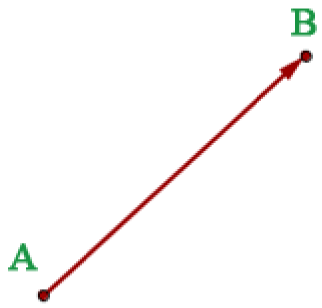
Vectores



Un vector fijo $\vec{AB}$ es un **segmento orientado** que va del punto A (**origen**) al punto B (**extremo**).

Elementos de un vector

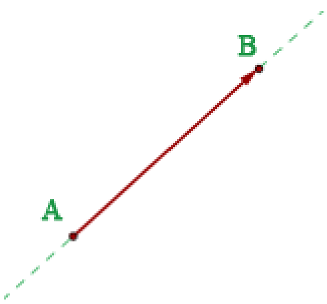
Dirección de un vector

La **dirección del vector** es la **dirección de la recta** que contiene al vector o de cualquier **recta paralela** a ella.

Sentido de un vector

El **sentido del vector** $\vec{AB}$ es el que va desde el **origen A** al **extremo B**.

Módulo de un vector



El **módulo del vector** $\vec{AB}$ es la **longitud del segmento AB**, se representa por $|\vec{AB}|$.

El **módulo** de un **vector** es un **número** siempre **positivo** o **cero**.

Módulo de un vector a partir de sus componentes

$$\vec{u} = (u_1, u_2) \qquad |\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

$$\vec{u} = (2,\ 4) \qquad |\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

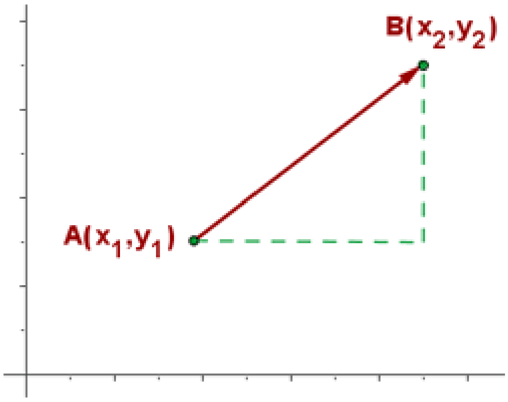
Módulo a partir de las coordenadas de los puntos

$$A(x_1, y_1) \qquad B(x_2, y_2)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$A(2,\ 1) \qquad B(-3,\ 2) \qquad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{26}$$

Coordenadas de un vector



Si las coordenadas de los puntos extremos, A y B, son:

$$A(x_1, y_1) \qquad B(x_2, y_2)$$

Las **coordenadas del vector** $\overrightarrow{AB}$ son las **coordenadas del extremo menos las coordenadas del origen**.

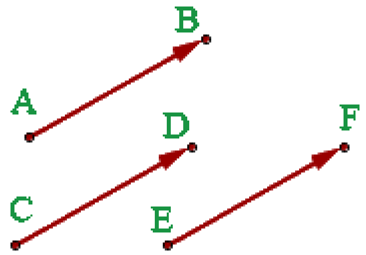
$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$$

$$A(2,\ 2) \qquad B(5,\ 7)$$

$$\overrightarrow{AB} = (5-2,\ 7-2) \qquad \overrightarrow{AB} = (3,\ 5)$$

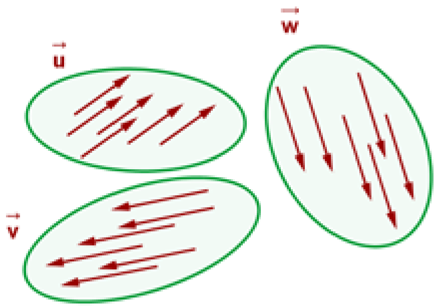
Clases de vectores

Vectores equipolentes



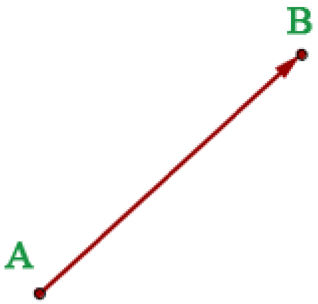
Dos vectores son **equipolentes** cuando tienen igual **módulo, dirección y sentido**.

