1 Fracciones y decimales

Presentación de la unidad

- Los alumnos y las alumnas que llegan a este curso lo hacen con una gran cantidad de conocimientos sobre los números, sus usos y su operatoria: conceptos, procedimientos, destrezas, junto a errores, frustraciones y, acaso, un cierto aburrimiento de volver una y otra vez a las mismas cosas. Con esta unidad se pretende asentar y reforzar muchos de estos conocimientos, profundizar en algunos y darles sentido práctico a todos ellos. Y, si fuera posible, aportar al alumnado confianza y buena disposición de ánimo para estas tareas.

- Las fracciones, su significado y su uso suele ser algo razonablemente aprendido en este nivel. No así su operatoria, en la que siguen apareciendo gran cantidad de deficiencias. Comenzaremos, de todos modos, revisando el concepto de fracción para, apoyándonos en él, construir el de número racional.

- Recordaremos el concepto de fracción como operador. Los estudiantes suelen calcular sin dificultad la fracción de una cantidad, pero conviene insistir en el proceso inverso: calcular la cantidad total, conociendo la parte.

- Repasaremos también los conceptos relativos a las fracciones equivalentes y sus propiedades, asegurando la comprensión y el manejo ágil de la reducción a común denominador. Se sugiere aquí alternar el cálculo mental en los casos sencillos, con el cálculo escrito cuando se manejan números grandes.

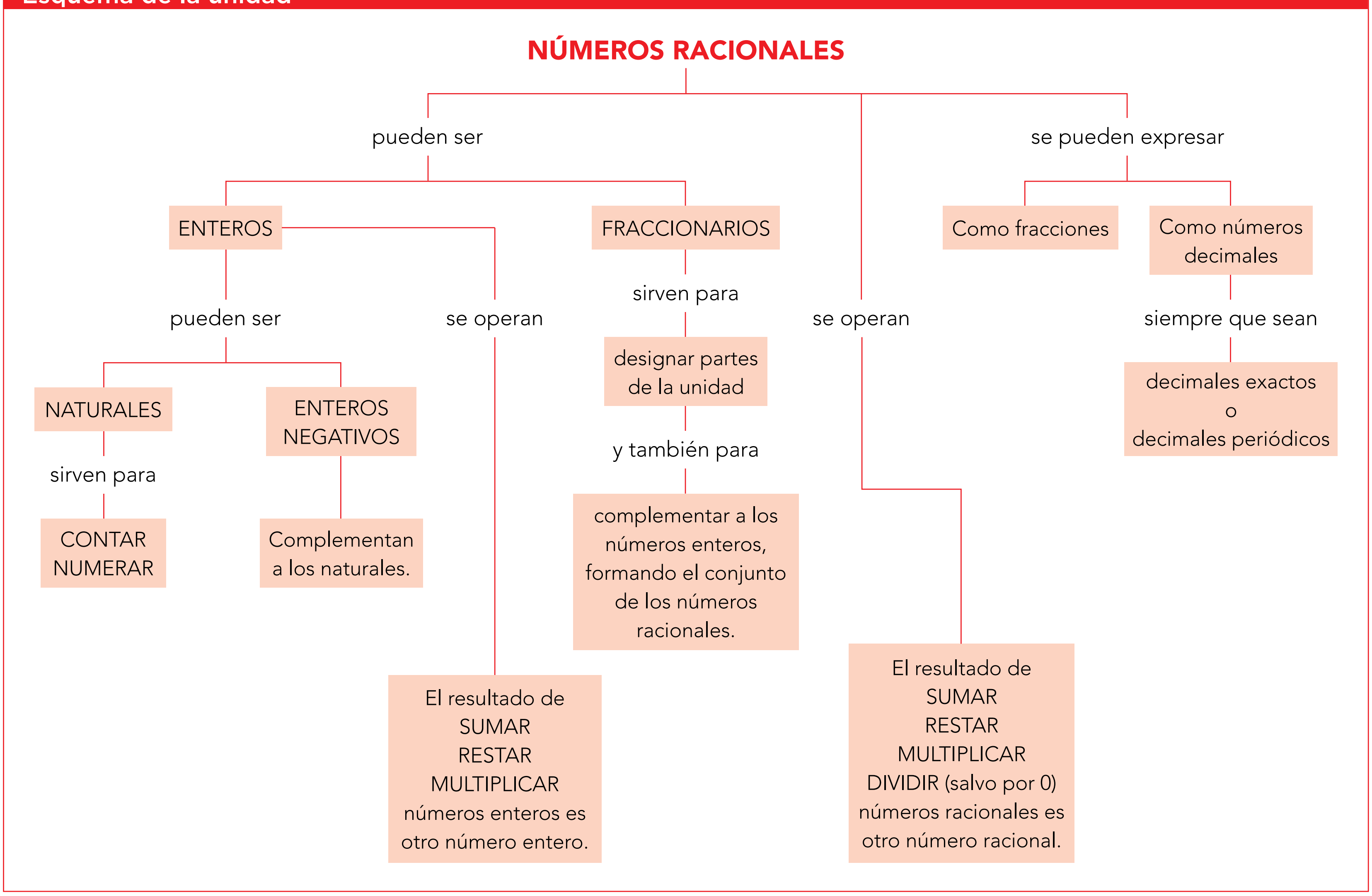
- El paso de fracción a decimal, y viceversa, especialmente el paso de decimal periódico a fracción, es uno de los contenidos típicos de este curso. Volveremos a encontrarnos con él en la unidad 4 (progresiones).

