11 Límites de funciones. Continuidad y ramas infinitas

Página 273

A través de una lupa

a) $\lim\limits_{d \to 2^-} A = +\infty$

$\lim\limits_{d \to 2^+} A = -\infty$

b) $\lim\limits_{d \to +\infty} A = 0$

Ruido y silencio

$\lim\limits_{d \to 0} I = +\infty$

$\lim\limits_{d \to +\infty} I = 0$

Página 275

1 a) Verdadero b) Verdadero c) Verdadero

d) Verdadero e) Falso f) Falso

g) Verdadero h) Verdadero i) Verdadero

j) Falso

2 a) Rama infinita en $x = 3$ (asíntota vertical).

b) Discontinuidad evitable en $x = 0$ (le falta ese punto).

c) Rama infinita en $x = 0$ (asíntota vertical).

d) Salto en $x = 4$.

3 a) Está definida y es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Está definida y es continua en $(-\infty, 5]$.

c) Está definida y es continua en todo $\mathbb{R}$.

d) La función es continua en el intervalo en el que está definida: $[0, 5)$.

Página 276

1

x	2	2,5	2,9	2,99	2,999
f(x)	–5	–20	–500	–50 000	–5 000 000

$\lim\limits_{x \to 3^-} f_1(x) = -\infty$

x	2	2,5	2,9	2,99	2,999
f(x)	4	8	40	400	4 000

$\lim\limits_{x \to 3^-} f_2(x) = +\infty$

x	2	2,5	2,9	2,99	2,999
f(x)	4	5,66	7,46	7,94	7,99

$\lim\limits_{x \to 3^-} f_3(x) = 8$

Página 278

2 a) $-\dfrac{3}{2}$

b) 0

c) $\sqrt{3}$

d) –1

Página 279

1 Hazlo tú.

La función es continua en $x = -2$.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 3$

$\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 47$

2 Hazlo tú.

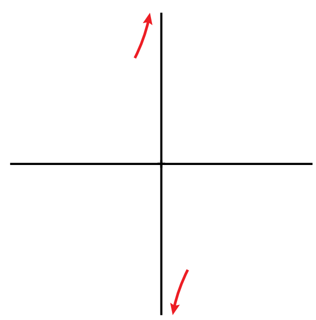
$k = -14$

Página 281

1 Hazlo tú.

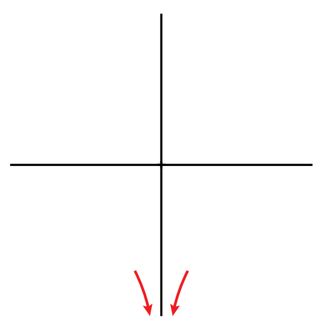
a) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x-3}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x-3}{x} = -\infty$



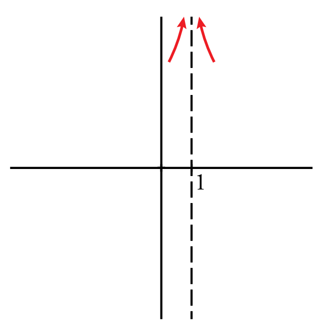
b) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x-3}{x^2} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x-3}{x^2} = -\infty$



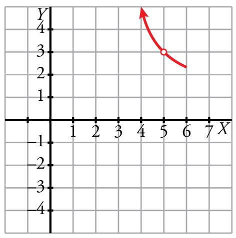
c) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$

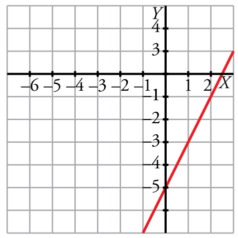


2 Hazlo tú.

a) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-4x-5}{x^2-8x+15} = 3$

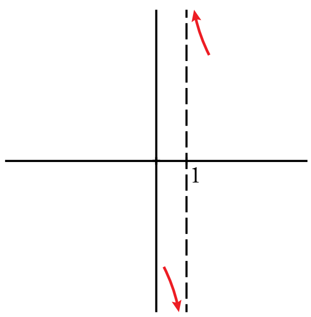


b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^3-5x^2}{x^2} = -5$

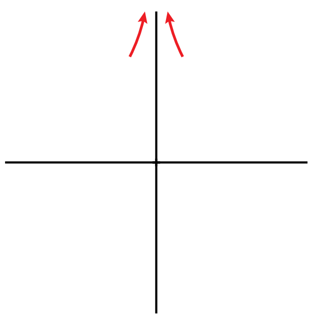


3 Hazlo tú.

a) El límite no existe.



b) El límite de esta función cuando $x \to 0$ es $+\infty$.



Página 282

1 a) $\lim\limits_{x\to +\infty} f_1(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f_2(x) = -3$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} f_3(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} f_4(x)$ no existe.

Página 283

1 a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) $-\infty$

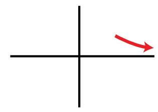
d) 0 e) 0 f) $-\infty$

2 Por ejemplo, para $x = 1\,000$, $f(x) = 800\,000\,000$.

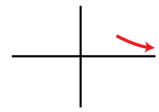
3 Por ejemplo, para $x = 1\,000$, $f(x) = 0{,}0000\overset{\frown}{01}$.

Página 284

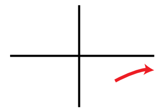
4 a) 0



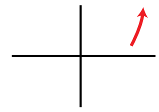
b) 0



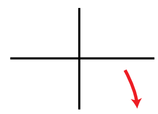
c) 0



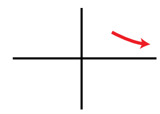
d) $+\infty$



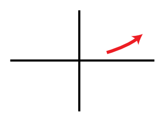
5 a) $-\infty$



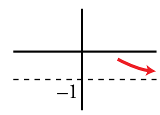
b) 0



c) $+\infty$



d) -1



Página 285

1 a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} 10^x = 0$ $\lim\limits_{x\to +\infty} 10^x = +\infty$

d) El límite cuando x tiende a $-\infty$ no tiene sentido porque la función está definida para $x \geq \dfrac{8}{5}$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{5x-8} = +\infty$

e) No tiene sentido calcular ninguno de los dos límites porque el dominio de definición de la función es el intervalo $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

f) $\lim\limits_{x\to -\infty} -5^x = 0$ $\lim\limits_{x\to +\infty} -5^x = -\infty$

2 a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

El límite cuando x tiende a $+\infty$ no tiene sentido porque la función está definida solo cuando $x \leq 3$.

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \dfrac{5}{3}$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \dfrac{5}{3}$

Página 287

1 a) La recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

La recta $y = 3$ es una asíntota horizontal.

Cuando $x \to +\infty$, la función está por encima de la asíntota. Cuando $x \to -\infty$, la función está por debajo de la asíntota.

No tiene asíntotas oblicuas.

b) La recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

No tiene asíntotas horizontales.

La recta $y = 3x + 6$ es una asíntota oblicua.

Cuando $x \to +\infty$, la función está por encima de la asíntota oblicua. Cuando $x \to -\infty$, la función está por debajo de la asíntota.

c) La recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Cuando $x \to +\infty$, la función está por encima de la asíntota horizontal. Cuando $x \to -\infty$, la función está por debajo de la asíntota.

No tiene asíntotas oblicuas.

d) La recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

La función está por debajo de la asíntota horizontal.

No tiene asíntotas oblicuas.

e) Las rectas $x = -3$ y $x = 3$ son asíntotas verticales.

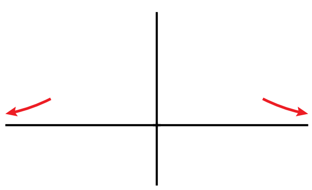
La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

La función queda por encima de la asíntota horizontal.

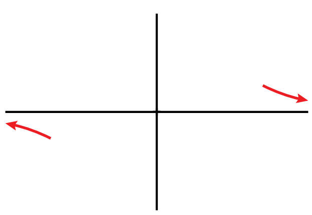
No tiene asíntotas oblicuas.

Página 289

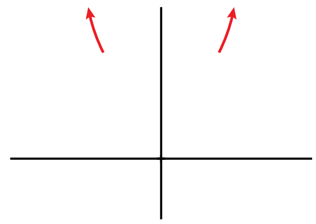
1 a) Asíntota: $y = 0$



b) Asíntota: $y = 0$

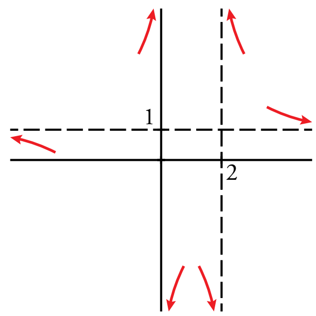


c) Tiene una rama parabólica cuando $x \to -\infty$ y otra cuando $x \to +\infty$.

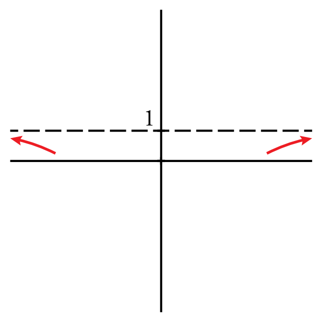


d) Asíntotas verticales: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$

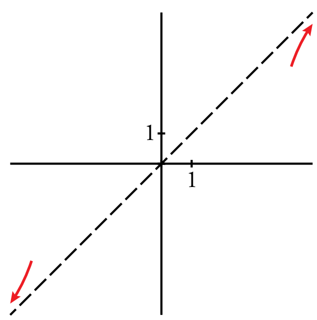
Asíntota horizontal: $y = 1$



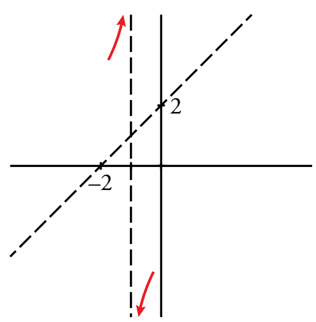
e) Asíntotas horizontal: $y = 1$



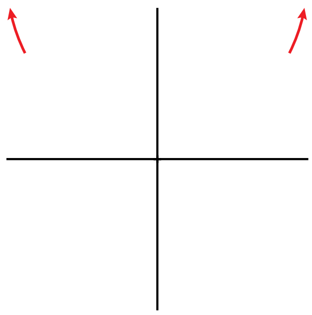
f) Asíntota oblicua: $y = x$



g) Asíntota vertical: $x = -1$. Asíntota oblicua: $y = x + 2$



h) No tiene asíntota vertical y las ramas en el infinito son parabólicas.



Página 290

1 a) Verdadero

b) Verdadero

Página 291

2 Hazlo tú.

En $x = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} (2x - 3) = -3$

En $x = 3$ no existe el límite.

Esta función es discontinua en $x = 3$, porque el límite en ese punto no existe. Tiene un salto finito en él. Para los demás valores de x, la función es continua porque está formada por trozos de rectas.

3 Hazlo tú.

a) 0

b) $-\infty$

Página 292

4 Hazlo tú.

$k = -4$

5 Hazlo tú.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

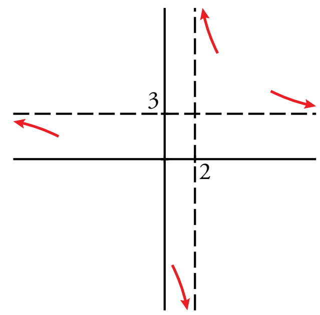
d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Página 293

6 Hazlo tú.

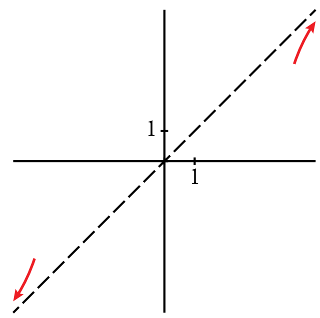
a) Asíntota vertical: $x = 2$

Asíntota horizontal: $y = 3$



b) No tiene asíntotas verticales.

$y = x$ es asíntota oblicua.



Página 294

1 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

El límite en $x = 0$ no existe.

2 a) $\dfrac{5}{2}$

b) 0

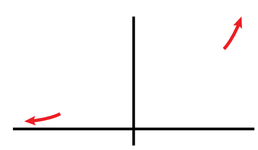
c) $+\infty$

3 $a = -2$, $b = -5$, $c = 2$

4 a) No tiene asíntotas verticales.

$y = 0$ es una asíntota horizontal.

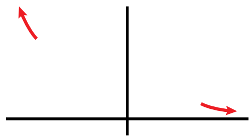
Tiene una rama parabólica cuando $x \to +\infty$.



b) No tiene asíntotas verticales.

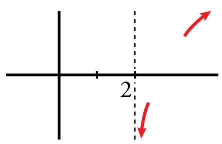
$y = 0$ es una asíntota horizontal.

Tiene una rama parabólica cuando $x \to -\infty$.



c) $x = 2$ es una asíntota vertical.

Tiene una rama parabólica en el infinito.



5 La función no tiene asíntotas, tiene dos ramas parabólicas hacia arriba cuando $x \to -\infty$ y $x \to +\infty$.

$f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x - 3} = x^2 - 4 = g(x)$

Las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ son iguales.

Página 295

1 a) Discontinuidad de tipo IV en $x = 3$, porque el valor de la función no coincide con el límite en el punto.

b) Discontinuidad de salto finito (tipo II). La función existe en $x = 3$, pero los límites laterales, aunque existen, son distintos.

c) Discontinuidad de salto infinito (tipo I). Tiene un asíntota vertical por la izquierda en $x = 3$.

d) Continua.

e) Discontinuidad de salto infinito (tipo I). Tiene una asíntota vertical en $x = 3$.

f) Discontinuidad de tipo III. La función no está definida en $x = 3$, pero existe el límite en dicho punto.

2 a) Discontinuidad de tipo III en $x = -1$.

Discontinuidad de salto finito en $x = 4$ (tipo II).

b) Discontinuidad de salto infinito en $x = 1$ (tipo I).

Discontinuidad de tipo III en $x = 2$.

c) Discontinuidades de salto finito en $x = 0$ y $x = 3$ (tipo II).

d) Discontinuidades de salto infinito en $x = -2$ y $x = 2$ (tipo I).

3 a) La función tiene una discontinuidad de tipo III.

b) Tiene una discontinuidad de tipo IV.

c) Esta función es continua.

d) La función tiene una discontinuidad de salto infinito (tipo I).

4 a) Continua en $\mathbb{R}$.

b) La función es continua en su dominio de definición, es decir, en $\mathbb{R} - \{-3, 0\}$.

c) La función es continua en $\left(-\infty, \dfrac{5}{2}\right]$.

d) La función es continua en $(-4, +\infty)$.

e) La función es continua en $\mathbb{R}$.

f) La función es continua en $\mathbb{R}$.

5 a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 2

d) 0 e) 3 f) 0

6 a) III b) I c) II

Ninguna es continua en $x = 3$.

7 a) 5 b) 0 c) –2 d) $\sqrt{2}$

e) 2 f) 2 g) 1 h) e^2

8 a) 5 b) 4 c) 1

9 a) La función es continua en $x = -1$.

b) La función tiene una discontinuidad de tipo III en $x = 1$.

c) La función tiene una discontinuidad de salto finito (tipo II) en $x = 0$.

d) La función es continua en $x = 2$.

e) La función es continua en $x = 3$.

Página 296

10 a) La función no es discontinua en ningún punto.

b) Esta función tiene una discontinuidad de tipo IV en $x = -1$.

c) La función no tiene discontinuidades.

d) En el punto $x = 3$ hay una discontinuidad de salto finito (tipo II).

