, 12, 24, … → $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

b) 3; 0,3; 0,03; 0,003; … → $a_n = 3 \cdot 0{,}1^{n-1}$

c) 3, 30, 300, 3 000, … → $a_n = 3 \cdot 10^{n-1}$

d) 2, 6, 18, 54, … → $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

5. Considera la siguiente progresión:

1; 0,2; 0,04; 0,008; …

a) Escribe los cuatro términos siguientes.

b) Escribe en forma de potencia el término a_{15} de la progresión.

a) 0,0016; 0,00032; 0,000064; 0,0000128

b) $a_n = 0{,}2^{(n-1)}$

$a_{15} = 0{,}2^{(15-1)} \rightarrow a_{15} = 0{,}2^{14}$

6. ¿En cuánto se convierte un capital de 5 000 €, colocado al 3 % anual durante 10 años, si los intereses se suman al capital al final de cada año?

Al final de cada año, el capital se multiplica por 1,03.

En diez años, el capital inicial se habrá multiplicado diez veces por 1,03:

$$5\,000 \cdot 1{,}03^{10} = 6\,719{,}58\text{ €}$$

El capital, al cabo de 10 años, es de 6 719,58 €.

7. Averigua a partir de qué término la progresión geométrica 3, 6, 12, … supera el valor 1 000 000.

El término general de esta progresión es $a_n = 3 \cdot 2^{(n-1)}$, entonces, hay que averiguar para que n se cumple que $3 \cdot 2^{(n-1)} > 1\,000\,000 \rightarrow 2^{(n-1)} > \dfrac{1\,000\,000}{3} \approx 333\,333{,}3$.

$2^{10} = 1\,024 < 333\,333{,}3 \rightarrow$ Se queda muy corto, probamos con otro.

$2^{15} = 32\,768 < 333\,333{,}3 \rightarrow$ Sigue estando por debajo pero bastante próximo.

…

$2^{18} = 262\,144 < 333\,333{,}3 \rightarrow$ Es muy próximo al número buscado

$2^{19} = 524\,288 > 333\,333{,}3 \rightarrow$ Es el primero que supera 333 333,3.

Por tanto, $n - 1 = 19 \rightarrow n = 19 + 1 \rightarrow n = 20$

$$a_{20} = 3 \cdot 2^{19} = 1\,572\,864$$

A partir de $a_{20} = 1\,572\,864$ los términos de la progresión superan 1 000 000.

Ejercicios y problemas

Página 68

Practica

1. Escribe los seis primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) Cada término se obtiene sumando 3 al anterior. El primero es 5.

b) Cada término se obtiene sumando 3 al anterior. El primero es –10.

c) El primer término es 5, y el segundo, 7. A partir del tercero, cada término se obtiene sumando los dos anteriores.

d) El primer término es 16. Los demás se obtienen dividiendo el anterior por 2.

e) El primer término es 36, el segundo, 12, y los siguientes, la semisuma de los dos anteriores.

a) 5, 8, 11, 14, 17, 20

b) –10, –7, –4, –1, 2, 5

c) 5, 7, 12, 19, 31, 50

d) 16; 8; 4; 2; 1; 0,5

e) 36; 12; 24; 18; 21; 19,5

2. Averigua el criterio con el que se han formado las siguientes sucesiones. Escribe tres términos más de cada una de ellas:

a) 1, 3, 5, 7, …

b) 7, 5, 3, 1, …

c) 2, 4, 8, 16, …

d) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

e) 1,5; 1,9; 2,3; 2,7; …

f) 30, 25, 20, 15, …

g) 1, 4, 9, 16, …

h) 2, 5, 10, 17, …

i) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

j) 1, 3, 6, 10, …

a) El primer término es 1 y cada término se obtiene sumando 2 al anterior.

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13

b) El primer término es 7 y cada término se obtiene restando 2 al anterior.

7, 5, 3, 1, –1, –3, –5

c) El primer término es 2 y cada término se obtiene multiplicando por 2 el anterior.

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128

d) El primer término es $\frac{1}{2}$ y cada término se obtiene multiplicando por $\frac{1}{2}$ el anterior.

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}$$

e) El primer término es 1,5 y cada término se obtiene sumando 0,4 al anterior.

1,5; 1,9; 2,3; 2,7; 3,1; 3,5; 3,9

f) El primer término es 30 y cada término se obtiene restando 5 al anterior.

30, 25, 20, 15, 10, 5, 0

g) El primer término es 1 y cada término se obtiene elevando al cuadrado la posición que ocupa.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49

h) El primer término es 2 y cada término se obtiene elevando al cuadrado la posición que ocupa en la sucesión y sumándole 1.

2, 5, 10, 17, 26, 37, 50

i) El primer término es 1 y cada término es la unidad dividida por el lugar que ocupa en la sucesión.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$$

j) El primer término es 1 y, a partir de ahí, se va sumando la posición que ocupa en la sucesión al término anterior.

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28

3. **Escribe los cinco primeros términos de las sucesiones cuyos términos generales son:**

a) $n^2 - n$ **b)** $n^2 + n$ **c)** $2^n + 1$

d) $\frac{n-1}{n+1}$ **e)** $\frac{n^2+1}{n}$ **f)** $\frac{2n-1}{n+1}$

g) $(-1)^n$ **h)** $1 + (-1)^n$ **i)** $2^n + n$

a) 0, 2, 6, 12, 20 b) 2, 6, 12, 20, 30 c) 3, 5, 9, 17, 33

d) $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ e) $0, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, \frac{17}{4}, \frac{26}{5}$ f) $\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{4}, \frac{7}{5}, \frac{3}{2}$

g) –1, 1, –1, 1, –1 h) 0, 2, 0, 2, 0 i) 3, 6, 11, 20, 37

4. **Escribe el término general de estas sucesiones:**

a) **1, 2, 3, 4, …** **b)** **0, 1, 2, 3, …** **c)** **1, 4, 9, 16, …**

d) **0, 3, 8, 15, …** **e)** **2, 4, 6, 8, …** **f)** **1, 3, 5, 7, …**

g) **3, 5, 7, 9, …** **h)** **12, 14, 16, 18, …** **i)** **2, 4, 8, 16, …**

j) **3, 5, 9, 17, …** **k)** **100, 200, 300, 400, …** **l)** **5, 25, 125, 625, …**

a) $a_n = n$ b) $b_n = n - 1$

c) $c_n = n^2$ d) $d_n = n^2 - 1$

e) $e_n = 2n$ f) $f_n = 2n - 1$

g) $g_n = 2n + 1$ h) $h_n = 2(n + 5) = 2n + 10$

i) $i_n = 2^n$ j) $j_n = 2^n + 1$

k) $k_n = 100n$ l) $l_n = 5^n$

5. **Escribe los ocho primeros términos de una progresión aritmética cuyo primer término es 10 y cuya diferencia es 4. Halla su suma.**

$a_1 = 10,\ d = 4 \rightarrow a_n = 10 + (n-1) \cdot 4 = 10 + 4n - 4 = 6 + 4n$

El término general de esta progresión es $a_n = 6 + 4n$.

Los ocho primeros términos son: 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38.

$$S_8 = \frac{(a_1 + a_8) \cdot 8}{2} = \frac{(10 + 38) \cdot 8}{2} = 192$$

6. **De las sucesiones siguientes, definidas por sus términos generales, hay tres que son progresiones aritméticas. Identifícalas y di cuál es la diferencia de cada una de ellas:**

a) $5n - 4$ **b)** $5 - 3n$ **c)** $10 - 0{,}5n$ **d)** $n^2 + 1$

a) $5n - 4 \rightarrow$ Progresión aritmética con $d = 5$.

b) $5 - 3n \rightarrow$ Progresión aritmética con $d = -3$.

c) $10 - 0{,}5n \rightarrow$ Progresión aritmética con $d = -0{,}5$.

d) $n^{2+1} \rightarrow$ No es progresión aritmética.

7. **En una progresión aritmética, $a_1 = 6$ y $a_{15} = 41$. Halla:**

a) La suma de los 15 primeros términos.

b) La diferencia, d, y el término general, a_n.

c) El término centésimo, a_{100}.

$a_1 = 6;\quad a_{15} = 41$

a) $S_8 = \dfrac{(a_1 + a_{15}) \cdot 15}{2} = \dfrac{(6 + 41) \cdot 15}{2} = 352{,}5$

b) $a_{15} = a_1 + (15 - 1)d \rightarrow 41 = 6 + 14d \rightarrow d = \dfrac{41 - 6}{14} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$

$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow a_n = 6 + 2{,}5(n-1) \rightarrow a_n = 3{,}5 + 2{,}5n$

c) $a_{100} = 3{,}5 + 2{,}5 \cdot 100 = 253{,}5$

8. **El término general de una progresión aritmética es $a_n = 4 + 3n$. Halla a_1, a_{100} y S_{100}.**

$a_n = 4 + 3n$

$a_1 = 4 + 3 \cdot 1 = 7$

$a_{100} = 4 + 3 \cdot 100 = 304$

$$S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100}) \cdot 100}{2} = \frac{(7 + 304) \cdot 100}{2} = 15\,550$$

9. **En una progresión aritmética, $a_1 = 103$ y $a_2 = 99$.**

a) Halla la diferencia, d, y escribe los 10 primeros términos.

b) Obtén el término general.

c) Halla a_{30} y S_{30}.

$a_1 = 103; \quad a_2 = 99$

a) $d = a_2 - a_1 = 99 - 103 = -4$

Los diez primeros términos son 103, 99, 95, 91, 87, 83, 79, 75, 71, 67.

b) $a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow a_n = 103 - 4 \cdot (n-1) = 107 - 4n$

El término general de esta progresión aritmética es $a_n = 107 - 4n$.

c) $a_{30} = 107 - 4 \cdot 30 = -13$

$$S_{30} = \frac{(a_1 + a_{30})}{2} = \frac{(103 + (-13)) \cdot 30}{2} = 1\,350$$

10.

×	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

a) Esta es la tabla de multiplicar. Observa en ella cada fila o columna. ¿Qué tipos de sucesiones son? Escribe el término general de cada una.

b) Obtén el término general de la diagonal principal: 1, 4, 9, 16, …

c) La diagonal 2, 6, 12, 20, … se formó multiplicando cada número natural por su siguiente. ¿Cuál es el término general?

a) En la tabla de multiplicar podemos observar que cada fila o columna son progresiones aritméticas.

Los términos generales de cada fila o columna son:

1ª fila o columna: $a_n = n$

2ª fila o columna: $a_n = 2n$

3ª fila o columna: $a_n = 3n$

4ª fila o columna: $a_n = 4n$

5ª fila o columna: $a_n = 5n$

6ª fila o columna: $a_n = 6n$

7ª fila o columna: $a_n = 7n$

8ª fila o columna: $a_n = 8n$

9ª fila o columna: $a_n = 9n$

b) El término general de la diagonal principal es $a_n = n^2$.

c) El término general de la diagonal 2, 6, 12, 20, … es $a_n = n(n+1) = n^2 + n$.

11. **De las siguientes sucesiones, dadas por sus términos generales, unas son progresiones aritméticas, otras, progresiones geométricas, y otras, ni lo uno ni lo otro. Identifica cada una de ellas:**

a) $3n + 5$	**b)** $n^2 + 5$	**c)** $3^n + 5$	**d)** $3^n \cdot 5$
e) $n^2 + n$	**f)** $n + 2$	**g)** $n/2$	**h)** $2/n$

a) $3n + 5 \rightarrow$ Progresión aritmética

b) $n^2 + 5 \rightarrow$ No es progresión aritmética ni geométrica

c) $3^n + 5 \rightarrow$ No es progresión aritmética ni geométrica

d) $3^n \cdot 5 \rightarrow$ Progresión geométrica

e) $n^2 + n \rightarrow$ No es progresión aritmética ni geométrica

f) $n + 2 \rightarrow$ Progresión aritmética

g) $\frac{n}{2} \rightarrow$ Progresión aritmética

h) $\frac{2}{n} \rightarrow$ No es progresión aritmética ni geométrica

Página 69

12. **¿Cuál es el término general de una progresión aritmética en la que $a_1 = 7$ y $a_4 = 40$?**

$a_4 = a_1 + 3d$. Sustituye y halla d.

$a_1 = 7$; $a_4 = 40$

$a_4 = a_1 + 3d \rightarrow 40 = 7 + 3d \rightarrow d = \dfrac{40-7}{3} \rightarrow d = 11$

$a_n = 7 + (n-1) \cdot 11 = 7 + 11n - 11 \rightarrow a_n = 11n - 4$

El término general de la progresión es $a_n = 11n - 4$.

13. **En una progresión geométrica, $a_1 = 64$ y $r = 0{,}75$.**

a) Calcula el primer término no entero.

b) Ayudándote de la calculadora, di cuál es el primer término menor que 1.

$a_1 = 64$; $r = 0{,}75$

a) $a_1 = 64$

$a_2 = 64 \cdot 0{,}75 = 48$

$a_3 = 48 \cdot 0{,}75 = 36$

$a_4 = 36 \cdot 0{,}75 = 27$

$a_5 = 27 \cdot 0{,}75 = 20{,}25$

El primer término no entero es $a_5 = 20{,}25$.

b) Con la calculadora: 0,75 ⊗ ⊗ 64 ⊜ ⊜ … ⊜

Para que el resultado sea un número menor que 1 hay que dar 15 veces al botón ⊜.

Por tanto, $a_{15} = 0{,}85526$ es el primer término menor que 1.

Piensa y resuelve

14. **¿Cuál es el término 63 de la siguiente sucesión?**

1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, …

Los términos en esta sucesión se repiten cada 4 posiciones.

La división de 63 entre 4 tiene cociente 15 y resto 3.

Por tanto, término 63 de la sucesión será 3.

15. **a) ¿Cuántos números impares menores que 100 hay? Halla su suma.**

b) Halla la suma de todos los números pares menores que 100.

a) Hay 100 : 2 = 50 números impares menores que 100.

La sucesión de los números impares menores de 100 es 1, 3, 5, 7, …, 99.

En esta sucesión se puede observar que $a_1 = 1$ y $a_{50} = 99$, por tanto, la suma de todos los términos es:

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} = \frac{(1+99) \cdot 50}{2} = 2\,500$$

b) En este caso también hay 100 : 2 = 50 números pares menores que 100.

La sucesión de los números pares menores de 100 es 2, 4, 6, 8, …, 98.

En esta sucesión se puede observar que $a_1 = 2$ y $a_{50} = 98$, por tanto, la suma de todos los términos es:

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} = \frac{(2 + 98) \cdot 50}{2} = 2\,500$$

16. **Una persona que estaba de vacaciones gastó 100 € el primer día, y en cada uno de los siguientes, 5 € menos que el anterior. El dinero le duró 12 días. ¿Cuánto dinero llevó para sus vacaciones?**

La persona se gasta 100 € el primer día $\rightarrow a_1 = 100$

— Cada día gasta 5 euros $\rightarrow d = -5$

— El dinero le dura 12 días $\rightarrow$ la progresión tiene 12 términos, a_1, a_2, a_3, …, a_{12}, cada término es un día.

— El último día se gastó $a_{12} = 100 - 5(12 - 1) \rightarrow a_{12} = 100 - 55 = 45$ €.

— Para saber el dinero que llevó para sus vacaciones solo hace falta calcular S_{12}.

$$S_{12} = \frac{(a_1 + a_{12}) \cdot 12}{2} = \frac{(100 + 45) \cdot 12}{2} = 870 \text{ €}.$$

Para sus vacaciones llevó 870 €.

17. **Un padre, cuando nace su hijo, abre a su nombre una cuenta bancaria, al 6 % anual, con un capital de 5 000 €, indicando que los intereses se vayan sumando al capital al final de cada año. El hijo podrá disponer del dinero cuando cumpla dieciocho años. ¿A cuánto ascenderá la cuenta en ese momento?**

El capital aumenta en un 6 % anual. Es decir, al finalizar cada año se multiplica el capital que tenga en la cuenta bancaria por 1,6.

Como el hijo puede disfrutar del capital que tenga acumulado en la cuenta bancaria a los 18 años, el capital inicial se habrá multiplicado dieciocho veces por 1,06:

$$5\,000 \cdot 1{,}06^{18} = 14\,271{,}69 \text{ €}$$

Por tanto, cuando el hijo cumpla 18 años la cuenta ascenderá a 14 271,69 €.

18. **¿Cuánto tardará en duplicarse un euro, colocado en el banco, al 5 % anual, si los intereses se van acumulando al final de cada anualidad?**

El euro colocado en el banco aumenta un 5 % anual. Es decir, al finalizar cada año el euro que está en la cuenta bancaría se multiplica por 1,05.

n son el número de años necesarios para duplicar el euro, por tanto, $1 \cdot 1{,}05^n \geq 2$.

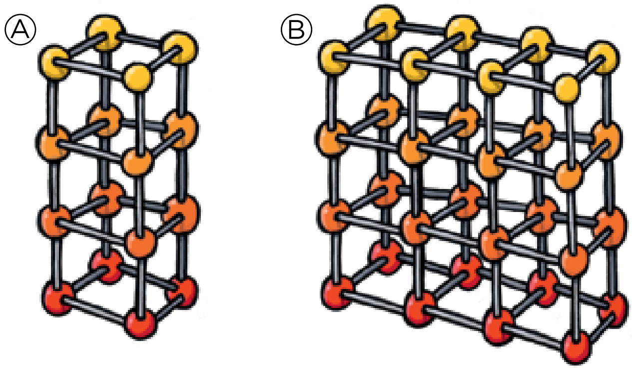
Con la calculadora:

1,05 ⊠ ⊠ 1 ⊜ ⊜ … ⊜ $\rightarrow$ Damos a ⊜ hasta que aparezca un número mayor o igual que 2.

Para que salga un número mayor o igual a 2 debemos dar a ⊜ 15 veces, $1 \cdot 1{,}05^{15} = 2{,}08 \geq 2$.

Por tanto, el euro colocado en el banco tardará 15 años en duplicarse.

19. **Observa estas dos estructuras formadas por palos y bolas engarzables:**



Averigua cuántos palos y cuántas bolas son necesarios para hacer una estructura como la de la figura A, pero de n pisos.

¿Y para la figura B?

— Para la estructura A, se necesitan 4 bolas, 4 palos por cada piso y 4 palos entre los pisos para unirlos. Por tanto, en una estructura de n pisos se necesitan $4n$ bolas y $4n + 4(n - 1)$ palos, es decir, $8n - 4$ palos.

— Para la estructura B, se necesitan 8 bolas, 10 palos por cada piso y 8 palos entre los pisos para unirlos. Por tanto, para una estructura como la B, pero de n pisos, se necesitan $8n$ bolas y $10n + 8(n - 1)$ palos, es decir, $18n - 8$ palos.

20. **Una pelota de goma se lanza a 10 metros de altura y al caer rebota perdiendo el 40 % de altura en cada bote. ¿Cuántos botes da antes de pararse, si al caer desde una altura inferior a 4 centímetros ya no tiene suficiente energía para volver a subir y deja de botar?**

Se lanza la pelota de goma $10 \cdot 100 = 1\,000$ cm hacia arriba y al caer rebota perdiendo 40 % de altura en cada bote, entonces, el índice de variación es 0,6.

Por cada bote que da la pelota hay que multiplicar la altura por 0,6.

Sea n el número de botes que da la pelota antes de pararse, por tanto, hay que calcular n para que $1000 \cdot 0{,}6^n \leq 4$.

Con la calculadora:

0,6 ⊠ ⊠ 1 000 ⊜ ⊜ … → Damos a ⊜ hasta que aparezca un número menor o igual que 4.

Para que salga un número menor o igual que 4 debemos dar a ⊜ 11 veces, $1\,000 \cdot 0{,}6^{11} =$ $= 3{,}63 \leq 4$.

Por tanto, la pelota dará 11 botes antes de pararse.

21. **Un tipo de bacterias se reproduce por bipartición cada 10 minutos. ¿Cuántas bacterias habrá después de 8 horas?**

Cada 10 minutos las bacterias se reproducen por bipartición, es decir, se multiplican por 2.

8 horas son 480 minutos → 48 periodos de 10 minutos.

Partiendo de una bacteria, después de ocho horas, habrá $2^{48} \approx 2{,}815 \cdot 10^{14}$ bacterias.

1 Expresiones algebraicas

Página 73

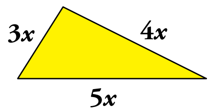
1. Expresa en lenguaje algebraico.

a) El doble de un número menos su tercera parte.

b) El doble del resultado de sumarle tres unidades a un número.

c) La edad de Alberto ahora y dentro de siete años.

d) El perímetro de este triángulo:



e) Eva tiene cuatro años menos que Óscar. (Expresa la edad de cada uno).

a) $2x - \frac{x}{3}$

b) $2(x + 3)$

c) La edad de Alberto ahora $\rightarrow$ x

La edad de Alberto dentro de 7 años $\rightarrow$ $x + 7$

d) $3x + 4x + 5x = 12x$

e) La edad de Oscar $\rightarrow$ x

La edad de Eva $\rightarrow$ $x - 4$

2 Monomios

Página 74

1. Indica el coeficiente y el grado de cada monomio:

a) $-2x^7$ **b)** x^9 **c)** x **d)** 5

a) $-2x^2 \rightarrow$ coeficiente = -2 y grado 2

b) $x^9 \rightarrow$ coeficiente = 1 y grado 9

c) $x \rightarrow$ coeficiente = 1 y grado 1

d) $5 \rightarrow$ coeficiente = 5 y grado 0

2. Di cuáles de los siguientes monomios son semejantes a $5x^2$:

$$7x^2 \quad 5x^3 \quad 5x \quad 5xy \quad x^2 \quad 3x^2y$$

Los monomios que son semejantes a $5x^2$ son $7x^2$ y x^2.

3. Escribe dos monomios semejantes a cada uno de los siguientes:

a) $-5xy$ **b)** $2x^4$ **c)** x **d)** $3xy^2$

a) Cualquier monomio que tenga parte literal xy.

Por ejemplo: $3xy$, xy, $5xy$

b) Cualquier monomio que tenga parte literal x^4.

Por ejemplo: $3x^4$, x^4, $5x^4$

c) Cualquier monomio que tenga parte literal x.

Por ejemplo: $3x$, $-x$, $5x$

d) Cualquier monomio que tenga parte literal xy^2.

Por ejemplo: $-3xy^2$, xy^2, $5xy^2$

4. Halla el valor numérico para $x = 3$, $y = -2$:

a) $5x^3$ **b)** $2xy$ **c)** xy^2 **d)** $-xy$

a) El valor numérico de $5x^3$ para $x = 3$ es $5 \cdot 3^3 = 135$.

b) El valor numérico de $2xy$ para $x = 3$, $y = -2$ es $2 \cdot 3 \cdot (-2) = -12$.

c) El valor numérico de xy^2 para $x = 3$, $y = -2$ es $3 \cdot (-2)^2 = 12$.

d) El valor numérico de $-xy$ para $x = 3$, $y = -2$ es $(-3) \cdot (-2) = 6$.

Página 75

5. Efectúa las siguientes sumas de monomios:

a) $5x - 3x + 4x + 7x - 11x + x$ **b)** $3x^2y - 5x^2y + 2x^2y + x^2y$ **c)** $7x^3 - 11x^3 + 3y^3 - y^3 + 2y^3$

a) $5x - 3x + 4x + 7x - 11x + x = 3x$

b) $3x^2y - 5x^2y + 2x^2y + x^2y = x^2y$

c) $7x^3 - 11x^3 + 3y^3 - y^3 + 2y^3 = -4x^3 + 4y^3$

6. Opera.

a) $(3x^2) \cdot (5x^4)$ **b)** $(x^2) \cdot (x)$ **c)** $(5x^3)^2$ **d)** $(2x)^4$

a) $(3x^2) \cdot (5x^4) = 15x^6$ b) $(x^2) \cdot (x) = x^3$ c) $(5x^3)^2 = 25x^6$ d) $(2x)^4 = 16x^4$

7. Reduce.

a) $(5x - 4) - (2x + 3)$

b) $(x^2 + 5x) - (4x - 1)$

c) $(2x^3 - x^2 + x - 1) - (x^2 + x - 4)$

a) $(5x - 4) - (2x + 3) = 5x - 4 - 2x - 3 = 3x - 7$

b) $(x^2 + 5x) - (4x - 1) = x^2 + 5x - 4x + 1 = x^2 + x + 1$

c) $(2x^3 - x^2 + x - 1) - (x^2 + x - 4) = 2x^3 - x^2 + x - 1 - x^2 - x + 4 = 2x^3 - 2x^2 + 3$

8. Divide los monomios de cada caso:

a) $10x^2 : 5x$ **b)** $4x^3 : 6x^5$ **c)** $4xy^2 : 6xy^2$ **d)** $8x^3y : 4x^5y^3$

a) $\dfrac{10x^2}{5x} = 2x$ b) $\dfrac{4x^3}{6x^5} = \dfrac{2}{3x^2}$ c) $\dfrac{4xy^2}{6xy^2} = \dfrac{2}{3}$ d) $\dfrac{8x^3y}{4x^5y^3} = \dfrac{2}{x^2y^2}$

3 Polinomios

Página 76

1. Expresa mediante un polinomio cada uno de estos enunciados:

a) La suma de un número más su cubo.

b) La suma de dos números naturales consecutivos.

c) El perímetro de un triángulo isósceles (llama x al lado desigual e y a cada uno de los otros dos lados).

a) $x + x^3$ b) $x + (x + 1)$ c) $x + 2y$

2. Di el grado de cada uno de los polinomios siguientes:

a) $x^5 - 6x^2 + 3x + 1$

b) $5xy^4 + 2y^2 + 3x^3y^3 - 2xy$

c) $x^2 + 3x^3 - 5x^2 + x^3 - 3 - 4x^3$

d) $2x^2 - 3x - x^2 + 2x - x^2 + x - 3$

e) $3x + 2xy - x^2y^3 - xy + 3x^2y^3 - xy$

a) $x^5 - 6x^2 + 3x + 1$ tiene grado 5.

b) $5xy^4 + 2y^2 + 3x^3y^3 - 2xy$ tiene grado 6.

c) $x^2 + 3x^3 - 5x^2 + x^3 - 3 - 4x^3 = -4x^2 - 3$ tiene grado 2.

d) $2x^2 - 3x - x^2 + 2x - x^2 + x - 3 = -3$ tiene grado 0.

e) $3x + 2xy - x^2y^3 - xy + 3x^2y^3 - xy = 2x^2y^3 + 3x$ tiene grado 5.

Página 77

3. **Sean $P = x^4 - 3x^3 + 5x + 3$, $Q = 5x^3 + 3x^2 - 1$. Halla $P + Q$ y $P - Q$.**

$P = x^4 - 3x^3 + 5x + 3$ $\qquad Q = 5x^3 + 3x^2 - 1$

$P + Q = (x^4 - 3x^3 + 5x + 3) + (5x^3 + 3x^2 - 1) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 5x + 2$

$P - Q = (x^4 - 3x^3 + 5x + 3) - (5x^3 + 3x^2 - 1) = x^4 - 3x^3 + 5x + 3 - 5x^3 - 3x^2 + 1 =$

$= x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 5x + 4$

4. **Efectúa estos productos:**

a) $2x(3x^2 - 4x)$ **b)** $5(x^3 - 3x)$ **c)** $4x^2(-2x + 3)$

d) $-2x(x^2 - x + 1)$ **e)** $-6(x^3 - 4x + 2)$ **f)** $-x(x^4 - 2x^2 + 3)$

a) $2x(3x^2 - 4x) = 6x^3 - 8x^2$

b) $5(x^3 - 3x) = 5x^3 - 15x$

c) $4x^2(-2x + 3) = -8x^3 + 12x^2$

d) $-2x(x^2 - x + 1) = -2x^3 + 2x^2 - 2x$

e) $-6(x^3 - 4x + 2) = -6x^3 + 24x - 12$

f) $-x(x^4 - 2x^2 + 3) = -x^5 + 2x^3 - 3x$

5. **Halla los productos siguientes:**

a) $x(2x + y + 1)$ **b)** $2a^2(3a^2 + 5a^3)$

c) $ab(a + b)$ **d)** $5(3x^2 + 7x + 11)$

e) $x^2y(x + y + 1)$ **f)** $5xy^2(2x + 3y)$

g) $6x^2y^2(x^2 - x + 1)$ **h)** $-2(5x^3 + 3x^2 - 8)$

i) $3a^2b^3(a - b + 1)$ **j)** $-2x(3x^2 - 5x + 8)$

a) $x(2x + y + 1) = 2x^2 + xy + x$

b) $2a^2(3a^2 + 5a^3) = 6a^4 + 10a^5$

c) $ab(a + b) = a^2b + ab^2$

d) $5(3x^2 + 7x + 11) = 15x^2 + 35x + 55$

e) $x^2y(x + y + 1) = x^3y + x^2y^2 + x^2y$

f) $5xy^2(2x + 3y) = 10x^2y^2 + 15xy^3$

g) $6x^2y^2(x^2 - x + 1) = 6x^4y^2 - 6x^3y^2 + 6x^2y^2$

h) $-2(5x^3 + 3x^2 - 8) = -10x^3 - 6x^2 + 16$

i) $3a^2b^3(a - b + 1) = 3a^3b^3 - 3a^2b^4 + 3a^2b^3$

j) $-2x(3x^2 - 5x + 8) = -6x^3 + 10x^2 - 16x$

Página 78

6. **Dados los polinomios $P = 3x^2 - 5$, $Q = x^2 - 3x + 2$, $R = -2x + 5$, calcula:**

a) $P \cdot Q$ **b) $P \cdot R$** **c) $Q \cdot R$**

$P = 3x^2 - 5$ $Q = x^2 - 3x + 2$ $R = -2x + 5$

a) $P \cdot Q = (3x^2 - 5) \cdot (x^2 - 3x + 2) = 3x^4 - 9x^3 + 6x^2 - 5x^2 + 15x - 10 = 3x^4 - 9x^3 + x^2 + 15x - 10$

b) $P \cdot R = (3x^2 - 5) \cdot (-2x + 5) = -6x^3 + 15x^2 + 10x - 25$

c) $Q \cdot R = (x^2 - 3x + 2) \cdot (-2x + 5) = -2x^3 + 5x^2 + 6x^2 - 15x - 4x + 10 = -2x^3 + 11x^2 - 19x + 10$

7. **Opera y simplifica.**

a) $2x(3x^2 - 2) + 5(3x - 4)$

b) $(x^2 - 3)(x + 1) - x(2x^2 + 5x)$

c) $(3x - 2)(2x + 1) - 2(x^2 + 4x)$

a) $2x(3x^2 - 2) + 5(3x - 4) = 6x^3 - 4x + 15x - 20 = 6x^3 + 11x - 20$

b) $(x^2 - 3)(x + 1) - x(2x^2 + 5x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 - 2x^3 - 5x^2 = -x^3 - 4x^2 - 3x - 3$

c) $(3x - 2)(2x + 1) - 2(x^2 + 4x) = 6x^2 + 3x - 4x - 2 - 2x^2 - 8x = 4x^2 - 9x - 2$

8. **Extrae factor común en cada caso:**

a) $2xy + 3xy^2$ **b) $2x^2 + 2x + 2y$**

c) $2x^2 + 2x + 4$ **d) $3x^2 + 4x$**

e) $5x^2 + 10x$ **f) $4x^2 + 8x$**

g) $3x^2 + 3x + 3$ **h) $6x^2 + 9x - 3$**

i) $5xy + 4x^2$ **j) $x^3 + x^2 + x$**

k) $2y^3 - 8x^2y$ **l) $4x^2 + 16x^2y - 8$**

a) $2xy + 3xy^2 = xy(2 + 3y)$

b) $2x^2 + 2x + 2y = 2(x^2 + x + y)$

c) $2x^2 + 2x + 4 = 2(x^2 + x + 2)$

d) $3x^2 + 4x = x(3x + 4)$

e) $5x^2 + 10x = 5x(x + 2)$

f) $4x^2 + 8x = 4x(x + 2)$

g) $3x^2 + 3x + 3 = 3(x^2 + x + 1)$

h) $6x^2 + 9x - 3 = 3(x^2 + 3x - 1)$

i) $5xy + 4x^2 = x(5y + 4x)$

j) $x^3 + x^2 + x = x(x^2 + x + 1)$

k) $2y^3 - 8x^2y = 2y(y^2 - 4x^2)$

l) $4x^2 + 16x^2y - 8 = 4(x^2 + 4x^2y - 2)$

4 Identidades

Página 79

1. Desarrolla las siguientes expresiones:

a) $(x + 1)^2$

b) $(x + 3)^2$

c) $(x - 3)^2$

d) $(x + 1)(x - 1)$

e) $(x + 3)\ (x - 3)$

f) $(2x - 1)^2$

g) $(5x + 2)^2$

h) $(5x + 2y)^2$

i) $(2x - 5)(2x + 5)$

j) $(x^2 + 2)(x^2 - 2)$

a) $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

b) $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

c) $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$

d) $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$

e) $(x + 3)(x - 3) = x^2 - 9$

f) $(2x - 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$

g) $(5x + 2)^2 = 25x^2 + 20x + 4$

h) $(5x + 2y)^2 = 25x^2 + 20xy + 4y^2$

g) $(2x + 5)(2x - 5) = 4x^2 - 25$

h) $(x^2 + 2)(x^2 - 2) = x^4 - 4$

Página 81

1. Expresa como una suma por una diferencia:

a) $x^2 - 49$ **b)** $x^2 - 81$ **c)** $x^2 - 100$

d) $4x^2 - 36$ **e)** $9x^2 - 1$ **f)** $16x^2 - \frac{1}{4}$

a) $x^2 - 49 = (x + 7)(x - 7)$ b) $x^2 - 81 = (x + 9)(x - 9)$ c) $x^2 - 100 = (x + 10)(x - 10)$

d) $4x^2 - 36 = (2x + 6)(2x - 6)$ e) $9x^2 - 1 = (3x + 1)(3x - 1)$ f) $16x^2 - \frac{1}{4} = \left(4x + \frac{1}{2}\right)\left(4x - \frac{1}{2}\right)$

2. Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia:

a) $x^2 + 16 + 8x$ **b)** $x^2 + 25 - 10x$ **c)** $x^2 + 36 - 12x$

d) $x^2 + 36 + 12x$ **e)** $9x^2 + 4 + 12x$ **f)** $25x^2 + 1 - 10x$

a) $x^2 + 16 + 8x = (x + 4)^2$ b) $x^2 + 25 - 10x = (x - 5)^2$ c) $x^2 + 36 - 12x = (x - 6)^2$

d) $x^2 + 36 + 12x = (x + 6)^2$ e) $9x^2 + 4 + 12x = (3x + 2)^2$ f) $25x^2 + 1 - 10x = (5x - 1)^2$

3. Expresa en forma de producto:

a) $x^2 - 1$ **b)** $x^2 - 4$ **c)** $4x^2 - 25$

d) $x^2 + 4 + 4x$ **e)** $x^2 + 2x + 1$ **f)** $4x^2 + 9 - 12x$

g) $4x^2 + 4x + 1$ **h)** $x^2 - 2x + 1$ **i)** $\frac{x^2}{4} + x + 1$

a) $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ b) $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$ c) $4x^2 - 25 = (2x + 5)(2x - 5)$

d) $x^2 + 4 + 4x = (x + 2)^2$ e) $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ f) $4x^2 + 9 - 12x = (2x - 3)^2$

g) $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$ h) $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ i) $\frac{x^2}{4} + x + 1 = \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2$

4. Simplifica:

a) $(x - 2)(x + 2) - (x^2 + 4)$ **b)** $(3x - 1)^2 - (3x + 1)^2$

c) $2(x - 5)^2 - (2x^2 + 3x + 50)$ **d)** $(2x - 4)^2 - (2x + 4)(2x - 4)$

a) $(x - 2)(x + 2) - (x^2 + 4) = x^2 - 4 - x^2 - 4 = -8$

b) $(3x - 1)^2 - (3x + 1)^2 = 9x^2 - 6x + 1 - (9x^2 + 6x + 1) = 9x^2 - 6x + 1 - 9x^2 - 6x - 1 = -12x$

c) $2(x - 5)^2 - (2x^2 + 3x + 50) = 2(x^2 - 10x + 25) - (2x^2 + 3x + 50) = 2x^2 - 20x + 50 - 2x^2 - 3x - 50 = -23x$

d) $(2x - 4)^2 - (2x + 4)(2x - 4) = 4x^2 + 16 - 16x - (4x^2 - 16) = 4x^2 + 16 - 16x - 4x^2 + 16 = 32 - 16x$

5. Simplifica:

a) $3(x^2 + 5) - (x^2 + 40)$ **b)** $3x^2 - 2(x + 5) - (x + 3)^2 + 19$ **c)** $(x + 3)^2 - [x^2 + (x - 3)^2]$

a) $3(x^2 + 5) - (x^2 + 40) = 3x^2 + 15 - x^2 - 40 = 2x^2 - 25$

b) $3x^2 - 2(x + 5) - (x + 3)^2 + 19 = 3x^2 - 2x - 10 - (x^2 + 6x + 9) + 19 =$

$= 3x^2 - 2x - 10 - x^2 - 6x - 9 + 19 = 2x^2 - 8x$

c) $(x + 3)^2 - [x^2 + (x - 3)^2] = x^2 + 6x + 9 - (x^2 + x^2 - 6x + 9) =$

$= x^2 + 6x + 9 - (2x^2 - 6x + 9) = x^2 + 6x + 9 - 2x^2 + 6x - 9 = -x^2 + 12x$

6. Saca factor común en el numerador y en el denominador y simplifica.

a) $\dfrac{5x-5}{2x^2-2x}$ b) $\dfrac{3x^3-3x^2}{6x^3-12x^2}$ c) $\dfrac{4x^3-2x}{6x^4-3x^2}$

a) $\dfrac{5x-5}{2x^2-2x} = \dfrac{5(x-1)}{2x(x-1)} = \dfrac{5}{2x}$

b) $\dfrac{3x^3-3x^2}{6x^3-12x^2} = \dfrac{3x^2(x-1)}{6x^2(x-2)} = \dfrac{x-1}{2(x-2)}$

c) $\dfrac{4x^3-2x}{6x^4-3x^2} = \dfrac{2x(2x^2-1)}{3x^2(2x^2-1)} = \dfrac{2}{3x}$

7. Utiliza las identidades notables para factorizar y, después, simplifica.

a) $\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$ b) $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2-9}$ c) $\dfrac{9x^2-4}{9x^2+4-12x}$

a) $\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x+1}{x-1}$

b) $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2-9} = \dfrac{(x+3)^2}{(x+3)(x-3)} = \dfrac{x+3}{x-3}$

c) $\dfrac{9x^2-4}{9x^2+4-12x} = \dfrac{(3x-2)(3x+2)}{(3x-2)^2} = \dfrac{3x+2}{3x-2}$

8. Reduce.

a) $\dfrac{15x+15}{3x^2+6x+3}$ b) $\dfrac{x^2-5x}{x^3-10x^2+25x}$ c) $\dfrac{3x^3-12x}{6x^3-12x^2}$

a) $\dfrac{15x+15}{3x^2+6x+3} = \dfrac{15(x+1)}{3(x^2+2x+1)} = \dfrac{15(x+1)}{3(x+1)^2} = \dfrac{5}{x+1}$

b) $\dfrac{x^2-5x}{x^3-10x^2+25x} = \dfrac{x(x-5)}{x(x^2-10x+25)} = \dfrac{x(x-5)}{x(x-5)^2} = \dfrac{1}{x-5}$

c) $\dfrac{3x^3-12x}{6x^3-12x^2} = \dfrac{3x(x^2-4)}{6x^2(x-2)} = \dfrac{3x(x+2)(x-2)}{6x^2(x-2)} = \dfrac{x+2}{2x}$

9. Multiplica por 8 la siguiente expresión y simplifica el resultado:

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}-\frac{3x}{4}-\frac{1}{4}$$

$$8\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}-\frac{3x}{4}-\frac{1}{4}\right) = \frac{8x}{2}+\frac{8x}{4}+\frac{8x}{8}-\frac{24x}{4}-\frac{8}{4} = 4x+2x+x-6x-2 = x-2$$

10. Multiplica por 9 la expresión siguiente y simplifica el resultado:

$$x-\frac{2x-3}{9}-\frac{x-1}{3}-\frac{12x+4}{9}$$

$$9\left(x-\frac{2x-3}{9}-\frac{x-1}{3}-\frac{12x+4}{9}\right) = 9x-\frac{9(2x-3)}{9}-\frac{9(x-1)}{3}-\frac{9(12x+4)}{9} =$$

$$= 9x-(2x-3)-3(x-1)-(12x+4) = 9x-2x+3-3x+3-12x-4 = -8x+2$$

11. Multiplica cada expresión por el mínimo común múltiplo de sus denominadores y simplifica:

a) $x - \frac{x}{2} + \frac{x-1}{6} - \frac{2x-3}{9}$ **b)** $\frac{x+1}{5} - \frac{x}{3} + \frac{2x-5}{15} + 2x$

a) Mín.c.m (2, 6, 9) = 18

$$x - \frac{x}{2} + \frac{x-1}{6} - \frac{2x-3}{9} = 18\left(x - \frac{x}{2} + \frac{x-1}{6} - \frac{2x-3}{9}\right) = 18x - \frac{18x}{2} + \frac{18\,(x-1)}{6} - \frac{18\,(2x-3)}{9} =$$

$$= 18x - 9x + 3(x-1) - 2(2x-3) = 18x - 9x + 3x - 3 - 4x + 6 = 8x + 3$$

b) Mín.c.m (5, 3, 15) = 15

$$\frac{x+1}{5} - \frac{x}{3} + \frac{2x-5}{15} + 2x = 15\left(\frac{x+1}{5} - \frac{x}{3} + \frac{2x-5}{15} + 2x\right) = \frac{15\,(x+1)}{5} - \frac{15x}{3} + \frac{15\,(2x-5)}{15} + 30x =$$

$$= 3(x+1) - 5x + (2x-5) + 30x = 3x + 3 - 5x + 2x - 5 + 30x = 30x - 2$$

Ejercicios y problemas

Página 82

Practica

Traducción a lenguaje algebraico

1. **Asocia a cada uno de los siguientes enunciados una de las expresiones algebraicas:**

a) A un número se le quita 7.

b) El doble de un número más su cuadrado.

c) Un múltiplo de 3 menos 1.

d) El 20 % de un número.

e) Cuatro veces un número menos sus dos tercios.

f) El precio de un pantalón aumentado en un 10 %.

g) Un número impar.

$0{,}2x$
$2x + 1$
$2x + x^2$
$1{,}1x$
$4x - \frac{2x}{3}$
$3x - 1$
$x - 7$

a) A un número se le quita 7 $\rightarrow$ $x - 7$

b) El doble de un número más su cuadrado $\rightarrow$ $2x + x^2$

c) Un múltiplo de 3 menos 1 $\rightarrow$ $3x - 1$

d) El 20 % de un número $\rightarrow$ $0{,}2x$

e) Cuatro veces un número menos sus dos tercios $\rightarrow$ $4x - \frac{2x}{3}$

f) El precio de un pantalón aumentado un 10 % $\rightarrow$ $1{,}1x$

g) Un número impar $\rightarrow$ $2x + 1$

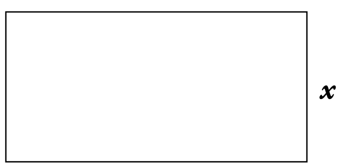
2. **Llama x al ancho de un rectángulo y expresa su altura en cada caso:**

a) La altura es la mitad del ancho.

b) La altura es 20 cm menor que el ancho.

c) La altura es los tres cuartos del ancho.

d) La altura es un 20 % menor que su ancho.



x $\rightarrow$ ancho del rectángulo

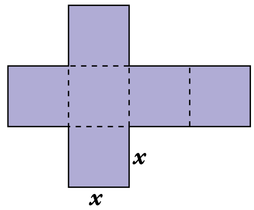
a) $\frac{x}{2}$ b) $x - 20$ c) $\frac{3x}{4}$ d) $0{,}8x$

3. **Expresa con un monomio:**

a) El perímetro de esta figura.

b) El área de la misma.

c) El volumen del cubo que se puede formar con esos seis cuadrados.



a) $14x$ b) $6x^2$ c) x^3

4. **Traduce a lenguaje algebraico, empleando una sola incógnita.**

a) Los tres quintos de un número menos 1.

b) La suma de tres números consecutivos.

c) Un múltiplo de 3 más su doble.

d) La suma de un número y su cuadrado.

e) El producto de un número por su siguiente.

x = número

a) $\frac{3x}{5} - 1$

b) $(x - 1) + x + (x + 1)$

c) $3x + 2 \cdot 3x$

d) $x + x^2$

e) $x + x(x + 1)$

5. **Ejercicio resuelto en el libro del alumno.**

6. **Traduce a lenguaje algebraico, utilizando dos incógnitas:**

a) El cuadrado de la suma de dos números.

b) El doble del producto de dos números.

c) La semisuma de dos números.

$x \rightarrow$ número, $y \rightarrow$ otro número

a) $(x + y)^2$ b) $2xy$ c) $\frac{x + y}{2}$

Monomios

7. **Calcula.**

a) $-x^3 - 2x^3 + 3x^3$ **b)** $2x^4 \cdot x$ **c)** $x - \frac{2x}{5} - \frac{1}{3}x$

d) $3x^5 \cdot \frac{5}{6}x^2$ **e)** $\frac{5}{3}x^2 - x^2 + \frac{x^2}{2}$ **f)** $\left(\frac{1}{3}xy\right) \cdot \left(\frac{2}{3}xz\right)$

a) $-x^3 - 2x^3 + 3x^3 = 0$

b) $2x^4 \cdot x = 2x^5$

c) $x - \frac{2x}{5} - \frac{1}{3}x = \frac{15x}{15} - \frac{6x}{15} - \frac{5x}{15} = \frac{4x}{15}$

d) $3x^5 \cdot \frac{5}{6}x^2 = \frac{15}{6}x^7 = \frac{5}{2}x^7$

e) $\frac{5}{3}x^2 - x^2 + \frac{x^2}{2} = \frac{10}{6}x^2 - \frac{6}{6}x^2 + \frac{3}{6}x^2 = \frac{7}{6}x^2$

f) $\left(\frac{1}{3}xy\right) \cdot \left(\frac{2}{3}xz\right) = \frac{2}{9}x^2yz$

Polinomios

8. **Considera estos polinomios:**

$A = x^4 - 3x^2 + 5x - 1$ $\qquad$ $B = 2x^2 - 6x + 3$ $\qquad$ $C = 2x^4 + x^3 - x - 4$

Calcula: $A + B \quad A + C \quad A + B + C \quad A - B \quad C - B$

$A + B = (x^4 - 3x^2 + 5x - 1) + (2x^2 - 6x + 3) = x^4 - x^2 - x + 2$

$A + C = (x^4 - 3x^2 + 5x - 1) + (2x^4 + x^3 - x - 4) = 3x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x - 5$

$A + B + C = (x^4 - 3x^2 + 5x - 1) + (2x^2 - 6x + 3) + (2x^4 + x^3 - x - 4) = 3x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$

$A - B = (x^4 - 3x^2 + 5x - 1) - (2x^2 - 6x + 3) = x^4 - 3x^2 + 5x - 1 - 2x^2 + 6x - 3 = x^4 - 5x^2 + 11x - 4$

$C - B = (2x^4 + x^3 - x - 4) - (2x^2 - 6x + 3) = 2x^4 + x^3 - x - 4 - 2x^2 + 6x - 3 = 2x^4 + x^3 - 2x^2 + 5x - 7$

9. **Simplifica estas expresiones:**

a) $2x^3 - 5x + 3 - 1 - 2x^3 + x^2$ $\qquad$ **b)** $(2x^2 + 5x - 7) - (x^2 - 6x + 1)$

c) $3x - (2x + 8) - (x^2 - 3x)$ $\qquad$ **d)** $7 - 2(x^2 + 3) + x(x - 3)$

a) $2x^3 - 5x + 3 - 1 - 2x^3 + x^2 = x^2 - 5x + 2$

b) $(2x^2 + 5x - 7) - (x^2 - 6x + 1) = 2x^2 + 5x - 7 - x^2 + 6x - 1 = x^2 + 11x - 8$

c) $3x - (2x + 8) - (x^2 - 3x) = 3x - 2x - 8 - x^2 + 3x = -x^2 + 4x - 8$

d) $7 - 2(x^2 + 3) + x(x - 3) = 7 - 2x^2 - 6 + x^2 - 3x = -x^2 - 3x + 1$

Página 83

10. **Opera y simplifica.**

a) $(2x)^3 - (3x)2x - 5x^2(-3x + 1)$

b) $\frac{5}{3}\left(\frac{3}{4}x\right)(-4x) - \frac{1}{2}(4x^2 - 5)$

c) $(2x^2 - x + 3) \cdot (x - 3)$

d) $(x^2 - 5x - 1) \cdot (x - 2)$

e) $(3x^3 - 5x^2 + 6) \cdot (2x + 1)$

f) $(2x^2 + x - 3) \cdot (x^2 - 2)$

a) $(2x)^3 - (3x)2x - 5x^2(-3x + 1) = 8x^3 - 6x^2 + 15x^3 - 5x^2 = 23x^3 - 11x^2$

b) $\frac{5}{3}\left(\frac{3}{4}x\right)(-4x) - \frac{1}{2}(4x^2 - 5) = \frac{5 \cdot 3(-4)}{3 \cdot 4}x - \frac{4x^2}{2} + \frac{5}{2} = -5x - 4x^2 + \frac{5}{2} = -4x^2 - 5x + \frac{5}{2}$

c) $(2x^2 - x + 3) \cdot (x - 3) = 2x^3 - 6x^2 - x^2 + 3x + 3x - 9 = 2x^3 - 7x^2 + 6x - 9$

d) $(x^2 - 5x - 1) \cdot (x - 2) = x^3 - 2x^2 - 5x^2 + 10x - x + 2 = x^3 - 7x^2 + 9x + 3$

e) $(3x^3 - 5x^2 + 6) \cdot (2x + 1) = 6x^4 + 3x^3 - 10x^3 - 5x^2 + 12x + 6 = 6x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 12x + 6$

f) $(2x^2 + x - 3) \cdot (x^2 - 2) = 2x^4 - 4x^2 + x^3 - 2x - 3x^2 + 6 = 2x^4 + x^3 - 7x^2 - 2x + 6$

11. **Extrae factor común.**

a) $5x + 5y + 5z$

b) $5x + 3xy$

c) $3x^2 + 4x$

d) $5x^3 + 3x^2$

e) $2x^4 - 6x^2$

f) $2x^3 + 3x^2 + 5x$

g) $x^6 + x^4 + x$

h) $\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x$

i) $2x^2y - 2xy$

a) $5x + 5y + 5z = 5(x + y + z)$

b) $5x + 3xy = x(5 + 3y)$

c) $3x^2 + 4x = x(3x + 4)$

d) $5x^3 + 3x^2 = x^2(5x + 3)$

e) $2x^4 - 6x^2 = 2x^2(x^2 - 3)$

f) $2x^3 + 3x^2 + 5x = x(2x^2 + 3x + 5)$

g) $x^6 + x^4 + x = x(x^5 + x^3 + 1)$

h) $\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x(x^3 + 1)$

i) $2x^2y - 2xy = 2xy(x - 1)$

Identidades notables

12. **Desarrolla los siguientes cuadrados:**

a) $(x + 7)^2$

b) $(x - 11)^2$

c) $(2x + 1)^2$

d) $(3x - 4)^2$

a) $(x + 7)^2 = x^2 + 14x + 49$

b) $(x - 11)^2 = x^2 - 22x + 121$

c) $(2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$

d) $(3x - 4)^2 = 9x^2 - 24x + 16$

13. **Transforma en diferencia de cuadrados:**

a) $(x + 7)(x - 7)$

b) $(1 + x)(1 - x)$

c) $(3 - 4x)(3 + 4x)$

d) $(2x - 1)(2x + 1)$

a) $(x + 7)(x - 7) = x^2 + 49$

b) $(1 + x)(1 - x) = 1 - x^2$

c) $(3 - 4x)(3 + 4x) = 9 - 16x^2$

d) $(2x - 1)(2x + 1) = 4x^2 - 1$

14. **Reduce las siguientes expresiones:**

a) $\dfrac{3(x+3)}{2}-2(2-3x)+2(-x+3)$ **b)** $\dfrac{3x+3}{4}-\dfrac{3x-2}{3}-\dfrac{x+3}{12}$ **c)** $\dfrac{x+7}{2}-\dfrac{7-x}{7}-\dfrac{x-7}{12}$

a) $\dfrac{3(x+3)}{2}-2(2-3x)+2(-x+3)=\dfrac{3x+9}{2}-4+6x-2x+6=$

$=\dfrac{3x+9}{2}-\dfrac{8}{2}+\dfrac{12x}{2}-\dfrac{4x}{2}+\dfrac{12}{2}=\dfrac{11}{2}x+\dfrac{13}{2}$

b) $\dfrac{3x+3}{4}-\dfrac{3x-2}{3}-\dfrac{x+3}{12}=\dfrac{9x-9}{12}-\dfrac{12x-8}{12}-\dfrac{x+3}{12}=$

$=\dfrac{9x+9-12x+8-x-3}{12}=\dfrac{-4x+14}{12}=\dfrac{-2x+7}{6}$

c) $\dfrac{x+7}{2}-\dfrac{7-x}{7}-\dfrac{x-7}{12}=\dfrac{42x+294}{84}-\dfrac{84-12x}{84}-\dfrac{7x-49}{84}=$

$=\dfrac{42x+294-84+12x-7x+49}{84}=\dfrac{47x+259}{84}$

15. **Reduce las siguientes expresiones:**

a) $(x+1)(x-1)-3(x+2)-x(x+2)$

b) $(2x+3)^2-(2x-3)^2-x(x+3)$

c) $\dfrac{5+x}{4}-\dfrac{5-x}{5}-\dfrac{1+x}{4}$

d) $\dfrac{2}{3}(x+3)-\dfrac{1}{2}(x+1)+\dfrac{3}{4}(x+3)$

e) $\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\left(x+\dfrac{1}{3}\right)-\dfrac{1}{3}(x^2+1)$

f) $(x+1)^2-(x-2)(x-3)-\dfrac{5}{4}x$

g) $\dfrac{x(x-3)}{2}+\dfrac{x(x-2)}{4}-\dfrac{(3x-2)^2}{8}$

a) $(x+1)(x-1)-3(x+2)-x(x+2)=x^2-1-3x-6-x^2-2x=-5x-7$

b) $(2x+3)^2-(2x-3)^2-x(x+3)=4x^2+12x+9-(4x^2-12x+9)-x^2-3x=$

$=4x^2+12x+9-4x^2+12x-9-x^2-3x=-x^2+21x$

c) $\dfrac{5+x}{4}-\dfrac{5-x}{5}-\dfrac{1+x}{4}=\dfrac{25+5x}{20}-\dfrac{20-4x}{20}-\dfrac{5+5x}{20}=\dfrac{25+5x-20+4x-5-5x}{20}=\dfrac{4x}{20}=\dfrac{x}{5}$

d) $\dfrac{2}{3}(x+3)-\dfrac{1}{2}(x+1)+\dfrac{3}{4}(x+3)=\dfrac{8}{12}(x+3)-\dfrac{6}{12}(x+1)+\dfrac{9}{12}(x+3)=$

$=\dfrac{8x+24-6x-6+9x+27}{12}=\dfrac{11x+45}{12}$

e) $\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\left(x+\dfrac{1}{3}\right)-\dfrac{1}{3}(x^2+1)=x^2-\dfrac{1}{9}-\dfrac{x^2+1}{3}=\dfrac{9x^2}{9}-\dfrac{1}{9}-\dfrac{3x^2+3}{9}=\dfrac{6x^2-4}{9}$

f) $(x+1)^2-(x-2)(x-3)-\dfrac{5}{4}x=x^2+2x+1-(x^2-2x-3x+6)-\dfrac{5}{4}x=$

$=x^2+2x+1-x^2+2x+3x-6-\dfrac{5}{4}x=7x-\dfrac{5}{4}x-5=\dfrac{28x-5x}{4}-5=\dfrac{23x}{4}-5$

g) $\dfrac{x(x-3)}{2}+\dfrac{x(x-2)}{4}-\dfrac{(3x-2)^2}{8}=\dfrac{4(x^2-3x)}{8}+\dfrac{2(x^2-2x)}{8}-\dfrac{9x^2-12x+4}{8}=$

$=\dfrac{4x^2-12x+2x^2-4x-9x^2+12x-4}{8}=\dfrac{-3x^2-4x-4}{8}$

16. **Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia.**

a) $x^2 + 4x + 4$ **b)** $x^2 - 10x + 25$ **c)** $x^2 + 9 + 6x$ **d)** $x^2 + 49 - 14x$

e) $4x^2 + 4x + 1$ **f)** $4x^2 + 9 - 12x$ **g)** $9x^2 - 12x + 4$ **h)** $x^4 + 4x^2 + 4$

a) $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$

b) $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$

c) $x^2 + 9 + 6x = (x + 3)^2$

d) $x^2 + 49 - 14x = (x - 7)^2$

e) $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$

f) $4x^2 + 9 - 12x = (2x - 3)^2$

h) $9x^2 - 12x + 4 = (3x - 2)^2$

h) $x^4 + 4x^2 + 4 = (x^2 + 2)^2$

17. **Expresa como producto de una suma por una diferencia.**

a) $9x^2 - 25$ **b)** $1 - x^2$ **c)** $4x^2 - 9$

d) $16x^2 - 1$ **e)** $x^4 - 16$ **f)** $49 - 4x^2$

a) $(3x + 5)(3x - 5)$ b) $(1 + x)(1 - x)$ c) $(2x + 3)(2x - 3)$

d) $(4x + 1)(4x - 1)$ e) $(x^2 + 4)(x^2 - 4)$ f) $(7 + 2x)(7 - 2x)$

18. **Reduce.**

a) $\dfrac{4x-8}{3x-6}$ **b)** $\dfrac{10x^2-5x}{5x^2+5x}$ **c)** $\dfrac{3x^2-5x}{64-10x^2}$

d) $\dfrac{5x^2+15}{5x^2-45}$ **e)** $\dfrac{x^2-4}{x^2+2x+4}$ **f)** $\dfrac{x^2-6x+9}{6x^3-3x^2}$

a) $\dfrac{4x-8}{3x-6} = \dfrac{4(x-2)}{3(x-2)} = \dfrac{4}{3}$

b) $\dfrac{10x^2-5x}{5x^2+5x} = \dfrac{5x(2x-1)}{5x(x+1)} = \dfrac{2x-1}{x+1}$

c) $\dfrac{3x^2-5x}{64-10x^2} = \dfrac{x(3x-5)}{2(32-5x^2)}$

d) $\dfrac{5x^2+15}{5x^2-45} = \dfrac{5(x^2+3)}{5(x^2-9)} = \dfrac{x^2+3}{(x+3)(x-3)}$

e) $\dfrac{x^2-4}{x^2+2x+4} = \dfrac{(x+2)(x-2)}{x^2+2x+4}$

f) $\dfrac{x^2-6x+9}{6x^3-3x^2} = \dfrac{(x-3)^2}{3x^2(2x-1)}$

Curiosidades matemáticas

El álgebra, ¿es una ayuda?

El álgebra, utilizando letras en vez de números, puede facilitar enormemente los cálculos. Como ejemplo, piensa la forma de calcular el valor de:

$$88\,888^2 - 88\,889 \cdot 88\,887$$

Antes de cansarte mucho, opera y reduce la siguiente expresión algebraica: $a^2 - (a + 1) \cdot (a - 1)$

¿Te aclara algo? Fíjate en que a *puede ser cualquier número.*

$a^2 - (a + 1) \cdot (a - 1) = a^2 - (a^2 - 1) = a^2 - a^2 + 1 = 1$

Si $a = 88\,888 \rightarrow 88\,888^2 - 88\,889 \cdot 88\,887 = 1$

Sin hacer operaciones

¿Serías capaz de calcular, sin operar, el valor de esta expresión?

$$\mathbf{123\,450^2 - 123\,460 \cdot 123\,440}$$

$123\,450^2 - 123\,460 \cdot 123\,440$

Fijándonos en la actividad anterior, esta expresión la podemos sustituir como

$$a^2 - (a + 10) \cdot (a - 10) \rightarrow a^2 - (a^2 - 100) = a^2 - a^2 + 100 = 100$$

Por tanto, la solución de esta expresión es 100.

$$123\,450^2 - 123\,460 \cdot 123\,440 = 100$$

Pájaros

Mi tío Pío tiene en casa varios pájaros.

— Todos menos dos son canarios.

— Todos son jilgueros, menos dos.

— Solo dos no son periquitos.

¿Cuántos pájaros tiene mi tío Pío?

Hay canarios, jilgueros y periquitos.

Como todos son canarios menos dos, esos dos tienen que ser un jilguero y un periquito.

Como todos son jilgueros menos dos, esos dos tienen que ser un canario y un periquito.

La tercera afirmación confirma que hay un canario, un jilguero y un periquito. Es decir, el tío Pío tiene 3 pájaros.

1 Ecuaciones

Página 85

1. **¿Es $x = 5$ solución de alguna de estas ecuaciones?**

a) $7x + 1 = 34$ **b)** $x^2 - 10 = 15$ **c)** $1^x = 5$ **d)** $2^x = 32$

Justifica tu respuesta.

a) $7 \cdot 5 + 1 = 36 \neq 34$ $\to$ No es solución porque no cumple la igualdad.

b) $5^2 - 10 = 25 - 10 = 15$ $\to$ Es solución porque cumple la igualdad.

c) $1^5 = 1 \neq 5$ $\to$ No es solución porque no cumple la igualdad.

d) $2^5 = 32$ $\to$ Es solución porque cumple la igualdad.

2. **Obtén "a ojo" una solución de cada una de estas ecuaciones:**

a) $2x - 1 = 5$ **b)** $\dfrac{x^3}{3} = 9$ **c)** $x^2 - 1 = 35$ **d)** $\sqrt{x+1} = 6$

a) $x = 3$ b) $x = 3$ c) $x = 6$ d) $x = 35$

2 Ecuaciones de primer grado

Página 87

1. **Resuelve mentalmente. Indica, si es el caso, cuándo la ecuación no tiene solución o tiene infinitas soluciones.**

a) $5x = 15$ **b)** $3x = -6$ **c)** $-2x = 10$

d) $-4x = -20$ **e)** $3x = 1$ **f)** $-2x = 10$

g) $6x = 0$ **h)** $0x = 6$ **i)** $0x = 0$

a) $5x = 15 \rightarrow x = 3$

b) $3x = -6 \rightarrow x = -2$

c) $-2x = 10 \rightarrow x = -5$

d) $-4x = -20 \rightarrow x = 5$

e) $3x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{3}$

f) $-2x = 10 \rightarrow x = -5$

g) $6x = 0 \rightarrow x = 0$

h) $0x = 6 \rightarrow$ No tiene solución

i) $0x = 0 \rightarrow$ Tiene infinitas soluciones

2. **Resuelve estas ecuaciones. ¿Son equivalentes?**

a) $4x - x = 1 + x$ **b)** $10 - 7x - 6x = 5 - 3x$

c) $4x + 6 - x = 5x + 5$ **d)** $9 = 9x - x - 3 - 2x$

a) $4x - x = 1 + x \rightarrow 3x = 1 + x \rightarrow 3x - x = 1 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

b) $10 - 7x - 6x = 5 - 3x \rightarrow 10 - 13x = 5 - 3x \rightarrow 10 - 5 = 13x - 3x \rightarrow 5 = 10x \rightarrow$

$\rightarrow \frac{5}{10} = x \rightarrow x = \frac{1}{2}$

c) $4x + 6 - x = 5x + 5 \rightarrow 3x + 6 = 5x + 5 \rightarrow 6 - 5 = 5x - 3x \rightarrow 1 = 2x \rightarrow x = \frac{1}{2}$

d) $9 = 9x - x - 3 - 2x \rightarrow 9 = 6x - 3 \rightarrow 9 + 3 = 6x \rightarrow 12 = 6x \rightarrow \frac{12}{6} = x \rightarrow x = 2$

a), b) y c) sí son equivalentes, ya que las tres tienen el mismo resultado, $x = \frac{1}{2}$, pero d) no es equivalente con ninguna, debido a que sus resultados son distintos.

3. **Resuelve y comprueba que tus soluciones coinciden con las que se ofrecen debajo.**

a) $11x - 3 + x = 10x - 13$

b) $x - 3 - 4x = 3x - 4 + x$

c) $9 - 3x - 2 - 3x = 1 - 3x + 3 - x$

d) $8x = 6x - 4x - 3 + x + 7 + 5x - 2$

e) $7x + 12 - 4x - 3 = 10 + 2x - 1 + x$

***Soluciones*: a) –5; b) 1/7; c) 3/2; d) Sin solución; e) Infinitas soluciones.**

a) $11x - 3 + x = 10x - 13 \rightarrow 12x - 3 = 10x - 13 \rightarrow 12x - 10x = -13 + 3 \rightarrow$

$\rightarrow 2x = -10 \rightarrow x = \frac{-10}{2} \rightarrow x = -5$

b) $x - 3 - 4x = 3x - 4 + x \rightarrow -3x - 3 = 4x - 4 \rightarrow -3 + 4 = 4x + 3x \rightarrow 1 = 7x \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{1}{7} = x$

c) $9 - 3x - 2 - 3x = 1 - 3x + 3 - x \rightarrow 7 - 6x = 4 - 4x \rightarrow 7 - 4 = 6x - 4x \rightarrow 3 = 2x \rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

d) $8x = 6x - 4x - 3 + x + 7 + 5x - 2 \rightarrow 8x = 8x + 2 \rightarrow 8x - 8x = 2 \rightarrow 0x = 2 \rightarrow$

$\rightarrow$ No tiene solución.

e) $7x + 12 - 4x - 3 = 10 + 2x - 1 + x \rightarrow 3x + 9 = 9 + 3x \rightarrow 3x - 3x = 9 - 9 \rightarrow 0x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow$ Tiene infinitas soluciones.

Página 88

4. Resuelve y comprueba que tus soluciones coinciden con las que se ofrecen debajo.

a) $2x + 3(3x - 2) + x = 10(x - 3) + 14$

b) $x - 3 - 4x = 3(x - 1) + x - 1$

c) $6 = 8x - (x - 5) - 10x$

d) $9 - 4x - 2(1 - x) = 1 - 3(x - 1) - x$

e) $-4 = 5(1 - x) - x - 3(1 + 7x)$

f) $8x = 6x - 4x - 3 + x + 7 + 5x - 2$

g) $7x - 2(x - 1) - 4 = 10 - 4(3 - x) + x$

***Soluciones*: a) –5; b) 1/7; c) –1/3; d) –3/2; e) 2/9; f) Sin solución; g) Infinitas soluciones.**

a) $2x + 9x - 6 + x = 10x - 30 + 14 \rightarrow 12x - 6 = 10x - 16 \rightarrow 12x - 10x = -16 + 6 \rightarrow$

$\rightarrow 2x = -10 \rightarrow x = \dfrac{-10}{2} \rightarrow x = -5$

b) $x - 3 - 4x = 3x - 3 + x - 1 \rightarrow -3x - 3 = 4x - 4 \rightarrow -3 + 4 = 4x + 3x \rightarrow 1 = 7x \rightarrow \dfrac{1}{7} = x$

c) $6 = 8x - x + 5 - 10x \rightarrow 6 = 5 - 3x \rightarrow 3x = 5 - 6 \rightarrow 3x = -1 \rightarrow x = \dfrac{-1}{3}$

d) $9 - 4x - 2 + 2x = 1 - 3x + 3 - x \rightarrow 7 - 2x = 4 - 4x \rightarrow 4x - 2x = 4 - 7 \rightarrow 2x = -3 \rightarrow x = \dfrac{-3}{2}$

e) $-4 = 5 - 5x - x - 3 - 21x \rightarrow -4 = 2 - 27x \rightarrow 27x = 2 + 4 \rightarrow 27x = 6 \rightarrow x = \dfrac{6}{27} \rightarrow x = \dfrac{2}{9}$

f) $8x = 8x + 2 \rightarrow 8x - 8x = 2 \rightarrow 0x = 2 \rightarrow$ No tiene solución.

g) $7x - 2x + 2 - 4 = 10 - 12 + 4x + x \rightarrow 5x - 2 = 5x - 2 \rightarrow 5x - 5x = 2 - 2 \rightarrow 0x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow$ Infinitas soluciones.

5. ¿Qué números pondrías en cada casilla para que la ecuación $\square x + 5 = 2x + \square$…

a) … tenga infinitas soluciones?

b) … no tenga solución?

a) $\boxed{2}x + 5 = 2x + \boxed{5} \rightarrow 2x - 2x = 5 - 5 \rightarrow 0x = 0 \rightarrow$ Infinitas soluciones.

b) En la primera casilla se pone un 2, y en la segunda, cualquier número que sea distinto de 5.

Por ejemplo: $\boxed{2}x + 5 = 2x + \boxed{8} \rightarrow 2x - 2x = 8 - 5 \rightarrow 0x = 3 \rightarrow$ Sin solución.

6. Busca el valor que debe tomar la a en la igualdad

$$3x - a(x + 1) = 5$$

para que la ecuación no tenga solución.

$3x - a(x + 1) = 5 \rightarrow 3x - ax - a = 5 \rightarrow (3 - a)x = 5 + a$

Para que esta ecuación no tenga solución, $3 - a = 0$ y $5 + a \neq 0$. Por tanto, es fácil observar que $a = 3$ cumple ambas condiciones.

