Página 301

1. La distancia que separa los puntos en los instantes $t = 2$ y $t = 2{,}5$ es de 12,5 mm, luego la velocidad es:

$$25 \text{ mm/s} = 2{,}5 \text{ cm/s}$$

La distancia que separa los puntos en los instantes $t = 2$ y $t = 2{,}1$ es de 3,5 mm, luego la velocidad es:

$$35 \text{ mm/s} = 3{,}5 \text{ cm/s}$$

2. En el intervalo [2; 2,5] la velocidad es 2,5 cm/s. En el intervalo [2; 2,1] la velocidad es 3,77 cm/s.
3. En el primer intervalo la velocidad es 3,997 cm/s, y en el segundo, 4 cm/s.

Sí podemos considerar que esta última velocidad es muy parecida a la velocidad instantánea en $t = 2$ s porque el intervalo de tiempo transcurrido es tan solo una millonésima de segundo.

Página 302

1 Hazlo tú.

T.V.M. $[1, 2] = 1$ T.V.M. $[1, 5] = \frac{1}{2}$ T.V.M. $[1, 10] = \frac{1}{3}$

1 a) Verdadero b) Verdadero c) Falso

2 T.V.M. $[1, 2] = -5$

T.V.M. $[1, 3] = -4$

T.V.M. $[1, 4] = -3$

T.V.M. $[1, 5] = -2$

T.V.M. $[1, 6] = -1$

T.V.M. $[1, 7] = 0$

T.V.M. $[1, 8] = 1$

3 T.V.M. $[1, 1 + h] = h - 6$

Dando a h los valores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 se obtienen los resultados del ejercicio anterior.

Página 303

4

PUNTO	PENDIENTE
A	$f'(-8) = \frac{9}{5}$
B	$f'(-3) = \frac{1}{7}$
C	$f'(1) = -1$
D	$f'(5) = -\frac{1}{2}$
E	$f'(10) = 2$

Página 305

1 Hazlo tú.

$f'(1) = -3$ $f'(-1) = -\frac{1}{3}$ $f'(5) = -\frac{1}{3}$

2 Hazlo tú.

$f'(0) = 7$ $f'(1) = 8$ $f'(2) = 9$

$f'(3) = 10$ $f'(4) = 11$ $f'(5) = 12$

1 a) Verdadero

b) Verdadero. La pendiente de la recta tangente en $x = 3$ es cero, luego la recta es horizontal.

c) Verdadero, debido a la inclinación de la recta tangente a f en ese punto.

2 $f'(-2) = -\frac{1}{4}$

3 $f'(-3) = -2$ $f'(0) = -2$ $f'(4) = -2$ $f'(7) = -2$

Como la función es una línea recta, crece o decrece siempre de la misma forma y al ser la derivada una forma de medir el crecimiento de una función, esta debe valer lo mismo en todos los puntos.

4 $f'(-2) = -17$ $f'(-1) = -11$ $f'(0) = -5$

$f'(1) = 1$ $f'(2) = 7$ $f'(3) = 13$

$f'(4) = 19$ $f'(5) = 25$ $f'(6) = 31$

Página 306

1 Verdadero, porque al ser paralelas las rectas tangentes en cualquier punto, deben tener la misma pendiente en todos los puntos.

2 $f'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2}$ $f'(4) = \frac{-3}{4}$ $f'(-1) = \frac{-1}{3}$

$f'(1) = -3$ $f'(5) = \frac{-1}{3}$

3 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$ $f'(4) = \frac{1}{2}$ $f'(7) = \frac{1}{4}$

4 $f'(x) = 3x^2 + 2x$

Página 307

5 a es la abscisa del punto en el que se halla la recta tangente.

$f(a)$ es la ordenada de dicho punto.

$f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente o, también, la derivada de la función en el punto de abscisa a.

x es la variable independiente de la recta tangente.

y es la variable dependiente de dicha recta.

Página 308

1 a) $5x^4$ b) $\frac{-2}{x^3}$ c) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ d) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ e) $\frac{5}{6\sqrt[6]{x}}$

Página 310

1 Hazlo tú.

a) $f'(x) = 20x^3 - 4x + 3$ b) $g'(x) = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}} - \frac{4\sqrt[3]{3}}{3}\sqrt[3]{x}$

c) $h'(x) = -\frac{4}{x^2\sqrt[3]{x}}$

2 Hazlo tú.

a) $f'(x) = \frac{ln\,625}{125}625^x$

b) $g'(x) = \frac{4x^2 - 8x + 8}{(x^2 + x - 3)^2}$

c) $h'(x) = 2x - 5 + \frac{1}{x^2}$

2 $f'(x) = 10x + 7 - \frac{1}{\sqrt{x}}$

3 $f'(x) = \sqrt{3x}\,e^x\left(\frac{3}{2} + x\right)$

4 $f'(x) = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{e^x(cos\,x - sen\,x - ln\,2\,cos\,x)}{2^x}$

5 $f'(x) = 3^x \cdot tg\,x + x \cdot 3^x\,ln\,3 \cdot tg\,x + \frac{x \cdot 3^x}{cos^2\,x}$

6 $f'(x) = \frac{1 - ln\,2\,log_2\,x}{x^2\,ln\,2}$

7 $f'(x) = 2 + \frac{5}{x^2} - \frac{6}{x^3}$

8 $f'(x) = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$

9 $f'(x) = \frac{x + 3}{\sqrt{1 - x^2}} + arc\,sen\,x$

10 $f'(x) = \frac{cos^2\,x + \sqrt{1 - x^2}\,(arc\,sen\,x)\,sen\,x}{\sqrt{1 - x^2}\,cos^2 x}$

11 $f'(x) = 5^x\,\frac{x\,ln\,5 - 1}{x^2}$

Página 311

12 $f'(x) = (2x - 5)\,cos\,(x^2 - 5x + 7)$

13 $f'(x) = \frac{10}{3\sqrt[3]{5x + 3}}$

14 $f'(x) = -3\,sen\,6x$

15 $f'(x) = \frac{2(1 - ln\,10\,log\,x)}{x^2\,ln\,10}$

16 $f'(x) = -3\,sen\,(3x - \pi)$

17 $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2x}}$

18 $f'(x) = e^{2x+1}(1 + 2x)$

19 $f'(x) = \frac{2x(1 - x^2)\,cos\,(x^2 + 1) + x\,sen\,(x^2 + 1)}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$

Página 313

1 Hazlo tú.

Los puntos singulares son (–1, 10) y (2, –17).