11 a) 0

b) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ no existe.

c) $\dfrac{8}{5}$

12 a) No existe el límite. b) 11 c) 15

13 a) –2 b) 3

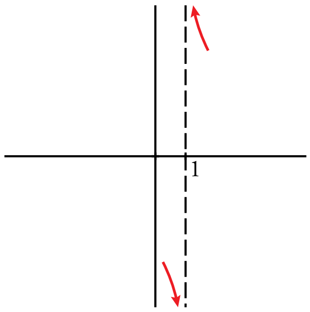
c) 2 d) –3

e) $-\dfrac{1}{4}$ f) 3

g) $-\dfrac{1}{2}$ h) 2

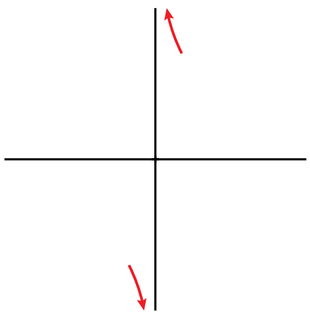
14 a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2}{x-1} = \dfrac{1}{0} = \pm\infty$

- Si $x \to 1^- \to f(x) \to -\infty$
- Si $x \to 1^+ \to f(x) \to +\infty$



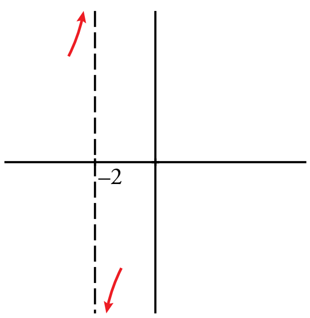
b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x}{x^2} = \infty$

- Si $x \to 0^- \to f(x) \to -\infty$
- Si $x \to 0^+ \to f(x) \to +\infty$

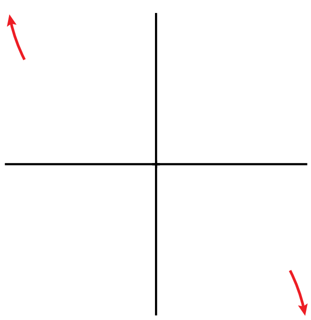


c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2}{x^2 + 2x} = \dfrac{4}{0} = \pm\infty$

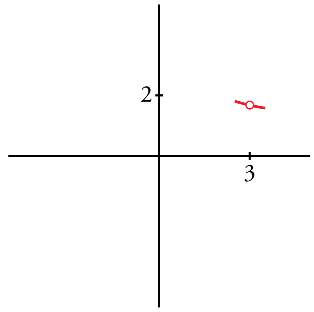
- Si $x \to -2^- \to f(x) \to +\infty$
- Si $x \to -2^+ \to f(x) \to -\infty$



d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x^4 - 10x^2} = 0$

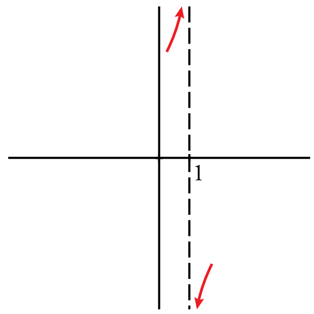


15 a) $\dfrac{5}{3}$



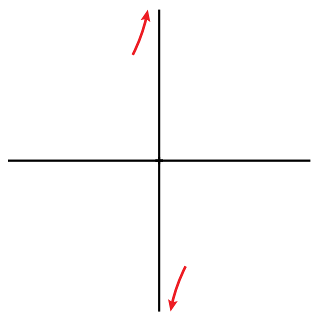
b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \infty$

- Si $x \to 1^- \to f(x) \to +\infty$
- Si $x \to 1^+ \to f(x) \to -\infty$



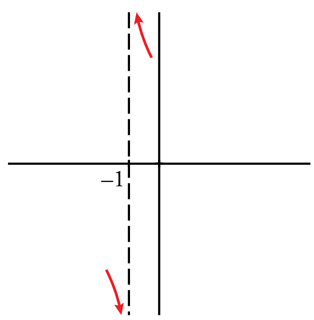
c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2} = \pm\infty$

- Si $x \to 0^- \to f(x) \to +\infty$
- Si $x \to 0^+ \to f(x) \to -\infty$

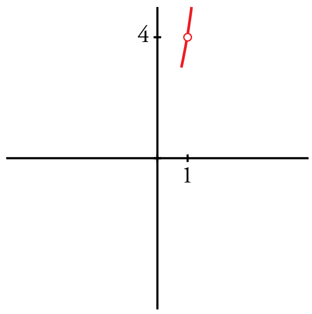


d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1} = \pm\infty$

- Si $x \to -1^- \to f(x) \to -\infty$
- Si $x \to -1^+ \to f(x) \to +\infty$

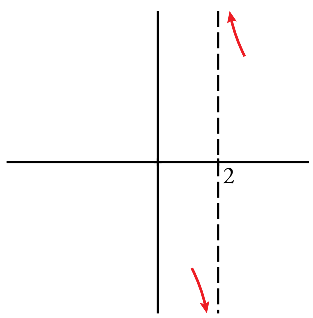


e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1} = 4$



f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4} = \pm\infty$

- Si $x \to 2^- \to f(x) \to -\infty$
- Si $x \to 2^+ \to f(x) \to +\infty$



16 a) 1 b) 5 c) e d)3

17 a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

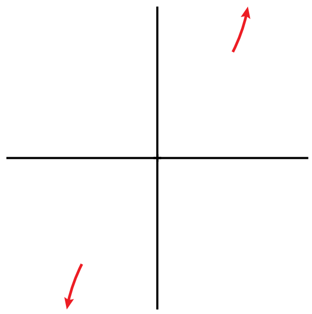
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

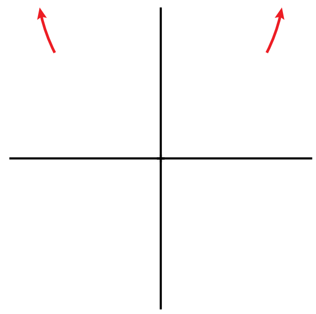
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$

18 a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 10x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 10x) = -\infty$



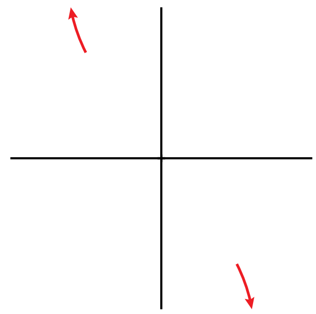
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 4} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 4} = +\infty$



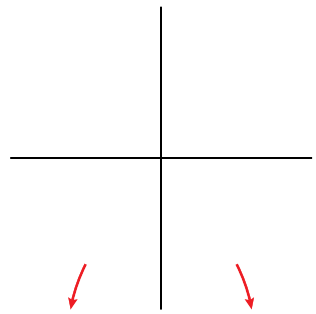
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (7 - 3x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (7 - 3x) = +\infty$



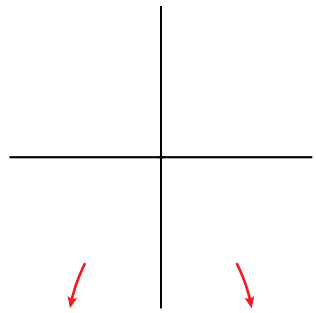
d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^2 + 8x + 9) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^2 + 8x + 9) = -\infty$



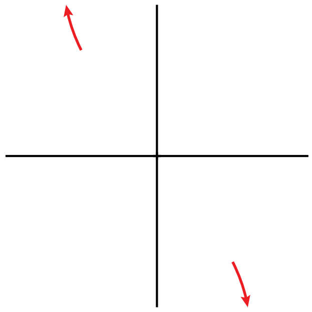
e) $\lim\limits_{x \to +\infty} [1 - (x - 2)^2] = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [1 - (x - 2)^2] = -\infty$



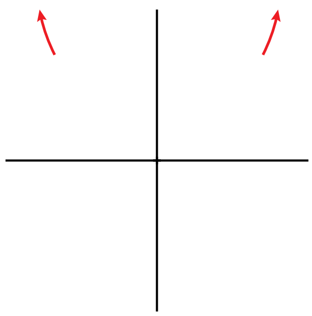
f) $\lim_{x \to +\infty} (7x^2 - x^3) = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} (7x^2 - x^3) = +\infty$



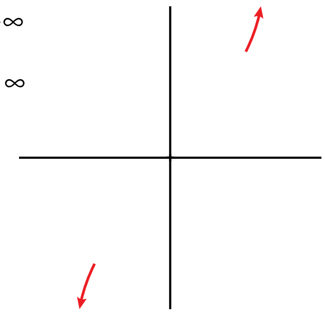
g) $\lim_{x \to +\infty} (5 - x)^2 = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} (5 - x)^2 = +\infty$



h) $\lim_{x \to +\infty} [(x + 1)^3 - 2x^2] = +\infty$

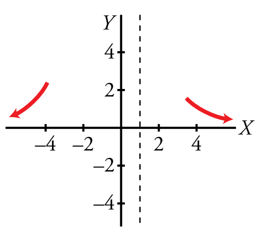
$\lim_{x \to -\infty} [(x + 1)^3 - 2x^2] = -\infty$



19 **Resuelto en el siguiente ejercicio 20.**

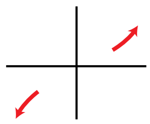
20 a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$



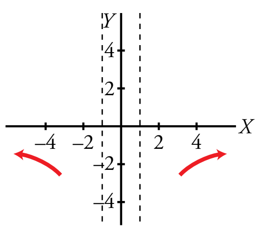
b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



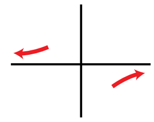
c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$



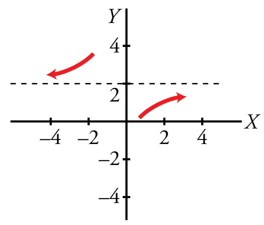
d) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$



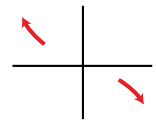
e) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$



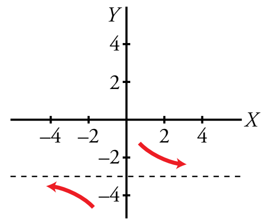
f) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



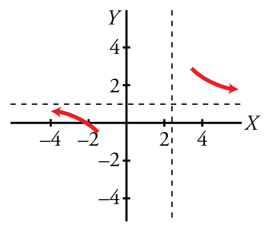
g) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -3$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -3$



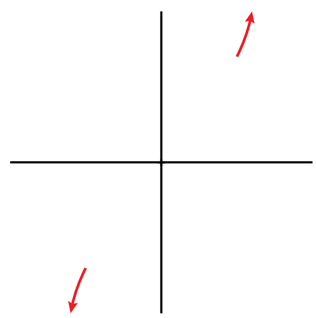
h) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$



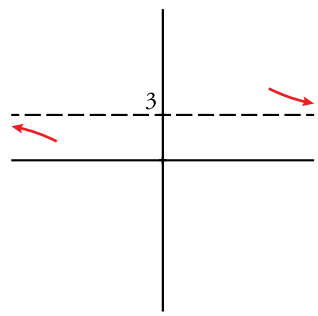
21 a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



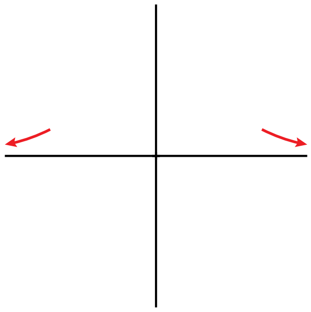
b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$



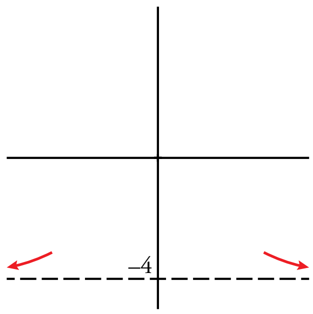
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$



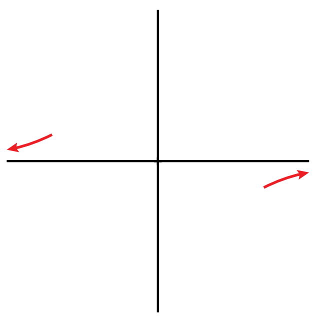
d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -4$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -4$



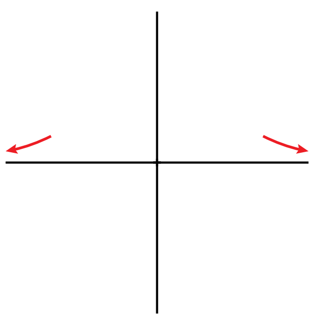
e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$



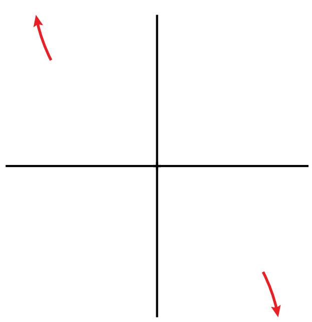
f) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$



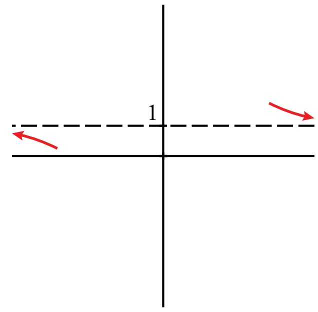
g) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



h) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$



22 a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

23 a) 0 b) 0 c) 0 d) 3

Página 297

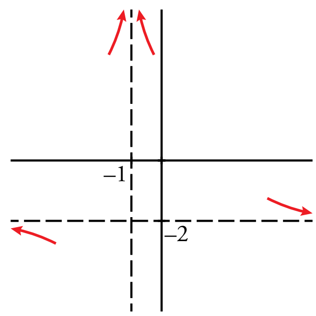
24 • Asíntota vertical: $x = 2$

Si $x \to 2^-$, $f(x) \to +\infty$ Si $x \to 2^+$, $f(x) \to -\infty$

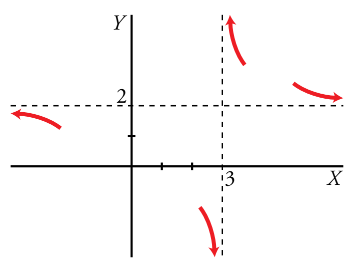
• Asíntota horizontal: $y = 3$

Si $x \to -\infty$, $f(x) - 3 > 0$ Si $x \to +\infty$, $f(x) - 3 < 0$

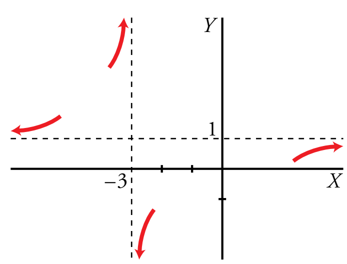
25



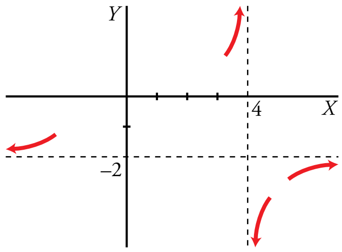
26 a) Asíntotas: $x = 3$; $y = 2$



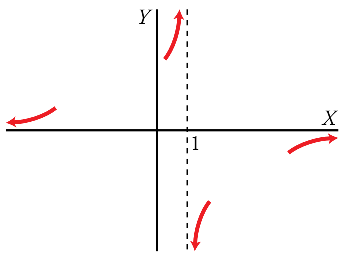
b) Asíntotas: $x = -3$; $y = 1$



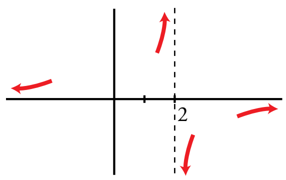
c) Asíntotas: $x = 4$; $y = -2$



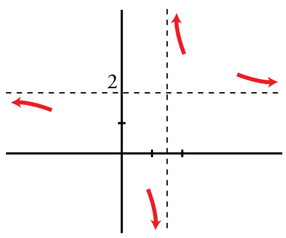
d) Asíntotas: $x = 1$; $y = 0$



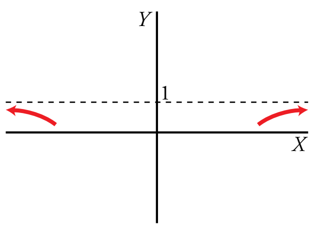
e) Asíntotas: $x = 2$; $y = 0$



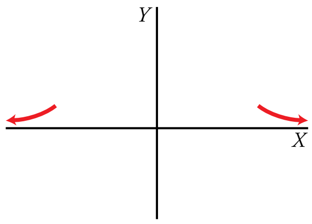
f) Asíntotas: $x = \dfrac{3}{2}$; $y = 2$