7. Considera la igualdad $5a - 2(a + b) = 7 - 3(a - b)$.

a) Calcula el valor de b cuando $a = 3$.

b) Calcula el valor de a cuando $b = 5$.

a) Si $a = 3 \rightarrow 5 \cdot 3 - 2(3 + b) = 7 - 3(3 - b) \rightarrow 15 - 6 - 2b = 7 - 9 + 3b \rightarrow 9 - 2b = -2 + 3b \rightarrow$

$\rightarrow 9 + 2 = 3b + 2b \rightarrow 11 = 5b \rightarrow b = \dfrac{11}{5}$

b) Si $b = 5 \rightarrow 5a - 2(a + 5) = 7 - 3(a - 5) \rightarrow 5a - 2a - 10 = 7 - 3a + 15 \rightarrow 3a - 10 = 22 - 3a \rightarrow$

$\rightarrow 3a + 3a = 22 + 10 \rightarrow 6a = 32 \rightarrow a = \dfrac{16}{3}$

Página 89

8. **Quita denominadores y resuelve.**

a) $\frac{1}{2}+\frac{x}{3}=x-\frac{x}{2}+\frac{3x}{10}$

b) $2-\frac{x}{4}+x=\frac{5x}{8}+1$

c) $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}-\frac{2x}{5}=1$

d) $x-\frac{1}{5}=\frac{2x}{3}-\frac{13x}{15}+1$

e) $1-\frac{5x}{9}+\frac{x}{6}=x-\frac{2}{3}$

Soluciones: **a) 15/14; b) –8; c) 20/7; d) 1; e) 6/5**

a) $\frac{1}{2}+\frac{x}{3}=x-\frac{x}{2}+\frac{3x}{10} \rightarrow 30\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{3}\right)=30\cdot\left(x-\frac{x}{2}+\frac{3x}{10}\right) \rightarrow 15+10x=30x-15x+9x \rightarrow$

$\rightarrow 15+10x=24x \rightarrow 15=24x-10x \rightarrow$

$\rightarrow 15=14x \rightarrow x=\frac{15}{14}$

b) $2-\frac{x}{4}+x=\frac{5x}{8}+1 \rightarrow 8\cdot\left(2-\frac{x}{4}+x\right)=8\cdot\left(\frac{5x}{8}+1\right) \rightarrow 16-2x+8x=5x+8 \rightarrow$

$\rightarrow 16+6x=5x+8 \rightarrow 6x-5x=8-16 \rightarrow x=-8$

c) $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}-\frac{2x}{5}=1 \rightarrow 20\cdot\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{4}-\frac{2x}{5}\right)=20\cdot 1 \rightarrow 10x+5x-8x=20 \rightarrow 7x=20 \rightarrow x=\frac{20}{7}$

d) $x-\frac{1}{5}=\frac{2x}{3}-\frac{13x}{15}+1 \rightarrow 15\cdot\left(x-\frac{1}{5}\right)=15\cdot\left(\frac{2x}{3}-\frac{13x}{15}+1\right) \rightarrow 15x-3=10x-13x+15 \rightarrow$

$\rightarrow 15x-3=-3x+15 \rightarrow 15x+3x=3+15 \rightarrow 18x=18 \rightarrow x=\frac{18}{18} \rightarrow x=1$

e) $1-\frac{5x}{9}+\frac{x}{6}=x-\frac{2}{3} \rightarrow 18\cdot\left(1-\frac{5x}{9}+\frac{x}{6}\right)=18\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right) \rightarrow 18-10x+3x=18x-12 \rightarrow$

$\rightarrow 18-7x=18x-12 \rightarrow 18+12=18x+7x \rightarrow 30=25x \rightarrow x=\frac{30}{25} \rightarrow x=\frac{6}{5}$

9. **Calcula el valor de x en cada caso:**

a) $\frac{x-1}{5}+\frac{3x}{4}=x-\frac{2x-1}{10}$

b) $\frac{x+2}{6}-\frac{1}{3}=x-\frac{1-3x}{4}$

c) $\frac{3(1+2x)}{8}-\frac{x}{2}=1-\frac{3-x}{4}$

d) $\frac{x-2}{10}-\frac{3x-1}{8}=\frac{2(x+1)}{5}-1$

e) $\frac{4(x-2)}{9}-\frac{3(1-x)}{2}=\frac{21x-11}{8}-\frac{7}{24}$

Soluciones: **a) 2; b) 3/19; c) Sin solución; d) 7/9; e) –52/49**

a) $\frac{x-1}{5}+\frac{3x}{4}=x-\frac{2x-1}{10} \rightarrow 20\cdot\left(\frac{x-1}{5}+\frac{3x}{4}\right)=20\cdot\left(x-\frac{2x-1}{10}\right) \rightarrow$

$\rightarrow 4(x-1)+5\cdot 3x=20x-2(2x-1) \rightarrow 4x-4+15x=20x-4x+2 \rightarrow$

$\rightarrow 19x-4=16x+2 \rightarrow 19x-16x=2+4 \rightarrow 3x=6 \rightarrow x=\frac{6}{3} \rightarrow x=2$

b) $\frac{x+2}{6} - \frac{1}{3} = x - \frac{1-3x}{4} \to 12 \cdot \left(\frac{x+2}{6} - \frac{1}{3}\right) = 12 \cdot \left(x - \frac{1-3x}{4}\right) \to 2(x+2) - 4 = 12x - 3(1-3x) \to$

$\to 2x + 4 - 4 = 12x - 3 + 9x \to 2x = 21x - 3 \to 3 = 21x - 2x \to 3 = 19x \to$

$\to x = \frac{3}{19}$

c) $\frac{3(1+2x)}{8} - \frac{x}{2} = 1 - \frac{3-x}{4} \to 8 \cdot \left(\frac{3(1+2x)}{8} - \frac{x}{2}\right) = 8 \cdot \left(1 - \frac{3-x}{4}\right) \to 3(1+2x) - 4x = 8 - 2(3-x) \to$

$\to 3 + 6x - 4x = 8 - 6 + 2x \to 3 + 2x = 2 + 2x \to 3 - 2 = 2x - 2x \to$

$\to 1 = 0x \to$ No tiene solución.

d) $\frac{x-2}{10} - \frac{3x-1}{8} = \frac{2(x+1)}{5} - 1 \to 40 \cdot \left(\frac{x-2}{10} - \frac{3x-1}{8}\right) = 40 \cdot \left(\frac{2(x+1)}{5} - 1\right) \to$

$\to 4(x-2) - 5(3x-1) = 16(x+1) - 40 \to$

$\to 4x - 8 - 15x + 5 = 16x + 16 - 40 \to -11x - 3 = 16x - 24 \to$

$\to 24 - 3 = 16x + 11x \to 21 = 27x \to x = \frac{21}{27} \to x = \frac{7}{9}$

e) $\frac{4(x-2)}{9} - \frac{3(1-x)}{2} = \frac{21x-11}{8} - \frac{7}{24} \to 72 \cdot \left(\frac{4(x-2)}{9} - \frac{3(1-x)}{2}\right) = 72 \cdot \left(\frac{21x-11}{8} - \frac{7}{24}\right) \to$

$\to 32(x-2) - 108(1-x) = 9(21x-11) - 21 \to$

$\to 32x - 64 - 108 + 108x = 189x - 99 - 21 \to$

$\to 140x - 172 = 189x - 120 \to 120 - 172 = 189x - 140x \to$

$\to -52 = 49x \to x = \frac{-52}{49}$

3 Ecuaciones de segundo grado

Página 91

1. Resuelve estas ecuaciones sin aplicar la fórmula:

a) $5x^2 - 5 = 0$ **b)** $5x^2 + 5 = 0$

c) $2x^2 + 3 = 35$ **d)** $x^2 - 9x = 0$

e) $2x^2 - 6x = 0$ **f)** $5x^2 + 5x = 0$

g) $8x^2 - 16x = 0$ **h)** $4x^2 = 36$

i) $x^2 + 1 = 0$ **j)** $x^2 + x = 0$

a) $5x^2 - 5 = 0 \rightarrow 5x^2 = 5 \rightarrow x^2 = \frac{5}{5} = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

b) $5x^2 + 5 = 0 \rightarrow 5x^2 = -5 \rightarrow x^2 = \frac{-5}{5} = -1 \rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \rightarrow$ No tiene solución.

c) $2x^2 + 3 = 35 \rightarrow 2x^2 = 35 - 3 \rightarrow 2x^2 = 32 \rightarrow x^2 = \frac{32}{2} = 16 \rightarrow x = \pm\sqrt{16} \begin{cases} x = 4 \\ x = -4 \end{cases}$

d) $x^2 - 9x = 0 \rightarrow x(x - 9) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x - 9 = 0 \rightarrow x = 9 \end{cases}$

e) $2x^2 - 6x = 0 \rightarrow 2x(x - 3) = 0 \begin{cases} 2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \end{cases}$

f) $5x^2 + 5x = 0 \rightarrow 5x(x + 1) = 0 \begin{cases} 5x = 0 \rightarrow x = 0 \\ x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \end{cases}$

g) $8x^2 - 16x = 0 \rightarrow 8x(x - 2) = 0 \begin{cases} 8x = 0 \rightarrow x = 0 \\ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}$

h) $4x^2 = 36 \rightarrow x^2 = \frac{36}{4} = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$

i) $x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \rightarrow$ No tiene solución.

j) $x^2 + x = 0 \rightarrow x(x + 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \end{cases}$

2. Resuelve estas ecuaciones aplicando la fórmula:

a) $x^2 - 6x + 5 = 0$

b) $x^2 + 6x - 7 = 0$

c) $2x^2 + 2x - 24 = 0$

d) $x^2 + 4x + 3 = 0$

e) $x^2 - 10x + 25 = 0$

f) $x^2 - x + 1 = 0$

g) $x^2 + 2x + 1 = 0$

h) $-x^2 + 5x - 6 = 0$

i) $-2x^2 - 12x + 14 = 0$

j) $-x^2 - 2x - 1 = 0$

a) $x^2 - 6x + 5 = 0 \rightarrow a = 1,\ b = -6,\ c = 5$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

$$x = \begin{cases} \dfrac{6+4}{2} \rightarrow x = \dfrac{10}{2} \rightarrow x = 5 \\[2ex] \dfrac{6-4}{2} \rightarrow x = \dfrac{2}{2} \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

b) $x^2 + 6x - 7 = 0 \rightarrow a = 1,\ b = 6,\ c = -7$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 28}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-6 \pm 8}{2}$$

$$x = \begin{cases} \dfrac{-6+8}{2} \rightarrow x = \dfrac{2}{2} \rightarrow x = 1 \\[2ex] \dfrac{-6-8}{2} \rightarrow x = \dfrac{-14}{2} \rightarrow x = -7 \end{cases}$$

c) $2x^2 + 2x - 24 = 0 \rightarrow a = 2,\ b = 2,\ c = -24$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-24)}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 192}}{4} = \frac{-2 \pm \sqrt{196}}{4} = \frac{-2 \pm 14}{4}$$

$$x = \begin{cases} \dfrac{-2+14}{4} \rightarrow x = \dfrac{12}{4} \rightarrow x = 3 \\[2ex] \dfrac{-2-14}{4} \rightarrow x = \dfrac{-16}{4} \rightarrow x = -4 \end{cases}$$

d) $x^2 + 4x + 3 = 0 \rightarrow a = 1,\ b = 4,\ c = 3$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

$$x = \begin{cases} \dfrac{-4+2}{2} \rightarrow x = \dfrac{-2}{2} \rightarrow x = -1 \\[2ex] \dfrac{-4-2}{2} \rightarrow x = \dfrac{-6}{2} \rightarrow x = -3 \end{cases}$$

e) $x^2 - 10x + 25 = 0 \rightarrow a = 1,\ b = -10,\ c = 25$

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

f) $x^2 - x + 1 = 0 \rightarrow a = 1,\ b = -1,\ c = 1$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \rightarrow \text{Sin solución}$$

g) $x^2 + 2x + 1 = 0 \rightarrow a = 1, \; b = 2, \; c = 1$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

h) $-x^2 + 5x - 6 = 0 \rightarrow a = -1, \; b = 5, \; c = -6$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-6)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{-2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{-2} = \frac{-5 \pm 1}{-2}$$

$$x = \begin{cases} \dfrac{-5+1}{-2} \rightarrow x = \dfrac{-4}{-2} \rightarrow x = 2 \\[2ex] \dfrac{-5-1}{-2} \rightarrow x = \dfrac{-6}{-2} \rightarrow x = 3 \end{cases}$$

i) $-2x^2 - 12x + 14 = 0 \rightarrow a = -2, \; b = -12, \; c = 14$

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 14}}{2 \cdot (-2)} = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 112}}{-4} = \frac{12 \pm \sqrt{256}}{-4} = \frac{12 \pm 16}{-4}$$

$$x = \begin{cases} \dfrac{12+16}{-4} \rightarrow x = \dfrac{28}{-4} \rightarrow x = -7 \\[2ex] \dfrac{12-16}{-4} \rightarrow x = \dfrac{-4}{-4} \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

j) $-x^2 - 2x - 1 = 0 \rightarrow a = -1, \; b = -2, \; c = -1$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{-2} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

Página 92

3. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $(x-3)x+1=x^2-5x(x+1)$

b) $3(x-1)-4x=2(x+1)(x-1)+2$

c) $3x^2-(x+3)^2=x^2-17$

d) $2x^2-(x-5)^2=11-(x-6)^2$

e) $5x(x^2-x)+1=x^2(5x-3)+x$

f) $10x+(2x-3)(2x+3)=5-2(x-1)^2$

g) $8x-[x^2+(x-2)^2]=-(x+2)^2$

a) $(x-3)x+1=x^2-5x(x+1) \rightarrow x^2-3x+1=x^2-5x^2-5x \rightarrow x^2-3x+1=-4x^2-5x \rightarrow$

$\rightarrow x^2+4x^2-3x+5x+1=0 \rightarrow 5x^2+2x+1=0$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2} \rightarrow \text{Sin solución}$$

b) $3(x-1)-4x=2(x+1)(x-1)+2 \rightarrow 3x-3-4x=2(x^2-1)+2 \rightarrow -x-3=2x^2-2+2 \rightarrow$

$\rightarrow 2x^2+x+3=0$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 2\cdot 3}}{2\cdot 2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-24}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{-23}}{4} \rightarrow \text{Sin solución}$$

c) $3x^2-(x+3)^2=x^2-17 \rightarrow 3x^2-(x^2+6x+9)=x^2-17 \rightarrow 3x^2-x^2-6x-9=x^2-17 \rightarrow$

$\rightarrow 3x^2-x^2-x^2-6x-9+17=0 \rightarrow x^2-6x+8=0$

$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 1\cdot 8}}{2\cdot 1}=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{6\pm 2}{2}\begin{cases}\dfrac{6+2}{2} \rightarrow x=\dfrac{8}{2} \rightarrow x=4\\[2ex] \dfrac{6-2}{2} \rightarrow x=\dfrac{4}{2} \rightarrow x=2\end{cases}$$

d) $2x^2-(x-5)^2=11-(x-6)^2 \rightarrow 2x^2-(x^2-10x+25)=11-(x^2-12x+36) \rightarrow$

$\rightarrow 2x^2-x^2+10x-25=11-x^2+12x-36 \rightarrow$

$\rightarrow 2x^2-x^2+x^2-12x+10x-25-11+36=0 \rightarrow$

$$\rightarrow 2x^2-2x=0 \rightarrow 2x(x-1)=0\begin{cases}2x=0 \rightarrow x=0\\ x-1=0 \rightarrow x=1\end{cases}$$

e) $5x(x^2-x)+1=x^2(5x-3)+x \rightarrow 5x^3-5x^2+1=5x^3-3x^2+x \rightarrow$

$\rightarrow 5x^3-5x^3-5x^2+3x^2-x+1=0 \rightarrow -2x^2-x+1=0$

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot(-2)\cdot 1}}{2\cdot(-2)}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{-4}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{-4}=\frac{1\pm 3}{-4}\begin{cases}\dfrac{1+3}{-4} \rightarrow x=\dfrac{4}{-4} \rightarrow x=-1\\[2ex] \dfrac{1-3}{-4} \rightarrow x=\dfrac{-2}{-4} \rightarrow x=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

f) $10x + (2x-3)(2x+3) = 5 - 2(x-1)^2 \rightarrow 10x + 4x^2 - 9 = 5 - 2(x^2 - 2x + 1) \rightarrow$

$\rightarrow 4x^2 + 10x - 9 = 5 - 2x^2 + 4x - 2 \rightarrow$

$\rightarrow 4x^2 - 2x^2 + 10x - 4x - 9 - 3 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0 \rightarrow \rightarrow x^2 + x - 2 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} \dfrac{-1+3}{2} \rightarrow x = \dfrac{2}{2} \rightarrow x = 1 \\ \dfrac{-1-3}{2} \rightarrow x = \dfrac{-4}{2} \rightarrow x = -2 \end{cases}$$

g) $8x - [x^2 + (x-2)^2] = -(x+2)^2 \rightarrow 8x - [x^2 + x^2 - 4x + 4] = -(x^2 + 4x + 4) \rightarrow$

$\rightarrow 8x - 2x^2 + 4x - 4 = -x^2 - 4x - 4 \rightarrow$

$\rightarrow -2x^2 + x^2 + 8x + 4x + 4x - 4 + 4 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow -x^2 + 16x = 0 \rightarrow x(-x+16) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ -x + 16 = 0 \rightarrow x = 16 \end{cases}$$

4. Reduce, resuelve y comprueba las soluciones:

a) $x + \dfrac{2x+3}{3} = 1 - \dfrac{2x^2}{3}$ **b)** $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{6} = \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{12}$ **c)** $\dfrac{5x^2}{3} + \dfrac{2x}{5} = \dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{x}{3}$

d) $\dfrac{3x}{2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{2}$ **e)** $\dfrac{x}{3} - 1 + \dfrac{1}{x} = 1 - \dfrac{2}{3x}$

a) $x + \dfrac{2x+3}{3} = 1 - \dfrac{2x^2}{3} \rightarrow 3 \cdot \left(x + \dfrac{2x+3}{3}\right) = 3 \cdot \left(1 - \dfrac{2x^2}{3}\right) \rightarrow 3x + 2x + 3 = 3 - 2x^2 \rightarrow$

$$\rightarrow 2x^2 + 5x = 0 \rightarrow x(2x+5) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 2x + 5 = 0 \rightarrow 2x = -5 \rightarrow x = \dfrac{-5}{2} \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones:

- Si $x = 0 \rightarrow 0 + \dfrac{2 \cdot 0 + 3}{3} = 1 - \dfrac{2 \cdot 0^2}{3} \rightarrow 1 = 1$

- Si $x = \dfrac{-5}{2} \rightarrow \dfrac{-5}{2} + \dfrac{2 \cdot \left(\dfrac{-5}{2}\right) + 3}{3} = 1 - \dfrac{2 \cdot \left(\dfrac{-5}{2}\right)^2}{3} \rightarrow \dfrac{-5}{2} + \dfrac{-5+3}{3} = 1 - \dfrac{\frac{25}{2}}{3} \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{-5}{2} - \dfrac{2}{3} = 1 - \dfrac{25}{6} \rightarrow \dfrac{-15-4}{6} = \dfrac{6-25}{6} \rightarrow \dfrac{-19}{6} = \dfrac{-19}{6}$

b) $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{6} = \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{12} \rightarrow 12 \cdot \left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{6}\right) = 12 \cdot \left(\dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{12}\right) \rightarrow 6x^2 - 2x = 3x - 1 \rightarrow$

$\rightarrow 6x^2 - 2x - 3x + 1 = 0 \rightarrow 6x^2 - 5x + 1 = 0$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{12} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{12} = \frac{5 \pm 1}{12} \begin{cases} \dfrac{5+1}{12} \rightarrow x = \dfrac{6}{12} \rightarrow x = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{5-1}{12} \rightarrow x = \dfrac{4}{12} \rightarrow x = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones:

- Si $x = \frac{1}{2} \to \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{6} = \frac{\frac{1}{2}}{4} - \frac{1}{12} \to \frac{\frac{1}{4}}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{6} = \frac{\frac{1}{2}}{4} - \frac{1}{12} \to \frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{1}{8} - \frac{1}{12}$

- Si $x = \frac{1}{3} \to \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{2} - \frac{\frac{1}{3}}{6} = \frac{\frac{1}{3}}{4} - \frac{1}{12} \to \frac{\frac{1}{9}}{2} - \frac{\frac{1}{3}}{6} = \frac{\frac{1}{3}}{4} - \frac{1}{12} \to \frac{1}{18} - \frac{1}{18} = \frac{1}{12} - \frac{1}{12} \to 0 = 0$

c) $\frac{5x^2}{3} + \frac{2x}{5} = \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{3} \to 30 \cdot \left(\frac{5x^2}{3} + \frac{2x}{5}\right) = 30 \cdot \left(\frac{3x^2}{2} + \frac{x}{3}\right) \to$

$\to 10 \cdot 5x^2 + 6 \cdot 2x = 15 \cdot 3x^2 + 10x \to$

$\to 50x^2 + 12x = 45x^2 + 10x \to$

$\to 50x^2 - 45x^2 + 12x - 10x = 0 \to$

$\to 5x^2 + 2x = 0 \to x(5x + 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 5x + 2 = 0 \to 5x = -2 \to x = \frac{-2}{5} \end{cases}$

Comprobamos las soluciones:

- Si $x = 0 \to \frac{5 \cdot 0^2}{3} + \frac{2 \cdot 0}{5} = \frac{3 \cdot 0^2}{2} + \frac{0}{3} \to 0 = 0$

- Si $x = \frac{-2}{5} \to \frac{5\left(\frac{-2}{5}\right)^2}{3} + \frac{2\left(\frac{-2}{5}\right)}{5} = \frac{3\left(\frac{-2}{5}\right)^2}{2} + \frac{\frac{-2}{5}}{3} \to \frac{5 \cdot \frac{4}{25}}{3} - \frac{\frac{4}{5}}{5} = \frac{3 \cdot \frac{4}{25}}{2} - \frac{\frac{2}{5}}{3} \to$

$\to \frac{4}{15} - \frac{4}{25} = \frac{6}{25} - \frac{2}{15} \to \frac{20}{75} - \frac{12}{75} = \frac{18}{75} - \frac{10}{75} \to \frac{8}{75} = \frac{8}{75}$

d) $\frac{3x}{2} - \frac{1}{x} = \frac{3}{2} \to 2x \cdot \left(\frac{3x}{2} - \frac{1}{x}\right) = 2x \cdot \frac{3}{2} \to 3x^2 - 2 = 3x \to 3x^2 - 3x - 2 = 0$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 24}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{6} \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{33}}{6} \\ x = \frac{3 - \sqrt{33}}{6} \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones:

- Si $x = \frac{3 + \sqrt{33}}{6} \to \frac{3 \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{33}}{6}\right)}{2} - \frac{1}{\frac{3 + \sqrt{33}}{6}} = \frac{3}{2} \to \frac{3 + \sqrt{33}}{4} - \frac{6(3 - \sqrt{33})}{(3 + \sqrt{33})(3 - \sqrt{33})} =$

$= \frac{3 + \sqrt{33}}{4} - \frac{6(3 - \sqrt{33})}{-24} = \frac{6 \cdot (3 + \sqrt{33})}{24} + \frac{6 \cdot (3 - \sqrt{33})}{24} =$

$= \frac{18 + 6\sqrt{33} + 18 - 6\sqrt{33}}{24} = \frac{36}{24} = \frac{3}{2}$

- Si $x = \frac{3-\sqrt{33}}{6} \rightarrow \frac{3\cdot\left(\frac{3-\sqrt{33}}{6}\right)}{2} - \frac{1}{\frac{3-\sqrt{33}}{6}} = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{3-\sqrt{33}}{4} - \frac{6(3+\sqrt{33})}{(3+\sqrt{33})(3-\sqrt{33})} =$

$$= \frac{3-\sqrt{33}}{4} - \frac{6(3+\sqrt{33})}{-24} = \frac{6\cdot(3-\sqrt{33})}{24} + \frac{6\cdot(3+\sqrt{33})}{24} =$$

$$= \frac{18-6\sqrt{33}+18+6\sqrt{33}}{24} = \frac{36}{24} = \frac{3}{2}$$

e) $\frac{x}{3} - 1 + \frac{1}{x} = 1 - \frac{2}{3x} \rightarrow 3x\cdot\left(\frac{x}{3} - 1 + \frac{1}{x}\right) = 3x\cdot\left(1 - \frac{2}{3x}\right) \rightarrow x^2 - 3x + 3 = 3x - 2 \rightarrow$

$$\rightarrow x^2 - 3x - 3x + 3 + 2 = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \begin{cases} \frac{6+4}{2} \rightarrow x = \frac{10}{2} \rightarrow x = 5 \\ \frac{6-4}{2} \rightarrow x = \frac{2}{2} \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones:

- Si $x = 1 \rightarrow \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{1} = 1 - \frac{2}{3} \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$
- Si $x = 5 \rightarrow \frac{5}{3} - 1 + \frac{1}{5} = 1 - \frac{2}{3\cdot 5} \rightarrow \frac{25-15+3}{15} = \frac{15-2}{15} \rightarrow \frac{13}{15} = \frac{13}{15}$

4 Resolución de problemas mediante ecuaciones

Página 93

1. Calcula tres números sabiendo que:

— El primero es 20 unidades menor que el segundo.

— El tercero es igual a la suma de los dos primeros.

— Entre los tres suman 120.

Llamamos x al segundo número. Entonces, tenemos que:

– Primer número $\to$ $x - 20$

– Tercer número $\to$ $(x - 20) + x = 2x - 20$

$$x + (x - 20) + (2x - 20) = 120 \to x + x + 2x - 20 - 20 = 120 \to 4x - 40 = 120 \to$$

$$\to 4x = 120 + 40 \to 4x = 160 \to x = \frac{160}{4} \to x = 40$$

– El segundo número es 40.

– El primer número es 40 – 20 = 20.

– El tercer número es 20 + 40 = 60.

2. Por un videojuego, un cómic y un helado, Andrés ha pagado 14,30 €. El videojuego es cinco veces más caro que el cómic, y este cuesta el doble que el helado. ¿Cuál es el precio de cada artículo?

Llamamos x al precio del helado. Por tanto, tenemos que:

– Precio del cómic $\to$ $2x$

– Precio del videojuego $\to$ $5 \cdot 2x = 10x$

$$x + 2x + 10x = 14{,}30 \to 13x = 14{,}30 \to x = \frac{14{,}30}{13} \to x = 1{,}10$$

– El precio del helado es 1,10 €.

– El precio del cómic es 2 · 1,10 = 2,20 €.

– El precio del videojuego es 5 · 2,20 = 11 €.

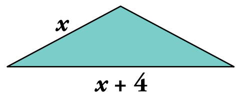
3. Dos albañiles que trabajan asociados reciben 1 400 € como pago de cierto trabajo. ¿Cuánto debe cobrar cada uno si el primero trabajó las dos quintas partes de lo que trabajó el otro?

Llamamos x al tiempo que trabajó uno de los albañiles, entonces, el otro albañil trabajó $\frac{2}{5}x$.

$$x + \frac{2}{5}x = 1\,400 \to \frac{5x + 2x}{5} = 1\,400 \to \frac{7}{5}x = 1\,400 \to x = \frac{1\,400 \cdot 5}{7} = 200 \cdot 5 \to x = 1\,000$$

Uno de los albañiles debe cobrar 1 000 € y el otro, debe cobrar, $1\,000 \cdot \frac{2}{5} = 400$ €.

4. En un triángulo isósceles, el lado desigual mide 4 cm más que cada uno de sus lados iguales. Halla la longitud de los lados sabiendo que su perímetro es de 40 cm.



Llamamos x a la medida de los lados iguales. Entonces, el lado desigual mide $x + 4$ cm.

$x + x + (x + 4) = 40 \rightarrow 2x + x + 4 = 40 \rightarrow 3x = 40 - 4 \rightarrow 3x = 36 \rightarrow x = \frac{36}{3} = 12$

– Los lados iguales miden 12 cm.

– El lado desigual mide 16 cm.

Página 94

5. Una peña deportiva contrató un autobús para seguir a su equipo. Si el autobús se hubiera llenado, cada uno habría pagado 8,50 €; pero quedaron 3 plazas vacías, y el viaje costó 9 €. ¿Cuántas plazas tenía el autobús?

Llamamos x al número de seguidores que viajan en el autobús.

$(x + 3) \cdot 8{,}50 = x \cdot 9 \rightarrow 8{,}50x + 25{,}50 = 9x \rightarrow 25{,}50 = 9x - 8{,}50x \rightarrow$

$$\rightarrow 0{,}50x = 25{,}50 \rightarrow x = \frac{25{,}50}{0{,}50} \rightarrow x = 51$$

El autobús tenía 51 + 3 = 54 plazas.

6. Si divido un número entre 5, el resultado es dos unidades mayor que si lo divido entre 6. ¿Qué número es?

Llamamos x al número que buscamos.

$\frac{x}{5} - 2 = \frac{x}{6} \rightarrow 30 \cdot \left(\frac{x}{5} - 2\right) = 30 \cdot \frac{x}{6} \rightarrow 6x - 60 = 5x \rightarrow 6x - 5x = 60 \rightarrow x = 60$

El número que buscamos es 60.

7. Me faltan 1,80 € para comprar una revista. Si tuviera el doble de lo que tengo ahora, me sobrarían 2 €. ¿Cuánto tengo? ¿Cuánto cuesta la revista?

Llamamos x al dinero que tengo.

$x + 1{,}80 = 2x - 2 \rightarrow 1{,}80 + 2 = 2x - x \rightarrow x = 3{,}80$ €

Tengo 3,80 euros.

Por tanto, la revista cuesta 3,80 + 1,80 = 5,60 €.

8. José tiene 15 años; su hermano Juan, 13, y su padre, 43. ¿Cuántos años han de pasar para que entre los dos hijos igualen la edad del padre?

Llamamos x a los años que deben pasar.

EDAD DE...	HOY	DENTRO DE x AÑOS
JOSÉ	15	$15 + x$
JUAN	13	$13 + x$
PADRE	43	$43 + x$

$(15 + x) + (13 + x) = 43 + x \rightarrow 28 + 2x = 43 + x \rightarrow 2x - x = 43 - 28 \rightarrow x = 15$

Han de pasar 15 años para que entre los dos hijos igualen la edad del padre.

Página 95

9. Si un número se aumenta en un 30 % y se le suman 12 unidades, se obtiene el mismo resultado que si a su doble se le quita un 20 %. ¿Qué número es?

Llamamos x al número que buscamos. Tenemos que:

– El número aumentado en un 30 % más 12 unidades $\rightarrow$ $1{,}3x + 12$

– El doble del número disminuido un 20 % $\rightarrow$ $0{,}8 \cdot (2x)$

$1{,}3x + 12 = 0{,}8 \cdot 2x \rightarrow 1{,}3x + 12 = 1{,}6x \rightarrow 12 = 1{,}6x - 1{,}3x \rightarrow$

$$\rightarrow 12 = 0{,}3x \rightarrow x = \frac{12}{0{,}3} \rightarrow x = 40$$

El número buscado es 40.

10. Marta compra una camiseta rebajada un 10 %. Después, en otra tienda, compra una blusa que costaba 10 € más, pero estaba rebajada un 40 %. Así, paga lo mismo por ambas prendas. ¿Cuánto costaba cada prenda sin rebajar?

PRECIO $\rightarrow$ ***x***
REBAJA **10 %**

PRECIO $\rightarrow$ ***x* + 10**
REBAJA **40 %**

Llamamos:

Precio de la camiseta $\rightarrow x$	Con una rebaja del 10 % $\rightarrow 0{,}9x$
Precio de la blusa $\rightarrow x + 10$	Con una rebaja del 40 % $\rightarrow 0{,}6(x + 10)$

$0{,}9x = 0{,}6(x + 10) \rightarrow 0{,}9x = 0{,}6x + 6 \rightarrow 0{,}9x - 0{,}6x = 6 \rightarrow 0{,}3x = 6 \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{6}{0{,}3} \rightarrow x = 20$$

La camiseta costaba 20 € y la blusa 20 + 10 = 30 €.

11. Teo ha mezclado 12 kg de azúcar, de 1,10 €/kg, con cierta cantidad de miel, de 4,20 €/kg. La mezcla sale a 2,34 €/kg. ¿Cuánta miel mezcló?

	Cantidad (kg)	Precio (€/kg)	Coste (€)
Azúcar	12	1,10	13,20
Miel	x	4,20	$4{,}20x$
Mezcla	$12 + x$	2,34	$2{,}34(12 + x)$

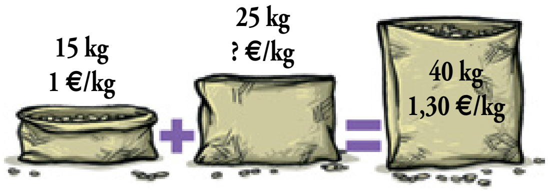
$13{,}20 + 4{,}20x = 2{,}34(12 + x) \rightarrow 13{,}20 + 4{,}20x = 28{,}08 + 2{,}34x \rightarrow$

$\rightarrow 4{,}20x - 2{,}34x = 28{,}08 - 13{,}20 \rightarrow 1{,}86x = 14{,}88 \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{14{,}88}{1{,}86} \rightarrow x = 8$$

Mezcló 8 kg de miel.

12. **Mezclando 15 kg de arroz de 1 €/kg con 25 kg de arroz de otra clase, se obtiene una mezcla que sale a 1,30 €/kg. ¿Cuál será el precio de la segunda clase de arroz?**



	Cantidad (kg)	Precio (€/kg)	Coste (€)
Arroz A	15	1,00	15
Arroz B	25	x	$25x$
Mezcla	40	1,35	54

$$15 + 25x = 54 \;\rightarrow\; 25x = 54 - 15 \;\rightarrow\; 25x = 39 \;\rightarrow\; x = \frac{39}{25} \;\rightarrow\; x = 1{,}56 \text{ €/kg}$$

La segunda clase de arroz cuesta 1,56 €/kg.

Ejercicios y problemas

Página 96

Practica

Ecuaciones: soluciones, tanteo...

1. **Comprueba cuál de los números 1, 2 o 4 es la solución de las siguientes ecuaciones:**

a) $3x - 5 = 1$ **b)** $\dfrac{x}{2} - 3x = -10$ **c)** $x^3 - 1 = 0$

d) $2^x = 4$ **e)** $\sqrt{x} = 2$ **f)** $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}$

a) $3x - 5 = 1$

$x = 1 \rightarrow 3 \cdot 1 - 5 = -2 \neq 1$

$x = 2 \rightarrow 3 \cdot 2 - 5 = 1$

$x = 4 \rightarrow 3 \cdot 4 - 5 = -2 \neq 1$

b) $\dfrac{x}{2} - 3x = -10$

$x = 1 \rightarrow \dfrac{1}{2} - 3 \cdot 1 = \dfrac{-5}{2} \neq -10$

$x = 2 \rightarrow \dfrac{2}{2} - 3 \cdot 2 = -5 \neq -10$

$x = 4 \rightarrow \dfrac{4}{2} - 3 \cdot 4 = -10$

c) $x^3 - 1 = 0$

$x = 1 \rightarrow 1^3 - 1 = 0$

$x = 2 \rightarrow 2^3 - 1 = 7 \neq 0$

$x = 4 \rightarrow 4^3 - 1 = 63 \neq 0$

d) $2^x = 4$

$x = 1 \rightarrow 2^1 = 2 \neq 4$

$x = 2 \rightarrow 2^2 = 4$

$x = 4 \rightarrow 2^4 = 16 \neq 4$

e) $\sqrt{x} = 2$

$x = 1 \rightarrow \sqrt{1} = 1 \neq 2$

$x = 2 \rightarrow \sqrt{2} \neq 2$

$x = 4 \rightarrow \sqrt{4} = 2$

f) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}$

$x = 1 \rightarrow \dfrac{1}{1} \neq \dfrac{1}{2}$

$x = 2 \rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

$x = 4 \rightarrow \dfrac{1}{4} \neq \dfrac{1}{2}$

2. **Resuelve mentalmente y explica el proceso seguido.**

a) $\dfrac{x-5}{4} = 1$ **b)** $5x + 1 = 11$ **c)** $3(x - 2) = 12$ **d)** $\dfrac{x}{3} + 1 = 6$

e) $\dfrac{x+1}{3} = 6$ **f)** $x^3 = 8$ **g)** $3^x = 81$ **h)** $\sqrt{2x} = 4$

a) $x = 9$

Buscamos un número que al restarle 5 el resultado sea 4.

b) $x = 2$

Buscamos un número que al multiplicarlo por 5 su resultado sea 10.

c) $x = 6$

Buscamos un número tal que, al restarle 2 nos quede 4.

d) $x = 15$

La tercera parte del número que buscamos es 5.

e) $x = 17$

Buscamos un número que al sumarle 1 nos quede 18.

f) $x = 2$

Buscamos un número que multiplicado tres veces por sí mismo nos quede 8.

g) $x = 4$

Buscamos el número de veces que tenemos que multiplicar 3 para que el resultado sea 81.

h) $x = 8$

Buscamos un número que al multiplicarlo por dos su resultado sea 16.

3. **Resuelve por tanteo.**

a) $\frac{x+4}{2} = 65$ **b)** $\frac{x}{2} - 1 = 3$ **c)** $2(x + 1) = 16$ **d)** $x^2 = 25$

e) $x^3 = 64$ **f)** $2^x = 32$ **g)** $\sqrt{x+1} = 5$ **h)** $\frac{2}{x} = 1$

a) $x = 126$ b) $x = 8$ c) $x = 7$ d) $x = 5$

e) $x = 4$ f) $x = 5$ g) $x = 24$ h) $x = 2$

Ecuaciones de primer grado

4. **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $12x - 8 = 34 + 5x$ **b)** $4(2 - x) - (4 - x) = 7(2x + 3)$

c) $2[x + 3(x + 1)] = 5x$ **d)** $5(x - 2) - 2(x - 5) = 2x - (12 + 3x)$

a) $12x - 8 = 34 + 5x \rightarrow 12x - 5x = 34 + 8 \rightarrow 7x = 42 \rightarrow x = \frac{42}{7} \rightarrow x = 6$

b) $4(2 - x) - (4 - x) = 7(2x + 3) \rightarrow 8 - 4x - 4 + x = 14x + 21 \rightarrow 4 - 3x = 14x + 21 \rightarrow$

$\rightarrow 4 - 21 = 14x + 3x \rightarrow -17 = 17x \rightarrow x = -1$

c) $2[x + 3(x + 1)] = 5x \rightarrow 2(x + 3x + 3) = 5x \rightarrow 2(4x + 3) = 5x \rightarrow 8x + 6 = 5x \rightarrow$

$\rightarrow 8x - 5x = -6 \rightarrow 3x = -6 \rightarrow x = \frac{-6}{3} \rightarrow x = -2$

d) $5(x - 2) - 2(x - 5) = 2x - (12 + 3x) \rightarrow 5x - 10 - 2x + 10 = 2x - 12 - 3x \rightarrow$

$\rightarrow 3x = -x - 12 \rightarrow 3x + x = -12 \rightarrow$

$\rightarrow 4x = -12 \rightarrow x = \frac{-12}{4} \rightarrow x = -3$

5. **Elimina los denominadores y resuelve.**

a) $\frac{x}{3} - \frac{2x}{5} = \frac{-1}{15}$ b) $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{3} = \frac{13}{6}$ c) $\frac{x+1}{2} + \frac{3x-1}{4} = -1$

d) $\frac{3x+1}{5} - x + 1 = 0$ e) $\frac{2(x+1)}{3} + \frac{3x-1}{2} = \frac{1}{6}$ f) $\frac{3(x-1)}{7} - 2(x+3) + 8 = 0$

a) $\frac{x}{3} - \frac{2x}{5} = \frac{-1}{15} \rightarrow 15 \cdot \left(\frac{x}{3} - \frac{2x}{5}\right) = 15 \cdot \left(\frac{-1}{15}\right) \rightarrow 5x - 6x = -1 \rightarrow -x = -1 \rightarrow x = 1$

b) $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{3} = \frac{13}{6} \rightarrow 12 \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{3}\right) = 12 \cdot \frac{13}{6} \rightarrow 6x + 3x + 4x = 26 \rightarrow$

$\rightarrow 13x = 26 \rightarrow x = \frac{26}{13} \rightarrow x = 2$

c) $\frac{x+1}{2} + \frac{3x-1}{4} = -1 \rightarrow 4 \cdot \left(\frac{x+1}{2} + \frac{3x-1}{4}\right) = 4 \cdot (-1) \rightarrow 2(x+1) + 3x - 1 = -4 \rightarrow$

$\rightarrow 2x + 2 + 3x - 1 = -4 \rightarrow 5x + 1 = -4 \rightarrow 5x = -4 - 1 \rightarrow$

$\rightarrow 5x = -5 \rightarrow x = -1$

d) $\frac{3x+1}{5} - x + 1 = 0 \rightarrow 5\left(\frac{3x+1}{5} - x + 1\right) = 5 \cdot 0 \rightarrow 3x + 1 - 5x + 5 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow -2x + 6 = 0 \rightarrow 6 = 2x \rightarrow x = \frac{6}{2} \rightarrow x = 3$

e) $\frac{2(x+1)}{3} + \frac{3x-1}{2} = \frac{1}{6} \rightarrow 6\left(\frac{2(x+1)}{3} + \frac{3x-1}{2}\right) = 6 \cdot \frac{1}{6} \rightarrow$

$\rightarrow 2 \cdot 2(x+1) + 3(3x-1) = 1 \rightarrow$

$\rightarrow 4x + 4 + 9x - 3 = 1 \rightarrow 13x + 1 = 1 \rightarrow$

$\rightarrow 13x = 1 - 1 \rightarrow 13x = 0 \rightarrow x = 0$

f) $\frac{3(x-1)}{7} - 2(x+3) + 8 = 0 \rightarrow 7\left(\frac{3(x-1)}{7} - 2(x+3) + 8\right) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 3(x-1) - 14(x+3) + 56 = 7 \cdot 0 \rightarrow$

$\rightarrow 3x - 3 - 14x - 42 + 56 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow -11x + 11 = 0 \rightarrow x = \frac{-11}{-11} = 1$

6. **Simplifica y resuelve estas ecuaciones:**

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x = x - \frac{1}{6}$ b) $\frac{3x-3}{4} = \frac{x+4}{3}$

c) $\frac{3(x+3)}{2} - 2(2x-2) = 8x - 1 - 2(x+3)$ d) $\frac{3(x+3)}{4} - \frac{3x-2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{x+3}{12}$

e) $\frac{x+7}{2} - \frac{7-x}{6} = \frac{x-7}{12} + 7$ f) $\frac{5+x}{4} - \frac{5-x}{5} = \frac{1+x}{4} - 1$

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x = x - \frac{1}{6} \rightarrow 6 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x\right) = 6 \cdot \left(x - \frac{1}{6}\right) \rightarrow 3 + 2x = 6x - 1 \rightarrow$

$\rightarrow 3 + 1 = 6x - 2x \rightarrow 4 = 4x \rightarrow x = \frac{4}{4} \rightarrow x = 1$

b) $\dfrac{3x-3}{4} = \dfrac{x+4}{3} \rightarrow 12 \cdot \dfrac{3x-3}{4} = 12 \cdot \dfrac{x+4}{3} \rightarrow 3(3x-3) = 4(x+4) \rightarrow$

$\rightarrow 9x - 9 = 4x + 16 \rightarrow 9x - 4x = 16 + 9 \rightarrow 5x = 25 \rightarrow$

$\rightarrow x = \dfrac{25}{5} \rightarrow x = 5$

c) $\dfrac{3(x+3)}{2} - 2(2x-2) = 8x - 1 - 2(x+3) \rightarrow \dfrac{3(x+3)}{2} - 4x + 4 = 8x - 1 - 2x - 6 \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{3(x+3)}{2} - 4x + 4 = 6x - 7 \rightarrow \dfrac{3(x+3)}{2} = 6x + 4x - 7 - 4 \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{3(x+3)}{2} = 10x - 11 \rightarrow 2 \cdot \dfrac{3(x+3)}{2} = 2 \cdot (10x - 11) \rightarrow$

$\rightarrow 3(x+3) = 20x - 22 \rightarrow 3x + 9 = 20x - 22 \rightarrow$

$\rightarrow 9 + 22 = 20x - 3x \rightarrow 31 = 17x \rightarrow x = \dfrac{31}{17}$

d) $\dfrac{3(x+3)}{4} - \dfrac{3x-2}{3} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{x+3}{12} \rightarrow 12 \cdot \left(\dfrac{3(x+3)}{4} - \dfrac{3x-2}{3}\right) = 12 \cdot \left(\dfrac{1}{6} + \dfrac{x+3}{12}\right) \rightarrow$

$\rightarrow 3 \cdot 3(x+3) - 4(3x-2) = 2 + x + 3 \rightarrow$

$\rightarrow 9x + 27 - 12x + 8 = 5 + x \rightarrow -3x + 35 = 5 + x \rightarrow$

$\rightarrow 35 - 5 = x + 3x \rightarrow 30 = 4x \rightarrow x = \dfrac{30}{4} \rightarrow x = \dfrac{15}{2}$

e) $\dfrac{x+7}{2} - \dfrac{7-x}{6} = \dfrac{x-7}{12} + 7 \rightarrow 12\left(\dfrac{x+7}{2} - \dfrac{7-x}{6}\right) = 12\left(\dfrac{x-7}{12} + 7\right) \rightarrow$

$\rightarrow 6(x+7) - 2(7-x) = x - 7 + 12 \cdot 7 \rightarrow$

$\rightarrow 6x + 42 - 14 + 2x = x - 7 + 84 \rightarrow$

$\rightarrow 8x + 28 = x + 77 \rightarrow 8x - x = 77 - 28 \rightarrow$

$\rightarrow 7x = 49 \rightarrow x = \dfrac{49}{7} \rightarrow x = 7$

f) $\dfrac{5+x}{4} - \dfrac{5-x}{5} = \dfrac{1+x}{4} - 1 \rightarrow 20\left(\dfrac{5+x}{4} - \dfrac{5-x}{5}\right) = 20\left(\dfrac{1+x}{4} - 1\right) \rightarrow$

$\rightarrow 5(5+x) - 4(5-x) = 5(1+x) - 20 \rightarrow$

$\rightarrow 25 + 5x - 20 + 4x = 5 + 5x - 20 \rightarrow$

$\rightarrow 9x + 5 = 5x - 15 \rightarrow 9x - 5x = -15 - 5 \rightarrow$

$\rightarrow 4x = -20 \rightarrow x = \dfrac{-20}{4} \rightarrow x = -5$

7. **Comprueba que las siguientes ecuaciones son de primer grado y halla su solución:**

a) $(x+1)(x-1) - 3(x+2) = x(x+2) + 4$

b) $(2x+3)^2 - (2x-3)^2 = x(x+3) - (x^2+1)$

c) $\left(x - \dfrac{1}{3}\right)\left(x + \dfrac{1}{3}\right) - x\left(x + \dfrac{1}{6}\right) = \dfrac{1}{3}(x-2)$

a) $(x+1)(x-1)-3(x+2)=x(x+2)+4 \rightarrow x^2-1-3x-6=x^2+2x+4 \rightarrow$

$\rightarrow x^2-3x-7=x^2+2x+4 \rightarrow x^2-x^2-3x-2x-7-4=0 \rightarrow$

$\rightarrow -5x-11=0 \rightarrow -5x=11 \rightarrow x=\dfrac{-11}{5}$

b) $(2x+3)^2-(2x-3)^2=x(x+3)-(x^2+1) \rightarrow 4x^2+12x+9-(4x^2-12x+9)=x^2+3x-x^2-1 \rightarrow$

$\rightarrow 4x^2+12x+9-4x^2+12x-9=3x-1 \rightarrow 24x=3x-1 \rightarrow 24x-3x=-1 \rightarrow$

$\rightarrow 21x=-1 \rightarrow x=\dfrac{-1}{21}$

c) $\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\left(x+\dfrac{1}{3}\right)-x\left(x+\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{1}{3}(x-2) \rightarrow x^2-\dfrac{1}{9}-x^2-\dfrac{1}{6}x=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{3} \rightarrow$

$\rightarrow -\dfrac{1}{6}x-\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{3} \rightarrow 18\cdot\left(-\dfrac{1}{6}x-\dfrac{1}{9}\right)=18\cdot\left(\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{3}\right) \rightarrow -3x-2=6x-2\cdot 6 \rightarrow$

$\rightarrow 12-2=6x+3x \rightarrow 10=9x \rightarrow x=\dfrac{10}{9}$

Ecuaciones de segundo grado

8. **Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado sin utilizar la fórmula de resolución:**

a) $7x^2-21x=0$ **b)** $2x^2+x=0$ **c)** $2x^2-14x=0$

d) $4x^2-32x=0$ **e)** $x^2-36=0$ **f)** $3x^2-147=0$

a) $7x^2-21x=0 \rightarrow 7x(x-3)=0 \begin{cases} 7x=0 \rightarrow x=0 \\ x-3=0 \rightarrow x=3 \end{cases}$

b) $2x^2+x=0 \rightarrow x(2x+1)=0 \begin{cases} x=0 \\ 2x+1=0 \rightarrow 2x=-1 \rightarrow x=\dfrac{-1}{2} \end{cases}$

c) $2x^2-14x=0 \rightarrow 2x(x-7)=0 \begin{cases} 2x=0 \rightarrow x=0 \\ x-7=0 \rightarrow x=7 \end{cases}$

d) $4x^2-32x=0 \rightarrow 4x(x-8)=0 \begin{cases} 4x=0 \rightarrow x=0 \\ x-8=0 \rightarrow x=8 \end{cases}$

e) $x^2-36=0 \rightarrow x^2=36 \rightarrow x=\pm\sqrt{36} \begin{cases} x=-6 \\ x=6 \end{cases}$

f) $3x^2-147=0 \rightarrow 3x^2=147 \rightarrow x^2=\dfrac{147}{3} \rightarrow x^2=49 \rightarrow x=\pm\sqrt{49} \begin{cases} x=-7 \\ x=7 \end{cases}$

9. **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $2x^2 - 6x + 4 = 0$ **b)** $3x^2 - 3x - 6 = 0$ **c)** $4x^2 + 16x + 16 = 0$ **d)** $x^2 + x + 3 = 0$

e) $x^2 - 18x + 81 = 0$ **f)** $x^2 - 5x - 24 = 0$ **g)** $x^2 - 9x + 14 = 0$ **h)** $x^2 - 6x + 10 = 0$

a) $2x^2 - 6x + 4 = 0$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{4} = \frac{6 \pm 2}{4} \begin{cases} \dfrac{6+2}{4} \to x = \dfrac{8}{4} \to x = 2 \\ \dfrac{6-2}{4} \to x = \dfrac{4}{4} \to x = 1 \end{cases}$$

b) $3x^2 - 3x - 6 = 0$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6)}}{2 \cdot 3} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 72}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{6} = \frac{3 \pm 9}{6} \begin{cases} \dfrac{3+9}{6} \to x = \dfrac{12}{6} \to x = 2 \\ \dfrac{3-9}{6} \to x = \dfrac{-6}{6} \to x = -1 \end{cases}$$

c) $4x^2 + 16x + 16 = 0 \to 4(x^2 + 4x + 4) = 0 \to x^2 + 4x + 4 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{-4 \pm 0}{2} \to x = -2$$

d) $x^2 + x + 3 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 12}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-11}}{2} \to \text{Sin solución}$$

e) $x^2 - 18x + 81 = 0$

$$x = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 81}}{2 \cdot 1} = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 324}}{2} = \frac{18 \pm 0}{2} \to x = 9$$

f) $x^2 - 5x - 24 = 0$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 96}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{5 \pm 11}{2}$$

$$x = \begin{cases} \dfrac{5+11}{2} \to x = \dfrac{16}{2} \to x = 8 \\ \dfrac{5-11}{2} \to x = \dfrac{-6}{2} \to x = -3 \end{cases}$$

g) $x^2 - 9x + 14 = 0$

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 14}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 56}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2} \begin{cases} \dfrac{9+5}{2} \to x = \dfrac{14}{2} \to x = 7 \\ \dfrac{9-5}{2} \to x = \dfrac{4}{2} \to x = 2 \end{cases}$$

h) $x^2 - 6x + 10 = 0$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} \to \text{Sin solución}$$

10. **Reduce, resuelve y comprueba las soluciones.**

a) $5x^2 - 3x(x-4) = (x-2)^2 + 13$

b) $3x(x-2) - 6 = (x+1)(x-4)$

c) $x - \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{x-2}{5}$

d) $\dfrac{5x}{6} - \dfrac{x^2}{3} = 11 - \dfrac{x^2}{2} + 2$

e) $5x - \dfrac{3}{x} = \dfrac{x-1}{x}$

a) $5x^2 - 3x(x-4) = (x-2)^2 + 13 \to 5x^2 - 3x^2 + 12x = x^2 - 4x + 4 + 13 \to$

$\to 2x^2 + 12x = x^2 - 4x + 17 \to$

$\to 2x^2 - x^2 + 12x + 4x - 17 = 0 \to x^2 + 16x - 17 = 0$

$$x = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-17)}}{2 \cdot 1} = \frac{-16 \pm \sqrt{256 + 68}}{2} = \frac{-16 \pm \sqrt{324}}{2} = \frac{-16 \pm 18}{2}$$

$$x = \begin{cases} \dfrac{-16+18}{2} \to x = \dfrac{2}{2} \to x = 1 \\[2ex] \dfrac{-16-18}{2} \to x = \dfrac{-34}{2} \to x = -17 \end{cases}$$

- Si $x = 1 \to 5 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1(1-4) = (1-2)^2 + 13 \to 5 - 3 \cdot (-3) = (-1)^2 + 13 \to$

  $\to 5 + 9 = 14 \to 14 = 14$

- Si $x = -17 \to 5 \cdot (-17)^2 - 3 \cdot (-17) \cdot (-17-4) = (-17-2)^2 + 13 \to$

  $\to 1\,445 - 1\,071 = 361 + 13 \to 374 = 374$

b) $3x(x-2) - 6 = (x+1)(x-4) \to 3x^2 - 6x - 6 = x^2 - 4x + x - 4 \to$

$\to 3x^2 - 6x - 6 = x^2 - 3x - 4 \to$

$\to 3x^2 - x^2 - 6x + 3x - 6 + 4 = 0 \to 2x^2 - 3x - 2 = 0$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

$$x = \begin{cases} \dfrac{3+5}{4} \to x = \dfrac{8}{4} \to x = 2 \\[2ex] \dfrac{3-5}{4} \to x = \dfrac{-2}{4} \to x = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

- Si $x = 2 \to 3 \cdot 2 \cdot (2-2) - 6 = (2+1)(2-4) \to 0 - 6 = 3 \cdot (-2) \to -6 = -6$
- Si $x = \dfrac{-1}{2} \to 3 \cdot \left(\dfrac{-1}{2}\right)\left(\dfrac{-1}{2} - 2\right) - 6 = \left(\dfrac{-1}{2} + 1\right)\left(\dfrac{-1}{2} - 4\right) \to 3 \cdot \left(\dfrac{-1}{2}\right)\left(\dfrac{-5}{2}\right) - 6 = \left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{-9}{2}\right) \to$

  $\to \dfrac{15}{4} - 6 = \dfrac{-9}{4} \to \dfrac{15-24}{4} = \dfrac{-9}{4} \to \dfrac{-9}{4} = \dfrac{-9}{4}$

c) $x - \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{x-2}{5} \to 10\left(x - \dfrac{x^2}{2}\right) = 10 \cdot \dfrac{x-2}{5} \to 10x - 5x^2 = 2(x-2) \to$

$\to 10x - 5x^2 = 2x - 4 \to 0 = 5x^2 - 10x + 2x - 4 \to 5x^2 - 8x - 4 = 0$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-4)}}{2 \cdot 5} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 80}}{10} = \frac{8 \pm \sqrt{144}}{10} = \frac{8 \pm 12}{10}$$

$$x = \begin{cases} \dfrac{8+12}{10} \to x = \dfrac{20}{10} \to x = 2 \\[2ex] \dfrac{8-12}{10} \to x = \dfrac{-4}{10} \to x = \dfrac{-2}{5} \end{cases}$$

- Si $x = 2 \to 2 - \dfrac{2^2}{2} = \dfrac{2-2}{5} \to 2 - \dfrac{4}{2} = 0 \to 0 = 0$

- Si $x = \dfrac{-2}{5} \to \dfrac{-2}{5} - \dfrac{\left(\dfrac{-2}{5}\right)^2}{2} = \dfrac{\dfrac{-2}{5} - 2}{5} \to \dfrac{-2}{5} - \dfrac{4}{50} = \dfrac{\dfrac{-12}{5}}{5} \to \dfrac{-2}{5} - \dfrac{4}{50} = \dfrac{-12}{25} \to$

  $\to \dfrac{-20}{50} - \dfrac{4}{50} = \dfrac{-24}{50} \to \dfrac{-24}{50} = \dfrac{-24}{50}$

d) $\dfrac{5x}{6} - \dfrac{x^2}{3} = 11 - \dfrac{x^2}{2} + 2 \to 6\left(\dfrac{5x}{6} - \dfrac{x^2}{3}\right) = 6\left(11 - \dfrac{x^2}{2} + 2\right) \to$

$\to 5x - 2x^2 = 66 - 3x^2 + 12 \to 5x - 2x^2 = -3x^2 + 78 \to$

$\to 3x^2 - 2x^2 + 5x - 78 = 0 \to x^2 + 5x - 78 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-78)}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 312}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{337}}{2} \begin{cases} x = \dfrac{-5 + \sqrt{337}}{2} \\[2ex] x = \dfrac{-5 - \sqrt{337}}{2} \end{cases}$$

- Si $x = \dfrac{-5 + \sqrt{337}}{2} \to \dfrac{5 \cdot \dfrac{-5 + \sqrt{337}}{2}}{6} - \dfrac{\left(\dfrac{-5 + \sqrt{337}}{2}\right)^2}{3} = 11 - \dfrac{\left(\dfrac{-5 + \sqrt{337}}{2}\right)^2}{2} + 2 \to$

  $\to \dfrac{-25 + 5\sqrt{337}}{12} - \dfrac{25 - 10\sqrt{337} + 337}{12} = 13 - \dfrac{25 - 10\sqrt{337} + 337}{8} \to$

  $\to \dfrac{-387 + 15\sqrt{337}}{12} = \dfrac{-258 + 10\sqrt{337}}{8} \to \dfrac{-129 + 5\sqrt{337}}{4} = \dfrac{-129 + 5\sqrt{337}}{4}$

- Si $x = \dfrac{-5 - \sqrt{337}}{2} \to \dfrac{5 \cdot \dfrac{-5 - \sqrt{337}}{2}}{6} - \dfrac{\left(\dfrac{-5 - \sqrt{337}}{2}\right)^2}{3} = 11 - \dfrac{\left(\dfrac{-5 - \sqrt{337}}{2}\right)^2}{2} + 2 \to$

  $\to \dfrac{-25 - 5\sqrt{337}}{12} - \dfrac{25 + 10\sqrt{337} + 337}{12} = 13 - \dfrac{25 + 10\sqrt{337} + 337}{8} \to$

  $\to \dfrac{-387 - 15\sqrt{337}}{12} = \dfrac{-258 - 10\sqrt{337}}{8} \to \dfrac{-129 - 5\sqrt{337}}{4} = \dfrac{-129 - 5\sqrt{337}}{4}$

e) $5x - \frac{3}{x} = \frac{x-1}{x} \rightarrow x\left(5x - \frac{3}{x}\right) = x \cdot \frac{x-1}{x} \rightarrow 5x^2 - 3 = x - 1 \rightarrow$

$\rightarrow 5x^2 - x - 3 + 1 = 0 \rightarrow 5x^2 - x - 2 = 0$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2)}}{2 \cdot 5} = \frac{1 \pm \sqrt{1+40}}{10} = \frac{1 \pm \sqrt{41}}{10} \begin{cases} x = \dfrac{1+\sqrt{41}}{10} \\ x = \dfrac{1-\sqrt{41}}{10} \end{cases}$$

- Si $x = \frac{1+\sqrt{41}}{10} \rightarrow 5 \cdot \frac{1+\sqrt{41}}{10} - \dfrac{3}{\frac{1+\sqrt{41}}{10}} = \dfrac{\frac{1+\sqrt{41}}{10} - 1}{\frac{1+\sqrt{41}}{10}} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{1+\sqrt{41}}{2} - \frac{30}{1+\sqrt{41}} = \frac{1+\sqrt{41}-10}{1+\sqrt{41}} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{(1+\sqrt{41})^2 - 2 \cdot 30}{2(1+\sqrt{41})} = \frac{\sqrt{41}-9}{1+\sqrt{41}} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{(1+2\sqrt{41}+41) - 60}{2(1+\sqrt{41})} = \frac{\sqrt{41}-9}{1+\sqrt{41}} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{2\sqrt{41}-18}{2(1+\sqrt{41})} = \frac{\sqrt{41}-9}{1+\sqrt{41}} \rightarrow \frac{\sqrt{41}-9}{1+\sqrt{41}} = \frac{\sqrt{41}-9}{1+\sqrt{41}}$

- Si $x = \frac{1-\sqrt{41}}{10} \rightarrow 5 \cdot \frac{1-\sqrt{41}}{10} - \dfrac{3}{\frac{1-\sqrt{41}}{10}} = \dfrac{\frac{1-\sqrt{41}}{10} - 1}{\frac{1-\sqrt{41}}{10}} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{1-\sqrt{41}}{2} - \frac{30}{1-\sqrt{41}} = \frac{1-\sqrt{41}-10}{1-\sqrt{41}} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{(1-\sqrt{41})^2 - 2 \cdot 30}{2(1-\sqrt{41})} = \frac{-\sqrt{41}-9}{1-\sqrt{41}} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{(1-2\sqrt{41}+41) - 60}{2(1-\sqrt{41})} = \frac{-\sqrt{41}-9}{1-\sqrt{41}} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{-2\sqrt{41}-18}{2(1-\sqrt{41})} = \frac{-\sqrt{41}-9}{1-\sqrt{41}} \rightarrow \frac{-\sqrt{41}-9}{1-\sqrt{41}} = \frac{-\sqrt{41}-9}{1-\sqrt{41}}$

Página 97

Piensa y resuelve

11. **Calcula un número cuya mitad es 20 unidades menor que su triple.**

Llamamos x al número que buscamos.

$$\frac{x}{2} + 20 = \frac{x}{3} \rightarrow 6\left(\frac{x}{2} + 20\right) = 6 \cdot \frac{x}{3} \rightarrow 3x + 120 = 2x \rightarrow 3x - 2x = -120 \rightarrow x = -120$$

El número que buscamos es –120.

12. **Si a un número le restas 12, se reduce a su tercera parte. ¿Cuál es ese número?**

Llamamos x al número que buscamos.

$$x - 12 = \frac{x}{3} \rightarrow 3(x - 12) = 3 \cdot \frac{x}{3} \rightarrow 3x - 36 = x \rightarrow 3x - x = 36 \rightarrow 2x = 36 \rightarrow x = 18$$

Es el número 18.

13. **La suma de tres números naturales consecutivos es igual al cuádruple del menor. ¿De qué números se trata?**

Llamamos x a uno de los números que buscamos.

$$(x - 1) + x + (x + 1) = 4(x - 1) \rightarrow 3x = 4x - 4 \rightarrow 4 = 4x - 3x \rightarrow 4 = x$$

Los números que buscamos son 3, 4 y 5.

14. **El producto de un número natural por su siguiente es 31 unidades mayor que el quíntuplo de la suma de ambos. ¿Cuál es ese número?**

Llamamos x al número que buscamos.

$$x \cdot (x + 1) - 31 = 5[x + (x + 1)] \rightarrow x^2 + x - 31 = 5(2x + 1) \rightarrow x^2 + x - 31 = 10x + 5 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + x - 10x - 31 - 5 = 0 \rightarrow x^2 - 9x - 36 = 0$$

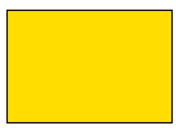
$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36)}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 144}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{9 \pm 15}{2}$$

$$x = \begin{cases} \dfrac{9 + 15}{2} \rightarrow x = \dfrac{24}{2} \rightarrow x = 12 \\[2ex] \dfrac{9 - 15}{2} \rightarrow x = \dfrac{-6}{2} \rightarrow x = -3 \rightarrow \text{No es natural. No vale} \end{cases}$$

Es el número 12.

15. **En un rectángulo de 74 cm de perímetro sabemos que la altura mide 7 cm menos que la base. Halla sus dimensiones.**

Llamamos x a la medida de la base del rectángulo.



$$2 \cdot x + 2 \cdot (x - 7) = 74 \rightarrow 2x + 2x - 14 = 74 \rightarrow 4x - 14 = 74 \rightarrow 4x = 74 + 14 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4x = 88 \rightarrow x = \frac{88}{4} \rightarrow x = 22$$

La base del rectángulo mide 22 cm y la altura 22 – 7 = 15 cm.

16. **El mayor de los ángulos de un triángulo mide 50° más que el mediano; y este mide 20° más que el pequeño. ¿Cuánto mide cada ángulo?**

Llamamos x al ángulo más pequeño.

– El ángulo mediano mide $x + 20$ grados.

– El mayor de los ángulos mide $x + 20 + 50 = x + 70$ grados.

$$x + (x + 20) + (x + 70) = 180 \rightarrow 3x + 90 = 180 \rightarrow 3x = 180 - 90 \rightarrow 3x = 90 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{90}{3} \rightarrow x = 30°$$

El menor de los ángulos mide 30°, el mediano 30° + 20° = 50°, y el mayor 30° + 70° = 100°.

17. **La suma de las edades de los cuatro miembros de una familia es 104 años. El padre tiene 6 años más que la madre, que tuvo a los dos hijos gemelos a los 27 años. ¿Qué edad tiene cada uno?**

Llamamos x a la edad de la madre. Entonces, tenemos que:

– La edad del padre es $x + 6$ años.

– La edad de cada uno de los gemelos es $x - 27$ años.

$$x + (x + 6) + 2 \cdot (x - 27) = 104 \rightarrow x + x + 6 + 2x - 54 = 104 \rightarrow 4x - 48 = 104 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4x = 104 + 48 \rightarrow 4x = 152 \rightarrow x = \frac{152}{4} \rightarrow x = 38$$

La madre tiene 38 años.

Por tanto, el padre tiene 38 + 6 = 48 años, y los gemelos, 38 – 27 = 11 años cada uno.

18. **Con 12 € que tengo, podría ir dos días a la piscina, un día al cine y aún me sobrarían 4,50 €. La entrada de la piscina cuesta 1,50 € menos que la del cine. ¿Cuánto cuesta la entrada del cine?**

Llamamos x al precio de la entrada al cine. Por tanto, tenemos que:

– La entrada de la piscina cuesta $x - 1{,}50$ euros.

$$2(x - 1{,}50) + x + 4{,}50 = 12 \rightarrow 2x - 3 + x + 4{,}50 = 12 \rightarrow 3x + 1{,}50 = 12 \rightarrow$$

$$\rightarrow 3x = 12 - 1{,}50 \rightarrow 3x = 10{,}50 \rightarrow x = \frac{10{,}50}{3} \rightarrow x = 3{,}50$$

La entrada del cine cuesta 3,50 €.

19. **Se ha vertido un bidón de aceite de orujo, de 1,60 €/litro, en una tinaja que contenía 400 litros de aceite de oliva de 3,20 €/litro. Sabiendo que el litro de la mezcla cuesta 2,60 €/litro, ¿cuántos litros había en el bidón?**

	Cantidad (kg)	Precio (€/kg)	Coste (€)
Aceite de orujo	x	1,60	$1{,}60x$
Aceite de oliva	400	3,20	1 280
Mezcla	$400 + x$	2,60	$2{,}60(400 + x)$

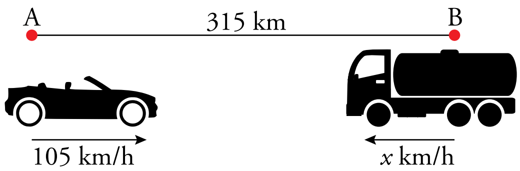
$$1{,}60x + 1\,280 = 2{,}60(400 + x) \rightarrow 1{,}60x + 1\,280 = 1\,040 + 2{,}60x \rightarrow$$

$$\rightarrow 1\,280 - 1\,040 = 2{,}60x - 1{,}60x \rightarrow x = 240$$

En el bidón había 240 litros de aceite.

20. **Un coche sale de una ciudad A hacia otra B, distante 315 km, a una velocidad de 105 km/h. Simultáneamente, sale de B hacia A un camión que tarda en cruzarse con el coche una hora y cuarenta y cinco minutos. ¿Cuál era la velocidad del camión?**

Llamamos x a la velocidad a la que circula el camión.



Tardan 1 hora y 45 minutos en encontrarse $\rightarrow$ $t = 1{,}75$ horas

$$t = \frac{d}{v} \rightarrow 1{,}75 = \frac{315}{105 + x}$$

$$1{,}75 = \frac{315}{105 + x} \rightarrow 1{,}75(105 + x) = 315 \rightarrow 183{,}75 + 1{,}75x = 315 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1{,}75x = 315 - 183{,}75 \rightarrow 1{,}75x = 131{,}25 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{131{,}25}{1{,}75} \rightarrow x = 75 \text{ km/h}$$

La velocidad del camión era de 75 km/h.

21. **Un ciclista que va a 18 km/h tarda 45 minutos en alcanzar a otro que le lleva una ventaja de 6 km. ¿Qué velocidad lleva el que iba delante?**

Llamamos x a la velocidad del ciclista que salió primero.

- El segundo ciclista tarda 45 minutos = 0,75 horas en alcanzar al primero.
- El primer ciclista recorrerá $\rightarrow$ $0{,}75x$ km
- El segundo ciclista recorrerá $\rightarrow$ $18 \cdot 0{,}75$ km

$$18 \cdot 0{,}75 = 0{,}75x + 6 \rightarrow 13{,}5 = 0{,}75x + 6 \rightarrow 7{,}5 = 0{,}75x \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{7{,}5}{0{,}75} \rightarrow x = 10 \text{ km/h}$$

El ciclista que va delante lleva una velocidad de 10 km/h.

22. **Un ciclista sale a la carretera a una velocidad de 15 km/h. ¿Qué velocidad deberá llevar otro ciclista que sale media hora después si pretende alcanzar al primero en hora y media?**

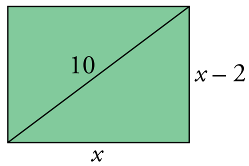
Llamamos x a la velocidad del ciclista que en segundo lugar.

- 1 hora y media $\rightarrow$ 1,5 horas
- El primer ciclista recorrerá $\rightarrow$ $15 \cdot 2 = 30$ km
- El segundo ciclista recorrerá $\rightarrow$ $1{,}5x$

$$1{,}5x = 30 \rightarrow x = \frac{30}{1{,}5} \rightarrow x = 20 \text{ km/h}$$

El ciclista deberá llevar una velocidad de 20 km/h.

23. **Calcula las dimensiones de un rectángulo en el que la base mide 2 cm menos que la altura y la diagonal mide 10 cm.**



Aplicando el Teorema de Pitágoras:

$10^2 = x^2 + (x-2)^2 \to 100 = x^2 + x^2 - 4x + 4 \to 0 = 2x^2 - 4x + 4 - 100 \to 2x^2 - 4x - 96 = 0$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-96)}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 768}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{784}}{4} = \frac{4 \pm 28}{4}$$

$$x = \begin{cases} \dfrac{4+28}{4} \to x = \dfrac{32}{4} \to x = 8 \\ \dfrac{4-28}{4} \to x = \dfrac{-24}{4} \to x = -6 \to \text{No vale, las medidas son siempre positivas.} \end{cases}$$

La base del rectángulo mide 8 cm y la altura 8 – 2 = 6 cm.

Curiosidades matemáticas

Leyenda china

Un genio que vivía en un estrecho desfiladero ofrecía a los viajeros el siguiente trato:

— *Para pasar, has de pagar la cantidad de cuatro veces cuatro monedas. Después, como prueba de amistad, yo doblaré el dinero de tu bolsa.*

Un campesino algo ambicioso, enterado del caso, reunió sus ahorros y se empeñó en atravesar muchas veces el desfiladero. Sin embargo, se encontró que a la cuarta, su bolsa estaba vacía. ¿Con cuántas monedas se presentó por primera vez ante el genio?