Vectores libres



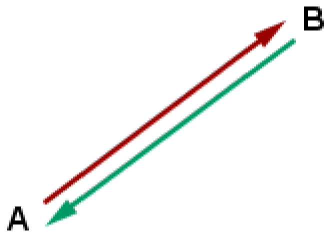
El conjunto de todos los **vectores equipolentes** entre sí se llama **vector libre**. Es decir los **vectores libres** tienen el mismo **módulo**, **dirección** y **sentido**.

Vectores fijos



Un **vector fijo** es un representante del **vector libre**. Es decir, los vectores fijos tienen el mismo **módulo**, **dirección**, **sentido** y **origen**.

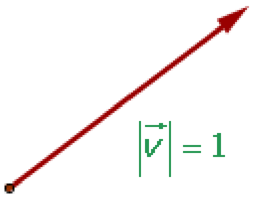
Vectores opuestos



Los **vectores opuestos** tienen el mismo **módulo**, **dirección**, y distinto **sentido**.

Vectores unitarios

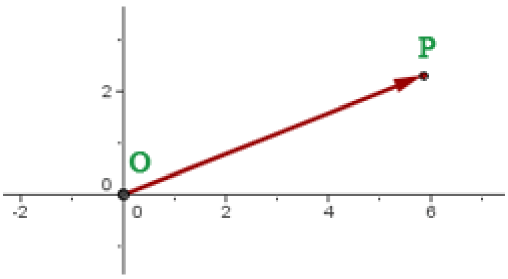
Los **vectores untario** tienen de **módulo**, la **unidad**.



Para obtener un v**ector unitario**, de la **misma dirección** y **sentido** que el **vector** dado se **divide** éste por su **módulo**.

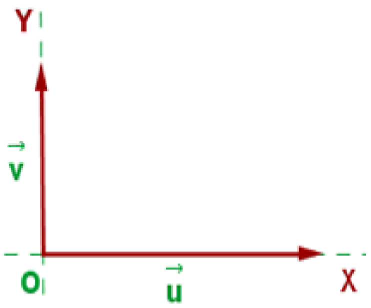
$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Vector de posición



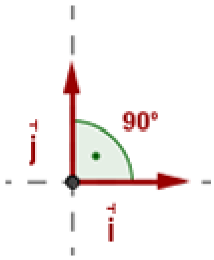
El **vector** $\overrightarrow{OP}$ que une el **origen** de coordenadas **O** con un **punto P** se llama **vector de posición** del punto P.

Vectores ortogonales



Dos **vectores** son **ortogonales** o **perpendiculares** si su **producto escalar** es **cero**.

Vectores ortonormales



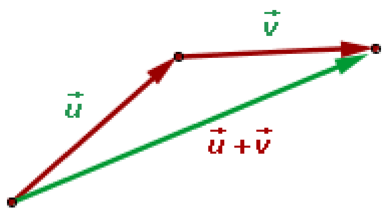
Dos **vectores** son **ortonormales** si:

1. Son perpendiculares entre sí

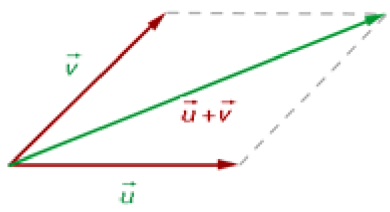
2. Los dos **vectores** son **unitarios**.

Operaciones con vectores

Suma de vectores



Para sumar dos vectores libres $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se escogen como representantes dos vectores tales que el extremo final de uno coincida con el extremo origen del otro vector.



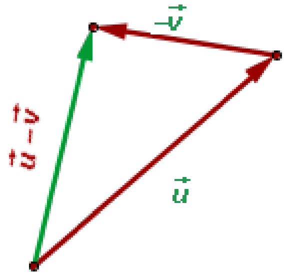
Regla del paralelogramo: Se toman como representantes dos vectores con el origen en común, se trazan rectas paralelas a los vectores obteniéndose un paralelogramo cuya diagonal coincide con la suma de los vectores.

Para sumar dos vectores se suman sus respectivas componentes.

$$\vec{u} = (u_1, u_2) \qquad \vec{v} = (v_1, v_2)$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, \ u_2 + v_2)$$

Resta de vectores



Para restar dos vectores libres $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se suma $\vec{u}$ con el opuesto de $\vec{v}$.