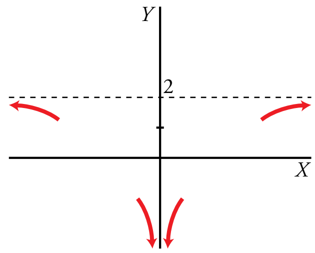
27 a) Asíntota: $y = 1$



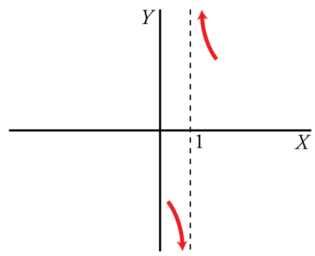
b) Asíntota: $y = 0$



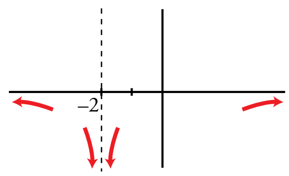
c) Asíntotas: $x = 0$; $y = 2$



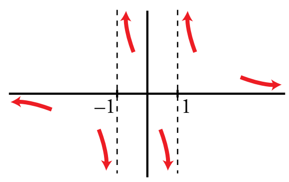
d) Asíntota: $x = 1$



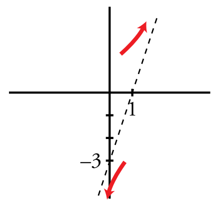
e) Asíntotas: $x = -2$; $y = 0$



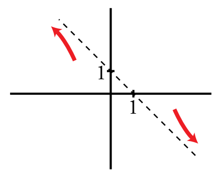
f) Asíntotas: $x = 1$, $x = -1$; $y = 0$



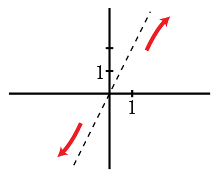
28 a) $y = 3x - 3$



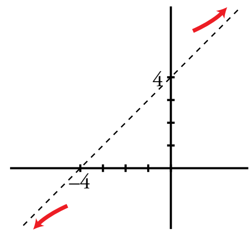
b) $y = -x + 1$



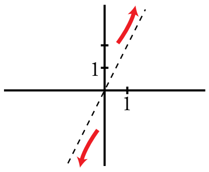
c) $y = 2x$



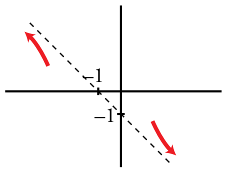
d) $y = x + 4$



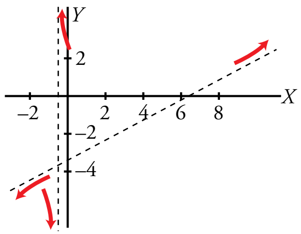
e) $y = 2x$



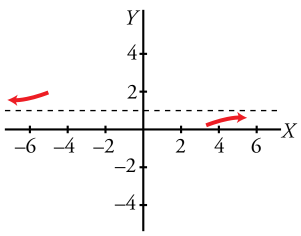
f) $y = -x - 1$



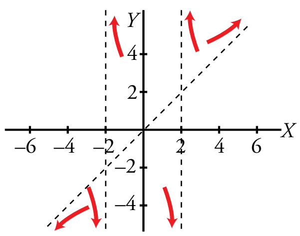
29 a) Asíntotas: $x = -\dfrac{1}{2}$; $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{13}{4}$



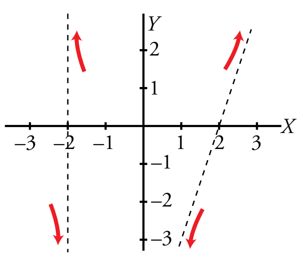
b) Asíntotas: $y = 1$



c) Asíntotas: $y = x$; $x = -2$, $x = 2$



d) Asíntotas: $x = -2$; $y = 3x - 6$



30 a) $k = 2$ b) $k = 1/2$ c) $k = 1$

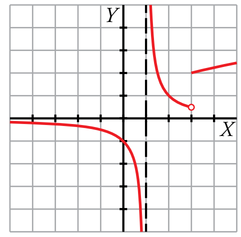
31 a) Si $k = 2$, la función es continua en $x = 5$.

En $x = 0$ tiene una discontinuidad de salto infinito (tipo I). En el resto de los puntos es continua.

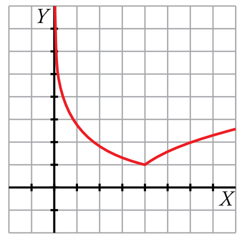
b) Si $k = \dfrac{1}{3}$, la función es continua en $x = 1$.

En $x = -2$ tiene una discontinuidad de salto infinito (tipo I). En el resto de los puntos es continua.

32 a) El límite no existe en el punto $x = 3$ y tiene una discontinuidad de salto finito (tipo II).



b) La función es continua



33 $a = 2$ y $b = 10$

34 a) 0 b) 3 c) $-\infty$

d) 0 e) $+\infty$ f) $\sqrt{2}$

35 a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 3^+} \log f(x) = -\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Página 298

36 a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \pm\infty \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \end{cases}$; $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \dfrac{5}{3}$

b) $\lim\limits_{x \to -2} g(x) = \dfrac{5}{4}$ $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = \pm\infty \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = +\infty \end{cases}$

c) $\lim\limits_{x \to -4} h(x) = 0$ $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 2} h(x) = \dfrac{3}{2}$

Las asíntotas verticales son:

- De $f(x)$, la recta $x = 0$.
- De $g(x)$, la recta $x = 2$.
- De $h(x)$, la recta $x = 0$.

37 a) • La recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

Si $x \to 0^-$, $f(x) \to +\infty$

Si $x \to 0^+$, $f(x) \to -\infty$

• La recta $y = x$ es la asíntota oblicua.

Si $x \to +\infty$, $f(x)$ va por debajo de la asíntota.

Si $x \to -\infty$, $f(x)$ va por encima de la asíntota.

b) • La recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

Si $x \to 2^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 2^+$, $f(x) \to +\infty$

• La recta $y = \dfrac{x}{2} + 1$ es la asíntota oblicua.

Si $x \to +\infty$, $f(x)$ va por encima de la asíntota.

Si $x \to -\infty$, $f(x)$ va por debajo de la asíntota.

c) • La recta $x = -2$ es una asíntota vertical.

Si $x \to -2^-$, $f(x) \to +\infty$

Si $x \to -2^+$, $f(x) \to -\infty$

• La recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

Si $x \to 2^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 2^+$, $f(x) \to +\infty$

• La recta $y = 2x + 1$ es la asíntota oblicua.

Si $x \to +\infty$, $f(x)$ va por encima de la asíntota.

Si $x \to -\infty$, $f(x)$ va por encima de la asíntota.

d) • La recta $x = 3$ es una asíntota vertical.

Si $x \to 3^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 3^+$, $f(x) \to +\infty$

• Tiene ramas parabólicas de crecimiento cada vez más rápido y ambas son hacia arriba.

38 • $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x} = \dfrac{\sqrt{3}}{0} = \pm\infty$

La recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

Si $x \to 0^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 0^+$, $f(x) \to +\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x} = 1$. La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal por la derecha.

• $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x} = -1$. La recta $y = -1$ es una asíntota horizontal por la izquierda.

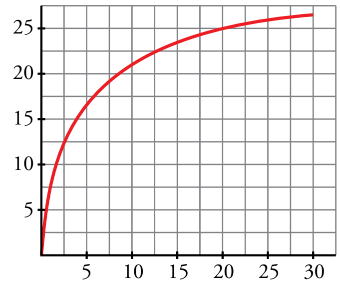
Si $x \to +\infty$, $f(x) - 1 = \dfrac{\sqrt{x^2+3} - x}{x} > 0$, la función está encima de la asíntota.

Si $x \to -\infty$, $f(x) - (-1) = \dfrac{\sqrt{x^2+3} + x}{x} < 0$, la función está debajo de la asíntota.

39 a) Realiza 6 montajes el primer día.

Realiza 21 montajes el décimo día.

b)



c) Se aproxima a 30, pues $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{30t}{t+4} = 30$.

40 a)

t	0	1	2	3	4	5	6
f(t)	50	100	130	140	144	146	147

El número crece pero de una forma cada vez más lenta.

b) El crecimiento tiende a estabilizarse.

41 $a = 2$, $b = \dfrac{4}{3}$

No puede tener asíntota oblicua.

42 $a = -4$, $b = 0$

43 a) Asíntotas verticales: $x = 2$ y $x = 4$.

Posición:

Si $x \to 2^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 2^+$, $f(x) \to +\infty$

Si $x \to 4^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 4^+$, $f(x) \to +\infty$

Asíntota oblicua: $y = \dfrac{x}{2} - 1$

Posición:

Si $x \to +\infty$, $f(x) > \dfrac{x}{2} - 1$

Si $x \to -\infty$, $f(x) < \dfrac{x}{2} - 1$

b) Asíntotas verticales: $x = 1$

Si $x \to 1^+$, $f(x) \to +\infty$

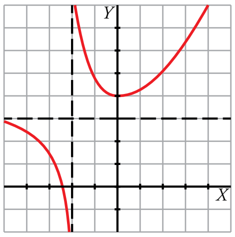
Si $x \to 1^-$, $f(x) \to -\infty$

Asíntota horizontal: $x = -2$

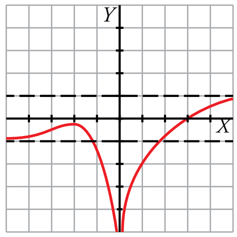
Si $x \to +\infty$, $f(x) > 2$

Rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más rápido en $-\infty$.

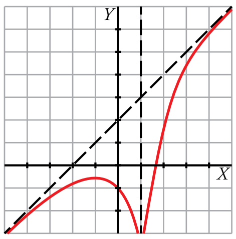
44 a)



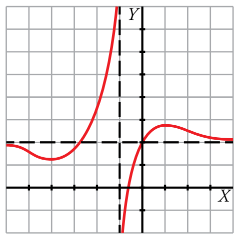
b)



c)



d)



45 Solo tiene sentido el estudio de las asíntotas verticales.

- $f(x) = \dfrac{1}{sen\ x}$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

  $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$ son asíntotas verticales.

  Posición:

  Si $x \to 0^+$, $f(x) \to +\infty$

  Si $x \to \pi^-$, $f(x) \to +\infty$

  Si $x \to \pi^+$, $f(x) \to -\infty$

  Si $x \to 2\pi^-$, $f(x) \to -\infty$

- $g(x) = \dfrac{1}{cos\ x}$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

  $x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{3\pi}{2}$ son asíntotas verticales.

  Posición:

  Si $x \to \dfrac{\pi}{2}^-$, $g(x) \to +\infty$

  Si $x \to \dfrac{\pi}{2}^+$, $g(x) \to -\infty$

  Si $x \to \dfrac{3\pi}{2}^-$, $g(x) \to -\infty$

  Si $x \to \dfrac{3\pi}{2}^+$, $g(x) \to +\infty$

- $h(x) = \dfrac{1}{1 - 2\cos x}$ en el intervalo $[0, 2\pi]$

  $x = \dfrac{\pi}{3}$, $x = \dfrac{5\pi}{3}$ son asíntotas verticales.

  Posición:

  Si $x \to \dfrac{\pi}{3}^-$, $h(x) \to -\infty$

  Si $x \to \dfrac{\pi}{3}^+$, $h(x) \to +\infty$

  Si $x \to \dfrac{5\pi}{3}^-$, $h(x) \to +\infty$

  Si $x \to \dfrac{5\pi}{3}^+$, $h(x) \to -\infty$

46 $a = 3$, resultando ser el límite igual a -8.

47 a) 0 b) $+\infty$ c) $+\infty$

d) 0 e) $+\infty$ f) $-\infty$

48 • Si $m = -4$, $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 9}{x^2 - 9} = \dfrac{1}{2}$

La discontinuidad en $x = 3$ es evitable del tipo III.

Para $m = -4$, en $x = -3$ hay una discontinuidad de salto infinito (tipo I) porque $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 9}{x^2 - 9} = \pm\infty$.

• Si $m = 2$, $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 + 2x^2 + 9}{x^2 - 9} = \dfrac{-5}{2}$ y tenemos una discontinuidad evitable de tipo III en $x = -3$.

Para $m = 2$, en $x = 3$ hay una discontinuidad de salto infinito (tipo I) porque $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 + 2x^2 + 9}{x^2 - 9} = \pm\infty$

• Si $m \neq -4$ y $m \neq 2$, las discontinuidades en $x = 3$ y en $x = -3$ son de salto infinito (tipo I) porque el numerador de la función no se anula.

Página 299

49 a) Falso. En una discontinuidad evitable de tipo III no existe la función en un punto pero sí existe el límite.

b) Verdadero, ya que no se cumple una de las condiciones de la continuidad.

c) Verdadero. Si tuviera tres o más asíntotas horizontales, dos de ellas coincidirían por uno de los extremos del eje OX y esto es imposible porque la función no puede tender simultáneamente a dos resultados diferentes.

d) Verdadero. Incluso puede tener infinitas asíntotas verticales, como ocurre con la función $y = tg\ x$.

e) Falso. Si $f(a) = 0$, puede ocurrir que la función tenga una discontinuidad evitable en $x = a$.

f) Falso. Porque $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2^x} = 0$ y la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

50 Son los puntos de la forma $x = k$ con k número entero.

51 Como la función $y = sen\ x$ es periódica, los valores que toma y oscilan cuando $x \to +\infty$ y, además, lo hacen sin acercarse a ningún número concreto. Por tanto, el límite no puede existir.

52 El límite b), porque cuando $x \to 4^+$, $x > 4$. Entonces, $4 - x < 0$ y la raíz cuadrada no existe.

53 a) Falso.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = +\infty$ porque $ax^n > 0$ al ser n par y $a > 0$.

b) Falso.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = -\infty$ porque $ax^n < 0$ al ser n impar y $a > 0$.

c) Verdadero.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = -\infty$ porque $ax^n < 0$ al ser n par y $a < 0$.

d) Verdadero.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = +\infty$ porque $ax^n > 0$ al ser n impar y $a < 0$.

54 a) $\lim\limits_{x \to +\infty} |2x + 1| = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} |2x + 1| = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (|x| + x - 3) = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} (|x| + x - 3) = -3$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (|x + 4| + |x|) = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} (|x + 4| + |x|) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (|x + 2| - |x|) = 2$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} (|x + 2| - |x|) = -2$

55 a) • Verticales: $x = 2$

Posición:

Si $x \longrightarrow 2^-$, $f(x) \longrightarrow +\infty$

Si $x \longrightarrow 2^+$, $f(x) \longrightarrow -\infty$

• Horizontales:

La recta $y = -1$ es una asíntota horizontal cuando $x \longrightarrow +\infty$.