Cada vez que pasa el campesino por el desfiladero ha de darle 16 monedas al genio y lo que le queda en la bolsa el genio lo multiplica por dos. Por tanto, si llamamos x a las monedas que llevaba el campesino:

$[([(x - 16) \cdot 2] - 16) \cdot 2 - 16] \cdot 2 - 16 = 0$

$[(2x - 32 - 16) \cdot 2 - 16] \cdot 2 - 16 = 0$

$[(2x - 48) \cdot 2 - 16] \cdot 2 - 16 = 0$

$[4x - 96 - 16] \cdot 2 - 16 = 0$

$[4x - 112] \cdot 2 - 16 = 0$

$8x - 224 - 16 = 0$

$8x - 240 = 0$

$8x = 240$

$x = \frac{240}{8}$

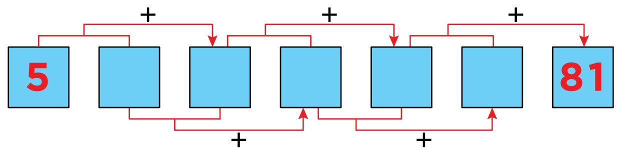
$x = 30$

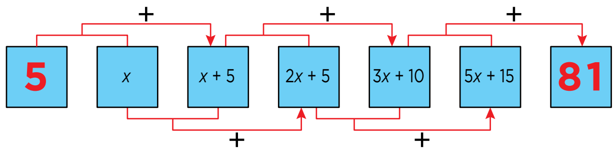
La primera vez se presentó ante el genio con 30 monedas.

Usa la equis

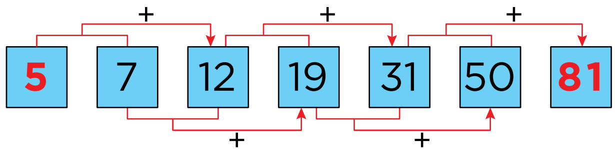
Has de completar cada casilla de forma que sumando los números de dos consecutivas obtengas el número de la siguiente.

Si, por ejemplo, la segunda casilla tiene un valor x**, la tercera valdrá…**





$(3x + 10) + (5x + 15) = 81 \rightarrow 8x + 25 = 81 \rightarrow 8x = 81 - 25 \rightarrow 8x = 56 \rightarrow x = \frac{56}{8} \rightarrow x = 7$



1 Ecuaciones con dos incógnitas

Página 99

1. Representa las rectas correspondientes a estas ecuaciones:

a) $\mathbf{2x - y = 3}$ **b)** $\mathbf{-x + y = 1}$

¿Cuál es la solución común a ambas ecuaciones?

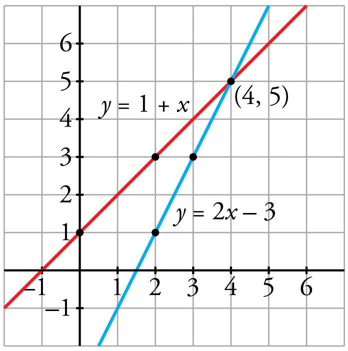
a) $2x - y = 3 \rightarrow y = 2x - 3$

x	2	3	4
y	1	3	5

b) $-x + y = 1 \rightarrow y = 1 + x$

x	0	2	4
y	1	3	5

La solución común a ambas ecuaciones es el punto (4, 5).



2 Sistemas de ecuaciones

Página 100

1. Tenemos 76 céntimos de euro en veinte monedas de dos y de cinco céntimos.

¿Cuántas monedas de cada clase tenemos?

Incógnitas $\begin{cases} x\text{: número de monedas de dos céntimos} \\ y\text{: número de monedas de cinco céntimos} \end{cases}$

En total tengo 20 monedas $\rightarrow$ $x + y = 20$

El valor total es 76 céntimos de euro.

Valor de las monedas de dos céntimos: $2x$

Valor de las monedas de cinco céntimos: $5y$

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 2x + 5y = 76 \end{cases}$$

Por tanteo, la solución del sistema es $x = 8$, $y = 12$. Por tanto, tenemos 8 monedas de dos céntimos y 12 monedas de cinco céntimos.

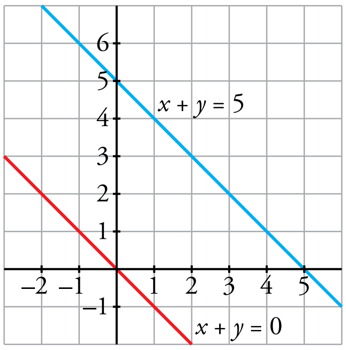
3 Número de soluciones de un sistema lineal

Página 101

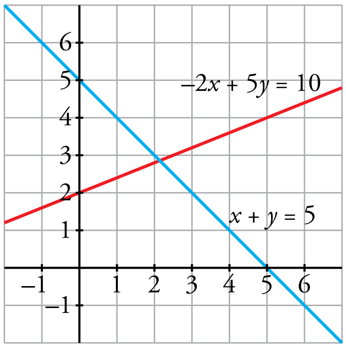
1. Fijándote bien en las ecuaciones que los forman, di cuál de los siguientes sistemas tiene una solución, cuál es incompatible y cuál indeterminado. Compruébalo representando las rectas:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + \ \ y = 5 \\ -2x + 5y = 10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + \ \ y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$

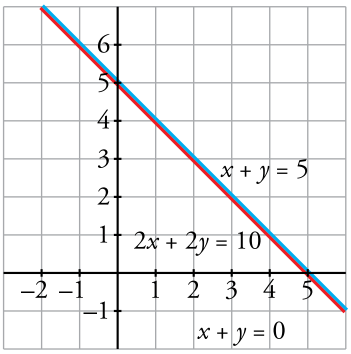
a) Es un sistema incompatible, porque si $x + y$ es igual a 5, no puede ser, a la vez, igual a 0.



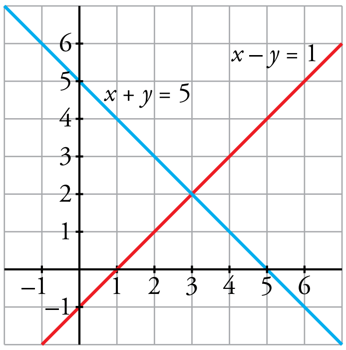
b) Es un sistema con una única solución puesto que las dos ecuaciones son distintas.



c) Es un sistema indeterminado porque una ecuación es el doble de la otra, es decir, las dos ecuaciones son iguales.



d) Es un sistema con una única solución, puesto que las dos ecuaciones son distintas.



2. Completa los siguientes sistemas para que el primero tenga la solución $x = 5$, $y = 3$, el segundo sea incompatible, el tercero sea indeterminado y el cuarto, también:

a) $\begin{cases} x - 4y = \ldots \\ 2x \ \ \ldots = 13 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + \ \ y = 4 \\ 4x + 2y = \ldots \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x \ \ \ldots = \ldots \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x + 11y = \ldots \\ \ldots + 33y = 9 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x - 4y = -7 \\ 2x + y = 13 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x + 2y = 3 \end{cases}$ $\rightarrow$ Vale cualquier valor distinto de 8.

c) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x + 11y = 3 \\ 15x + 33y = 9 \end{cases}$

4 Método de sustitución

Página 102

1. Resuelve, por el método de sustitución, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + \ \ y = 6 \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x + 10y = -1 \\ x + \ 2y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - 3y = 50 \\ 4x + \ \ y = 23 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 5x + y = 6 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + \ \ y = 6 \\ 3x - 5y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 6 - x \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$

$3x - 5(6 - x) = 2 \rightarrow 3x - 30 + 5x = 2 \rightarrow 8x = 2 + 30 \rightarrow 8x = 32 \rightarrow x = \dfrac{32}{8} \rightarrow x = 4$

$y = 6 - 4 \rightarrow y = 2$

Solución: $x = 4, \ y = 2$

b) $\begin{cases} 3x + 10y = -1 \\ x + \ 2y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + 10y = -1 \\ x = 1 - 2y \end{cases}$

$3(1 - 2y) + 10y = -1 \rightarrow 3 - 6y + 10y = -1 \rightarrow 3 + 4y = -1 \rightarrow 4y = -1 - 3 \rightarrow 4y = -4 \rightarrow$

$\rightarrow y = -1$

$x = 1 - 2 \cdot (-1) \rightarrow x = 1 + 2 \rightarrow x = 3$

Solución: $x = 3, \ y = -1$

c) $\begin{cases} 5x - 3y = 50 \\ 4x + \ \ y = 23 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x - 3y = 50 \\ y = 23 - 4x \end{cases}$

$5x - 3(23 - 4x) = 50 \rightarrow 5x - 69 + 12x = 50 \rightarrow 17x - 69 = 50 \rightarrow 17x = 50 + 69 \rightarrow$

$\rightarrow 17x = 119 \rightarrow x = \dfrac{119}{17} \rightarrow x = 7$

$y = 23 - 4 \cdot 7 = 23 - 28 = -5$

Solución: $x = 7, \ y = -5$

d) $\begin{cases} 5x + \ y = 6 \\ 3x - \ y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x + y = 6 \\ 3x - 2 = y \end{cases}$

$5x + 3x - 2 = 6 \rightarrow 8x - 2 = 6 \rightarrow 8x = 6 + 2 \rightarrow 8x = 8 \rightarrow x = 1$

$y = 3 \cdot 1 - 2 = 3 - 2 = 1$

Solución: $x = 1, \ y = 1$

5 Método de igualación

Página 103

1. Resuelve, por el método de igualación, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x + 10y = -1 \\ x + \;\; 2y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + y = 6 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 5x - 3y = 50 \\ 4x + \;\; y = 23 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 6 - x \\ y = x - 2 \end{cases}$

$6 - x = x - 2 \rightarrow 6 + 2 = x + x \rightarrow 8 = 2x \rightarrow x = \dfrac{8}{2} \rightarrow x = 4$

$y = 6 - 4 \rightarrow y = 2$

Solución: $x = 4, \; y = 2$

b) $\begin{cases} 3x + 10y = -1 \\ x + \;\; 2y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1 - 10y}{3} \\ x = 1 - 2y \end{cases}$

$\dfrac{-1 - 10y}{3} = 1 - 2y \rightarrow 3 \cdot \dfrac{-1 - 10y}{3} = 3 \cdot (1 - 2y) \rightarrow -1 - 10y = 3 - 6y \rightarrow$

$\rightarrow -10y + 6y = 3 + 1 \rightarrow -4y = 4 \rightarrow y = -1$

$x = 1 - 2 \cdot (-1) \rightarrow x = 1 + 2 \rightarrow x = 3$

Solución: $x = 3, \; y = -1$

c) $\begin{cases} 5x + y = 6 \\ 3x - y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 6 - 5x \\ y = 3x - 2 \end{cases}$

$6 - 5x = 3x - 2 \rightarrow 6 + 2 = 3x + 5x \rightarrow 8 = 8x \rightarrow x = 1$

$y = 6 - 5 \cdot 1 = 6 - 5 = 1$

Solución: $x = 1, \; y = 1$

d) $\begin{cases} 5x - 3y = 50 \\ 4x + \;\; y = 23 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{5x - 50}{3} = y \\ y = 23 - 4x \end{cases}$

$\dfrac{5x - 50}{3} = 23 - 4x \rightarrow 3 \cdot \dfrac{5x - 50}{3} = 3 \cdot (23 - 4x) \rightarrow 5x - 50 = 69 - 12x \rightarrow$

$\rightarrow 5x + 12x = 69 + 50 \rightarrow 17x = 119 \rightarrow x = \dfrac{119}{17} \rightarrow x = 7$

$y = 23 - 4 \cdot 7 = 23 - 28 = -5$

Solución: $x = 7, \; y = -5$

6 Método de reducción

Página 104

1. Resuelve, por el método de reducción, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 5y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 5y = -26 \\ 4x + 10y = 32 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x - 3y = 50 \\ 4x + y = 23 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$

$2x = 8 \rightarrow x = \frac{8}{2} \rightarrow x = 4$

$4 + y = 6 \rightarrow y = 6 - 4 \rightarrow y = 2$

Solución: $x = 4$, $y = 2$

b) $\begin{cases} x + 5y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$

$4x = 8 \rightarrow x = \frac{8}{4} \rightarrow x = 2$

$2 + 5y = 7 \rightarrow 5y = 7 - 2 \rightarrow 5y = 5 \rightarrow y = 1$

Solución: $x = 2$, $y = 1$

c) $\begin{cases} 3x - 5y = -26 \rightarrow \text{Multiplicamos por 2} \\ 4x + 10y = 32 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x - 10y = -52 \\ 4x + 10y = 32 \end{cases}$

$10x = -20 \rightarrow x = \frac{-20}{10} \rightarrow x = -2$

$3 \cdot (-2) - 5y = -26 \rightarrow -6 - 5y = -26 \rightarrow -5y = -26 + 6 \rightarrow -5y = -20 \rightarrow$

$\rightarrow y = \frac{-20}{-5} \rightarrow y = 4$

Solución: $x = -2$, $y = 4$

d) $\begin{cases} 5x - 3y = 50 \\ 4x + y = 23 \rightarrow \text{Multiplicamos por 3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x - 3y = 50 \\ 12x + 3y = 69 \end{cases}$

$17x = 119 \rightarrow x = \frac{119}{17} \rightarrow x = 7$

$5 \cdot 7 - 3y = 50 \rightarrow 35 - 3y = 50 \rightarrow -3y = 50 - 35 \rightarrow -3y = 15 \rightarrow y = \frac{15}{-3} \rightarrow y = -5$

Solución: $x = 7$, $y = -5$

7 Regla práctica para resolver sistemas lineales

Página 105

1. Resuelve este sistema simplificando previamente:

$$\begin{cases} \mathbf{2(x-1)+3(y+4)=9} \\ \mathbf{\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x-1)+3(y+4)=9 \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x-2+3y+12=9 \\ 6\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}\right)=6\cdot 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x+3y=9-12+2 \\ 3x-2y=18 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x+3y=-1 \;\rightarrow\; \text{Multiplicamos por } 2 \\ 3x-2y=18 \;\rightarrow\; \text{Multiplicamos por } 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x+6y=-2 \\ 9x-6y=54 \end{cases}$$

$$13x \quad = 52 \rightarrow x=\frac{52}{13} \rightarrow x=4$$

Sustituyendo:

$$2\cdot 4+3y=-1 \rightarrow 8+3y=-1 \rightarrow 3y=-1-8 \rightarrow 3y=-9 \rightarrow y=\frac{-9}{3} \rightarrow y=-3$$

La solución del sistema es $x=4$, $y=-3$

2. Resuelve este sistema aplicando dos veces el método de reducción:

$$\begin{cases} \mathbf{45x-11y=23} \\ \mathbf{7x+\;\;6y=19} \end{cases}$$

Para despejar x:

$$\begin{cases} 45x-11y=23 \;\rightarrow\; \text{Multiplicamos por } 6 \\ 7x+\;\;6y=19 \;\rightarrow\; \text{Multiplicamos por } 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 270x-66y=138 \\ 77x+66y=209 \end{cases}$$

$$347x \quad = 347 \rightarrow x=1$$

Para despejar y:

$$\begin{cases} 45x-11y=23 \;\rightarrow\; \text{Multiplicamos por } (-7) \\ 7x+\;\;6y=19 \;\rightarrow\; \text{Multiplicamos por } 45 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2\,835x+\;\;77y=-161 \\ 2\,835x+270y=\;\;855 \end{cases}$$

$$347y=694 \rightarrow y=\frac{694}{347} \rightarrow y=2$$

La solución del sistema es $x=1$, $y=2$

8 Traducción de enunciados a sistemas de ecuaciones

Página 106

1. Por dos cafés y un cruasán hemos pagado 4,30 €. En la mesa de al lado había un grupo de amigos que han pagado 11,60 € por cinco cafés y tres cruasanes. ¿Cuánto cuesta cada café y cada cruasán?

Precio del café $\to$ x €

Precio del cruasán $\to$ y €

$$\begin{cases} 2x + y = 4,30 \to \text{Multiplicamos por } (-3) \\ 5x + 3y = 11,60 \end{cases} \to \begin{cases} -6x - 3y = -12,90 \\ 5x + 3y = 11,60 \end{cases}$$

$$-x = -1,30 \to x = 1,30$$

Sustituimos en la primera ecuación:

$2 \cdot 1,30 + y = 4,30 \to 2,60 + y = 4,30 \to y = 4,30 - 2,60 \to y = 1,70$

Un café cuesta 1,30 €, y un cruasán, 1,70 €.

2. Calcula dos números cuya suma sea 191, y su diferencia, 67.

Un número $\to$ x

Otro número $\to$ y

$$\begin{cases} x + y = 191 \\ x - y = 67 \end{cases}$$

$$2x = 258 \to x = \frac{258}{2} \to x = 129$$

Sustituimos en la primera ecuación:

$129 + y = 191 \to y = 191 - 129 \to y = 62$

Los números son 129 y 62.

3. Una empresa aceitera ha envasado 3 000 litros de aceite en 1 200 botellas de dos y de cinco litros. ¿Cuántas botellas de cada clase se han utilizado?

Número de botellas de 2 litros $\to$ x

Número de botellas de 5 litros $\to$ y

$$\begin{cases} x + y = 1\,200 \\ 2x + 5y = 3\,000 \end{cases} \to \begin{cases} x = 1\,200 - y \\ 2x + 5y = 3\,000 \end{cases}$$

$2(1\,200 - y) + 5y = 3\,000 \to 2\,400 - 2y + 5y = 3\,000 \to 3y = 600 \to y = 200$

$x = 1\,200 - 200 = 1\,000$

Se han utilizado 1 000 botellas de dos litros y 200 botellas de cinco litros.

4. En un test de 30 preguntas se obtienen 0,75 puntos por cada respuesta correcta y se restan 0,25 puntos por cada error. Si mi nota ha sido 10,5, ¿cuántos aciertos y cuántos errores he cometido?

Número de aciertos $\to x$

Número de errores $\to y$

$$\begin{cases} x + y = 30 \to \text{Multiplicamos por } 0,25 \\ 0,75x - 0,25y = 10,5 \end{cases} \to \begin{cases} 0,25x + 0,25y = 7,5 \\ 0,75x - 0,25y = 10,5 \end{cases}$$

$$x = 18$$

Sustituimos en la primera ecuación:

$18 + y = 30 \to y = 30 - 18 \to y = 12$

He cometido 18 aciertos y 12 errores.

5. Para pagar un artículo que costaba 3 €, he utilizado nueve monedas, unas de 20 céntimos y otras de 50 céntimos. ¿Cuántas monedas de cada clase he utilizado?

Ver el ejercicio resuelto de la página 100.

Número de monedas de 20 céntimos $\to x$

Número de monedas de 50 céntimos $\to y$

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 0,2x + 0,5y = 3 \end{cases} \to \begin{cases} x = 9 - y \\ 0,2x + 0,5y = 3 \end{cases}$$

$0,2(9 - y) + 0,5y = 3 \to 1,8 - 0,2y + 0,5y = 3 \to 0,3y = 1,2 \to y = 4$

$x = 9 - 4 = 5$

He utilizado 5 monedas de 20 céntimos y 4 monedas de 50 céntimos.

Página 107

6. Dos poblaciones están a 50 km. En el mismo instante, salen un peatón de A hacia B a 5 km/h y un ciclista de B hacia A a 20 km/h. ¿Cuánto tardan en encontrarse? ¿Qué distancia recorre el peatón?

	Distancia (km)	Tiempo (h)	Velocidad (km/h)
Peatón	x	t	5
Ciclista	$50 - x$	t	20

Espacio = velocidad · tiempo

$$\begin{cases} x = 5t \\ 50 - x = 20t \end{cases}$$

Resolvemos por sustitución:

$$50 - 5t = 20t \;\rightarrow\; 50 = 20t + 5t \;\rightarrow\; 50 = 25t \;\rightarrow\; t = \frac{50}{25} \;\rightarrow\; t = 2 \text{ horas}$$

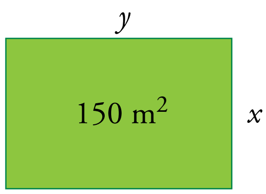
Sustituimos en la primera ecuación:

$x = 5 \cdot 2 = 10$ km

Se encuentran 2 horas después de salir. El peatón recorre 10 km.

7. Un jardín rectangular de 150 m² es 5 m más largo que ancho. ¿Cuáles son sus dimensiones?

Llamamos x al ancho e y al largo del jardín.



$$\begin{cases} y = x + 5 \\ x \cdot y = 150 \end{cases}$$

Resolvemos por sustitución:

$$x(x + 5) = 150 \;\rightarrow\; x^2 + 5x = 150 \;\rightarrow\; x^2 + 5x - 150 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-150)}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 600}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{625}}{2} = \frac{-5 \pm 25}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-5 + 25}{2} \;\rightarrow\; x = \dfrac{20}{2} \;\rightarrow\; x = 10 \\[2ex] x = \dfrac{-5 - 25}{2} \;\rightarrow\; x = \dfrac{-30}{2} \;\rightarrow\; x = -15 \;\rightarrow\; \text{No vale porque es negativo} \end{cases}$$

Sustituimos en la primera ecuación:

$y = 10 + 5 = 15$ m

El jardín mide 10 metros de ancho y 15 metros de largo.

8. Dos ciudades, A y B, distan 675 km. Un autobús sale de A hacia B a 105 km/h. Simultáneamente, sale de B hacia A una moto a 120 km/h. Calcula la distancia que recorre cada uno hasta que se encuentran.

	Distancia (km)	Tiempo (h)	Velocidad (km/h)
Autobús	x	t	105
Moto	$675 - x$	t	120

Espacio = velocidad · tiempo

$$\begin{cases} x = 105t \\ 675 - x = 120t \end{cases}$$

Resolvemos por sustitución:

$$675 - 105t = 120t \rightarrow 675 = 120t + 105t \rightarrow 675 = 225t \rightarrow t = \frac{675}{225} \rightarrow t = 3 \text{ horas}$$

Sustituimos en la primera ecuación:

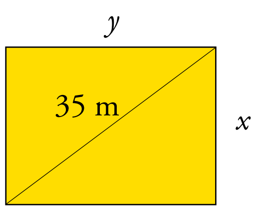
$x = 105 \cdot 3 = 315$ km

$675 - 315 = 360$ km

Hasta que se encuentran, el autobús recorre 315 km y la moto, 360 km.

9. Los lados de un rectángulo están en relación de 3 a 4 y la diagonal mide 35 m. ¿Cuánto miden los lados?

Llamamos x al ancho e y al largo del rectángulo.



Utilizamos el Teorema de Pitágoras: $x^2 + y^2 = 35^2$

$$\begin{cases} y = \dfrac{3}{4}x \\ x^2 + y^2 = 1\,225 \end{cases}$$

Resolvemos por sustitución:

$$x^2 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2 = 1\,225 \rightarrow x^2 + \frac{9}{16}x^2 = 1\,225 \rightarrow 16\left(x^2 + \frac{9}{16}x^2\right) = 16 \cdot 1\,225 \rightarrow$$

$$\rightarrow 16x^2 + 9x^2 = 19\,600 \rightarrow 25x^2 = 19\,600 \rightarrow x^2 = \frac{19\,600}{25} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 = 784 \rightarrow x = 28 \text{ m}$$

Sustituimos en la primera ecuación:

$$y = \frac{3}{4} \cdot 28 = 3 \cdot 7 = 21 \text{ m}$$

El rectángulo mide 28 metros de ancho y 21 metros de largo.

Ejercicios y problemas

Página 108

Practica

1. **Completa los siguientes sistemas de ecuaciones para que ambos tengan la solución $x = 2,\ y = -1$:**

a) $\begin{cases} 2x + 3y = \dots \\ 3x - 4y = \dots \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x + 7y = \dots \\ -2x - 5y = \dots \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - 4y = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 7y = -1 \\ -2x - 5y = 1 \end{cases}$

2. **Comprueba si $x = -2,\ y = 1$ es solución de los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} 7x + 4y = -10 \\ 3x - 2y = -8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 6y = 1 \end{cases}$

Veamos si se cumplen las igualdades:

a) $\begin{cases} 7 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 = -10 \\ 3 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 = -8 \end{cases}$ $\rightarrow$ Se cumplen las igualdades, es solución.

b) $\begin{cases} -2 + 2 \cdot 1 = 0 \\ 2 \cdot (-2) + 6 \cdot 1 = 2 \neq 1 \end{cases}$ $\rightarrow$ La segunda igualdad no se cumple. No es solución.

3. **a) Busca dos soluciones de la siguiente ecuación: $2x + y = 4$.**

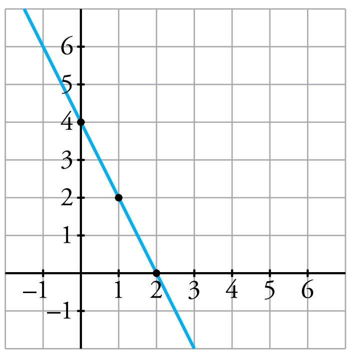
b) Representa gráficamente la recta $2x + y = 4$.

c) ¿Qué relación hay entre los puntos de la recta y las soluciones de la ecuación?

a) Por ejemplo: $x = 1,\ y = 2$ ó $x = 0,\ y = 4$.

b) $2x + y = 4 \rightarrow y = 4 - 2x$

x	0	1	2
y	4	2	0



c) Los puntos de la recta son las soluciones de la ecuación $2x + y = 4$.

4. **a) Representa gráficamente, y en los mismos ejes, estas dos rectas:**

$x + y = 5$ $\qquad\qquad$ $-3x + y = -3$

b) Di cuál es la solución del sistema siguiente:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ -3x + y = -3 \end{cases}$$

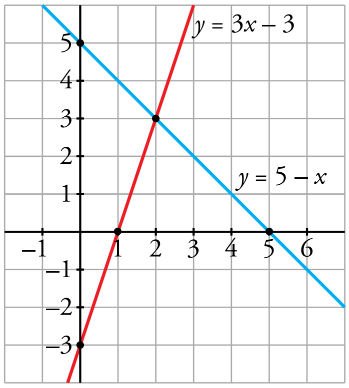
a) Calculamos varios puntos de cada recta:

$x + y = 5 \rightarrow y = 5 - x$

x	0	2	5
y	5	3	0

$-3x + y = -3 \rightarrow y = 3x - 3$

x	0	1	2
y	–3	0	3



b) La solución es (2, 3) porque es el punto que pertenece a ambas rectas.

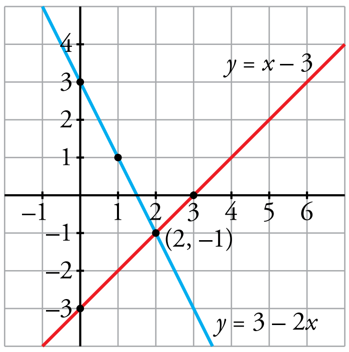
5. **Resuelve estos sistemas representando gráficamente las rectas que los forman:**

a) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 3 \end{cases}$ $\qquad$ **b)** $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - 3 = -y \end{cases}$ $\qquad$ **c)** $\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x - 8 = 2y \end{cases}$ $\qquad$ **d)** $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 3 - 2x \\ y = x - 3 \end{cases}$

x	0	1	2
y = 3 – 2x	3	1	–1

x	0	2	3
y = x – 3	–3	–1	0

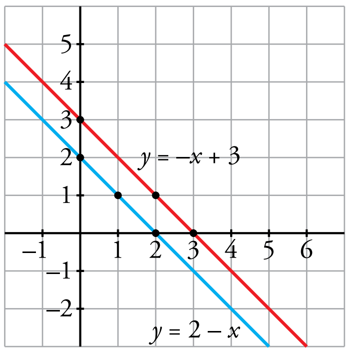


La solución de este sistema es el punto (2, –1).

b) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - 3 = -y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ y = -x + 3 \end{cases}$

x	0	1	2
y = 2 – x	2	1	0

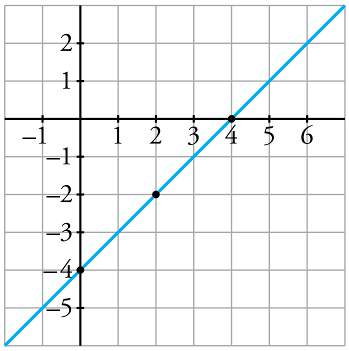
x	0	2	3
y = –x + 3	3	1	0



Las rectas son paralelas. El sistema no tiene solución.

c) $\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x - 8 = 2y \end{cases} \to \begin{cases} x - 4 = y \\ x - 4 = y \end{cases}$

x	0	2	4
$y = x - 4$	–4	–2	0

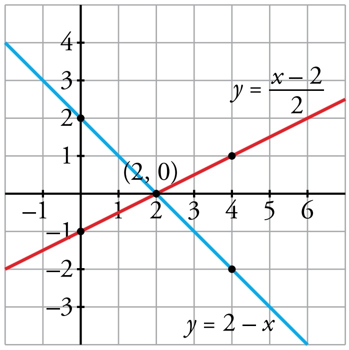


Las ecuaciones son equivalentes. Por tanto, las dos rectas coinciden. El sistema tiene infinitas soluciones.

d) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \to \begin{cases} y = 2 - x \\ \dfrac{x-2}{2} = y \end{cases}$

x	0	2	4
$y = 2 - x$	2	0	–2

x	0	2	4
$y = \dfrac{x-2}{2}$	–1	0	1



La solución es (2, 0).

6. **Resuelve por sustitución.**

a) $\begin{cases} x = 2y + 5 \\ 3x - 2y = 19 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y = 5 \\ 4x + 2y = 22 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 5x - 4y = 17 \\ 6x + \ \ y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 8 = y \\ 2y - 3x = 16 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 5x - 4y = -6 \\ 3y + 1 = x \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 3x = 4y - 4 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x = 2y + 5 \\ 3x - 2y = 19 \end{cases}$

$3(2y + 5) - 2y = 19 \to 6y + 15 - 2y = 19 \to 4y + 15 = 19 \to 4y = 19 - 15 \to$
$\to 4y = 4 \to y = 1$

$x = 2 \cdot 1 + 5 = 7$

Solución: $x = 7, \ y = 1$

b) $\begin{cases} y = 5 \\ 4x + 2y = 22 \end{cases}$

$4x + 2 \cdot 5 = 22 \to 4x + 10 = 22 \to 4x = 22 - 10 \to 4x = 12 \to x = \dfrac{12}{4} \to x = 3$

Solución: $x = 3, \ y = 5$

c) $\begin{cases} 5x - 4y = 17 \\ 6x + \ \ y = 3 \end{cases} \to \begin{cases} 5x - 4y = 17 \\ y = 3 - 6x \end{cases}$

$5x - 4(3 - 6x) = 17 \to 5x - 12 + 24x = 17 \to 29x - 12 = 17 \to 29x = 17 + 12 \to$
$\to 29x = 29 \to x = 1$

$y = 3 - 6 \cdot 1 = 3 - 6 = -3$

Solución: $x = 1, \ y = -3$

d) $\begin{cases} x + 8 = y \\ 2y - 3x = 16 \end{cases}$

$2(x + 8) - 3x = 16 \rightarrow 2x + 16 - 3x = 16 \rightarrow -x + 16 = 16 \rightarrow 16 - 16 = x \rightarrow x = 0$

$y = 0 + 8 = 8$

Solución: $x = 0,\ y = 8$

e) $\begin{cases} 5x - 4y = -6 \\ 3y + 1 = x \end{cases}$

$5(3y + 1) - 4y = -6 \rightarrow 15y + 5 - 4y = -6 \rightarrow 11y + 5 = -6 \rightarrow 11y = -6 - 5 \rightarrow$
$\rightarrow 11y = -11 \rightarrow y = -1$

$x = 3 \cdot (-1) + 1 = -3 + 1 = -2$

Solución: $x = -2,\ y = -1$

f) $\begin{cases} 3x = 4y - 4 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$

$4y - 4 + 2y = 2 \rightarrow 6y - 4 = 2 \rightarrow 6y = 2 + 4 \rightarrow 6y = 6 \rightarrow y = 1$

$3x = 4 \cdot 1 - 4 \rightarrow 3x = 4 - 4 \rightarrow 3x = 0 \rightarrow x = 0.$

Solución: $x = 0,\ y = 1$

7. **Resuelve por igualación.**

a) $\begin{cases} x = 2y \\ x = 4y - 8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y = 6x \\ x + y = 7 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - \ y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = \dfrac{2x}{3} \\ y = \dfrac{x+1}{3} \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 4 + 3y = x \\ x + 2y = -1 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 2x - 5y = -4 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x = 2y \\ x = 4y - 8 \end{cases}$

$2y = 4y - 8 \rightarrow 8 = 4y - 2y \rightarrow 8 = 2y \rightarrow y = \dfrac{8}{2} \rightarrow y = 4$

$x = 2 \cdot 4 \rightarrow x = 8$

Solución: $x = 8,\ y = 4$

b) $\begin{cases} y = 6x \\ x + y = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 6x \\ y = 7 - x \end{cases}$

$6x = 7 - x \rightarrow 6x + x = 7 \rightarrow 7x = 7 \rightarrow x = 1$

$y = 6 \cdot 1 \rightarrow y = 6$

Solución: $x = 1,\ y = 6$

c) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases} \to \begin{cases} x = 5 - 2y \\ x = 2 + y \end{cases}$

$5 - 2y = 2 + y \to 5 - 2 = y + 2y \to 3 = 3y \to y = 1$

$x = 2 + 1 = 3$

Solución: $x = 3,\ y = 1$

d) $\begin{cases} y = \dfrac{2x}{3} \\ y = \dfrac{x+1}{3} \end{cases}$

$\dfrac{2x}{3} = \dfrac{x+1}{3} \to 2x = x + 1 \to 2x - x = 1 \to x = 1$

$y = \dfrac{2 \cdot 1}{3} = \dfrac{2}{3}$

Solución: $x = 1,\ y = \dfrac{2}{3}$

e) $\begin{cases} 4 + 3y = x \\ x + 2y = -1 \end{cases} \to \begin{cases} x = 4 + 3y \\ x = -1 - 2y \end{cases}$

$4 + 3y = -1 - 2y \to 3y + 2y = -4 - 1 \to 5y = -5 \to y = -1$

$x = 4 + 3 \cdot (-1) = 4 - 3 = 1$

Solución: $x = 1,\ y = -1$

f) $\begin{cases} 2x - 5y = -4 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 2x = 5y - 4 \\ 2x = 3y \end{cases}$

$5y - 4 = 3y \to 5y - 3y = 4 \to 2y = 4 \to y = \dfrac{4}{2} \to y = 2$

$2x = 3 \cdot 2 \to 2x = 6 \to x = \dfrac{6}{2} \to x = 3$

Solución: $x = 3,\ y = -2$

8. **Resuelve por reducción.**

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 5y = 9 \\ 6x - 2y = -6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 10x - 3y = 1 \\ 10x + 3y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 3y = 21 \\ 2x + 5y = -35 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 5x + 4y = 6 \\ 3x - 7y = 13 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 8x + 3y = 5 \\ 5x + 4y = 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 9 \end{cases}$

$$\begin{array}{l} \hline 2x \qquad = 12 \end{array} \to x = \dfrac{12}{2} \to x = 6$$

$6 + y = 3 \to y = 3 - 6 \to y = -3$

Solución: $x = 6,\ y = -3$

b) $\begin{cases} 3x - 5y = 9 \to \text{Multiplicamos por } (-2) \\ 6x - 2y = -6 \end{cases} \to \begin{cases} -6x + 10y = -18 \\ 6x - 2y = -6 \end{cases}$

$8y = -24 \to y = \dfrac{-24}{8} \to y = -3$

$3x - 5 \cdot (-3) = 9 \to 3x + 15 = 9 \to 3x = 9 - 15 \to 3x = -6 \to x = \dfrac{-6}{3} \to x = -2$

Solución: $x = -2,\ y = -3$

c) $\begin{cases} 10x - 3y = 1 \\ 10x + 3y = 3 \end{cases}$

$20x = 4 \to x = \dfrac{4}{20} \to x = \dfrac{1}{5}$

$10 \cdot \dfrac{1}{5} - 3y = 1 \to 2 - 3y = 1 \to 2 - 1 = 3y \to 3y = 1 \to y = \dfrac{1}{3}$

Solución: $x = \dfrac{1}{5},\ y = \dfrac{1}{3}$

d) $\begin{cases} x - 3y = 21 \to \text{Multiplicamos por } (-2) \\ 2x + 5y = -35 \end{cases} \to \begin{cases} -2x + 6y = -42 \\ 2x + 5y = -35 \end{cases}$

$11y = -77 \to y = -7$

$x - 3 \cdot (-7) = 21 \to x + 21 = 21 \to x = 21 - 21 \to x = 0$

Solución: $x = 0,\ y = -7$

e) $\begin{cases} 5x + 4y = 6 \to \text{Multiplicamos por } (-3) \\ 3x - 7y = 13 \to \text{Multiplicamos por } 5 \end{cases} \to \begin{cases} -15x - 12y = -18 \\ 15x - 35y = 65 \end{cases}$

$-47y = 47 \to y = -1$

$5x + 4 \cdot (-1) = 6 \to 5x - 4 = 6 \to 5x = 6 + 4 \to 5x = 10 \to x = \dfrac{10}{5} \to x = 2$

Solución: $x = 2,\ y = -1$

f) $\begin{cases} 8x + 3y = 5 \to \text{Multiplicamos por } 4 \\ 5x + 4y = 1 \to \text{Multiplicamos por } (-3) \end{cases} \to \begin{cases} 32x + 12y = 20 \\ -15x - 12y = -3 \end{cases}$

$17x = 17 \to x = 1$

$8 \cdot 1 + 3y = 5 \to 3y = 5 - 8 \to 3y = -3 \to y = -1$

Solución: $x = 1,\ y = -1$

9. **Resuelve estos sistemas por el método que consideres más adecuado e interpreta gráficamente la solución (no es necesario que representes las rectas):**

a) $\begin{cases} 5x+2y=-1 \\ 4x+\ y=1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x-y=1 \\ 3+2y=10x \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 5x=2y \\ 3x-y=0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x-3y=-8 \\ 6y=4x+16 \end{cases}$

a) Vamos a resolverlo por reducción:

$$\begin{cases} 5x+2y=-1 \\ 4x+y=1 \ \to \ \text{Multiplicamos por } (-2) \end{cases} \to \begin{cases} 5x+2y=-1 \\ -8x-2y=-2 \end{cases}$$
$$-3x \qquad = -3 \ \to \ x=1$$

$4 \cdot 1 + y = 1 \ \to \ y = 1-4 \ \to \ y=-3$

Solución: $x=1$, $y=-3$.

Gráficamente, son dos rectas que se cortan en el punto $(1, -3)$.

b) Vamos a resolverlo por sustitución:

$$\begin{cases} 5x-y=1 \ \to \ y=5x-1 \\ 3+2y=10x \end{cases}$$

$3+2(5x-1)=10x \ \to \ 3+10x-2=10x \ \to \ 1+10x=10x \ \to \ 1=10x-10x \ \to$

$\to \ 1=0x \ \to$ No tiene solución.

Gráficamente, son dos rectas paralelas.

c) Vamos a resolverlo por sustitución:

$$\begin{cases} 5x=2y \\ 3x-y=0 \ \to \ y=3x \end{cases}$$

$5x=2 \cdot 3x \ \to \ 5x=6x \ \to \ 0=6x-5x \ \to \ x=0$

$y=3 \cdot 0=0$

Soluicón: $x=0$, $y=0$.

Gráficamente, son dos rectas que se cortan en el punto $(0, 0)$.

d) Vamos a resolverlo por igualación:

$$\begin{cases} 2x-3y=-8 \\ 6y=4x+16 \end{cases} \to \begin{cases} 2x+8=3y \\ 3y=2x+8 \end{cases}$$

$2x+8=2x+8 \ \to \ 2x-2x=8-8 \ \to \ 0x=0 \ \to$ Infinitas soluciones.

Gráficamente son la misma recta.

10. **Resuelve por el método que consideres más adecuado.**

a) $\begin{cases} 3x = 6 \\ 5x + \dfrac{4y}{3} = 14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x - 3y = 3 \\ 3x + 6y = 9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x + \ \ y = 6 \\ 3x - 2y = 14 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 1,2x + 0,7y = 13 \\ \quad x - 0,5y = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{2y}{5} - \dfrac{x}{3} = 1 \\ 2(x + y) - 15 = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3(x - 1) + y = 8 \\ \dfrac{x + 1}{2} = y \end{cases}$ g) $\begin{cases} x \cdot y = 2 \\ 2x + 5y = 12 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x - y = 4 \\ x^2 + y = 8 \end{cases}$

a) Vamos a resolverlo por sustitución:

$$\begin{cases} 3x = 6 \\ 5x + \dfrac{4y}{3} = 14 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 5x + \dfrac{4y}{3} = 14 \end{cases}$$

$$5 \cdot 2 + \frac{4y}{3} = 14 \rightarrow 3\left(10 + \frac{4y}{3}\right) = 3 \cdot 14 \rightarrow 30 + 4y = 42 \rightarrow 4y = 42 - 30 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4y = 12 \rightarrow y = \frac{12}{4} \rightarrow y = 3$$

Solución: $x = 2, \ y = 3$

b) Vamos a resolverlo por reducción:

$$\begin{cases} 6x - 3y = 3 \rightarrow \text{Multiplicamos por 2} \\ 3x + 6y = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 12x - 6y = 6 \\ \ \ 3x + 6y = 9 \end{cases}$$

$$15x \qquad = 15 \rightarrow x = 1$$

$$3 \cdot 1 + 6y = 9 \rightarrow 6y = 9 - 3 \rightarrow 6y = 6 \rightarrow y = 1$$

Solución: $x = 1, \ y = 1$

c) Vamos a resolverlo por reducción:

$$\begin{cases} 5x + y = 6 \rightarrow \text{Multiplicamos por 2} \\ 3x - 2y = 14 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10x + 2y = 12 \\ \ \ 3x - 2y = 14 \end{cases}$$

$$13x \qquad = 26 \rightarrow x = \frac{26}{13} \rightarrow x = 2$$

$$5 \cdot 2 + y = 6 \rightarrow 10 + y = 6 \rightarrow y = 6 - 10 \rightarrow y = -4$$

Solución: $x = 2, \ y = -4$

d) Vamos a resolverlo por sustitución:

$$\begin{cases} 1,2x + 0,7y = 13 \\ x - 0,5y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1,2x + 0,7y = 13 \\ x = 0,5y \end{cases}$$

$$1{,}2 \cdot 0{,}5y + 0{,}7y = 13 \rightarrow 0{,}6y + 0{,}7y = 13 \rightarrow 1{,}3y = 13 \rightarrow y = \frac{13}{1,3} \rightarrow y = 10$$

$$x = 0{,}5 \cdot 10 \rightarrow x = 5$$

Solución: $x = 5, \ y = 10$

e) Vamos a simplificarlo y resolverlo por reducción:

$$\begin{cases} \dfrac{2y}{5} - \dfrac{x}{3} = 1 \\ 2(x+y) - 15 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 15\left(\dfrac{2y}{5} - \dfrac{x}{3}\right) = 15 \cdot 1 \\ 2x + 2y - 15 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6y - 5x = 15 \\ 2x + 2y = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x + 6y = 15 \\ 2x + 2y = 16 \rightarrow \text{Multiplicamos por } (-3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -5x + 6y = 15 \\ -6x - 6y = -48 \end{cases}$$

$$-11x \qquad = -33 \rightarrow x = \frac{-33}{-11} \rightarrow x = 3$$

$$2 \cdot 3 + 2y = 16 \rightarrow 6 + 2y = 16 \rightarrow 2y = 16 - 6 \rightarrow 2y = 10 \rightarrow y = \frac{10}{2} \rightarrow y = 5$$

Solución: $x = 3,\ y = 5$

f) Vamos a simplificarlo y resolverlo por igualación:

$$\begin{cases} 3(x-1) + y = 8 \\ \dfrac{x+1}{2} = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 3 + y = 8 \\ \dfrac{x+1}{2} = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 8 + 3 - 3x \\ \dfrac{x+1}{2} = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -3x + 11 \\ \dfrac{x+1}{2} = y \end{cases}$$

$$-3x + 11 = \frac{x+1}{2} \rightarrow 2 \cdot (-3x + 11) = 2 \cdot \left(\frac{x+1}{2}\right) \rightarrow -6x + 22 = x + 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 22 - 1 = x + 6x \rightarrow 21 = 7x \rightarrow x = \frac{21}{7} \rightarrow x = 3$$

$$y = -3 \cdot 3 + 11 = -9 + 11 \rightarrow y = 2$$

Solución: $x = 3,\ y = 2$

g) Vamos a resolverlo por sustitución:

$$\begin{cases} x \cdot y = 2 \\ 2x + 5y = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \cdot y = 2 \\ x = \dfrac{12 - 5y}{2} \end{cases}$$

$$\frac{12 - 5y}{2} \cdot y = 2 \rightarrow 2\left(\frac{12 - 5y}{2} \cdot y\right) = 2 \cdot 2 \rightarrow y(12 - 5y) = 4 \rightarrow 12y - 5y^2 = 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow 5y^2 - 12y + 4 = 0$$

$$y = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4}}{2 \cdot 5} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 80}}{10} = \frac{12 \pm \sqrt{64}}{10} = \frac{12 \pm 8}{10}$$

$$\rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{12 + 8}{10} \rightarrow y = \dfrac{20}{10} \rightarrow y = 2 \rightarrow x = 1 \\ y = \dfrac{12 - 8}{10} \rightarrow y = \dfrac{-4}{10} \rightarrow y = \dfrac{-1}{5} \rightarrow x = -10 \end{cases}$$

Solución: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ y $\begin{cases} x = -10 \\ y = \dfrac{-1}{5} \end{cases}$

h) Vamos a resolverlo por igualación:

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x^2 + y = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 4 = y \\ y = 8 - x^2 \end{cases}$$

$$x - 4 = 8 - x^2 \rightarrow x^2 + x - 4 - 8 = 0 \rightarrow x^2 + x - 12 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1 + 7}{2} \rightarrow x = \dfrac{6}{2} \rightarrow x = 3 \rightarrow y = -1 \\[2ex] x = \dfrac{-1 - 7}{2} \rightarrow x = \dfrac{-8}{2} \rightarrow x = -4 \rightarrow y = -8 \end{cases}$$

Solución: $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$ y $\begin{cases} x = -4 \\ y = -8 \end{cases}$

Página 109

Piensa y resuelve

11. **En un bar se venden bocadillos de jamón a 3,50 € y bocadillos de tortilla a 2 €. En una mañana vendieron 52 bocadillos y la recaudación final fue de 149 €. ¿Cuántos se vendieron de cada clase?**

Número de bocadillos de jamón $\rightarrow x$

Número de bocadillos de tortilla $\rightarrow y$

$$\begin{cases} x + y = 52 \ \rightarrow \ \text{Multiplicamos por } (-2) \\ 3{,}50x + 2y = 149 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -104 \\ 3{,}50x + 2y = \ \ 149 \end{cases}$$

$$1{,}50x \qquad = 45 \ \rightarrow \ x = \frac{45}{1{,}50} \ \rightarrow \ x = 30$$

Sustituimos en la primera ecuación:

$30 + y = 52 \ \rightarrow \ y = 52 - 30 \ \rightarrow \ y = 22$

Se vendieron 30 bocadillos de jamón y 22 de tortilla.

12. **Un fabricante de bombillas obtiene un beneficio de 0,30 € por cada pieza que sale del taller para la venta, pero sufre una pérdida de 0,40 € por cada pieza defectuosa que debe retirar. En una jornada ha fabricado 2 100 bombillas, obteniendo unos beneficios de 484,40 €. ¿Cuántas bombillas válidas y cuántas defectuosas se han fabricado en ese día?**

Número de bombillas válidas $\rightarrow x$

Número de bombillas defectuosas $\rightarrow y$

$$\begin{cases} x + y = 2100 \\ 0{,}30x - 0{,}40y = 484{,}40 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2100 - x \\ 0{,}30x - 0{,}40y = 484{,}40 \end{cases}$$

$$0{,}30x - 0{,}4 \cdot (2\,100 - x) = 484{,}40 \ \rightarrow \ 0{,}30x - 840 + 0{,}40x = 484{,}40 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ 0{,}70x = 484{,}40 + 840 \ \rightarrow \ 0{,}70x = 1\,324{,}40 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ x = \frac{1\,324{,}40}{0{,}70} \ \rightarrow \ x = 1\,892$$

Sustituimos en la primera ecuación:

$1\,892 + y = 2\,100 \ \rightarrow \ y = 2\,100 - 1\,892 \ \rightarrow \ y = 208$

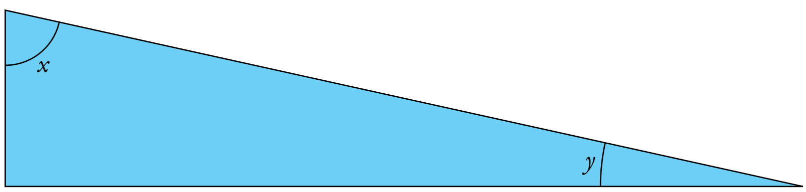
Se han fabricado 1 892 bombillas válidas y 208 defectuosas.

13. **La diferencia entre los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo es de 65°. Halla sus medidas.**

Recuerda cuál es la suma de los ángulos del triángulo.

Primer ángulo agudo $\rightarrow x$

Segundo ángulo agudo $\rightarrow y$



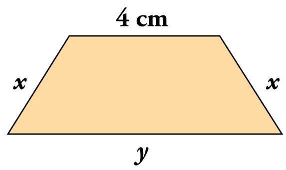
$$\begin{cases} 90 + x + y = 180 \\ x - y = 65 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 90 \\ x - y = 65 \end{cases}$$

$$2x = 155 \rightarrow x = \frac{155}{2} \rightarrow x = 77{,}5°$$

$88{,}5 + y = 90 \rightarrow y = 90 - 77{,}5 \rightarrow y = 12{,}5°$

Los ángulos miden 77,5° y 12,5°.

14. **El perímetro de este trapecio es de 24 cm. La base mayor mide lo mismo que la suma de los dos lados iguales. Halla las longitudes de todos los lados del trapecio.**



Medida de un lado $\rightarrow x$

Medida de la base mayor $\rightarrow y$

$$\begin{cases} 2x + y + 4 = 24 \\ y = 2x \end{cases}$$

$2x + 2x + 4 = 24 \rightarrow 4x + 4 = 24 \rightarrow 4x = 24 - 4 \rightarrow 4x = 20 \rightarrow x = \frac{20}{4} \rightarrow x = 5$

$y = 2 \cdot 5 = 10$

Los lados iguales miden 5 cm y la base mayor 10 cm.

15. **María ha comprado un abrigo que estaba rebajado un 15 %. Marta ha comprado otro abrigo 25 € más caro, pero ha conseguido una rebaja del 20 %, con lo que solo ha pagado 8 € más que María. ¿Cuál era el precio de cada abrigo?**

Abrigo de María → x. Rebajado un 15 % → 0,85x

Abrigo de Marta → y. Rebajado un 20 % → 0,80y

$$\begin{cases} y = x + 25 \\ 0{,}85x + 8 = 0{,}8y \end{cases}$$

$0{,}85x + 8 = 0{,}8(x + 25) \rightarrow 0{,}85x + 8 = 0{,}8x + 20 \rightarrow 0{,}85x - 0{,}8x = 20 - 8 \rightarrow$

$$\rightarrow 0{,}05x = 12 \rightarrow x = \frac{12}{0{,}05} \rightarrow x = 240 \text{ €}$$

$y = 240 + 25 \rightarrow y = 265$ €

El abrigo de María costaba 240 € y el de Marta 265 €.

16. **Un bodeguero ha mezclado dos cubas de vino, la primera de mejor calidad, a 3 €/litro, y la segunda, de calidad inferior, a 2,20 €/litro. De esta forma ha obtenido 16 *hl* de un vino de calidad intermedia que sale a 2,50 €/litro. ¿Cuál era el contenido de cada cuba?**

	CANTIDAD (*l*)	PRECIO (€/*l*)	COSTE (€)
1.ER TIPO	x	3	$3x$
2.º TIPO	y	2,2	$2{,}2y$
MEZCLA	$x + y = 1\,600$	2,5	$3x + 2{,}2y = 2{,}5 \cdot 1\,600$

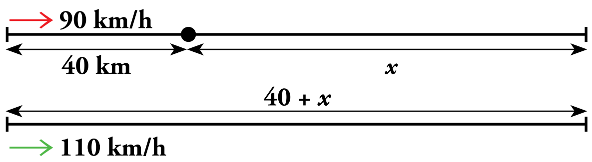
$$\begin{cases} x + y = 1\,600 \ \rightarrow \ \text{Multiplicamos por } (-3) \\ 3x + 2{,}2y = 4\,000 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3x - 3y = -4\,800 \\ 3x + 2{,}2y = 4\,000 \end{cases}$$

$$-0{,}8y = -800 \rightarrow y = \frac{-800}{-0{,}8} \rightarrow y = 1\,000$$

$x + 1\,000 = 1\,600 \rightarrow x = 1\,600 - 1\,000 \rightarrow x = 600$

La cuba de mejor calidad contenía 600 litros y la de menor calidad 1 000 litros.

17. **Un tren de cercanías sale de una estación a 90 km/h. Cuando lleva 40 km recorridos, sale otro más rápido en la misma dirección a 110 km/h. ¿Cuánto tardará en alcanzar al primero?**



	ESPACIO	VELOCIDAD	TIEMPO
1.ER TREN	x	90	t
2.º TREN	$x + 40$	110	t

Espacio = velocidad · tiempo

$$\begin{cases} x = 90t \\ x + 40 = 110t \end{cases}$$

$90t + 40 = 110t \rightarrow 40 = 110t - 90t \rightarrow 40 = 20t \rightarrow t = \dfrac{40}{20} \rightarrow t = 2$

El segundo tren tardará 2 horas en alcanzar al primer tren.

18. **La suma de dos números es 36, y su producto, 275. ¿Qué números son?**

Un número $\rightarrow x$

Otro número $\rightarrow y$

$$\begin{cases} x + y = 36 \\ x \cdot y = 275 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 36 - x \\ x \cdot y = 275 \end{cases}$$

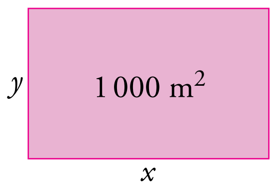
$$x \cdot (36 - x) = 275 \rightarrow 36x - x^2 = 275 \rightarrow x^2 - 36x + 275 = 0$$

$$x = \frac{-(-36) \pm \sqrt{(-36)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 275}}{2 \cdot 1} = \frac{36 \pm \sqrt{1296 - 1100}}{2} = \frac{36 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{36 \pm 14}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{36 + 14}{2} \rightarrow x = \dfrac{50}{2} \rightarrow x = 25 \rightarrow y = \dfrac{275}{25} = 11 \\[2ex] x = \dfrac{36 - 14}{2} \rightarrow x = \dfrac{22}{2} \rightarrow x = 11 \rightarrow y = \dfrac{275}{11} = 25 \end{cases}$$

Los números buscados son 11 y 25.

19. **El perímetro de una parcela rectangular mide 130 m, y el área, 1 000 m^2. ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela?**



Perímetro = 130 m

$$\begin{cases} 2x + 2y = 130 \\ x \cdot y = 1000 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 65 \\ x \cdot y = 1000 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 65 - x \\ x \cdot y = 1000 \end{cases}$$

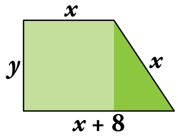
$$x \cdot (65 - x) = 1000 \rightarrow 65x - x^2 = 1000 \rightarrow x^2 - 65x + 1000 = 0$$

$$x = \frac{-(-65) \pm \sqrt{(-65)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1000}}{2 \cdot 1} = \frac{65 \pm \sqrt{4225 - 4000}}{2} = \frac{65 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{65 \pm 15}{2}$$

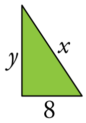
$$\rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{65 + 15}{2} \rightarrow x = \dfrac{80}{2} \rightarrow x = 40 \rightarrow y = \dfrac{1000}{40} = 25 \\[2ex] x = \dfrac{65 - 15}{2} \rightarrow x = \dfrac{50}{2} \rightarrow x = 25 \rightarrow y = \dfrac{1000}{25} = 40 \end{cases}$$

La parcela mide 25 m de largo y 40 m de ancho.

20. **El perímetro de este trapecio mide 44 cm. Calcula el área.**



Aplicamos el Teorema de Pitágoras en el triángulo oscuro:



$$x^2 = y^2 + 8^2$$

Las ecuaciones resultantes son:

$$\begin{cases} x + 8 + x + x + y = 44 \\ x^2 = y^2 + 8^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + y = 36 \\ x^2 = y^2 + 64 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 36 - 3x \\ x^2 = y^2 + 64 \end{cases}$$

$$x^2 = (36 - 3x)^2 + 64 \rightarrow x^2 = 1\,296 - 216x + 9x^2 + 64 \rightarrow 9x^2 - x^2 - 216x + 1\,360 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 8x^2 - 216x + 1\,360 = 0$$

$$x = \frac{-(-216) \pm \sqrt{(-216)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 1360}}{2 \cdot 8} = \frac{216 \pm \sqrt{46\,656 - 43\,520}}{16} = \frac{216 \pm \sqrt{3136}}{16} = \frac{216 \pm 56}{16}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{216 + 56}{16} \rightarrow x = \dfrac{272}{16} \rightarrow x = 17 \rightarrow y = 36 - 3 \cdot 17 = -15 \rightarrow \text{No vale} \\ x = \dfrac{216 - 56}{16} \rightarrow x = \dfrac{160}{16} \rightarrow x = 10 \rightarrow y = 36 - 3 \cdot 10 = 6 \end{cases}$$

Descartamos la primera solución porque una medida no puede ser negativa.

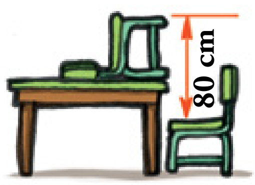
Calculamos el área del trapecio:

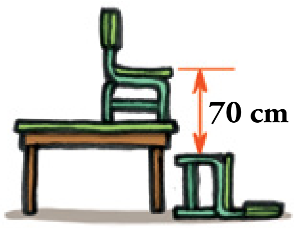
$$\text{Área} = \frac{10 + (10 + 8)}{2} \cdot 6 = 28 \cdot 3 = 84 \text{ cm}^2$$

El área del trapecio es 84 cm^2.

Curiosidades matemáticas

¿Cuál es la altura de la mesa?





$$\begin{cases} A + \text{silla tumbada} = \text{silla de pie} + 80 \\ A + \text{silla de pie} = \text{silla tumbada} + 70 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -\text{silla tumbada} + \text{silla de pie} + 80 \\ A = \text{silla tumbada} - \text{silla de pie} + 70 \end{cases}$$

Sumando las dos expresiones: $2A = 80 + 70 \rightarrow A = \dfrac{80 + 70}{2} = \dfrac{150}{2} = 75$

La altura de la mesa es 75 cm.

Cosas de peso

Un caballo y un mulo, cargados con sacos, iban juntos. El caballo se quejaba de su carga, y el mulo le dijo:

— ¿De qué te quejas? Si yo cargara con uno de tus sacos, mi carga sería el doble de la tuya. En cambio, si tú cargaras con uno de los míos, tu carga sería igual que la mía.

¿Cuántos sacos lleva cada uno?

El caballo carga $\rightarrow$ x sacos

El mulo carga $\rightarrow$ y sacos

$$\begin{cases} 2(x-1) = y+1 \\ x+1 = y-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x-2 = y+1 \\ x-y = -1-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x-y = 2+1 \\ x-y = -2 \rightarrow \text{ Multiplicamos por } (-1) \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x-y = 3 \\ -x+y = 2 \end{cases}$$

$$x \quad = 5 \rightarrow -5+y = 2 \rightarrow y = 7$$

El caballo carga con 5 sacos y el mulo con 7.

1 Las funciones y sus gráficas

Página 113

1. Observa la gráfica del helicóptero y responde:

a) ¿Qué altura lleva cuando va del embalse al incendio?

b) ¿A qué altura estaba a los 20 min? ¿A qué altura baja para coger agua? ¿Y cuando apaga el fuego?

c) ¿Cuánto tiempo necesita para llenar de agua el depósito? ¿Y para apagar el fuego?

d) ¿A qué velocidad media (en m/min) sube desde que sale de la base hasta que llega a 320 m de altura?

a) Lleva una altura de 280 m.

b) A los 20 min estaba a 60 m del suelo.

Baja casi a altura 0 para coger el agua.

El helicóptero apaga el fuego a los 20 minutos de salir de la base, a 60 m del suelo.

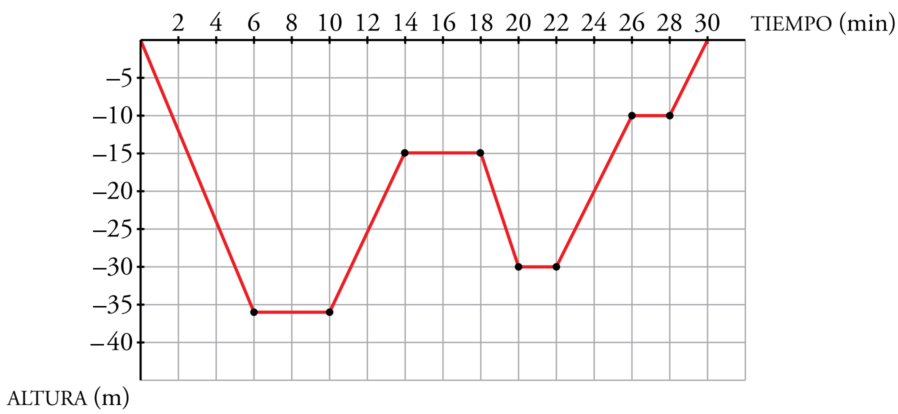
c) Para llenar el depósito de agua necesita 2 minutos.

Para apagar el fuego necesita 1 minuto.

d) Sube a una velocidad media de $v = \dfrac{320}{3} = 106{,}7$ m/min.

2. Representa en unos ejes cartesianos los 30 minutos que ha estado en inmersión un buceador: sale del barco; baja hasta 36 m; se queda un rato recreándose con los corales; sube un poco y juega con unos delfines; vuelve a bajar porque ha visto una morena y, por último, se queda 2 min a 10 m de profundidad, antes de volver al barco, para realizar la descompresión.

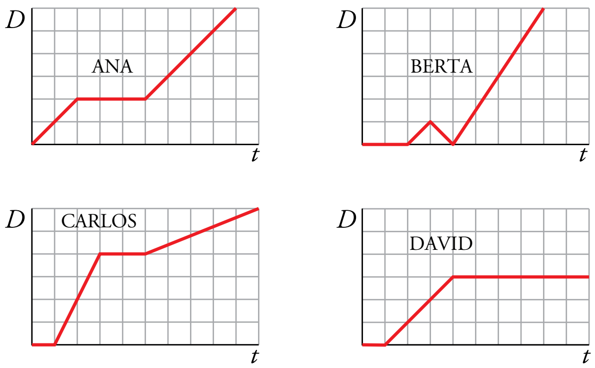
En el eje horizontal, da 2 min a cada cuadradito. En el vertical (solo la parte negativa), 5 m por cuadradito.



2 Definiciones

Página 114

1. Cuatro hermanos de una familia van al mismo centro de estudios. Observa la gráfica distancia (*D*) - tiempo (*t*) de cada uno:



A la vista de las gráficas, contesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Quién ha salido antes?

b) ¿Quién ha llegado más tarde?

c) Dos de ellos han ido a buscar a sus amigos para ir juntos a clase. ¿Quiénes son?

d) ¿A cuál de ellos se le ha olvidado algo en casa?

e) ¿Cuál no ha ido hoy a clase?

f) ¿Quién ha andado más lento en algún momento?

g) ¿Quién ha ido más rápido?

h) ¿Quién ha estado más tiempo parado?

a) Ha salido antes Ana.

b) Ha llegado más tarde Carlos.

c) Ana y Carlos.

d) Se le ha olvidado algo a Berta.

e) No ha ido a clase David.

f) Ha andado más lento Carlos.

g) Berta ha ido más rápido.

h) David.

3 Crecimiento y decrecimiento de una función

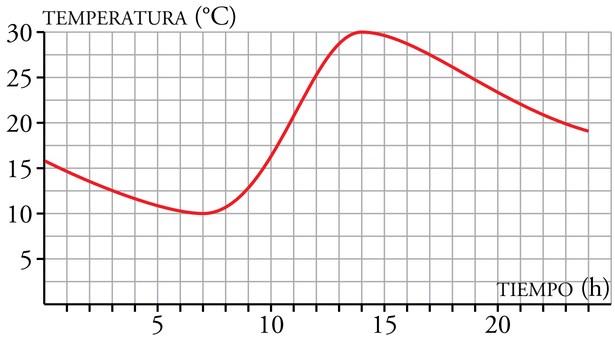
Página 115

1. La gráfica de abajo da la temperatura en Jaca a lo largo de un día.

a) Indica los intervalos de tiempo en los que crece y aquellos en los que decrece.

b) ¿Por qué crees que se producen esos aumentos y disminuciones de temperatura en esos tramos?

c) ¿Crees que en la ciudad es verano o invierno? Justifícalo.



a) La temperatura en Jaca aumenta en el intervalo 7-14 horas y decrece en los intervalos 0-7 horas y 14-24 horas.

b) Por los cambios de temperatura a lo largo del día. Por la mañana las temperaturas van aumentando y, al acercarse la noche, las temperaturas disminuyen.

c) La temperatura más alta que alcanza son los 30 °C durante el día y la temperatura más baja que alcanza son los 10 °C. Por tanto, cuando se ha hecho esta gráfica era verano.

4 Máximos y mínimos relativos

Página 116

1. La gráfica de la derecha muestra el porcentaje de ocupación de unos multicines en una ciudad a lo largo de un determinado mes.

a) ¿En qué días caen los fines de semana? ¿Cómo puedes saberlo?

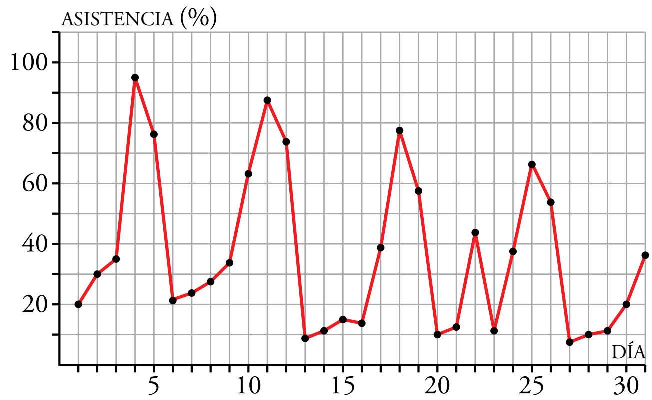
b) ¿Qué día ha habido más espectadores? ¿Y menos? ¿Qué días de la semana son?

c) ¿Cuántos máximos y cuántos mínimos tiene la gráfica de la función?

d) Hubo un día entre semana que fue festivo. ¿De qué día se trata?

e) Escribe un resumen de la asistencia que han tenido los multicines a lo largo de este mes.

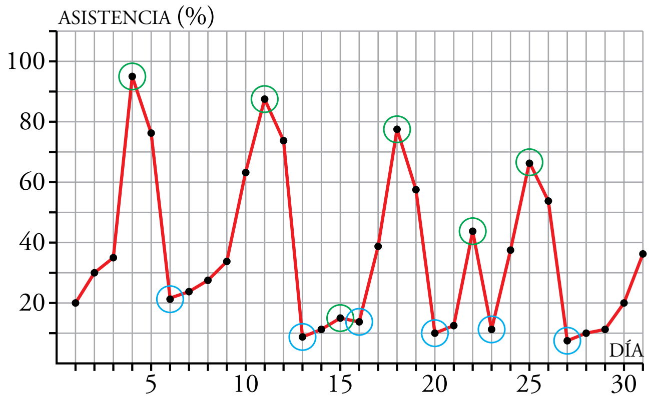
f) Un cierto día de este mes, viernes, televisaron un partido de fútbol importantísimo. ¿Qué día podemos suponer que fue?



a) Son fines de semana los días 4, 5, 11, 12, 18, 19, 25 y 26. Deducimos que son esos días porque son los días en los que más espectadores van al cine.

b) El día 4 hubo más espectadores y el 27 hubo menos espectadores. Estos días son sábado y lunes, respectivamente.

c) La gráfica tiene 6 máximos (en verde) y 6 mínimos (en azul).



d) El miércoles 22. Es el día entre semana con mayor asistencia.

e) La asistencia es mayor durante los fines de semana, en particular en el primero. A lo largo del mes se puede observar que va disminuyendo con respecto a la primera semana. Desde el lunes al sábado la gráfica es creciente, es decir, el porcentaje de asistencia va aumentando, mientras que del sábado al lunes decrece. Los días de mayor porcentaje de asistencia son los sábados, en general. Sin embargo, en los días 15 y 22 podemos ver dos máximos. El día 22 fue día festivo, y podemos apreciar un considerable aumento de asistencia con respecto a los días anterior y posterior.

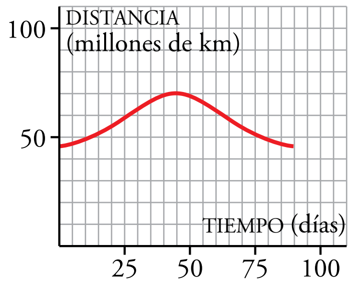
f) El día 3. Es el viernes con la asistencia más baja.

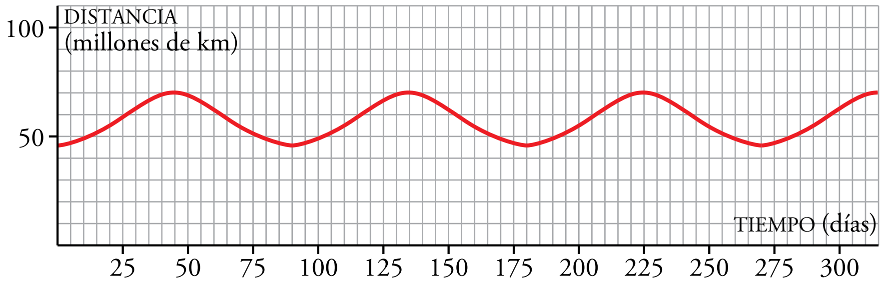
5 Tendencias de una función

Página 117

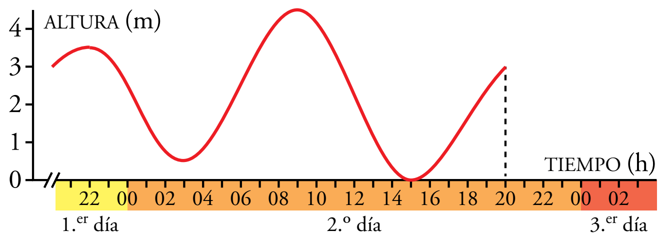
1. **Mercurio tarda 88 días en completar su órbita alrededor del Sol. Su distancia al Sol oscila entre 70 y 46 millones de kilómetros.**

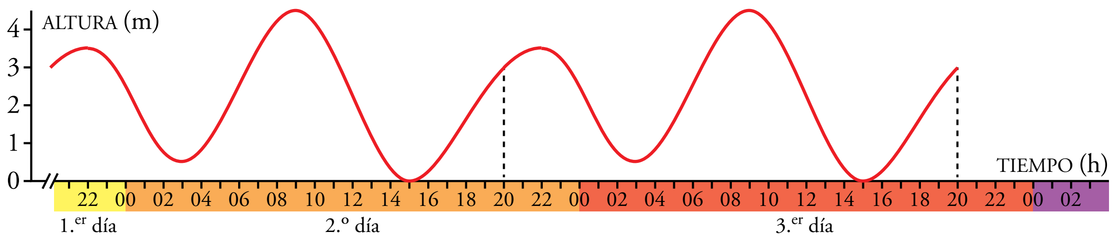
Completa la gráfica de la distancia de Mercurio al Sol durante 300 días.