Las componentes del vector resta se obtienen restando las componentes de los vectores.

$$\vec{u} = (u_1, u_2) \qquad \vec{v} = (v_1, v_2)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, \ u_2 - v_2)$$

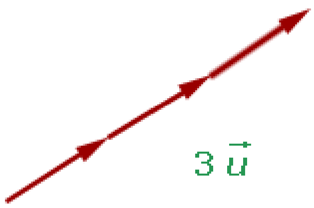
$$\vec{u} = (-2, 5) \qquad \vec{v} = (3, -1)$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (-2 + 3, \ 5 - 1) = (1, 4)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (-2 - 3, \ 5 - (-1)) = (-5, 6)$$

Producto de un número por un vector

El producto de un número k por un vector $\vec{u}$ es otro vector:



De **igual dirección** que el vector $\vec{u}$.

Del **mismo sentido** que el vector $\vec{u}$ **si k es positivo**.

De **sentido contrario** del vector $\vec{u}$ **si k es negativo**.

De **módulo** $|k| \cdot |\vec{u}|$

Las componentes del vector resultante se obtienen multiplicando por K las componentes del vector.

$$\vec{u} = (u_1, u_2) \qquad k \cdot (u_1, u_2) = (k \cdot u_1, \ k \cdot u_2)$$

$$\vec{u} = (-2, 5) \qquad \vec{v} = (3, -1)$$

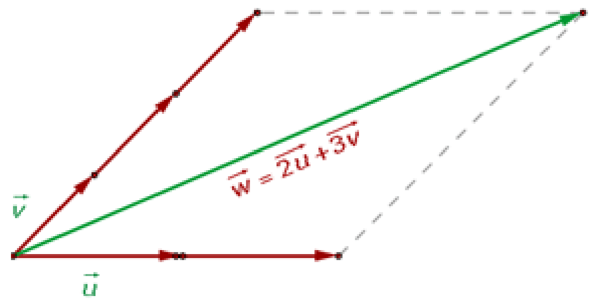
$$-\vec{u} = (2, -5) \qquad 3 \cdot \vec{v} = (9, -3)$$

Combinación lineal de vectores

Dados **dos vectores**: $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y **dos números**: **a** y **b**, el **vector** se $a\vec{u} + b\vec{v}$ dice que es una **combinación lineal** de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

Una **combinación lineal** de dos o más vectores es el **vector** que se obtiene al **sumar** esos **vectores multiplicados** por sendos **escalares**.

$$v = a_1 \vec{v_1} + a_2 \vec{v_2} + \cdots + a_n \vec{v_n}$$



Cualquier **vector** se puede poner como **combinación lineal** de otros dos que tengan **distinta dirección**.

$$\vec{w} = \vec{2u} + \vec{3v}$$

Esta combinación lineal es única.

Ejemplos:

Dados los vectores $\vec{x} = (1, 2)$ e $\vec{y} = (3, -1)$, hallar el **vector combinación lineal** $\vec{z} = 2\vec{x} + 3\vec{y}$

$$\vec{z} = 2(1, 2) + 3(3, -1) = (2, 4) + (9, -3) = (11, 1)$$

El vector , $\vec{z} = (2,\ 1)$ ¿se puede expresar como **combinación lineal** de $\vec{x} = (3,\ -2)$ e $\vec{y} = (1,\ 4)$ los vectores ?

$$(2,\ 1) = a(3,\ -2) + b(1,\ 4)$$

$$(2,\ 1) = (3a,\ -2a) + (b,\ 4b)$$

$$(2,\ 1) = (3a + b,\ -2a + 4b)$$

$$\begin{cases} 2 = \ \ 3a + b \\ 1 = -2a + 4b \end{cases} \qquad a = \frac{1}{2} \qquad b = \frac{1}{2}$$

$$\vec{z} = \frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}$$

Vectores linealmente dependientes e independientes

Vectores linealmente dependientes

Varios **vectores libres** del plano se dice que son **linealmente dependientes** si hay una **combinación lineal** de ellos que es igual al **vector cero**, con todos los **coeficientes** a_i de la **combinación lineal** distintos de cero..

$$a_1\ \overrightarrow{v_1} + a_2\ \overrightarrow{v_2} + \cdots + a_n\ \overrightarrow{v_n} = \vec{0}$$

Propiedades

1. Si varios **vectores** son **linealmente dependientes**, entonces al menos **uno** de ellos se puede expresar como **combinación lineal** de los demás.

$$a_1\ \overrightarrow{v_1} + a_2\ \overrightarrow{v_2} + \cdots + a_3\ \overrightarrow{v_3} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{v_1} = -\frac{a_2}{a_1}\overrightarrow{v_2} - \frac{a_3}{a_1}\overrightarrow{v_3}$$

También se cumple el reciproco: si un **vector** es **combinación lineal** de otros, entonces todos los **vectores** son **linealmente dependientes**.