La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal cuando $x \longrightarrow -\infty$.

b) • Verticales: $x = 1$

Posición:

Si $x \longrightarrow 1^-$, $f(x) \longrightarrow -\infty$

Si $x \longrightarrow 1^+$, $f(x) \longrightarrow +\infty$

• Horizontales:

La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal cuando $x \longrightarrow +\infty$.

La recta $y = -2$ es una asíntota horizontal cuando $x \longrightarrow -\infty$.

56 $\lim\limits_{x \to 0^+} 2^{1/x} = 2^{+\infty} = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0^-} 2^{1/x} = 2^{-\infty} = 0$

No existe el límite.

57 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = 2$

58 a) $\dfrac{1}{2}$ $\qquad$ b) 2 $\qquad$ c) $\dfrac{1}{3}$

d) $\dfrac{10}{3}$ $\qquad$ e) $\dfrac{9}{5}$ $\qquad$ f) $\dfrac{3}{2}$

59 Las asíntotas verticales son las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Posición:

$\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = \dfrac{1}{0} = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = \dfrac{1}{0} = +\infty$

No tiene asíntotas horizontales.

Autoevaluación

Página 299

1 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -5$

No tiene límite en $x = 3$.

$\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 13$

Es continua en $x = 0$ y en $x = 5$. No es continua en $x = 3$, porque no tiene límite en ese punto.

2 a) $\dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{1}{3}$

c) $+\infty$

3 a) No tiene límite en $x = 3$.

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0$

No tiene límite en $x = 2$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

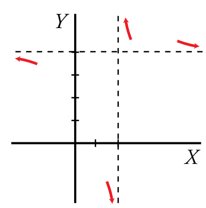
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$

4 • Asíntota vertical: $x = 2$

Posición $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{4x}{x - 2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{4x}{x - 2} = +\infty \end{cases}$

• Asíntota horizontal: $y = 4$

Posición: $\begin{cases} x \longrightarrow +\infty, & y > 4 \\ x \longrightarrow -\infty, & y < 4 \end{cases}$



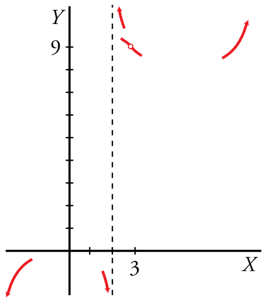
5 $a = 2$

6 $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 9$

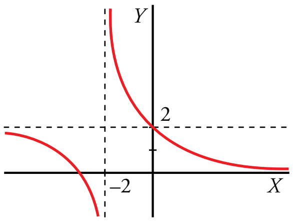
$$\lim_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



7

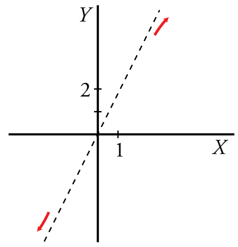


8 No tiene asíntotas verticales.

No tiene asíntotas horizontales.

Asíntota oblicua: $y = 2x$

$$\text{Posición} \begin{cases} x \to +\infty \ \text{ curva} < \text{asíntota} \\ x \to -\infty \ \text{ curva} > \text{asíntota} \end{cases}$$



Página 301

1. La distancia que separa los puntos en los instantes $t = 2$ y $t = 2,5$ es de 12,5 mm, luego la velocidad es:

$$25 \text{ mm/s} = 2,5 \text{ cm/s}$$

   La distancia que separa los puntos en los instantes $t = 2$ y $t = 2,1$ es de 3,5 mm, luego la velocidad es:

$$35 \text{ mm/s} = 3,5 \text{ cm/s}$$

2. En el intervalo [2; 2,5] la velocidad es 2,5 cm/s. En el intervalo [2; 2,1] la velocidad es 3,77 cm/s.
3. En el primer intervalo la velocidad es 3,997 cm/s, y en el segundo, 4 cm/s.

   Sí podemos considerar que esta última velocidad es muy parecida a la velocidad instantánea en $t = 2$ s porque el intervalo de tiempo transcurrido es tan solo una millonésima de segundo.

Página 302

1 Hazlo tú.

T.V.M. $[1, 2] = 1$ T.V.M. $[1, 5] = \frac{1}{2}$ T.V.M. $[1, 10] = \frac{1}{3}$

1 a) Verdadero b) Verdadero c) Falso

2 T.V.M. $[1, 2] = -5$

T.V.M. $[1, 3] = -4$

T.V.M. $[1, 4] = -3$

T.V.M. $[1, 5] = -2$

T.V.M. $[1, 6] = -1$

T.V.M. $[1, 7] = 0$

T.V.M. $[1, 8] = 1$

3 T.V.M. $[1, 1 + h] = h - 6$

Dando a h los valores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 se obtienen los resultados del ejercicio anterior.

Página 303

4

PUNTO	PENDIENTE
A	$f'(-8) = \frac{9}{5}$
B	$f'(-3) = \frac{1}{7}$
C	$f'(1) = -1$
D	$f'(5) = -\frac{1}{2}$
E	$f'(10) = 2$

Página 305

1 Hazlo tú.

$f'(1) = -3$ $f'(-1) = -\frac{1}{3}$ $f'(5) = -\frac{1}{3}$

2 Hazlo tú.

$f'(0) = 7$ $f'(1) = 8$ $f'(2) = 9$

$f'(3) = 10$ $f'(4) = 11$ $f'(5) = 12$

1 a) Verdadero

b) Verdadero. La pendiente de la recta tangente en $x = 3$ es cero, luego la recta es horizontal.

c) Verdadero, debido a la inclinación de la recta tangente a f en ese punto.

2 $f'(-2) = -\frac{1}{4}$

3 $f'(-3) = -2$ $f'(0) = -2$ $f'(4) = -2$ $f'(7) = -2$

Como la función es una línea recta, crece o decrece siempre de la misma forma y al ser la derivada una forma de medir el crecimiento de una función, esta debe valer lo mismo en todos los puntos.

4 $f'(-2) = -17$ $f'(-1) = -11$ $f'(0) = -5$

$f'(1) = 1$ $f'(2) = 7$ $f'(3) = 13$

$f'(4) = 19$ $f'(5) = 25$ $f'(6) = 31$

Página 306

1 Verdadero, porque al ser paralelas las rectas tangentes en cualquier punto, deben tener la misma pendiente en todos los puntos.

2 $f'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2}$ $f'(4) = \frac{-3}{4}$ $f'(-1) = \frac{-1}{3}$

$f'(1) = -3$ $f'(5) = \frac{-1}{3}$

3 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$ $f'(4) = \frac{1}{2}$ $f'(7) = \frac{1}{4}$

4 $f'(x) = 3x^2 + 2x$

Página 307

5 a es la abscisa del punto en el que se halla la recta tangente.

$f(a)$ es la ordenada de dicho punto.

$f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente o, también, la derivada de la función en el punto de abscisa a.

x es la variable independiente de la recta tangente.

y es la variable dependiente de dicha recta.

Página 308

1 a) $5x^4$ b) $\frac{-2}{x^3}$ c) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ d) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ e) $\frac{5}{6\sqrt[6]{x}}$

Página 310

1 Hazlo tú.

a) $f'(x) = 20x^3 - 4x + 3$ b) $g'(x) = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}} - \frac{4\sqrt[3]{3}}{3}\sqrt[3]{x}$

c) $h'(x) = -\frac{4}{x^2\sqrt[3]{x}}$

2 Hazlo tú.

a) $f'(x) = \frac{ln\,625}{125}625^x$

b) $g'(x) = \frac{4x^2 - 8x + 8}{(x^2 + x - 3)^2}$

c) $h'(x) = 2x - 5 + \frac{1}{x^2}$

2 $f'(x) = 10x + 7 - \frac{1}{\sqrt{x}}$

3 $f'(x) = \sqrt{3x}\,e^x\left(\frac{3}{2} + x\right)$

4 $f'(x) = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{e^x(cos\,x - sen\,x - ln\,2\,cos\,x)}{2^x}$

5 $f'(x) = 3^x \cdot tg\,x + x \cdot 3^x\,ln\,3 \cdot tg\,x + \frac{x \cdot 3^x}{cos^2 x}$

6 $f'(x) = \frac{1 - ln\,2\,log_2 x}{x^2\,ln\,2}$

7 $f'(x) = 2 + \frac{5}{x^2} - \frac{6}{x^3}$

8 $f'(x) = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$

9 $f'(x) = \frac{x + 3}{\sqrt{1 - x^2}} + arc\,sen\,x$

10 $f'(x) = \frac{cos^2 x + \sqrt{1 - x^2}\,(arc\,sen\,x)\,sen\,x}{\sqrt{1 - x^2}\,cos^2 x}$

11 $f'(x) = 5^x\,\frac{x\,ln\,5 - 1}{x^2}$

Página 311

12 $f'(x) = (2x - 5)\,cos\,(x^2 - 5x + 7)$

13 $f'(x) = \frac{10}{3\sqrt[3]{5x + 3}}$

14 $f'(x) = -3\,sen\,6x$

15 $f'(x) = \frac{2(1 - ln\,10\,log\,x)}{x^2\,ln\,10}$

16 $f'(x) = -3\,sen\,(3x - \pi)$

17 $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2x}}$

18 $f'(x) = e^{2x+1}(1 + 2x)$

19 $f'(x) = \frac{2x(1 - x^2)\,cos\,(x^2 + 1) + x\,sen\,(x^2 + 1)}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$

Página 313

1 Hazlo tú.

Los puntos singulares son (–1, 10) y (2, –17).

Los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(2, +\infty)$ son intervalos de crecimiento. En el intervalo (–1, 2) la función decrece.

Página 314

1 La recta tangente en $x = -1$ es $y = -6x$.

La recta tangente en $x = 0$ es $y = -2x - 3$.

La recta tangente en $x = 2$ es $y = 30x - 51$.

2 $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$ son las abscisas de los puntos en los que la pendiente es 3.

$x_1 = 0 \rightarrow$ La recta tangente es $y = 3x$.

$x_2 = 2 \rightarrow$ La recta tangente es $y = 3x - 4$.

$x_3 = -2 \rightarrow$ La recta tangente es $y = 3x - 4$.

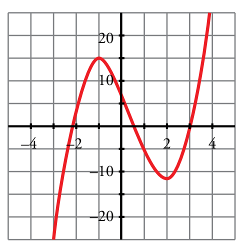
3 En el intervalo [0, 3], el máximo se encuentra en $x = 2$ y vale 19 y el mínimo se encuentra en $x = 0$ y vale 3.

En el intervalo [–5, 3], el máximo se encuentra en $x = -5$ y vale 68 y el mínimo se encuentra en $x = -2$ y vale –13.

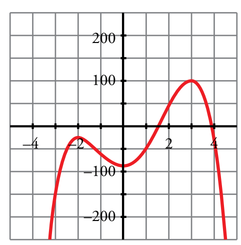
4 a) $\frac{-1}{7}$ b) $\frac{5}{3}$ c) 0

Página 316

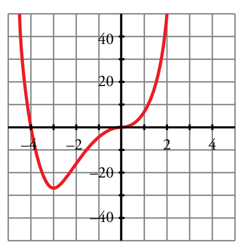
1 a)



b)

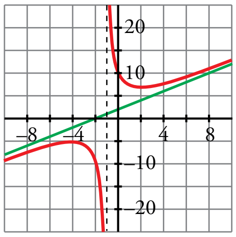


c)

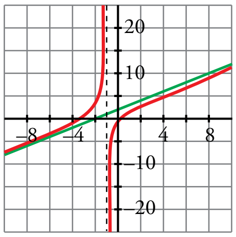


Página 318

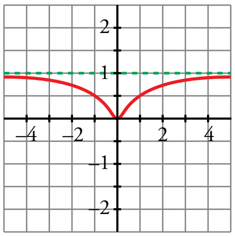
2 a)



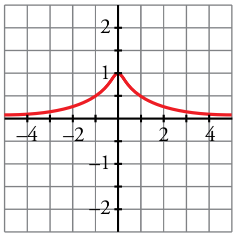
b)



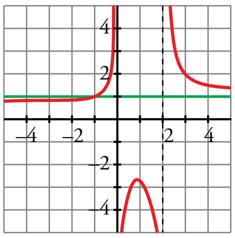
c)



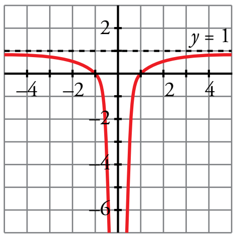
d)



e)



f)



Página 319

1 Hazlo tú.

$f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

2 Hazlo tú.

$f'(x) = -\dfrac{2}{x(x+1)}$

3 Hazlo tú.

$y = 2x - \dfrac{3}{2}\pi - 1$

Página 320

4 Hazlo tú.

$y = 2x - 3$

5 Hazlo tú.

Los puntos singulares son $(0, 0)$ y $(4, -32)$.

$(4, -32)$ es un mínimo. $(0, 0)$ es un máximo.

6 Hazlo tú.

$c = 0$; $b = 1$

Página 321

7 Hazlo tú.

f crece en $(0, 2) \cup (2, 4)$ y decrece en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$.

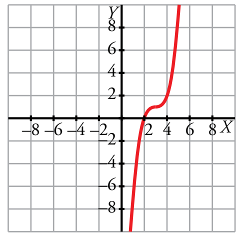
8 Hazlo tú.

Base = 9 m, altura = 9 m

Página 322

9 Hazlo tú.

El punto $(3, 1)$ es el único punto singular.

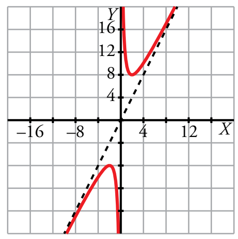


10 Hazlo tú.

Asíntota vertical: $x = 0$

Asíntota oblicua: $y = 2x$

Puntos singulares: $(-2, -8)$ y $(2, 8)$.



Página 323

11 Hazlo tú.

a) $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } x < 4 \\ 2 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$ b) $g'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ 2x & \text{si } x > -1 \end{cases}$

Página 324

12 Hazlo tú.

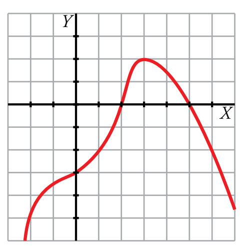
a) $a = 1$, $b = 3$ b) $a = -9$, $b = 5$

Página 325

1 a) $f'(-2) = 0$; $f'(3) = 0$; $f'(6) = -\dfrac{5}{3}$

b) $f'(x) < 0$ en $(1, 3) \cup (5, +\infty)$

2



3 Supongamos que a y b son los catetos del triángulo rectángulo.

Si $a = 6$ y $b = 6$, se obtiene el triángulo rectángulo de área máxima.

4 a) $f'(0) = -3$ y $f'(4) = 3$.

b) El punto $x = 2$ es un punto singular.

c) La función es creciente en $(2, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 2)$.

5 La ecuación de la recta tangente es $y = -x + 4$.

Página 326

1 a) $-\frac{1}{3} \to$ Decrece b) $-1 \to$ Decrece

c) $3 \to$ Crece d) $3 \to$ Crece

2 a) Para la función $f(x)$: T.V.M. $[1, 1 + h] = 3 - h$

Para la función $g(x)$: T.V.M. $[1, 1 + h] = \frac{-1}{2h + 4}$

b) Para la función $f(x)$: T.V.M. $[1; 1{,}5] = 2{,}5$

Para la función $g(x)$: T.V.M. $[1; 1{,}5] = \frac{-1}{5}$

3 Para $f(x)$: T.V.M. $[2, 3] = 19$ T.V.M. $[3, 4] = 37$

Para $g(x)$: T.V.M. $[2, 3] = 18$ T.V.M. $[3, 4] = 54$

En $[2, 3]$ crece más $f(x)$.