Los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(2, +\infty)$ son intervalos de crecimiento. En el intervalo (–1, 2) la función decrece.

Página 314

1 La recta tangente en $x = -1$ es $y = -6x$.

La recta tangente en $x = 0$ es $y = -2x - 3$.

La recta tangente en $x = 2$ es $y = 30x - 51$.

2 $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$ son las abscisas de los puntos en los que la pendiente es 3.

$x_1 = 0 \rightarrow$ La recta tangente es $y = 3x$.

$x_2 = 2 \rightarrow$ La recta tangente es $y = 3x - 4$.

$x_3 = -2 \rightarrow$ La recta tangente es $y = 3x - 4$.

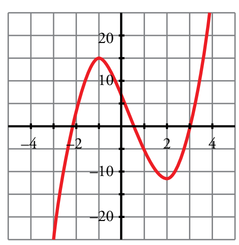
3 En el intervalo [0, 3], el máximo se encuentra en $x = 2$ y vale 19 y el mínimo se encuentra en $x = 0$ y vale 3.

En el intervalo [–5, 3], el máximo se encuentra en $x = -5$ y vale 68 y el mínimo se encuentra en $x = -2$ y vale –13.

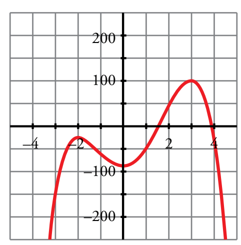
4 a) $\frac{-1}{7}$ b) $\frac{5}{3}$ c) 0

Página 316

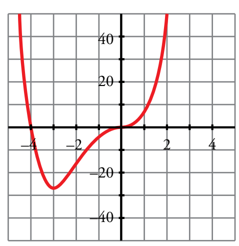
1 a)



b)

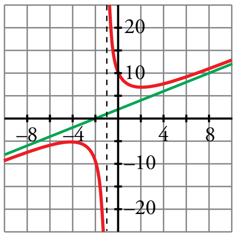


c)

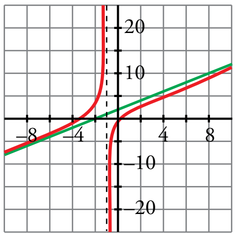


Página 318

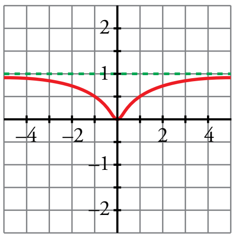
2 a)



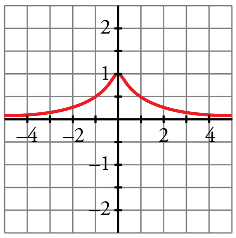
b)



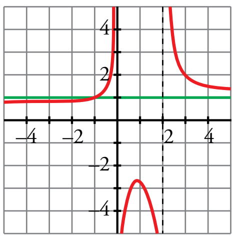
c)



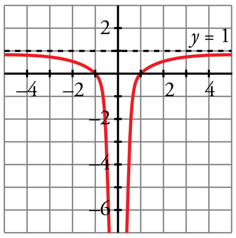
d)



e)



f)



Página 319

1 Hazlo tú.

$f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

2 Hazlo tú.

$f'(x) = -\dfrac{2}{x(x+1)}$

3 Hazlo tú.

$y = 2x - \dfrac{3}{2}\pi - 1$

Página 320

4 Hazlo tú.

$y = 2x - 3$

5 Hazlo tú.

Los puntos singulares son (0, 0) y (4, –32).

(4, –32) es un mínimo. (0, 0) es un máximo.

6 Hazlo tú.

$c = 0$; $b = 1$

Página 321

7 Hazlo tú.

f crece en $(0, 2) \cup (2, 4)$ y decrece en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$.

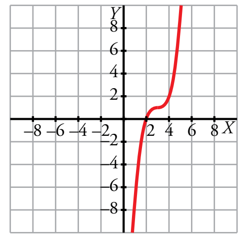
8 Hazlo tú.

Base = 9 m, altura = 9 m

Página 322

9 Hazlo tú.

El punto (3, 1) es el único punto singular.

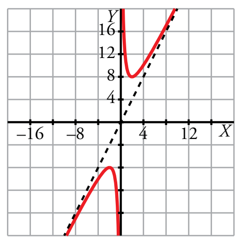


10 Hazlo tú.

Asíntota vertical: $x = 0$

Asíntota oblicua: $y = 2x$

Puntos singulares: (–2, –8) y (2, 8).



Página 323

11 Hazlo tú.

a) $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } x < 4 \\ 2 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

b) $g'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ 2x & \text{si } x > -1 \end{cases}$

Página 324

12 Hazlo tú.

a) $a = 1$, $b = 3$

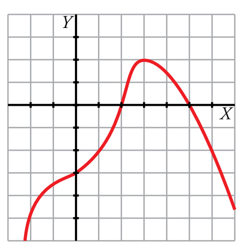
b) $a = -9$, $b = 5$

Página 325

1 a) $f'(-2) = 0$; $f'(3) = 0$; $f'(6) = -\dfrac{5}{3}$

b) $f'(x) < 0$ en $(1, 3) \cup (5, +\infty)$

2



3 Supongamos que a y b son los catetos del triángulo rectángulo.

Si $a = 6$ y $b = 6$, se obtiene el triángulo rectángulo de área máxima.

4 a) $f'(0) = -3$ y $f'(4) = 3$.

b) El punto $x = 2$ es un punto singular.

c) La función es creciente en $(2, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 2)$.

5 La ecuación de la recta tangente es $y = -x + 4$.

Página 326

1 a) $-\frac{1}{3} \rightarrow$ Decrece b) $-1 \rightarrow$ Decrece

c) $3 \rightarrow$ Crece d) $3 \rightarrow$ Crece

2 a) Para la función $f(x)$: T.V.M. $[1, 1 + h] = 3 - h$

Para la función $g(x)$: T.V.M. $[1, 1 + h] = \frac{-1}{2h + 4}$

b) Para la función $f(x)$: T.V.M. $[1; 1{,}5] = 2{,}5$

Para la función $g(x)$: T.V.M. $[1; 1{,}5] = \frac{-1}{5}$

3 Para $f(x)$: T.V.M. $[2, 3] = 19$ T.V.M. $[3, 4] = 37$

Para $g(x)$: T.V.M. $[2, 3] = 18$ T.V.M. $[3, 4] = 54$

En $[2, 3]$ crece más $f(x)$.