- La peculiaridad (como fracciones, como decimales) de los números racionales, así como la existencia de irracionales, completan el tratamiento teórico.

- Es muy importante insistir y fomentar el cálculo mental, tanto con los números decimales como con los fraccionarios, que tanto ayuda a desarrollar la agilidad mental y la confianza.

- La mayoría de los alumnos y las alumnas ya habrán utilizado una calculadora, pero este es el momento en que deben conocerla en profundidad, empezando por los usos más elementales, y valorar su enorme potencial en el complejo tratamiento de fracciones y números mixtos.

Esquema de la unidad



Conocimientos mínimos

Consideramos que, como mínimo, los estudiantes deben aprender lo siguiente:

- Manejo diestro de las fracciones: operatoria y uso.
- Paso de fracciones a decimales. Distinción de tipos de decimales.
- Expresión de un decimal exacto como fracción.
- Resolución de problemas aritméticos usando las fracciones como operadores y las operaciones con fracciones.
- Conocimiento de la calculadora y su utilización de forma sensata (con oportunidad y eficacia).

Complementos importantes

- Representación de números fraccionarios en la recta.
- Técnica para pasar a fracción un número decimal periódico.
- Reconocimiento de números no racionales.

Anticipación de tareas

- Revisar el conocimiento de la prioridad de las operaciones y el uso del paréntesis.
- Comparar expresiones muy sencillas variando la posición del paréntesis.
- Mostrar distintos tipos de calculadoras.
- Recordar los conceptos y procedimientos básicos de la divisibilidad.
- Repasar algunas técnicas básicas para el cálculo mental.

Adaptación curricular

En la parte de "Recursos fotocopiables" se ofrece una adaptación curricular de esta unidad 1 del libro del alumnado, para cuya elaboración se han tenido en cuenta los conocimientos mínimos que aquí se proponen.

La lectura inicial servirá para ejercitar la comprensión lectora y para mostrar los dos aspectos que justifican el estudio de las matemáticas: el práctico y el intelectual.

Los contenidos, si se adaptan a esos mínimos exigibles, o bien no han sufrido cambio alguno o bien se han modificado ligeramente para adecuarlos al posible nivel de los estudiantes a quienes va dirigido. Lo mismo cabe decir de los ejercicios prácticos que se proponen.

Si algún contenido supera los mínimos exigibles, o bien se ha suprimido o bien se ha adaptado para ajustarlo a los requisitos exigidos.