En $[3, 4]$ crece más $g(x)$.

4 El crecimiento medio es mayor entre las semanas 20 y 30.

5 a) $f'(1) = 6$ b) $f'(1) = 12$

c) $f'(1) = -3$ d) $f'(1) = \frac{-2}{27}$

6 $f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} (-h) = 0$ $g'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{3}{3h - 1} = -3$

7 a) $f'(-3) = -3$ $f'(0) = \frac{3}{2}$ $f'(4) = -2$

b) En $x = -2$ y $x = 2$.

c) En $x = 1$ la derivada es positiva y en $x = 3$ es negativa.

8 a) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} (2x + h + 7) = 2x + 7$

c) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} (3x^2 + 3hx + h^2 - 5) = 3x^2 - 5$

d) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{x(h + x)} = \frac{1}{x^2}$

9 a) $f'(x) = x^2 + 14x - 4$ b) $f'(x) = 6sen\ 2x$

c) $f'(x) = -\frac{1}{3x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ d) $f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$

e) $f'(x) = \frac{-7}{(7x+1)^2} + \frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{x}}$ f) $f'(x) = sen\ \frac{x}{2} + \frac{x}{2} cos\ \frac{x}{2}$

g) $f'(x) = -\frac{1}{2(x-4)\sqrt{x-4}}$ h) $f'(x) = \frac{1}{x} - e^{-x}$

i) $f'(x) = \frac{1 + tg^2\ x}{2}$ o también $f'(x) = \frac{1}{2\ cos^2\ x}$

j) $f'(x) = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1 - 4x^2}}$

10 a) $f'(x) = 15(5x - 2)^2$

b) $f'(x) = \frac{4}{81} \frac{(x^4 - 1)(x^2 + 1)^2}{x^5}$

c) $f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{6 - x}}$ d) $f'(x) = -2e^{-2x}$

e) $f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2 - 4}{x}} \cdot \frac{x^3 - 12x}{(x^2 - 4)^2}$

f) $f'(x) = \frac{e^{2x+1}}{8}(2x^3 + 3x^2)$

g) $f'(x) = 3x^2[cos^2\ 3x - x\ sen\ 6x]$

h) $f'(x) = 6x\ tg^2\ x^2 \cdot (1 + tg^2\ x^2)$

i) $f'(x) = \frac{\sqrt{7}}{2x\sqrt{ln\ x}}$ j) $f'(x) = \frac{3}{x^2 + 9}$

11 a) $f'(x) = \frac{-e^x}{2\sqrt{arc\ cos\ e^x}\,(1 - e^{2x})}$

b) $f'(x) = \frac{1 - x^2}{2x(x^2 + 1)}$

c) $f'(x) = sen\ 2x - sen\ x \cdot e^{cos\ x}$

d) $f'(x) = \sqrt[4]{2} \cdot \frac{1 - 4x\ ln\ 2}{2^{x+1} \cdot \sqrt[4]{x^3}}$

e) $f'(x) = e^{sen\ x}\left(cos\ x \cdot ln\ tg\ x + \frac{1}{sen\ x\ cos\ x}\right)$

f) $f'(x) = \frac{-3\ sen\ (ln\ x)}{x}$ g) $f'(x) = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x^2 + x}}$

h) $f'(x) = -\frac{1}{1 + x^2}$

i) $f'(x) = \frac{ln\ 7 \cdot 7^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} - \frac{x\ sen\ x + 2\ cos\ x}{x^3}$

j) $f'(x) = \frac{4e^{-2x}}{(1 + e^{-2x})^2}$

12 a) $f'(x) = \dfrac{-4x}{x^4 - 1}$

b) $f'(x) = \dfrac{1 - x^2}{2x^3 + 2x}$

c) $f'(x) = \dfrac{1 - x}{x}$

d) $f'(x) = \dfrac{6x + 5}{ln\,10\,(3x^2 - 5x)}$

e) $f'(x) = \dfrac{2\,(1 + tg^2\,x)}{tg\,x \cdot ln\,10}$

f) $f'(x) = ln\,x + 1$

Página 327

13 a) Recta tangente $\rightarrow$ $y = -x + 2$

Recta normal $\rightarrow$ $y = x - 2$

b) Recta tangente $\rightarrow$ $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4}$

Recta normal $\rightarrow$ $y = -4x + 14$

c) Recta tangente $\rightarrow$ $y = -8x - 11$

Recta normal $\rightarrow$ $y = \dfrac{1}{8}x - \dfrac{23}{8}$

d) Recta tangente $\rightarrow$ $y = \dfrac{1}{e^2}x + 1$

Recta normal $\rightarrow$ $y = -e^2x + e^4 - 2$

e) Recta tangente $\rightarrow$ $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{1}{2}$

Recta normal $\rightarrow$ $y = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{1}{2}$

14 a) $x = 2$ b) $x_1 = -1,\ x_2 = -3$

c) $x = -2$ d) $x = \dfrac{3}{4}$

15 a) En $x = -3$, la recta es $y = -2(x + 3) - 2$.

b) La recta tangente en $x = -\sqrt{3}$ es $y = 6(x + \sqrt{3})$ y en $x = \sqrt{3}$ es $y = 6(x - \sqrt{3})$.

c) La recta tangente en $x = -1$ es $y = 5(x + 1) - 4$ y en $x = -3$ es $y = 5(x + 3) + 6$

16 Los puntos de corte con el eje de abscisas son $x = -2$ y $x = 2$.

La recta tangente en $x = -2$ es $y = 4(x + 2)$ y en $x = 2$ es $y = -4(x - 2)$.

La recta normal en $x = -2$ es $y = -\dfrac{1}{4}(x + 2)$ y en $x = 2$ es $y = \dfrac{1}{4}(x - 2)$.

17 Los puntos donde la recta tangente es horizontal son aquellos en los que $f'(x) = 0$.

a) En $x = \dfrac{1}{3}$ la recta tangente es $y = \dfrac{14}{3}$

b) La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = 0$.

La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y = 0$.

c) La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = 0$.

La ecuación de la recta tangente en $x = 3$ es $y = -27$.

d) La ecuación de la recta tangente en $x = -2$ es $y = 16$.

La ecuación de la recta tangente en $x = 2$ es $y = -16$.

e) La ecuación de la recta tangente en $x = -1$ es $y = -2$.

La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y = 2$.

f) La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = 0$.

18 a) $(4, -5)$ es un punto singular.

Intervalo de crecimiento, $(4, +\infty)$. Intervalo de decrecimiento, $(-\infty, 4)$.

b) $(2, 12)$ es un punto singular.

Intervalo de crecimiento, $(-\infty, 2)$. Intervalo de decrecimiento, $(2, +\infty)$.

c) $(0, 0)$ y $(6, -36)$ son puntos singulares.

Intervalos de crecimiento, $(-\infty, 0) \cup (6, +\infty)$. Intervalo de decrecimiento, $(0, 6)$.

d) $(-2, -8)$ es un punto singular.

Intervalo de crecimiento, $\mathbb{R}$.

e) $(0, 0)$ y $(2, 4)$ son puntos singulares.

Intervalos de crecimiento, $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Intervalos de decrecimiento, $(0, 1) \cup (1, 2)$

f) No tiene puntos singulares. Los intervalos de crecimiento son $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

19 a) $f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 3 = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

La función es creciente en todo $\mathbb{R}$.

b) $f'(x) = 0 \rightarrow -\dfrac{1}{x^2} = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

Los intervalos de decrecimiento son:

$$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

c) $f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

El intervalo de crecimiento es $[0, +\infty)$.

d) $f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{1}{x} = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

El intervalo de crecimiento es $(0, +\infty)$.

20 a) Los puntos $\left(\frac{1}{3}, \frac{58}{27}\right)$ y (1, 2) son puntos singulares.

$\left(\frac{1}{3}, \frac{58}{27}\right)$ es un máximo y (1, 2) es un mínimo.

b) Los puntos (0, 0) y (2, 4) son puntos singulares.

(0, 0) es un mínimo y (2, 4) es un máximo.

c) Los puntos (–2, –6), (0, 10) y (2, –6) son puntos singulares.

(–2, –6) y (2, –6) son mínimos.

El punto (0, 10) debe ser un máximo porque está entre dos mínimos.

d) El punto (–1, 9) es un punto singular.

(–1, 9) es un máximo.

e) El punto (0, 3) es un punto singular.

(0, 3) es un máximo.

f) El punto $\left(\sqrt[3]{2}, 3\sqrt[3]{4}\right)$ es un punto singular.

$\left(\sqrt[3]{2}, 3\sqrt[3]{4}\right)$ es un mínimo.

21 a) $f' > 0$ si $x < -1$

$f' < 0$ si $x > -1$

b) $f' > 0$ si $x < 0$

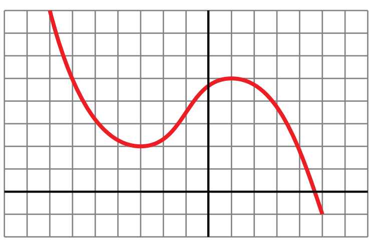
$f' < 0$ si $x > 0$

c) $f' > 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$f' < 0$ si $x \in (-1, 1)$

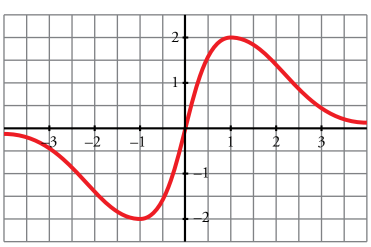
22 (–3, 2) es un mínimo.

(1, 5) es un máximo.



23

24



25 $f'(x) = 3(x-1)^2$: $f(0) = -1 \rightarrow$ pasa por (0, –1)

$f(1) = 0 \rightarrow$ pasa por (1, 0)

$f(2) = 1 \rightarrow$ pasa por (2, 1)

$f'(1) = 0$

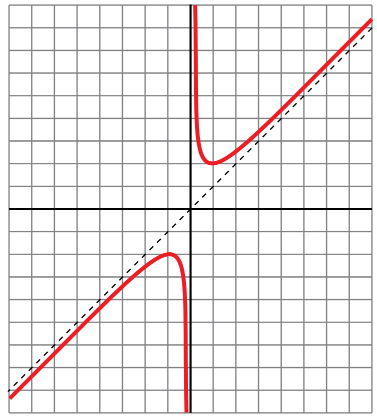
El punto (1, 0) no es ni máximo ni mínimo.

26 $f'(x) = 0 \rightarrow x = -1,\ x = 1$

Puntos (–1, –2) y (1, 2).

Asíntota vertical en $x = 0$.

Asíntota oblicua en $y = x$.



Página 328

27 a) Función I

Tiene una rama parabólica cuando $x \rightarrow -\infty$.

La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y la función queda por encima de la asíntota.

Función II

La recta $y = x - 2$ es una asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$ y cuando $x \rightarrow +\infty$. En ambos casos, la función queda por debajo de la asíntota.

La recta $x = 0$ es una asíntota vertical y la función tiende a $-\infty$ por los dos lados.

b) Función I

El punto (–2, –4) es un mínimo. El punto (3, 2) es un máximo. Hay otro punto singular, (0,5; –1), pero no es ni máximo ni mínimo.

Función II

Solo tiene un punto singular, el máximo (–1, –4).

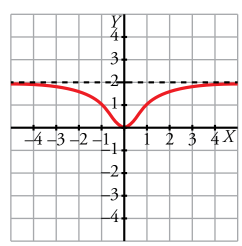
28 $\left.\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f'(0)=0 \end{array}\right\} \rightarrow$ La derivada en (0, 0) es nula.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = 2$

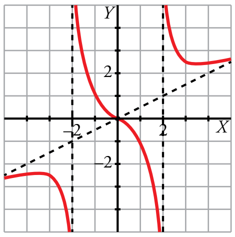
  La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal.

- $f(x) - 2 = \dfrac{2x^2}{1+x^2} - 2 = -\dfrac{2}{x^2+1}$

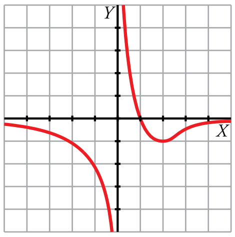
  Como la diferencia siempre es negativa, la función queda por debajo de la asíntota $y = 2$.



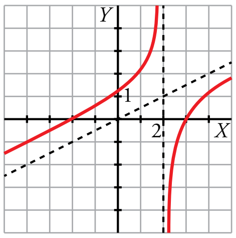
29



30



31



32 a) (–3, 2) b) $x = \dfrac{-b}{2a}$ es la abscisa del vértice.

$\dfrac{-b^2 + 4ac}{4a}$ es la ordenada de vértice.

33 $f(x) = -x^2 + 6x - 7$

34 Para $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ la tangente en $x = 2$ es $y = 10x - 7$.

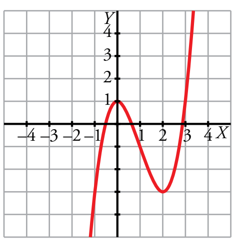
Para $g(x) = x^2 + 6x$ la tangente en $x = 2$ es $y = 10x - 4$.

35 $a = 6, \ b = 6, \ c = -6$

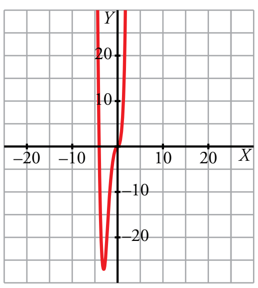
36 $f'(2) = \dfrac{4}{3}$ $f(2) = 3$

37 $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

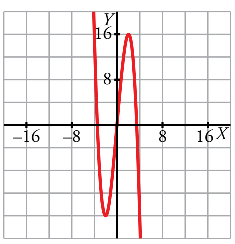
38 a)



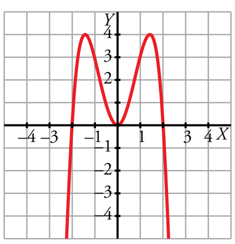
b)



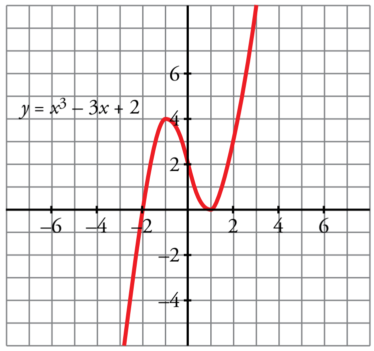
c)



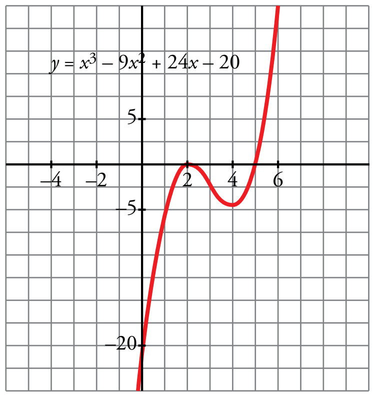
d)



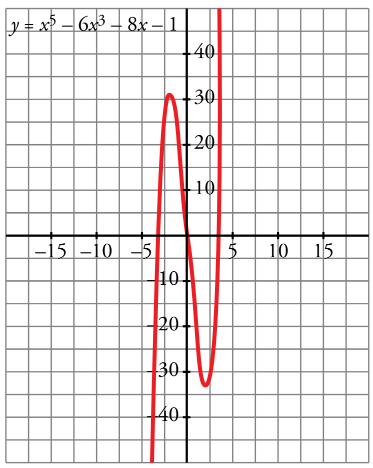
39 a) Máximo en (–1, 4). Mínimo en (1, 0).