En $[3, 4]$ crece más $g(x)$.

4 El crecimiento medio es mayor entre las semanas 20 y 30.

5 a) $f'(1) = 6$ b) $f'(1) = 12$

c) $f'(1) = -3$ d) $f'(1) = \frac{-2}{27}$

6 $f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} (-h) = 0$ $g'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{3}{3h - 1} = -3$

7 a) $f'(-3) = -3$ $f'(0) = \frac{3}{2}$ $f'(4) = -2$

b) En $x = -2$ y $x = 2$.

c) En $x = 1$ la derivada es positiva y en $x = 3$ es negativa.

8 a) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} (2x + h + 7) = 2x + 7$

c) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} (3x^2 + 3hx + h^2 - 5) = 3x^2 - 5$

d) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{x(h + x)} = \frac{1}{x^2}$

9 a) $f'(x) = x^2 + 14x - 4$ b) $f'(x) = 6 sen\, 2x$

c) $f'(x) = -\frac{1}{3x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ d) $f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$

e) $f'(x) = \frac{-7}{(7x+1)^2} + \frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{x}}$ f) $f'(x) = sen\,\frac{x}{2} + \frac{x}{2} cos\,\frac{x}{2}$

g) $f'(x) = -\frac{1}{2(x-4)\sqrt{x-4}}$ h) $f'(x) = \frac{1}{x} - e^{-x}$

i) $f'(x) = \frac{1 + tg^2\, x}{2}$ o también $f'(x) = \frac{1}{2\,cos^2\, x}$

j) $f'(x) = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1 - 4x^2}}$

10 a) $f'(x) = 15(5x - 2)^2$

b) $f'(x) = \frac{4}{81} \frac{(x^4 - 1)(x^2 + 1)^2}{x^5}$

c) $f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{6 - x}}$ d) $f'(x) = -2e^{-2x}$

e) $f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2 - 4}{x}} \cdot \frac{x^3 - 12x}{(x^2 - 4)^2}$

f) $f'(x) = \frac{e^{2x+1}}{8}(2x^3 + 3x^2)$

g) $f'(x) = 3x^2 [cos^2\, 3x - x\, sen\, 6x]$

h) $f'(x) = 6x\, tg^2\, x^2 \cdot (1 + tg^2\, x^2)$

i) $f'(x) = \frac{\sqrt{7}}{2x\sqrt{ln\, x}}$ j) $f'(x) = \frac{3}{x^2 + 9}$

11 a) $f'(x) = \frac{-e^x}{2\sqrt{arc\, cos\, e^x}\,(1 - e^{2x})}$

b) $f'(x) = \frac{1 - x^2}{2x(x^2 + 1)}$

c) $f'(x) = sen\, 2x - sen\, x \cdot e^{cos\, x}$

d) $f'(x) = \sqrt[4]{2} \cdot \frac{1 - 4x\, ln\, 2}{2^{x+1} \cdot \sqrt[4]{x^3}}$

e) $f'(x) = e^{sen\, x}\left(cos\, x \cdot ln\, tg\, x + \frac{1}{sen\, x\, cos\, x}\right)$

f) $f'(x) = \frac{-3\, sen\,(ln\, x)}{x}$ g) $f'(x) = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x^2 + x}}$

h) $f'(x) = -\frac{1}{1 + x^2}$

i) $f'(x) = \frac{ln\, 7 \cdot 7^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} - \frac{x\, sen\, x + 2\, cos\, x}{x^3}$

j) $f'(x) = \frac{4e^{-2x}}{(1 + e^{-2x})^2}$

12 a) $f'(x) = \dfrac{-4x}{x^4-1}$

b) $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{2x^3+2x}$

c) $f'(x) = \dfrac{1-x}{x}$

d) $f'(x) = \dfrac{6x+5}{\ln 10\,(3x^2-5x)}$

e) $f'(x) = \dfrac{2(1+tg^2\,x)}{tg\,x \cdot \ln 10}$

f) $f'(x) = \ln x + 1$

Página 327

13 a) Recta tangente $\rightarrow$ $y = -x + 2$

Recta normal $\rightarrow$ $y = x - 2$

b) Recta tangente $\rightarrow$ $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4}$

Recta normal $\rightarrow$ $y = -4x + 14$

c) Recta tangente $\rightarrow$ $y = -8x - 11$

Recta normal $\rightarrow$ $y = \dfrac{1}{8}x - \dfrac{23}{8}$

d) Recta tangente $\rightarrow$ $y = \dfrac{1}{e^2}x + 1$

Recta normal $\rightarrow$ $y = -e^2x + e^4 - 2$

e) Recta tangente $\rightarrow$ $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{1}{2}$

Recta normal $\rightarrow$ $y = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{1}{2}$

14 a) $x = 2$ b) $x_1 = -1,\ x_2 = -3$

c) $x = -2$ d) $x = \dfrac{3}{4}$

15 a) En $x = -3$, la recta es $y = -2(x + 3) - 2$.

b) La recta tangente en $x = -\sqrt{3}$ es $y = 6(x + \sqrt{3})$ y en $x = \sqrt{3}$ es $y = 6(x - \sqrt{3})$.

c) La recta tangente en $x = -1$ es $y = 5(x + 1) - 4$ y en $x = -3$ es $y = 5(x + 3) + 6$

16 Los puntos de corte con el eje de abscisas son $x = -2$ y $x = 2$.

La recta tangente en $x = -2$ es $y = 4(x + 2)$ y en $x = 2$ es $y = -4(x - 2)$.

La recta normal en $x = -2$ es $y = -\dfrac{1}{4}(x + 2)$ y en $x = 2$ es $y = \dfrac{1}{4}(x - 2)$.

17 Los puntos donde la recta tangente es horizontal son aquellos en los que $f'(x) = 0$.

a) En $x = \dfrac{1}{3}$ la recta tangente es $y = \dfrac{14}{3}$

b) La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = 0$.

La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y = 0$.

c) La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = 0$.

La ecuación de la recta tangente en $x = 3$ es $y = -27$.

d) La ecuación de la recta tangente en $x = -2$ es $y = 16$.

La ecuación de la recta tangente en $x = 2$ es $y = -16$.

e) La ecuación de la recta tangente en $x = -1$ es $y = -2$.

