TEMA 6 – NÚMEROS COMPLEJOS

6.1 – EN QUÉ CONSISTEN LOS NÚMEROS COMPLEJOS

DEFINICIONES

Al resolver ecuaciones del tipo : $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$ que no tiene solución en los números reales.

Los números complejos nacen del deseo de dar validez a estas expresiones. Para ello es necesario admitir como número válido a $\sqrt{-1}$ y a todos los que se obtengan al operar con él como si se tratara de un número más.

Unidad imaginaria: Se llama así al nuevo número $\sqrt{-1}$. Y se designa por la letra i
$i = \sqrt{-1}$; $i^2 = -1$ (El nombre i viene de imaginario)

Números complejos: Son las expresiones: a + bi, donde a y b son números reales.

Componentes: La expresión a + bi, se llama **forma binómica** de un número complejo porque tiene dos componentes: a = **Parte real**; b = **Parte imaginaria**.

Igualdad: Dos números complejos son iguales sólo cuando tienen la misma componente real y la misma componente imaginaria.

El conjunto de todos los números complejos se designa por **C**.
$C = \{a + bi \,/\, a, b \in R\}$

Los números reales son complejos: R $\subset$ C: Los reales son números complejos cuya parte imaginaria es cero: a + 0i = a

Números imaginarios: Son los números complejos cuya componente imaginaria no es cero. Por tanto, un número complejo o es real o es imaginario.

Números imaginarios puros: son los imaginarios cuya parte real es cero: 0 + bi = bi

Opuesto de un número complejo z = a + bi : -z = -a –bi

Conjugado de un número complejo z = a + bi : $\bar{z}$ = a - bi

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Las sucesivas categorías de números (naturales, enteros, racionales,...) se pueden representar sobre la recta. Los reales la llenan por completo, de modo que a cada número real le corresponde un punto en la recta y cada punto, un número real. Por eso hablamos de recta real.

Para representar los números complejos tenemos que salir de la recta y llenar el plano, pasando así de la **recta real** al **plano complejo.**

Los números complejos se representan en unos ejes cartesianos. El eje X se llama eje real y el Y, eje imaginario. El número complejo a + bi se representa mediante el punto (a,b) que se llama **afijo**, o mediante un vector de origen (0,0) y extremo (a,b).
Los afijos de los números reales se sitúan sobre el eje real y los imaginarios puros, sobre el eje imaginario.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Cualquier ecuación de segundo grado con coeficientes reales que no tenga solución real tiene dos soluciones imaginarias que son números complejos conjugados.

6.2 – OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA BINÓMICA

Las operaciones con los números complejos en forma binómica se realizan siguiendo las reglas de las operaciones de los números reales y teniendo en cuenta que $i^2 = -1$.

SUMA: La suma de dos números complejos es otro número complejo cuya parte real es la suma de las partes reales y cuya parte imaginaria es la suma de las partes imaginarias.

$z + z' = (a + bi) + (a' + b'i) = a + bi + a' + b'i = (a + a') + (b+b')i$

RESTA: La resta de dos números complejos es otro número complejo cuya parte real es la resta de las partes reales y cuya parte imaginaria es la resta de las partes imaginarias.

$z - z' = (a + bi) - (a' + b'i) = a + bi - a' - b'i = (a - a') + (b-b')i$

MULTIPLICACIÓN

$z.z' = (a + bi).(a' + b'i) = a.a' + a.b'i + ba'i + b.b'i^2 = a.a' + a.b'i + a'.bi – b.b' =$
$= (a.a' - b.b') + (a.b' + a'.b)i$

Nota: Si multiplicamos un número complejo por su conjugado obtenemos un número real: $z.z = (a + bi).(a – bi) = a^2 – (bi)^2 = a^2 – b^2.i^2 = a^2 + b^2$

DIVISIÓN: Multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador.

$$\frac{z}{z'} = \frac{a+bi}{a'+b'i} = \frac{(a+bi).(a'-b'i)}{(a'+b'i)(a'-b'i)} = \frac{(a.a'+b.b')+(b.a'-a.b')i}{a'^2+b'^2} = \frac{a.a'+b.b'}{a'^2+b'^2} + \frac{ba'-a.b'}{a'^2+b'^2}i$$

POTENCIAS DE i :

$i^0 = 1;\ i = i;\ i^2 = -1;\ i^3 = -i;\ i^4 = 1;$ ......
$i^n \Rightarrow$ se divide n entre cuatro y nos quedamos con el resto (0,1,2,3) $\Rightarrow i^n = i^r$

PROPIEDADES

La **suma** de números complejos cumple las propiedades **asociativa y conmutativa.**
El 0 es el **elemento neutro** de la **suma.**
Todos los números complejos tienen un **opuesto.**
La **multiplicación** de número complejo es, también, **asociativa y conmutativa.**
El 1 es el **elemento neutro** del **producto**
Todos los números complejos, a + bi, salvo el 0, tienen un **inverso**: 1/(a + bi)
Además, la multiplicación es **distributiva** respecto de la suma.