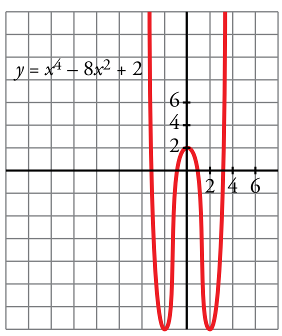
b) Máximo en (2, 0). Mínimo en (4, –4).



c) Máximo en (–2, 31). Mínimo en (2, –33).

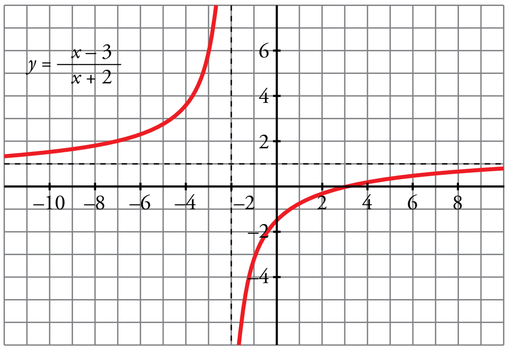


d) Máximo en (0, 2). Mínimos en (2, –14) y en (–2, –14)



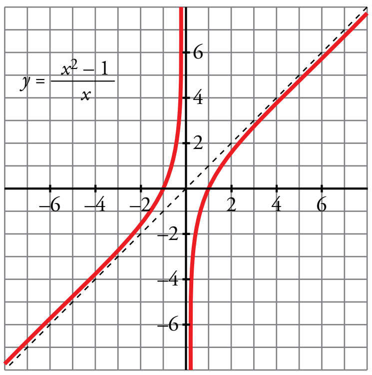
40 a) $f'(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2} \neq 0$

Los puntos de corte son: $\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$, $(3, 0)$.



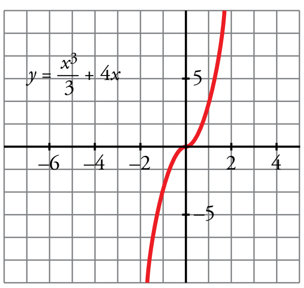
b) $f'(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2} \neq 0$

Los puntos de corte son: $(1, 0)$, $(–1, 0)$.



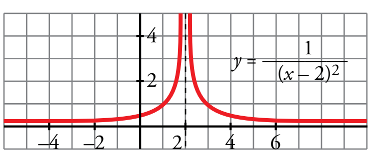
c) $f'(x) = x^2 + 4 \neq 0$

El punto de corte es $(0, 0)$.



d) $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^3} \neq 0$

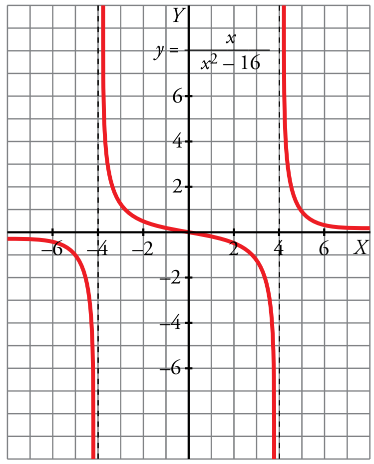
El punto de corte es $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$.



41 a) Asíntotas verticales: $x = -4$, $x = 4$

Asíntota horizontal: $y = 0$

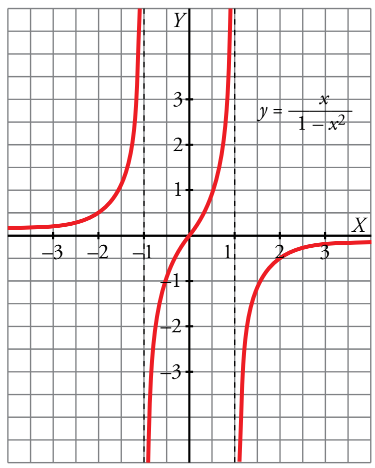
No hay asíntotas oblicuas ni puntos de tangente horizontal.



b) Asíntotas verticales: $x = 1$, $x = -1$

Asíntota horizontal: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas ni puntos de tangente horizontal.

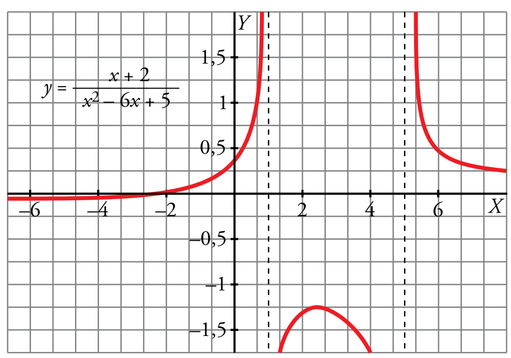


c) Asíntotas verticales: $x = 5$, $x = 1$

Asíntota horizontal: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son, aproximadamente, $(–6{,}58; –0{,}052)$, $(2{,}58; –1{,}197)$.



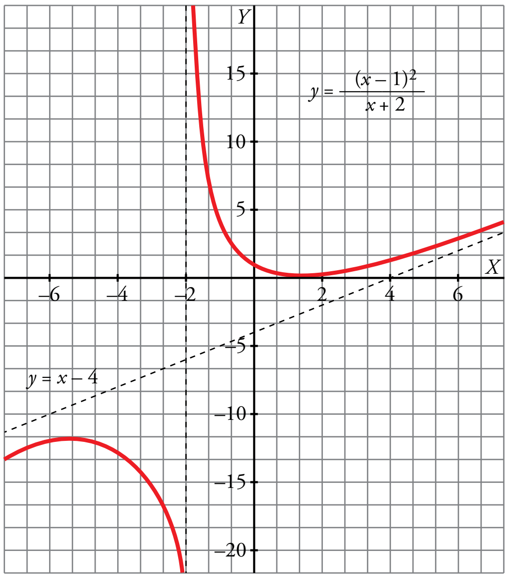
d) Asíntota vertical: $x = -2$

Asíntota oblicua: $y = x - 4$

No hay asíntotas horizontales.

Sus puntos de tangente horizontal son:

$$(1,\ 0),\ (-5,\ 12)$$



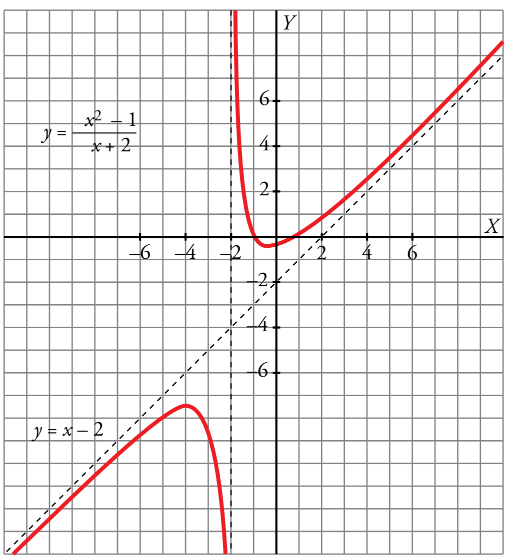
e) Asíntota vertical: $x = -2$

Asíntota oblicua: $y = x - 2$

No hay asíntotas horizontales.

Sus puntos de tangente horizontal son, aproximadamente:

$$(-0{,}26;\ -0{,}54),\ (-3{,}73;\ -7{,}46)$$

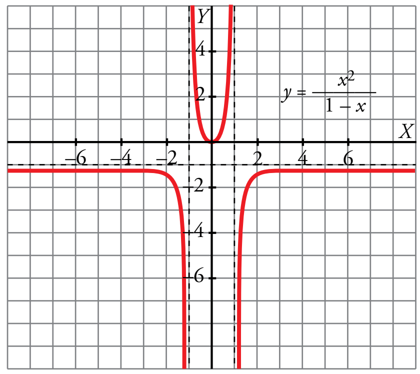


f) Asíntotas verticales: $x = 1$, $x = -1$

Asíntota horizontal: $y = -1$

No hay asíntotas oblicuas.

Punto de tangente horizontal: $(0,\ 0)$



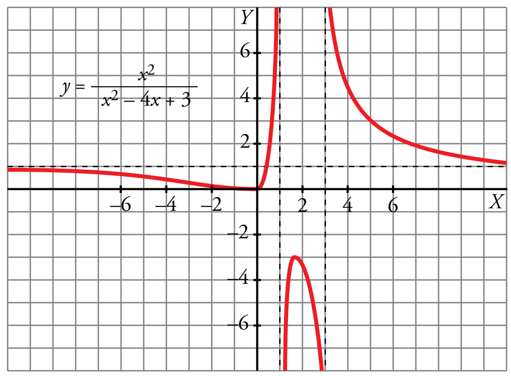
Página 329

42 a) Asíntotas verticales: $x = 3$, $x = 1$

Asíntota horizontal: $y = 1$

No hay asíntotas oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son: $(0,\ 0)$, $\left(\dfrac{3}{2}, -3\right)$

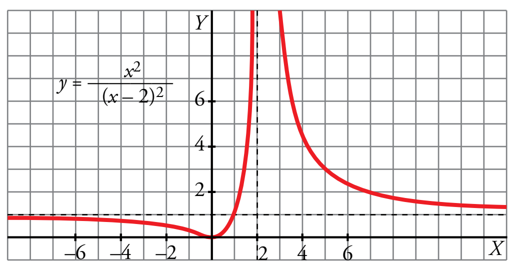


b) Asíntota vertical: $x = 2$

Asíntota horizontal: $y = 1$

No hay asíntotas oblicuas.

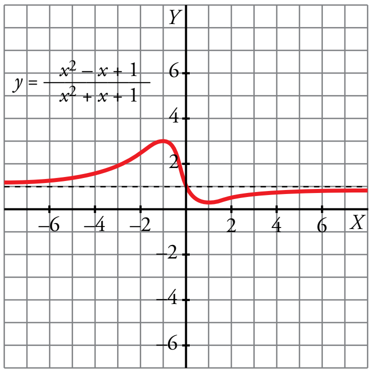
Punto de tangente horizontal: $(0,\ 0)$



c) Asíntota horizontal: $y = 1$

No hay asíntotas verticales ni oblicuas.

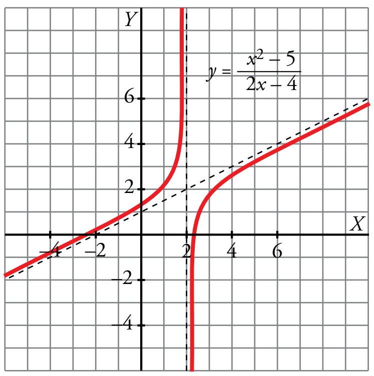
Sus puntos de tangente horizontal son: $\left(1, \frac{1}{3}\right)$, $(-1, 3)$



d) Asíntota vertical: $x = 2$

Asíntota oblicua: $y = \frac{x}{2} + 1$

No hay asíntotas horizontales ni puntos de tangente horizontal.



43 $a = -1$

44 $a = 26,\ b = 13$

45 $k = 1$

46 $(0, 0)$ y $(2, -2)$

47 $y = -3\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{29}{4}$

48 a) Se deben fabricar 5 unidades.

b) $C(5) = 175;\ M(5) = 35$

49 a)

b) El beneficio máximo se obtiene a los 3 años.

El beneficio sería de 10 miles de euros.

c) No perderá dinero ni llegará un momento en que no obtenga beneficios ni pérdidas, pues $f(x) = 0$ y $f(x) > 0$ para todo $x > 0$.

50 a) 1 b) $\frac{1}{5}$ c) 0

d) $+\infty$ e) 0 f) $\frac{1}{2}$

51 a) $\frac{1}{2}$ b) 2

52 $a = \frac{1}{2},\ b = \frac{5}{2}$

53 a) El máximo se encuentra en $x = 0$ y vale -4.

El mínimo se encuentra en $x = 3$ y vale -13.

b) El máximo se encuentra en $x = 4$ y vale 83.

El mínimo se encuentra en $x = -1$ y vale -24.

c) El máximo se encuentra en $x = 4$ y vale 16.

El mínimo se encuentra en $x = -2$ y vale -20.

d) El máximo se encuentra en $x = 1$ y vale $\frac{1}{2}$.

El mínimo se encuentra en $x = 0$ y vale 0.

54 • $y = sen\ x$

El máximo se encuentra en $x = \frac{\pi}{2}$ y vale 1.

El mínimo se encuentra en $x = \frac{3\pi}{2}$ y vale -1.

• $y = cos\ x$

Los máximos se encuentran en $x = 0$ y $x = 2\pi$ y valen 1.

El mínimo se encuentra en $x = \pi$ y vale -1.

55 a) $\left(-1, \frac{5}{e}\right)$ es un máximo. $(-1, -e^2)$ es un mínimo.

Intervalos de crecimiento: $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

Intervalos de decrecimiento: $(-1, 2)$.

b) $(0, 0)$ es un mínimo. $\left(2, \frac{4}{e^2}\right)$ es un máximo.

Intervalos de crecimiento: $(0, 2)$.

Intervalos de decrecimiento: $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

c) $(0, 0)$ es un mínimo.

Intervalos de crecimiento: $(0, +\infty)$.

Intervalos de decrecimiento: $(-\infty, 0)$.

d) $(e^{-1}, -e^{-1})$ es un mínimo.

Intervalos de crecimiento: $(e^{-1}, +\infty)$.

Intervalos de decrecimiento: $(0, e^{-1})$.

56 $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ $\qquad f'(x) = 1 \rightarrow x = 0$

En el punto $\left(0, -\dfrac{\pi}{4}\right)$ la tangente a la curva es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

57 a) La función $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

La función $f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x < 2 \\ -2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

b) La función $g(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

La función $g(x)$ no es derivable en $x = 3$.

$$g'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 3 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

c) La función $h(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

La función $h(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$.

$$h'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \le 3 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

58 a) $m = 8,\ n = 3$ $\qquad$ b) $m = 1,\ n = 2$

c) $m = 3,\ n = -1$ $\qquad$ d) $m = 2,\ n = 1$

Página 330

59 • $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6x$

$f'(x) = 4x^3 - 10x + 6$

$f''(x) = 12x^2 - 10$

$f'''(x) = 24x$

$f^{IV}(x) = 24$

$f^{V}(x) = 0$ y, desde esta, todas las derivadas sucesivas siguientes.

• $f(x) = e^{2x}$

$f'(x) = 2\,e^{2x}$

$f''(x) = 4\,e^{2x}$

$f'''(x) = 8\,e^{2x}$

$f^{IV}(x) = 16\,e^{2x}$

La fórmula general, teniendo en cuenta que los coeficientes son potencias de base 2, es:

$f^{n)}(x) = 2^n e^{2x}$

60 $x = y = 50$

61 $x = 25,\ y = 25$

62 $x = 10,\ y = 10$

63 La base mide 10 cm, la altura mide $h = 5\sqrt{3}$ cm y el área máxima es $A = 25\sqrt{3}$ cm^2.

64 Llamamos x a los lados del rectángulo perpendiculares a la pared e y al lado paralelo a ella.

El área máxima se da si $x = 25$ m, $y = 50$ m y es $A = 1\,250$ m^2.