La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y = 2$.

f) La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = 0$.

18 a) (4, –5) es un punto singular.

Intervalo de crecimiento, $(4, +\infty)$. Intervalo de decrecimiento, $(-\infty, 4)$.

b) (2, 12) es un punto singular.

Intervalo de crecimiento, $(-\infty, 2)$. Intervalo de decrecimiento, $(2, +\infty)$.

c) (0, 0) y (6, –36) son puntos singulares.

Intervalos de crecimiento, $(-\infty, 0) \cup (6, +\infty)$. Intervalo de decrecimiento, $(0, 6)$.

d) (–2, –8) es un punto singular.

Intervalo de crecimiento, $\mathbb{R}$.

e) (0, 0) y (2, 4) son puntos singulares.

Intervalos de crecimiento, $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Intervalos de decrecimiento, $(0, 1) \cup (1, 2)$

f) No tiene puntos singulares. Los intervalos de crecimiento son $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

19 a) $f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 3 = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

La función es creciente en todo $\mathbb{R}$.

b) $f'(x) = 0 \rightarrow -\dfrac{1}{x^2} = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

Los intervalos de decrecimiento son:

$$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

c) $f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

El intervalo de crecimiento es $[0, +\infty)$.

d) $f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{1}{x} = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

El intervalo de crecimiento es $(0, +\infty)$.

20 a) Los puntos $\left(\frac{1}{3}, \frac{58}{27}\right)$ y (1, 2) son puntos singulares.

$\left(\frac{1}{3}, \frac{58}{27}\right)$ es un máximo y (1, 2) es un mínimo.

b) Los puntos (0, 0) y (2, 4) son puntos singulares.

(0, 0) es un mínimo y (2, 4) es un máximo.

c) Los puntos (–2, –6), (0, 10) y (2, –6) son puntos singulares.

(–2, –6) y (2, –6) son mínimos.

El punto (0, 10) debe ser un máximo porque está entre dos mínimos.

d) El punto (–1, 9) es un punto singular.

(–1, 9) es un máximo.

e) El punto (0, 3) es un punto singular.

(0, 3) es un máximo.

f) El punto $\left(\sqrt[3]{2}, 3\sqrt[3]{4}\right)$ es un punto singular.

$\left(\sqrt[3]{2}, 3\sqrt[3]{4}\right)$ es un mínimo.

21 a) $f' > 0$ si $x < -1$

$f' < 0$ si $x > -1$

b) $f' > 0$ si $x < 0$

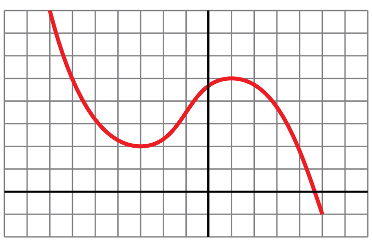
$f' < 0$ si $x > 0$

c) $f' > 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$f' < 0$ si $x \in (-1, 1)$

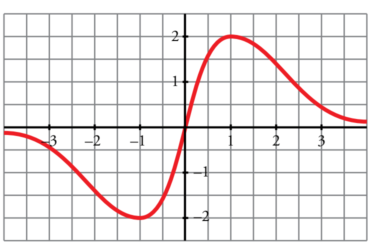
22 (–3, 2) es un mínimo.

(1, 5) es un máximo.



23

24



25 $f'(x) = 3(x-1)^2$: $f(0) = -1 \;\rightarrow\;$ pasa por (0, –1)

$f(1) = 0 \;\rightarrow\;$ pasa por (1, 0)

$f(2) = 1 \;\rightarrow\;$ pasa por (2, 1)

$f'(1) = 0$

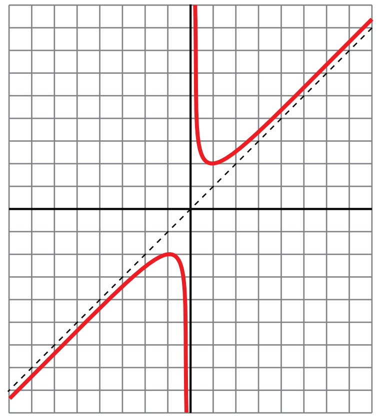
El punto (1, 0) no es ni máximo ni mínimo.

26 $f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = -1,$
$x = 1$

Puntos (–1, –2) y (1, 2).

Asíntota vertical en $x = 0$.

Asíntota oblicua en $y = x$.



Página 328

27 a) Función I

Tiene una rama parabólica cuando $x \rightarrow -\infty$.

La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y la función queda por encima de la asíntota.

Función II

La recta $y = x - 2$ es una asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$ y cuando $x \rightarrow +\infty$. En ambos casos, la función queda por debajo de la asíntota.

La recta $x = 0$ es una asíntota vertical y la función tiende a $-\infty$ por los dos lados.

b) Función I

El punto (–2, –4) es un mínimo. El punto (3, 2) es un máximo. Hay otro punto singular, (0,5; –1), pero no es ni máximo ni mínimo.

Función II

Solo tiene un punto singular, el máximo (–1, –4).

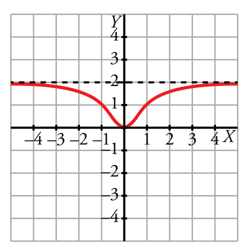
28 $\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$ La derivada en (0, 0) es nula.

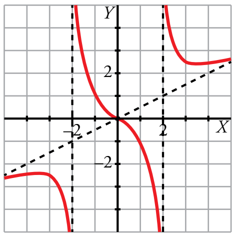
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = 2$

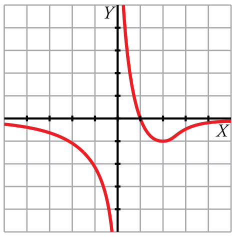
  La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal.

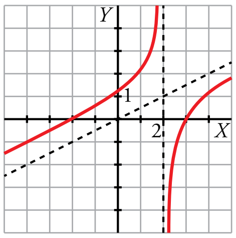
- $f(x) - 2 = \dfrac{2x^2}{1+x^2} - 2 = -\dfrac{2}{x^2+1}$

  Como la diferencia siempre es negativa, la función queda por debajo de la asíntota $y = 2$.



29 

30 

31 

32 a) (–3, 2) b) $x = \dfrac{-b}{2a}$ es la abscisa del vértice.

$\dfrac{-b^2 + 4ac}{4a}$ es la ordenada de vértice.