2. Dos vectores del plano son **linealmente dependientes** si, y sólo si, son **paralelos**.

3.Dos **vectores libres** del plano $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ son **linealmente dependientes** si sus componentes son proporcionales.

$$\vec{u} = k\vec{v} \qquad (u_1, u_2) = k(v_1, v_2)$$

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = k$$

Vectores linealmente independientes

Varios vectores libres son **linealmente independientes** si ninguno de ellos puede ser escrito con una **combinación lineal** de los restantes.

$$a_1 \overrightarrow{v_1} + a_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + a_n \overrightarrow{v_n} = \vec{0}$$

$\mathbf{a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0}$

Los **vectores linealmente independientes** tienen **distinta dirección** y sus **componentes** no son **proporcionales**.

Ejemplo

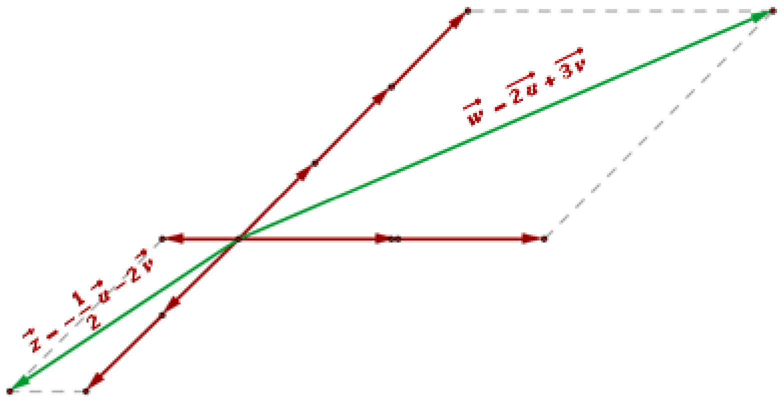
Deterrminar si son linealmente dependientes o independientes los vectores.:

$\vec{u} = (3, 1)$ y $\vec{v} = (2, 3)$

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{3} \qquad 3 \cdot 3 \neq 2 \cdot 1$$

son linealmente independientes

Base



Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con **distinta dirección** forman una **base**, porque cualquier **vector** del plano se puede poner como **combinación lineal** de ellos.

Las **coordenadas de un vector** respecto de una **base** son los coeficientes que permiten expresar el vector como combinación lineal de los vectores de la base:

$$\vec{x} = a\,\vec{u} + b\vec{v} \qquad \vec{x} = (a, b)$$

Ejemplos

$$\vec{w} = 2\,\vec{u} + 3\vec{v} \qquad \vec{w} = (2, 3)$$

$$\vec{z} = -\frac{1}{2}\,\vec{u} - 2\vec{v} \qquad \vec{z} = \left(-\frac{1}{2}, -2\right)$$

Ejemplo

Qué pares de los siguientes **vectores** forman una **base**:

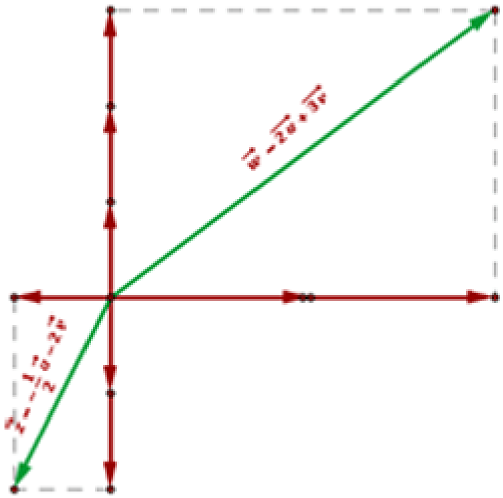
$$\vec{u} = (2, -3) \qquad \vec{v} = (5, 1) \qquad \vec{w} = (-4, 6)$$