65 Los lados $x = 6\sqrt{2}$ cm, $y = 6\sqrt{2}$ cm nos dan el rectángulo de área máxima, que es $A = 72$ cm^2.

66 Las medidas son $r = \sqrt[3]{\dfrac{75}{\pi}}$ dm, $h = 2\sqrt[3]{\dfrac{75}{\pi}}$ dm.

67 x es el lado de la base cuadrada e y es la altura del ortoedro.

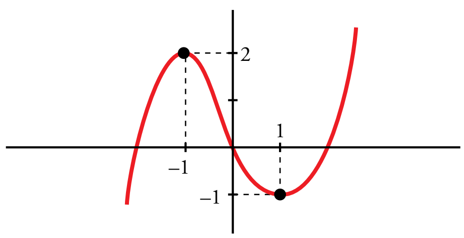
$x = \sqrt{\dfrac{10}{3}},\ y = \sqrt{\dfrac{10}{3}}$

El volumen máximo es $V = \dfrac{10}{3}\sqrt{\dfrac{10}{3}}$ cm^3.

68 Sean x e y la semibase y la altura del rectángulo, respectivamente.

$x = 5\sqrt{2}$ cm, $y = 5\sqrt{2}$ cm y el área máxima es $A = 50$ cm^2.

69



70 Existen infinitas.

$f(x) = x^2 + k$, donde x es cualquier número.

71 a) El punto (0, 0) tiene tangente horizontal. Este es el único punto singular.

b) La función es creciente en $x = 0$.

c) La recta tangente en $x = 0$ es $y = 0$.

72 Punto $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{15}{4}\right)$

73 $f'(x) = 2ax + b = 0 \rightarrow x = \dfrac{-b}{2a}$

74 La correcta es la b).

75 a) Sí, en $x = 2$.

b) Si $x < 2$, es creciente, y si $x > 2$, es decreciente.

76 Debe ser $g(x) = f(x) - 2$, es decir, sería la misma gráfica que la de $f(x)$ pero desplazada dos unidades hacia abajo.

77 a) $Df[g(2)] = \dfrac{1}{2}$

b) $Df[g(x)] = \dfrac{1}{x^2 - 2}$

c) No es posible porque no se puede determinar $f(2)$.

78 Se corresponde con b).

79 La gráfica del apartado b), porque $f'(1) = 0$.

80 a) Verdadero

b) Falso. Hay funciones con puntos singulares donde la función es creciente. Por ejemplo, $f(x) = x^3$ es creciente en el punto singular (0, 0).

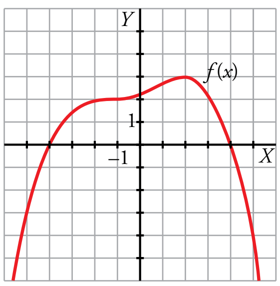
c) Falso. La función $f(x) = -x^3$ siempre es decreciente y $f'(0) = 0$.

Página 331

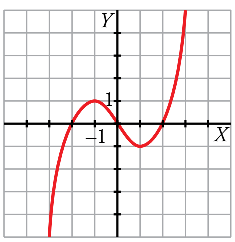
81 La gráfica del apartado c), porque $f'(-2) = f'(3) = 0$ al ser $x = -2$ y $x = 3$ puntos singulares de $f(x)$.

82 I $\longrightarrow$ c II $\longrightarrow$ a III $\longrightarrow$ b

83



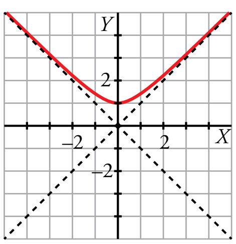
84



85 Cuando $x \longrightarrow +\infty$, la asíntota oblicua es $y = x$.

Cuando $x \longrightarrow -\infty$, la asíntota oblicua es $y = -x$.

El único punto singular es (0, 1).



86 El dominio de definición de $f(x)$ es el intervalo $(0, +\infty)$, por tanto, solo podemos calcular el límite por la derecha.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}\,h}{h} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

Como el límite anterior no existe, la función $f(x) = \sqrt{x}$ no es derivable en $x = 0$.

87 $a = -1$, $b = -2$, $c = 0$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{si } x \le 0 \\ ln\,(x+1) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Autoevaluación

1 a) T.V.M. $[0, 3] = -\dfrac{1}{2}$

T.V.M. $[-4, -2] = 2$

b) Sí, $P(-2, 4)$

c) Si $x < -2$, $f'(x) > 0$

d) $f'(0) = -1$

2 $f'(-2) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{h^2 - 7h}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} h - 7 = -7$

3 a) $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{4}{x^3}$

b) $f'(x) = \dfrac{1-x}{x}$

c) $f'(x) = -2\pi \; cos\; \pi x \cdot sen\; \pi x$

d) $f'(x) = \dfrac{3x^4(x^2 - 4x)}{(x-2)^4}$

4 $y = 2x - 2$

5 Punto singular: (1, 2). El punto singular no es máximo ni mínimo.

6 a) • Asíntota vertical: $x = 2$

IZQUIERDA: $f(x) \longrightarrow +\infty$

DERECHA: $f(x) \longrightarrow -\infty$

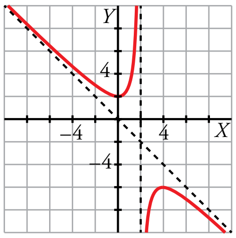
• La recta $y = -x$ es la asíntota oblicua.

Si $x \longrightarrow -\infty$, la función está encima de la asíntota.

Si $x \longrightarrow +\infty$, la función está debajo de la asíntota.

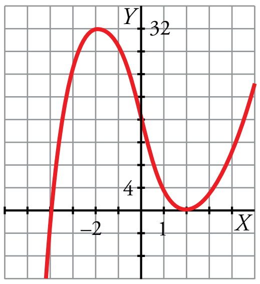
b) Los puntos (0, 2) y (4, –6) son puntos singulares, donde el primero es un mínimo y el segundo es un máximo.

c)



7 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Los puntos singulares son (2, 0) y (–2, 32).



8 Dominio de definición: $\mathbb{R} - \{0\}$

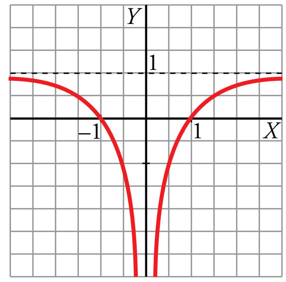
Asíntota vertical: $x = 0$.

Posición $\begin{cases} x \to 0^-, & f(x) \to -\infty \\ x \to 0^+, & f(x) \to -\infty \end{cases}$

Asíntota horizontal: $y = 1$.

Posición $\begin{cases} x \to +\infty, & f(x) < 1 \\ x \to -\infty, & f(x) < 1 \end{cases}$

No tiene puntos singulares.



9 Intervalos de crecimiento de f: $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

Intervalos de decrecimiento de f: $(-1, 3)$

La función tiene un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 3$.

10 $b = -3$, $c = 1$

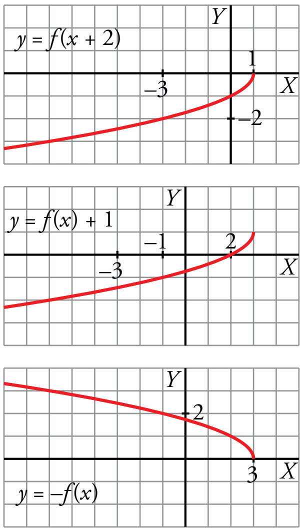
11 Los números son $x = 17$, $y = 17$ y el producto máximo es 289.

Página 332

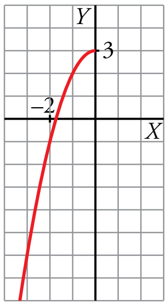
1 a) Su dominio es el intervalo $(-\infty, 3]$.

Su recorrido es $(-\infty, 0]$.

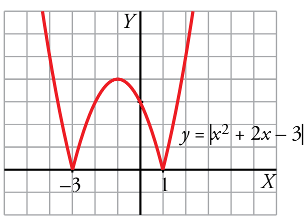
b)



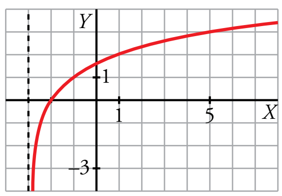
c)



2 a)

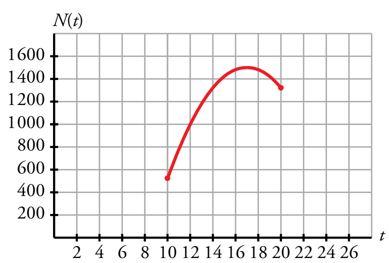


b)

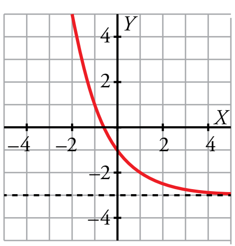


3 $a = 20, \; c = -4\,280$

La función es $N(t) = -20t^2 + 680t - 4\,280$.



4 $f^{-1}(x) = \dfrac{log\,(x+3)}{log\,(1/2)} + 1$



5 a) Población inicial: 1 500 insectos

b) $x = 7{,}23 \;\rightarrow$ Tarda entre 7 y 8 días.

6 $p(x) = sen\,\sqrt{x} \;\rightarrow\; p(x) = g[h(x)] \;\rightarrow\; p = g \circ h$

$q(x) = e^{sen\,x} \;\rightarrow\; q(x) = f[g(x)] \;\rightarrow\; q = f \circ g$

$r(x) = \sqrt{e^x} \;\rightarrow\; r(x) = h[f(x)] \;\rightarrow\; r = h \circ f$

7 a) 0 b) 0 c) 0

8 a) $b = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) \neq f(2) \;\rightarrow\; f(x)$ no es continua en $x = 2$.

9 $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$f(x) = \dfrac{3x-5}{2}$

$f(x+h) = \dfrac{3(x+h)-5}{2}$

$f(x+h) - f(x) = \dfrac{3x + 3h - 5 - 3x + 5}{2} = \dfrac{3h}{2}$

$\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{3h}{2} : h = \dfrac{3}{2}$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$

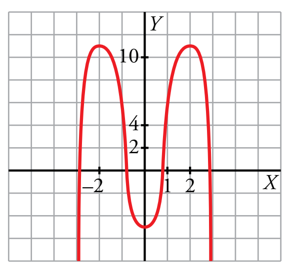
10 $y = 9 - x$

11 Los puntos singulares son $(0, -5)$, $(2, 11)$ y $(-2, 11)$.

Ramas infinitas: $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (-x^4 + 8x^2 - 5) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (-x^4 + 8x^2 - 5) = -\infty \end{cases}$

Máximos: $(2, 11)$ y $(-2, 11)$

Mínimo: $(0, -5)$



12 a) $f'(x) = \dfrac{1 + tg^2\,x}{2\sqrt{tg\,x}}$ b) $f'(x) = \dfrac{1 - ln\,x}{x^2}$

c) $f'(x) = \dfrac{2x}{1 + x^4}$ d) $f'(x) = 0$

e) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1 - x^2}}$ f) $f'(x) = \dfrac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x}\,\sqrt{x + \sqrt{x}}}$

g) $f'(x) = \dfrac{2e}{3x}$ h) $f'(x) = \dfrac{-2x - 6}{x(2x+3)}$

13 a) f crece en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

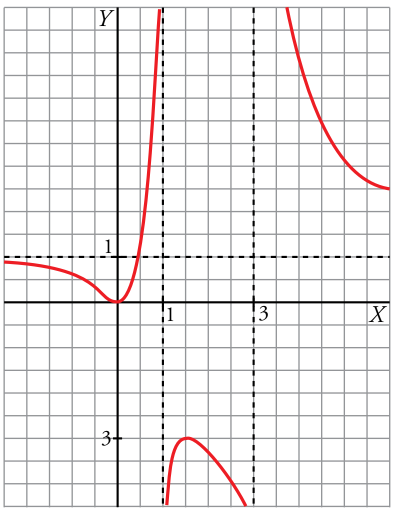
f decrece en $(-2, 2)$.

b) f es creciente en todo su dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$

14 a) Asíntotas verticales: $x = 1$, $x = 3$

Asíntota horizontal: $y = 1$

b) Mínimo: $(0, 0)$; Máximo: $\left(\frac{3}{2}, -3\right)$

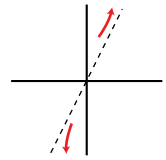


15 Tiene asíntota oblicua $y = \dfrac{4 + 2x^2}{x} = \dfrac{4}{x} + 2x$.

La asíntota es $y = 2x$.

Si $x \to +\infty$, curva > asíntota

Si $x \to -\infty$, curva < asíntota



16 $a = -12$, $b = 17$

17 a) f es creciente cuando $f' > 0 \to f$ crece si $x < 1$ y decrece si $x > 1$.

b) Tiene un punto de tangente horizontal en $x = 1$, porque en ese punto $f' = 0$.

18 La función es continua en todo $\mathbb{R}$.

La función no es derivable en $x = 1$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

19 $\dfrac{1}{e} - 1$

20 Supongamos que x e y son la base y la altura del rectángulo, respectivamente.

Las medidas son $x = 2\sqrt{15}$ m, $y = 2\sqrt{15}$ m y el perímetro mínimo es $8\sqrt{15}$ m.

Página 337

Relación funcional y relación estadística

a) Relación estadística. Correlación positiva.

b) Relación estadística. Correlación negativa.

c) Relación estadística. Correlación negativa.

d) Relación funcional.

Relación Estadística. Correlación positiva.

e) Relación estadística. Correlación negativa.

Relación estadística. Correlación positiva.

Ejemplo de relación estadística

a) Guillermo y Gabriel están representados mediante los puntos (160, 175) y (160; 177,5).

b) Sergio está representado con el punto (192,5; 172,5).

c) Sí; en general, cuanto más alto sea el padre, más altos son los hijos.

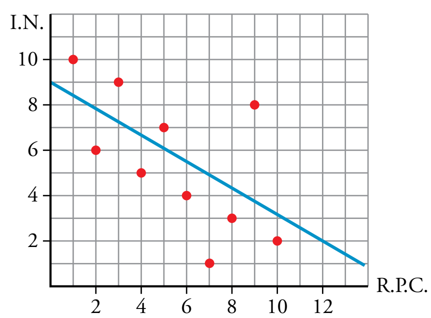
Página 339

1 a) Falso b) Falso c) Verdadero

Página 341

1 a) Verdadero b) Verdadero c) Verdadero

2 La correlación es negativa y moderadamente alta (–0,62).



Página 343

1 a) Verdadero b) Falso c) Verdadero

2 a) $r = 0{,}90475$ b) $r = 0{,}64285$ c) $r = -0{,}80952$

Página 345

1 a) Verdadero b) Falso c) Verdadero

Página 346

2 a) Verdadero b) Verdadero c) Verdadero

Página 347

1 $\bar{x} = 49{,}725$ $\sigma_x = 18{,}126$

2 Moda = Deportes.

Página 348

3 $\bar{x} = 53{,}188$ $\sigma_x = 18{,}273$

4

y_i	f_i
INF	10
DOC	20
ENT	20
DEP	54
PEL	26
OTR	5

5 Se observa que las frecuencias relativas varían según la edad.

6

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
21,5	61	1 311,5	28 197,25
30,5	105	3 202,5	97 676,25
43	166	7 138	306 934
58	119	6 902	400 316
75	138	10 350	776 250
	589	28 904	1 609 373,5

$\bar{x} = 49{,}073$ $\sigma_x = = 28{,}471$

La media es similar; sin embargo, la desviación típica es mayor si consideramos los datos de las personas que no ven deportes.