Con todas estas propiedades nos dicen que podemos operar con los complejos de la misma forma que con los reales.

6.3 – NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA POLAR

MÓDULO Y ARGUMENTO DE UN NÚMERO COMPLEJO

Módulo de un número complejo z es la longitud del vector mediante el que dicho número se representa. Se designa por r = |z|

Argumento de un número complejo es el ángulo que forma el vector con el eje real positivo. Se designa: $\alpha = \arg(z)$ $(0º \leq \alpha \leq 360º)$

Número complejo en forma polar: $z = r_\alpha$

PASO DE FORMA BINÓMICA A FORMA POLAR

$$z = a + bi \Rightarrow \begin{cases} r = +\sqrt{a^2 + b^2} \\ \alpha = \begin{cases} \operatorname{arctag}\dfrac{b}{a} & \text{si } a \neq 0 \ \text{(Teniendo en cuenta el cuadrante)} \\ 90º & \text{si } a = 0 \ \text{ y } \ b > 0 \\ 270º & \text{si } a = 0 \ \text{ y } b < 0 \end{cases} \end{cases}$$

PASO DE FORMA POLAR A FORMA BINÓMICA

$$z = r_\alpha \Rightarrow \begin{cases} a = r\cos\alpha \\ b = r\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases} \Rightarrow z = r\cos\alpha + r\,\mathrm{sen}\,\alpha.i$$

6.4 – OPERACIONES CON COMPLEJOS EN FORMA POLAR

PRODUCTO: Al multiplicar dos números complejos en forma polar obtenemos otro número complejo en forma polar de módulo el producto de los módulos y de argumento la suma de los argumentos (reduciéndola a un ángulo entre 0º y 360º)

$r_{\alpha}.r'_{\alpha'} = (r\cos\alpha + r\,\text{sen}\alpha i).(r'\cos\alpha' + r'\text{sen}\alpha' i) = (r\cos\alpha.r'\cos\alpha' - r\,\text{sen}\alpha.r'\text{sen}\alpha') + (r\cos\alpha.r'\text{sen}\alpha' + r\,\text{sen}\alpha.r'\cos\alpha')i = rr'(\cos\alpha.\cos\alpha' - \text{sen}\alpha.\text{sen}\alpha') + rr'.(\cos\alpha.\text{sen}\alpha' + \text{sen}\alpha.\cos\alpha')i = rr'\cos(\alpha + \alpha') + rr'.\text{sen}(\alpha + \alpha') = rr'_{\alpha + \alpha'}$

POTENCIA: La potencia n-ésima de un número complejo en forma polar es otro número complejo en forma polar de módulo la potencia n-ésima del módulo y por argumento el argumento multiplicado por n.

$(r_{\alpha})^n = r_{\alpha}.....r_{\alpha} = (r......r)_{\alpha + ... + \alpha} = (r^n)_{n\alpha}$

COCIENTE: El cociente de dos números complejos en forma polar es otro número complejo de módulo el cociente de los módulos y por argumento la resta de los argumentos: $\dfrac{r_{\alpha}}{r'_{\alpha'}} = \left(\dfrac{r}{r'}\right)_{\alpha-\alpha'}$

FÓRMULA DE MOIVRE

Aplicando las propiedades de la potencia de un número complejo, se obtiene la siguiente fórmula, llamada **fórmula de Moivre:**

$$(\cos\alpha + \text{sen}\alpha\ i)^n = \cos n\alpha + \text{sen}\ n\alpha\ i$$

que es útil en trigonometría, pues permite hallar $\cos n\alpha$ y $\text{sen}\ n\alpha$ en función de $\cos\alpha$ y $\text{sen}\ \alpha$.

RADICALES

$$\sqrt[n]{r_{\alpha}} = \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\alpha+360^{\circ}k}{n}} \qquad k = 0,1,....,n-1$$

Dando los valores de k obtenemos la n raíces de dicho número complejo.

Para n > 2, los afijos de estas n raíces son los vértices de un n-ágono regular con centro en el origen.