33 $f(x) = -x^2 + 6x - 7$

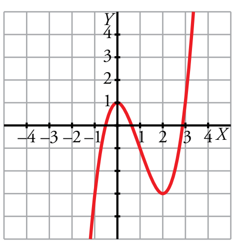
34 Para $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ la tangente en $x = 2$ es $y = 10x - 7$.

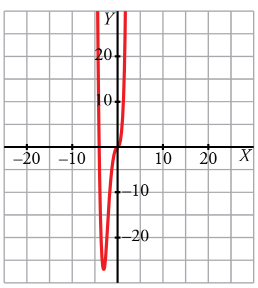
Para $g(x) = x^2 + 6x$ la tangente en $x = 2$ es $y = 10x - 4$.

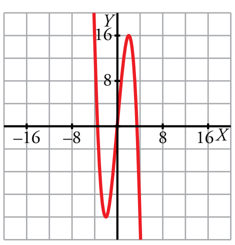
35 $a = 6$, $b = 6$, $c = -6$

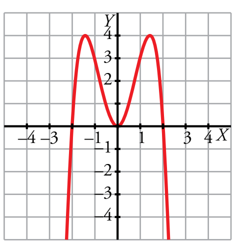
36 $f'(2) = \dfrac{4}{3}$ $f(2) = 3$

37 $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

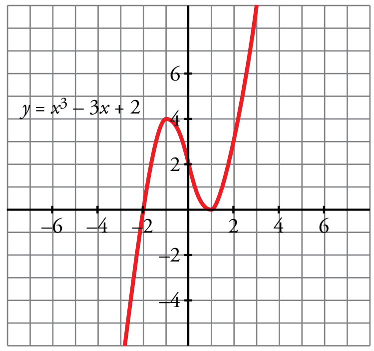
38 a) 

b) 

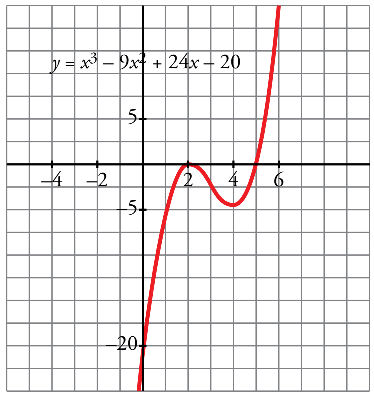
c) 

d) 

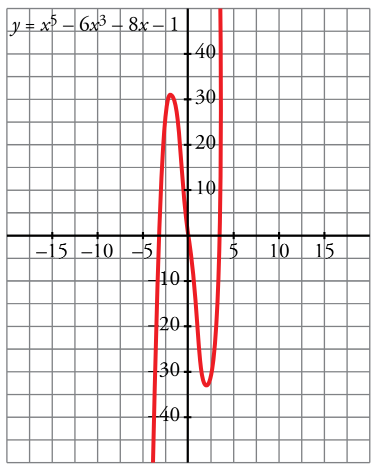
39 a) Máximo en (–1, 4). Mínimo en (1, 0).



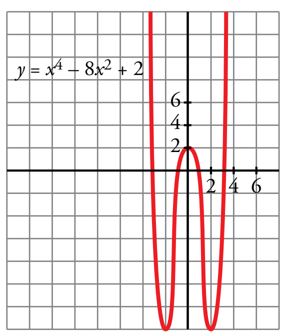
b) Máximo en (2, 0). Mínimo en (4, –4).



c) Máximo en (–2, 31). Mínimo en (2, –33).

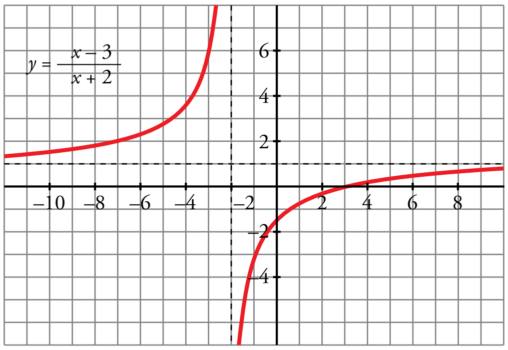


d) Máximo en (0, 2). Mínimos en (2, –14) y en (–2, –14)



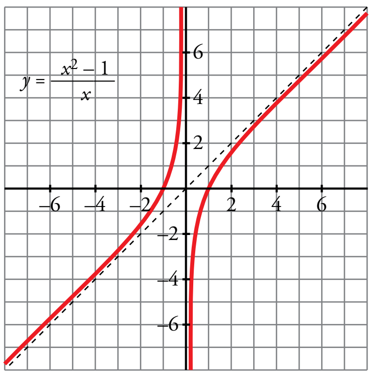
40 a) $f'(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2} \neq 0$

Los puntos de corte son: $\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$, $(3, 0)$.



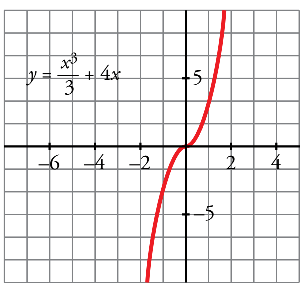
b) $f'(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2} \neq 0$

Los puntos de corte son: $(1, 0)$, $(-1, 0)$.



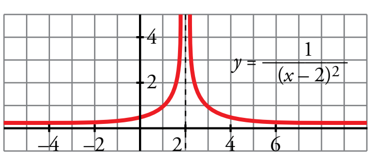
c) $f'(x) = x^2 + 4 \neq 0$

El punto de corte es $(0, 0)$.



d) $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^3} \neq 0$

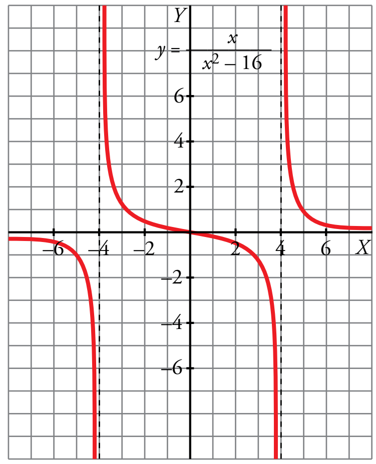
El punto de corte es $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$.