Página 350

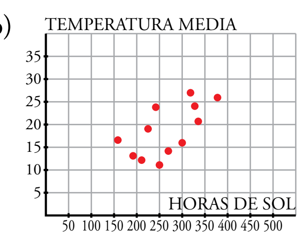
7 $r = 0{,}67$

Página 351

1 Hazlo tú.

a) Es una distribución bidimensional en la que se relacionan las variables x: horas de sol e y: temperatura media en Almería, correspondientes a un año.

b)

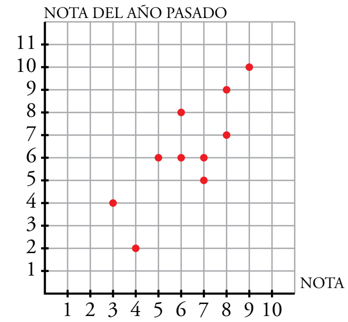


c) Es una relación estadística, el número de horas de sol no determina la temperatura media.

2 Hazlo tú.

- x: Nota

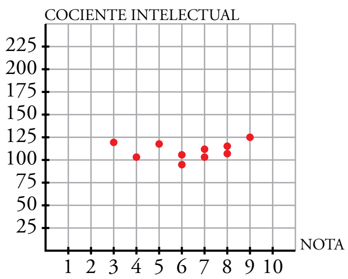
  y: Nota del año pasado



Hay una correlación positiva bastante fuerte.

- x: Nota

  y: Cociente intelectual



Hay una correlación positiva bastante fuerte.

Página 353

1 a) Recta de regresión de Y sobre X: $y - 28,5 = 7,1(x - 3,5)$

Recta de regresión de X sobre Y: $y - 28,5 = 7,47(x - 3,5)$

b) $\hat{y}(5,5) = 42,7$

c) $y = 2,36$; $r = 0,97$

2 a) El número medio de discos vendidos es 9 500.

b) $r = 0,82$

c) $y - 41 = 2,78(x - 9,5)$

d) 65 conciertos.

Página 354

1 a) Renta (€), gasto (€).

Correlación positiva.

b) Relación funcional.

c) Relación estadística. Seguramente muy débil. Positiva.

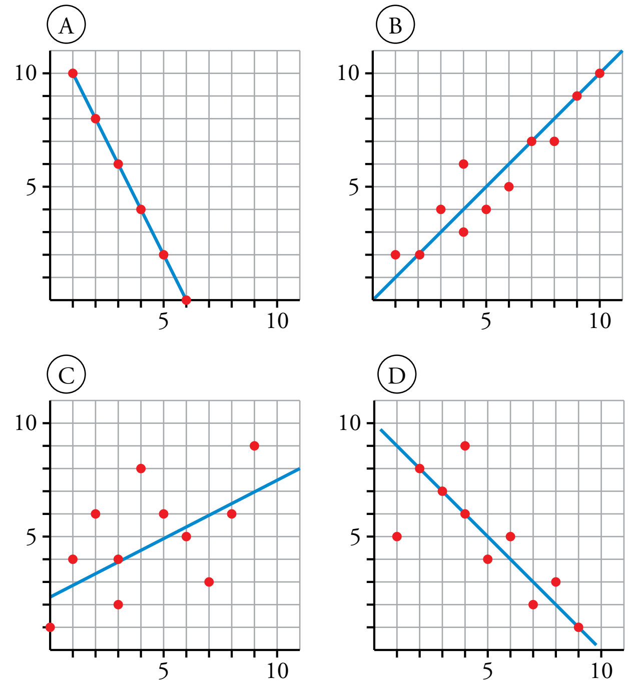
d) Aunque lo parezca *a priori*, seguramente la relación no es funcional. Es una correlación positiva fuerte.

e) Correlación positiva.

f) Correlación negativa.

g) Correlación positiva.

2 a)



b) B y C tienen correlación positiva; A y D, negativa.

c) A $\to$ –1; B $\to$ 0,95; C $\to$ 0,64; D $\to$ –0,76

d) La A es relación funcional: $y = 12 - 2x$.

3 I $\to$ 0,6

II $\to$ 0,1

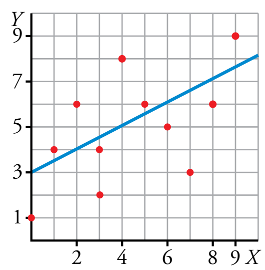
III $\to$ –0,9

IV $\to$ –0,5

V $\to$ 0,99

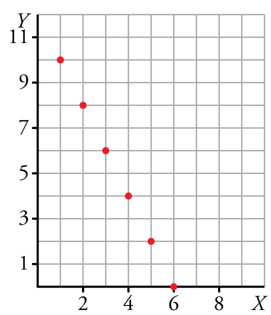
VI $\to$ –0,2

4



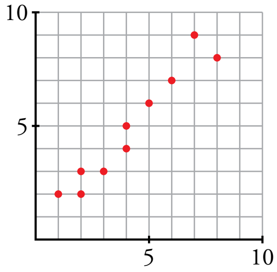
c) $r = 0,58$

5

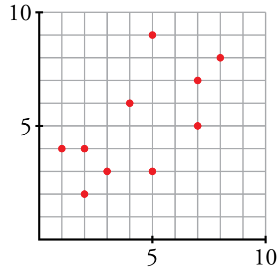


$r = -1$ porque están alineados.

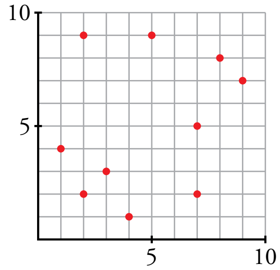
6 a) $r = 0{,}9$



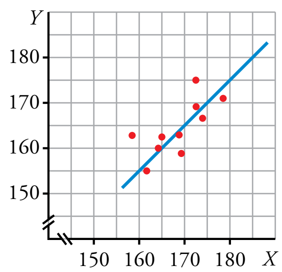
b) $r = 0{,}6$



c) $r = 0{,}3$



7



La correlación es positiva y fuerte.

Página 355

8 a) $\bar{x} = 4{,}92$ $\bar{y} = 4{,}92$ $\sigma_x = 3{,}04$ $\sigma_y = 2{,}87$ $\sigma_{xy} = 8{,}33$

b) $r = 0{,}95$. Se trata de una correlación fuerte y positiva.

c) Recta de regresión de Y sobre X:

$y = 4{,}92 + 0{,}9(x - 4{,}92)$

Recta de regresión de X sobre Y:

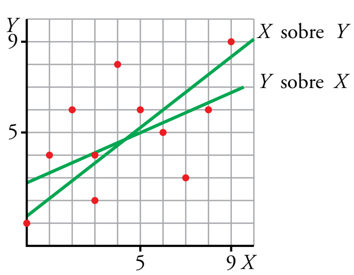
$y = 4{,}92 + 0{,}99(x - 4{,}92)$

9 a) Representada en el ejercicio 4.

b) Se comprueba.

c) • Recta de regresión de Y sobre X: $y = 0{,}48x + 2{,}79$

• Recta de regresión de X sobre Y: $y = 1{,}45x - 1{,}48$



10 a) $\hat{y}(13) = 52{,}1$

$\hat{y}(20) = 74{,}5$

$\hat{y}(30) = 106{,}5$

$\hat{y}(100) = 330{,}5$

b) Son fiables $\hat{y}(13)$ e $\hat{y}(20)$, porque 13 y 20 están en el intervalo de valores utilizados para obtener la recta de regresión.

$\hat{y}(30)$ es menos fiable, pues 30 está fuera del intervalo, aunque cerca de él.

$\hat{y}(100)$ es una estimación nada fiable, pues 100 está muy lejos del intervalo [12, 25].

11 a)

x	1	2	3	4	4	5	6	7	8	9
y	5	8	7	6	9	4	5	2	3	1

b) $n = 10$ $\Sigma x = 49$ $\bar{x} = 4{,}9$

$\Sigma y = 50$ $\bar{y} = 5$

$\Sigma x^2 = 301$ $\sigma_x = 2{,}47$

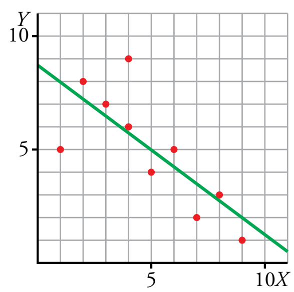
$\Sigma y^2 = 310$ $\sigma_y = 2{,}45$

$\Sigma xy = 199$ $\sigma_{xy} = -4{,}6$

$r = -0{,}76$

c) Recta de regresión de Y sobre X:

$y = 8{,}675 - 0{,}75x$



d) $\hat{y}(4{,}5) = 5{,}56$

$\hat{y}(11) = -3{,}04$

$\hat{y}(20) = -14{,}95$

Como $r = 0{,}76$, la estimación para 4,5 la podemos considerar fiable, pero las de 11 y 20, que no están en el intervalo de datos, no se pueden considerar muy fiables.

12 a) $r = 0{,}97$ b) $r = 0{,}64$ c) $r = 0{,}25$

13 a) $r = 0{,}6$

b) $y = 3{,}05x + 13{,}05$

Cabe esperar que se recauden 104,55 millones de euros.

14 a) $r = -0,99$

Recta de regresión: $y = -0,08x + 759$

Hay casi una relación funcional entre la altura de un lugar y su presión atmosférica. Además, cuando aumenta la altura, disminuye la presión.

b) $r = 0,85$

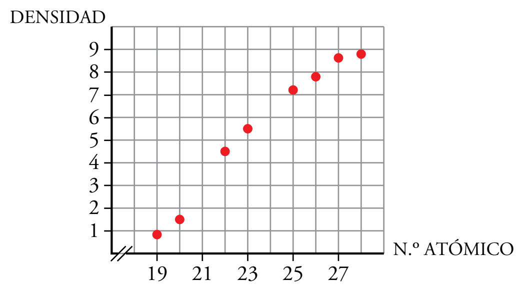
Recta de regresión: $y = 6,87x + 74,8$

Hay una correlación fuerte entre la altura de un lugar y el número de pulsaciones, en reposo, de una persona. Además, cuando aumenta la altura, aumentan las pulsaciones en reposo.

15 $r = -0,61$

r es negativo, luego cuantos más goles a favor tiene un equipo, menos goles en contra tiene. La correlación no es muy fuerte, por lo que no es demasiado fiable estimar los goles en contra sabiendo los goles a favor.

16 a)



$r = 0,98$

$y = -16,5 + 0,93x$

b) La densidad del cromo se estima en, aproximadamente, 5,86. Su valor real es 7,1.

c) La densidad del escandio se estima en, aproximadamente, 3,01. Su valor real es 2,9.

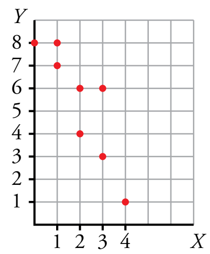
Página 356

17 a) La correlación entre las variables x-y es $r = -0,68$.

Y entre las variables x-z es $r = 0,82$.

b) La correlación es mayor en valor absoluto en el segundo caso, luego la renta per cápita es más determinante de la expectativa de vida al nacer que del índice de natalidad.

18 a)



Los dos signos son negativos; es decir, si aumentan las horas por día que ven la televisión, disminuye la nota media obtenida en la última evaluación.

b) $r = -0,87$

c) $y = -1,67x + 8,70$

d) Si ve la televisión tres horas y media diarias, cabe esperar que saque un 2,86.

Si ve la televisión cinco horas, cabe esperar que saque un 0,35.

19 a) $\bar{x} = 4,14$

$\sigma_x = 1,96$

$\bar{y} = 62,57$

$\sigma_y = 36,37$

b) $r = 0,81$

Es positiva; es decir, si aumenta la antigüedad, aumentan los kilómetros recorridos. La correlación es fuerte porque r está próximo a 1.

c) y d) Se estima que recorre 45 300 km en 3 años.

Se estima que recorre 75 500 km en 5 años.

Se estima que recorre 151 000 km en 10 años.

20 El mismo, puesto que r no depende de las unidades; es adimensional.

21 $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$

Como σ_x y σ_y son positivas, el signo de r es el mismo que el de σ_{xy}, luego si la covarianza es negativa, r también lo es.

$m_{yx} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$, cuyo signo es el mismo que el signo de σ_{xy}.

$m_{xy} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}$ cuyo signo es el mismo que el signo de σ_{xy}.

Luego si la covarianza es negativa, m_{yx} y m_{xy} son negativas.

22 El centro de gravedad de la distribución, $(\bar{x}, \bar{y})$.

23 $|r|$ debe estar próximo a 1.

24 $\dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \cdot \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} = \left(\dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}\right)^2 = r^2$

25 $(\bar{x}, \bar{y})$ son las coordenadas del punto de intersección de las dos rectas de regresión.

$$\left.\begin{cases} y = 8,7 - 0,76x \\ y = 11,36 - 1,3x \end{cases}\right\} \rightarrow x = 4,9259$$

$$y = 4,9563 \left\langle \begin{array}{l} \bar{x} = 4,9259 \\ \bar{y} = 4,9563 \end{array} \right.$$

26 $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$

$$m_{yx} \cdot \frac{1}{m_{xy}} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \cdot \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} = r^2$$

Luego $r = \sqrt{m_{yx} \cdot \dfrac{1}{m_{xy}}}$

En el ejercicio anterior:

$m_{yx} = -0{,}76;\ m_{xy} = -1{,}3$

$r = 0{,}7646$

27 a) 50 kg

b) El signo del coeficiente de correlación entre peso y estatura es el mismo que el de la pendiente de la recta de regresión, luego es positivo.

28 a) Falso.

b) Verdadero.

c) Verdadero.

d) Verdadero.

Página 357

29 a) $r = -0{,}76$

Recta de regresión de Y sobre X:

$y - 5{,}7 = -2{,}63(x - 2{,}5)$

b) Se estima que tendrá entre 9 y 10 fallos en la primera tanda.

7 fallos en la segunda tanda.

Entre 1 y 2 fallos en la cuarta tanda.

30 a) $\bar{x} = 78{,}38;\ \bar{y} = 304$

$r = 0{,}95394$

b) Se estima que el operario produzca unas 275 unidades trabajando 70 horas.

Como r es muy próximo a 1 y, además, 70 está en el intervalo de horas empleadas, la estimación es muy fiable.

c) Se estima que ha trabajado entre 77 y 78 horas.

Autoevaluación

Página 357

1 a) $\rightarrow 0{,}6$

b) $\rightarrow -0{,}7$

c) $\rightarrow -0{,}9$

d) $\rightarrow 0{,}2$

2 a) $\bar{x} = 5,\ \bar{y} = 6$

$\sigma_x = 2{,}8$

$\sigma_y = 2{,}7$

$\sigma_{xy} = 7{,}1$

b) $r = 0{,}95$

c) $y = 0{,}91x + 1{,}45$

d) $\hat{y}(5) = 6,\ \hat{y}(10) = 10{,}55$

Las estimaciones son muy fiables porque $r = 0{,}95$ es un valor muy alto.

3 a) $\bar{y} = 13$

b) $\hat{y}(12) = 16{,}2$

$\hat{y}(50) = 77$

La primera estimación es aceptable por ser 12 próximo a $\bar{x} = 10$.

c) $y = 6 + 2{,}5(x - 5)$

4 a) $y = 0{,}80 + 0{,}41x$

b) $r = 0{,}93$

c) Se le estima un consumo de energía de 2,59 miles de kWh por habitante.

d) Se estima una renta per cápita de 20 000 €.

e) La primera estimación (apartado c), es razonablemente fiable. En la segunda estimación (apartado d), la estimación es poco fiable.