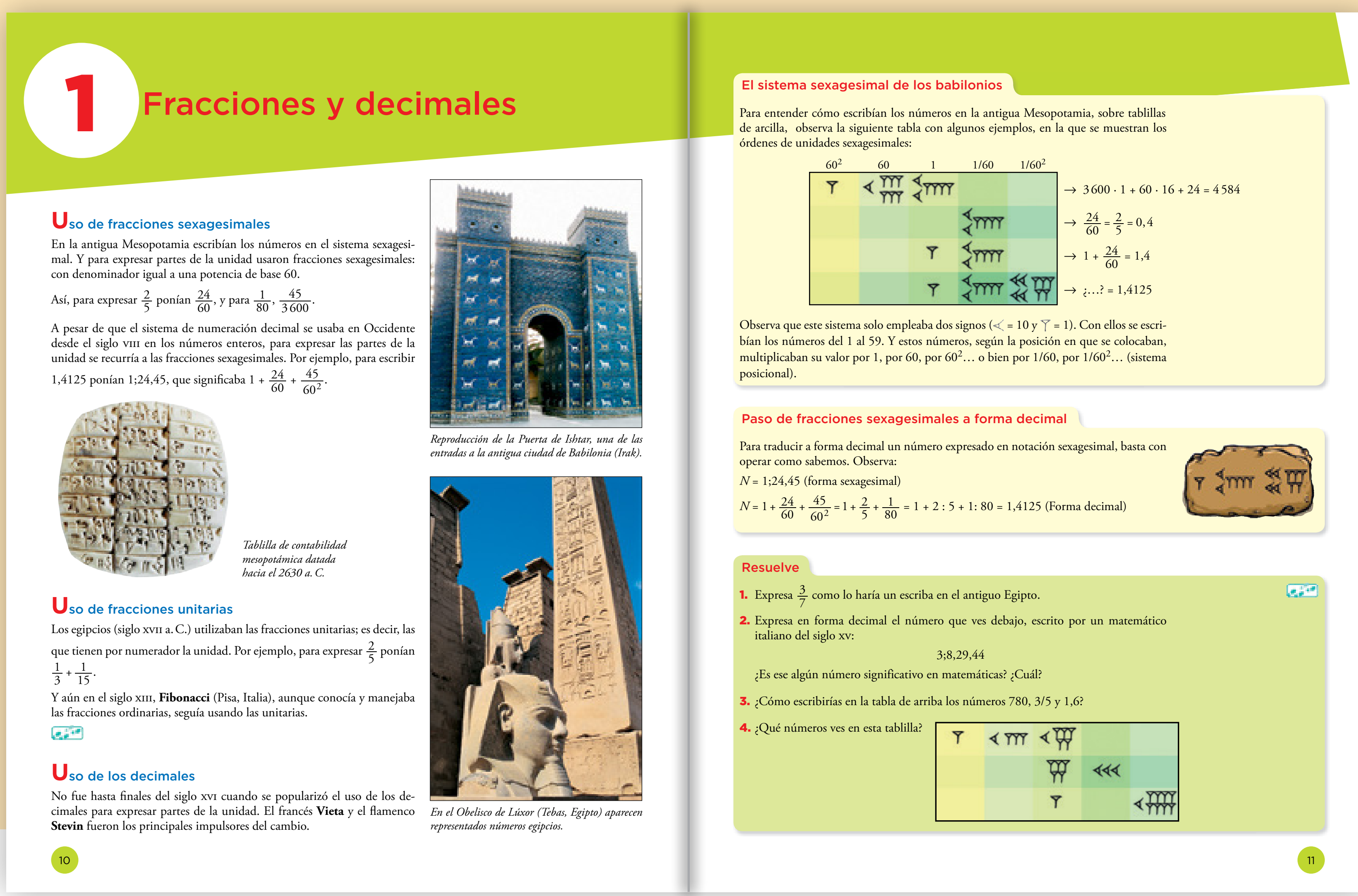
Finalmente, los ejercicios y problemas con los que finaliza la unidad se han reducido en cantidad y se han modificado o bajado de nivel hasta adaptarse a lo convenido. Lo mismo cabe decir de la autoevaluación.

En la siguiente tabla se recoge una relación de actividades para atender y trabajar el aprendizaje cooperativo, el pensamiento comprensivo, el pensamiento crítico, la interdisciplinariedad, las TIC, el emprendimiento y la resolución de problemas. Unas están propuestas en el libro del alumnado (L.A.), y aquí se hace referencia a ellas indicando la página y la actividad, y otras, como se indica, se sugieren en esta Propuesta Didáctica (P.D.).

Una selección de estas sugerencias están marcadas en el libro del alumnado con un icono; aquí se han marcado con (*).