41 a) Asíntotas verticales: $x = -4$, $x = 4$

Asíntota horizontal: $y = 0$

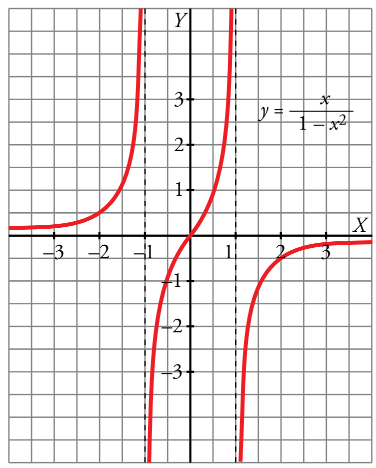
No hay asíntotas oblicuas ni puntos de tangente horizontal.



b) Asíntotas verticales: $x = 1$, $x = -1$

Asíntota horizontal: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas ni puntos de tangente horizontal.

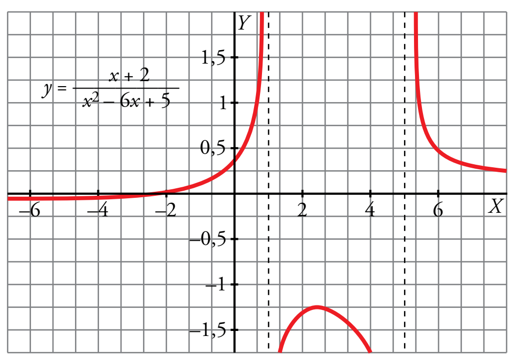


c) Asíntotas verticales: $x = 5$, $x = 1$

Asíntota horizontal: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son, aproximadamente, $(-6{,}58; -0{,}052)$, $(2{,}58; -1{,}197)$.



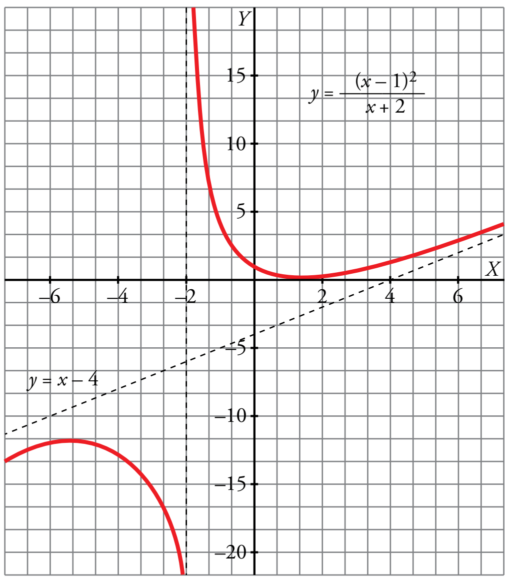
d) Asíntota vertical: $x = -2$

Asíntota oblicua: $y = x - 4$

No hay asíntotas horizontales.

Sus puntos de tangente horizontal son:

$$(1,\ 0),\ (-5,\ 12)$$



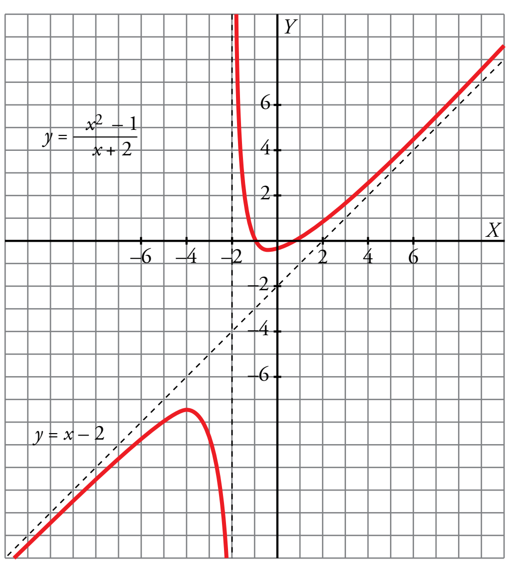
e) Asíntota vertical: $x = -2$

Asíntota oblicua: $y = x - 2$

No hay asíntotas horizontales.

Sus puntos de tangente horizontal son, aproximadamente:

$$(-0{,}26;\ -0{,}54),\ (-3{,}73;\ -7{,}46)$$

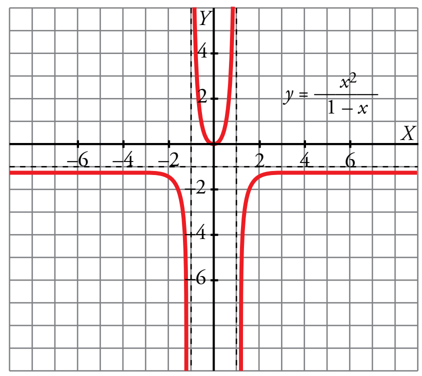


f) Asíntotas verticales: $x = 1,\ x = -1$

Asíntota horizontal: $y = -1$

No hay asíntotas oblicuas.

Punto de tangente horizontal: $(0,\ 0)$



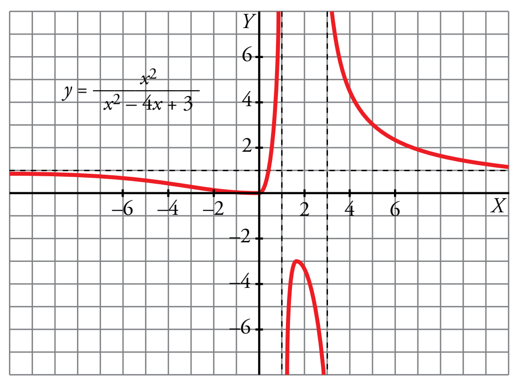
Página 329

42 a) Asíntotas verticales: $x = 3,\ x = 1$

Asíntota horizontal: $y = 1$

No hay asíntotas oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son: $(0,\ 0)$, $\left(\dfrac{3}{2}, -3\right)$

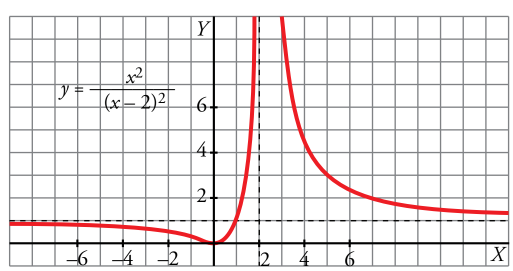


b) Asíntota vertical: $x = 2$

Asíntota horizontal: $y = 1$

No hay asíntotas oblicuas.