$$\frac{2}{-3} = \frac{5}{1} \qquad 2 \neq -15 \qquad \{\vec{u}, \vec{v}\}$$

$$\frac{2}{-3} = \frac{-4}{6} \qquad 12 = 12 \qquad \mathit{No}$$

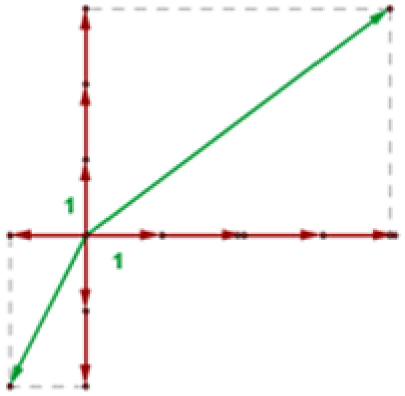
$$\frac{5}{1} = \frac{-4}{6} \qquad 30 \neq -4 \qquad \{\vec{v}, \vec{w}\}$$

Base ortogonal



Los dos vectores de la base son perpendiculares entre sí.

Base ortonormal



Los dos vectores de la base son perpendiculares entre sí, y además tienen módulo 1.

$$\vec{i} \perp \vec{j} \qquad |\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$$

Esta base formada por los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$ se denomina **base canónica**.

Es la base que se utiliza habitualmente, de modo que si no se advierte nada se supone que se está trabajando en esa base.

Ejercicios

Qué pares de los siguientes **vectores** forman una **base**:

$$\vec{u} = (2, -3) \qquad \vec{v} = (5, 1) \qquad \vec{w} = (-4, 6)$$

$$\frac{2}{-3} = \frac{5}{1} \qquad 2 \neq -15 \qquad \{\vec{u}, \vec{v}\}$$

$$\frac{2}{-3} = \frac{-4}{6} \qquad 12 = 12 \qquad No$$

$$\frac{5}{1} = \frac{-4}{6} \qquad 30 \neq -4 \qquad \{\vec{v}, \vec{w}\}$$

Sean los vectores libres $\vec{u}$ = (2, 1), $\vec{v}$ = (1, 4) y $\vec{w}$ = (5, 6). Determinar:

1. Si forman una base $\vec{u}$ y $\vec{w}$.

$$\frac{2}{1} = \frac{1}{4} \qquad 2 \cdot 4 \neq 1 \cdot 1 \qquad L.\ I.$$

Al ser linealmente independientes constituyen una base.

2. Expresar $\vec{w}$ como combinación lineal de los vectores de la base

$$(5, 6) = a(2, 1) + b(1, 4)$$

$$5 = 2a + b$$

$$a = 2 \qquad b = 1$$

$$6 = a + 4b$$

$$\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$$

3. Calcular las coordenadas de C respecto a la base.

Las coordenadas de $\vec{w}$ respecto a la base son: (2, 1)

Un vector $\vec{w}$ tiene de coordenadas (3, 5) en la base canónica. ¿Qué coordenadas tendrá referido a la base $\vec{u}$= (1, 2), $\vec{v}$= (2, 1)?

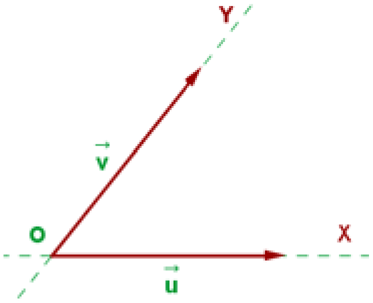
(3, 5) = a (1, 2) + b (2, 1)

3 = a + 2b a = 3 - 2b a = 7/3

5 = 2a + b 5 = 2 (3 - 2b) + b b = 1/3

Las coordenadas del vector $\vec{w}$ en la base B son (7/3, 1/3).

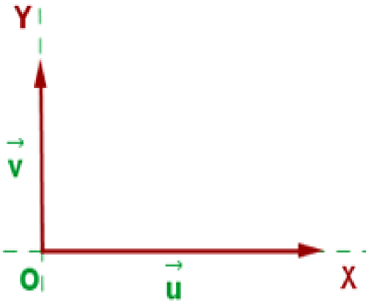
Sistema de referencia



En el plano, un sistema de referencia **está constituido por un punto O del plano y una base** ($\vec{u}$, $\vec{v}$).