2. **La siguiente gráfica muestra la elevación de la marea en un determinado lugar a lo largo de 24 horas. Complétala para 48 horas suponiendo que es una función periódica.**





6 Discontinuidades. Continuidad

Página 118

1. La entrada al parque de atracciones vale 5 €, y por cada atracción hay que pagar 1 €.

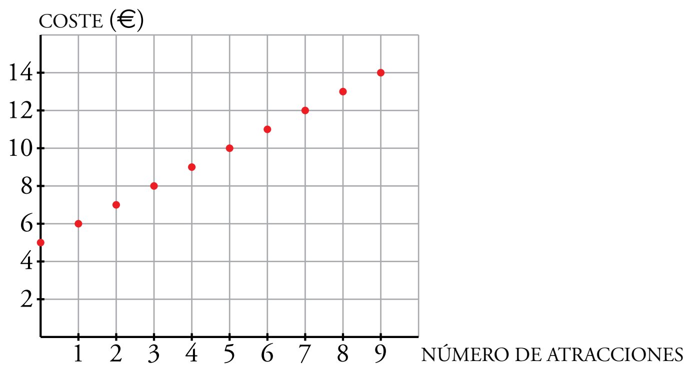
a) Representa esta función:

número de atracciones → coste

b) ¿Se pueden unir los puntos de la gráfica?

c) ¿Cuánto costará subir a 12 atracciones? ¿Y a 20?

a)



b) No pueden unirse porque una persona no puede montarse en media atracción o solo pagar medio viaje.

c) Subir a doce atracciones costará 5 € más un euro por atracción, es decir, 5 + 12 = 17 €.

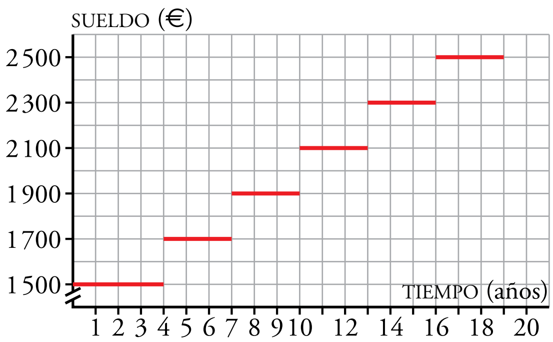
Subir a 20 atracciones costará 5 + 20 = 25 €.

2. La gráfica de abajo muestra el sueldo mensual de un trabajador en una empresa a lo largo de su vida.

a) ¿Cuánto tiempo lleva en la empresa cuando le suben el sueldo por primera vez?

b) ¿Cuánto gana a los 12 años de entrar? ¿Y a los 20?

c) ¿Es una función continua?



a) Cuando le suben el sueldo por primera vez, el trabajador lleva en la empresa 4 años.

b) A los 12 años de entrar cobra 2 100 €, y a los 20, 2 500 €.

c) No, no es continua.

7 Expresión analítica de una función

Página 119

1. Da la expresión analítica, construye la tabla y traza la gráfica de cada una de las funciones descritas a continuación:

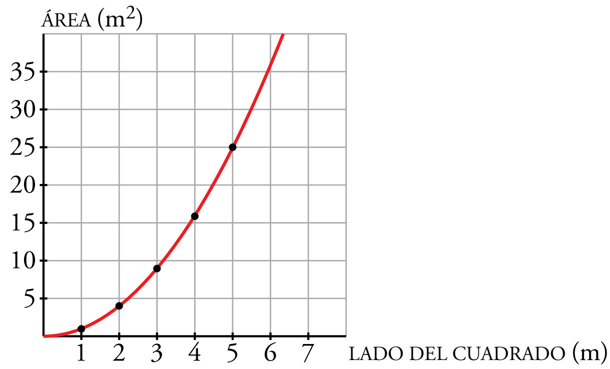
a) El área de un cuadrado en función de su lado.

b) Coste de utilización de Internet en función del tiempo (PRECIO: 15 € fijos más 0,50 € por hora).

c) El coste de una bolsa de naranjas en función de su peso (PRECIO: 1,30 €/kg).

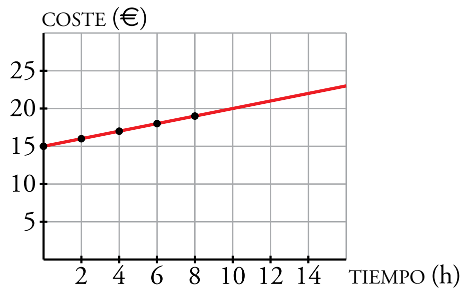
a) $A = x^2$

LADO x (m)	ÁREA A (m)
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
x	$A = x^2$



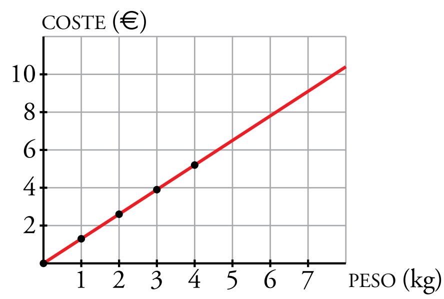
b) $C = 15 + 0{,}5x$

TIEMPO x (h)	COSTE C (€)
0	15
2	16
4	17
6	18
8	19
x	$C = 15 + 0{,}5x$



c) $C = 1{,}30x$

PESO x (kg)	COSTE C (€)
0	0
1	1,30
2	2,60
3	3,90
4	5,20
x	$C = 1{,}30x$



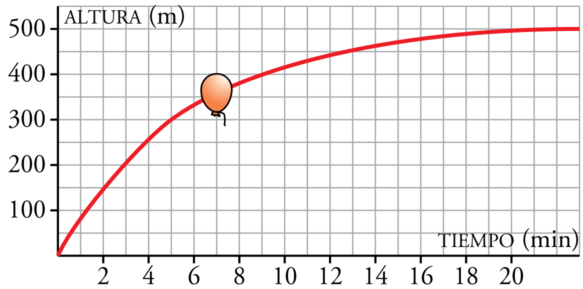
Ejercicios y problemas

Página 120

Practica

Interpretación de gráficas

1. **Se suelta un globo que se eleva. La siguiente gráfica representa la altura, con el paso del tiempo, a la que se encuentra el globo:**



a) ¿Qué variables intervienen? ¿Qué escala se utiliza para cada variable? ¿Cuál es el dominio de definición de esta función?

b) ¿Qué altura gana el globo entre el minuto 0 y el 5? ¿Y entre el 5 y el 9? ¿En cuál de estos dos intervalos crece más rápidamente la función?

c) ¿A qué altura tiende a estabilizarse?

d) Haz una descripción de la altura a la que se encuentra el globo en el tiempo que dura la observación.

a) Las variables que intervienen son el tiempo y la altura.

Para la variable tiempo, cada cuadradito representa un minuto y, para la altura, cada cuadradito representa 50 metros.

El intervalo 0-26 es su dominio de definición.

b) Entre el minuto 0 y el 5, el globo gana 300 metros de altura.

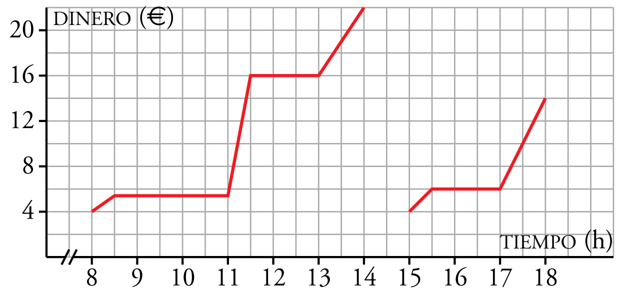
Entre el 5 y el 9, gana 50 metros de altura.

$\frac{300}{5} = 60 > 25 = \frac{50}{2}$ $\rightarrow$ Crece más rápido entre los minutos 0 y 5.

c) El globo tiende a estabilizarse a 500 metros.

d) Al comenzar la observación, el globo está a altura 0, en la tierra. Tras soltarlo, al principio, gana altura con bastante rapidez pero según pasa el tiempo parece que se estabiliza a 500 metros de altura.

2. **En la puerta de un colegio hay un puesto de golosinas. En esta gráfica se ve la cantidad de dinero que hay en su caja a lo largo de un día:**



a) ¿A qué hora empiezan las clases de la mañana?

b) ¿A qué hora es el recreo? ¿Cuánto dura?

c) El puesto se cierra a mediodía, y el dueño se lleva el dinero a casa. ¿Cuáles fueron los ingresos de la mañana?

d) ¿Cuál es el horario de tarde en el colegio?

e) ¿Es esta una función continua o discontinua?

a) Las clases de la mañana empiezan a las ocho y media.

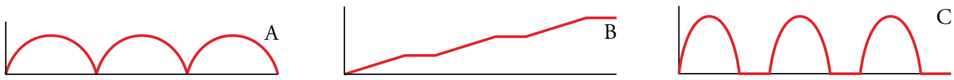
b) El recreo es a las 11 y dura media hora.

c) Por la mañana, los ingresos fueron de 22 €.

d) Por la tarde, las clases empiezan a las tres y media y terminan a las cinco.

e) Es una función discontinua.

3. **Una rana avanza dando tres saltos. Una de estas gráficas describe la altura a la que se encuentra al pasar el tiempo. Otra muestra la distancia que recorre a lo largo de ese tiempo, y la otra no vale. Di cuál es cuál.**

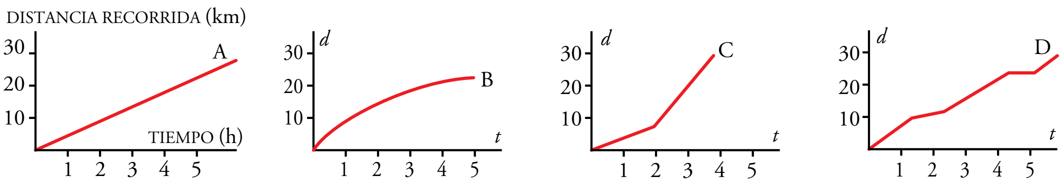


A $\rightarrow$ describe la altura a la que se encuentra al pasar el tiempo.

B $\rightarrow$ describe la distancia que recorre en ese tiempo.

C $\rightarrow$ no vale.

4. **Las siguientes gráficas nos muestran la marcha de cuatro montañeros:**



a) Describe el ritmo de cada uno.

b) ¿Quién recorre menos camino?

c) ¿Quién camina durante menos tiempo?

a) El montañero A lleva un ritmo constante.

El montañero B va decreciendo el ritmo según avanza el tiempo.

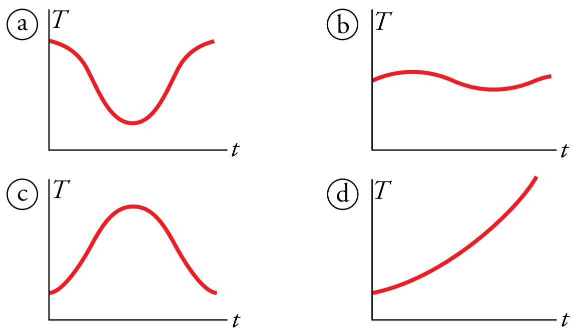
El montañero C comienza a un ritmo y a las dos horas acelera hasta que se para a las cuatro horas.

El montañero D va alternando un ritmo rápido con un ritmo más lento.

b) El montañero B recorre menos camino, recorre 20 km aproximadamente.

c) El montañero C camina durante menos tiempo, camina casi cuatro horas.

5. Estas cuatro gráficas representan la temperatura máxima diaria (T) de cuatro ciudades, a lo largo del tiempo (t), durante un cierto año:



a) A la vista de las gráficas, ¿en cuál de estas cuatro ciudades oscila en menor medida la temperatura?

b) Una gráfica corresponde a una ciudad de nuestro país, y otra, a una ciudad de nuestras antípodas. ¿Qué gráficas son? Razona tu respuesta.

c) Una gráfica es absurda. ¿Cuál es? ¿Por qué?

d) Elige una escala adecuada para cada variable y gradúa cada uno de los ejes en tu cuaderno.

e) ¿Cuál es el dominio de las cuatro gráficas? A la vista de los recorridos de a y b, ¿qué puedes decir del clima de estas ciudades?

a) En la ciudad b.

b) Las gráficas a y c, porque cuando en una la temperatura es alta en la otra es baja y al revés.

c) La grafica d es absurda, porque la temperatura solo crece.

d) Para la variable tiempo, podemos hacer corresponder cada cuadradito con un mes.

Para la variable temperatura, cada cuadradito pueden ser 2 ó 5 grados centígrados.

e) El dominio es el intervalo 1-12 (o de Enero a Diciembre).

Son ciudades que no tienen inviernos muy fríos, ya que en ningún caso se alcanzan temperaturas bajo cero. La ciudad a tiene más variación entre sus temperaturas. En la ciudad b, la temperatura no varía demasiado a lo largo de los meses.

Página 121

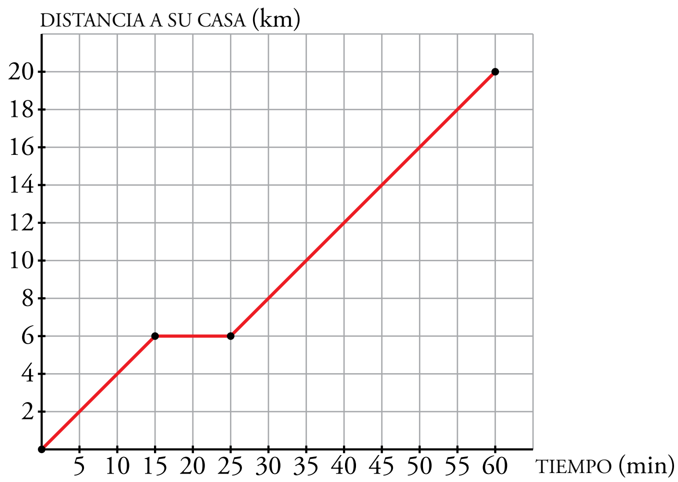
Piensa y resuelve

6. **Un ciclista sale de excursión a un lugar que dista 20 km de su casa. A los 15 minutos de la salida, cuando se encuentra a 6 km, hace una parada de 10 minutos. Reanuda la marcha y llega a su destino una hora después de haber salido.**

a) Representa la gráfica *tiempo-distancia a su casa*.

b) ¿Lleva la misma velocidad antes y después de la parada? (Suponemos que la velocidad es constante en cada tramo).

a)



b) Sí, lleva la misma velocidad porque por cada 5 minutos recorre 2 kilómetros en ambos tramos.

7. **a) Sabiendo que la libra es una medida de peso que equivale a 0,45 kg, copia y completa esta tabla:**

x (LIBRAS)	0,5	1	1,5	2	3	4
y (KILOS)						

b) Representa la función que convierte libras en kilos.

a)

x (LIBRAS)	0,5	1	1,5	2	3	4
y (KILOS)	0,225	0,45	0,675	0,9	1,35	1,8

b)

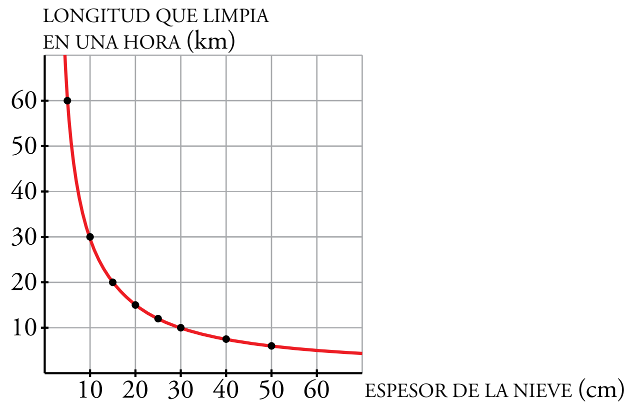
8. **La longitud de carretera que limpia un quitanieves depende del espesor de la nieve. Se han recogido datos de una de estas máquinas en un momento determinado:**

ESPESOR DE LA NIEVE (cm)	50	40	30	25	20	15	10	5
LONGITUD QUE LIMPIA EN 1 HORA (km)	6	7,5	10	12	15	20	30	60

a) Representa gráficamente estos datos y une los puntos para poder analizar mejor la gráfica. Descríbela.

b) Supón que para espesores mayores de nieve, la máquina se comporta de manera análoga. Para un espesor de 60 cm, ¿cuántos kilómetros, aproximadamente, despejaría en una hora?

a)



Al aumentar el espesor de la nieve, la longitud de la carretera que limpia en una hora va descendiendo.

b) Limpiaría aproximadamente 5 km.

9. **Esta tabla recoge la medida del perímetro del cráneo de un niño durante los primeros meses de vida:**

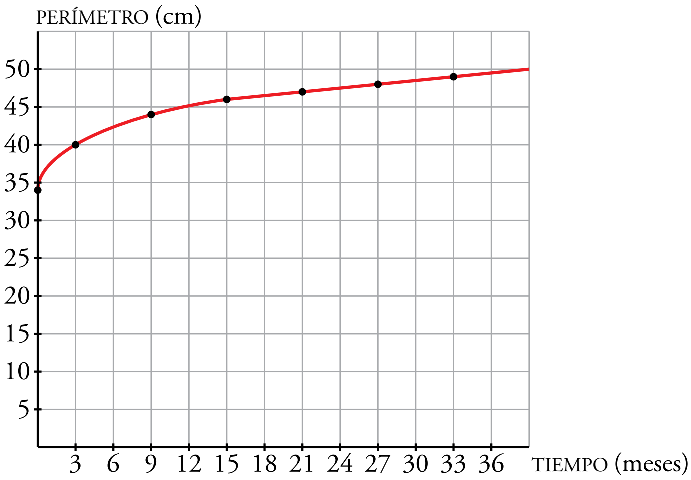
TIEMPO (meses)	0	3	9	15	21	27	33
PERÍMETRO (cm)	34	40	44	46	47	48	49

a) Haz una gráfica relacionando estas dos variables. Elige una escala adecuada.

b) ¿Qué tendencia se observa en el crecimiento del cráneo de un niño?

c) ¿Cuánto crees que medirá el perímetro craneal de un niño de 3 años?

a)



b) El tamaño del cráneo parece estabilizarse alrededor de los 50 cm.

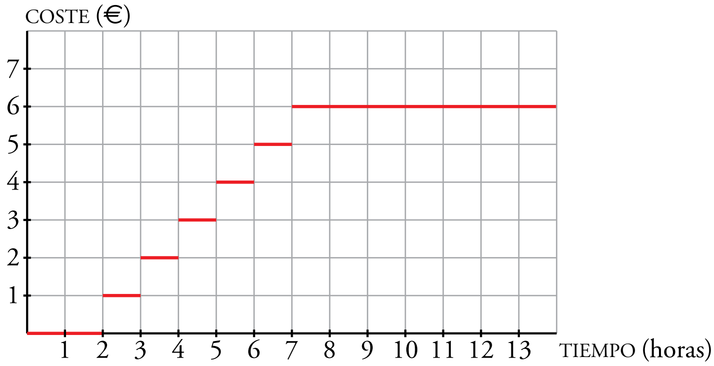
c) Medirá unos 50 cm aproximadamente.

10. **Un aparcamiento tiene la siguiente tarifa de precios:**

PRECIO DESDE LAS 9 HORAS HASTA LAS 22 HORAS
- *Las dos primeras horas .... gratuito*
- *3.ª hora o fracción y sucesivas....... 1 €*
- *Máximo diario .... 6 €*

Representa la gráfica de la función:

tiempo de aparcamiento-coste



11. **Los cestillos de una noria van subiendo y bajando a medida que la noria gira. Estos son los datos de una cesta que sube desde el punto más bajo al más alto:**

TIEMPO (s)	4	8	12	16	20
ALTURA (m)	3,7	7	9,7	11,4	12

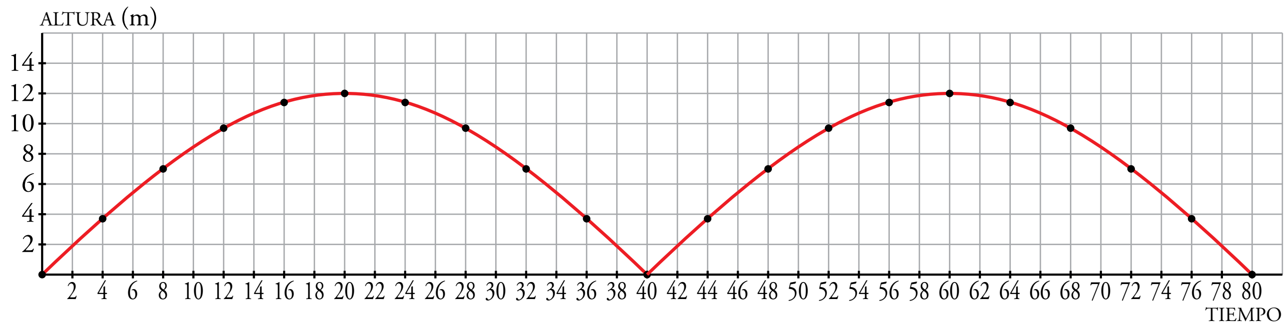
a) Representa la gráfica de la función *tiempo-altura* de uno de los cestillos a lo largo de 80 segundos.

b) ¿A qué tiempos corresponden sus máximos y mínimos relativos?

c) ¿Es una función periódica?

d) ¿A qué altura estará la cesta a los 150 segundos?

a)



b) Los máximos y mínimos corresponden con los múltiplos de 20.

c) Sí, es una función periódica de periodo 40.

d) Como los valores se repiten cada 40 segundos, tenemos que ver con qué valor corresponde 150 de entre 0 y 40. Dividimos 150 entre 40 y obtenemos como cociente 3 y de resto 30. Es decir, corresponderá con la altura para 30 segundos, que es aproximadamente 8 metros.

1 Función de proporcionalidad $y = mx$

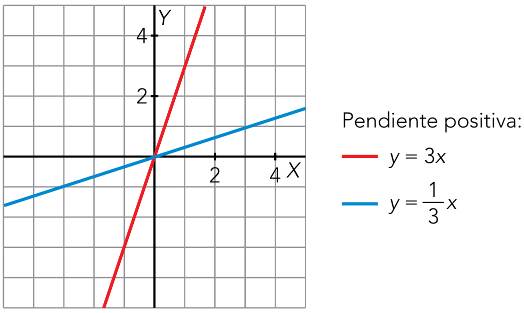
Página 123

1. Dibuja sobre unos ejes cartesianos, en papel cuadriculado, dos rectas que pasen por el origen y que tengan pendientes positivas y otras dos con pendientes negativas.

Para que las rectas pasen por el origen, deben ser de la forma $y = mx$, siendo m la pendiente de la recta.

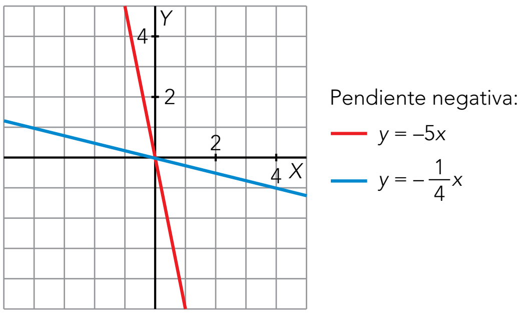
Ejemplos de rectas con pendiente positiva:

- $y = 3x$, con pendiente 3 e $y = \frac{1}{3}x$, con pendiente $\frac{1}{3}$.



Ejemplos de rectas con pendiente negativa:

- $y = -5x$, con pendiente -5 e $y = \frac{-1}{4}x$, con pendiente $\frac{-1}{4}$.



2 Gráfica y ecuación de la función de proporcionalidad

Página 124

1. Representa las funciones siguientes:

a) $y = x$ **b)** $y = 2x$ **c)** $y = -x$

d) $y = -2x$ **e)** $y = \frac{1}{3}x$ **f)** $y = -\frac{1}{3}x$

g) $y = \frac{3}{2}x$ **h)** $y = \frac{-3}{2}x$ **i)** $y = \frac{2}{3}x$

Representamos las funciones:

a)

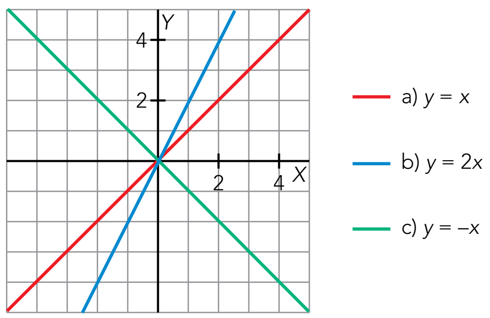
x	$y = x$
–3	–3
0	0
3	3

b)

x	$y = 2x$
–2	–4
0	0
2	4

c)

x	$y = -x$
–2	2
0	0
2	–2



d)

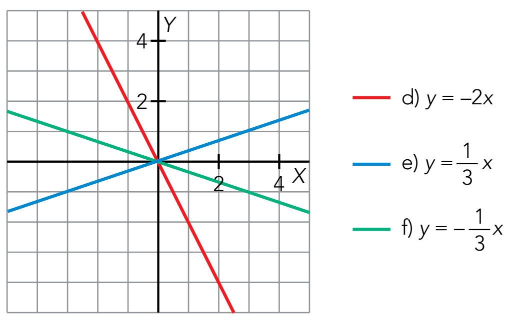
x	$y = -2x$
–1	2
0	0
1	–2

e)

x	$y = 1/3x$
–3	–1
0	0
3	1

f)

x	$y = -1/3\ x$
–3	1
0	0
3	–1



g)

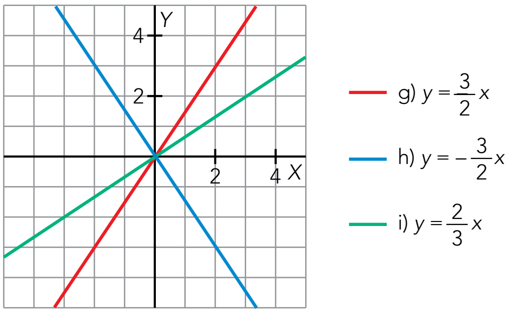
x	$y = 3/2x$
–2	–3
0	0
2	3

h)

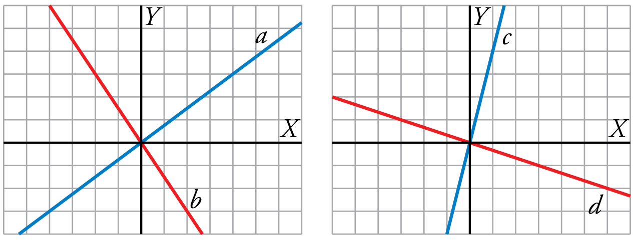
x	$y = -3/2x$
–2	3
0	0
2	–3

i)

x	$y = 2/3x$
–3	–2
0	0
3	2



2. **Halla las ecuaciones de las rectas siguientes:**



Buscamos puntos de coordenadas enteras para calcular la pendiente.

- La recta a pasa por los puntos (0, 0) y (4, 3). Su pendiente es $\frac{3}{4}$. Su ecuación es $y = \frac{3}{4}x$.
- La recta b pasa por los puntos (0, 0) y (2, –3). Su pendiente es $-\frac{3}{2}$. Su ecuación es $y = -\frac{3}{2}x$.
- La recta c pasa por los puntos (0, 0) y (1, 4). Su pendiente es 4. Su ecuación es $y = 4x$.
- La recta d pasa por los puntos (0, 0) y (6, –2). Su pendiente es $-\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$. Su ecuación es $y = -\frac{1}{3}x$.

3 La función $y = mx + n$

Página 125

1. Representa en unos ejes cartesianos, sobre papel cuadriculado, las rectas de ecuaciones:

a) $y = 3x - 2$ **b)** $y = 3 - 2x$ **c)** $y = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}x$

d) $y = \frac{2}{3}x - 5$ **e)** $y = -2$ **f)** $y = \frac{5x - 3}{2}$

Representamos las funciones:

a)

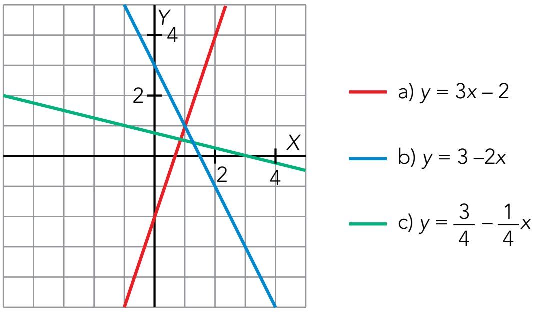
x	$y = 3x - 2$
–1	–5
0	–2
1	1

b)

x	$y = 3 - 2x$
–1	5
0	3
1	1

c)

x	$y = 3/4 - 1/4x$
–1	1
0	3/4
3	0



d)

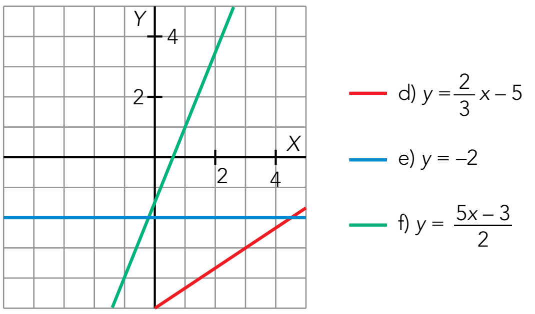
x	$y = 2/3x - 5$
0	–5
3	–3
6	–1

e)

x	$y = -2$
–2	–2
0	–2
2	–2

f)

x	$y = (5x - 3)/2$
–1	–4
0	–3/2
1	1



2. Medimos el grosor de los libros de una misma colección. Cada una de las cubiertas tiene un grosor de 5 mm. Sabiendo que el grosor de 200 páginas es de 1 cm, escribe la ecuación de la función *número de páginas* → *grosor del libro* y represéntala en unos ejes.

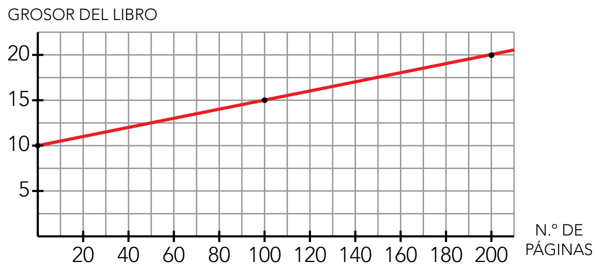
El grosor de las cubiertas es $2 \cdot 5 = 10$ mm.

1 cm = 10 mm

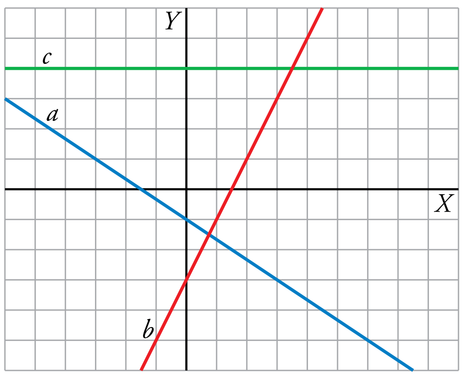
Una página tiene un grosor de $\frac{10}{200} = \frac{1}{20}$ mm.

La función es: $f(x) = \frac{1}{20}x + 10$

x	$y = 1/20x + 10$
0	10
100	15
200	20



3. Escribe la ecuación de cada una de estas rectas:



Las ecuaciones de las rectas son de la forma $y = mx + n$. Buscamos, para cada una, el punto de corte con el eje Y y otro punto con coordenadas enteras.

- La recta a pasa por (0, –1) y (3, –3):

$$\left.\begin{array}{l} m = -\frac{2}{3} \\ n = -1 \end{array}\right\} \rightarrow y = -\frac{2}{3}x - 1$$

- La recta b pasa por (0, –3) y (2, 1):

$$\left.\begin{array}{l} m = \frac{4}{2} = 2 \\ n = -3 \end{array}\right\} \rightarrow y = 2x - 3$$

- La recta c pasa por (0, 4) y (4, 4):

$$\left.\begin{array}{l} m = \frac{0}{4} \\ n = 4 \end{array}\right\} \rightarrow y = 0x + 4 \rightarrow y = 4$$

4 Recta de la que se conocen un punto y la pendiente

Página 126

1. Escribe, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por P y tiene pendiente m:

a) $P(4, -3)$, $m = 4$ **b)** $P(0, 2)$, $m = -\frac{1}{2}$ **c)** $P(-3, 1)$, $m = \frac{5}{4}$

d) $P(0, 0)$, $m = -1$ **e)** $P(-1, 3)$, $m = -\frac{3}{5}$ **f)** $P(0, -2)$, $m = 0$

La ecuación de una recta en la forma punto pendiente es $y = y_0 + m(x - x_0)$.

a) $y = -3 + 4(x - 4) \rightarrow y = 4x - 19$

b) $y = 2 + \frac{-1}{2}(x - 0) \rightarrow y = 2 - \frac{1}{2}x$

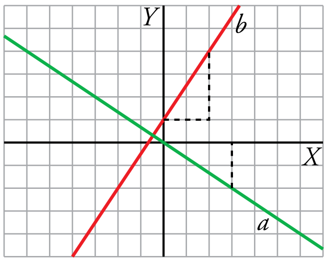
c) $y = 1 + \frac{5}{4}(x + 3) \rightarrow y = \frac{5}{4}x + \frac{19}{4}$

d) $y = 0 - 1(x + 0) \rightarrow y = -x$

e) $y = 3 + \frac{-3}{5}(x + 1) \rightarrow y = \frac{12}{5} - \frac{3}{5}x$

f) $y = -2 + 0(x + 0) \rightarrow y = -2$

2. Escribe la ecuación de las rectas a y b dadas mediante sus gráficas. Escoge de cada una otro punto distinto al que tomaste para escribir la ecuación. Vuelve a escribir una ecuación con este otro punto. Comprueba que se trata de la misma ecuación.



Tomamos dos puntos con coordenadas enteras:

- Recta a:

$P(0, 0)$ y $m = \frac{-2}{3} \rightarrow y = 0 - \frac{2}{3}(x - 0) \rightarrow y = -\frac{2}{3}x$

En lugar de $P(0, 0)$, tomamos $Q(3, -2)$:

$Q(3, -2)$ y $m = \frac{-2}{3} \rightarrow y = -2 - \frac{2}{3}(x - 3) \rightarrow y = -2 - \frac{2}{3}x + 2 \rightarrow y = -\frac{2}{3}x$

Obtenemos la misma ecuación.

- Recta b:

$R(0, 1)$ y $m = \frac{3}{2} \rightarrow y = 1 + \frac{3}{2}(x - 0) \rightarrow y = \frac{3}{2}x + 1$

En lugar de $R(0, 1)$, tomamos $S(2, 4)$:

$S(2, 4)$ y $m = \frac{3}{2} \rightarrow y = 4 + \frac{3}{2}(x - 2) \rightarrow y = 4 + \frac{3}{2}x - 3 \rightarrow y = \frac{3}{2}x + 1$

Obtenemos la misma ecuación.

5 Recta que pasa por dos puntos

Página 127

1. Halla, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q:

a) $P(2, 5)$, $Q(-3, 6)$ b) $P(3, -4)$, $Q(-2, -1)$ c) $P(-1, 0)$, $Q(5, 5)$

d) $P(-7, 1)$, $Q(3, 4)$ e) $P(3, 1)$, $Q(-2, 1)$ f) $P(2, -2)$, $Q(2, 5)$

En cada caso, hallamos la pendiente a partir de los puntos dados y, después, usamos la ecuación punto-pendiente para escribir la ecuación de la recta.

a) $m = \dfrac{6-5}{-3-2} = -\dfrac{1}{5}$

Recta que pasa por $P(2, 5)$ y tiene pendiente $-\dfrac{1}{5} \rightarrow y = 5 - \dfrac{1}{5}(x-2) \rightarrow y = \dfrac{27}{5} - \dfrac{1}{5}x$

b) $m = \dfrac{-1-(-4)}{-2-3} = -\dfrac{3}{5}$

Recta que pasa por $P(3, -4)$ y tiene pendiente $-\dfrac{3}{5} \rightarrow y = -4 - \dfrac{3}{5}(x-3) \rightarrow y = -\dfrac{11}{5} - \dfrac{3}{5}x$

c) $m = \dfrac{5-0}{5-(-1)} = \dfrac{5}{6}$

Recta que pasa por $P(-1, 0)$ y tiene pendiente $\dfrac{5}{6} \rightarrow y = 0 + \dfrac{5}{6}(x+1) \rightarrow y = \dfrac{5}{6}x + \dfrac{5}{6}$

d) $m = \dfrac{4-1}{3-(-7)} = \dfrac{3}{10}$

Recta que pasa por $P(-7, 1)$ y tiene pendiente $\dfrac{3}{10} \rightarrow y = 1 + \dfrac{3}{10}(x+7) \rightarrow y = \dfrac{3}{10}x + \dfrac{31}{10}$

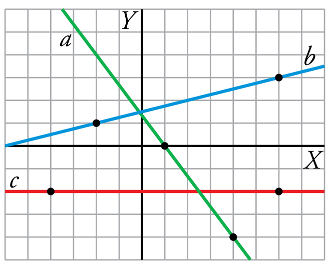
e) $m = \dfrac{1-1}{-2-3} = 0$

Recta que pasa por $P(3, 1)$ y tiene pendiente 0 $\rightarrow y = 1 - 0(x-3) \rightarrow y = 1$

f) $m = \dfrac{5-(-2)}{2-2} = \dfrac{7}{0}$ $\rightarrow$ Es una recta vertical (pendiente infinita).

La ordenada de cualquier abscisa es 2 $\rightarrow x = 2$

2. Halla las ecuaciones de las rectas a, b y c. Utiliza los puntos marcados para calcular las pendientes.



• En la recta a:

$$\left.\begin{array}{l} m = \dfrac{-4}{3} \\ P(1, 0) \end{array}\right\} \rightarrow y = 0 + \left(\dfrac{-4}{3}\right)(x-1) \rightarrow y = \dfrac{4}{3} - \dfrac{4}{3}x$$

• En la recta b:

$$\left.\begin{array}{l} m = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4} \\ P(-2, 1) \end{array}\right\} \rightarrow y = 1 + \dfrac{1}{4}(x+2) \rightarrow y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{2}$$

• En la recta c:

$$\left.\begin{array}{l} m = 0 \\ P(-4, -2) \end{array}\right\} \rightarrow y = -2 + 0(x+4) \rightarrow y = -2$$

6 Aplicaciones de la función lineal. Problemas de movimientos

Página 128

1. Un robot va a una velocidad de 7 m por minuto (7 m/min). ¿Qué distancia recorre en t min?

Si llamamos d a la distancia que recorre, $d = 7t$.

2. Un robot marcha a 7 m/min. Lo pusimos en marcha hace 2 min. ¿A qué distancia estará de nosotros dentro de t min?

Si llamamos d a la distancia que recorre, $d = 7t$.

En 2 minutos recorre $d = 7 \cdot 2 = 14$ m.

Dentro de t min estará a una distancia $d = 14 + 7t$.

3. Un robot está a 40 m de nosotros y se nos acerca a 5 m/min. ¿A qué distancia estará dentro de t min?

Si llamamos d a la distancia que estará de nosotros, $d = 40 - 5t$.

4. A las 10:00 alquilamos una bici a 5 €/h y dejamos 100 € de adelanto. ¿Cuánto nos han de devolver si la llevamos de vuelta a las t horas de ese día?

Si llamamos D al dinero que han de devolvernos, $D = 100 - 5(t - 10)$.

7 Estudio conjunto de dos funciones

Página 129

1. Un tren AVE ha salido a las 10 de la mañana de una ciudad situada a 750 km de la nuestra y viene hacia aquí a 200 km/h. Por otro lado, un tren de mercancías ha salido a la misma hora de nuestra ciudad y va a 50 km/h por un vía paralela a la del AVE.

a) Expresa mediante dos funciones la distancia a nuestra ciudad de cada tren al cabo de t horas.

b) Representa las dos rectas correspondientes a las funciones en unos ejes de coordenadas.

c) Indica en qué punto se cortan las dos rectas y di qué significa cada una de sus coordenadas.

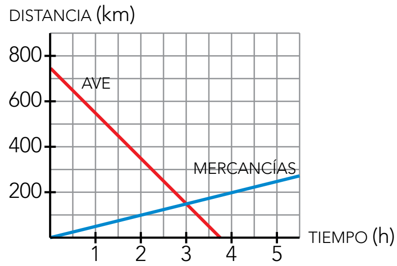
d) Calcula mediante un sistema de ecuaciones la hora a la que se cruzan los trenes y a qué distancia de nuestra ciudad se encuentran.

a) Si llamamos d a la distancia que hay desde nuestra ciudad a cada tren al cabo de t horas:

$d_{\text{AVE}} = 750 - 200t$

$d_{\text{MERCANCÍAS}} = 50t$

b)



c) Se cortan en el punto (3, 150), lo que significa que se cruzarán a las 3 horas, a 150 km de distancia de nuestra ciudad.

d) $\left.\begin{array}{l} d_{\text{AVE}} = 750 - 200t \\ d_{\text{MERCANCÍAS}} = 50t \end{array}\right\} \to 750 - 200t = 50t \to 750 = 250t \to t = 3 \text{ horas}$

Para $t = 3$ horas, $d_{\text{AVE}} = d_{\text{MERCANCÍAS}} = 150$ km

Se encuentran a las 3 horas, a 150 km de nuestra ciudad.

8 Parábolas y funciones cuadráticas

Página 130

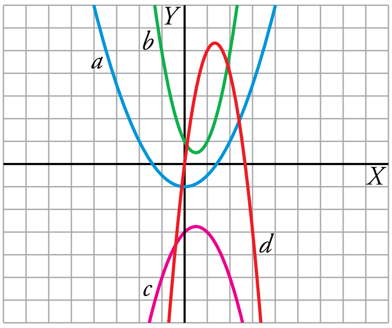
1. Asocia estas expresiones analíticas de funciones cuadráticas con sus correspondientes parábolas representadas a la derecha:

I) $y = 2x^2 - 2x + 1$

II) $y = -x^2 + x - 3$

III) $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$

IV) $y = -3x^2 + 8x$



I) $y = 2x^2 - 2x + 1 \rightarrow b$

II) $y = -x^2 + x - 3 \rightarrow c$

III) $y = \frac{1}{2}x^2 - 1 \rightarrow a$

IV) $y = -3x^2 + 8x \rightarrow d$

Página 131

2. Representa las siguientes parábolas:

a) $y = x^2 - 2x + 3$ **b)** $y = x^2 - 6x + 5$

Calculamos, para cada caso, el vértice, los cortes con los ejes y algún valor cercano al vértice:

a) $p = \dfrac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1$

$x^2 - 2x + 3 = 0 \to x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} \to$ No tiene soluciones reales.

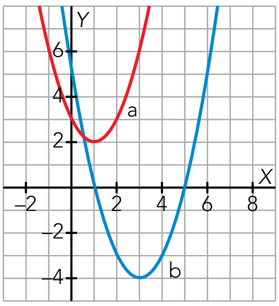
La parábola no corta al eje X.

x	–1	0	1	2	3
y	6	3	2	3	6

b) $p = \dfrac{-(-6)}{2 \cdot 1} = 3$

$x^2 - 6x + 5 = 0 \to x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \dfrac{6 \pm 4}{2} \to \begin{cases} x = 5 \to (5, 0) \\ x = 1 \to (1, 0) \end{cases}$

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	0	–3	–4	–3	0	5



3. Dibuja estas funciones:

a) $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$ **b)** $y = 2x^2 - 10x + 8$

Calculamos, en ambos casos, el vértice, los cortes con los ejes y algún valor cercano al vértice:

a) $p = \dfrac{-1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = -2$

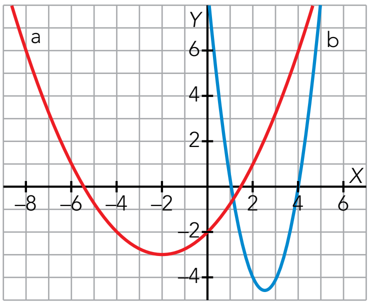
$$\frac{1}{4}x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2}}{\frac{1}{2}} = -2 \pm 2\sqrt{3} \rightarrow \begin{cases} x = -2 + 2\sqrt{3} \rightarrow (-2 + 2\sqrt{3}, 0) \\ x = -2 - 2\sqrt{3} \rightarrow (-2 - 2\sqrt{3}, 0) \end{cases}$$

x	-6	$-2-2\sqrt{3}$	-4	-2	0	$-2+2\sqrt{3}$	2
y	1	0	-2	-3	-2	0	1

b) $p = \dfrac{-(-10)}{2 \cdot 2} = \dfrac{5}{2}$

$$2x^2 - 10x + 8 = 0 \rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{4} = \frac{10 \pm 6}{4} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \rightarrow (4, 0) \\ x = 1 \rightarrow (1, 0) \end{cases}$$

x	0	1	2	$\frac{5}{2}$	3	4	5
y	8	0	-4	$-\frac{9}{2}$	-4	0	8



Página 132

4. Un águila está a 1 120 m de altura. Se lanza en picado hacia abajo a 20 m/s en el mismo momento que desde el suelo sale hacia arriba una bala a 160 m/s. La ecuación del movimiento de la bala es: *altura* = $160t - 5t^2$. ¿En qué momento las alturas del águila y la bala coinciden?

Altura del águila: $A(t) = 1\,120 - 20t$

Altura de la bala: $B(t) = 160t - 5t^2$

Queremos ver dónde coinciden las dos:

$160t - 5t^2 = 1\,120 - 20t \rightarrow 5t^2 - 180t + 1\,120 = 0$

$$t = \frac{180 \pm \sqrt{32\,400 - 22\,400}}{2 \cdot 5} \rightarrow \begin{cases} t = 8 \\ t = 28 \end{cases}$$

Coincidirán en los instantes $t = 8$ s y $t = 28$ s.

Ejercicios y problemas

Página 133

Practica

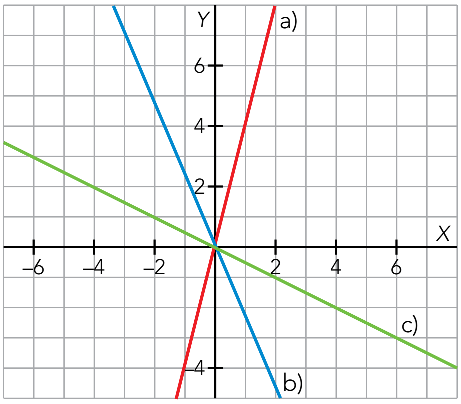
Funciones lineales. Rectas

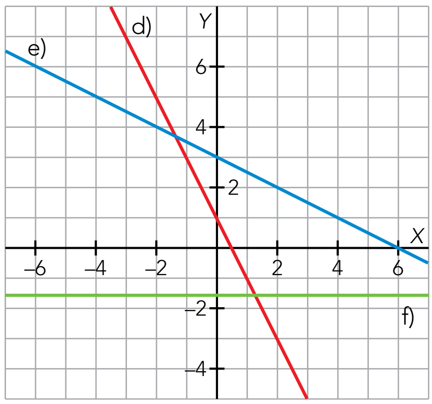
1. **Representa las rectas siguientes:**

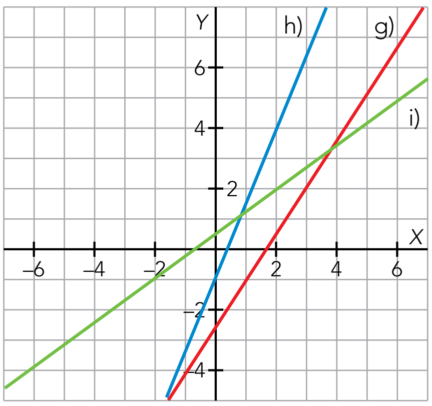
a) $y = 4x$ b) $y = -2{,}4x$ c) $y = -\frac{x}{2}$

d) $y = -2x + 1$ e) $y = -\frac{x}{2} + 3$ f) $y = -\frac{8}{5}$

g) $y = \frac{3x-5}{2}$ h) $y = 2{,}5x - 1$ i) $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$







2. **Asocia cada recta con su ecuación:**

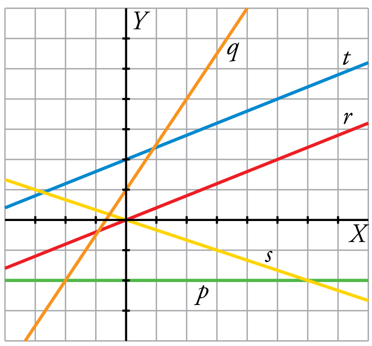
a) $y = -\frac{1}{3}x$

b) $y = \frac{3}{2}x + 1$

c) $y = \frac{2}{5}x$

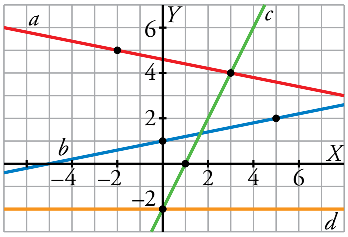
d) $y = \frac{2}{5}x + 2$

e) $y = -2$



a) s b) q c) r d) t e) p

3. **a) Escribe la ecuación de cada recta:**



b) ¿Cuáles son funciones crecientes? ¿Y decrecientes? Comprueba el signo de la pendiente en cada caso.

a) Utilizamos los puntos marcados para hallar la pendiente de cada recta.

- La recta a tiene pendiente $m = \frac{-1}{5}$ y pasa por el punto (3, 4).
  Su ecuación es $y = 4 - \frac{1}{5}(x - 3)$.
- La recta b tiene pendiente $m = \frac{1}{5}$ y pasa por el punto (0, 1).
  Su ecuación es $y = \frac{1}{5}x + 1$.
- La recta c tiene pendiente $m = \frac{4}{2} = 2$ y pasa por (0, –2).
  Su ecuación es $y = 2x - 2$.
- La ecuación de la recta d es $y = -2$.

b) Las funciones b y c son crecientes, y tienen pendiente positiva.
La función a es decreciente, y tiene pendiente negativa.
La función d es constante, y su pendiente es 0.

4. **Escribe la ecuación de la recta de la que conocemos un punto y la pendiente, en cada caso:**

a) $P(-2, 5)$, $m = 3$

b) $P(0, -5)$, $m = -2$

c) $P(0, 0)$, $m = \frac{3}{2}$

d) $P(-2, -4)$, $m = -\frac{2}{3}$

a) $y = 5 + 3(x + 2)$

b) $y = -5 - 2(x - 0) \rightarrow y = -2x - 5$

c) $y = 0 + \frac{3}{2}(x - 0) \rightarrow y = \frac{3}{2}x$

d) $y = -4 - \frac{2}{3}(x + 2)$

5. **Obtén la ecuación de la recta que pasa por A y B.**

a) $A(2, -1)$, $B(3, 4)$

b) $A(-5, 2)$, $B(-3, 1)$

c) $A\left(\frac{3}{2}, 2\right)$, $B\left(1, \frac{2}{3}\right)$

d) $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, $B\left(\frac{1}{3}, 1\right)$

a) $m = \dfrac{4 - (-1)}{3 - 2} = 5$

$y = -1 + 5(x - 2)$

b) $m = \dfrac{1 - 2}{-3 - (-5)} = \dfrac{-1}{2}$

$y = 2 - \frac{1}{2}(x + 5)$

c) $m = \dfrac{\frac{2}{3} - 2}{1 - \frac{3}{2}} = \dfrac{\frac{-4}{3}}{\frac{-1}{2}} = \dfrac{8}{3}$

$y = 2 + \frac{8}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)$

d) $m = \dfrac{1 - \frac{3}{4}}{\frac{1}{3} - \left(\frac{-1}{2}\right)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{6}} = \dfrac{3}{10}$

$y = \frac{3}{4} + \frac{3}{10}\left(x + \frac{1}{2}\right)$

6. **Di la pendiente de estas rectas y represéntalas en los mismos ejes. ¿Qué conclusión sacas?**

a) $y = 2x$ **b)** $y = 2x - 3$ **c)** $2x - y + 1 = 0$ **d)** $4x - 2y + 5 = 0$

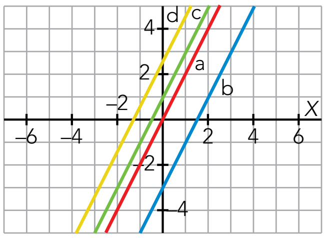
Las pendientes de las rectas son:

a) $m = 2$

b) $m = 2$

c) $2x - y + 1 = 0 \rightarrow y = 2x + 1 \rightarrow m = 2$

d) $4x - 2y + 5 = 0 \rightarrow y = 2x + \frac{5}{2} \rightarrow m = 2$



Las cuatro rectas son paralelas. Las rectas paralelas tienen la misma pendiente.

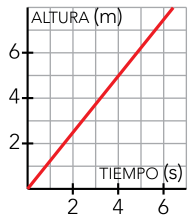
7. **La altura del agua de un depósito varía con el tiempo según la función $a = (5/4)t$ (a en metros, t en segundos).**

a) Represéntala. Si la altura del depósito es 5 m, ¿cuál es el dominio de definición de la función?

b) ¿Es una función de proporcionalidad?

c) Di cuál es la pendiente y explica su significado.

a) $a(t) = \frac{5}{4}t$. Es una función lineal de pendiente $\frac{5}{4}$. Pasa por los puntos (0, 0) y (4, 5).



Si la altura es 5 m, el dominio de la función es el tramo 0 - 4.

b) Sí, se trata de una función de proporcionalidad.

c) La pendiente es $\frac{5}{4}$. Significa que por cada cuatro segundos que pasen, la altura del depósito aumenta 5 metros.

8. **Esta tabla muestra cómo varía el volumen de agua que hay en un depósito al abrir un desagüe:**

t (min)	0	1	2	3	5
V (l)	20	18	16	14	10

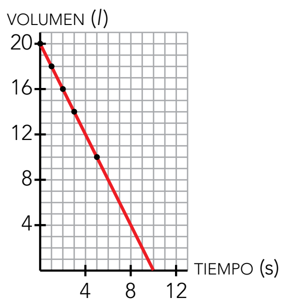
a) Representa la función *tiempo* → *volumen*.

b) Escribe su ecuación y su dominio de definición.

c) Di cuál es su pendiente y qué significa.

d) ¿Es una función de proporcionalidad?

a) Representamos los pares de puntos que se muestran en la tabla:



b) La pendiente de la función es $m = \frac{-2}{1} = -2$ y su ordenada en el origen es $n = 20$.

La ecuación de la función es $y = -2x + 20$. Su dominio de definición es el tramo 0 - 10.

c) La pendiente es $m = -2$ y significa que por cada minuto que está el desagüe abierto, el volumen de agua que hay en el depósito disminuye 2 litros.

d) No, no es una función de proporcionalidad. Es una función afín.

9. **Esta tabla muestra las longitudes de unos postes y de sus sombras en un momento determinado:**

POSTE (m)	0,5	1	1,5	2	2,5
SOMBRA (m)	1,25	2,5	3,75	5	6,25

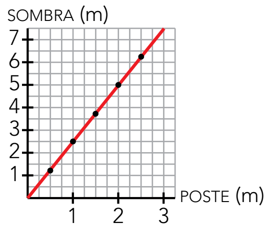
a) Representa la función *longitud del poste* → *longitud de la sombra*.

b) Escribe su ecuación y di cuál es la pendiente.

c) ¿Qué longitud tendrá la sombra de un poste de 3,5 m?

d) ¿Qué longitud tiene un poste que arroja una sombra de 3 m?

a) Representamos los pares de puntos que se muestran en la tabla:



b) La pendiente de la función es $m = \frac{5}{2}$ y pasa por el origen de coordenadas. La ecuación de la función es $y = \frac{5}{2}x$.

c) $y = \frac{5}{2} \cdot 3,5 = 8,75 \rightarrow 8,75 \text{ m}$

d) $3 = \frac{5}{2}x \rightarrow x = \frac{6}{5} \rightarrow x = 1,2 \rightarrow 1,2 \text{ m}$

10. **Una milla equivale, aproximadamente, a 1,6 km.**

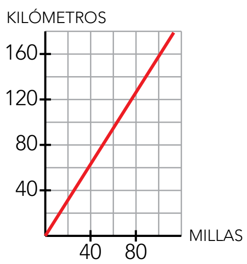
a) Haz una tabla para convertir millas en kilómetros.

b) Dibuja la gráfica y escribe su ecuación.

a)

MILLAS	1	2	3	4	5	10	20	50	100
KILÓMETROS	1,6	3,2	4,8	6,4	8	16	32	80	160

b) La ecuación es $y = 1,6x$



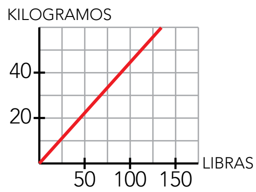
11. **Sabiendo que 100 libras equivalen a 45 kg:**

a) Escribe la ecuación que determina el número de kilos, *y*, que equivalen a *x* libras.

b) Dibuja la gráfica de la función.

a) x: libras; y: kilos $\rightarrow y = \dfrac{45}{100}x$

b) La gráfica pasa por (0, 0) y por (100, 45)

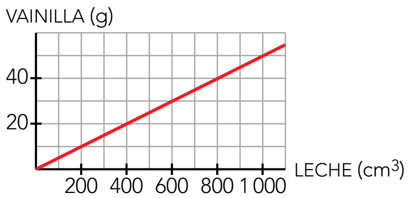


12. **Una receta para hacer helados recomienda poner 10 g de vainilla por cada 200 cm^3 de leche. Encuentra la relación entre la cantidad de leche y de vainilla, y representa la función.**

Son 10 g de vainilla por cada 200 cm^3 de leche.

La función que da la relación entre la cantidad de leche, x, y de vainilla, y, es:

$y = \dfrac{10}{200}x \rightarrow y = 0,05x$



Página 134

Funciones cuadráticas. Parábolas

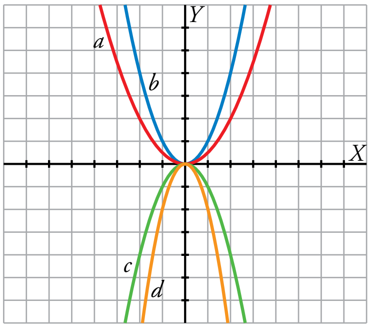
13. **Asocia cada función cuadrática con su correspondiente gráfica:**

I) $y = x^2$

II) $y = -x^2$

III) $y = -2x^2$

IV) $y = \frac{1}{2}x^2$



I) b II) c III) d IV) a

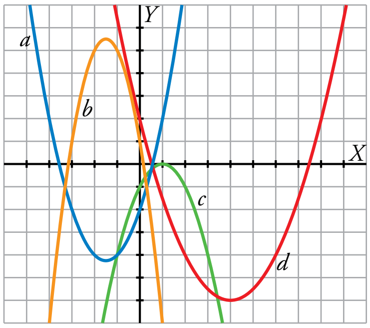
14. **Asocia cada ecuación con su correspondiente parábola:**

I) $y = x^2 + 3x - 2$

II) $y = -x^2 + 2x - 1$

III) $y = -2x^2 - 6x + 1$

IV) $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 2$



I) a II) c III) b IV) d

15. **Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores como esta, y di cuál es el vértice de cada parábola:**

a) $y = x^2 + 3$ **b)** $y = x^2 - 4$

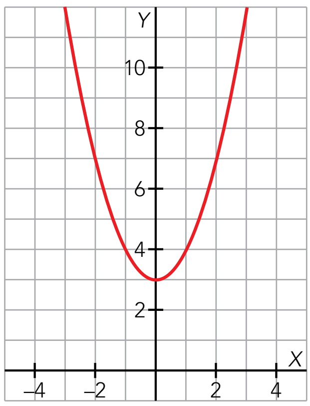
c) $y = 2x^2$ **d)** $y = 0{,}5x^2$

X	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
Y	…	…	…	…	…	…	…	…	…

a) $y = x^2 + 3$

X	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
Y	19	12	7	4	3	4	7	12	19

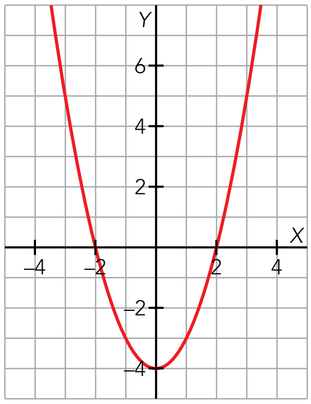
La abscisa del vértice es $p = \frac{0}{2} = 0 \rightarrow$ El vértice es (0, 3).



b) $y = x^2 - 4$

X	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
Y	12	5	0	–3	–4	–3	0	5	12

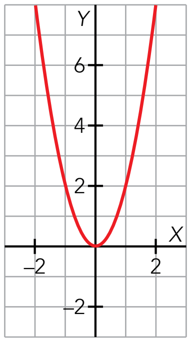
La abscisa del vértice es $p = \frac{0}{2} = 0 \rightarrow$ El vértice es (0, –4).



c) $y = 2x^2$

X	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
Y	32	18	8	2	0	2	8	18	32

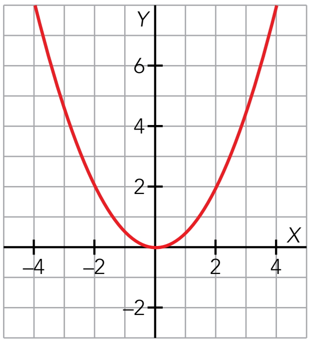
La abscisa del vértice es $p = \frac{0}{4} = 0 \rightarrow$ El vértice es (0, 0)



d) $y = 0{,}5x^2$

X	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
Y	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8

La abscisa del vértice es $p = \frac{0}{1} = 0 \rightarrow$ El vértice es (0, 0)



16. **Representa las siguientes parábolas, hallando el vértice, algunos puntos próximos a él y los puntos de corte con los ejes:**

a) $y = (x + 4)^2$

b) $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x$

c) $y = -3x^2 + 6x - 3$

d) $y = -x^2 + 5$

a) Desarrollamos la expresión: $y = (x + 4)^2 \;\to y = x^2 + 8x + 16$

Calculamos la abscisa del vértice: $p = \dfrac{-8}{2} = -4$

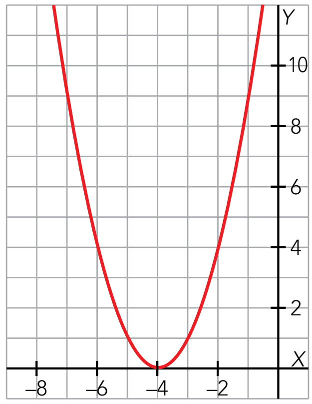
Calculamos los cortes con los ejes:

$x = 0 \;\to\; y = 0 + 0 + 16 \;\to\; (0,\, 16)$

$y = 0 \;\to\; (x + 4)^2 = 0 \;\to\; x = -4 \;\to\; (-4,\, 0)$

Tomamos valores alrededor del vértice:

X	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0
Y	9	4	1	0	1	4	9	16



b) Calculamos la abscisa del vértice: $p = \dfrac{-2}{2 \cdot \dfrac{1}{3}} = -3$

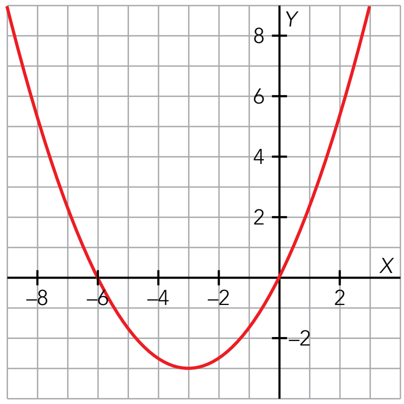
Calculamos los cortes con los ejes:

$x = 0 \;\to\; y = 0 \;\to\; (0,\, 0)$

$y = 0 \;\to\; \dfrac{1}{3}x^2 + 2x = 0 \;\to\; x\left(\dfrac{1}{3}x + 2\right) = 0 \;\to\; \begin{cases} x = 0 \;\to\; (0,0) \\ x = -6 \;\to\; (-6,0) \end{cases}$

Tomamos valores alrededor del vértice:

X	–9	–6	–4	–3	–2	0	3
Y	9	0	–2,667	–3	–2,667	0	9



c) Calculamos la abscisa del vértice: $p = \dfrac{-6}{2 \cdot (-3)} = 1$

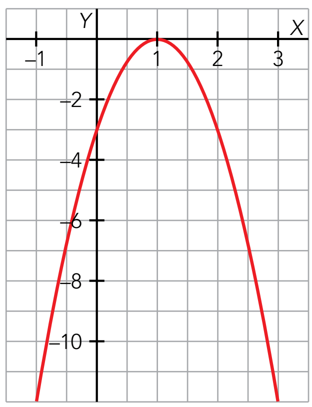
Calculamos los cortes con los ejes:

$x = 0 \;\to\; y = -3 \;\to\; (0,\, -3)$

$y = 0 \;\to\; -3x^2 + 6x - 3 = 0 \;\to\; -3\,(x-1)^2 = 0 \;\to\; x = 1 \;\to\; (1,0)$

Tomamos valores alrededor del vértice:

X	–1	0	1	2	3
Y	–12	–3	0	–3	–12



d) Calculamos la abscisa del vértice: $p = \dfrac{0}{2 \cdot (-1)} = 0$

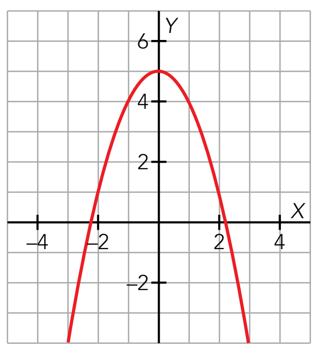
Calculamos los cortes con los ejes:

$x = 0 \;\to\; y = 5 \;\to\; (0,\, 5)$

$y = 0 \;\to\; -x^2 + 5 = 0 \;\to\; \begin{cases} x = -\sqrt{5} \;\to\; (-\sqrt{5},0) \\ x = \sqrt{5} \;\to\; (\sqrt{5},0) \end{cases}$

Tomamos valores alrededor del vértice:

X	–3	$-\sqrt{5}$	–2	–1	0	1	2	$\sqrt{5}$	3
Y	–4	0	1	4	5	4	1	0	–4



Piensa y resuelve

17. **El precio de un billete de tren depende de la distancia recorrida. Por un trayecto de 140 km, pagamos 17 €, y por 360 km, 39 €. Escribe y representa la ecuación de la recta que relaciona los kilómetros recorridos, x, con el precio del billete, y.**

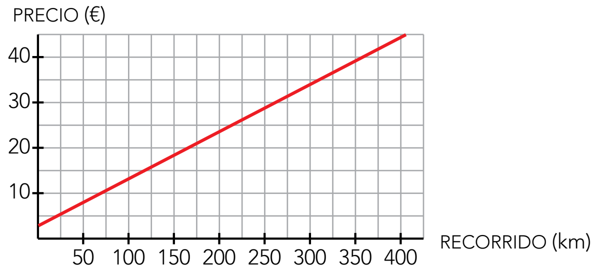
RECORRIDO (km)	140	360
PRECIO (€)	17	39

La pendiente de la función es $m = \dfrac{39-17}{360-140} = \dfrac{22}{220} = 0,1$

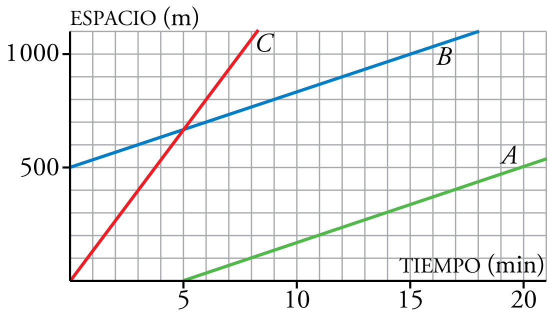
Tomamos el punto $P(140, 17)$.

La ecuación de la recta en la forma punto-pendiente es:

$y = 17 + 0,1(x - 140) \rightarrow y = 0,1x + 3$



18. **Esta es la gráfica del espacio que recorren tres montañeros que van a velocidad constante:**



a) ¿Qué velocidad lleva cada uno?

b) Escribe la expresión analítica de estas funciones.

a) La velocidad se corresponde con la pendiente de cada función.

A lleva una velocidad de $\dfrac{100}{3} \approx 33,3$ m/min

B lleva una velocidad de $\dfrac{100}{3} \approx 33,3$ m/min

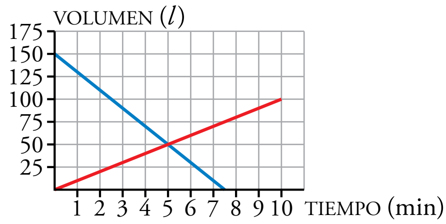
C lleva una velocidad de $\dfrac{400}{3} \approx 133,3$ m/min

b) $A \rightarrow y = 500 + \dfrac{100}{3}(x - 20)$

$B \rightarrow y = \dfrac{100}{3}x + 500$

$C \rightarrow y = \dfrac{400}{3}x$

19. **Dos depósitos de agua, A y B, funcionan de la forma siguiente: a medida que A se vacía, B se va llenando. Estas son las gráficas:**



a) Indica cuál es la gráfica de A, cuál la de B y escribe sus ecuaciones.

b) ¿A qué velocidades entra y sale el agua?

c) ¿En qué momento los dos depósitos tienen igual cantidad de agua?

a) Como A se vacía, su gráfica debe ser decreciente y como B se llena, su gráfica debe ser creciente. Por lo tanto, la gráfica azul corresponde al depósito A y la roja, al B.

Ecuación de A: $y = -20x + 150$

Ecuación de B: $y = 10x$

b) El agua sale a una velocidad de 20 *l*/min y entra a 10 *l*/min.

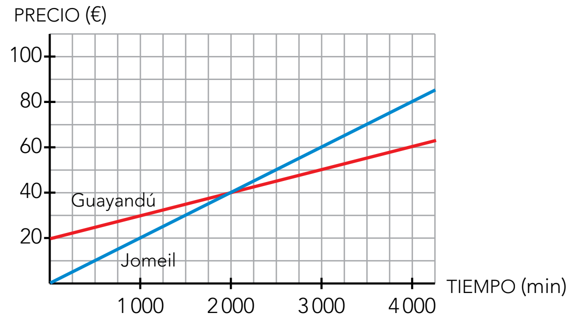
c) En el minuto 5.

20. **El servidor de Internet GUAYANDÚ tiene la tarifa GUAY, con cuota fija mensual de 20 € y 0,01 € cada minuto. El servidor JOMEIL tiene la tarifa CHUPY, sin cuota fija y 0,02 € por minuto.**

a) Haz una gráfica de cada tarifa en función del tiempo y escribe sus expresiones analíticas.

b) ¿A partir de cuántos minutos mensuales es más rentable GUAY que CHUPY?

a)



Guayandú $\rightarrow$ $y = 20 + 0{,}01x$

Jomeil $\rightarrow$ $y = 0{,}02x$

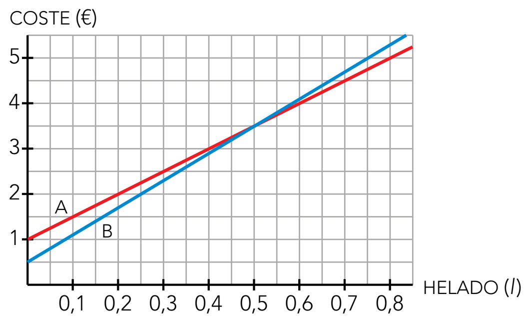
b) La tarifa GUAY es más rentable que la tarifa CHUPY a partir de 2 000 minutos.