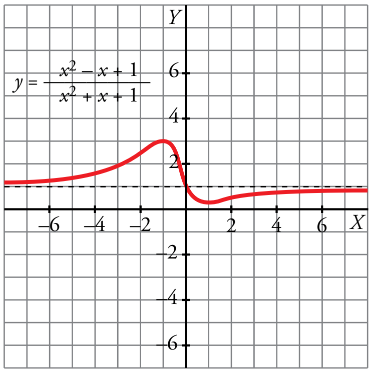
Punto de tangente horizontal: $(0,\ 0)$



c) Asíntota horizontal: $y = 1$

No hay asíntotas verticales ni oblicuas.

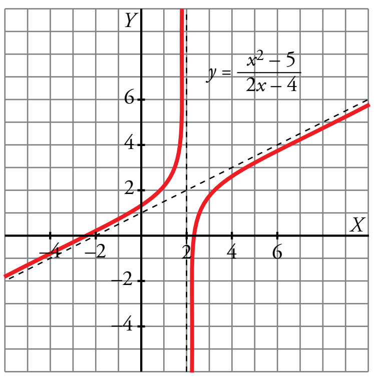
Sus puntos de tangente horizontal son: $\left(1, \frac{1}{3}\right)$, $(-1, 3)$



d) Asíntota vertical: $x = 2$

Asíntota oblicua: $y = \frac{x}{2} + 1$

No hay asíntotas horizontales ni puntos de tangente horizontal.



43 $a = -1$

44 $a = 26$, $b = 13$

45 $k = 1$

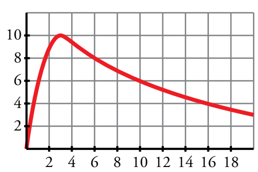
46 $(0, 0)$ y $(2, -2)$

47 $y = -3\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{29}{4}$

48 a) Se deben fabricar 5 unidades.

b) $C(5) = 175$; $M(5) = 35$

49 a)



b) El beneficio máximo se obtiene a los 3 años.

El beneficio sería de 10 miles de euros.

c) No perderá dinero ni llegará un momento en que no obtenga beneficios ni pérdidas, pues $f(x) = 0$ y $f(x) > 0$ para todo $x > 0$.

50 a) 1 b) $\frac{1}{5}$ c) 0

d) $+\infty$ e) 0 f) $\frac{1}{2}$

51 a) $\frac{1}{2}$ b) 2

52 $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{5}{2}$

53 a) El máximo se encuentra en $x = 0$ y vale -4.

El mínimo se encuentra en $x = 3$ y vale -13.

b) El máximo se encuentra en $x = 4$ y vale 83.

El mínimo se encuentra en $x = -1$ y vale -24.

c) El máximo se encuentra en $x = 4$ y vale 16.

El mínimo se encuentra en $x = -2$ y vale -20.

d) El máximo se encuentra en $x = 1$ y vale $\frac{1}{2}$.

El mínimo se encuentra en $x = 0$ y vale 0.

54 • $y = sen\ x$

El máximo se encuentra en $x = \frac{\pi}{2}$ y vale 1.

El mínimo se encuentra en $x = \frac{3\pi}{2}$ y vale -1.

• $y = cos\ x$

Los máximos se encuentran en $x = 0$ y $x = 2\pi$ y valen 1.

El mínimo se encuentra en $x = \pi$ y vale -1.

55 a) $\left(-1, \frac{5}{e}\right)$ es un máximo. $(-1, -e^2)$ es un mínimo.

Intervalos de crecimiento: $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

Intervalos de decrecimiento: $(-1, 2)$.

b) $(0, 0)$ es un mínimo. $\left(2, \frac{4}{e^2}\right)$ es un máximo.

Intervalos de crecimiento: $(0, 2)$.

Intervalos de decrecimiento: $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

c) $(0, 0)$ es un mínimo.

Intervalos de crecimiento: $(0, +\infty)$.

Intervalos de decrecimiento: $(-\infty, 0)$.

d) $(e^{-1}, -e^{-1})$ es un mínimo.

Intervalos de crecimiento: $(e^{-1}, +\infty)$.

Intervalos de decrecimiento: $(0, e^{-1})$.

56 $f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$ $\qquad f'(x) = 1 \rightarrow x = 0$

En el punto $\left(0, -\frac{\pi}{4}\right)$ la tangente a la curva es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

57 a) La función $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

La función $f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x < 2 \\ -2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

b) La función $g(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

La función $g(x)$ no es derivable en $x = 3$.

$$g'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 3 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

c) La función $h(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

La función $h(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$.

$$h'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \le 3 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

58 a) $m = 8,\ n = 3$ $\qquad$ b) $m = 1,\ n = 2$

c) $m = 3,\ n = -1$ $\qquad$ d) $m = 2,\ n = 1$

Página 330

59 • $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6x$

$f'(x) = 4x^3 - 10x + 6$

$f''(x) = 12x^2 - 10$

$f'''(x) = 24x$

$f^{IV}(x) = 24$

$f^{V}(x) = 0$ y, desde esta, todas las derivadas sucesivas siguientes.

• $f(x) = e^{2x}$

$f'(x) = 2\,e^{2x}$

$f''(x) = 4\,e^{2x}$

$f'''(x) = 8\,e^{2x}$

$f^{IV}(x) = 16\,e^{2x}$

La fórmula general, teniendo en cuenta que los coeficientes son potencias de base 2, es:

$f^{n)}(x) = 2^n e^{2x}$

60 $x = y = 50$

61 $x = 25,\ y = 25$

62 $x = 10,\ y = 10$

63 La base mide 10 cm, la altura mide $h = 5\sqrt{3}$ cm y el área máxima es $A = 25\sqrt{3}$ cm^2.

64 Llamamos x a los lados del rectángulo perpendiculares a la pared e y al lado paralelo a ella.

El área máxima se da si $x = 25$ m, $y = 50$ m y es $A = 1\,250$ m^2.

65 Los lados $x = 6\sqrt{2}$ cm, $y = 6\sqrt{2}$ cm nos dan el rectángulo de área máxima, que es $A = 72$ cm^2.

66 Las medidas son $r = \sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}$ dm, $h = 2\sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}$ dm.

67 x es el lado de la base cuadrada e y es la altura del ortoedro.