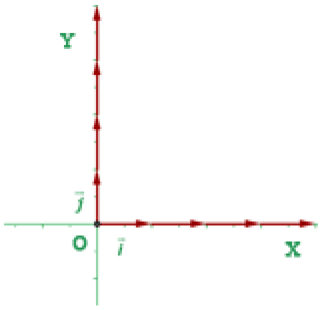
El punto O del sistema de referencia se llama **origen**.

Ortogonal



Los vectores base son perpendiculares y tienen **distinto módulo**.

Ortonormal



Los vectores de la base son perpendiculares, iguales y unitarios, es decir, de módulo 1.

Se representan por las letras $\vec{i}, \vec{j}$.

$$\vec{i} = 1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} \qquad \vec{i} = (1,\ 0)$$

$$\vec{j} = 0 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} \qquad \vec{j} = (0,\ 1)$$

Las rectas OX, OY se llaman ejes de coordenadas o ejes coordenados cartesianos.

Producto escalar

El **producto escalar** de **dos vectores** es un **número real** que resulta al **multiplicar el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman**.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

Ejemplo

$\vec{u} = (3,\ 0)$ $\vec{v} = (5,\ 5)$ $\widehat{uv} = 45^\circ$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{3^2 + 0^2} \cdot \sqrt{5^2 + 5^2} \cdot \cos 45^\circ =$$

$$= 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 15$$

Expresión analítica del producto escalar

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 . v_2$$

Ejemplo

$\vec{u} = (3,\ 0)$ $\vec{v} = (5,\ 5)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 5 + 0 \cdot 5 = 15$$

Expresión analítica del módulo de un vector

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1 \cdot u_1 + u_2 \cdot u_2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

$\vec{u} = (3,\ 0)$ $\vec{v} = (5,\ 5)$

Ejemplo

$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{3 \cdot 3 + 0 \cdot 0} = 3$ $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{5 \cdot 5 + 5 \cdot 5} = 5\sqrt{2}$

Ángulo formado por dos vectores

Es el menor de los ángulos que determinan entre sí. Utilizando la expresión analítica del producto escalar tenemos:

$$\cos\alpha = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 . v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

Ejemplo

$\vec{u} = (3, 0) \qquad \vec{v} = (5, 5)$

$$\cos\alpha = \frac{3 \cdot 5 + 0 \cdot 5}{\sqrt{3^2 + 0^2} \cdot \sqrt{5^2 + 5^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\alpha = 45^\circ$

Condición analítica de la ortogonalidad de dos vectores

Dos vectores no nulos son perpendiculares si su producto escalar es cero

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \qquad u_1 . v_1 + u_2 \cdot v_2 = 0$$

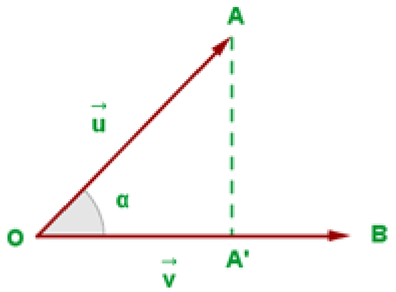
Ejemplo

$\vec{u} = (3, 0) \qquad \vec{v} = (5, 5)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 5 + 0 \cdot 5 \neq 0$ No son perpendiculares

Interpretación geométrica del producto escalar

El producto de dos vectores no nulos es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.



$$\cos\alpha = \frac{OA'}{|\vec{u}|} \qquad OA' = |\vec{u}| \cdot \cos\alpha$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot OA'$$

Ejemplo

Hallar la proyección del vector $\vec{u}$ = (2, 1) sobre el vector $\vec{v}$ = (−3, 4).

$$P(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{2 \cdot (-3) + 1 \cdot 4}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = -\frac{2}{5}$$

Propiedades del producto escalar

1Conmutativa

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

2 Asociativa

$$k \cdot \left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right) = \left(k \cdot \vec{u}\right) \cdot \vec{v}$$

3 Distributiva

$$\vec{u} \cdot \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

4

El producto escalar de un vector no nulo por sí mismo siempre es positivo.

$$\vec{u} \neq 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} > 0$$