21. **En una heladería A venden el helado a 5 € el litro, y cobran 1 € por un envase, sea del tamaño que sea. En otra heladería B cobran 0,50 € por un envase y 6 € por cada litro de helado.**

a) Representa la función *litros de helado - coste* para cada heladería y escribe sus ecuaciones.

b) Analiza cuál de las dos ofertas es más ventajosa según la cantidad de helado que compremos.

a)



Si y es el coste del helado, en euros, y x es la cantidad de helado, en litros:

Heladería A $\rightarrow$ $y = 1 + 5x$

Heladería B $\rightarrow$ $y = 0,5 + 6x$

b) Si compramos menos de medio litro de helado, es más barato comprar en la heladería B. Si compramos más de medio litro, la heladería A es la mejor opción.

Página 135

22. **En el recibo de la luz aparece esta información:**

CONSUMO: 1 400 kWh PRECIO DEL kWh: 0,20 €

a) ¿Cuánto cobrarán por la energía consumida?

b) Haz una gráfica y escribe la ecuación de la relación *consumo - coste*. Utiliza estas escalas:

Eje horizontal → 1 cuadradito = 100 kWh

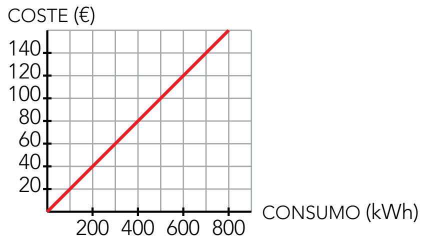
Eje vertical → 1 cuadradito = 20 €

c) Si, además, nos cobran al mes 20 € por el alquiler del equipo, ¿cómo queda la relación *consumo - coste*? Represéntala junto a la anterior y escribe su ecuación.

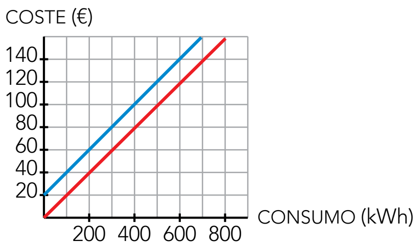
a) $1\,400 \cdot 0{,}20 = 280$ €

b) y → Coste (€), x → Consumo (kWh)

$y = 0{,}20x$



c) $y = 20 + 0{,}20x$

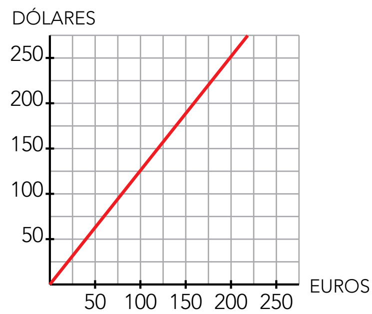


23. **Israel y Susana, para su próximo viaje a Estados Unidos, han ido a cambiar euros por dólares. A Susana le han cambiado 189 dólares por 150 euros y a Israel le han cambiado 151,20 dólares por 120 euros.**

a) Halla la ecuación de la función que nos permite obtener cuántos dólares recibimos según los euros que entreguemos.

b) ¿Cuántos dólares nos darían por 200 €? ¿Y por 350 €? ¿Cuántos euros tendríamos si nos hubieran dado 220,5 dólares?

EUROS (€)	150	120
DÓLARES ($)	189	151,20



a) La pendiente de la función es $m = \dfrac{151{,}20 - 189}{120 - 150} = \dfrac{-37{,}8}{-30} = \dfrac{63}{50}$

Tomamos $P(150, 189)$.

La ecuación de la recta en la forma punto-pendiente es:

$y = 189 + \dfrac{63}{50}(x - 150) \to y = \dfrac{63}{50}x$

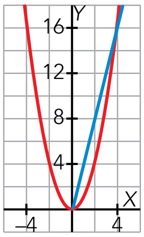
b) $y = \dfrac{63}{50} \cdot 200 \to y = 252\,\$$ $\quad y = \dfrac{63}{50} \cdot 350 \to y = 441\,\$$ $\quad 220{,}5 = \dfrac{63}{50} \cdot x \to x = 175$ €

24. **¿Cuál es la ecuación de la función que nos da el perímetro de un cuadrado dependiendo de cuánto mida su lado? ¿Y la que nos da su área?**

Dibuja ambas funciones.

El perímetro, y, en función del lado, x, viene dado por $y = 4x$.

El área en función del lado viene dada por $y = x^2$



25. **La temperatura de fusión del hielo en la escala centígrada es 0 °C, y en la Fahrenheit es 32 °F. La ebullición del agua es 100 °C, que equivale a 212 °F.**

a) Encuentra y representa la función lineal que nos da la relación entre las dos escalas.

b) Expresa en grados Fahrenheit las temperaturas siguientes: 25 °C; 36,5 °C; 10 °C.

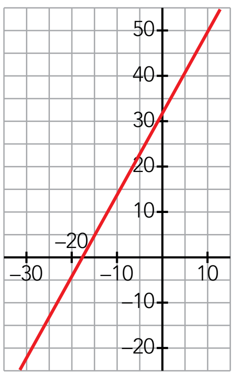
c) Pasa a grados centígrados 86 °F y 63,5 °F.

GRADOS °C	0	100
GRADOS °F	32	212

a) La pendiente de la función es $m = \dfrac{212 - 32}{100 - 0} = 1,8$

La ecuación de la recta en la forma punto-pendiente es:

$y = 32 + 1,8(x - 0) \rightarrow y = 1,8x + 32$



b) $y = 1,8 \cdot 25 + 32 = 77$ °F; 25 °C $\Leftrightarrow$ 77 °F

$y = 1,8 \cdot 36,5 + 32 = 97,7$ °F; 36,5 °C $\Leftrightarrow$ 97,7 °F

$y = 1,8 \cdot 10 + 32 = 50$ °F; 10 °C $\Leftrightarrow$ 50 °F

c) $86 = 1,8x + 32 \rightarrow x = \dfrac{86 - 32}{1,8} = 30$ °C; 86 °F $\Leftrightarrow$ 30 °C

$63,5 = 1,8x + 32 \rightarrow x = \dfrac{63,5 - 32}{1,8} = 17,5$ °C; 63,5 °F $\Leftrightarrow$ 17,5 °C

26. **Representa las siguientes funciones lineal y cuadrática, respectivamente, y halla gráficamente los puntos de corte. Calcula luego, mediante un sistema de ecuaciones, dichos puntos y comprueba que coinciden:**

$y = x^2 - 3x - 5 \qquad\qquad y = -2x + 1$

- $y = x^2 - 3x - 5$

Calculamos la abscisa del vértice, $p = \frac{-(-3)}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$

Calculamos los cortes con los ejes:

$x = 0 \rightarrow y = -5 \rightarrow (0, -5)$

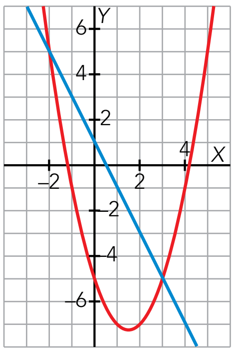
$$y = 0 \rightarrow x^2 - 3x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+20}}{2} = \begin{cases} x = \frac{3-\sqrt{29}}{2} \approx -1,19 \rightarrow \left(\frac{3-\sqrt{29}}{2}, 0\right) \\ x = \frac{3+\sqrt{29}}{2} \approx 4,19 \rightarrow \left(\frac{3+\sqrt{29}}{2}, 0\right) \end{cases}$$

Tomamos valores alrededor del vértice:

X	–2	$\frac{3-\sqrt{29}}{2}$	–1	0	1	1,5	3	4	$\frac{3+\sqrt{29}}{2}$	5
Y	5	0	–1	–5	–7	–7,25	–5	–1	0	5

- $y = -2x + 1$ es una función afín con pendiente $m = -2$ y ordenada en el origen $n = 1$.

Representamos las funciones:



Vemos que se cortan en los puntos (–2, 5) y (3, –5).

Comprobémoslo de forma analítica:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 3x - 5 \\ y = -2x + 1 \end{array}\right\} \rightarrow x^2 - 3x - 5 = -2x + 1 \rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \rightarrow \begin{cases} x = -2 \rightarrow y = 5 \\ x = 3 \rightarrow y = -5 \end{cases}$$

Vemos que obtenemos los mismos puntos de intersección.

27. **Los gastos anuales, en euros, que una empresa tiene por la fabricación de x ordenadores vienen dados por esta expresión:**

$$G(x) = 20\,000 + 250x$$

Y los ingresos, también en euros, que se obtienen por las ventas son:

$$I(x) = 600x - 0{,}1x^2$$

¿Cuántos ordenadores deben fabricarse para que los ingresos superen a los gastos; es decir, para que haya beneficios?

$G(x) = 20\,000 + 250x$

$I(x) = 600x - 0{,}1x^2$

Veamos los puntos de corte de ambas funciones:

$20\,000 + 250x = 600x - 0{,}1x^2 \;\rightarrow\; 0{,}1x^2 - 350x + 20\,000 = 0$

$$x = \frac{350 \pm \sqrt{122\,500 - 8\,000}}{0{,}2} = \frac{350 \pm 338{,}38}{0{,}2} \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 58{,}1 \\ x = 3\,441{,}9 \end{cases}$$

Ahora comprobemos en qué tramos los ingresos están por encima de los gastos:

- Si $x < 58{,}1 \;\rightarrow\; G(x) > I(x)$
- Si $58{,}1 < x < 3\,441{,}9 \;\rightarrow\; G(x) < I(x)$
- Si $x > 3\,441{,}9 \;\rightarrow\; G(x) > I(x)$

Para que los ingresos superen a los gastos, es decir, para que haya beneficios, deben fabricarse entre 59 y 3 441 ordenadores.

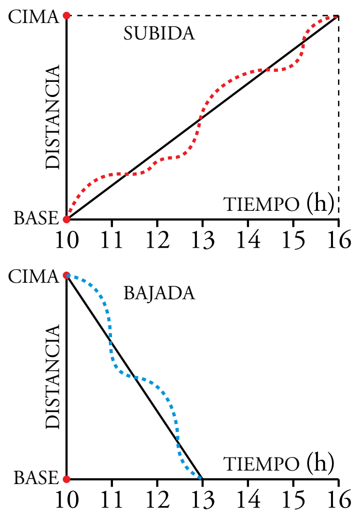
Curiosidades matemáticas

Subir y bajar

Un montañero inicia la ascensión a un pico a las 10 de la mañana y llega a la cima a las 4 de la tarde. Duerme en un refugio y, al día siguiente, también a las 10 h, inicia el descenso, llegando a la base a la una de la tarde.

¿Crees que hay algún punto del camino por el que ha pasado en la bajada a la misma hora que en la subida? ¿A qué hora ocurrió tal cosa, suponiendo que ha bajado y subido a velocidades constantes?

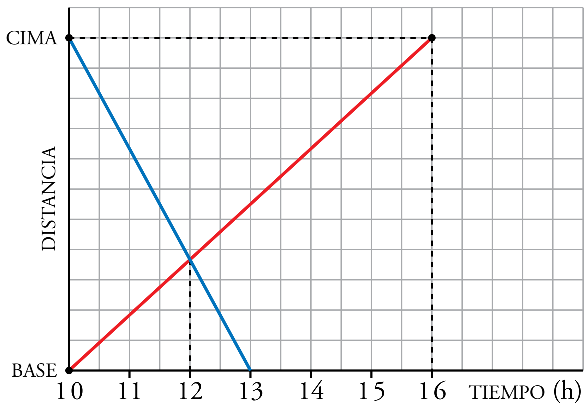
Observa las gráficas de la derecha y, si aún no lo tienes claro, dibuja ambas sobre los mismos ejes, suponiendo que han sido dos montañeros haciendo caminos inversos en el mismo día.



Al subir, a las 12 h el montañero ha recorrido $\frac{1}{3}$ del camino.

Al bajar, a las 12 h ha recorrido $\frac{2}{3}$ del camino, y le falta $\frac{1}{3}$ del camino para llegar a la falda de la montaña.

Por tanto, pasa por el mismo lugar a la misma hora, a las 12 h.



1 Ángulos en las figuras planas

Página 139

1. Cinco de los ángulos de un hexágono irregular miden 147°, 101°, 93°, 122° y 134°. Halla la medida del sexto ángulo.

Los seis ángulos de un hexágono suman: (6 – 2) · 180° = 4 · 180° = 720°

720° – (147° + 101° + 93° + 122° + 134°) = 720° – 597° = 123°

El sexto ángulo mide 123°.

2. ¿Cuánto mide cada ángulo de un hexágono regular? ¿Y de un pentágono regular?

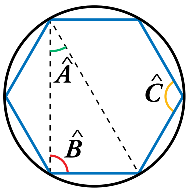
– La suma de los ángulos de un hexágono es (6 – 2) · 180° = 4 · 180° = 720°.

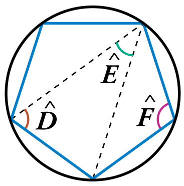
Por tanto, cada ángulo mide 720° : 6 = 120°.

– La suma de los ángulos de un pentágono es (5 – 2) · 180° = 3 · 180° = 540°.

Entonces, cada ángulo de un pentágono regular mide 540° : 5 = 108°.

3. Halla el valor de cada uno de los ángulos señalados:





$\hat{A}$ es un ángulo inscrito cuyo central correspondiente mide $\frac{360°}{6} = 60° \rightarrow \hat{A} = \frac{60°}{2} = 30°$

$\hat{B}$ es un ángulo inscrito cuyo central correspondiente mide $180° \rightarrow \hat{B} = \frac{180°}{2} = 90°$

$\hat{C}$ es uno de los ángulos del hexágono $\rightarrow \hat{C} = \frac{(6-2)\,180°}{6} = 120°$

$\hat{D}$ es un ángulo inscrito cuyo central correspondiente mide $2 \cdot \frac{360°}{5} = 144° \rightarrow \hat{D} = \frac{144°}{2} = 72°$

$\hat{E}$ es un ángulo inscrito cuyo central correspondiente mide $\frac{360°}{5} = 72° \rightarrow \hat{E} = \frac{72°}{2} = 36°$

$\hat{F}$ es uno de los ángulos del pentágono $\rightarrow \hat{F} = \frac{(5-2)\,180°}{5} = 108°$

2 Figuras semejantes

Página 140

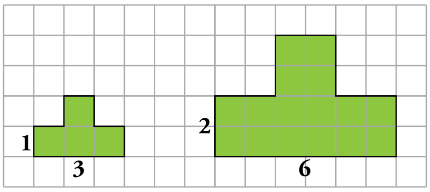
1. Estas dos figuras son semejantes. Mide y encuentra la razón de semejanza.

Por ejemplo, medimos las guitarras a lo largo del mástil. Entonces, la guitarra de mayor tamaño mide, aproximadamente, 4 cm y la de menor tamaño mide 3 cm aproximadamente.

$4 \cdot 0{,}75 = 3$

Por tanto, la razón de semejanza es $r \approx 0{,}75$.

2. Estas dos figuras son semejantes y su razón de semejanza es 2:



¿Cuántos cuadrados ocupa la primera? ¿Y la segunda? ¿Cuál es la razón entre las áreas?

La primera figura ocupa 4 cuadrados.

La segunda figura ocupa 16 cuadrados.

La razón entre las áreas es: $r = \dfrac{16}{4} = 4$.

3 Planos, mapas y escala

Página 141

1. Considera el plano del primer ejemplo.

a) Calcula la anchura de la vivienda.

b) ¿Cuánto mediría esa misma longitud en un plano construido a escala 1/100?

a) En la imagen, el ancho mide 4,9 cm.

La anchura de la vivienda mide 4,9 · 200 = 980 cm = 9,8 m.

b) A escala 1/100, la anchura de la vivienda medirá, 4,9 · 100 = 490 cm = 4,9 m.

2. a) Calcula la distancia real entre Arrecife de Lanzarote y Las Palmas de Gran Canaria.

b) ¿A qué escala debería estar el plano para que esa distancia, sobre el papel, fuera el doble?

a) En la imagen, la distancia entre el Arrecife y Las Palmas de Gran Canaria es 4,1 cm.

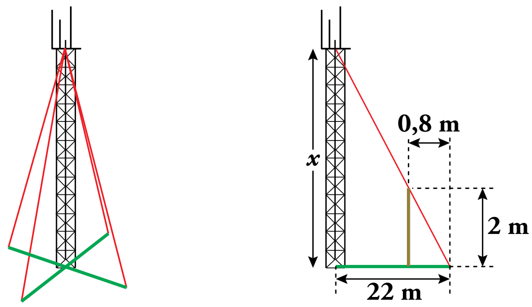
Por tanto, la dimensión real es 4,1 · 5 000 000 = 20 500 000 cm = 205 km.

b) Para que la distancia fuera el doble, el plano debería estar a una escala 1/2 500 000.

4 Triángulos semejantes. Teorema de Tales

Página 143

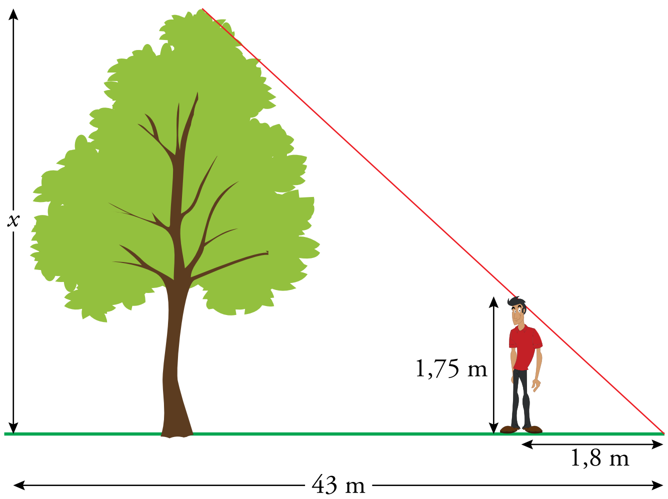
1. Una torre de comunicaciones se sustenta por cuatro cables amarrados a su extremo superior y al suelo. Para calcular su altura, Aurora ha colocado un listón de dos metros como indica la figura. Con esos datos, calcula tú la altura de la torre.



$$\frac{2}{0,8} = \frac{x}{22} \rightarrow x = \frac{2 \cdot 22}{0,8} = 55 \text{ m}$$

La altura de la torre mide 55 m.

2. Cuando mi sombra mide 1,8 m, la del pino del parque mide 43 m. Mi altura es 1,75 m. ¿Cuál es la altura del pino?

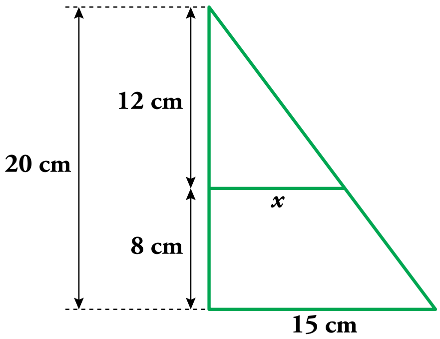


$$\frac{1,75}{1,8} = \frac{x}{43}$$

$$x = \frac{1,75 \cdot 73}{1,8} = 41,81 \text{ m}$$

El pino mide 41,81 m.

3. **La altura de un cono recto mide 20 cm, y el radio de la base, 15 cm. ¿Cuál es el radio de la nueva base, si se corta de forma que su altura disminuya en 8 cm?**



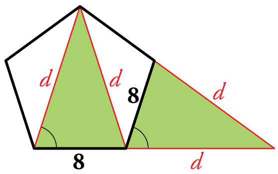
$$\frac{x}{15} = \frac{12}{20}$$

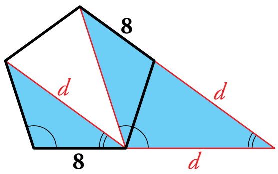
$$x = \frac{12 \cdot 15}{20} = 9 \text{ cm}$$

El radio de la nueva base mide 9 cm.

4. **Calcula la diagonal de un pentágono regular de 8 cm de lado.**

Observa en la figura que los dos triángulos verdes son iguales, y que los dos azules son semejantes.





$$\frac{8+d}{d} = \frac{d}{8} \;\rightarrow\; 8(8+d) = d \cdot d \;\rightarrow\; 64 + 8d = d^2 \;\rightarrow\; d^2 - 8d - 64 = 0$$

$$d = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-64)}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{64+256}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{320}}{2} = \frac{8 \pm 8\sqrt{5}}{2} \text{ cm} \begin{cases} 4 + 4\sqrt{5} \approx 12,94 \text{ cm} \\ 4 - 4\sqrt{5} \approx -4,94 \text{ cm} \end{cases}$$

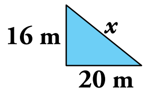
Solución: La diagonal mide $4 + 4\sqrt{5} \approx 12,94$ cm.

5 El teorema de Pitágoras

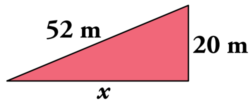
Página 145

1. Calcula el lado desconocido en cada triángulo:

a)



b)



a) $x^2 = 20^2 + 16^2 \rightarrow x = \sqrt{400 + 256} = \sqrt{656} = 4\sqrt{41} \approx 25{,}6$ m.

b) $52^2 = 20^2 + x^2 \rightarrow x^2 = 52^2 - 20^2$

$x = \sqrt{2\,704 - 400} = \sqrt{2\,304} = 48$ m

2. Averigua cómo son (acutángulos, rectángulos u obtusángulos) los triángulos de lados:

a) 49 m, 18 m y 52 m

b) 44 cm, 17 cm y 39 cm

c) 68 cm, 85 dm, 51 cm

d) 15 cm, 15 cm, 15 cm

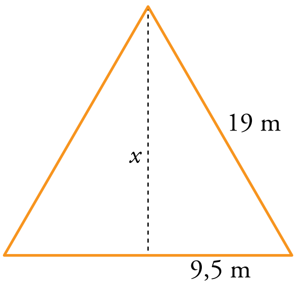
a) $18^2 + 49^2 = 2\,725 > 2\,704 = 52^2 \rightarrow$ Triángulo acutángulo.

b) $17^2 + 39^2 = 1\,810 < 1\,936 = 44^2 \rightarrow$ Triángulo obtusángulo.

c) $68^2 + 51^2 = 7\,225 = 85^2 \rightarrow$ Triángulo rectángulo.

d) $15^2 + 15^2 = 450 > 225 = 15^2 \rightarrow$ Triángulo acutángulo.

3. Halla la altura de un triángulo equilátero de 19 m de lado. Da la solución aproximando hasta los centímetros.

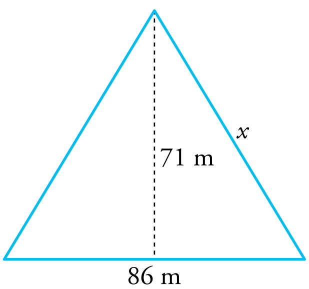


$19^2 = x^2 + 9{,}5^2 \rightarrow x^2 = 19^2 - 9{,}5^2$

$x = \sqrt{361 - 90{,}25} = \sqrt{270{,}75} \approx 16{,}45$ m

Solución: La altura mide 16,45 m.

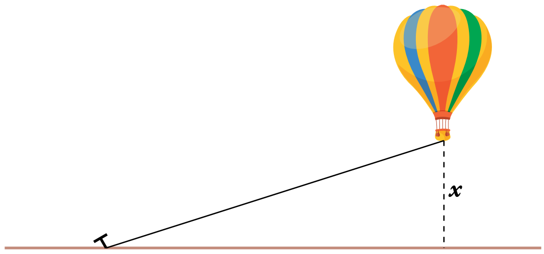
4. Halla el perímetro de un triángulo isósceles de lado desigual 86 m y altura correspondiente 71 m.

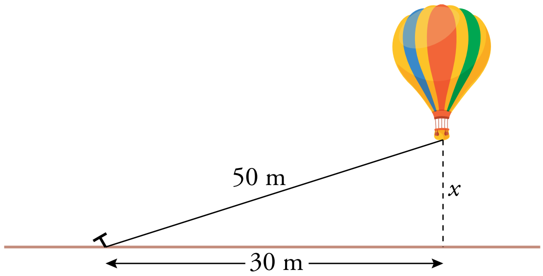


$x^2 = 71^2 + 43^2 \rightarrow x = \sqrt{6\,890} = 83{,}01$ m

$P = 2 \cdot 83{,}01 + 86 = 252{,}02$ m

5. Un globo cautivo, amarrado al suelo con una cuerda de 50 metros, ha sido desplazado por el viento 30 metros hacia el oeste. ¿A qué altura se encuentra?



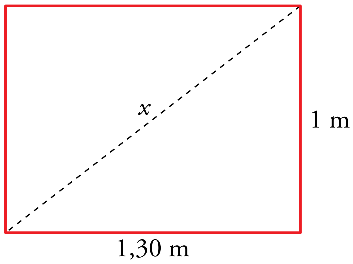


$50^2 = 30^2 + x^2 \rightarrow x^2 = 50^2 - 30^2$

$x = \sqrt{2\,500 - 900} = \sqrt{1\,600} = 40$ m

Solución: Se encuentra a 40 m de altura.

6. ¿Será posible introducir, durante una mudanza, el tablero de una mesa de 1,5 × 2 metros, a través del hueco de una ventana de 1 × 1,30 metros? Razona tu respuesta.



$x^2 = 1{,}30^2 + 1^2 \rightarrow x = \sqrt{1{,}69 + 1} = \sqrt{2{,}69}$

$x = 1{,}64$ m

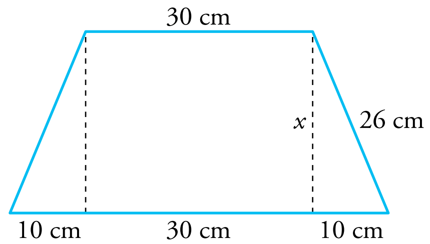
$1{,}5 < 1{,}64$

Solución: Sí, será posible. El ancho de la mesa es 1,5 m y la diagonal de la ventana mide 1,64 m.

6 Triángulos rectángulos en figuras planas

Página 147

1. Los lados de un trapecio isósceles miden 50 cm, 30 cm, 26 cm y 26 cm. Halla su altura.

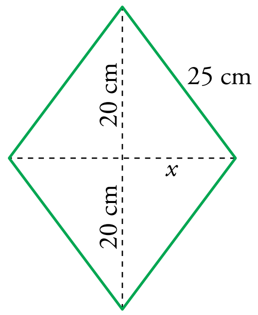


$26^2 = x^2 + 10^2 \rightarrow x^2 = 26^2 - 10^2$

$x = \sqrt{576} = 24$ cm

La altura del trapecio isósceles es 24 cm.

2. Cada uno de los lados de un rombo miden 25 cm, y una de sus diagonales, 40 cm. Halla la longitud de la otra diagonal.

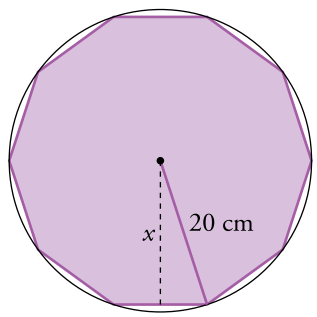


$25^2 = x^2 + 20^2 \rightarrow x^2 = 25^2 - 20^2$

$x = \sqrt{225} = 15$ cm

La longitud de la otra diagonal es $15 \cdot 2 = 30$ cm.

3. El perímetro de un decágono regular inscrito en una circunferencia de 20 cm de radio mide 124,9 cm. Halla su apotema.



Perímetro = 124,9 cm

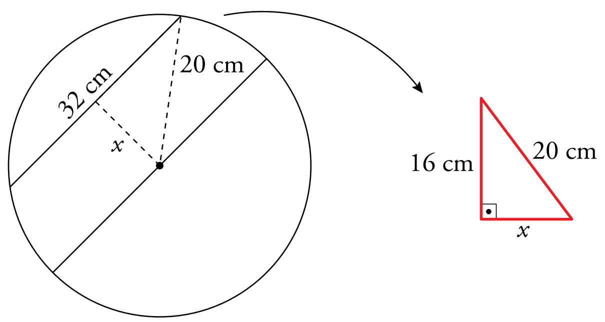
Cada lado del decágono mide 124,9 : 10 = 12,49 cm

$20^2 = x^2 + \left(\frac{12,49}{2}\right)^2 \rightarrow x^2 = 20^2 - 6,245^2$

$x \approx \sqrt{400 - 39} \approx \sqrt{361} \approx 19$ cm

La apotema mide, aproximadamente, 19 cm.

4. En una circunferencia hemos dibujado un diámetro de 40 cm y una cuerda paralela a él de 32 cm. ¿A qué distancia están estos dos segmentos?

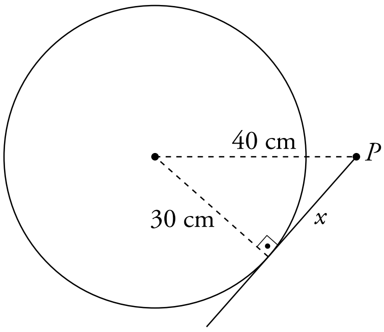


$20^2 = 16^2 + x^2 \rightarrow x^2 = 20^2 - 16^2$

$x = \sqrt{400 - 256} = \sqrt{144} = 12$ cm

Solución: Están a 12 cm de distancia.

5. **Desde un punto que dista 40 cm del centro de una circunferencia de 60 cm de diámetro, hemos trazado un segmento tangente a ella. ¿Cuál es su longitud?**

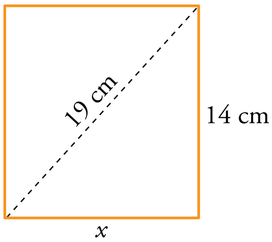


$40^2 = 30^2 + x^2 \rightarrow x^2 = 40^2 - 30^2$

$x = \sqrt{1\,600 - 900} = \sqrt{700} = 10\sqrt{7} = 26,46 \text{ cm}$

Solución: El segmento mide 26,46 cm.

6. **Halla el perímetro de un rectángulo cuya diagonal mide 19 cm, y su lado menor, 14 cm.**



$19^2 = 14^2 + x^2 \rightarrow x^2 = 19^2 - 14^2$

$x = \sqrt{361 - 196} = \sqrt{165} = 12,85 \text{ cm}$

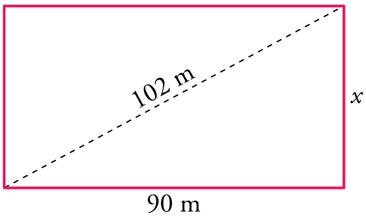
$P = 2 \cdot 14 + 2 \cdot 12,85 = 53,7$ cm

Solución: El perímetro mide 53,7 cm.

7 Áreas de los polígonos

Página 149

1. Un estadio rectangular mide 90 metros de largo, y su diagonal, 102 m. Halla su anchura y su área.



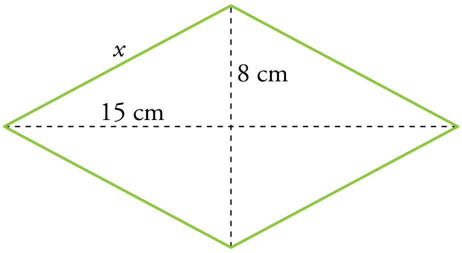
$102^2 = 90^2 + x^2 \rightarrow x^2 = 102^2 - 90^2$

$x = \sqrt{10\,404 - 8\,100} = \sqrt{2\,304} = 48 \text{ m}$

$\text{Área} = 90 \cdot 48 = 4\,320 \text{ m}^2$

Solución: El estadio mide 48 m de ancho y su área es de 4 320 m^2.

2. Las diagonales de un rombo miden 16 cm y 30 cm, respectivamente. Halla el perímetro y el área del rombo.



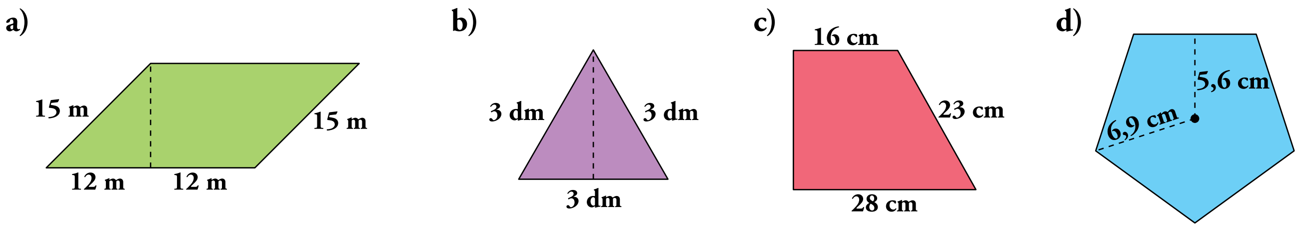
$x^2 = 15^2 + 8^2 \rightarrow x = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17 \text{ cm.}$

$\text{Perímetro} = 4 \cdot 17 = 68 \text{ cm}$

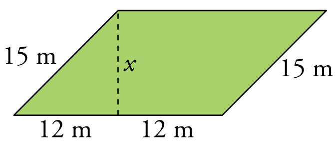
$\text{Área} = \dfrac{30 \cdot 16}{2} = 240 \text{ cm}^2$

El perímetro mide 68 cm y el área, 240 cm^2.

3. Halla el área y el perímetro de las siguientes figuras, calculando previamente el elemento que falta:



a) Calculamos la altura:



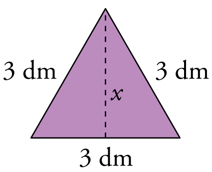
$15^2 = 12^2 + x^2 \rightarrow x^2 = 15^2 - 12^2$

$x = \sqrt{225 - 144} = \sqrt{81} = 9 \text{ m}$

$\text{Área} = 9 \cdot (12 + 12) = 9 \cdot 24 = 216 \text{ m}^2$

$\text{Perímetro} = 15 \cdot 2 + 24 \cdot 2 = 78 \text{ m}$

b) Calculamos la altura:



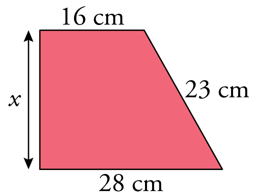
$3^2 = 1{,}5^2 + x^2 \rightarrow x^2 = 3^2 - 1{,}5^2$

$x = \sqrt{9 - 2{,}25} = \sqrt{6{,}75} = 2{,}6 \text{ dm}$

$\text{Área} = \dfrac{3 \cdot 2{,}6}{2} = 3{,}9 \text{ dm}^2$

$\text{Perímetro} = 3 \cdot 3 = 9 \text{ dm}$

c)



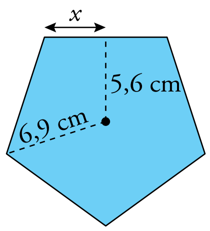
$23^2 = x^2 + 12^2 \;\rightarrow\; x^2 = 23^2 - 12^2$

$x = \sqrt{529 - 144} = \sqrt{385} = 19,6 \text{ cm}$

$\text{Área} = \dfrac{16+28}{2} \cdot 19,6 = 431,2 \text{ cm}^2$

Perímetro = 19,6 + 28 + 23 + 16 = 86,6 cm

d)



$6,9^2 = 5,6^2 + x^2 \;\rightarrow\; x^2 = 6,9^2 - 5,6^2$

$x = \sqrt{47,61 - 31,36} = \sqrt{16,25} \approx 4 \text{ cm} \;\rightarrow\; \text{lado} \approx 8 \text{ cm}$

$\text{Área} = \dfrac{(5 \cdot 8) \cdot 5,6}{2} = 112 \text{ cm}^2$

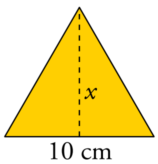
Perímetro = 5 · 8 = 40 cm

4. Calcula:

a) El área de un triángulo equilátero de lado 10 cm.

b) El área de un hexágono regular de lado 10 cm.

a)

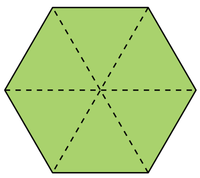


$10^2 = 5^2 + x^2 \;\rightarrow\; x^2 = 10^2 - 5^2$

$x = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75} \approx 8,66 \text{ cm}$

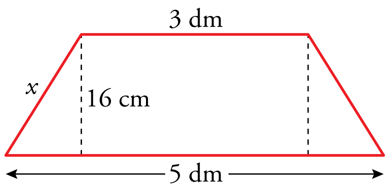
$\text{Área} = \dfrac{10 \cdot 8,66}{2} = 43,3 \text{ cm}^2$

b) El hexágono regular está formado por seis triángulos como el del apartado a).



Área = 6 · 43,3 = 259,8 cm^2

5. La altura de un trapecio isósceles mide 16 cm, y sus bases, 5 dm y 3 dm. Halla el perímetro (aproximando a los milímetros) y el área.



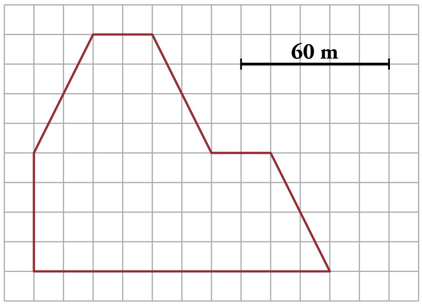
$x^2 = 16^2 + 10^2 \;\rightarrow\; x = \sqrt{256 + 100} = \sqrt{356} = 18,9 \text{ cm}$

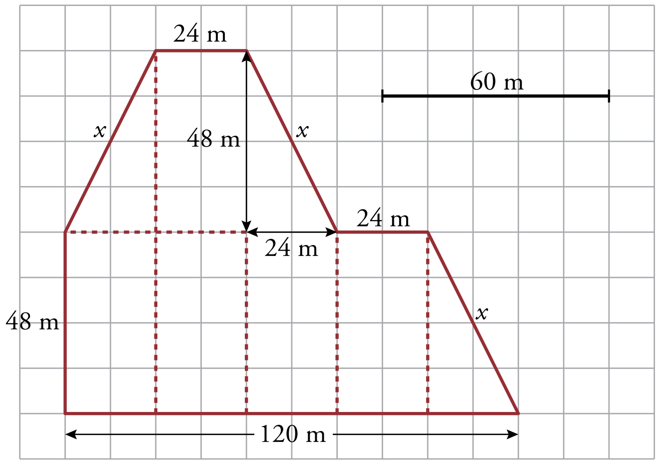
Perímetro = 30 + 50 + 2 · 18,9 = 117,8 cm

$\text{Área} = \dfrac{30+50}{2} \cdot 16 = 640 \text{ cm}^2$

Solución: El perímetro mide 117,8 cm y el área, 640 cm^2.

6. En la figura puedes ver el plano de una parcela de terreno. Calcula su superficie y la longitud de la valla.





Cinco cuadraditos son 60 m, entonces, un cuadradito son 12 m.

$x^2 = 24^2 + 48^2 \ \rightarrow \ x = \sqrt{576 + 2\,304} = \sqrt{2\,880} = 53,67 \text{ m}$

Hemos dividido la parcela en rectángulos y triángulos y hemos obtenido 5 rectángulos y 3 triángulos, con las mismas medidas, respectivamente.

Área de un rectángulo = $24 \cdot 48 = 1\,152 \text{ m}^2$

Área de un triángulo = $\dfrac{24 \cdot 48}{2} = 576 \text{ m}^2$

Área total = $5 \cdot 1\,152 + 3 \cdot 576 = 7\,488 \text{ m}^2$

Perímetro = $120 + 48 + 3 \cdot 53,67 + 2 \cdot 24 \approx 377$ m

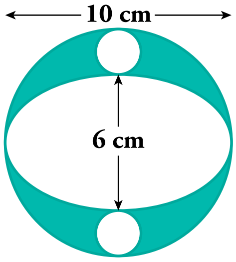
Solución: La superficie de la parcela es de 7 488 m^2 y la longitud de la valla, 377 m.

8 Áreas y perímetros de algunas figuras curvas

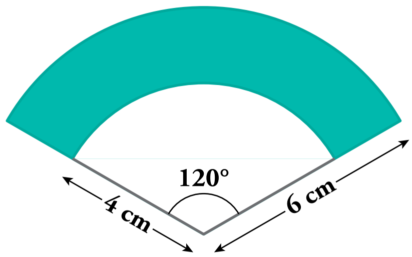
Página 150

1. Halla el área de las figuras coloreadas.

a)



b)



a) Área del círculo grande = $\pi \cdot 5^2 = \pi \cdot 25 = 78{,}54$ cm^2

Área del círculo pequeño = $\pi \cdot 1^2 = 3{,}14$ cm^2

Área de la elipse = $\pi \cdot 3 \cdot 5 = 47{,}12$ cm^2

Área = $78{,}54 - 3{,}14 - 47{,}12 = 28{,}28$ cm^2

b) Área = $\dfrac{\pi \cdot 6^2 \cdot 120°}{360°} - \dfrac{\pi \cdot 4^2 \cdot 120°}{360°} = \dfrac{\pi (36 - 16)}{3} = 20{,}94$ cm^2

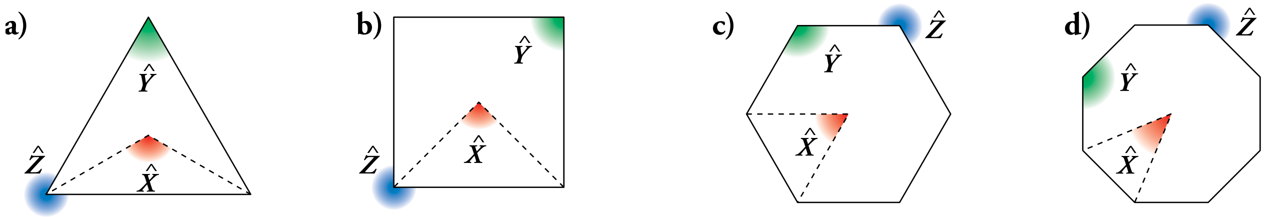
Ejercicios y problemas

Página 151

Practica

Ángulos

1. **Calcula los ángulos $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$ en los siguientes polígonos regulares:**



a) $\hat{X} = 360° : 3 = 120°$

$\hat{Y}$ es un ángulo del triángulo equilátero. $\hat{Y} = 60°$

$\hat{Z} = 360° - 60° = 300°$

b) $\hat{X} = 360° : 4 = 90°$

$\hat{Y}$ es un ángulo del cuadrado. $\hat{Y} = 90°$

$\hat{Z} = 360° - 90° = 270°$

c) $\hat{X} = 360° : 6 = 60°$

$\hat{Y} = \dfrac{(6-2) \cdot 180°}{6} = 4 \cdot 30° = 120°$

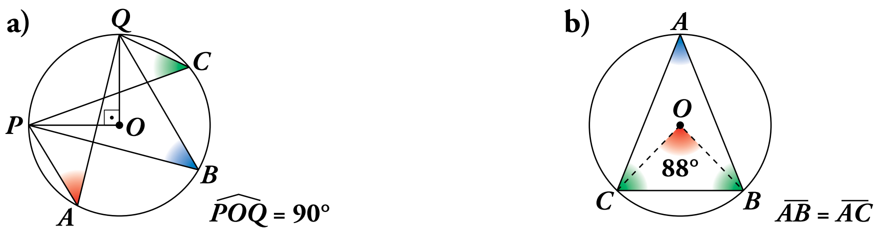
$\hat{Z} = 360° - 120° = 240°$

d) $\hat{X} = 360° : 8 = 45°$

$\hat{Y} = \dfrac{(8-2) \cdot 180°}{8} = 135°$

$\hat{Z} = 360° - 135° = 225°$

2. **¿Cuánto miden los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ en cada una de estas figuras?**



a) $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ son ángulos inscritos cuyo central correspondiente es $\widehat{POQ} = 90°$.

Entonces $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \dfrac{90°}{2} = 45°$

b) $\hat{A}$ es un ángulo inscrito cuyo central correspondiente es $\widehat{BOC} = 88°$.

$\hat{A} = 88° : 2 = 44°$

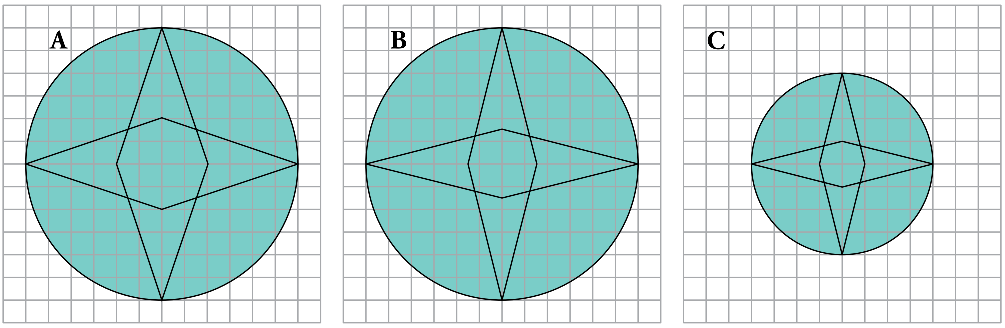
$\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ suman 180° y $\hat{B} = \hat{C}$.

$(180° - 44°) : 2 = 136° : 2 = 68°$

$\hat{A} = 44°$, $\hat{B} = \hat{C} = 68°$

Semejanza

3. **Dos de estas figuras son semejantes. ¿Cuáles?**

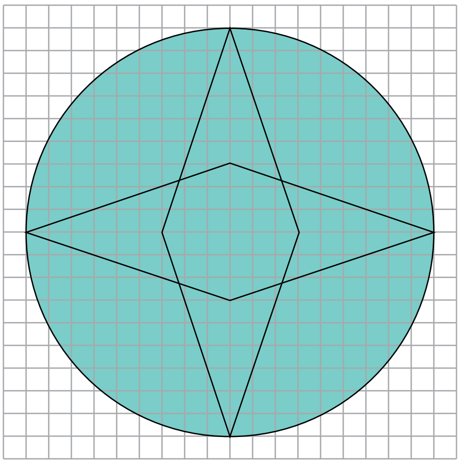


¿Cuál es la razón de semejanza?

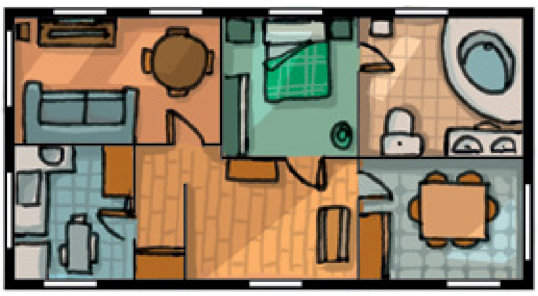
Dibuja una figura semejante a la figura A anterior, de forma que la razón de semejanza sea 3/2.

Las figuras B y C son semejantes. Su razón de semejanza es $r = \frac{2}{3}$

Para dibujar la figura semejante a A, multiplico cada medida por $\frac{3}{2}$



4. **Debajo tienes el plano de un piso a escala 1/250. Calcula sus dimensiones (largo y ancho), y su superficie.**



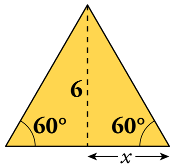
Ancho $\rightarrow$ 3,7 cm · 250 = 925 cm = 9,25 m

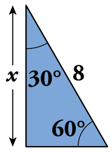
Largo $\rightarrow$ 7 · 250 = 1 750 cm = 17,5 m

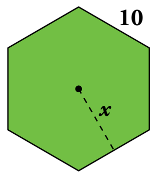
Área = 9,25 · 17,5 = 161,875 m^2

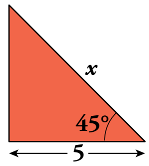
Teorema de Pitágoras

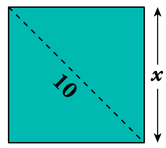
5. **Calcula x en cada caso:**

a)


b)


c)


d)


e)


a) $(2x^2) = x^2 + 6^2 \rightarrow 4x^2 = x^2 + 36 \rightarrow 4x^2 - x^2 = 36$

$3x^2 = 36 \rightarrow x^2 = \dfrac{36}{3} \rightarrow x^2 = 12 \rightarrow x = 2\sqrt{3} = 3,46$

b) $8^2 = x^2 + 4^2 \rightarrow 64 = x^2 + 16 \rightarrow x^2 = 64 - 16 \rightarrow x^2 = 48$

$x = \sqrt{48} \rightarrow x = 4\sqrt{3} = 6,93$

c) $10^2 = x^2 + 5^2 \rightarrow 100 = x^2 + 25 \rightarrow x^2 = 100 - 25 \rightarrow x^2 = 75$

$x = \sqrt{75} \rightarrow x = 5\sqrt{3} = 8,66$

d) $x^2 = 5^2 + 5^2 \rightarrow x^2 = 25 + 25 \rightarrow x^2 = 50$

$x = \sqrt{50} \rightarrow x = 5\sqrt{2} = 7,07$

d) $x^2 + x^2 = 10^2 \rightarrow 2x^2 = 100 \rightarrow x^2 = 50$

$x = \sqrt{50} \rightarrow x = 5\sqrt{2} = 7,07$

6. **Clasifica en rectángulos, acutángulos u obtusángulos los triángulos de lados:**

a) 5 m, 6 m y 7 m

b) 13 m, 15 m y 20 m

c) 45 m, 27 m y 36 m

d) 35 m, 28 m y 46 m

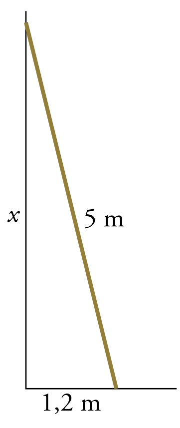
a) $5^2 + 6^2 = 61 > 49 = 7^2 \rightarrow$ Triángulo acutángulo

b) $13^2 + 15^2 = 394 < 400 = 20^2 \rightarrow$ Triángulo obtusángulo

c) $27^2 + 36^2 = 2\,025 = 45^2 \rightarrow$ Triángulo rectángulo

d) $28^2 + 35^2 = 2\,009 < 2\,116 = 46^2 \rightarrow$ Triángulo obtusángulo

7. **Una escalera de 5 m de largo está apoyada en la pared. Su extremo inferior está a 1,2 m de ella. ¿Qué altura alcanza su extremo superior?**

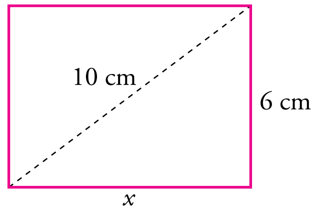


$5^2 = 1,2^2 + x^2 \rightarrow 25 = 1,44 + x^2 \rightarrow x^2 = 25 - 1,44$

$x = \sqrt{23,56} = 4,85$ m

Solución: El extremo superior alcanza una altura de 4,85 m.

8. **La diagonal de un rectángulo mide 10 cm, y uno de los lados, 6 cm. Calcula su perímetro.**

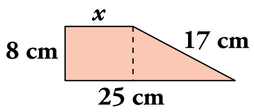


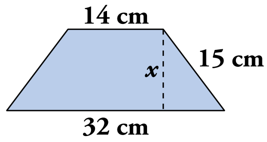
$10^2 = 6^2 + x^2 \rightarrow 100 = 36 + x^2 \rightarrow x^2 = 100 - 36$

$x = \sqrt{64} \rightarrow x = 8$ cm

$P = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 8 = 12 + 16 = 28$ cm

9.

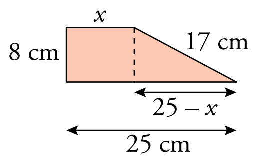




a) Calcula x en cada uno de estos trapecios.

b) Halla las longitudes de sus diagonales.

a)



$17^2 = 8^2 + (25 - x)^2$

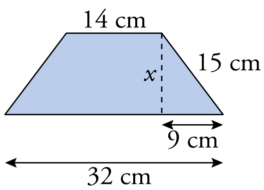
$289 = 64 + 625 - 50x + x^2$

$x^2 - 50x + 400 = 0$

$$x = \frac{-(-50) \pm \sqrt{(-50)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 400}}{2 \cdot 1} = \frac{50 \pm \sqrt{2\,500 - 1\,600}}{2} = \frac{50 \pm \sqrt{900}}{2} \begin{cases} \dfrac{50 + 30}{2} = 40 \text{ cm} \\ \dfrac{50 - 30}{2} = 10 \text{ cm} \end{cases}$$

$x = 40$ no vale porque es mayor que 25.

Solución: $x = 10$ cm.

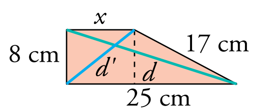


$15^2 = 9^2 + x^2 \rightarrow 225 = 81 + x^2 \rightarrow x^2 = 225 - 81$

$x = \sqrt{144} = 12$ cm

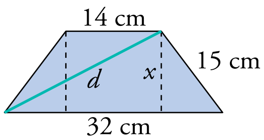
Solución: $x = 12$ cm.

b)



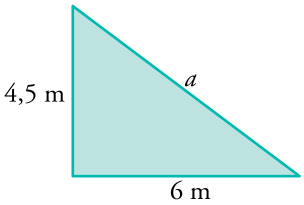
$d^2 = 8^2 + 25^2 = 689 \rightarrow d = \sqrt{689} = 26,2$ cm

$d'^2 = 8^2 + 10^2 = 164 \rightarrow d' = \sqrt{164} = 12,8$ cm



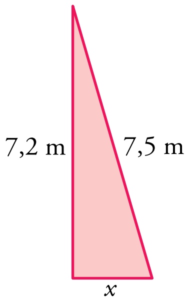
$d^2 = 23^2 + 12^2 = 673 \rightarrow d = \sqrt{673} = 25,9$ cm

10. **En un triángulo rectángulo, los catetos miden 4,5 m y 6 m. En otro triángulo rectángulo, un cateto mide 7,2 m, y la hipotenusa, 7,5 m. ¿Cuál de los dos tiene mayor perímetro?**



$a^2 = 6^2 + 4{,}5^2 \rightarrow a^2 = 36 + 20{,}25 \rightarrow a = \sqrt{56{,}25} = 7{,}5$ m

$P = 7{,}5 + 4{,}5 + 6 = 18$ m



$7{,}5^2 = 7{,}2^2 + x^2 \rightarrow 56{,}25 = 51{,}84 + x^2 \rightarrow x^2 = 56{,}25 - 51{,}84$

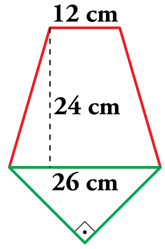
$x = \sqrt{4{,}41} = 2{,}1$ m

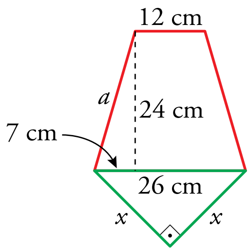
$P = 7{,}5 + 7{,}2 + 2{,}1 = 16{,}8$ m

Solución: El primer triángulo tiene mayor perímetro.

Página 152

11. **Este pentágono se ha formado haciendo coincidir la base mayor de un trapecio isósceles con la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles. Halla el perímetro del pentágono.**





$a^2 = 24^2 + 7^2 \rightarrow a^2 = 576 + 49 \rightarrow a = \sqrt{625} \rightarrow a = 25$ cm

$26^2 = x^2 + x^2 \rightarrow 676 = 2x^2 \rightarrow x^2 = 338 \rightarrow x = \sqrt{338} = 18{,}3$ cm

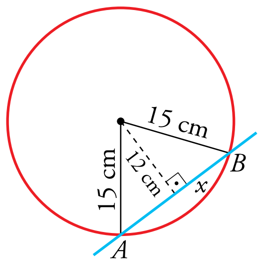
$P = 12 + 2 \cdot 25 + 2 \cdot 18{,}3 = 98{,}6$ cm

12. **En una circunferencia de 15 cm de radio, traza una cuerda AB a 12 cm del centro.**

a) ¿Cuál es la longitud de AB?

b) ¿Cuántas cuerdas de la misma longitud que AB hay en esa circunferencia? ¿Cuántas hay que sean paralelas a AB? ¿Cuántas hay paralelas y de la misma longitud que AB?

a)

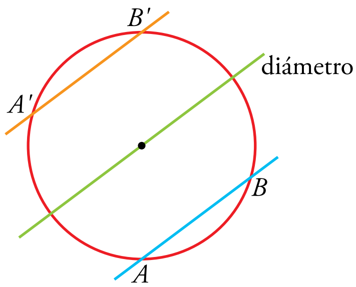


$15^2 = 12^2 + x^2 \rightarrow 225 = 144 + x^2 \rightarrow x^2 = 225 - 144$

$x = \sqrt{81} \rightarrow x = 9$ cm

$\overline{AB} = 2 \cdot 9 = 18$ cm

b)



Hay infinitas cuerdas de la misma longitud que $\overline{AB}$.

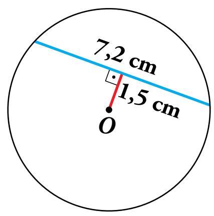
Hay infinitas cuerdas paralelas a la cuerda $\overline{AB}$.

Sólo hay una cuerda, la simétrica con respecto del diámetro paralelo a $\overline{AB}$, que sea paralela y tenga la misma medida.

13. **Fíjate en esta circunferencia y responde a las siguientes preguntas:**

a) ¿Cuánto mide el radio?

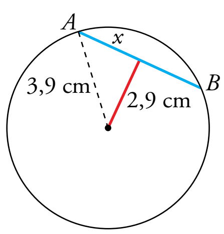
b) ¿Cuál será la longitud de una cuerda cuya distancia al centro es 2,9 cm?



a) $r^2 = 1{,}5^2 + 3{,}6^2 \rightarrow r^2 = 2{,}25 + 12{,}96 \rightarrow r^2 = 15{,}21$

$r = \sqrt{15{,}21} \rightarrow r = 3{,}9$ cm

b)

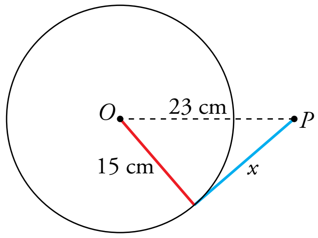


$3{,}9^2 = x^2 + 2{,}9^2 \rightarrow 15{,}21 = x^2 + 8{,}41 \rightarrow x^2 = 15{,}21 - 8{,}41$

$x = \sqrt{6{,}8} \rightarrow x = 2{,}6$ cm

$\overline{AB} = 2 \cdot 2{,}6 = 5{,}2$ cm

14. **Un punto *P* está a 23 cm de una circunferencia de 30 cm de diámetro. Calcula la longitud del segmento tangente desde *P* a la circunferencia.**



$23^2 = 15^2 + x^2 \rightarrow 529 = 225 + x^2 \rightarrow x^2 = 529 - 225$

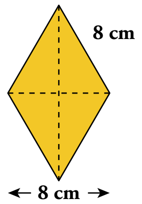
$x = \sqrt{304} \rightarrow x = 17{,}4$ cm

Solución: El segmento tangente mide 17,4 cm.

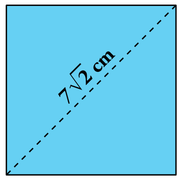
Áreas

15. **Halla el área de las figuras coloreadas:**

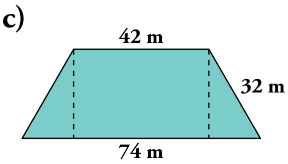
a)



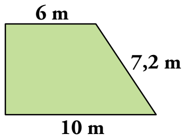
b)



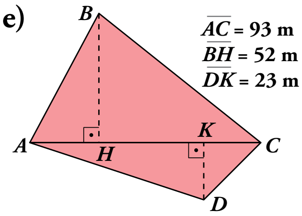
c)



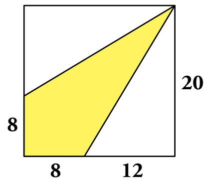
d)



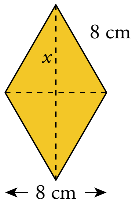
e)



f)



a)



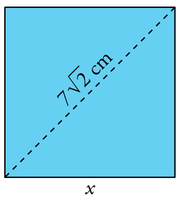
$8^2 = 4^2 + x^2 \rightarrow 64 = 16 + x^2 \rightarrow x^2 = 64 - 16$

$x = \sqrt{48} \rightarrow x = 4\sqrt{3}$ cm $\approx 6{,}9$ cm

$D = 2 \cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$ cm $\approx 13{,}8$ cm

$\text{Área} = \dfrac{8 \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 32\sqrt{3}\ \text{cm}^2 \approx 55{,}4\ \text{cm}^2$

b)

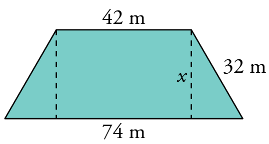


$x^2 + x^2 = \left(7\sqrt{2}\right)^2 \rightarrow 2x^2 = 2 \cdot 49 \rightarrow x^2 = 49$

$x = 7$ cm

$\text{Área} = 7^2 = 49\ \text{cm}^2$

c)

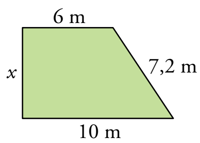


$32^2 = 16^2 + x^2 \rightarrow 1\,024 = 256 + x^2 \rightarrow x^2 = 768$

$x = \sqrt{768} \rightarrow x = 16\sqrt{3}$ m $\approx 27{,}71$ m

$\text{Área} = \dfrac{42 + 74}{2} \cdot 16\sqrt{3} = 928\sqrt{3}\ \text{m} \approx 1\,607{,}3\ \text{m}^2$

d)



$7{,}2^2 = 4^2 + x^2 \rightarrow 51{,}84 = 16 + x^2 \rightarrow x^2 = 35{,}84$

$x = \sqrt{35{,}84} \rightarrow x = 5{,}99$ m

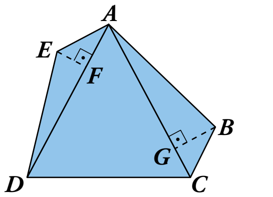
$\text{Área} = \dfrac{10 + 6}{2} \cdot 5{,}99 = 47{,}92\ \text{m}^2$

e) $\text{Área} = \dfrac{93 \cdot 52}{2} + \dfrac{93 \cdot 23}{2} = 2\,418 + 1\,069{,}5 = 3\,487{,}5\ \text{m}^2$

f) $A_{\text{CUADRADO}} = 20^2 = 400\ \text{u}^2$; $A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{20 \cdot 12}{2} = 120\ \text{u}^2$; $\text{Área} = 400 - 2 \cdot 120 = 160\ \text{u}^2$

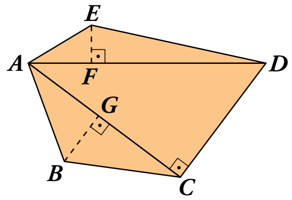
16. **Calcula el área de las figuras coloreadas:**

a)



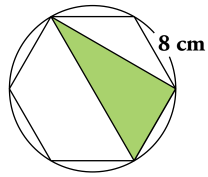
$\overline{AD} = \overline{AC} = 17$ m $\quad \overline{DC} = 16$ m
$\overline{BG} = 4{,}5$ m $\quad \overline{EF} = 3{,}2$ m

b)

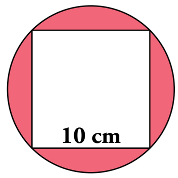


$\overline{BG} = 8{,}4$ m $\quad \overline{AC} = 28$ m
$\overline{CD} = 21$ m $\quad \overline{EF} = 5{,}6$ m

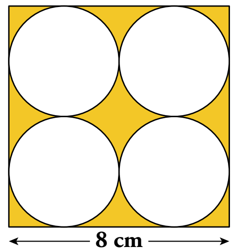
c)



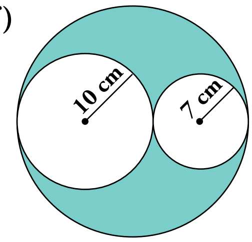
d)



e)



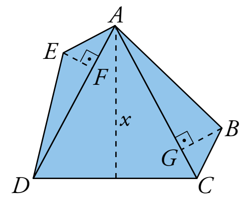
f)



a) $17^2 = x^2 + 8^2 \rightarrow 289 = x^2 + 64 \rightarrow x^2 = 225$

$x = \sqrt{225} \rightarrow x = 15$ m

Calculamos el área como suma de las áreas de los tres triángulos.

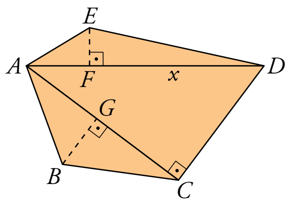


$$\text{Área} = \frac{3{,}2 \cdot 17}{2} + \frac{4{,}5 \cdot 17}{2} + \frac{15 \cdot 16}{2} = 27{,}2 + 38{,}25 + 120 = 185{,}45 \text{ m}^2$$

Área = 185 45 m²

b) Calculamos el área como suma de las áres de los tres triángulos

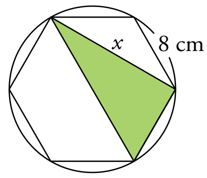
$x^2 = 28^2 + 21^2 \rightarrow x^2 = 1\,225 \rightarrow x = \sqrt{1\,225} \rightarrow x = 35$ m



$$\text{Área} = \frac{35 \cdot 5{,}6}{2} + \frac{8{,}4 \cdot 28}{2} + \frac{28 \cdot 21}{2} = 98 + 117{,}6 + 294 = 509{,}6 \text{ m}^2$$

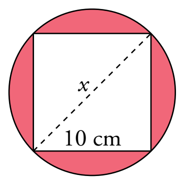
Área = 509,6 m²

c) $16^2 = x^2 + 8^2 \rightarrow 256 = x^2 + 64 \rightarrow x^2 = 192 \rightarrow x = 8\sqrt{3} \approx 13{,}8$ cm



$$\text{Área} = \frac{8 \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 32\sqrt{3} \approx 55{,}4 \text{ cm}^2$$

d) $x^2 = 10^2 + 10^2 \rightarrow x^2 = 200 \rightarrow x = 10\sqrt{2} \approx 14{,}1$ cm



$$r = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \text{ cm} \approx 7{,}07 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \pi \cdot \left(5\sqrt{2}\right)^2 - 10^2 = 50\pi - 100 = 57{,}1 \text{ cm}^2$$

e) Área del cuadrado = $8^2 = 64$ cm²

Área del círculo = $\pi \cdot 2^2 = 4\pi$ cm² $\approx 12{,}56$ cm²

Área = $64 - 4 \cdot 4\pi = 64 - 16\pi = 13{,}73$ cm²

f) Área círculo grande = $\pi \cdot 17^2 = 289\pi$ cm² $\approx 907{,}9$ cm²

Área círculo mediano = $\pi \cdot 10^2 = 100\pi$ cm² $\approx 314{,}2$ cm²

Área círculo pequeño = $\pi \cdot 7^2 = 49\pi$ cm² $\approx 153{,}9$ cm²

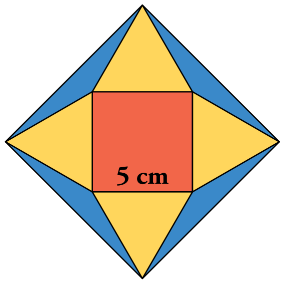
Área total = $289\pi - (100\pi + 49\pi) = 140\pi \approx 439{,}8$ cm²

17. **Calcula:**

a) La superficie de la zona coloreada de rojo.

b) La superficie de la zona coloreada de amarillo.

c) La superficie de la zona coloreada de azul.



a) Área zona roja = $5^2 = 25$ cm^2

b) $x^2 + 2{,}5^2 = 5^2 \rightarrow x^2 = 25 - 6{,}25 \rightarrow x^2 = 18{,}75 \rightarrow x = 4{,}3$ cm

Área de un triángulo $= \dfrac{5 \cdot 4{,}3}{2} = 10{,}75$ cm^2

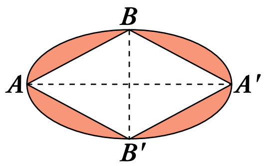
Área zona amarilla = $4 \cdot 10{,}75 = 43$ cm^2

c) Calculamos las diagonales: $5 + 2 \cdot 4{,}3 = 13{,}6$ cm

Área cuadrado grande $= \dfrac{13{,}6 \cdot \dfrac{13{,}6}{2}}{2} \cdot 2 = \dfrac{13{,}6 \cdot 13{,}6}{2} = 92{,}48$ cm^2

Área zona azul = $92{,}48 - (25 + 43) = 24{,}48$ cm^2

18. **Las diagonales del rombo inscrito en la elipse miden 16 cm y 30 cm. Halla el área de la parte coloreada.**



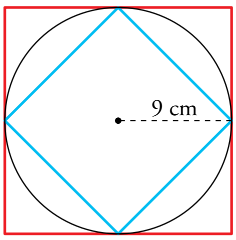
Área de la elipse $= \pi \cdot 8 \cdot 15 = 120\pi$ cm$^2 \approx 377$ cm^2

Área del rombo $= \dfrac{16 \cdot 30}{2} = 240$ cm^2

Área total $= 120\pi - 240 = 136{,}9$ cm^2

19. **En una circunferencia de 56,52 cm de longitud, dibuja el cuadrado circunscrito y el cuadrado inscrito. Calcula el área y el perímetro de cada cuadrado (toma $\pi = 3{,}14$).**

Calculamos el radio: $56{,}52 = 2\pi \cdot r \rightarrow r = \dfrac{56{,}52}{2\pi} \rightarrow r = 9$ cm



Área cuadrado circunscrito $= 18^2 = 324$ cm^2

Perímetro cuadrado circunscrito $= 4 \cdot 18 = 72$ cm

Calculamos el lado del cuadrado inscrito:

$x^2 = 9^2 + 9^2 \rightarrow x^2 = 81 + 81 \rightarrow x^2 = 162 \rightarrow x = \sqrt{162} = 9\sqrt{2} \approx 12{,}7$ cm

Área cuadrado inscrito $= \left(9\sqrt{2}\right)^2 = 162$ cm^2

Perímetro cuadrado inscrito $= 4 \cdot 9\sqrt{2} = 36\sqrt{2} \approx 50{,}9$ cm

20. **Halla, en cada caso, el área y el perímetro de un sector circular de un círculo de 15 cm de radio y cuya amplitud es:**

a) 90° **b) 120°** **c) 72°** **d) 153°**

a) $\text{Área} = \dfrac{\pi \cdot 15^2 \cdot 90°}{360°} = 176{,}7 \text{ cm}^2$

$\text{Perímetro} = \dfrac{2\pi \cdot 15 \cdot 90°}{360°} + 2 \cdot 15 = 53{,}5 \text{ cm}$

b) $\text{Área} = \dfrac{\pi \cdot 15^2 \cdot 120°}{360°} = 235{,}6 \text{ cm}^2$

$\text{Perímetro} = \dfrac{2\pi \cdot 15 \cdot 120°}{360°} + 2 \cdot 15 = 61{,}4 \text{ cm}$

c) $\text{Área} = \dfrac{\pi \cdot 15^2 \cdot 72°}{360°} = 141{,}4 \text{ cm}^2$

$\text{Perímetro} = \dfrac{2\pi \cdot 15 \cdot 72°}{360°} + 2 \cdot 15 = 48{,}8 \text{ cm}$

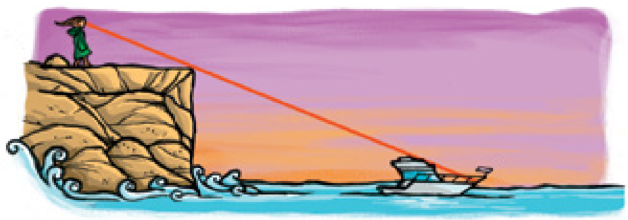
d) $\text{Área} = \dfrac{\pi \cdot 15^2 \cdot 153°}{360°} = 300{,}4 \text{ cm}^2$

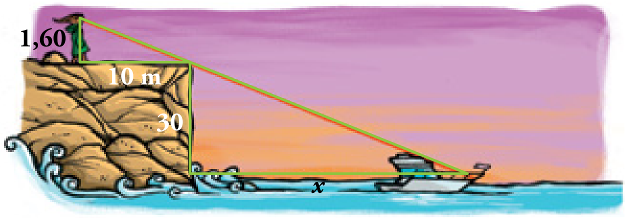
$\text{Perímetro} = \dfrac{2\pi \cdot 15 \cdot 153°}{360°} + 2 \cdot 15 = 70{,}1 \text{ cm}$

Página 153

Piensa y resuelve

21. **Maribel mide 1,60 m de altura y se encuentra sobre un acantilado, a 30 m sobre el nivel del mar. Ve una barca que navega a cierta distancia de la costa y comprueba que, si se aleja más de 10 metros del borde, hacia el interior, deja de ver la barca. ¿A qué distancia se encuentra la embarcación de la base del acantilado?**





Son triángulos semejantes:

$$\frac{30}{1,6} = \frac{x}{10} \rightarrow x = \frac{30 \cdot 10}{1,6} \rightarrow x = 187,5 \text{ m}$$

Solución: La embarcación se encuentra a 187,5 m de la base del acantilado.