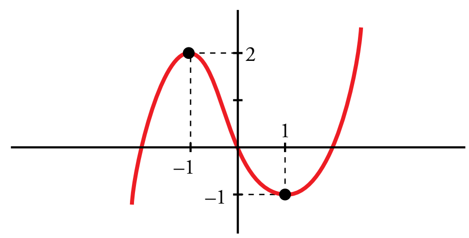
$x = \sqrt{\frac{10}{3}},\ y = \sqrt{\frac{10}{3}}$

El volumen máximo es $V = \frac{10}{3}\sqrt{\frac{10}{3}}$ cm^3.

68 Sean x e y la semibase y la altura del rectángulo, respectivamente.

$x = 5\sqrt{2}$ cm, $y = 5\sqrt{2}$ cm y el área máxima es $A = 50$ cm^2.

69



70 Existen infinitas.

$f(x) = x^2 + k$, donde x es cualquier número.

71 a) El punto (0, 0) tiene tangente horizontal. Este es el único punto singular.

b) La función es creciente en $x = 0$.

c) La recta tangente en $x = 0$ es $y = 0$.

72 Punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$

73 $f'(x) = 2ax + b = 0 \rightarrow x = \frac{-b}{2a}$

74 La correcta es la b).

75 a) Sí, en $x = 2$.

b) Si $x < 2$, es creciente, y si $x > 2$, es decreciente.

76 Debe ser $g(x) = f(x) - 2$, es decir, sería la misma gráfica que la de $f(x)$ pero desplazada dos unidades hacia abajo.

77 a) $Df[g(2)] = \frac{1}{2}$

b) $Df[g(x)] = \frac{1}{x^2 - 2}$

c) No es posible porque no se puede determinar $f(2)$.

78 Se corresponde con b).

79 La gráfica del apartado b), porque $f'(1) = 0$.

80 a) Verdadero

b) Falso. Hay funciones con puntos singulares donde la función es creciente. Por ejemplo, $f(x) = x^3$ es creciente en el punto singular (0, 0).

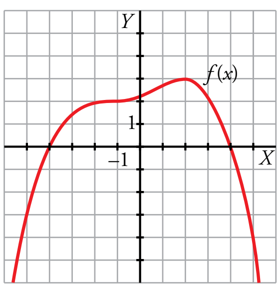
c) Falso. La función $f(x) = -x^3$ siempre es decreciente y $f'(0) = 0$.

Página 331

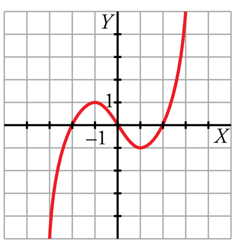
81 La gráfica del apartado c), porque $f'(-2) = f'(3) = 0$ al ser $x = -2$ y $x = 3$ puntos singulares de $f(x)$.

82 I $\rightarrow$ c II $\rightarrow$ a III $\rightarrow$ b

83



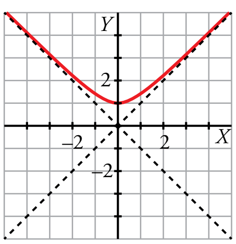
84



85 Cuando $x \rightarrow +\infty$, la asíntota oblicua es $y = x$.

Cuando $x \rightarrow -\infty$, la asíntota oblicua es $y = -x$.

El único punto singular es (0, 1).



86 El dominio de definición de $f(x)$ es el intervalo $(0, +\infty)$, por tanto, solo podemos calcular el límite por la derecha.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}h}{h} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

Como el límite anterior no existe, la función $f(x) = \sqrt{x}$ no es derivable en $x = 0$.

87 $a = -1,\ b = -2,\ c = 0$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{si } x \le 0 \\ ln\,(x+1) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Autoevaluación

1 a) T.V.M. $[0, 3] = -\frac{1}{2}$

T.V.M. $[-4, -2] = 2$

b) Sí, $P(-2, 4)$

c) Si $x < -2$, $f'(x) > 0$

d) $f'(0) = -1$

2 $$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 7h}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} h - 7 = -7$$

3 a) $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4}{x^3}$

b) $f'(x) = \frac{1-x}{x}$

c) $f'(x) = -2\pi \cos \pi x \cdot sen\ \pi x$

d) $f'(x) = \frac{3x^4(x^2 - 4x)}{(x-2)^4}$

4 $y = 2x - 2$

5 Punto singular: (1, 2). El punto singular no es máximo ni mínimo.

6 a) • Asíntota vertical: $x = 2$

IZQUIERDA: $f(x) \rightarrow +\infty$

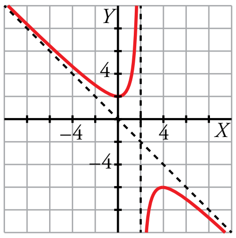
DERECHA: $f(x) \rightarrow -\infty$

• La recta $y = -x$ es la asíntota oblicua.

Si $x \rightarrow -\infty$, la función está encima de la asíntota.

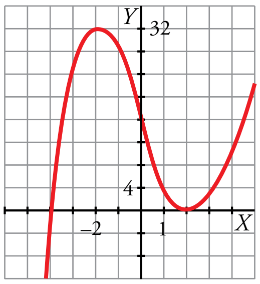
Si $x \rightarrow +\infty$, la función está debajo de la asíntota.

b) Los puntos (0, 2) y (4, –6) son puntos singulares, donde el primero es un mínimo y el segundo es un máximo.

c) 

7 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Los puntos singulares son (2, 0) y (–2, 32).



8 Dominio de definición: $\mathbb{R} - \{0\}$

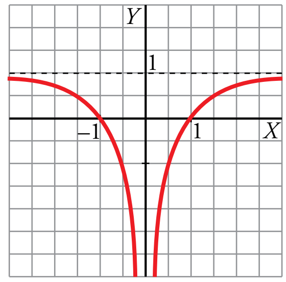
Asíntota vertical: $x = 0$.

Posición $\begin{cases} x \to 0^-, & f(x) \to -\infty \\ x \to 0^+, & f(x) \to -\infty \end{cases}$

Asíntota horizontal: $y = 1$.

Posición $\begin{cases} x \to +\infty, & f(x) < 1 \\ x \to -\infty, & f(x) < 1 \end{cases}$

No tiene puntos singulares.



9 Intervalos de crecimiento de f: $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

Intervalos de decrecimiento de f: $(-1, 3)$

La función tiene un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 3$.

10 $b = -3$, $c = 1$

11 Los números son $x = 17$, $y = 17$ y el producto máximo es 289.