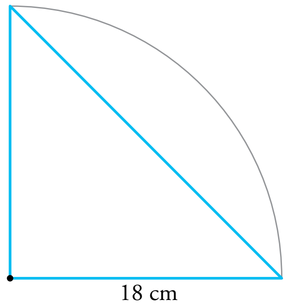
22. **Ejercicio resuelto en el libro del alumno.**

23. **Calcula el área de un segmento circular de 90° de amplitud en un círculo de 18 cm de radio.**

$$A_{\text{SECTOR CIRCULAR}} = \frac{\pi \cdot 18^2 \cdot 90°}{360°} = 254,5 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{18 \cdot 18}{2} = 162 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{SEGMENTO CIRCULAR}} = 254,5 - 162 = 92,5 \text{ cm}^2$$

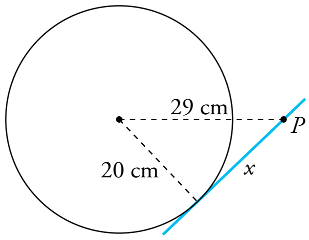


24. **a) Desde un punto P que dista 29 cm del centro de una circunferencia de radio 20 cm, se traza una tangente. Calcula la distancia de P al punto de tangencia.**

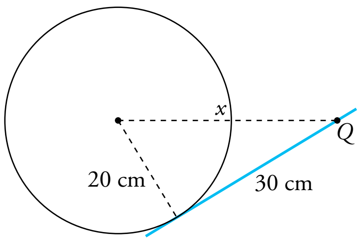
b) Trazamos otra tangente desde otro punto Q, y al medir la distancia de Q al punto de tangencia obtenemos 30 cm. ¿Cuál es la distancia de Q al centro de la circunferencia?

a) $29^2 = 20^2 + x^2 \rightarrow 841 = 400 + x^2 \rightarrow x^2 = 441 \rightarrow$

$\rightarrow x = \sqrt{441} \rightarrow x = 21$ cm



b)

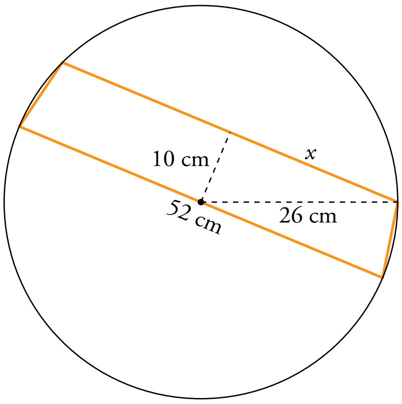


$x^2 = 20^2 + 30^2 \rightarrow x^2 = 400 + 900 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 = 1\,500 \rightarrow x = \sqrt{1\,500} \rightarrow$

$\rightarrow x = 38,7$ cm

25. **En un círculo de 52 cm de diámetro se traza una cuerda a 10 cm del centro. Halla el área del cuadrilátero que se forma uniendo los extremos de la cuerda con los del diámetro paralelo a ella.**



$26^2 = 10^2 + x^2 \to 676 = 100 + x^2 \to x^2 = 576 \to$

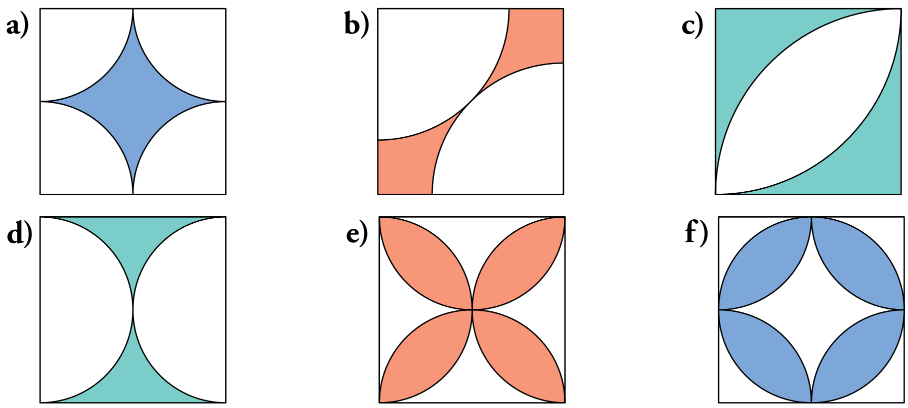
$\to x = \sqrt{576} \to x = 24$ cm

La base menor mide 24 · 2 = 48 cm

$\text{Área} = \dfrac{48 + 52}{2} \cdot 10 = 500 \text{ cm}^2$

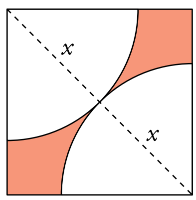
Solución: El área del cuadrilátero es de 500 cm^2.

26. **Calcula el área de la parte coloreada de cada uno de estos cuadrados de 8 cm de lado:**



a) $\text{Área} = 8^2 - \pi \cdot 4^2 = 13{,}7 \text{ cm}^2$

b) $(2x)^2 = 8^2 + 8^2 \to 4x^2 = 128 \to x^2 = 32 \to x = 4\sqrt{2} \approx 5{,}7$ cm



$\text{Área cuadrado} = 8^2 = 64 \text{ cm}^2$

$\text{Área semicírculo} = \dfrac{1}{2}\pi \cdot \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 16\pi \approx 50{,}3 \text{ cm}^2$

$\text{Área} = 64 - 50{,}3 = 13{,}7 \text{ cm}^2$

c) $\text{Área de un trozo azul} = 8^2 - \dfrac{1}{4}\pi \cdot 8^2 = 64 - 16\pi = 13{,}7 \text{ cm}^2$

$\text{Área zona azul} = 2 \cdot 13{,}7 = 27{,}4 \text{ cm}^2$

d) $\text{Área} = 8^2 - \pi \cdot 4^2 = 64 - 16\pi = 13{,}7 \text{ cm}^2$

e) Es el área del cuadrado restándole dos veces el área calculado en d)

$\text{Área} = 8^2 - 2 \cdot 13{,}7 = 64 - 27{,}4 = 36{,}6 \text{ cm}^2$

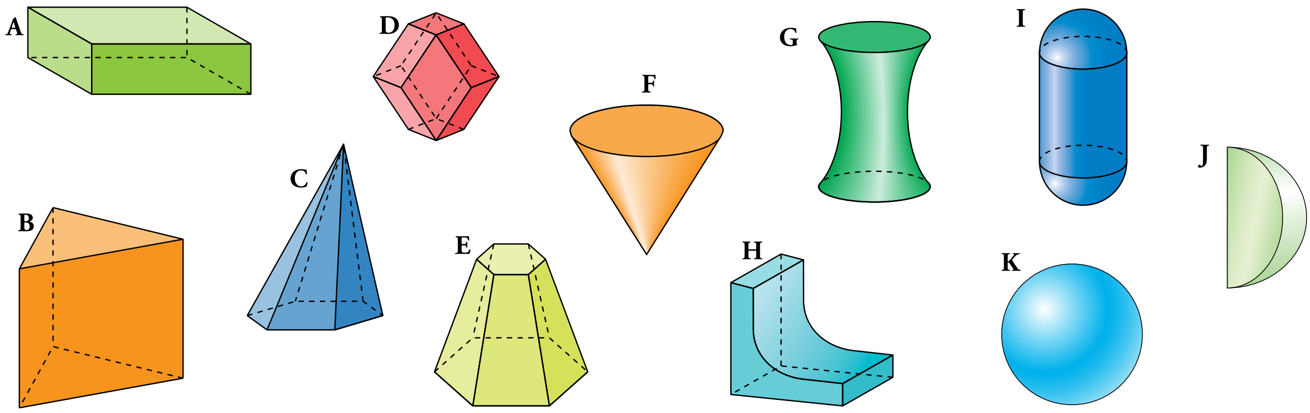
f) El área es igual al del apartado e). Son los mismo pétalos pero girados.

$\text{Área} = 36{,}6 \text{ cm}^2$

1 Poliedros y cuerpos de revolución

Página 155

1. Describe cada uno de los cinco poliedros de abajo diciendo cómo son sus caras (por ejemplo, el C tiene siete caras, seis de ellas triángulos y una hexágono), cuántas aristas y cuántos vértices tiene.



— A tiene 6 caras rectangulares, 12 aristas y 8 vértices.

— B tiene 5 caras. Dos de ellas, las bases, son triángulos y las tres caras laterales son rectángulos. Tiene 9 aristas y 6 vértices.

— C tiene siete caras, seis de ellas son triángulos y una, un hexágono. Tiene 12 aristas y 7 vértices.

— D tiene 12 caras. Dos de ellas son cuadrados, dos, rombos y las cuatro restantes son rectángulos. Tiene 24 aristas y 14 vértices.

— E tiene 8 caras. Dos de ellas, las bases, son hexágonos regulares, y las otras seis son trapecios isósceles. Tiene 18 aristas y 12 vértices.

— F tiene 2 caras. Una de ellas es un círculo que actúa como base, la otra, una cara curva. Tiene un único vértice y una arista. Es un cuerpo de revolución.

— G tiene 3 caras. Dos de ellas son círculos y actúa como bases, la tercera es una cara curva. No tiene vértices y tiene 2 aristas. Es un cuerpo de revolución.

— H tiene 7 caras. Cuatro de ellas son rectángulos. Tiene 15 aristas y 10 vértices.

— I tiene 3 caras curvas, 2 aristas y ningún vértice.

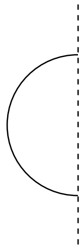
— J tiene 3 caras. Dos de ellas planas y una curva. Tiene 3 aristas y 2 vértices.

— K tiene una única cara circular. No tiene ni vértices ni aristas.

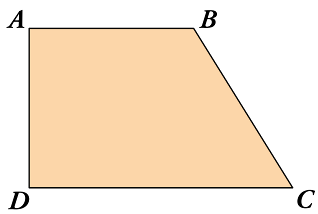
2. **Dibuja cómo se obtienen los cuerpos I y K haciendo girar una figura plana alrededor de un eje.**

I

K



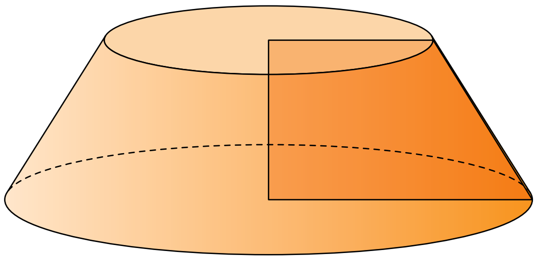
3.



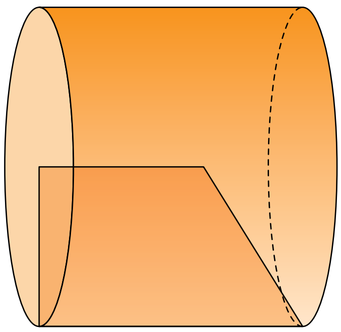
Dibuja el cuerpo de revolución que se obtiene haciendo girar este trapecio alrededor de:

a) ***AD*** **b)** ***AB*** **c)** ***CD***

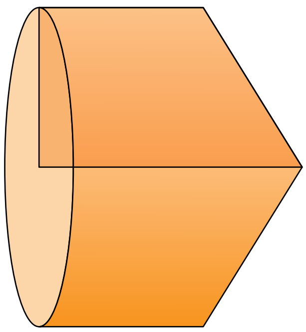
a) *AD*



b) *AB*



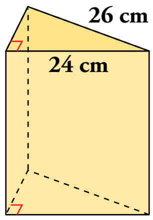
c) *CD*

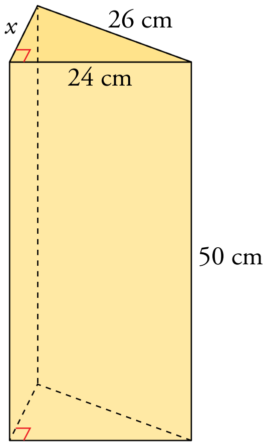


2 Prismas

Página 157

1. **La base de un prisma recto es un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 26 cm, y uno de sus catetos, 24 cm. La altura del prisma es 50 cm. Halla el área total y el volumen del prisma.**





Calculamos la altura de la base:

$x^2 + 24^2 = 26^2 \rightarrow x^2 + 576 = 676 \rightarrow x^2 = 100 \rightarrow x = 10$ cm

PERÍMETRO DE LA BASE: $P = 10 + 24 + 26 = 60$ cm

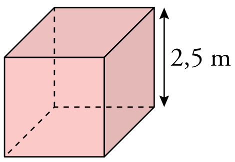
ÁREA LATERAL: $A_{LAT} = P \cdot h = 60 \cdot 50 = 3\,000 \text{ cm}^2$

ÁREA DE LA BASE: $A_{BASE} = \dfrac{10 \cdot 24}{2} = 120 \text{ cm}^2$

ÁREA TOTAL: $A_{TOT} = A_{LAT} + 2A_{BASE} = 3\,000 + 2 \cdot 120 = 3\,240 \text{ cm}^2$

VOLUMEN: $V = A_{BASE} \cdot h = 120 \cdot 50 = 6\,000 \text{ cm}^3$

2. **Halla el área total y el volumen de un cubo de 2,5 m de arista.**



ÁREA DE UNA CARA: $l^2 = 2{,}5^2 = 6{,}25 \text{ m}^2$

ÁREA TOTAL: $A_{TOT} = 6{,}25 \cdot 6 = 37{,}5 \text{ m}^2$

VOLUMEN: $V = l^3 = 2{,}5^3 = 15{,}625 \text{ m}^3$

3. **Las dimensiones de un ortoedro son 4 cm, 5 cm y 8 cm.**

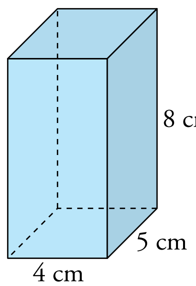
a) Dibújalo en tu cuaderno.

b) Dibuja su desarrollo. Escribe, al lado de cada arista, su longitud.

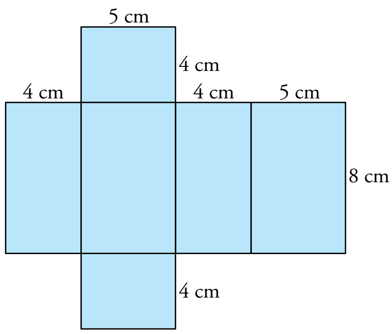
c) Halla su área.

d) Halla su volumen.

a)



b)



c) $A_{LAT} = P \cdot h = (2 \cdot 4 + 2 \cdot 5) \cdot 8 = 144 \text{ cm}^2$

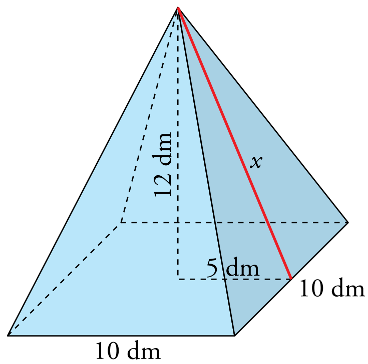
$A_{TOT} = A_{LAT} + 2A_{BASE} = 144 + 2 \cdot (5 \cdot 4) = 184 \text{ cm}^2$

d) $V = A_{BASE} \cdot h = (5 \cdot 4) \cdot 8 = 160 \text{ cm}^3$

3 Pirámides

Página 159

1. La base de una pirámide regular es un cuadrado de 10 dm de lado. Su altura, 12 dm. Halla su área y su volumen.



Calculamos la apotema de la pirámide:

$x^2 = 5^2 + 12^2 \rightarrow x^2 = 25 + 144 \rightarrow x^2 = 169 \rightarrow x = \sqrt{169} \rightarrow x = 13$ dm

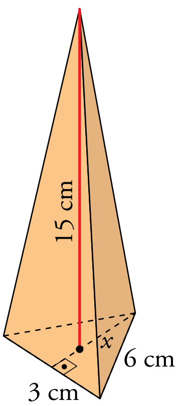
ÁREA DE UNA CARA: $\dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{10 \cdot 13}{2} = 65 \text{ dm}^2$

ÁREA DE LA BASE: $A_{BASE} = l^2 = 10^2 = 100 \text{ dm}^2$

ÁREA TOTAL: $A_{TOT} = 100 + 4 \cdot 65 = 360 \text{ dm}^2$

VOLUMEN: $V = \dfrac{1}{3} \cdot A_{BASE} \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot 100 \cdot 12 = \dfrac{1}{3} \cdot 1\,200 = 400 \text{ dm}^3$

2. Un triángulo equilátero de 6 cm de lado es la base de una pirámide regular cuya altura es 15 cm. Halla su área y su volumen.



Calculamos la altura del triángulo equilátero:

$6^2 = x^2 + 3^2 \rightarrow 36 = x^2 + 9 \rightarrow x^2 = 36 - 9 \rightarrow x^2 = 27 \rightarrow$

$\rightarrow x = \sqrt{27} \rightarrow x = 5{,}2$ cm

$A_{BASE} = \dfrac{\text{base} \cdot h}{2} = \dfrac{5{,}2 \cdot 6}{2} \approx 15{,}6 \text{ cm}^2$

Calculamos la apotema de la pirámide:

El pie de la altura cae a $\dfrac{1}{3}$ de la altura de la base $\rightarrow \dfrac{1}{3} \cdot 50{,}2 = 1{,}73$ cm

$a^2 = 15^2 + (1{,}73)^2 \rightarrow a^2 \approx 225 + 3 \rightarrow a^2 \approx 228 \rightarrow a = \sqrt{228} \rightarrow$

$\rightarrow a \approx 15{,}1$ cm

ÁREA LATERAL: $A_{LAT} = \dfrac{\text{Perímetro de la base} \cdot a}{2} = \dfrac{3 \cdot 6 \cdot 15{,}1}{2} = 135{,}9 \text{ cm}^2$

ÁREA TOTAL: $A_{TOT} = A_{BASE} + A_{LAT} = 15{,}6 + 135{,}9 = 151{,}5 \text{ cm}^2$

VOLUMEN: $V = \dfrac{1}{3} \cdot A_{BASE} \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot 15{,}6 \cdot 15 = 78 \text{ cm}^3$

4 Poliedros regulares

Página 160

1. Haz una tabla en tu cuaderno en la que aparezcan el número de caras, vértices y aristas de los cinco poliedros regulares.

	TETR.	CUBO	OCT.	DODEC.	ICOS.
C					
V					
A					

a) A partir de la tabla anterior, comprueba que el dodecaedro y el icosaedro cumplen las condiciones necesarias para ser duales.

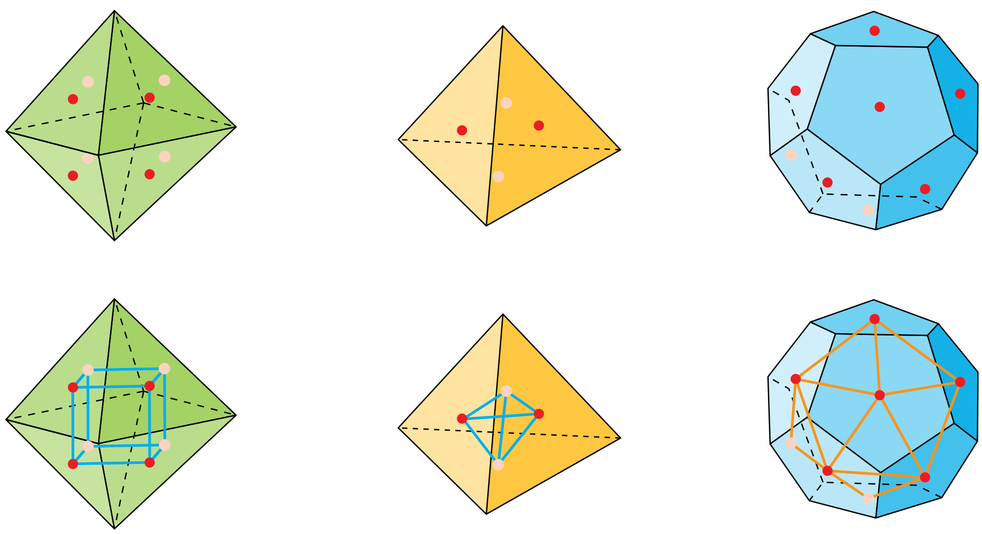
b) Comprueba, también, que el tetraedro cumple las condiciones para ser dual de sí mismo.

	TETR.	CUBO	OCT.	DODEC.	ICOS.
C	4	4	8	12	20
V	4	8	6	20	12
A	6	12	12	30	30

a) Efectivamente, tienen el mismo número de aristas y, el número de caras de cada uno de ellos, coincide con el de vértices del otro.

b) Obviamente tiene el mismo número de aristas. El número de vértices y caras son iguales.

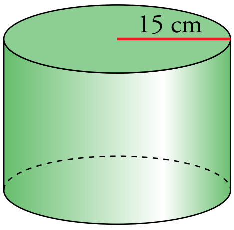
2. Hemos señalado en rojo los centros de las caras "frontales" de estos poliedros, y en rosa, los centros de algunas caras "ocultas". Uniéndolos convenientemente se obtienen los poliedros duales. Hazlo en tu cuaderno.



5 Cilindros

Página 161

1. Halla el área total y el volumen de un cilindro recto del que conocemos sus dimensiones: r = 15 cm y h = 2 dm.



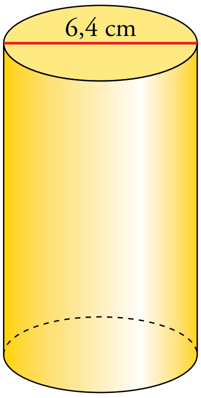
$A_{LAT} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 15 \cdot 20 = 600\pi = 1\,884{,}96 \text{ cm}^2$

$A_{BASE} = \pi r^2 = \pi \cdot 15^2 = 225\pi = 706{,}86 \text{ cm}^2$

$A_{TOTAL} = A_{LAT} + 2A_{BASE} = 1\,884{,}96 + 2 \cdot 706{,}86 = 3\,298{,}68 \text{ cm}^2$

$V = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 15^2 \cdot 20 = 4\,500\pi = 14\,137{,}17 \text{ cm}^2$

2. Un bote cilíndrico de 1/3 de litro tiene un diámetro de 6,4 cm. Halla su altura en milímetros, y la superficie de la lata con la que está construido.



Volumen $= \frac{1}{3}\ l = \frac{1}{3} \text{ dm}^3$

Radio = 3,2 cm = 0,32 dm

$V = \pi r^2 \cdot h \rightarrow \frac{1}{3} = \pi \cdot 0{,}32^2 \cdot x \rightarrow \frac{1}{3} = \pi \cdot 0{,}1024 \cdot x \rightarrow$

$\rightarrow x = \dfrac{1}{3 \cdot \pi \cdot 0{,}1024} \rightarrow x = 1{,}03 \text{ dm} = 103 \text{ mm}$

$A_{LAT} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 3{,}2 \cdot 10{,}3 = 207{,}1 \text{ cm}^2$

$A_{BASE} = \pi r^2 = \pi \cdot 3{,}2^2 = 32{,}17 \text{ cm}^2$

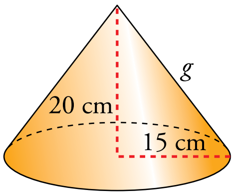
$A_{TOTAL} = A_{LAT} + 2A_{BASE} = 207{,}1 + 2 \cdot 32{,}17 = 271{,}4 \text{ cm}^2$

La altura del bote mide 103 mm y la superficie necesaria para construirlo es 271,4 cm^2.

6 Conos

Página 162

1. **Halla el área total y el volumen de un cono recto del que conocemos sus dimensiones: r = 15 cm y h = 2 dm.**

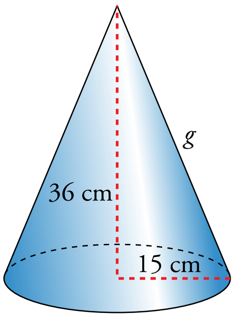


$$g = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25 \text{ cm}$$

$$A_{TOTAL} = \pi rg + \pi r^2 = \pi \cdot 15 \cdot 25 + \pi \cdot 15^2 = 600\pi = 1\,884{,}96 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 15^2 \cdot 20 = 1\,500\pi = 4\,712{,}39 \text{ cm}^3$$

2. **Halla el área total y el volumen de un cucurucho cónico de 36 cm de altura y 30 cm de diámetro de la base.**



$$g = \sqrt{15^2 + 36^2} = \sqrt{1\,521} = 39 \text{ cm}$$

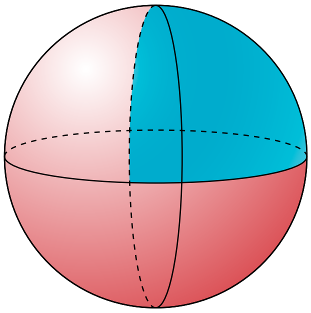
$$A_{TOTAL} = \pi rg + \pi r^2 = \pi \cdot 15 \cdot 39 + \pi \cdot 15^2 = 810\pi = 2\,544{,}69 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 15^2 \cdot 36 = 2\,700\pi = 8\,482{,}3 \text{ cm}^3$$

7 Esferas

Página 163

1. Halla el área total y el volumen de un trozo de esfera que es una cuarta parte de esfera de 1 m de diámetro.



$A_{\text{ESFERA}} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 0{,}5^2 = \pi \approx 3{,}14 \text{ m}^2$

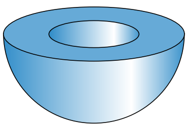
$A_{\text{CÍRCULO}} = \pi r^2 = \pi \cdot 0{,}5^2 = 0{,}25\pi \approx 0{,}79 \text{ m}^2$

$V_{\text{ESFERA}} = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 0{,}5^3 = 0{,}52 \text{ m}^3$

Calculamos el área y el volumen de la cuarta parte de la esfera:

$$A = \frac{A_{\text{ESFERA}}}{4} + 2 \cdot \frac{A_{\text{CÍRCULO}}}{2} = \frac{3{,}14}{4} + 0{,}79 \approx 1{,}58 \text{ m}^2 = 158 \text{ dm}^2$$

$$V = \frac{V_{\text{ESFERA}}}{4} = 0{,}13 \text{ m}^3$$

2. 

Radio exterior = 10 cm
Radio interior = 5 cm

Halla el área total y el volumen.

$A_{\text{ESFERA GRANDE}} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 10^2 = 400\pi \text{ cm}^2 \approx 1\,256{,}64 \text{ cm}^2$

$A_{\text{ESFERA PEQUEÑA}} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi \text{ cm}^2 \approx 314{,}16 \text{ cm}^2$

$A_{\text{CORONA CIRCULAR}} = \pi r_1^2 - \pi r_2^2 = \pi \cdot 10^2 - \pi \cdot 5^2 = 100\pi - 25\pi = 75\pi \approx 235{,}62 \text{ cm}^2$

$$A_{\text{TOTAL}} = \frac{1\,256{,}64}{2} + \frac{314{,}16}{2} + 235{,}62 = 1\,021{,}02 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{4}{3}\pi r_1^3 - \frac{4}{3}\pi r_2^3\right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{4}{3}\pi \cdot 10^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3\right] = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 875 \approx 1\,835{,}6 \text{ cm}^3$$

8 Coordenadas geográficas

Página 165

1. Cuando en el huso 0 son las 8 a.m., ¿qué hora es en el tercer huso al E? ¿Y en el quinto al O?

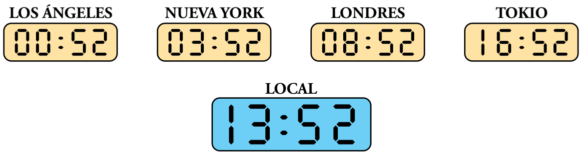
En el tercer huso al E serán 3 h más. Es decir, serán las 11 a.m.

En el quinto huso al O serán 7 h menos: las 3 a.m.

2. Roma está en el primer huso al E y Nueva York, en el quinto al O. Si un avión sale de Roma a las 11 p.m. y el vuelo dura 8 h, ¿cuál será la hora local de llegada a Nueva York?

En Nueva York serán las 13 p.m.

3. En la recepción de una empresa puedes ver los relojes siguientes:



¿Se trata de la oficina de Atenas, Montevideo, Nueva Delhi o Sídney? Razona tu respuesta.

Se trata de Nueva Delhi. Se puede comprobar mirando los husos horarios.

4. En Río de Janeiro (43° O) son las 7 de la mañana. ¿Qué hora es en Hirosima (132° E)?

En Hiroshima son las 4 de la tarde.

5. Si en La Habana (82° O) son las 8 p.m., asigna su hora a cada ciudad en tu cuaderno:

Maputo (Mozambique)	**2 p.m.**
Natal (Brasil)	**3 a.m.**
Astaná (Kazajistán)	**8 p.m.**
Temuco (Chile)	**0 a.m.**
Honolulú (Hawái)	**11 a.m.**
Dakar (Senegal)	**11 p.m.**
Katmandú (Nepal)	**6 a.m.**
Melbourne (Australia)	**7 a.m.**

Maputo (Mozambique) → 3 a.m.

Natal (Brasil) → 11 p.m.

Astaná (Kazajistán) → 6 a.m.

Temuco (Chile) → 8 p.m.

Honolulú (Hawái) → 2 p.m.

Dakar (Senegal) → 0 a.m.

Katmandú (Nepal) → 7 a.m.

Melbourne (Australia) → 11 a.m.

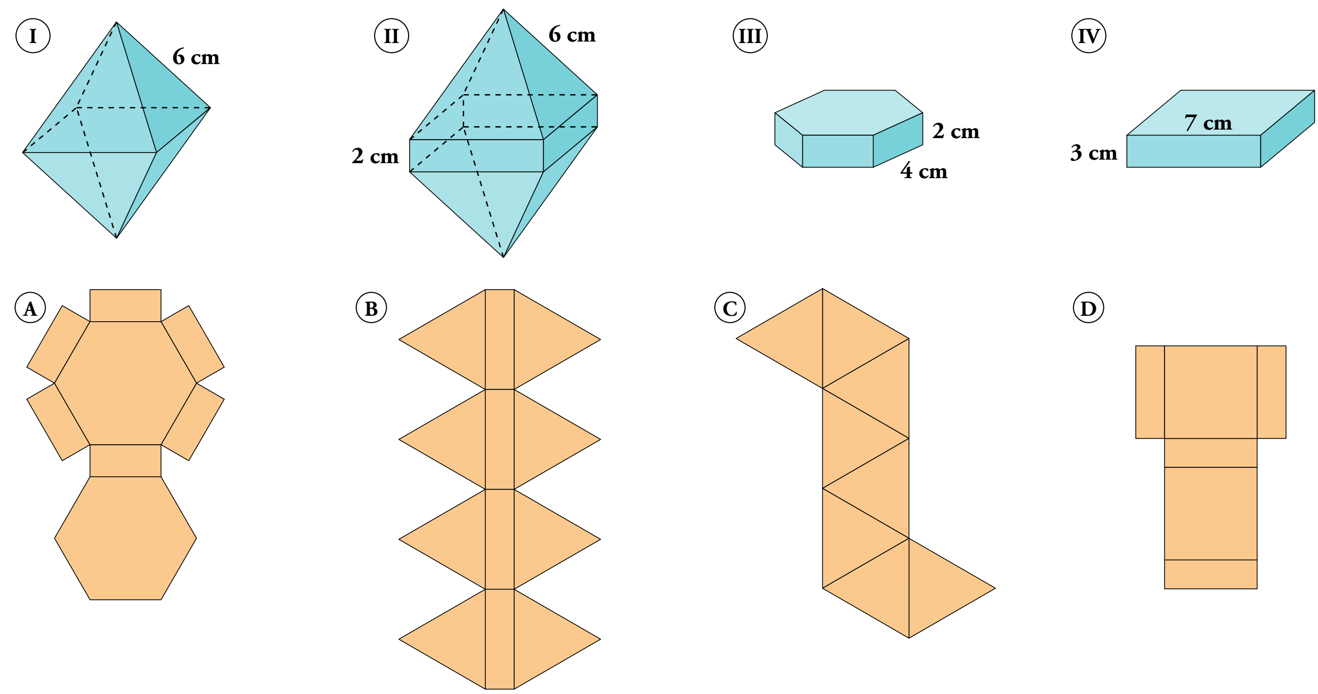
Ejercicios y problemas

Página 166

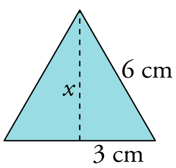
Practica

Desarrollos y áreas

1. **Haz corresponder cada figura con su desarrollo y calcula el área total:**



I → C



$6^2 = x^2 + 3^2 \rightarrow 36 - 9 = x^2 \rightarrow 27 = x^2 \rightarrow x = \sqrt{27} \rightarrow x = 3\sqrt{3} \approx 5,2$ cm

$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{3 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 7,8 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 8 \cdot 7,8 = 62,4 \text{ cm}^2$

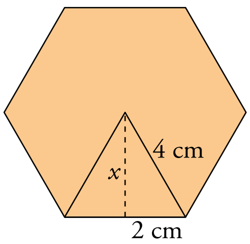
II → B

$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{3 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 7,8 \text{ cm}^2$

$A_{\text{RECTÁNGULO}} = 2 \cdot 6 = 12 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 4 \cdot 12 + 8 \cdot 7,8 = 110,4 \text{ cm}^2$

(III) → (A)



$4^2 = x^2 + 2^2 \rightarrow 16 - 4 = x^2 \rightarrow 12 = x^2 \rightarrow x = \sqrt{12} \rightarrow x = 2\sqrt{3} \approx 3,5$ cm

$A_{\text{HEXÁGONO}} = \dfrac{\text{Perímetro de la base} \cdot \text{apotema}}{2} = \dfrac{24 \cdot 3,5}{2} = 42 \text{ cm}^2$

$A_{\text{RECTÁNGULO}} = 2 \cdot 4 = 8 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 42 + 6 \cdot 8 = 132 \text{ cm}^2$

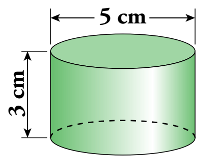
(IV) → (D)

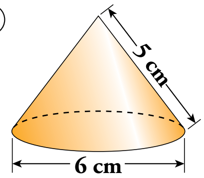
$A_{\text{CUADRADO}} = l^2 = 7^2 = 49 \text{ cm}^2$

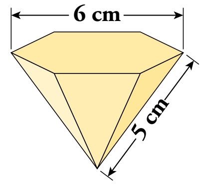
$A_{\text{RECTÁNGULO}} = \textit{base} \cdot \textit{altura} = 3 \cdot 7 = 21 \text{ cm}^2$

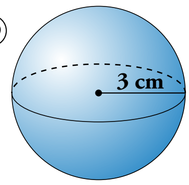
$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 49 + 4 \cdot 21 = 182 \text{ cm}^2$

2. Calcula la superficie total de cada cuerpo:

(A)


(B)


(C)


(D)


(A)

$A_{\text{BASE}} = \pi r^2 = \pi \cdot 2,5^2 = 19,63 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 2,5 \cdot 3 = 15\pi = 47,12 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 19,63 + 47,12 = 86,38 \text{ cm}^2$

(B)

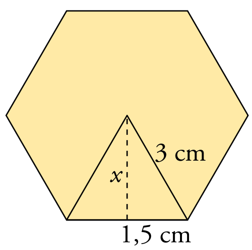
$A_{\text{BASE}} = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = 28,27 \text{ cm}^2$

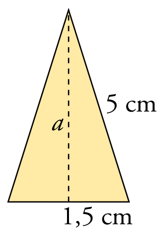
$A_{\text{LATERAL}} = \pi rg = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi = 47,12 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 28,27 + 47,12 = 75,39 \text{ cm}^2$

(C)

Calculamos la apotema de la base:





$3^2 = x^2 + 1,5^2 \rightarrow 9 - 2,25 = x^2 \rightarrow 6,75 = x^2 \rightarrow x = \sqrt{6,75} \rightarrow x = 2,6$ cm

$A_{\text{HEXÁGONO}} = \dfrac{\text{Perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \dfrac{18 \cdot 2,6}{2} = 23,4 \text{ cm}^2$

Calculamos la apotema de la pirámide:

$5^2 = a^2 + 1,5^2 \rightarrow 25 - 2,25 = a^2 \rightarrow 22,75 = a^2 \rightarrow a = \sqrt{22,75} \rightarrow a = 4,77$ cm

$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{3 \cdot 4,77}{2} = 7,16 \text{ cm}^2$

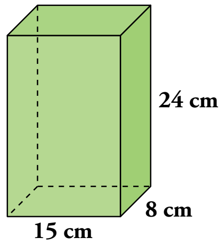
$A_{\text{TOTAL}} = 23,4 + 6 \cdot 7,16 = 66,36 \text{ cm}^2$

(D)

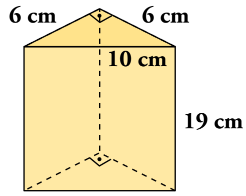
$A_{\text{TOTAL}} = 4\pi r = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi = 113,1 \text{ cm}^2$

3. **Dibuja el desarrollo plano y calcula el área total de los siguientes cuerpos geométricos:**

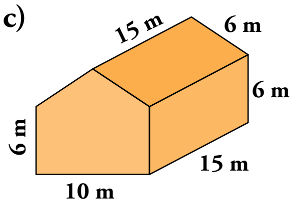
a)



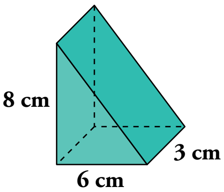
b)



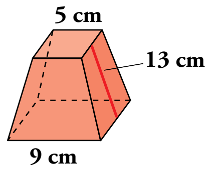
c)



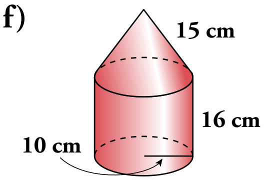
d)



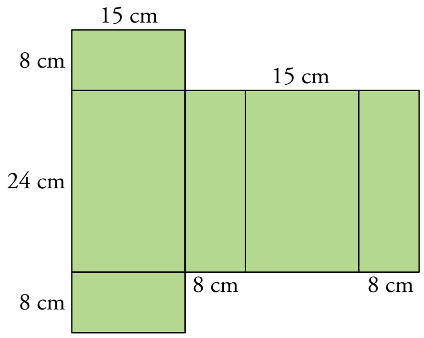
e)



f)



a)

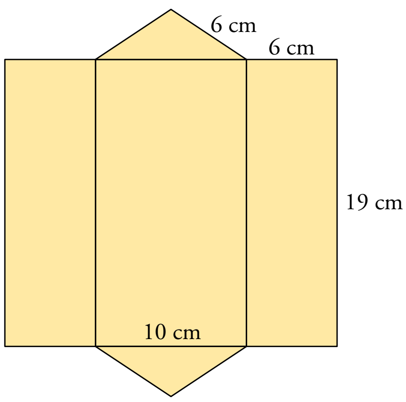


A_{BASE} = base · altura = 15 · 8 = 120 cm^2

$A_{LATERAL}$ = perímetro · altura = (2 · 15 + 2 · 8) · 24 = 1 104 cm^2

A_{TOTAL} = 1 104 + 2 · 120 = 1 344 cm^2

b)

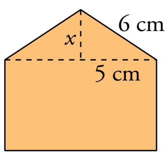


$$A_{BASE} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18 \text{ cm}^2$$

$A_{LATERAL}$ = perímetro de la base · altura = (6 + 6 + 10) · 19 = 418 cm^2

A_{TOTAL} = 418 + 2 · 18 = 454 cm^2

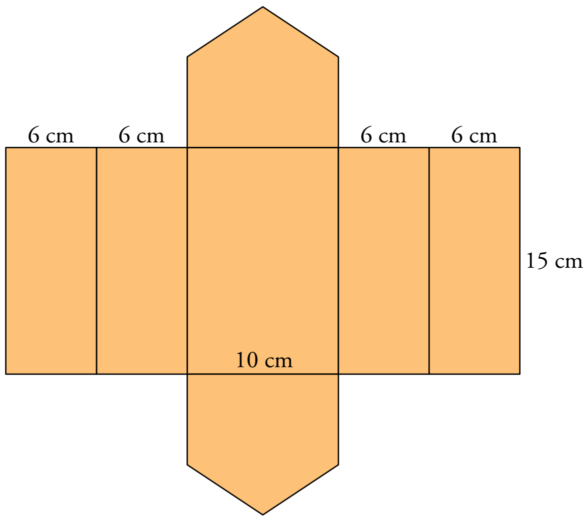
c)



Tomamos como base uno de los pentágonos.

$6^2 = x^2 + 5^2 \rightarrow x^2 = 36 - 25 = 11 \rightarrow$

$\rightarrow x = \sqrt{11} = 3{,}3$ cm



$A_{BASE} = A_{TRIÁNGULO} + A_{RECTÁNGULO} =$

$$= \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} + \text{base} \cdot \text{altura}$$

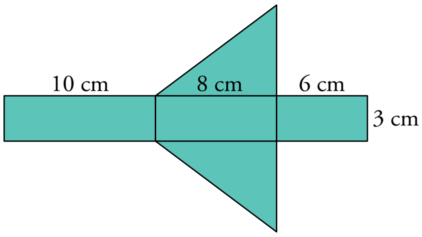
$$A_{BASE} = \frac{10 \cdot 3{,}3}{2} + 6 \cdot 10 = 76{,}5 \text{ cm}^2$$

$A_{LATERAL}$ = perímetro de la base · altura =

= (6 · 4 + 10) · 15 = 510 cm^2

A_{TOTAL} = 510 + 2 · 76,5 = 663 cm^2

d) Calculamos lo que mide la hipotenusa del triángulo:



$x^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100 \;\rightarrow\; x = 10$ cm

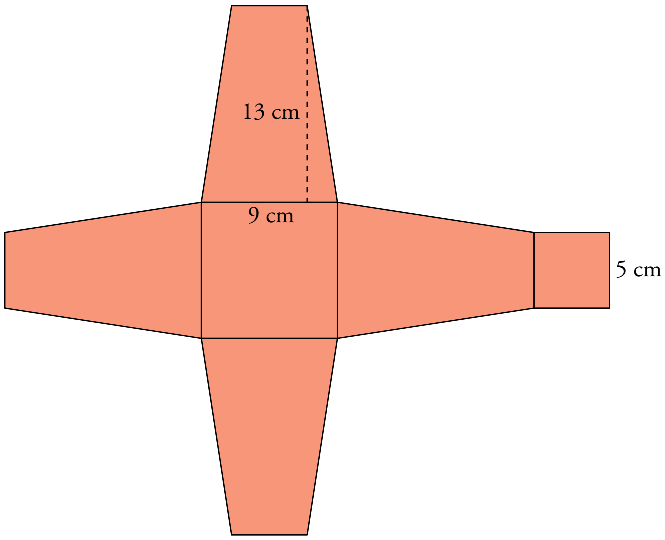
Tomamos como base uno de los triángulos:

$A_{\text{BASE}} = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{8 \cdot 6}{2} = 24 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = \text{perímetro de la base} \cdot \text{altura} = (10 + 8 + 6) \cdot 3 = 72 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 72 + 2 \cdot 24 = 120 \text{ cm}^2$

e) **NOTA:** En el libro del alumno hay una errata. La medida de la base menor son 5 cm, no 5 m.



$A_{\text{TRAPECIO}} = \dfrac{\text{base mayor} + \text{base menor}}{2} \cdot \text{altura} = \dfrac{9 + 5}{2} \cdot 13 = 91 \text{ cm}^2$

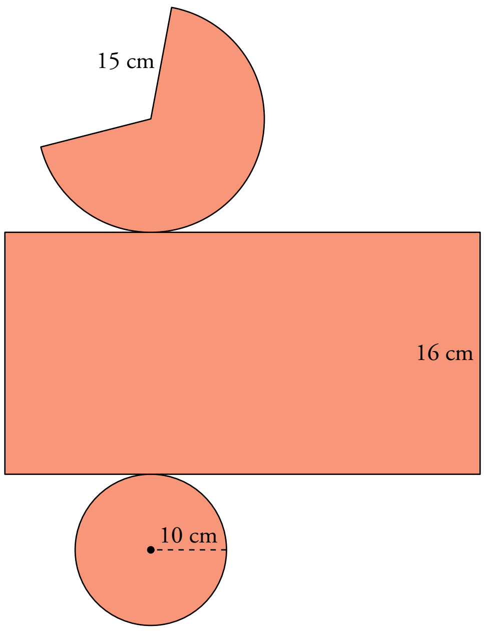
$A_{\text{LATERAL}} = 4 \cdot A_{\text{TRAPECIO}} = 4 \cdot 91 = 364 \text{ cm}^2$

$A_{\text{BASE MAYOR}} = l^2 = 9^2 = 81 \text{ cm}^2$

$A_{\text{BASE MENOR}} = l^2 = 5^2 = 25 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 25 + 81 + 364 = 470 \text{ cm}^2$

f)



$A_{\text{CONO}} = \pi r g = \pi \cdot 10 \cdot 15 = 150\pi = 471{,}24 \text{ cm}^2$

$A_{\text{CÍRCULO}} = \pi r^2 = \pi \cdot 10^2 = 100\pi = 314{,}16 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = 2\pi r h = 2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 16 = 320\pi = 1\,005{,}31 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 471{,}24 + 314{,}16 + 1\,005{,}31 = 1\,790{,}71 \text{ cm}^2$

4. Dibuja los siguientes cuerpos geométricos y calcula su área:

a) Prisma de altura 24 cm y cuya base es un rombo de diagonales 18 cm y 12 cm.

b) Octaedro regular de arista 18 cm.

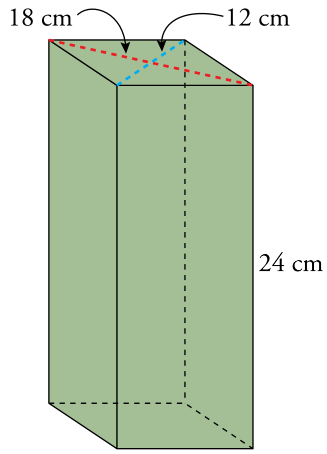
c) Pirámide hexagonal regular de arista lateral 28 cm y arista básica 16 cm.

d) Pirámide de altura 25 cm y base cuadrada de lado 9 cm.

e) Cilindro de altura 17 cm y cuya circunferencia básica mide 44 cm.

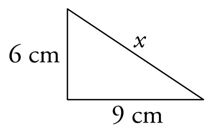
f) Esfera inscrita en un cilindro de altura 1 m.

a)



$$A_{\text{BASE}} = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{18 \cdot 12}{2} = 108 \text{ cm}^2$$

Calculamos la arista de la base:

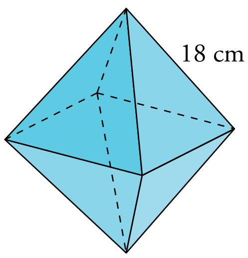


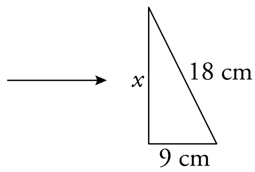
$$x^2 = 6^2 + 9^2 = 36 + 81 = 117 \rightarrow x = \sqrt{117} = 10{,}8 \text{ cm}$$

$$A_{\text{LATERAL}} = \text{perímetro de la base} \cdot \text{altura} = (4 \cdot 10{,}8) \cdot 24 = 1\,036{,}8 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{BASE}} + A_{\text{LATERAL}} = 108 + 1\,036{,}8 = 1\,144{,}8 \text{ cm}^2$$

b) Calculamos la altura de uno de los triángulos:





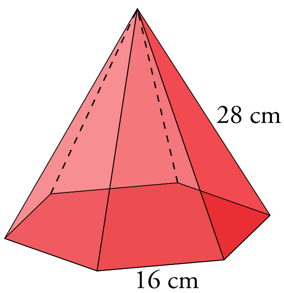
$$18^2 = x^2 + 9^2 \rightarrow x^2 = 324 - 81 \rightarrow x^2 = 243 \rightarrow$$
$$\rightarrow x = \sqrt{243} \rightarrow x = 18{,}6 \text{ cm}$$

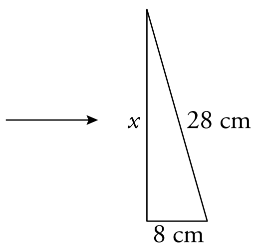
$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{18 \cdot 18{,}6}{2} = 167{,}4 \text{ cm}^2$$

El octaedro está formado por ocho triángulos iguales:

$$A_{\text{TOTAL}} = 8 \cdot 167{,}4 = 1\,339{,}2 \text{ cm}^2$$

c) Calculamos la altura de una cara:



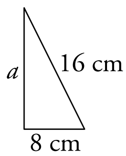


$$28^2 = x^2 + 8^2 \rightarrow x^2 = 784 - 64 \rightarrow x^2 = 720 \rightarrow$$
$$\rightarrow x = \sqrt{720} \rightarrow x = 26{,}8 \text{ cm}$$

$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{16 \cdot 26{,}8}{2} = 214{,}4 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{LATERAL}} = 6 \cdot 214{,}4 = 1\,286{,}4 \text{ cm}^2$$

Calculamos la apotema de la base:

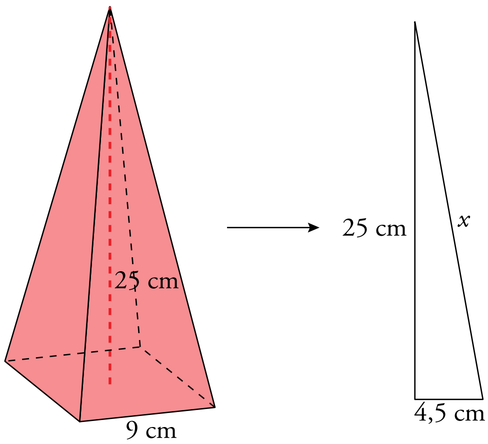


$$16^2 = 8^2 + a^2 \rightarrow a^2 = 256 - 64 = 192 \rightarrow a = \sqrt{192} = 13{,}9 \text{ cm}$$

$$A_{\text{BASE}} = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{(6 \cdot 16) \cdot 13{,}9}{2} = 667{,}2 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{BASE}} + A_{\text{LATERAL}} = 667{,}2 + 1\,286{,}4 = 1\,953{,}6 \text{ cm}^2$$

d)



Calculamos la altura de una cara:

$x^2 = 25^2 + 4{,}5^2 \rightarrow x^2 = 625 + 20{,}25 \rightarrow x^2 = 645{,}25 \rightarrow$

$\rightarrow x = \sqrt{645{,}25} = 25{,}4$ cm

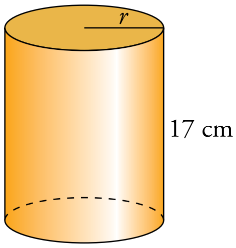
$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{9 \cdot 25{,}4}{2} = 114{,}3 \text{ cm}^2$$

$A_{\text{LATERAL}} = 4 \cdot 114{,}3 = 457{,}2 \text{ cm}^2$

$A_{\text{BASE}} = l^2 = 9^2 = 81 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{BASE}} + A_{\text{LATERAL}} = 81 + 457{,}2 = 538{,}2 \text{ cm}^2$

e)



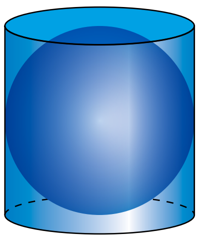
$44 = 2\pi r \rightarrow r = \dfrac{44}{2\pi} = 7$ cm

$A_{\text{LATERAL}} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 7 \cdot 17 = 238\pi = 747{,}7 \text{ cm}^2$

$A_{\text{BASE}} = \pi r^2 = \pi \cdot 7^2 = 49\pi = 153{,}9 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{LATERAL}} + 2A_{\text{BASE}} = 747{,}7 + 2 \cdot 153{,}9 = 1\,055{,}5 \text{ cm}^2$

f)



$r = 0{,}5$ m

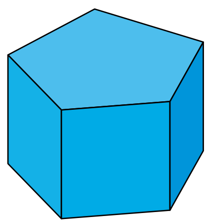
$A_{\text{TOTAL}} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 0{,}5^2 = \pi = 3{,}14 \text{ cm}^2$

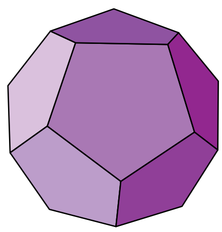
5. Calcula la superficie de:

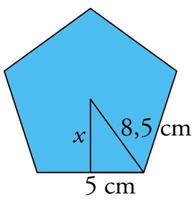
a) Un prisma recto pentagonal regular cuyas aristas miden, todas, 10 cm.

b) Un dodecaedro regular de arista 10 cm.

El radio de la circunferencia circunscrita a un pentágono de lado l es r = 0,85 · l.







El radio del pentágono mide $r = 0{,}85 \cdot 10 = 8{,}5$ cm.

Calculamos la apotema del pentágono:

$8{,}5^2 = 5^2 + x^2 \rightarrow 72{,}25 = 25 + x^2 \rightarrow x^2 = 72{,}25 - 25 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 = 47{,}25 \rightarrow x = \sqrt{47{,}25} \rightarrow x = 6{,}87$ cm

a) $A_{\text{BASE}} = \dfrac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \dfrac{50 \cdot 6{,}87}{2} = 171{,}75 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = \text{perímetro de la base} \cdot \text{altura} = 50 \cdot 10 = 500 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 171{,}75 + 500 = 843{,}5 \text{ cm}^2$

b) $A_{\text{PENTÁGONO}} = \dfrac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \dfrac{50 \cdot 6{,}87}{2} = 171{,}75 \text{ cm}^2$

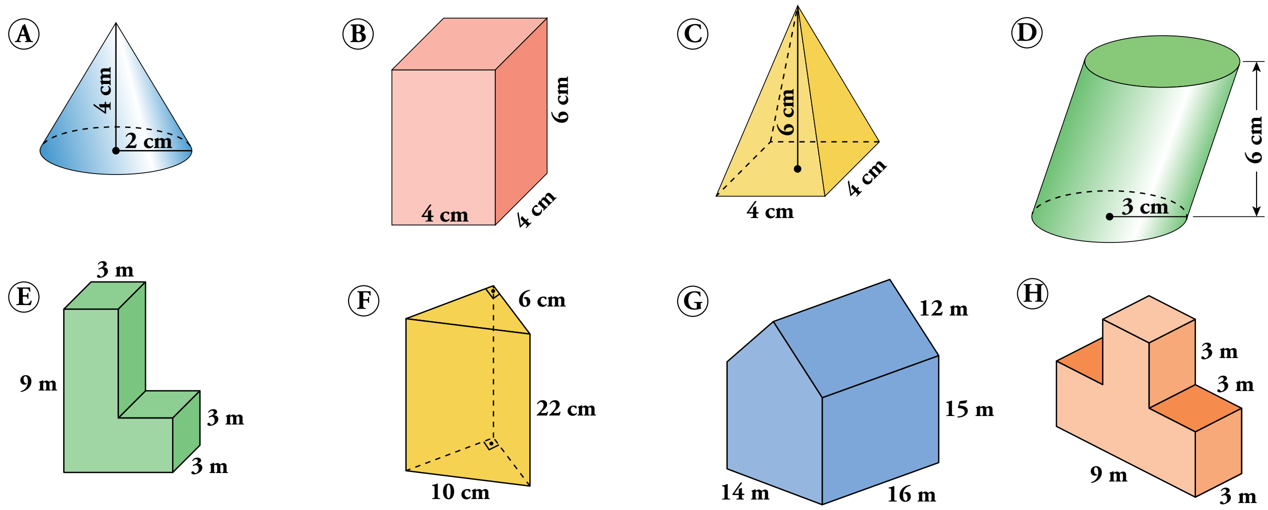
El dodecaedro tiene 12 caras que son pentágonos regulares.

$A_{\text{TOTAL}} = 12 \cdot 171{,}75 = 2\,061 \text{ cm}^2$

Página 167

Volúmenes

6. **Calcula el volumen de estos cuerpos:**



a) $V = \dfrac{A_{BASE} \cdot \text{altura}}{3} = \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \dfrac{\pi \cdot 2^2 \cdot 4}{3} = \dfrac{16\pi}{3} = 16,76 \text{ cm}^3$

b) $V = A_{BASE} \cdot \text{altura} = l^2 \cdot h = 4^2 \cdot 6 = 96 \text{ cm}^3$

c) $V = \dfrac{A_{BASE} \cdot \text{altura}}{3} = \dfrac{l^2 \cdot h}{3} = \dfrac{4^2 \cdot 6}{3} = 32 \text{ cm}^3$

d) $V = A_{BASE} \cdot \text{altura} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 3^2 \cdot 6 = 54\pi = 169{,}65 \text{ cm}^3$

e) $V_1 = A_{BASE} \cdot \text{altura} = a \cdot b \cdot h = 3 \cdot 9 \cdot 6 = 162 \text{ cm}^3$

$V_2 = A_{BASE} \cdot \text{altura} = a \cdot b \cdot h = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 \text{ cm}^3$

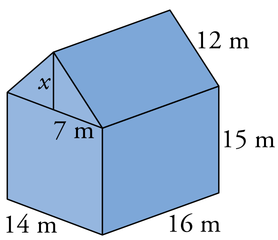
$V = V_1 + V_2 = 162 + 27 = 189 \text{ cm}^3$

f) Calculamos la altura del triángulo:

$10^2 = 6^2 + a^2 \rightarrow 100 = 36 + a^2 \rightarrow a = \sqrt{100 - 36} \rightarrow a = \sqrt{64} \rightarrow a = 8 \text{ cm}$

$V = A_{BASE} \cdot \text{altura} = \dfrac{a \cdot b}{2} \cdot h = \dfrac{8 \cdot 6}{2} \cdot 22 = 528 \text{ cm}^3$

g)



$12^2 = x^2 + 7^2 \rightarrow x^2 = 144 - 49 \rightarrow x = \sqrt{95} \rightarrow x = 9{,}75 \text{ cm}$

$V = \dfrac{14 \cdot 9{,}75}{2} \cdot 16 + 14 \cdot 16 \cdot 15 = 1\,092 + 3\,360 = 4\,452 \text{ cm}^3$

h) $V_1 = A_{BASE} \cdot \text{altura} = a \cdot b \cdot h = 3 \cdot 3 \cdot 9 = 81 \text{ cm}^3$

$V_2 = A_{BASE} \cdot \text{altura} = a \cdot b \cdot h = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 \text{ cm}^3$

$V = V_1 + V_2 = 81 + 27 = 108 \text{ cm}^3$

7. **Calcula el volumen de los siguientes cuerpos geométricos:**

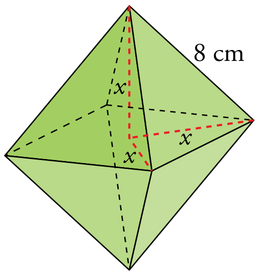
a) Octaedro regular de arista 8 cm.

b) Pirámide hexagonal regular cuya arista lateral mide 17 cm y la arista de la base 10 cm.

c) Semiesfera de radio 15 cm.

d) Cilindro inscrito en un prisma recto de base cuadrada de lado 10 cm y altura 18 cm.

a) Calculamos el volumen dividiendo el octaedro en dos pirámides de base cuadrada.

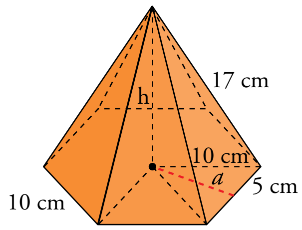


$$x^2 + x^2 = 8^2 \rightarrow 2x^2 = 64 \rightarrow x^2 = 32 \rightarrow x = \sqrt{32} = 5{,}7 \text{ cm}$$

$$V_{\text{PIRÁMIDE}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura} = \frac{1}{3} \cdot l^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 5{,}7 = 121{,}6 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{OCTAEDRO}} = 2 \cdot V_{\text{PIRÁMIDE}} = 2 \cdot 121{,}6 = 243{,}2 \text{ cm}^3$$

b)



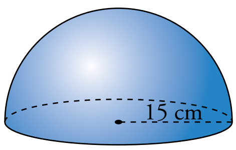
$$h^2 + 10^2 = 17^2 \rightarrow h^2 = 289 - 100 = 189 \rightarrow h = \sqrt{189} = 13{,}7 \text{ cm}$$

$$a^2 + 5^2 = 10^2 \rightarrow a^2 = 100 - 25 = 75 \rightarrow a = \sqrt{75} = 8{,}7 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} \cdot h =$$

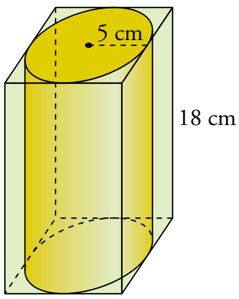
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{(10 \cdot 6) \cdot 8{,}7}{2} \cdot 13{,}7 = 1\,191{,}9 \text{ cm}^3$$

c)



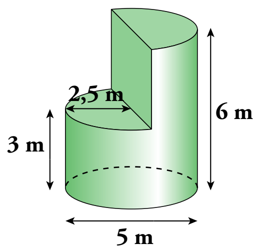
$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 15^3 = 2\,250\pi = 7\,068{,}58 \text{ cm}^3$$

d)



$$V = A_{\text{BASE}} \cdot \textit{altura} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 5^2 \cdot 18 = 450\pi = 1\,413{,}7 \text{ cm}^3$$

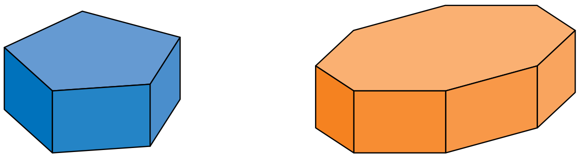
8. **Calcula el volumen de este cuerpo:**

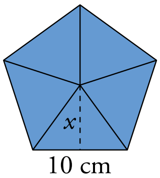


La parte de arriba es medio cilindro.

$$V = \pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 6 - \frac{\pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 3}{2} = 88{,}35 \text{ cm}^3$$

9. **Halla las áreas y los volúmenes de estos prismas regulares. En ambos, la arista básica mide 10 cm, y la altura, 8 cm.**





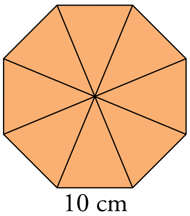
$x^2 = 10^2 - 5^2 = 75 \rightarrow x = 8{,}66$ cm

$$A_{\text{BASE}} = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{10 \cdot 5 \cdot 8{,}66}{2} = 216{,}5 \text{ cm}^2$$

$A_{\text{LATERAL}} = P \cdot h = 5 \cdot 10 \cdot 8 = 400 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot A_{\text{BASE}} + A_{\text{LATERAL}} = 2 \cdot 216{,}5 + 400 = 833 \text{ cm}^2$

$V = A_{\text{BASE}} \cdot h = 216{,}5 \cdot 8 = 1\,732 \text{ cm}^3$



En este caso el apotema de este prisma es el mismo que el anterior.

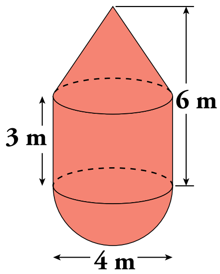
$$A_{\text{BASE}} = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{8 \cdot 10 \cdot 8{,}66}{2} = 346{,}4 \text{ cm}^2$$

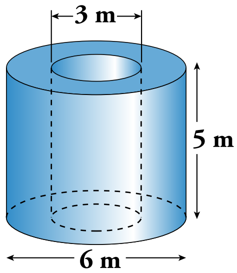
$A_{\text{LATERAL}} = P \cdot h = 8 \cdot 10 \cdot 8 = 640 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot A_{\text{BASE}} + A_{\text{LATERAL}} = 2 \cdot 346{,}4 + 640 = 1\,332{,}8 \text{ cm}^2$

$V = A_{\text{BASE}} \cdot h = 346{,}4 \cdot 8 = 2\,771{,}2 \text{ cm}^3$

10. **Calcula el volumen de estos cuerpos:**





$$V = V_{\text{CONO}} + V_{\text{CILINDRO}} + \frac{V_{\text{ESFERA}}}{2}$$

$$V_{\text{CONO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 3 \approx 12{,}57 \text{ m}^3$$

$V_{\text{CILINDRO}} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot 3 \approx 37{,}7 \text{ m}^3$

$$V_{\text{ESFERA}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 \approx 33{,}51 \text{ m}^3$$

$$V = 12{,}57 + 37{,}7 + \frac{33{,}51}{2} \approx 67{,}025 \text{ m}^3$$

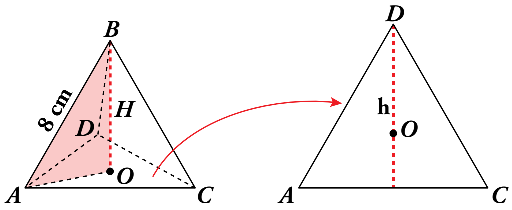
$V = V_{\text{CILINDRO GRANDE}} - V_{\text{CILINDRO PEQUEÑO}}$

$V_{\text{CILINDRO GRANDE}} = \pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 5 = 141{,}37 \text{ m}^3$

$V_{\text{CILINDRO PEQUEÑO}} = \pi r^2 h = \pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 5 = 35{,}34 \text{ m}^3$

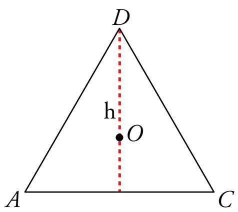
$V = 141{,}37 + 35{,}34 = 176{,}71 \text{ m}^3$

11. **Halla el área y el volumen de este tetraedro regular:**



Para hallar la altura H, recuerda que $\overline{AO} = \frac{2}{3}h$, donde h es la altura de una cara.

Calculamos lo que mide la altura h:



$$h^2 = 8^2 - 4^2 = 48 \rightarrow h = 6{,}93 \text{ cm}$$

$$A_{\text{BASE}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 27{,}72 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TOTAL}} = 4 \cdot A_{\text{BASE}} = 110{,}88 \text{ cm}^2$$

Calculamos lo que mide la altura H del tetraedro:

$$H^2 = 8^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot 6{,}93\right)^2 = 42{,}66 \rightarrow H = 6{,}53 \text{ cm}$$

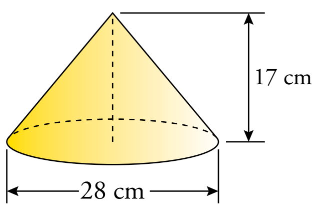
$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{BASE}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 27{,}72 \cdot 6{,}53 = 60{,}34 \text{ cm}^3$$

12. **Hacemos girar un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 14 cm y 17 cm alrededor de cada uno de ellos, obteniendo así dos conos distintos.**

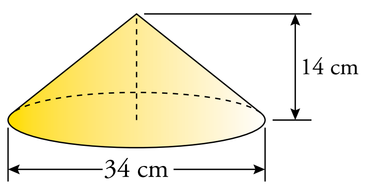
a) ¿Cuál de ellos tiene más volumen?

b) ¿Qué porcentaje de volumen tiene más uno que otro?

a)



$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 14^2 \cdot 17 = 3\,489{,}26 \text{ cm}^3$$

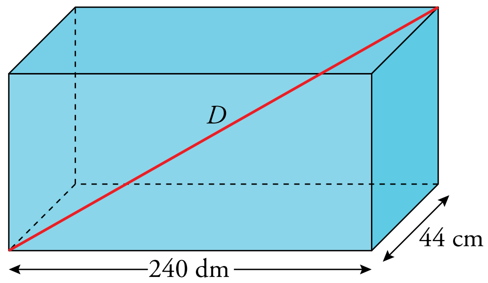


$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = 4\,236{,}96 \text{ cm}^3$$

El cono que tiene radio 17 cm es el que tiene más volumen.

b) El cono que tiene más volumen tiene aproximadamente un 21 % más de volumen que el otro.

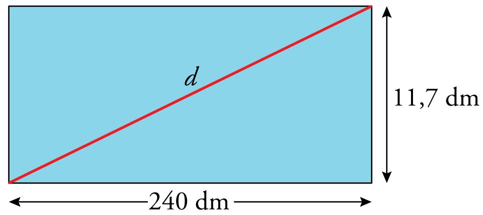
13. **La base de un ortoedro tiene dimensiones 240 cm × 44 cm. Su volumen es 1 235,52 dm^3. Calcula las diagonales de sus caras y la diagonal principal.**



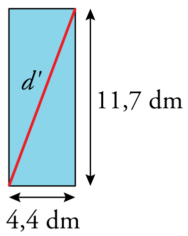
240 cm = 24 dm

44 cm = 4,4 dm

$V = A_{\text{BASE}} \cdot h \;\rightarrow\; 1\,235{,}52 = 24 \cdot 4{,}4 \cdot h \;\rightarrow\; h = 11{,}7$ dm



$d^2 = 11{,}7^2 + 24^2 \;\rightarrow\; d = 26{,}7$ dm



$d'^2 = 4{,}4^2 + 11{,}7^2 \;\rightarrow\; d' = 12{,}5$ dm

$D = 24^2 + 4{,}4^2 + 11{,}7^2 \;\rightarrow\; D = 27{,}06$ dm

Página 168

Coordenadas geográficas

14. **El metro, unidad de medida de longitud, se definía antiguamente como *la diezmillonésima parte de un cuadrante de meridiano terrestre*. Es decir, un meridiano terrestre tiene 40 000 000 de metros. Halla:**

a) El radio de la Tierra en kilómetros.

b) Su superficie en kilómetros cuadrados.

c) Su volumen en kilómetros cúbicos.

40 000 000 m = 40 000 km

a) $2\pi r = 40\,000 \;\to\; r = \dfrac{40\,000}{2\pi} \approx 6\,366{,}2$ km

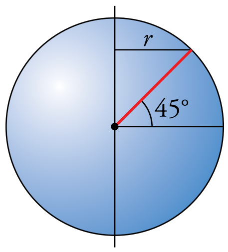
b) $S = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 6\,366{,}2^2 = 509\,296\,182$ km^2

c) $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6\,366{,}2^3 = 1{,}081 \cdot 10^{12}$ km^3

15. **Ejercicio resuelto.**

Ejercicio resuelto en el libro del alumno.

16. **Calcula, en kilómetros, la medida del paralelo terrestre de latitud 45° N.**



$\cos 45° = \dfrac{r}{R_T} \;\to\; \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{r}{R_T}$

$r = R_T \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 6\,371 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 4\,504{,}98$ km

$L = 2 \cdot \pi \cdot 4\,504{,}98 = 28\,305{,}61$ km

17. **Un barco va de un punto *A*, situado en las costas de África de 30° latitud norte y 10° longitud oeste, a otro *B*, en las costas de América de 30° latitud norte y 80° longitud oeste, siguiendo el paralelo común.**

a) ¿Qué distancia ha recorrido?

b) ¿Qué distancia recorrería si la diferencia de longitudes de los dos puntos fuera de 180°?

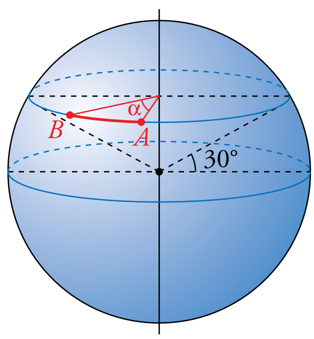
c) ¿Qué distancia recorrería en este último caso si pudiera navegar de un punto a otro siguiendo un arco de círculo máximo?

a) Calculamos el radio del paralelo que tienen en común:

$\cos 30° = \dfrac{r}{R_T} \;\to\; r = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6\,366{,}2 = 5\,513{,}3$ km

El ángulo entre A y B es 80° – 10° = 70°

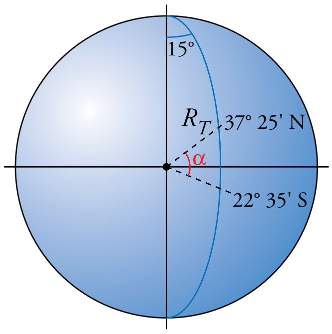
$Dist = \dfrac{2\pi \cdot r \cdot \alpha}{360°} = \dfrac{2\pi \cdot 5\,513{,}3 \cdot 70°}{360°} = 6732{,}77$ km



b) $Dist = \dfrac{2\pi \cdot r \cdot \alpha}{360°} = \dfrac{2\pi \cdot 5\,513,3 \cdot 180°}{360°} = 17\,317,4$ km

c) $Dist = 2\pi \cdot r = 2\pi \cdot 5\,513,3 = 34\,641,1$ km

18. **Dos ciudades tienen la misma longitud, 15° E, y sus latitudes son 37° 25' N y 22° 35' S. ¿Cuál es la distancia entre ellas?**



Calculemos los grados que separan los paralelos donde se encuentran las dos ciudades:

$\alpha = 37°25' + 22°35' = 59°60' = 60°$

$Dist = \dfrac{2\pi \cdot R_T \cdot \alpha}{360°} = \dfrac{2\pi \cdot 6\,366,2 \cdot 60°}{360°} = 6\,666,67$ km

19. **La "milla marina" es la distancia entre dos puntos del ecuador cuya diferencia de longitud es 1'. Calcula la longitud de una "milla marina".**

$\alpha = 1' = \dfrac{1}{60} = 0,017°$

$L = \dfrac{2\pi \cdot R_T \cdot \alpha}{360°} = \dfrac{2\pi \cdot 6\,366,2 \cdot 0,017°}{360°} = 1,852$ km

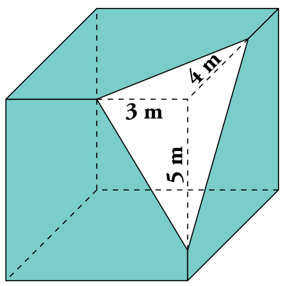
Piensa y resuelve

20. **Observa que al seccionar un cubo como indica la figura, se obtiene de la esquina cortada una pirámide triangular.**

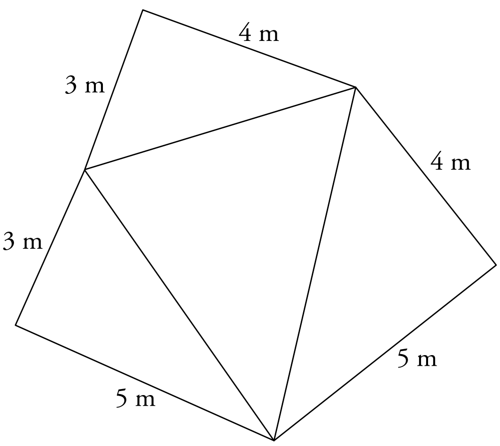
a) Dibuja el desarrollo de dicha pirámide.

b) Calcula su superficie lateral considerando la sección como base.

c) Calcula su volumen (apóyala sobre uno de los triángulos rectángulos).



a)



b) $A_{LATERAL} = \dfrac{3 \cdot 5}{2} + \dfrac{3 \cdot 4}{2} + \dfrac{4 \cdot 5}{2} = \dfrac{47}{2} = 23,5 \text{ cm}^2$

c) $V = \dfrac{A_{BASE} \cdot \text{altura}}{3} = \dfrac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3} = 20 \text{ cm}^3$

21. **Un dependiente envuelve una caja de zapatos de 30 cm de larga, 18 cm de ancha y 10 cm de alta con un trozo de papel, de forma que un 15 % del envoltorio queda solapado sobre sí mismo. ¿Qué cantidad de papel ha utilizado?**

Calculamos el área total de la caja de zapatos:

$A_{\text{BASE}} = 30 \cdot 18 = 540 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = \text{perímetro de la base} \cdot \text{altura} = (2 \cdot 30 + 2 \cdot 18) \cdot 10 = 960 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot A_{\text{BASE}} + A_{\text{LATERAL}} = 2 \cdot 540 + 960 = 2\,040 \text{ cm}^2$

Habrá utilizado un 15 % más de la superficie de la caja $\rightarrow$ $2\,040 \cdot 1{,}15 = 2\,346 \text{ cm}^2$

Ha utilizado $2\,346 \text{ cm}^2$ de papel para envolverlo.

22. **Una empresa de carburantes tiene cuatro tanques esféricos de 20 m de diámetro y seis tanques cilíndricos de 20 m de altura y 10 m de radio en la base.**

Para evitar la corrosión, se contrata a un equipo de operarios que cobra, por pintar los depósitos, 12 €/m². Calcula el coste total de la operación.

$A_{\text{ESFERA}} = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 10^2 = 400\pi = 1\,256{,}6 \text{ m}^2$

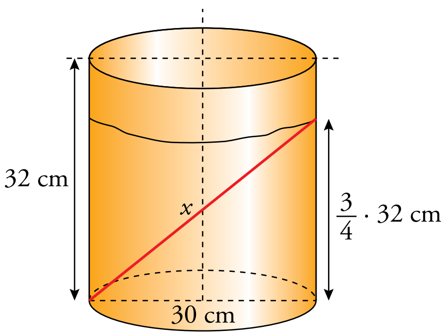
$A_{\text{CILINDRO}} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 10^2 + 2\pi \cdot 10 \cdot 20 = 600\pi = 1\,884{,}96 \text{ m}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 4 \cdot 1\,256{,}6 + 6 \cdot 1\,884{,}96 = 16\,336{,}16 \text{ m}^2$

Coste = $12 \cdot 16\,336{,}16 = 196\,033{,}92$ €

El coste total de la operación es de 196 033,92 €.

23. **Un bidón de pintura de forma cilíndrica, de 32 cm de altura y 30 cm de diámetro de la base, está lleno en sus tres cuartas partes. En su interior se ha caído un pincel de 40 cm de largo. ¿Crees que se habrá sumergido totalmente en la pintura?**



La altura de la pintura es $\frac{3}{4} \cdot 32 = 24$ cm

$x^2 = 24^2 + 30^2 = 576 + 900 = 1\,476 \rightarrow$

$\rightarrow x = \sqrt{1\,476} = 38{,}4$ cm

40 cm > 38,4 cm

Solución: No, no se sumergirá del todo. Un pico de 0,6 cm se quedará asomando.

24. **Al introducir una piedra en un recipiente cilíndrico, de 20 cm de diámetro, la altura del agua que contiene sube 5 cm.**

¿Cuál es el volumen de la piedra?

$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 10^2 \cdot 5 = 500\pi = 1\,570{,}8 \text{ cm}^3$

El volumen de la piedra es de $1\,570{,}8 \text{ cm}^3$.

Página 169

25. **Se introduce una bola de piedra de 12 cm de diámetro en un recipiente cúbico de 12 cm de arista lleno de agua y después se retira. Calcula:**

a) La cantidad de agua que se ha derramado.

b) La altura que alcanza el agua en el recipiente después de sacar la bola.

a) $V_{\text{BOLA}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6^3 = 288\pi = 904{,}78 \text{ cm}^3$

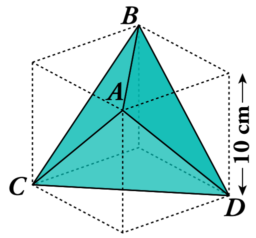
Se han derramado 904,78 cm^3 de agua.

b) Llamamos h a la altura que alcanza el agua.

$904{,}78 = 12 \cdot 12 \cdot h \to 904{,}78 = 144h \to h = \frac{904{,}78}{144} = 6{,}28 \text{ cm}$

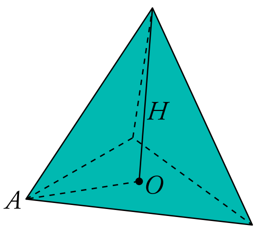
El algua alcanzará una altura de 6,28 cm.

26. **Este es el mayor tetraedro que cabe dentro de un cubo de 10 cm de arista. Halla su superficie y su volumen.**



Calculamos el lado del tetraedro:

$l^2 = 10^2 + 10^2 = 200 \to l = 14{,}14 \text{ cm}$



Recordamos que $\overline{AO} = \frac{2}{3}h$. Por tanto, tenemos que hallar la altura del triángulo.

$h^2 = 14{,}14^2 - 7{,}07^2 \to h = 12{,}24 \text{ cm}$

$H^2 = 14{,}14^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot 12{,}24\right)^2 = 133{,}29 \to H = 11{,}54 \text{ cm}$

$A_{\text{BASE}} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 14{,}14 \cdot 12{,}24 = 86{,}54 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 4 \cdot 86{,}54 = 346{,}15 \text{ cm}^2$

$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{BASE}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 86{,}54 \cdot 11{,}54 = 332{,}89 \text{ cm}^3$

27. **¿Cuál debe ser la altura de un cilindro cuya base mide 24 cm de radio para que su volumen sea 1 *l*?**

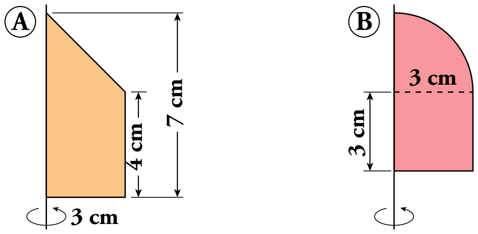
$1 \; l = 1 \text{ dm}^3 = 1\,000 \text{ cm}^3$

$V = \pi r^2 h$

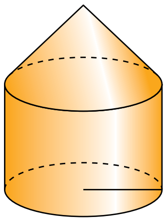
$1\,000 = \pi \cdot 24^2 \cdot h \to h = \frac{1\,000}{576\pi} \to h = 0{,}55 \text{ cm}$

El cilindro medirá 0,55 cm de alto.

28. **Calcula el área total y el volumen de los cuerpos de revolución que genera cada una de estas figuras planas al girar alrededor del eje indicado:**



Calculamos la generatriz:



$g^2 = 3^2 + 3^2 \rightarrow g^2 = 18 \rightarrow g = \sqrt{18} \rightarrow g = 4{,}24$ cm

$A_{\text{CONO}} = \pi r^2 + \pi r g = \pi \cdot 3^2 + \pi \cdot 3 \cdot 4{,}24 = 68{,}23 \text{ cm}^2$

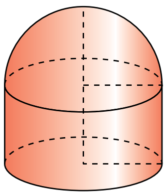
$A_{\text{CILINDRO}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi \cdot 3^2 + 2\pi \cdot 3 \cdot 4 = 131{,}95 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 68{,}23 + 131{,}95 = 200{,}18 \text{ cm}^2$

$$V_{\text{CONO}} = \frac{A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura}}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 3}{3} = 9\pi = 28{,}27 \text{ cm}^3$$

$V_{\text{CILINDRO}} = A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura} = \pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 36\pi = 113{,}1 \text{ cm}^3$

$V_{\text{TOTAL}} = 28{,}27 + 113{,}1 = 141{,}37 \text{ cm}^3$



$$A_{\text{SEMIESFERA}} = \frac{4\pi r^2}{2} + \pi r^2 = \frac{4 \cdot \pi \cdot 3^2}{2} + \pi \cdot 3^2 = 27\pi = 84{,}82 \text{ cm}^2$$

$A_{\text{CILINDRO}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi \cdot 3^2 + 2\pi \cdot 3 \cdot 3 = 36\pi = 113{,}1 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 84{,}82 + 113{,}1 = 197{,}92 \text{ cm}^2$

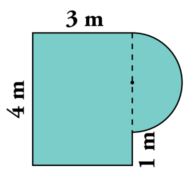
$$V_{\text{SEMIESFERA}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 3^3}{6} = 6\pi = 18{,}85 \text{ cm}^3$$

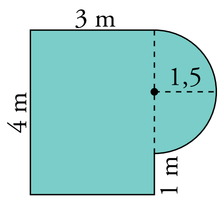
$V_{\text{CILINDRO}} = A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura} = \pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 3 = 27\pi = 84{,}82 \text{ cm}^3$

$V_{\text{TOTAL}} = 18{,}85 + 84{,}82 = 103{,}67 \text{ cm}^3$

29. **Calcula el volumen de una habitación de 2,30 m de altura, cuya planta tiene la forma y dimensiones indicadas en la figura.**

Halla, también, la superficie de las paredes.





$A_{\text{BASE}} = a \cdot b + \pi r^2 = 3 \cdot 4 + \pi \cdot 1{,}5^2 = 19{,}07 \text{ m}^2$

$V = A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura} = 19{,}07 \cdot 2{,}30 = 43{,}861 \text{ m}^3$

Calculamos la superficie de las paredes:

Perímetro $= 4 + 2 \cdot 3 + 1 + 1{,}5\pi = 15{,}71$

A = Perímetro $\cdot$ altura $= 15{,}71 \cdot 2{,}30 = 36{,}13 \text{ m}^2$

El volumen es 43,861 m^3 y la superficie de las paredes 36,13 m^2.

30. **El desarrollo de la superficie lateral de un cono es un sector circular de 120° de amplitud y cuya área es 84,78 cm^2. Halla el área total y el volumen del cono.**

Necesitamos saber la generatriz del cono y el radio de la base.

El arco de circunferencia correspondiente a 120° corresponderá con el perímetro de la circunferencia de la base.

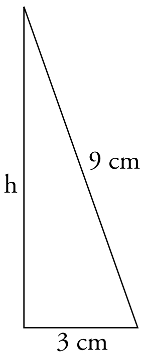
$$\frac{2\pi g 120°}{360°} = 2\pi r \rightarrow \frac{2}{3}\pi g = 2\pi r \rightarrow g = 3r$$

El área de la superficie lateral de un cono es $A_{\text{LATERAL}} = \pi r g$

$84,78 = \pi r g$

Así, hemos encontrado dos ecuaciones para las dos incógnitas que queremos saber:

$$\begin{cases} g = 3r \\ 84,78 = \pi r g \end{cases} \rightarrow 84,78 = \pi \cdot r \cdot 3r \rightarrow 84,78 = 3\pi r^2 \rightarrow r^2 = \frac{84,78}{3\pi} \rightarrow r^2 = 9 \rightarrow r = 3 \text{ cm}$$



$g = 3 \cdot 3 = 9$ cm

$A_{\text{BASE}} = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi = 28,27 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{BASE}} + A_{\text{LATERAL}} = 28,27 + 84,78 = 113,14 \text{ cm}^2$

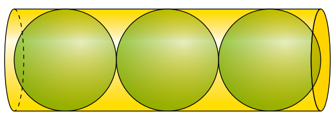
Para el volumen necesitamos la altura del cono:

$9^2 = h^2 + 3^2 \rightarrow h^2 = 81 - 9 \rightarrow h^2 = 72 \rightarrow h = \sqrt{72} = 8,5$ cm

$V = A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura} = 28,27 \cdot 8,5 = 240,3 \text{ cm}^3$

El área mide 113,14 cm^2 y el volumen, 240,3 cm^3.

31. **Tres pelotas de tenis se introducen en un tubo cilíndrico de 6,6 cm de diámetro en el que encajan hasta el borde. Halla el volumen de la parte vacía.**



La altura del cilindro es la suma de los 3 diámetros de las pelotas de tenis:

$h = 3 \cdot 6,6 = 19,8$ cm

$V_{\text{CILINDRO}} = \pi r^2 h = \pi \cdot 3,3^2 \cdot 19,8 = 677,4 \text{ cm}^3$

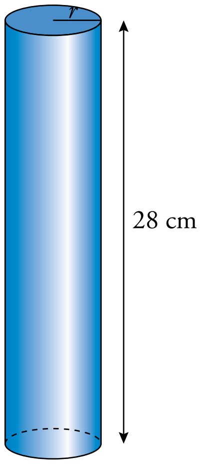
$V_{\text{PELOTA}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3,3^3 = 150,5 \text{ cm}^3$

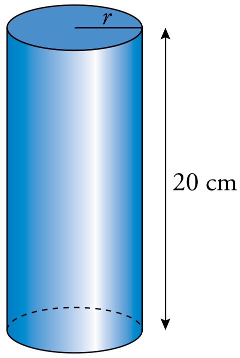
El volumen de las 3 pelotas es $3 \cdot 150,5 = 451,6 \text{ cm}^3$

Por tanto, el volumen de la parte vacía es:

$V = 677,4 - 451,6 = 225,8 \text{ cm}^3$

32. **Queremos construir un tubo cilíndrico soldando por los lados un rectángulo de 28 cm de largo y 20 cm de ancho. ¿Cómo se consigue mayor volumen, soldando por los lados de 28 cm o por los de 20 cm?**





$L = 2\pi r \to r = \dfrac{20}{2\pi} = 3,18$

$V = \pi r^2 h = 891,27 \text{ cm}^3$

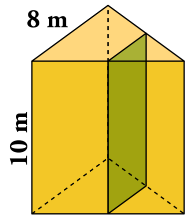
$L = 2\pi r \to r = \dfrac{28}{2\pi} = 4,46$

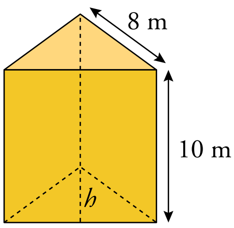
$V = \pi r^2 h = 1\,247,8 \text{ cm}^3$

Conseguimos mayor volumen si soldamos por el lado de 20 cm.

33. **Cortamos un prisma triangular regular por un plano perpendicular a las bases y que pasa por el punto medio de dos aristas.**

Calcula el volumen de los dos prismas que se obtienen.

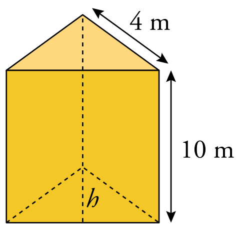




$h^2 = 8^2 - 4^2 \to h = 6,93 \text{ m}$

$A_{BASE} = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{8 \cdot 6,93}{2} = 27,71 \text{ m}^2$

$V = A_{BASE} \cdot \text{altura} = 27,71 \cdot 10 = 277,1 \text{ m}^3$

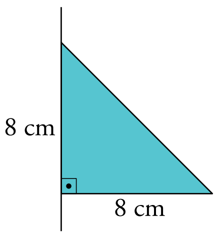


$h^2 = 4^2 - 2^2 \to h = 3,46 \text{ m}$

$A_{BASE} = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{4 \cdot 3,46}{2} = 6,93 \text{ m}^2$

$V = A_{BASE} \cdot \text{altura} = 6,93 \cdot 10 = 69,3 \text{ m}^3$

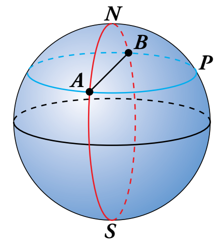
34. **Un triángulo rectángulo isósceles, cuyos catetos miden 8 cm, se hace girar alrededor de la hipotenusa. Halla el volumen del cuerpo que se forma.**

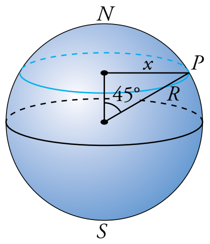


Se forma un cono:

$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 8^2 \cdot 8 = 536,16$

35. **Un avión tiene que ir de A a B, dos lugares diametralmente opuestos en el paralelo 45°. Puede hacerlo siguiendo el paralelo (*APB*) o siguiendo la ruta polar (*ANB*). Calcula la distancia que se recorrería en cada trayecto.**



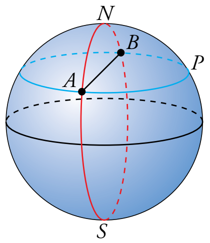


Hallamos el radio paralelo a 45°

$$R^2 = x^2 + x^2 \;\rightarrow\; x^2 = \frac{R^2}{2} \;\rightarrow\; x = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{6\,370}{\sqrt{2}} \approx 4\,504,27$$

Por lo tanto:

$$L_{\text{APB}} = \frac{2\pi \cdot 4\,504,27}{2} = 14\,143,41 \text{ km}$$



Para ir de A a B por *ANB* abarca un ángulo de 45° + 45° = 90° sobre el meridiano.

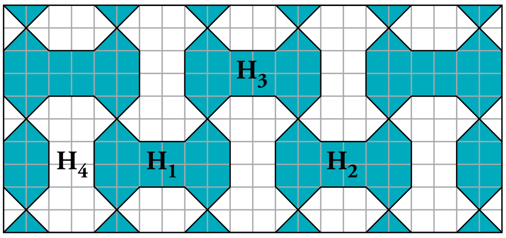
Por tanto:

$$L_{\text{ANB}} = \frac{2\pi \cdot R \cdot 90°}{360°} = \frac{\pi R}{2} = \frac{\pi\, 6\,370}{2} \approx 10\,000,9 \text{ km}$$

2 Traslaciones

Página 172

1. **El mosaico de la derecha se llama "multihueso". H_1, H_2, H_3 y H_4 son "huesos". Se pueden estudiar las transformaciones por las que se pasa de unos a otros.**

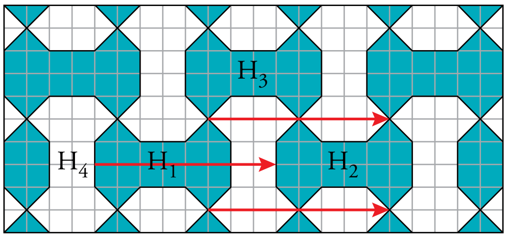


a) ¿Cuáles de estas transformaciones son traslaciones?

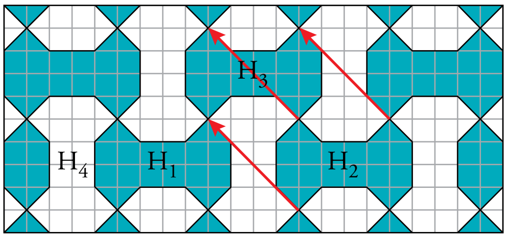
b) ¿Cuál es el vector que caracteriza la traslación que transforma H_1 en H_2? ¿Y el que transforma H_2 en H_3? ¿Y el que transforma H_3 en H_1?

a) Son traslaciones H_1, H_2 y H_3.

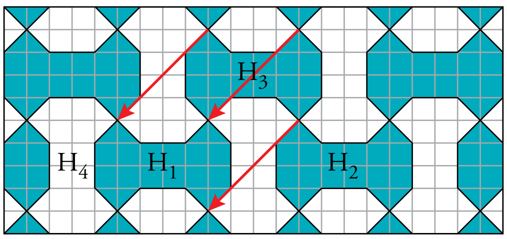
b) El vector que transforma H_1 en H_2 es (8, 0).



El vector que transforma H_2 en H_3 es (–4, 4).

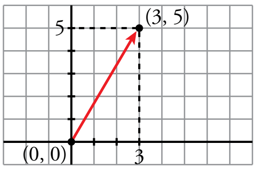


El vector que transforma H_3 en H_1 es (–4, –4).



Página 173

2. En unos ejes coordenados, considera el vector $\vec{t}$ de origen (0, 0) y extremo (3, 5).

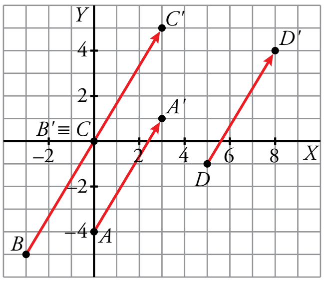


Lo designaremos, simplemente, $\vec{t}(3, 5)$.

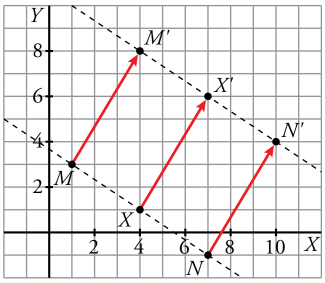
a) Traslada los puntos $A(0, -4)$, $B(-3, -5)$, $C(0, 0)$ y $D(5, -1)$ mediante este vector.

b) Comprueba que los puntos $M(1, 3)$, $N(7, -1)$ y $X(4, 1)$ están alineados. Trasládalos mediante el vector $\vec{t}$ y comprueba que sus correspondientes también están alineados.

a) Trasladamos cada punto por el vector $\vec{t} = (3,5)$.

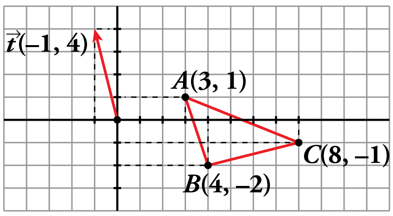


b)



3. a) Traslada el triángulo de vértices $A(3, 1)$, $B(4, -2)$ y $C(8, -1)$ según el vector $\vec{t}(-1, 4)$.

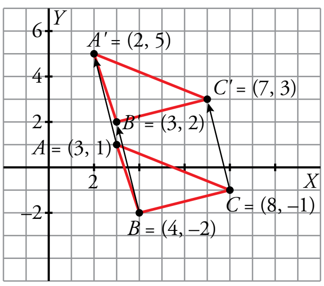
Comprueba que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales.

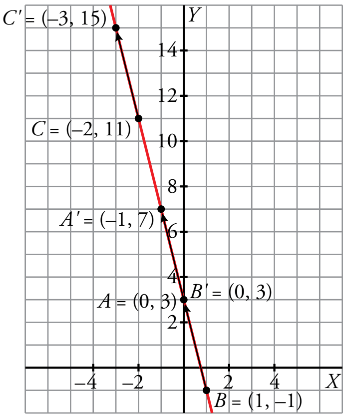


b) Comprueba que la recta $r: y = 3 - 4x$ se transforma en sí misma (es doble).

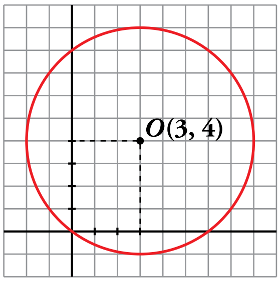
Para ello, toma varios puntos de r [por ejemplo, (0, 3), (1, –1), (–2, 11)] y comprueba que sus transformados están también en r.

a) Los dos triángulos son iguales.



b) 

4. **Dibuja unos ejes coordenados sobre papel cuadriculado. Traza con compás la circunferencia C de centro $O(3, 4)$ y radio 5.**



a) Comprueba que C pasa por $P(0, 0)$, $Q(6, 8)$ y $R(3, -1)$.

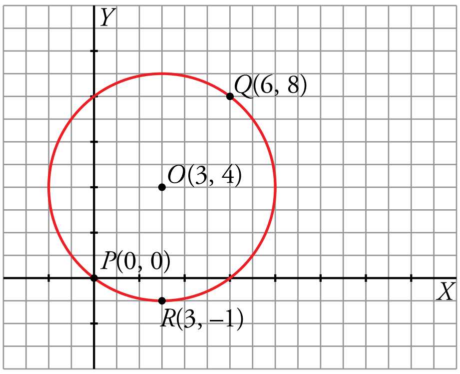
b) Traslada los puntos O, P, Q y R mediante la traslación T de vector $\vec{t}(6, -2)$.

c) Comprueba que la circunferencia cuyo centro es $O' = \mathrm{T}(O)$ y radio 5 pasa por P', Q' y R'.

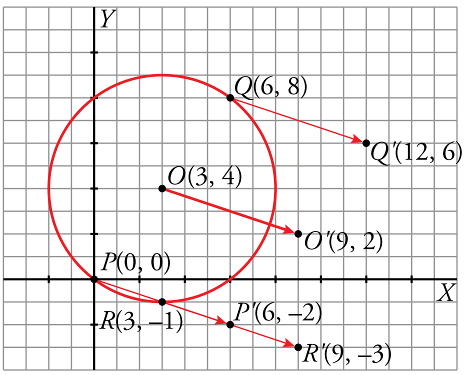
d) Trasladando algunos de sus puntos, averigua en qué recta se transforma el eje X.

e) ¿En qué recta se transforma el eje Y?

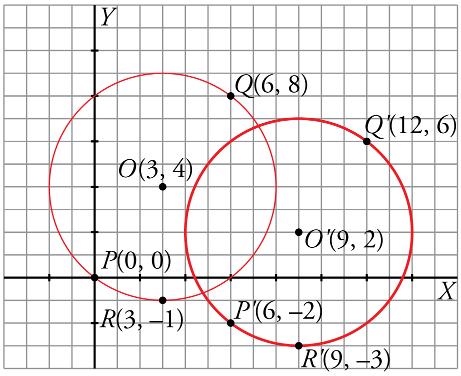
a) La circunferencia pasa por P, Q y R.



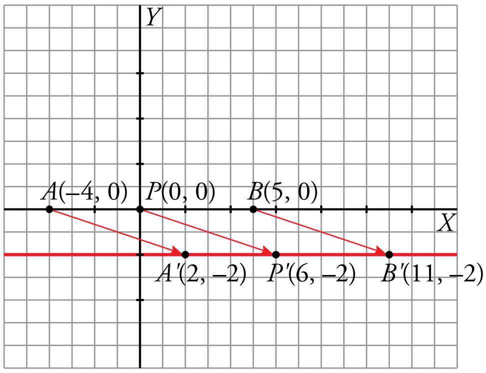
b) Los puntos trasladados son P', Q' y R'.



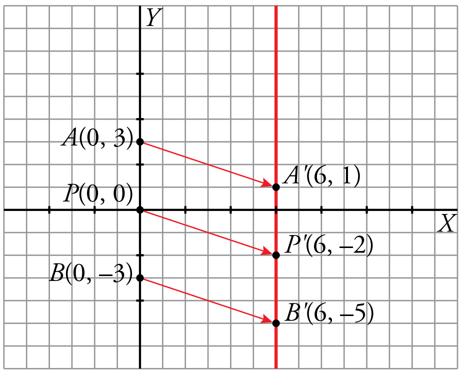
c) Al trasladar O, encontramos el centro $O'(9, 2)$. La circunferencia pasa por los trasladados de P, Q y R.



d) La recta obtenida al trasladar el eje X es $y = -2$:



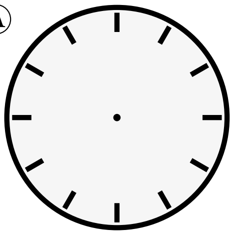
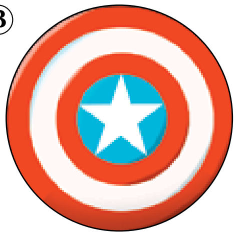
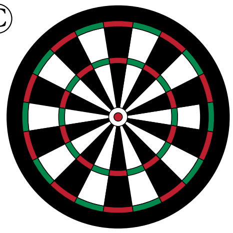
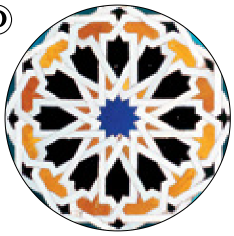
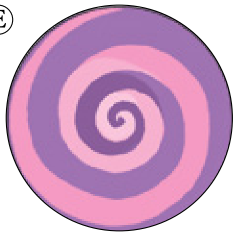
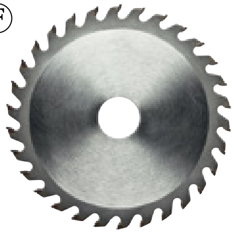
e) La recta obtenida al trasladar el eje Y es $x = 6$.



3 Giros

Página 175

1. **Las siguientes figuras, ¿tienen todas centro de giro? Explica por qué, halla el orden de cada uno y calcula el ángulo mínimo de coincidencia mediante giro.**

Ⓐ

Ⓑ

Ⓒ

Ⓓ

Ⓔ

Ⓕ


Todas estas figuras tienen centro de giro O porque al girarlas alrededor de O coinciden consigo mismas n veces, contando con la posición inicial.

A tiene orden $n = 12 \rightarrow 360° : 12 = 30°$

B tiene orden $n = 5 \rightarrow 360° : 5 = 72°$

C tiene orden $n = 10 \rightarrow 360° : 10 = 36°$

D tiene orden $n = 12 \rightarrow 360° : 12 = 30°$

E tiene orden $n = 1 \rightarrow 360° : 1 = 360°$

F tiene orden $n = 30 \rightarrow 360° : 30 = 12°$

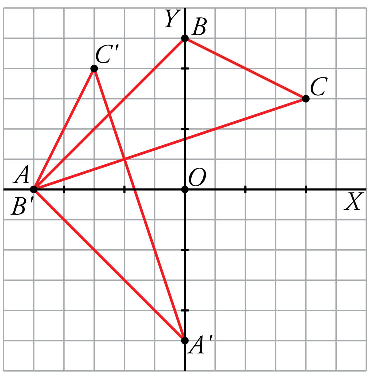
2. **Dibuja unos ejes coordenados en una hoja de papel cuadriculado. Considera el giro G de centro $O(0, 0)$ y ángulo $\alpha = 90°$.**

a) Transforma mediante G los puntos $A(-5, 0)$, $B(0, 5)$, $C(4, 3)$ y señala el triángulo $A'B'C'$ transformado del triángulo ABC.

b) ¿En qué se transforma la recta que pasa por A y B?

c) ¿En qué se transforma la circunferencia de centro O y radio 7?

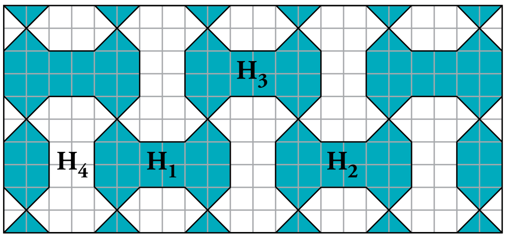
a)



b) Se transforma en otra recta perpendicular a la primera.

c) La circunferencia se transforma en ella misma.

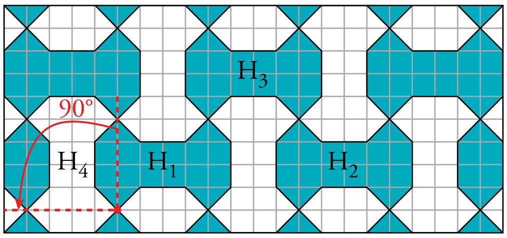
3. Recuerda el mosaico "multihueso" que ya hemos visto en un ejercicio anterior.



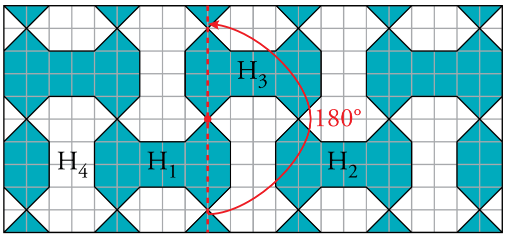
a) Describe un giro que transforme H_1 en H_4.

b) Describe un giro que transforme H_1 en H_3.

a) Es un giro de 90° con centro el punto marcado:



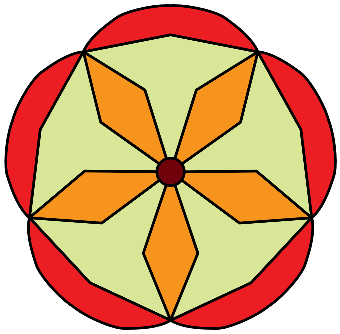
b) Es un giro de 180° y de centro el punto marcado:

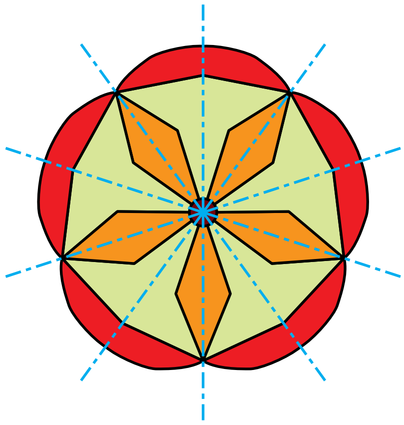


4 Simetrías axiales

Página 176

1. Copia esta figura en tu cuaderno y señala en ella los ejes de simetría.





2. Consideramos la simetría S de eje la recta $y = x$. Dibuja los transformados mediante S de:

a) Los puntos $A(3, 1)$, $B(4, 0)$, $C(0, 4)$, $D(5, 5)$.

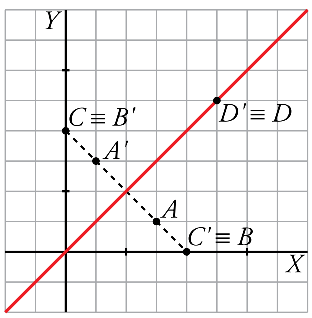
b) El eje X.

c) El eje Y.

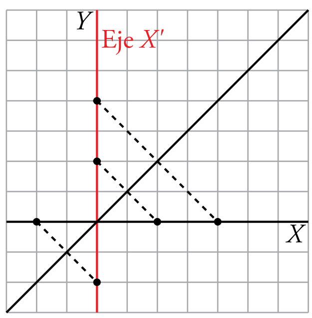
d) La circunferencia C_1 de centro (1, 4) y radio 2.

e) La circunferencia C_2 de centro (3, 3) y radio 5.

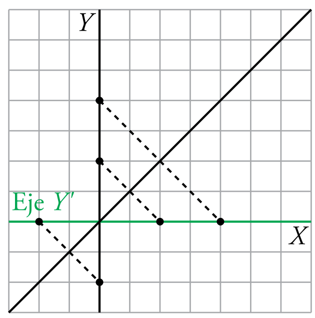
a)



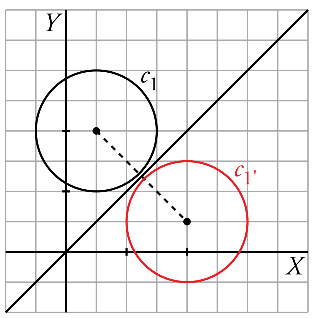
b)



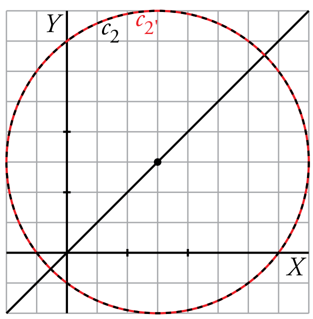
c)



d)



e)



5 Composición de movimientos

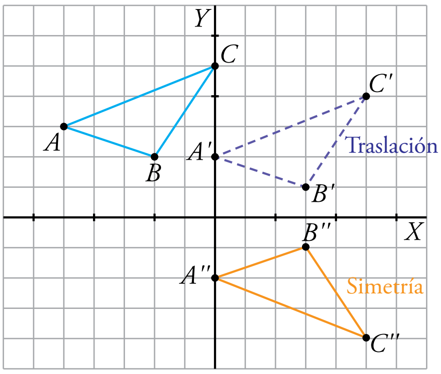
Página 177

1. **Dibuja, en papel cuadriculado, el triángulo Δ de vértices $A(-5, 3)$, $B(-2, 2)$, $C(0, 5)$. Considera la traslación T de vector $\vec{t}(5, -1)$ y la simetría S de eje el eje X $(y = 0)$.**

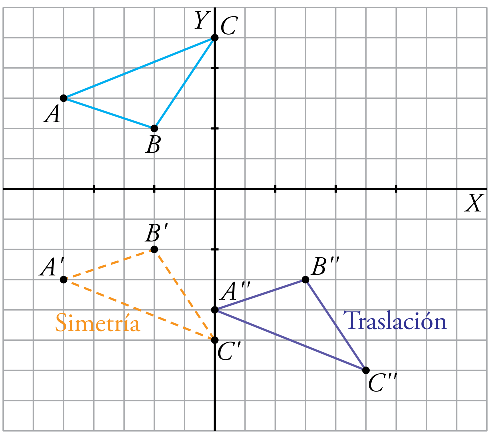
a) Transforma Δ mediante T compuesto con S.

b) Transforma Δ mediante S compuesto con T.

a)



b)

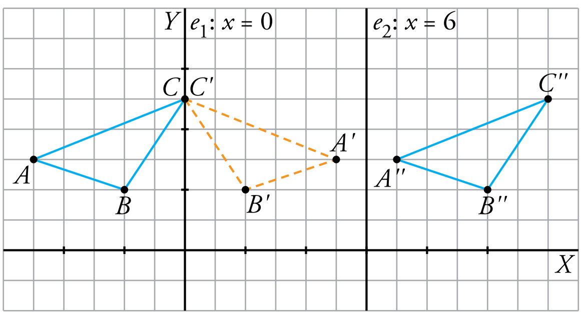


2. **Considera las simetrías S_1 y S_2 de ejes $x = 0$ (el eje Y) y $x = 6$, respectivamente.**

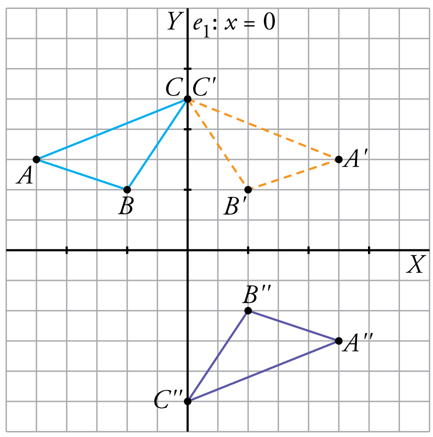
a) Transforma el triángulo Δ del ejercicio anterior mediante S_1 compuesta con S_2.

b) Transforma Δ mediante S_1 compuesta con S, siendo S la del ejercicio anterior.

a)



b)

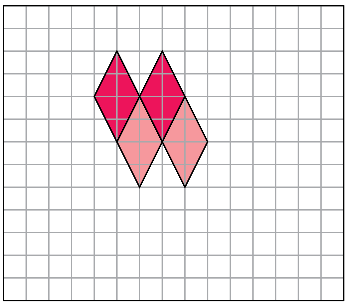


6 Mosaicos, cenefas y rosetones

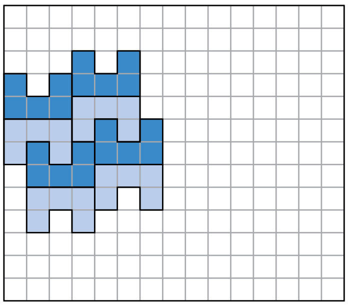
Página 178

1. Completa en tu cuaderno los siguientes mosaicos:

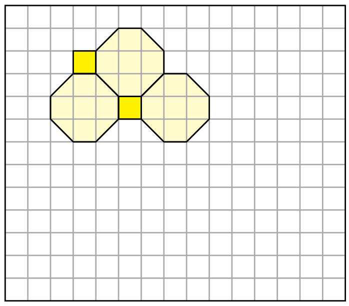
a)



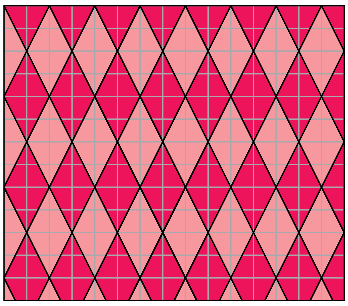
b)



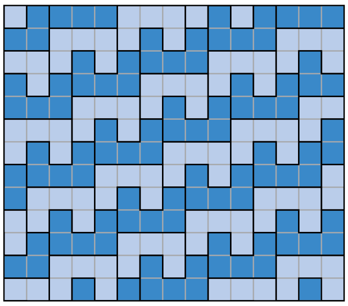
c)



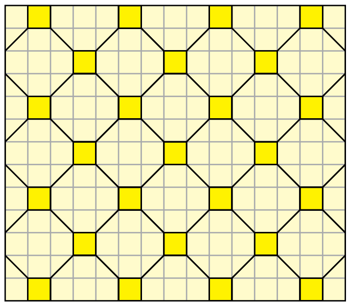
a)



b)

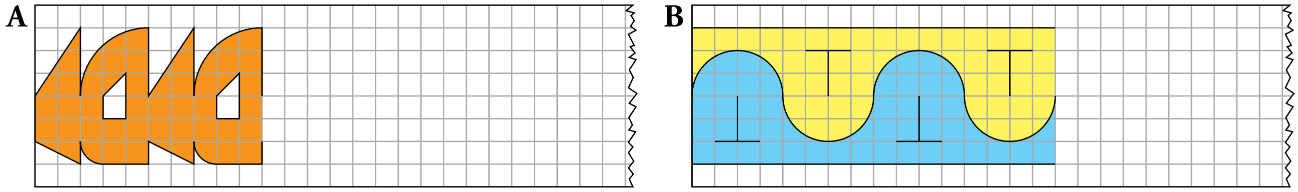


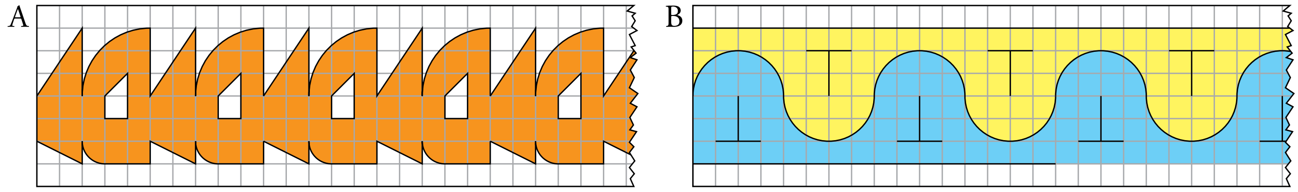
c)



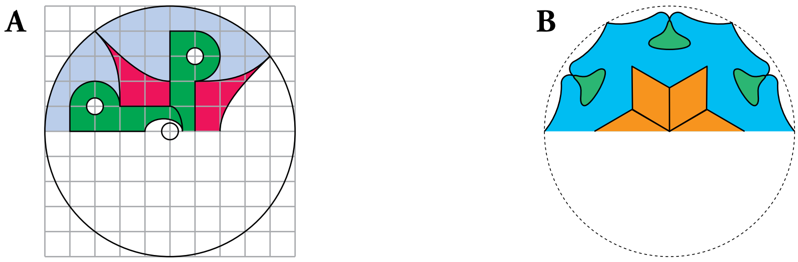
Página 179

2. Completa en tu cuaderno los siguientes frisos. ¿Cuál es el menor trozo que se repite en cada uno?



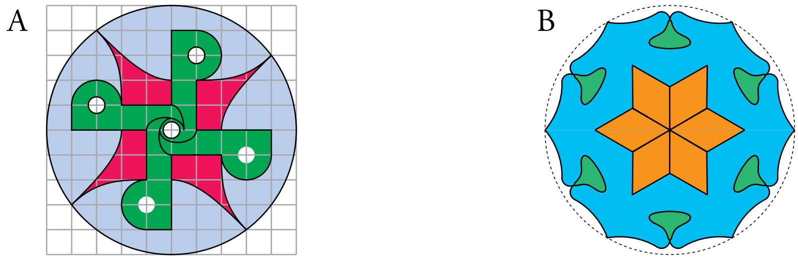


3. Completa en tu cuaderno los siguientes rosetones. Después, contesta a las preguntas que te proponemos.



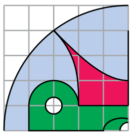
a) ¿De qué orden de giro es cada uno de ellos?

b) ¿Cuál es el menor trozo que se repite en cada uno?

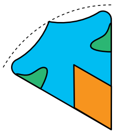


a) A es de orden 4 y B, de orden 6.

b) En la figura A, la menor parte que se repite es de $\frac{360°}{4} = 90°$



En la figura B, la menor parte que se repite es de $\frac{360°}{6} = 60°$



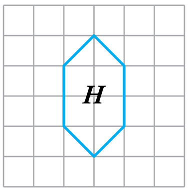
Ejercicios y problemas

Página 180

Practica

Traslaciones

1. **a) Representa en papel cuadriculado la figura H_1 obtenida a partir de H mediante la traslación de vector $\vec{t_1}(3, 2)$.**

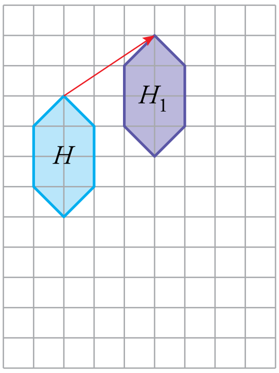


b) Dibuja la figura H_2, transformada de H_1 mediante la traslación $\vec{t_2}(2, -6)$.

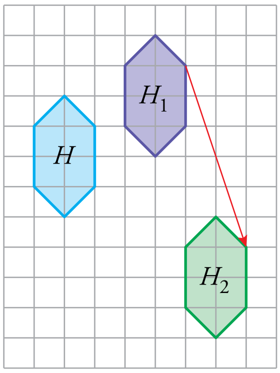
c) Di cuál es el vector de la traslación que permite obtener H_2 a partir de H.

d) ¿Qué traslación habría que aplicar a H_2 para que se transformase en H?

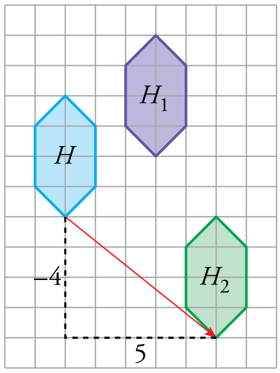
a)



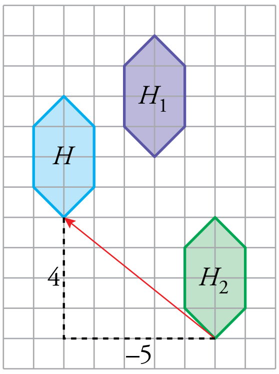
b)



c) $\vec{t} = (5, -4)$

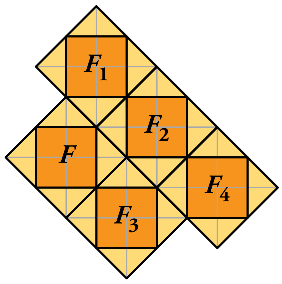


d) Habría que hacer una traslación de vector $\vec{t}(-5, 4)$.



2. **Hemos aplicado a la figura *F* cuatro traslaciones para obtener F_1, F_2, F_3 y F_4.**

Determina los vectores $\vec{t}_1$, $\vec{t}_2$, $\vec{t}_3$ y $\vec{t}_4$ que nos permiten transformar *F* en cada una de las otras figuras, respectivamente.

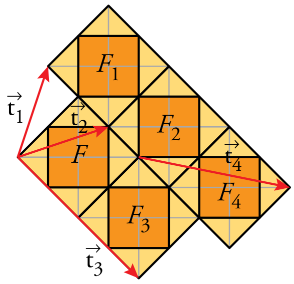


$\vec{t}_1 = (1, 3)$

$\vec{t}_2 = (3, 1)$

$\vec{t}_3 = (2, -2)$

$\vec{t}_3 = (5, -1)$



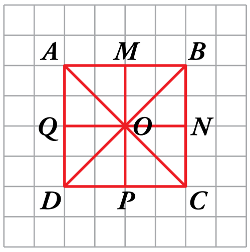
Giros

3. **Hacemos un giro de centro *O* que transforma *M* en *N*.**

a) Indica en qué puntos se transforman los puntos *O*, *A*, *B*, *N* y *P*.

b) ¿En qué se transforma la recta que pasa por *A* y por *C*?

c) ¿Y el triángulo *OPD*?



a) *O* se transforma en sí mismo.

A se transforma en *B*.

B se transforma en *C*.

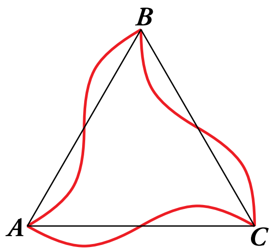
N se transforma en *P*.

P se transforma en *Q*.

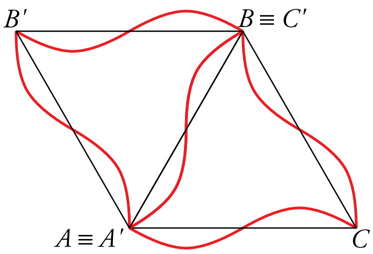
b) Se transforma en la recta que pasa por *B* y *D*.

c) Se transforma en el triángulo *OQA*.

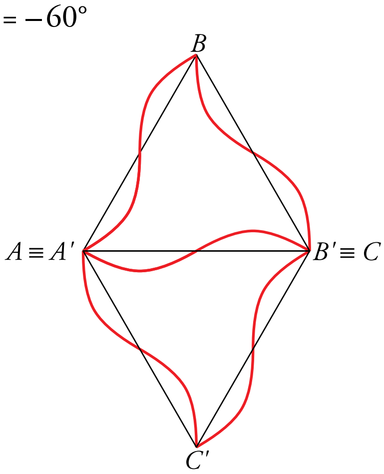
4. **Dibuja las transformadas de esta figura mediante un giro de centro *A* y un ángulo $\alpha = 60°$, y otro del mismo centro y ángulo $\beta = -60°$.**



$\alpha = 60°$

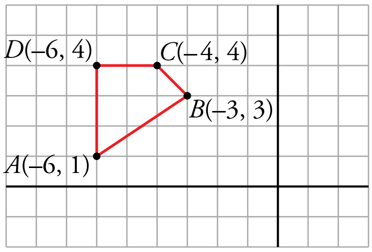


$\beta = -60°$



Simetrías

5. **Copia la siguiente figura en papel cuadriculado:**



Halla las coordenadas de los vértices del cuadrilátero *ABCD*, transformado mediante:

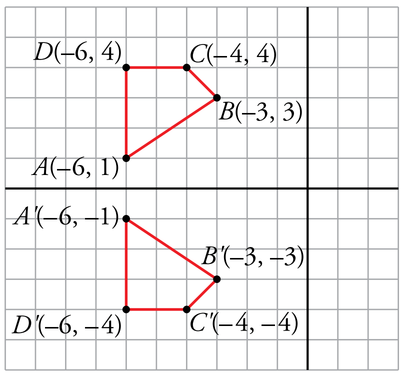
a) **La simetría de eje *X*.**

b) **La simetría de eje *Y*.**

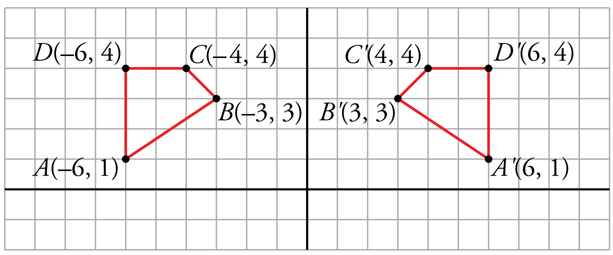
c) **La simetría que tiene por eje la recta que pasa por *B*(–3, 3) y *P*(–6, 0).**

d) **Un punto del cuadrilátero es doble respecto de alguna de las simetrías anteriores. ¿Cuál es?**

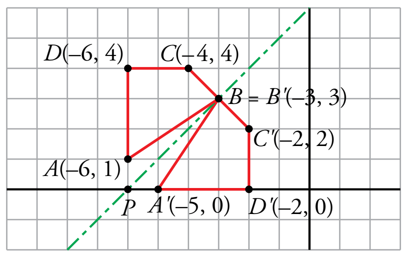
a)



b)

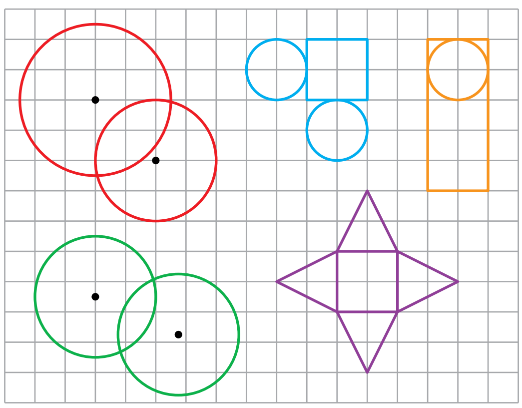


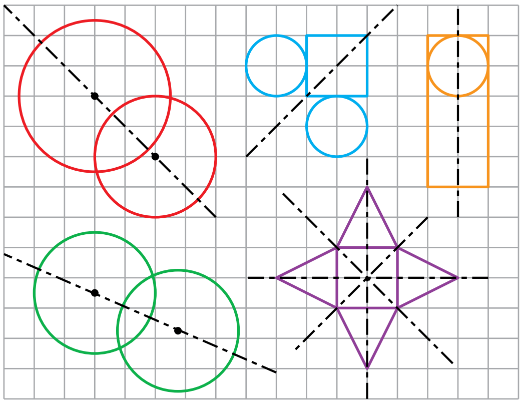
c)



d) *B* es doble con respecto a la simetría del apartado c.

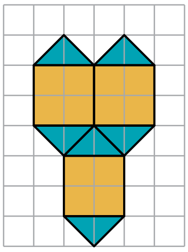
6. **¿Cuáles son los ejes de simetría de las siguientes figuras? Hazlo en tu cuaderno.**

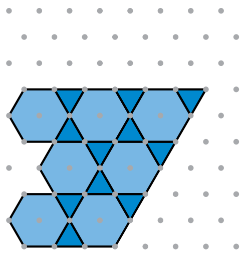




Mosaicos

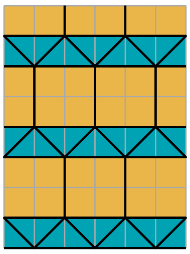
7. **a) Completa en tu cuaderno estos mosaicos:**

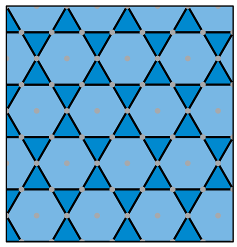




b) Identifica, en cada uno de ellos, algunos movimientos que lo transformen en sí mismo.

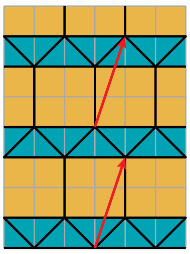
a)



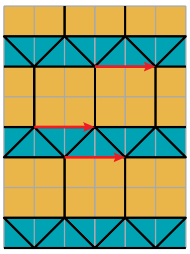


b) • En la primera figura podemos encontrar diferentes traslaciones y giros:

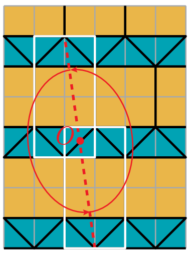
Traslación de vector $\vec{t} = (1, 3)$



Traslación de vector $\vec{t} = (2, 0)$

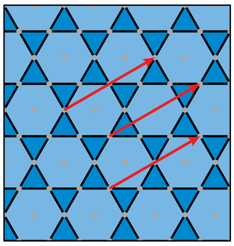


Giro de centro O y ángulo $\alpha = 180°$

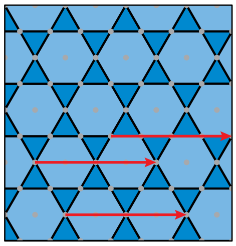


- En la segunda figura encontramos traslaciones y giros:

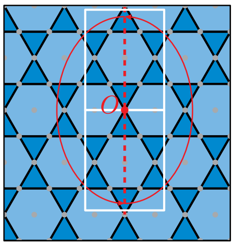
Traslación de vector $\vec{t} = (3, 2)$



Traslación de vector $\vec{t} = (4, 0)$



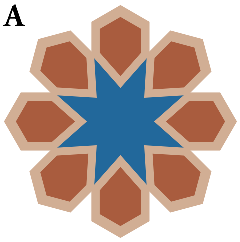
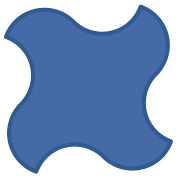
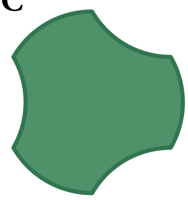
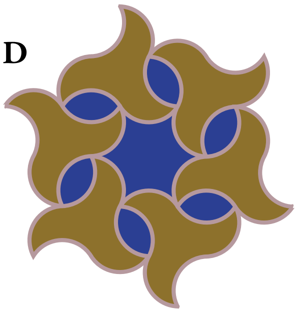
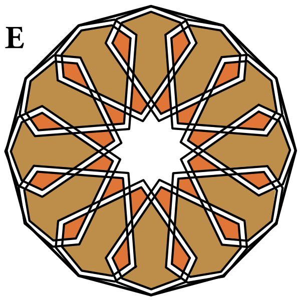
Giro de centro O y ángulo $\alpha = 180°$



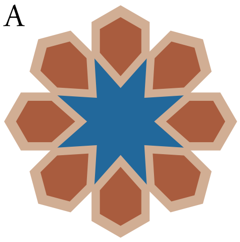
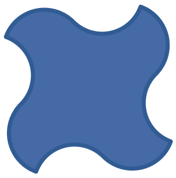
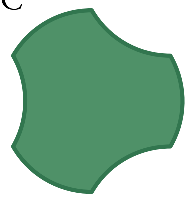
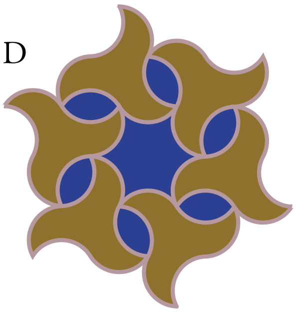
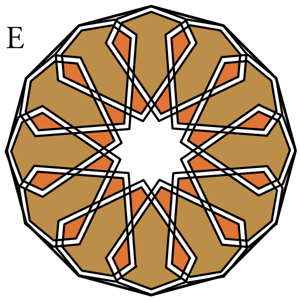
Página 181

Piensa y resuelve

8. **Explica por qué las figuras siguientes tienen centro de giro. Halla el orden de cada uno y calcula el ángulo mínimo de coincidencia mediante giro:**

A  **B**  **C**  **D**  **E** 

Tiene centro de giro de orden n porque el punto central de cada una permite girar la figura y que coincida con ella misma n veces.

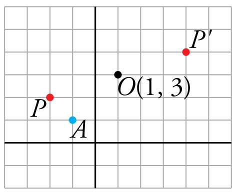
A  B  C  D  E 

$n = 8$ $n = 4$ $n = 3$ $n = 6$ $n = 12$

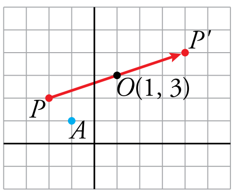
9. **Hemos transformado el punto P en P' mediante un giro de centro O y ángulo 180°:**

a) Identifica otros tres movimientos que transformen P en P'.

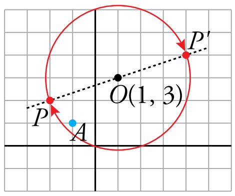
b) ¿Cuál es el transformado del punto A en cada uno de ellos?



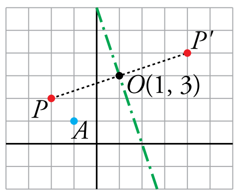
a) Mediante una traslación de vector $\vec{t} = (6, 2)$



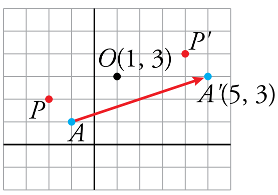
Mediante un giro de centro O y ángulo $\alpha = -180°$



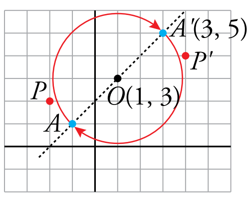
Mediante una simetría con respecto a la recta $y = -3x + 6$



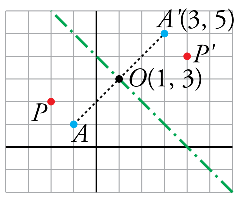
b) Mediante una traslación de vector $\vec{t} = (6, 2)$



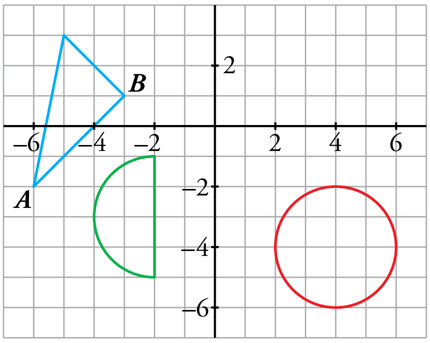
Mediante un giro de centro O y ángulo $\alpha = -180°$



Mediante una simetría con respecto a la recta $y = -3x + 6$



10.

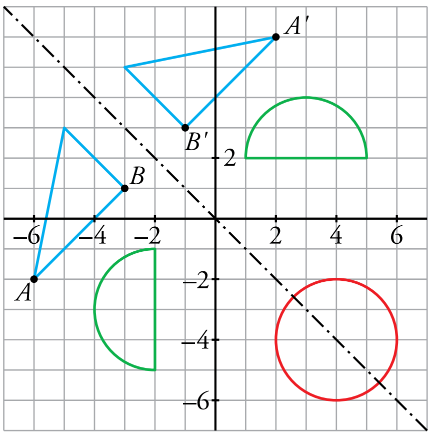


a) Representa, en tu cuaderno, las transformadas de estas figuras mediante la simetría de eje $y = -x$.

b) ¿Cuál es la ecuación de la transformada de la recta que pasa por A y B?

c) ¿Alguna de las figuras es invariante?

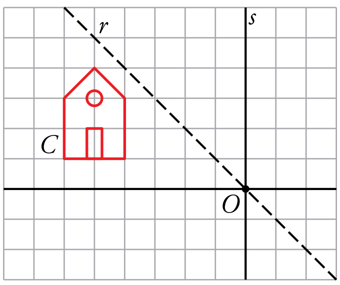
a)



b) La pendiente es $m = 1$ y la ordenada en el origen $n = 4$. La recta es $y = x + 4$.

c) Sí, la circunferencia es invariante.

11.

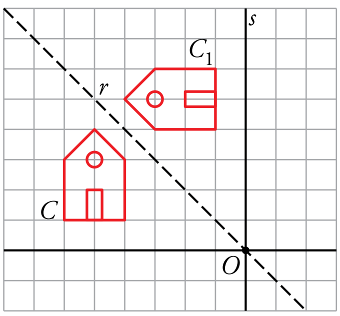


a) Dibuja en tu cuaderno la imagen C_1 transformada de C mediante la simetría de eje r.

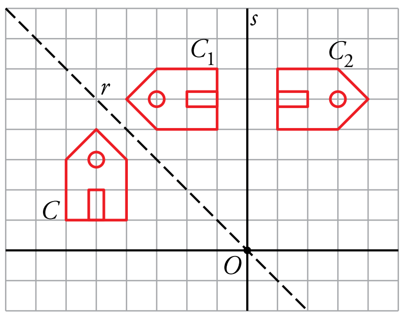
b) Dibuja C_2, transformada de C_1 mediante la simetría de eje s.

c) Define el giro equivalente a la composición de las dos simetrías que transforman C en C_2.

a)



b)

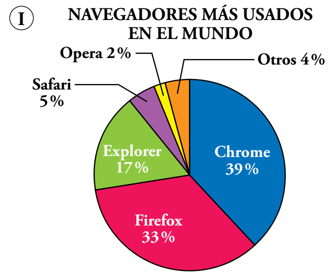


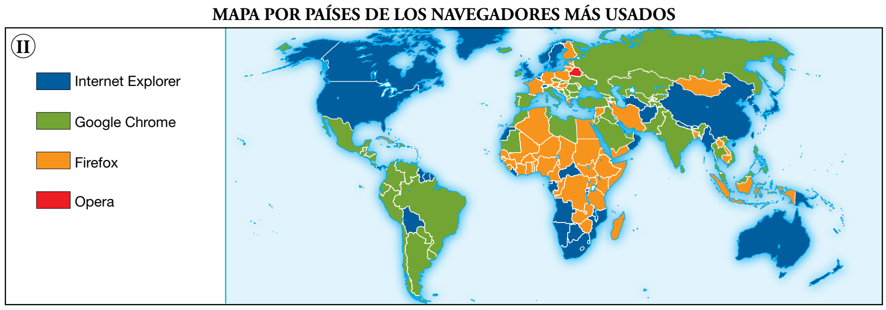
c) Es un giro de centro O y ángulo $\alpha = -90°$.

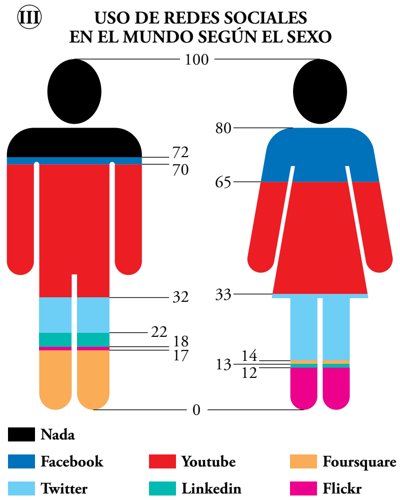
1 Cómo nos llegan las estadísticas

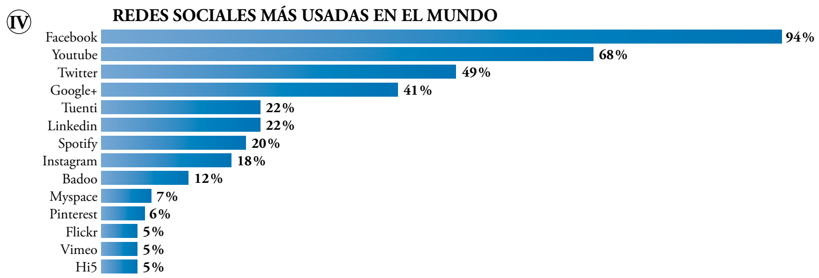
Página 185

1. Observa las tablas y gráficas de esta página y contesta a las preguntas siguientes:









a) Nombra cinco países en los que el navegador más usado es Internet Explorer.

b) ¿Quién utiliza más Twitter, los hombres o las mujeres?

c) ¿Qué navegador se utiliza más en Sudamérica? ¿Y en África?

d) ¿Qué red social es claramente mayor en los hombres que en las mujeres? ¿Cuál utilizan mucho más las mujeres que los hombres?

a) Por ejemplo, en Australia, en Canadá, en EE.UU., en China y Sudáfrica.

b) Las mujeres.

c) El navegador que se utiliza más en Sudamérica es Google Chrome. Y en África es Firefox.

d) La red social que es claramente mayor en los hombres que en las mujeres es Linkedin.

La red social que utilizan mucho más las mujeres es Facebook.

2 Población y muestra

Página 186

1. Indica la población, la muestra y los individuos en cada uno de los siguientes ejemplos:

a) Se seleccionan 50 edificios de una ciudad para hacer un estudio sobre el número de plantas, la altura y la utilización de los locales bajos (para viviendas, oficinas, tiendas, bares…).

b) Se analizan 100 libros de una biblioteca: número de páginas, ubicación en la estantería y contenido (como novela, ensayo, manual…).

c) Se han encuestado a 23 de los alumnos que van al centro en bici sobre el número de desarrollos de la bicicleta, el peso y la marca.

a) Población: edificios de la ciudad.

Muestra: 50 edificios.

Individuos: cada uno de los edificios.

b) Población: libros de la biblioteca.

Muestra: 100 libros de la biblioteca.

Individuos: cada uno de los libros.

c) Población: estudiantes de un instituto.

Muestra: 23 alumnos del centro que van en bici.

Individuos: cada uno de los estudiantes.

3 Variables estadísticas

Página 187

1. Indica si cada una de estas variables es cuantitativa discreta, cuantitativa continua o cualitativa:

a) En los cines de un pueblo se anota el tipo de película que proyectan (comedia, acción…), cuánto dura la película y el número de espectadores.

b) En los mercados de una ciudad se observa la superficie, el número de puertas de acceso y el tipo de mercado (alimentación, ropa, complementos…).

c) Nos hemos fijado en algunas características de los teléfonos móviles que tienen los alumnos de un centro escolar: la marca, el número de compañías que lo ofertan y el precio.

d) Un científico estudia, en los volcanes del Pacífico, la altura, el número de veces que han entrado en erupción en los últimos 100 años y el tipo de volcán (hawaiano, estromboliano, vulcaniano, peleano).

a) Tipo de película: cualitativa.

Duración de la película: cuantitativa continua.

Número de espectadores: cuantitativa discreta.

b) Superficie: cuantitativa continua.

Número de puertas de acceso: cuantitativa discreta.

Tipo de mercado: cualitativa.

c) Marca: cualitativa.

Número de compañías que lo ofertan: cuantitativa discreta.

Precio: cuantitativa continua.

d) Altura: cuantitativa continua.

Número de veces que han entrado en erupción en los últimos 100 años: cuantitativa discreta.

Tipo de volcán: cualitativa.

4 El proceso que se sigue en estadística

Página 188

1. Se quiere realizar una encuesta para estudiar las aficiones musicales. Para cada una de las preguntas siguientes, di justificadamente si te parecen o no razonables:

a) ¿Cuáles son tus grupos musicales preferidos?

b) De los siguientes estilos musicales, señala aquellos que has escuchado más este mes:

• Rock	**• Pop**	**• Rap**	**• Elect.**
• Hip-Hop	**• Reggae**	**• Salsa**	**• Punk**
• Metal	**• Grunge**	**• Jazz**	**• Clásico**

c) ¿Oyes la radio? Si es así, ¿qué cadena?

d) ¿Cuáles de estas cadenas de radio escuchas más de 2 horas a la semana?

• Cadena 100	**• Los 40 principales**
• Rock FM	**• Kiss FM**
• Radio Clásica	**• Europa FM**
• EDM	**• M80 Radio**
• Radio 3	**• Cadena Dial**

e) ¿Cuál es el último concierto al que has ido?

a) No es razonable porque puede que se obtengan muchas respuestas distintas que sean difíciles de organizar.

b) Es razonable porque es una pregunta clara con las alternativas señaladas. Es evidente que la variable es *el estilo musical* y cuáles son sus posibles valores.

c) No es razonable porque puede que se obtengan muchas respuestas distintas que sean difíciles de organizar.

d) Es razonable porque es una pregunta clara con las alternativas señaladas. Es evidente que la variable es *la cadena musical que escuchas* y cuáles son sus posibles valores.

e) No es razonable porque puede que se obtengan muchas respuestas distintas que sean difíciles de organizar.

5 Confección de una tabla de frecuencias

Página 190

1. El profesor ha apuntado las faltas de asistencia que ha tenido cada uno de sus alumnos a lo largo del trimestre:

2, 3, 0, 1, 1	**2, 2, 4, 3, 1**	**3, 0, 2, 0, 1**
2, 2, 1, 2, 1	**0, 3, 4, 2, 1**	**3, 5, 1, 1, 2**

a) Confecciona una tabla de frecuencias.

b) Si el profesor hubiera apuntado el número de ejercicios bien resueltos de cada alumno a lo largo del año, ¿la tabla de frecuencias debería ser con datos aislados o agrupados en intervalos?

a)

FALTAS (x_i)	RECUENTO	f_i
0	||||	4
1	~~||||~~ ||||	9
2	~~||||~~ ||||	9
3	~~||||~~	5
4	||	2
5	|	1

b) La tabla de frecuencias debería ser con datos agrupados en intervalos porque tomaría muchos valores distintos.

2. Se ha tomado el tiempo en los 100 m lisos a los miembros de un club de atletismo. Estos son los resultados:

11,62	**12,03**	**12,15**	**11,54**	**10,95**
11,56	**11,08**	**11,38**	**12,08**	**11,73**
12,11	**11,52**	**11,72**	**11,23**	**11,66**
10,87	**11,32**	**11,58**	**12,01**	**11,06**

Haz una tabla de frecuencias con estos intervalos:

10,805 - 11,075 - 11,345 - 11,615 - 11,885 - 12,155

INTERVALO	RECUENTO	f_i
10,805-11,075	|||	3
11,075-11,345	|||	3
11,345-11,615	~~||||~~	5
11,615-11,885	||||	4
11,885-12,155	~~||||~~	5

Página 191

3. **Halla las frecuencias acumuladas de esta distribución y di qué significan $f_{acumulada}$ (3) y $f_{acumulada}$ (5).**

N.º DE SUSPENSOS	0	1	2	3	4	5	6	7
FRECUENCIA	6	12	8	5	3	1	1	0

x_i	f_i	FRECUENCIA ACUMULADA
0	6	6
1	12	6 + 12 = 18
2	8	6 + 12 + 8 = 26
3	5	6 + 12 + 8 + 5 = 31
4	3	6 + 12 + 8 + 5 + 3 = 34
5	1	6 + 12 + 8 + 5 + 3 + 1 = 35
6	1	6 + 12 + 8 + 5 + 3 + 1 + 1 = 36
7	0	6 + 12 + 8 + 5 + 3 + 1 + 1 + 0 = 36

$f_{acumulada}$ (3) = 31. Significa que 31 estudiantes han tenido 3 suspensos o menos.

$f_{acumulada}$ (5) = 35. Significa que 35 estudiantes han tenido 5 suspensos o menos

4. **Esta tabla recoge los meses que cumplen años los 100 componentes de un grupo de montaña.**

MES	E	F	M	Ab	My	Jn	Jl	Ag	S	O	N	D
FREC.	7	9	10	6	8	8	7	9	8	9	9	10

a) Halla las frecuencias acumuladas.

b) ¿Cuántas personas nacieron antes de junio? ¿Y después de agosto?

a)

MES (x_i)	f_i	FRECUENCIA ACUMULADA
E	7	7
F	9	16
M	10	26
Ab	6	32
My	8	40
Jn	8	48
Jl	7	55
Ag	9	64
S	8	72
O	9	81
N	9	90
D	10	100

b) Antes de junio nacieron 40 personas.

Después de agosto nacieron 100 – 64 = 36 personas.

5. La siguiente tabla muestra el deporte que prefieren practicar 40 estudiantes.

DEPORTE	FRECUENCIA
Baloncesto	10
Balonvolea	1
Fútbol	20
Tenis	5
Ajedrez	4

a) Calcula las frecuencias relativas y porcentuales de esta distribución y explica por qué carece de sentido hallar las frecuencias acumuladas.

b) Que la frecuencia relativa de *Baloncesto* sea 10/40 quiere decir que uno de cada cuatro estudiantes juega al baloncesto. Explica con las mismas palabras las frecuencias relativas de *Fútbol* y *Tenis* y las frecuencias porcentuales de *Ajedrez* y *Baloncesto*.

a) Carece de sentido porque no es una variable cuantitativa y, siendo cualitativa, no tiene un orden ni puede estar ordenada.

DEPORTE (x_i)	f_i	$f_{relativa}$	%
Baloncesto	10	$\frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0{,}25$	25 %
Balonvolea	1	$\frac{1}{40} = 0{,}025$	2,5 %
Fútbol	20	$\frac{20}{40} = \frac{1}{2} = 0{,}5$	50 %
Tenis	5	$\frac{5}{40} = \frac{1}{8} = 0{,}125$	12,5 %
Ajedrez	4	$\frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0{,}1$	10 %
	40	1	100 %

b) Que la frecuencia relativa de *Fútbol* sea 20/40 = 1/2 quiere decir que uno de cada dos estudiantes juega al fútbol.

Que la frecuencia relativa de *Tenis* sea 5/40 = 1/8 quiere decir que uno de cada ocho estudiantes juega al tenis.

Que la frecuencia porcentual de *Ajedrez* sea 10 % quiere decir que diez de cada cien estudiantes juega al ajedrez.

Que la frecuencia porcentual de *Baloncesto* sea 25 % quiere decir que veinticinco de cada cien estudiantes juega a baloncesto.

6 Gráfico adecuado al tipo de información

Página 192

1. Representa mediante el gráfico adecuado.

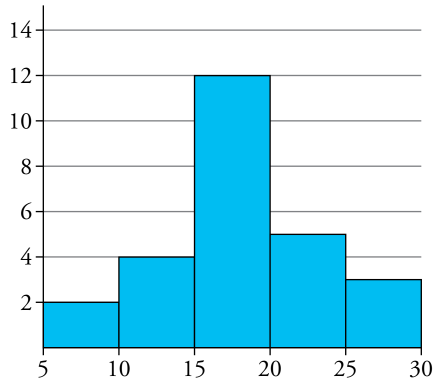
a) Temperaturas máximas medidas cada 15 días a lo largo de un año en una localidad.

TEMPERATURA (°C)	N.° DE DÍAS
5-10	2
10-15	4
15-20	12
20-25	5
25-30	3

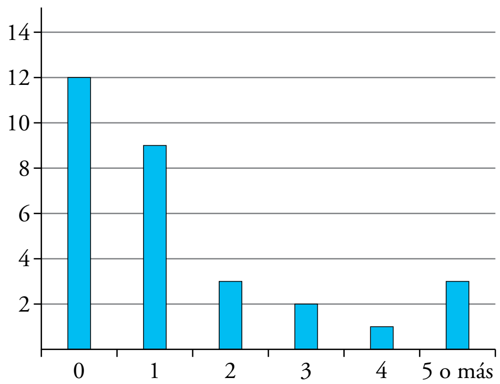
b) Número de asignaturas suspensas que tienen los alumnos de una clase.

N.° DE ASIGNATURAS SUSPENSAS	N.° DE ALUMNOS
0	12
1	9
2	3
3	2
4	1
5 o más	3

a) Mediante un histograma:



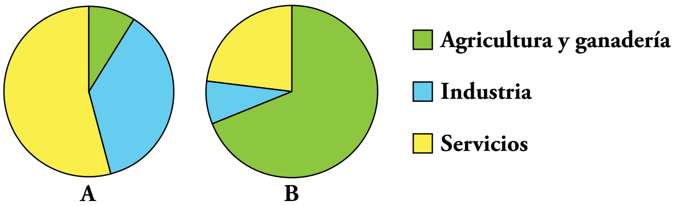
b) Mediante un diagrama de barras:



Página 193

2. **Los diagramas de sectores se utilizan a menudo para comparar la misma distribución en distintos países o regiones.**

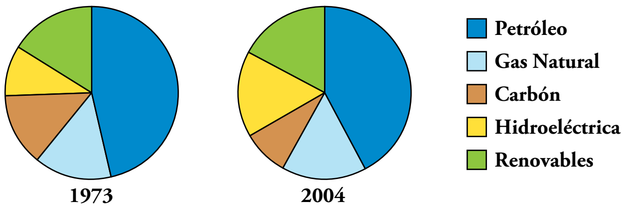
Observa los sectores que muestran cómo se divide la población trabajadora de dos países: Austria y Mauritania. ¿A cuál pertenece cada uno? Explica por qué.



A → Austria, por ser mayor los sectores de "Servicios" e "Industria" y menor el de "Agricultura y ganadería".

B → Mauritania, porque es mayor el sector de "Agricultura y ganadería".

3. **Observa la evolución del consumo mundial de energías primarias por fuentes energéticas:**



a) Explica qué energías han aumentado su consumo y cuáles han disminuido.

b) Busca en Internet el diagrama correspondiente al año actual.

a) Del año 1973 al 2004 ha aumentado el consumo de gas natural y de energías hidroeléctricas, y ha disminuido el consumo de petróleo y de carbón.

Se mantiene el consumo de energías renovables.

b) El alumnado buscará el diagrama de sectores del año correspondiente.

Ejercicios y problemas

Página 194

Practica

Población y muestra. Variables

1. **Indica, para cada caso propuesto:**

— Cuál es la población y cuáles, los individuos.

— Cuál es la variable y qué tipo de variable es.

a) El peso de los recién nacidos en la Comunidad Valenciana a lo largo del año pasado.

b) Cantidad de lluvia recogida en un cierto observatorio meteorológico en cada año del presente siglo.

c) Número de mascotas que hay en los hogares españoles.

d) Partido político al que cada elector tiene intención de votar en las próximas elecciones en una cierta comunidad autónoma.

e) Tipos de coches (marca y modelo) que tiene cada vecino de mi urbanización.

f) Número de tarjetas amarillas mostradas en cada partido de fútbol de 1.ª división la temporada pasada.

a) Población: los recién nacidos en la Comunidad Valenciana el año pasado.

Individuos: cada bebe recién nacido en la Comunidad Valenciana el año pasado.

Variable: peso.

Es una variable cuantitativa continua.

b) Población: los años del presente siglo.

Individuos: cada año del siglo.

Variable: cantidad de lluvia recogida.

Es una variable cuantitativa continua.

c) Población: hogares españoles.

Individuos: cada hogar español.

Variable: número de mascotas.

Es una variable cuantitativa discreta.

d) Población: votantes de la comunidad autónoma.

Individuos: cada votante de la comunidad autónoma.

Variable: partido político que van a votar.

Es una variable cualitativa.

e) Población: vecinos de mi urbanización.

Individuos: cada vecino de mi urbanización.

Variable: tipo de coche.

Es una variable cualitativa.

f) Población: partidos de fútbol de 1.ª división de la temporada pasada.

Individuos: cada partido de fútbol de la temporada.

Variable: número de tarjetas amarillas mostradas.

Es una variable cuantitativa discreta.

2. **Se quieren realizar los siguientes estudios:**

I. El sexo (niño o niña) de cada bebé nacido en un hospital a lo largo de un año.

II. Qué periódico lee cada uno de los habitantes de una ciudad.

III. Las alturas y los pesos de todos los alumnos y las alumnas de la clase.

IV. Edad de las personas que han visto una obra de teatro en una ciudad.

V. Estudios que piensan seguir los alumnos y las alumnas de un centro escolar al terminar la ESO.

a) Di en cada uno de estos casos cuál es la población y cuáles, los individuos.

b) Indica en cada uno cuál es la variable que se estudia y de qué tipo es.

c) ¿En cuáles de ellos es necesario recurrir a una muestra? ¿Por qué?

a) I. Población: los bebés nacidos en un hospital a lo largo de un año.

Individuos: cada uno de los bebés nacidos en el hospital ese año.

II. Población: los habitantes de una ciudad.

Individuos: cada uno de los habitantes de la ciudad.

III. Población: los alumnos y alumnas de la clase.

Individuos: cada uno de los alumnos y alumnas de la clase.

IV. Población: las personas que han visto una obra de teatro en una ciudad.

Individuos: cada una de las personas que han visto la obra en la ciudad.

V. Población: los alumnos y alumnas de un centro escolar.

Individuos: cada uno de los alumnos y alumnas del centro escolar.

b) I. La variable es el sexo. Es una variable cualitativa.

II. La variable es el periódico. Es una variable cualitativa.

III. Las variables son la altura y el peso. Son variables cuantitativas continuas.

IV. La variable es la edad. Es una variable cuantitativa continua.

V. La variable es los estudios que se elegirán al terminar la ESO. Es una variable cualitativa.

c) Es necesario recurrir a una muestra en los casos II y IV, porque pueden ser poblaciones muy numerosas e incluso difíciles de controlar.

En los demás casos no sería necesario, ya que en el hospital se lleva un registro continuo y obligatorio de los nacimientos; y en la clase y en el centro escolar no hay tantos alumnos y son fáciles de controlar y preguntar.

3. **Pon un ejemplo de un estudio en el que haya que recurrir a una muestra y en el que se quiera estudiar tres variables: una cuantitativa discreta, otra cualitativa y otra cuantitativa continua.**

Por ejemplo, podemos tomar como población los habitantes de cierta ciudad y recurrir a una muestra de 500 habitantes.

De esta manera estudiamos:

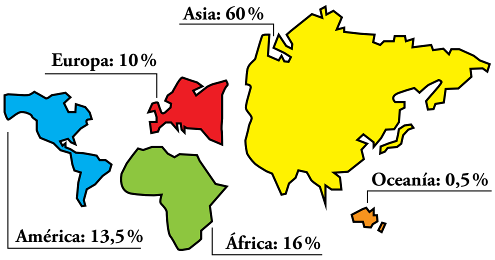
El sexo (hombre o mujer) (variable cualitativa)

La edad (variable cuantitativa discreta)

La altura (variable cuantitativa continua)

Interpretación de tablas y gráficos

4. **El siguiente gráfico indica el porcentaje de población mundial que habita en cada uno de los continentes. Si sabemos que África tiene 1 111 millones de personas, ¿qué población tiene cada uno de los demás continentes?**



Un 16 % de la población corresponde con 1 111 millones de personas, luego la población mundial será:

$$16\,\% \text{ de } P = 1\,111 \;\rightarrow\; P = \frac{1\,111 \cdot 100}{16} = 6\,943{,}75 \text{ millones de personas}$$

- América: 13,5 % de 6 943,75 = 967,41 millones de personas
- Europa: 10 % de 6 943,75 = 694,375 millones de personas
- Asia: 60 % de 6 943,75 = 4 166,25 millones de personas
- Oceanía: 0,5 % de 6 943,75 = 34,72 millones de personas

5. **Se ha hecho una encuesta para saber con qué regularidad se lee el periódico en una ciudad:**

RESPUESTA	%
TODOS LOS DÍAS	37,2
UNA VEZ A LA SEMANA	29,2
UNA VEZ AL MES	10,4
ALGUNA VEZ AL AÑO	11,2
NUNCA	
NO CONTESTA	0,4

a) Completa la tabla.

b) Si hubo 145 personas que respondieron “nunca”, ¿a cuántas se encuestó?

c) Di cuántas personas dieron cada una de las respuestas.

d) Los encuestados, ¿son población o muestra?

a)

RESPUESTA	%
TODOS LOS DÍAS	37,2
UNA VEZ A LA SEMANA	29,2
UNA VEZ AL MES	10,4
ALGUNA VEZ AL AÑO	11,2
NUNCA	11,6
NO CONTESTA	0,4

b) 11,6% de $P = 145$ 8 $P = \dfrac{145 \cdot 100}{11,6} = 1\,250$

En total se encuestaron a 1 250 personas.

c) 37,2 % de 1 250 = 465 personas dijeron todos los días.

29,2 % de 1 250 = 365 personas dijeron una vez a la semana.

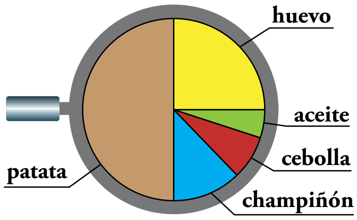
10,4 % de 1 250 = 130 personas dijeron una vez al mes.

11,2 % de 1 250 = 140 personas dijeron alguna vez al año.

0,4 % de 1 250 = 5 personas no contestaron.

d) Los encuestados son muestra.

6. **Suponemos que hacemos una tortilla de patatas con las proporciones que muestra este diagrama:**

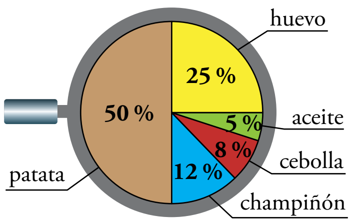


a) Los porcentajes de los ingredientes son 50 %, 25 %, 12 %, 8 % y 5 %. A la vista del gráfico, asigna cada uno al ingrediente correspondiente.

b) Si la tortilla pesa 1 kg, ¿qué cantidad hay que echar de cada ingrediente?

c) En otra tortilla con las mismas proporciones hemos echado 40 g de aceite. ¿Cuánto pesará? ¿Qué cantidad de champiñones tendrá?

a)



b) Si la tortilla pesa un kilo, necesitamos 500 g de patatas, 250 g de huevos, 120 g de champiñones, 80 g de cebolla y 50 g de aceite.

c) $\dfrac{40}{50} = \dfrac{x}{1} \rightarrow x = 0,8$

La tortilla pesará 0,8 kg.

$\dfrac{0,8}{1} = \dfrac{x}{120} \rightarrow x = 0,8 \cdot 120 = 96$

Tendrá 96 g de champiñones.

Página 195

Elaboración de tablas y gráficas

7. **Un profesor les ha pedido a sus alumnos que escriban en cuántos de los siguientes medios de transporte han viajado alguna vez en la vida:**

TREN, BARCO, AVIÓN, AUTOBÚS, HELICÓPTERO, MOTO

Estos son los resultados:

2	3	1	4	5	2	3	3	2	4
3	5	5	4	3	3	3	4	4	4
4	3	4	6	2	4	3	3	4	5

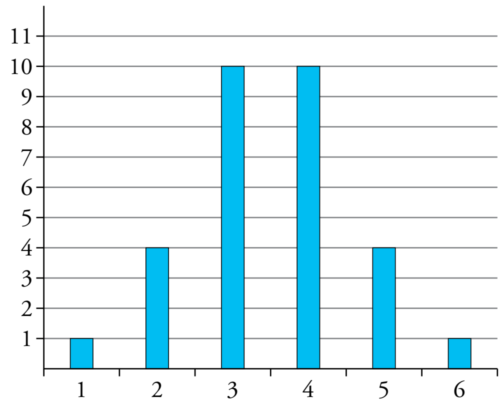
a) Construye la tabla de frecuencias absolutas.

b) Realiza el diagrama de barras correspondiente a estos datos.

a)

x_i	RECUENTO	f_i
1	|	1
2	||||	4
3	~~||||~~ ~~||||~~	10
4	~~||||~~ ~~||||~~	10
5	||||	4
6	|	1

b)



8. **Estos son los mejores tiempos en los 10 km de los miembros de un club de atletismo:**

42:20	40:08	47:32	49:50	43:24	48:31	51:42
45:53	47:17	50:37	49:07	51:37	43:28	45:18
44:36	46:15	50:48	47:59	51:21	43:37	42:14

a) Haz una tabla de frecuencias absolutas y relativas con los siguientes intervalos:

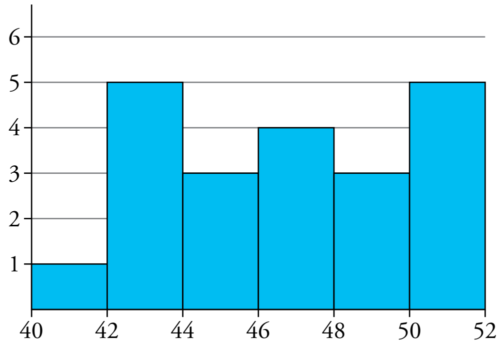
40 - 42 - 44 - 46 - 48 - 50 - 52

b) Traza el histograma correspondiente.

a)

Intervalo	Recuento	f_i
40-42	|	1
42-44	卌	5
44-46	|||	3
46-48	||||	4
48-50	|||	3
50-52	卌	5

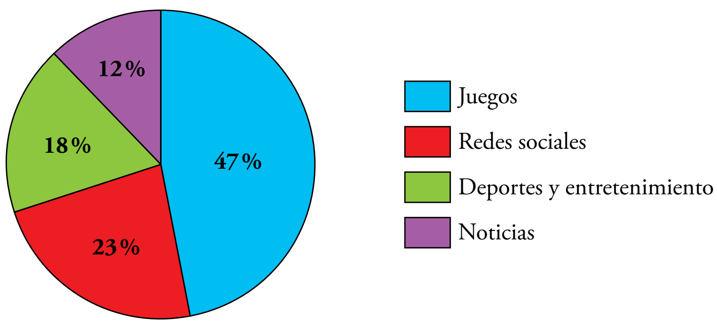
b)



9. **Se ha realizado un estudio sobre el tipo de utilidad que le dan al Smartphone los menores de 26 años. Los resultados vienen dados en la siguiente tabla:**

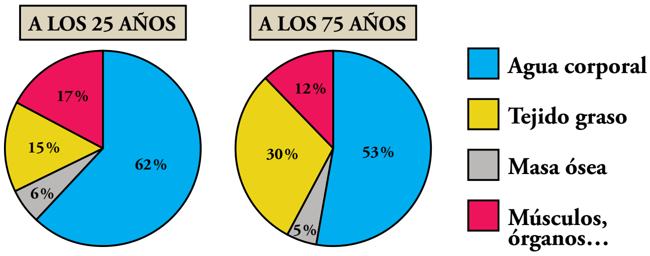
UTILIDAD	PORCENTAJE
Juegos	**47 %**
Redes sociales	**23 %**
Deportes y entretenimientos	**18 %**
Noticias	**12 %**

Elabora el correspondiente diagrama de sectores.



Piensa y resuelve

10. **En estos dos diagramas se muestra la composición del cuerpo humano en dos edades distintas:**



a) ¿Cómo varía el porcentaje de agua corporal, de masa ósea, de tejido graso y de músculos, órganos… en esos 50 años? Da el resultado en tanto por ciento de aumento o disminución.

b) Una persona de 25 años que pesa 80 kg, ¿qué cantidad de agua tiene en su organismo? ¿Y de tejido graso?

c) Responde a las preguntas del apartado anterior para una persona de 75 años con el mismo peso.

a) El agua corporal disminuye del 62 % al 53 %.

Coeficiente de variación: $\frac{53}{62} = 0,855 \rightarrow$ ha disminuido un 14,5 %

El tejido graso aumenta del 15 % al 30 %.

Coeficiente de variación: $\frac{30}{15} = 2 \rightarrow$ ha aumentado un 100 %

La masa ósea disminuye del 6 % al 5 %.

Coeficiente de variación: $\frac{5}{6} = 0,833 \rightarrow$ ha disminuido un 16,7 %

Los músculos, órganos… disminuye del 17 % al 12 %.

Coeficiente de variación: $\frac{12}{17} = 0,706 \rightarrow$ han disminuido un 29,4 %

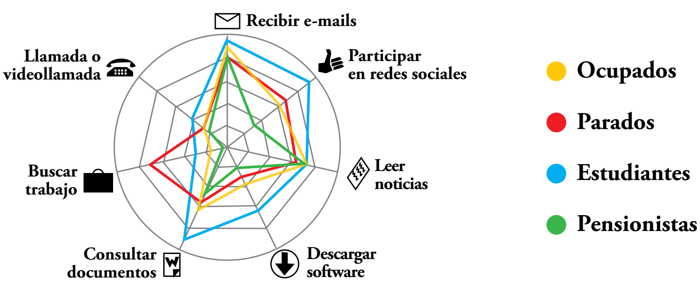
b) Cantidad de agua: 62 % de 80 = $\frac{62 \cdot 80}{100}$ = 49,6 kg = 49,6 *l* de agua

Cantidad de tejido graso: 15 % de 80 = $\frac{15 \cdot 80}{100}$ = 12 kg de tejido graso

Cantidad de agua: 53 % de 80 = $\frac{53 \cdot 80}{100}$ = 42,4 kg = 42,4 *l* de agua

Cantidad de tejido graso: 30 % de 80 = $\frac{30 \cdot 80}{100}$ = 24 kg de tejido graso

11. **El siguiente diagrama muestra el uso que se hace de Internet en España según la situación laboral:**



a) ¿Cuál es el uso predominante entre los parados? Este uso, ¿es mayor que en cualquier otro grupo?

b) ¿Qué usos tienen el mismo porcentaje en todos los grupos, aproximadamente?

c) ¿En qué usos difieren más los estudiantes de los pensionistas?

d) Haz un breve resumen de cada uno de los grupos.

a) Entre los parados, el uso predominante es recibir *e-mails*.

No es mayor que en cualquier otro grupo.

b) Recibir *e-mails* y leer noticias son los usos que tienen el mismo porcentaje en todos los grupos, aproximadamente.

c) Los estudiantes participan más en redes sociales y consultan más documentos que los pensionistas.

d) Los **ocupados** utilizan Internet, sobre todo, para recibir *e-mails* y leer noticias. En segundo lugar, para consultar documentos y participar en redes sociales. Y por último, lo utilizan menos para hacer *videollamadas*, descargar *software* o buscar trabajo.

Los **parados** utilizan Internet, sobre todo, para recibir *e-mails* y buscar trabajo. En segundo lugar, aunque con poca diferencia, para consultar documentos, participar en redes sociales y leer noticias. Y por último, lo utilizan menos para hacer *videollamadas* o descargar *software*.

Los **estudiantes** utilizan Internet, sobre todo, para recibir *e-mail*, consultar documentos y participar en redes sociales. En segundo lugar, para descargar software y leer noticias. Y por último, lo utilizan menos para hacer *videollamadas* o buscar trabajo.

Los **pensionistas** utilizan Internet, sobre todo, para recibir *e-mail*, leer noticias y consultar documentos. En segundo lugar, para hacer *videollamadas*, participar en redes sociales y descargar software. Apenas lo utilizan para buscar trabajo.

2 Dos tipos de parámetros estadísticos

Página 198

1. Calcula la media, la mediana y la moda de cada una de estas distribuciones estadísticas:

a) 4, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 11, 12, 17 **b) 10, 12, 6, 9, 10, 8, 9, 10, 14, 2**

c) 2, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 3, 7 **d) 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1**

a) $\bar{x} = \frac{4+5+6+6+6+6+7+11+12+17}{10} = \frac{80}{10} = 8$

$Me = \frac{6+6}{2} = 6$ $Mo = 6$

b) Ordenamos los datos de menor a mayor: 2, 6, 8, 9, 9, 10, 10, 10, 12, 14

$\bar{x} = \frac{2+6+8+9+9+10+10+10+12+14}{10} = \frac{90}{10} = 9$

$Me = \frac{9+10}{2} = 9,5$ $Mo = 10$

c) Ordenamos los datos de menor a mayor: 2, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 7

$\bar{x} = \frac{2+3+3+3+3+4+5+6+6+6+6+7}{12} = \frac{54}{12} = 4,5$

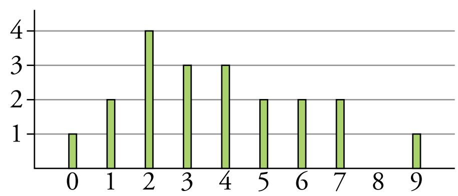
$Me = \frac{4+5}{2} = 4,5$ $Mo = 3$ y 6

d) Ordenamos los datos de menor a mayor: 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5

$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+4+3+2+1}{9} = \frac{25}{9} \approx 2,78$

$Me = 3$ $Mo = 1, 2, 3$ y 4

2. Halla los parámetros de centralización de esta distribución dada por su diagrama de barras:



$\bar{x} = \frac{0+2\cdot1+4\cdot2+3\cdot3+3\cdot4+2\cdot5+2\cdot6+2\cdot7+9}{20} = \frac{76}{20} = 3,8$

Son 20 valores así que la mediana estará entre los que ocupen las posiciones 10 y 11.

$Me = \frac{3+4}{2} = 3,5$

$Mo = 2$

Página 199

3. **Halla los parámetros de dispersión de las distribuciones del ejercicio 1 de la página anterior.**

a) Recorrido o rango = 17 – 4 = 13

$$DM = \frac{|4-8|+|5-8|+|6-8|+|6-8|+|6-8|+|6-8|+|7-8|+|11-8|+|12-8|+|17-8|}{10} =$$

$$= \frac{4+3+2+2+2+2+1+3+4+9}{10} = \frac{32}{10} = 3,2$$

$$\text{Varianza} = \frac{4^2+5^2+6^2+6^2+6^2+6^2+7^2+11^2+12^2+17^2}{10} - 8^2 =$$

$$= \frac{16+25+36+36+36+36+49+121+144+289}{10} - 64 = 78,8 - 64 = 14,8$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Varianza}} = \sqrt{14,8} = 3,85$$

b) Recorrido o rango = 14 – 2 = 12

$$DM = \frac{|2-9|+|6-9|+|8-9|+|9-9|+|9-9|+|10-9|+|10-9|+|10-9|}{10} +$$

$$+ \frac{|12-9|+|14-9|}{10} = \frac{7+3+1+0+0+1+1+1+3+5}{10} = \frac{22}{10} = 2,2$$

$$\text{Varianza} = \frac{2^2+6^2+8^2+9^2+9^2+10^2+10^2+10^2+12^2+14^2}{10} - 9^2 =$$

$$= \frac{4+36+64+81+81+100+100+100+144+196}{10} - 81 = 90,6 - 81 = 9,6$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Varianza}} = \sqrt{9,6} = 3,1$$

c) Recorrido o rango = 7 –2 = 5

$$DM = \frac{|2-4,5|+|3-4,5|+|3-4,5|+|3-4,5|+|3-4,5|+|4-4,5|+|5-4,5|}{12} +$$

$$+ \frac{|6-4,5|+|6-4,5|+|6-4,5|+|6-4,5|+|7-4,5|}{12} =$$

$$= \frac{2,5+1,5+1,5+1,5+1,5+0,5+0,5+1,5+1,5+1,5+1,5+2,5}{12} = \frac{18}{12} = 1,5$$

$$\text{Varianza} = \frac{2^2+3^2+3^2+3^2+3^2+4^2+5^2+6^2+6^2+6^2+6^2+7^2}{12} - 4,5^2 =$$

$$= \frac{4+9+9+9+9+16+25+36+36+36+36+49}{12} - 20,25 = 22,83 - 20,25 = 2,58$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Varianza}} = \sqrt{2,58} = 1,61$$

d) Recorrido o rango = 5 – 1 = 4

$$DM = \frac{\left|1-\frac{25}{9}\right|+\left|1-\frac{25}{9}\right|+\left|2-\frac{25}{9}\right|+\left|2-\frac{25}{9}\right|+\left|3-\frac{25}{9}\right|+\left|3-\frac{25}{9}\right|}{9} +$$

$$+ \frac{\left|4-\frac{25}{9}\right|+\left|4-\frac{25}{9}\right|+\left|5-\frac{25}{9}\right|}{9} = \frac{\frac{16}{9}+\frac{16}{9}+\frac{7}{9}+\frac{7}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{11}{9}+\frac{11}{9}+\frac{20}{9}}{9} = \frac{92}{81} \approx 1,14$$

$$\text{Varianza} = \frac{1^2+1^2+2^2+2^2+3^2+3^2+4^2+4^2+5^2}{9} - \left(\frac{25}{9}\right)^2 =$$

$$= \frac{1+1+4+4+9+9+16+16+25}{9} - \frac{625}{81} = \frac{85}{9} - \frac{625}{81} = 1,73$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Varianza}} = \sqrt{1,73} = 1,31$$

4. Halla de dos formas distintas la varianza de esta distribución: 8, 7, 11, 15, 9, 7, 13, 15

7, 7, 8, 9, 11, 13, 15, 15

$$\bar{x} = \frac{7+7+8+9+11+13+15+15}{8} = \frac{85}{8} = 10,625$$

Forma 1

Promedio de los cuadrados de las distancias de los datos a la media:

$$\text{Varianza} = \frac{(7-10,625)^2+(7-10,625)^2+(8-10,625)^2+(9-10,625)^2+(11-10,625)^2}{8} +$$

$$+ \frac{(13-10,625)^2+(15-10,625)^2+(15-10,625)^2}{8} =$$

$$= \frac{3,625^2+3,625^2+2,625^2+1,625^2+0,375^2+2,375^2+4,375^2+4,375^2}{8} = 9,984$$

Forma 2

Promedio de los cuadrados menos el cuadrado de la media:

$$\text{Varianza} = \frac{7^2+7^2+8^2+9^2+11^2+13^2+15^2+15^2}{8} - 10,625^2 =$$

$$= \frac{49+49+64+81+121+169+225+225}{8} - 112,89 = 122,875 - 112,891 = 9,984$$

3 Cálculo de $\bar{x}$ y de σ en las tablas de frecuencias

Página 200

1. Calcula la media de las siguientes distribuciones:

a) NÚMERO DE HIJOS

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
f_i	6	14	15	7	4	2	1	1

b) NÚMERO DE SUSPENSOS EN ESTA EVALUACIÓN

x_i	0	1	2	3	4
f_i	17	11	3	1	1

a)

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	
f_i	6	14	15	7	4	2	1	1	50
$x_i \cdot f_i$	0	14	30	21	16	10	6	7	104

$$\bar{x} = \frac{104}{50} = 2,08$$

b)

x_i	0	1	2	3	4	
f_i	17	11	3	1	1	33
$x_i \cdot f_i$	0	11	6	3	4	24

$$\bar{x} = \frac{24}{33} \approx 0,727$$

Página 201

2. Dada la tabla de frecuencias con las dos columnas correspondientes $f_i \cdot x_i$ y $f_i \cdot x_i^2$, copia y completa la fila de los totales y halla la media y la desviación típica de esta distribución:

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
1	12	12	12
2	15	30	60
3	24	72	216
4	19	76	304
5	10	50	250
TOTAL			

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
1	12	12	12
2	15	30	60
3	24	72	216
4	19	76	304
5	10	50	250
TOTAL	80	240	842

$$\bar{x} = \frac{240}{80} = 3 \qquad \sigma = \sqrt{\frac{842}{80} - 3^2} \approx 1{,}235$$

3. Completa en tu cuaderno la tabla con las marcas de clase correspondientes y calcula la media y la desviación típica de la siguiente distribución:

PESOS	PERSONAS
50 a 58	6
58 a 66	12
66 a 74	21
74 a 82	16
82 a 90	5

➡

x_i	f_i
54	6
	12
	21
	16
	5

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
54	6	324	17 496
62	12	744	46 128
70	21	1 470	102 900
78	16	1 248	97 344
86	5	430	36 980
TOTAL	60	4 216	300 848

$$\bar{x} = \frac{4\,216}{60} = 70{,}267 \qquad \sigma = \sqrt{\frac{300\,848}{30} - 70{,}267^2} \approx 8{,}76$$

4. Halla las desviaciones típicas de las distribuciones de la actividad 1 de la página anterior.

a) NÚMERO DE HIJOS

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
0	6	0	0
1	14	14	14
2	15	30	60
3	7	21	63
4	4	16	64
5	2	10	50
6	1	6	36
7	1	7	49
TOTAL	50	104	336

$\bar{x} = \frac{104}{50} \approx 2,08 \qquad \sigma = \sqrt{\frac{336}{50} - 2,08^2} \approx 1,547$

b) NÚMERO DE SUSPENSOS ESTA EVALUACIÓN

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
0	17	0	0
1	11	11	11
2	3	6	12
3	1	3	9
4	1	4	16
TOTAL	33	24	48

$\bar{x} = \frac{24}{33} \approx 0,727 \qquad \sigma = \sqrt{\frac{48}{33} - \left(\frac{24}{33}\right)^2} \approx 0,962$

4 Obtención de $\bar{x}$ y de σ con calculadora

Página 202

1. Sigue el proceso anterior para calcular $\bar{x}$ y σ en la distribución NÚMERO DE HIJOS de la actividad 1 de la página 200.

Introducimos los datos en la calculadora:

$0 \boxed{\times} 6 \boxed{\text{DATA}} \to \boxed{0}$

$1 \boxed{\times} 14 \boxed{\text{DATA}} \to \boxed{1}$

$2 \boxed{\times} 15 \boxed{\text{DATA}} \to \boxed{2}$

$3 \boxed{\times} 7 \boxed{\text{DATA}} \to \boxed{3}$

$4 \boxed{\times} 4 \boxed{\text{DATA}} \to \boxed{4}$

$5 \boxed{\times} 2 \boxed{\text{DATA}} \to \boxed{5}$

$6 \boxed{\times} 1 \boxed{\text{DATA}} \to \boxed{6}$

$7 \boxed{\times} 1 \boxed{\text{DATA}} \to \boxed{7}$

Obtenemos los resultados:

$\boxed{n} \to \boxed{50}$

$\boxed{\Sigma x} \to \boxed{104}$

$\boxed{\Sigma x^2} \to \boxed{336}$

$\boxed{\bar{x}} \to \boxed{2.08}$

$\boxed{\sigma_n} \to \boxed{1.547126}$

2. Sigue el proceso anterior para calcular $\bar{x}$ y σ en la distribución NÚMERO DE SUSPENSOS de la actividad 1 de la página 200.

Introducimos los datos en la calculadora:

$0 \boxed{\times} 17 \boxed{\text{DATA}} \to \boxed{0}$

$1 \boxed{\times} 11 \boxed{\text{DATA}} \to \boxed{1}$

$2 \boxed{\times} 3 \boxed{\text{DATA}} \to \boxed{2}$

$3 \boxed{\times} 1 \boxed{\text{DATA}} \to \boxed{3}$

$4 \boxed{\times} 1 \boxed{\text{DATA}} \to \boxed{4}$

Obtenemos los resultados:

$\boxed{n} \to \boxed{33}$

$\boxed{\Sigma x} \to \boxed{24}$

$\boxed{\Sigma x^2} \to \boxed{48}$

$\boxed{\bar{x}} \to \boxed{0.7272727}$

$\boxed{\sigma_n} \to \boxed{0.9620914}$

5 Interpretación conjunta de $\bar{x}$ y σ

Página 204

2. **En distintas tiendas de instrumentos musicales preguntamos el precio de ciertos modelos concretos de piano, flauta travesera y armónica. Los resultados obtenidos tienen las siguientes medias y desviaciones típicas:**

	PIANOS	FLAUTAS	ARMÓNICAS
MEDIA	943 €	132 €	37 €
DESV. TÍPICA	148 €	22 €	12 €

Compara la dispersión relativa de los precios de estos tres productos.

	PIANOS	FLAUTAS	ARMÓNICAS
MEDIA	943	132	37
DESV. TÍPICA	148	22	12
CV	0,157	0,167	0,324

$$CV_{\text{PIANO}} = \frac{148}{943} = 0,157 \rightarrow 15,7\,\%$$

$$CV_{\text{FLAUTAS}} = \frac{22}{132} = 0,167 \rightarrow 16,7\,\%$$

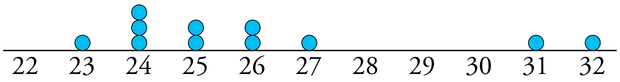
$$CV_{\text{ARMÓNICAS}} = \frac{12}{37} = 0,324 \rightarrow 32,4\,\%$$

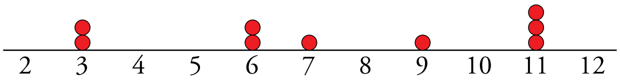
Podemos apreciar que la variación en los pianos y las flautas es muy parecida. En cambio, la variación de las armónicas es mayor que las anteriores, de hecho, es aproximadamente el doble que en las flautas.

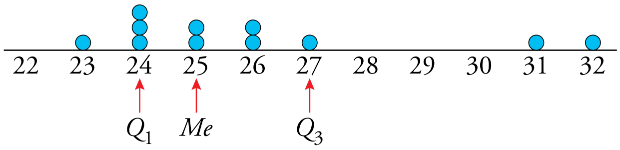
6 Parámetros de posición: mediana y cuartiles

Página 205

1. Calcula Q_1, *Me* y Q_3 y sitúalos en cada una de las siguientes distribuciones representadas:

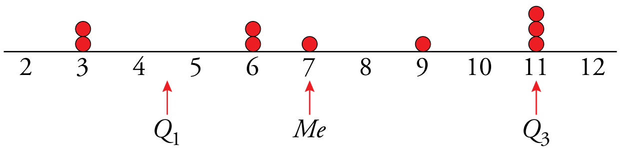
a) 

b) 

a) 

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & Q_1 & & & Me & & & Q_3 & & \\ 23 & 24 & \boxed{24} & 24 & 25 & \boxed{25} & 26 & 26 & \boxed{27} & 31 & 32 \end{array}$$

Los número marcados separan los datos en cuatro partes iguales.

b) 

Q_1: $\boxed{\dfrac{3+6}{2} = 4}$ $\qquad$ Q_3: $\boxed{\dfrac{11+11}{2} = 11}$

Me

$$3 \quad 3 \quad | \quad 6 \quad 6 \quad \boxed{7} \quad 9 \quad 11 \quad | \quad 11 \quad 11$$

Los números marcados separan los datos en cuatro partes iguales.

2. En cada una de las distribuciones siguientes:

a) Calcula Q_1, *Me* y Q_3.

b) Representa los datos y sitúa en ellos Q_1, *Me* y Q_3.

A: 0, 0, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 9, 10

B: 0, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 7, 7, 7, 14, 17, 29, 35

C: 12, 13, 19, 25, 63, 85, 123, 132, 147

a)

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} & & & & Q_1 & & & & Me & & & & Q_3 & & & \\ \text{A:} & 0 & 0 & 2 & \boxed{3} & 4 & 4 & 4 & \boxed{4} & 5 & 6 & 7 & \boxed{8} & 9 & 9 & 10 \end{array}$$

Como la distribución tiene 15 elementos, la cuarta parte es 15 : 4 = 3,75.

$Q_1 = 3$; $Me = 4$; $Q_3 = 8$

Me

$\boxed{\dfrac{4+7}{2} = 5,5}$

Q_1 Q_3

B: 0 1 1 $\boxed{2}$ 3 4 4 7 7 7 $\boxed{14}$ 17 29 35

Como la distribución tiene 15 elementos, la cuarta parte es 14 : 4 = 3,5

$Q_1 = 2$

$Me = \dfrac{4+7}{2} = 5,5$

$Q_3 = 14$

Q_1 Q_3

$\boxed{\dfrac{13+19}{2} = 16}$ $\boxed{\dfrac{123+132}{2} = 127,5}$

Me

C: 12 13 19 25 $\boxed{63}$ 85 123 132 147

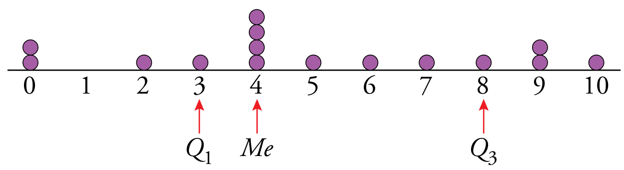
Como la distribución tiene 15 elementos, la cuarta es 9 : 4 = 2,25

$Q_1 = 16$

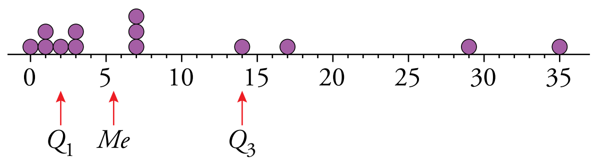
$Me = 63$

$Q_3 = 127,5$

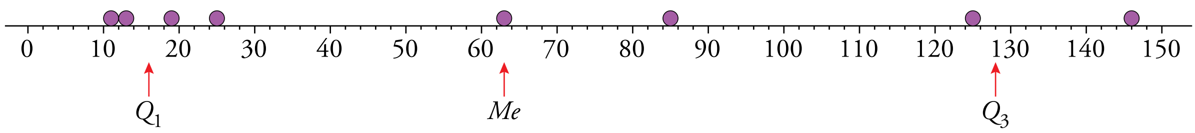
b) A



B



C

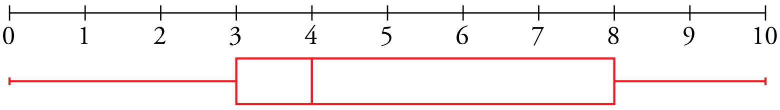


Página 206

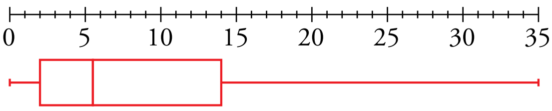
3. Representa con un diagrama de caja y bigotes cada distribución de la actividad 2 de la página anterior.

Utiliza los valores de Q_1, *Me* y Q_3 que hallaste en esa actividad.

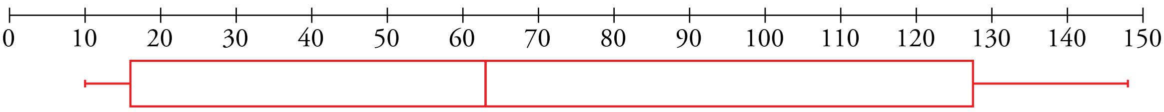
A. $Q_1 = 3$, $Me = 4$ y $Q_3 = 8$



B. $Q_1 = 2$, $Me = 5{,}5$ y $Q_3 = 14$



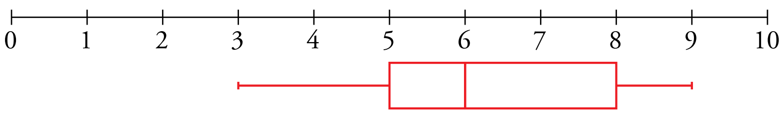
C. $Q_1 = 16$, $Me = 63$ y $Q_3 = 127{,}5$



4. Representa mediante un diagrama de caja y bigotes los siguientes puntos conseguidos en la diana:

7 6 6 8 5	**5 7 9 6 8**	**4 7 5 8 6**
7 5 6 6 7	**5 6 6 5 8**	**6 7 5 9 3**

Los parámetros de posición son: $Q_1 = 5$, $Me = 6$ y $Q_3 = 8$



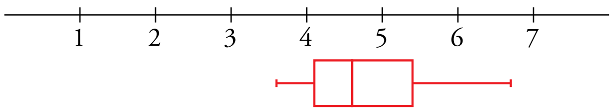
Página 207

5. Construye el diagrama de caja y bigotes para el colectivo reducido (los 20 adultos sin los 5 miembros más jóvenes) del problema resuelto anterior y compáralo con el del grupo de 25 personas que había al principio.

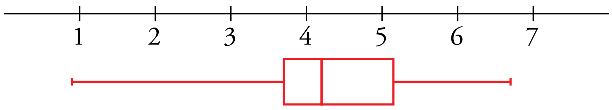
$\boxed{Q_1 = \frac{40+42}{2} = 41}$ $\boxed{Me = \frac{45+47}{2} = 46}$ $\boxed{Q_3 = \frac{53+55}{2} = 54}$

36 37 37 37 40 | 42 43 43 44 45 | 47 48 50 52 53 | 55 58 61 63 67

Sin los 5 miembros más jóvenes, el diagrama de caja y bigotes es el siguiente:



Con los 5 niños:



Haciendo una comparación de este diagrama con el del problema resuelto anterior, podemos observar que las cajas son muy parecidas, lo que varía es la longitud del bigote izquierdo, ya que hemos suprimido las edades más jóvenes.

6. Calcula los parámetros $\bar{x}$, σ, CV de un grupo de montañeros cuyas edades son: 22, 25, 25, 26, 28, 31, 31, 31, 35 y 42. Si lo comparas con las edades de los 20 adultos del problema resuelto, ¿cuál de los dos grupos es más homogéneo?

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
22	1	22	484
25	2	50	1 250
26	1	26	676
28	1	28	784
31	3	93	2 883
35	1	35	1 225
42	1	42	1 764
TOTAL	10	296	9 066

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{296}{10} = 29,6$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{9\,066}{10} - 29,6^2} = 5,51$$

$$\text{CV} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{5,51}{29,6} = 0,1864 \;\rightarrow\; 18,64\,\%$$

Es más homogéneo el grupo de este ejercicio que el del problema resuelto, ya que el CV es menor (0,1864 < 0,187).

Ejercicios y problemas

Página 208

Practica

Parámetros de centralización y dispersión

1. **Calcula los parámetros media, mediana, moda, recorrido, desviación media, varianza, desviación típica y coeficiente de variación en cada caso:**

a) 6, 3, 4, 2, 5, 5, 6, 4, 5, 6, 8, 9, 6, 7, 7, 6, 4, 6, 10, 6

b) 11, 12, 12, 11, 10, 13, 14, 15, 14, 12

c) 165, 167, 172, 168, 164, 158, 160, 167, 159, 162

Construimos la tabla de frecuencias para facilitar el cálculo:

a) 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 8, 9, 7, 7, 10

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
2	1	2	4
3	1	3	9
4	3	12	48
5	3	15	75
6	7	42	252
7	2	14	98
8	1	8	64
9	1	9	81
10	1	10	100
TOTAL	20	115	731

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{115}{20} = 5,75$$

$$Me = \frac{6+6}{2} = 6$$

$$Mo = 6$$

$$\text{Varianza} = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2 = \frac{731}{20} - 5,75^2 = 3,49$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{731}{20} - 5,75^2} = 1,87$$

$$\text{CV} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1,87}{5,75} = 0,3248 \;\rightarrow\; 32,48\,\%$$

Recorrido = 8

DM = 1,4

b) 10, 11, 11, 12, 12, 12, 13, 14, 14, 15

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
10	1	10	100
11	2	22	242
12	3	36	432
13	1	13	169
14	2	28	392
15	1	15	225
TOTAL	10	124	1 560

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{124}{10} = 12,4$$

$$Me = \frac{12+12}{2} = 12$$

$Mo = 12$

$$\text{Varianza} = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2 = \frac{1\,560}{10} - 12,4^2 = 2,24$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{1\,560}{10} - 12,4^2} = 1,50$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1,50}{12,4} = 0,1207 \rightarrow 12,07\,\%$$

Recorrido = 5

DM = 1,28

c) 158, 159, 160, 162, 164, 165, 167, 167, 168, 172

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
158	1	158	24 964
159	1	159	25 281
160	1	160	25 600
162	1	162	26 244
164	1	164	26 896
165	1	165	27 225
167	2	334	55 778
168	1	168	28 224
172	1	172	29 584
TOTAL	10	1 642	269 796

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1\,642}{10} = 164,2$$

$$Me = \frac{164+165}{2} = 164,5$$

$Mo = 167$

$$\text{Varianza} = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2 = \frac{269\,796}{10} - 164,2^2 = 17,96$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{269\,796}{10} - 164,2^2} = 4,24$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{4,24}{164,2} = 0,0258 \rightarrow 2,58\,\%$$

Recorrido = 14

DM = 3,6

2. **El número de calzado que llevan los alumnos y las alumnas de una clase son los siguientes:**

42, 40, 43, 45, 43
41, 42, 38, 36, 38
40, 39, 37, 36, 41
44, 38, 39, 40, 43
45, 38, 39, 42, 40
46, 44, 37, 42, 39

a) Haz una tabla de frecuencias con los siguientes intervalos: 35,5 - 38,5 - 40,5 - 42,5 - 44,5 - 46,5.

b) Halla la media, la desviación típica y el CV.

a) Tabla de frecuencias:

Intervalo	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
35,5-38,5	37	8	296	10 952
38,5-40,5	39,5	8	316	12 482
40,5-42,5	41,5	6	249	10 333,5
42,5-44,5	43,5	5	217,5	9 461,25
44,5-46,5	45,5	3	136,5	6 210,75
	TOTALES	30	1 215	49 439,5

b) $\bar{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \dfrac{1215}{30} = 40,5$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{49\,439,5}{30} - 40,5^2} = 2,78$$

$$\text{CV} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2,78}{40,5} = 0,0687 \rightarrow 6,87\,\%$$

3. **Una fábrica ha contado el número de vasos que se le rompen en cada cajón de camino a la tienda. Estos son los resultados:**

N.° DE VASOS ROTOS	0	1	2	3	4	5	6
N.° DE CAJONES	51	23	11	8	4	2	1

a) Calcula la media, la desviación típica y el CV.

b) ¿Cuál es la moda?

c) Comprueba los resultados con la calculadora.

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
0	51	0	0
1	23	23	23
2	11	22	44
3	8	24	72
4	4	16	64
5	2	10	50
6	1	6	36
TOTAL	100	101	289

a) $\bar{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \dfrac{101}{100} = 1,01$

$\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\dfrac{289}{100} - 1,01^2} = 1,37$

$\text{CV} = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} = \dfrac{1,37}{1,01} = 1,3539 \rightarrow 135,39\,\%$

b) $Mo = 0$

c) Introducimos los datos en la calculadora:

0 ⊗ 51 DATA → 0

1 ⊗ 23 DATA → 1

2 ⊗ 11 DATA → 2

3 ⊗ 8 DATA → 3

4 ⊗ 4 DATA → 4

5 ⊗ 2 DATA → 5

6 ⊗ 1 DATA → 6

Obtenemos los resultados:

n → 100

Σx → 101

Σx^2 → 289

$\bar{x}$ → 1.01

σ_n → 1.367443

4. **La siguiente tabla muestra los lanzamientos de jabalina que se han realizado en la clasificación para los juegos olímpicos:**

DISTANCIAS (m)	N.° DE LANZADORES
54 a 58	4
58 a 62	11
62 a 66	24
66 a 70	9
70 a 74	2

a) Haz una tabla con las marcas de clase y las frecuencias.

b) Calcula la media, la desviación típica y el CV.

c) Comprueba los resultados con la calculadora.

a) Tabla de frecuencias:

Intervalo	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
54-58	56	4	224	12 544
58-62	60	11	660	39 600
62-66	64	24	1 536	98 304
66-70	68	9	612	41 616
70-74	72	2	144	10 368
	TOTALES	50	3 176	202 432

b) $\bar{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \dfrac{3\,176}{50} = 63{,}52$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{202\,432}{50} - 63{,}52^2} = 3{,}72$$

$$\text{CV} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3{,}72}{63{,}52} = 0{,}0586 \;\rightarrow\; 5{,}86\,\%$$

c) Introducimos los datos en la calculadora:

56 ⊗ 4 DATA → 56

60 ⊗ 14 DATA → 60

64 ⊗ 15 DATA → 64

68 ⊗ 7 DATA → 68

72 ⊗ 4 DATA → 72

Obtenemos los resultados:

n → 50

Σx → 3176

Σx^2 → 202432

$\bar{x}$ → 63.52

σ_n → 3.721505

Parámetros de posición y diagramas de caja y bigotes

5. Calcula la mediana y los cuartiles de cada una de las siguientes distribuciones:

a) 1, 1, 1, 2, 2, 5, 6, 6, 6, 7, 8 10, 11

b) 4, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 8, 12, 14, 19, 22

c) 123, 125, 134, 140, 151, 173, 178, 186, 192, 198

$Q_1 = \dfrac{1+2}{2} = 1{,}5$ $\quad$ Me $\quad$ $Q_2 = \dfrac{7+8}{2} = 7{,}5$

a) 1 1 1 | 2 2 5 $\boxed{6}$ 6 6 7 | 8 10 11

$Q_1 = \dfrac{5+6}{2} = 5{,}5$ $\quad$ $Me = \dfrac{7+7}{2} = 7$ $\quad$ $Q_3 = \dfrac{12+14}{2} = 13$

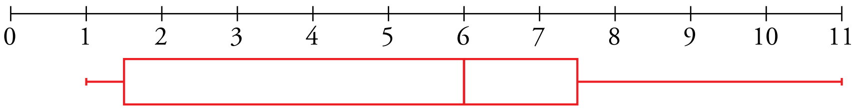
b) 4 5 5 | 6 7 7 | 7 8 12 | 14 19 2

$Me = \dfrac{151+173}{2} = 162$ $\quad$ Q_1 $\quad$ Q_3

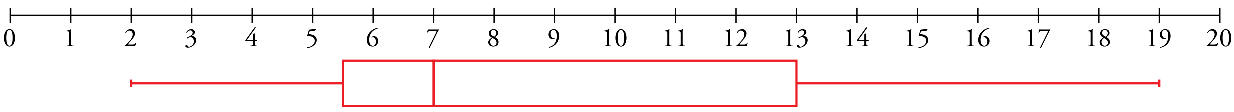
c) 123 125 $\boxed{134}$ 140 151 | 173 178 $\boxed{186}$ 192 198

6. **Dibuja el diagrama de caja y bigotes de cada una de las distribuciones del ejercicio anterior.**

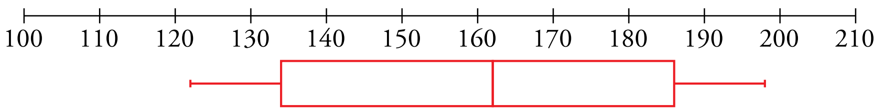
a)



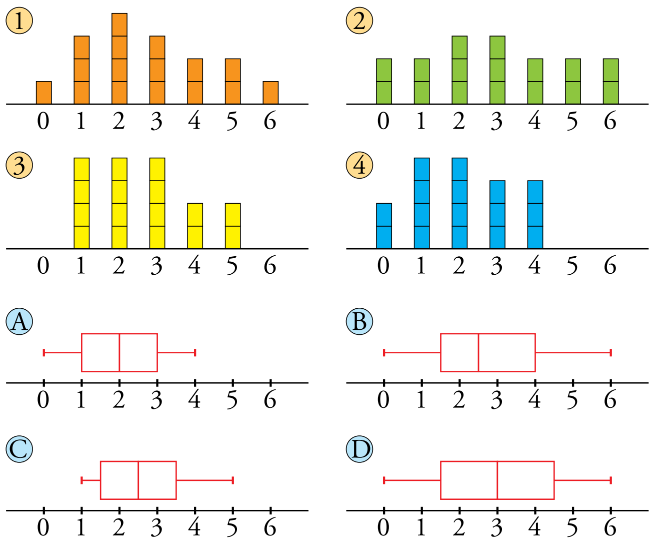
b)



c)



7. **Asocia cada gráfico de barras con su correspondiente diagrama de caja y bigotes:**



1 → B $\qquad$ 2 → D $\qquad$ 3 → C $\qquad$ 4 → A

8. **Esta tabla muestra la distribución del número de asignaturas suspendidas en una evaluación por los estudiantes de una clase:**

N.° DE ASIG. SUSP.	0	1	2	3	4	5
N.° DE ESTUDIANTES	10	4	5	2	4	3

Representa esta distribución mediante un diagrama de caja y bigotes.

Puedes poner todos los números en fila para hallar los cuartiles, pero mejor es que, sin ponerlos, los imagines en fila y razones en consecuencia.

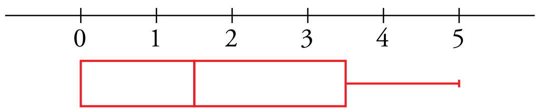
En total son 28 estudiantes preguntados.

La mediana estará entre el dato de la posición 14 y el 15, es decir, $Me = \dfrac{1+2}{2} = 1{,}5$

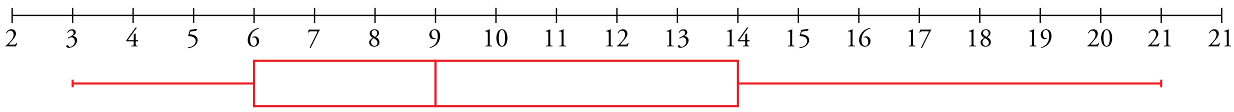
Quedarán 14 datos a la derecha y 14 datos a la izquierda de la mediana.

El primer cuartil estará entre los datos del puesto 7 y el puesto 8, es decir, $Q_1 = \dfrac{0+0}{2} = 0$

El tercer cuartil estará entre los datos del puesto 21 y el puesto 22, es decir, $Q_3 = \dfrac{3+4}{2} = 3{,}5$



9. **Conocemos el número de días al mes que ha llovido este año en una cierta región. Los valores de los cuartiles son 6, 9 y 14. El mes que más llovió fue marzo con 21 días y sabemos que el rango de la distribución es 18. Construye el diagrama de caja y bigotes. ¿Crees que es una región lluviosa?**



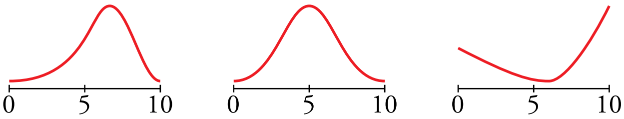
Observando el diagrama de caja y bigotes sí podemos deducir que es una región lluviosa.

Página 209

Piensa y resuelve

10. **Se ha hecho un mismo examen en dos grupos, A y B, de 30 alumnos cada uno. Sus medias y sus desviaciones típicas son: $\bar{x}_A = 6$, $\sigma_A = 1$, $\bar{x}_B = 6$, $\sigma_B = 3$.**

a) Asigna una de estas gráficas a A y otra a B.

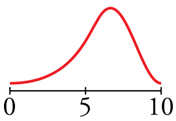


b) En una de las clases hay 11 suspensos y 4 sobresalientes, mientras que en la otra hay 5 suspensos y 1 sobresaliente. ¿Cuál es A y cuál es B?

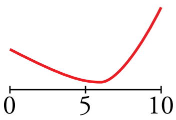
c) Si Marcos necesita sacar sobresaliente y Miguel se conforma con aprobar, ¿qué clase te parece más adecuada para cada uno de ellos?

a) La segunda gráfica la descartamos porque la media sería 5.

$\bar{x}_A = 6$ y $\sigma_A = 1 \rightarrow$ 1.ª gráfica



$\bar{x}_B = 6$ y $\sigma_B = 3 \rightarrow$ 3.ª gráfica

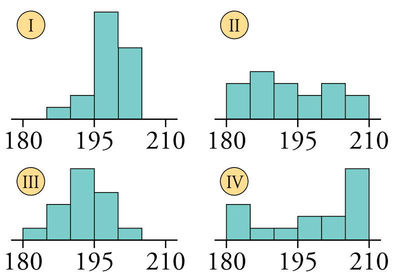


b) A corresponde a la clase de los 5 suspensos y el sobresaliente.

B corresponde a la clase de los 11 suspensos y los 4 sobresalientes.

c) La clase A será más adecuada para Marcos, y la clase B, para Miguel.

11. **Estas cuatro gráficas corresponden a las estaturas de los jugadores de cuatro equipos de baloncesto, A, B, C y D, cuyos parámetros aparecen en la tabla. ¿Cuál es la gráfica de cada equipo?**



EQUIPO	$\bar{x}$	σ
A	198,5	9,7
B	198,1	3,9
C	193	4,6
D	193,4	8,1

Halla el CV de cada equipo y ordénalos de menos a más regulares.

Los equipos I y IV tienen medias superiores a 195, y los equipos II y III, inferiores.

Además, los jugadores de IV tienen estaturas más extremas que I. Lo mismo ocurre con III que tiene estaturas más extremas que II.

Así, podemos relacionar:

A → IV B → I C → III D → II

$$CV_A = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{9,7}{198,5} = 0,0489 \to 4,89\,\%$$

$$CV_B = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3,9}{198,1} = 0,0197 \to 1,97\,\%$$

$$CV_C = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{4,6}{193} = 0,0238 \to 2,38\,\%$$

$$CV_A = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{8,1}{193,4} = 0,0419 \to 4,19\,\%$$

Los ordenamos de menos a más regulares:

A < D < C < B

12. **Elena, una jugadora de baloncesto, tiene una media de 17 puntos por partido y una desviación típica de 9. Su compañera, Sonia, tiene una media de 20 puntos y una desviación típica de 3 puntos.**

Para el próximo partido, el entrenador necesita una jugadora que intente conseguir 30 o más puntos. ¿A cuál de las dos debe seleccionar? ¿Por qué?

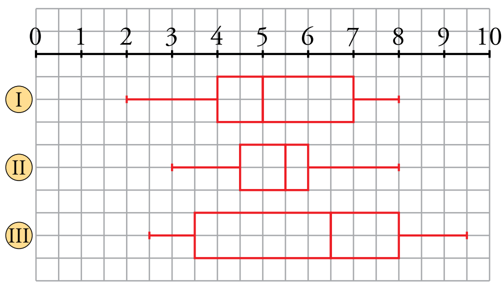
El entrenador necesita que la jugadora elegida haga 30 puntos.

Elena tiene $\bar{x} = 17$ y $\sigma = 9$ y pasa de los 30 puntos con 1,5 desviaciones típicas. Es decir, $\bar{x} + 1,5\sigma = 17 + 1,5 \cdot 9 = 30,5$.

Sonia tiene $\bar{x} = 20$ y $\sigma = 3$ y para tener al menos 30 puntos, necesita más de 3 desviaciones típicas. Es decir, $\bar{x} + 3\sigma = 20 + 3 \cdot 3 = 29$.

Por tanto, el entrenador debe seleccionar a Elena.

13. **a) Compara estas distribuciones de notas obtenidas por tres grupos de alumnos indicando cuáles son la mediana y los cuartiles en cada una:**



b) En la evaluación se hicieron estos comentarios:

I. Aprobó el 50 % de la clase.

II. Las notas son muy parecidas.

III. La cuarta parte de la clase tiene notas superiores a 7.

IV. Es la mejor clase, aunque también es la que tiene mayor dispersión.

Indica a qué grupo corresponde cada comentario.

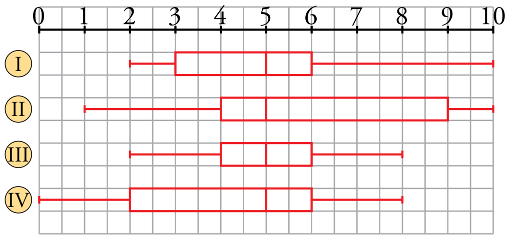
a) I. $Q_1 = 4$ $Me = 5$ $Q_3 = 7$

II. $Q_1 = 4,5$ $Me = 5,5$ $Q_3 = 6$

III. $Q_1 = 3,5$ $Me = 6,5$ $Q_3 = 8$

b) I. Grupo I II. Grupo II III. Grupo I IV. Grupo III

14. **Estos son los diagramas de caja de las notas en matemáticas de cuatro clases de 20 alumnos:**



a) Di, en cada una de ellas, los valores menor y mayor así como Q_1, Me y Q_3.

b) Los parámetros son, no respectivamente:

	A	B	C	D
$\bar{x}$	4	6	5	5
σ	2,3	3,1	2,5	1,3

Asocia los parámetros con su clase.

a) I. Mín. = 2 $Q_1 = 3$ $Me = 5$ $Q_3 = 6$ Máx. = 10

II. Mín. = 1 $Q_1 = 4$ $Me = 5$ $Q_3 = 9$ Máx. = 10

III. Mín. = 2 $Q_1 = 4$ $Me = 5$ $Q_3 = 6$ Máx. = 8

IV. Mín. = 0 $Q_1 = 2$ $Me = 5$ $Q_3 = 6$ Máx. = 8

b) A tiene la media más baja: A → IV

B tiene la media más alta: B → II

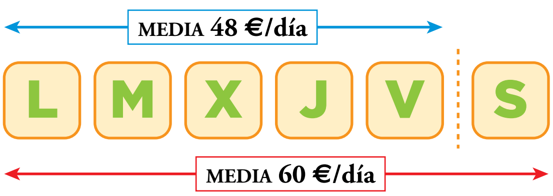
C parece centrada en 5 con dispersión alta: C → I

D tiene dispersión baja y la media y la mediana coinciden: D → III

Curiosidades matemáticas

Medias semanales

Rafael es vendedor ambulante seis días a la semana. Ayer, viernes, calculó que durante esta semana había conseguido una ganancia media de 48 € diarios. Sin embargo, al hacer la misma cuenta hoy, sábado, resulta una media de 60 € diarios. ¿Cuánto ha ganado hoy?



De lunes a viernes gana: 48 · 5 = 240 €

De lunes a sábados gana: 60 · 6 = 360 €

Los sábados gana: 360 – 240 = 120 €

Solución: Hoy, sábado, Rafael ha ganado 120€.