APRENDIZAJE COOPERATIVO	PENSAMIENTO COMPRENSIVO	PENSAMIENTO CRÍTICO
Pág. 14. Actividad sugerida en esta P.D. (*)	Pág. 18. Desarrollo teórico (*)	Pág. 12. Actividad 1 (*)
Pág. 21. Actividades de la página (*)	Pág. 18. Actividad 1 (*)	
	Pág. 19. Desarrollo teórico (*)	
	Pág. 19. Actividad 4 (*)	
	Pág. 20. Ejercicios resueltos (*)	

INTERDISCIPLINARIEDAD	TIC	EMPRENDIMIENTO	RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Pág. 11. Actividad sugerida en esta P.D.	Pág. 10. Actividad sugerida en esta P.D.	Pág. 10. Actividad sugerida en esta P.D. (*)	Todos los problemas propuestos en el L.A. están encuadrados en este apartado. Aquí se señalan algunos que tienen especial interés.
Pág. 24. Actividad "Infórmate" (*)	Pág. 18. Piensa y practica (*)	Pág. 11. Resuelve (*)	Pág. 15. Piensa y practica (*)
	Pág. 19. Piensa y practica (*)	Pág. 18. Actividad 2 (*)	Pág. 22. Resuelve problemas (*)
		Pág. 23. Reflexiona sobre la teoría (*)	Pág. 23. Problemas "+" (*)
		Pág. 24. Actividad "Lee, reflexiona y deduce" (*)	Pág. 25. Entrénate resolviendo problemas (*)



1 Fracciones y decimales

Uso de fracciones sexagesimales

En la antigua Mesopotamia escribían los números en el sistema sexagesimal. Y para expresar partes de la unidad usaron fracciones sexagesimales: con denominador igual a una potencia de base 60.

Así, para expresar $\frac{2}{5}$ ponían $\frac{24}{60}$, y para $\frac{1}{80}$, $\frac{45}{3600}$.

A pesar de que el sistema de numeración decimal se usaba en Occidente desde el siglo VIII en los números enteros, para expresar las partes de la unidad se recurría a las fracciones sexagesimales. Por ejemplo, para escribir 1,4125 ponían 1;24,45, que significaba $1 + \frac{24}{60} + \frac{45}{60^2}$.

Tablilla de contabilidad mesopotámica datada hacia el 2630 a. C.

Reproducción de la Puerta de Ishtar, una de las entradas a la antigua ciudad de Babilonia (Irak).

Uso de fracciones unitarias

Los egipcios (siglo XVII a. C.) utilizaban las fracciones unitarias; es decir, las que tienen por numerador la unidad. Por ejemplo, para expresar $\frac{2}{5}$ ponían $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$.

Y aún en el siglo XIII, **Fibonacci** (Pisa, Italia), aunque conocía y manejaba las fracciones ordinarias, seguía usando las unitarias.

Uso de los decimales

No fue hasta finales del siglo XVI cuando se popularizó el uso de los decimales para expresar partes de la unidad. El francés **Vieta** y el flamenco **Stevin** fueron los principales impulsores del cambio.

En el Obelisco de Lúxor (Tebas, Egipto) aparecen representados números egipcios.

10

El sistema sexagesimal de los babilonios

Para entender cómo escribían los números en la antigua Mesopotamia, sobre tablillas de arcilla, observa la siguiente tabla con algunos ejemplos, en la que se muestran los órdenes de unidades sexagesimales:

60^2 | 60 | 1 | 1/60 | $1/60^2$

→ $3600 \cdot 1 + 60 \cdot 16 + 24 = 4584$

→ $\frac{24}{60} = \frac{2}{5} = 0,4$

→ $1 + \frac{24}{60} = 1,4$

→ ¿…? = 1,4125

Observa que este sistema solo empleaba dos signos (< = 10 y T = 1). Con ellos se escribían los números del 1 al 59. Y estos números, según la posición en que se colocaban, multiplicaban su valor por 1, por 60, por 60^2… o bien por 1/60, por $1/60^2$… (sistema posicional).

Paso de fracciones sexagesimales a forma decimal

Para traducir a forma decimal un número expresado en notación sexagesimal, basta con operar como sabemos. Observa:

$N = 1;24,45$ (forma sexagesimal)

$N = 1 + \frac{24}{60} + \frac{45}{60^2} = 1 + \frac{2}{5} + \frac{1}{80} = 1 + 2 : 5 + 1 : 80 = 1,4125$ (Forma decimal)

Resuelve

1. Expresa $\frac{3}{7}$ como lo haría un escriba en el antiguo Egipto.

2. Expresa en forma decimal el número que ves debajo, escrito por un matemático italiano del siglo XV:

3;8,29,44

¿Es ese algún número significativo en matemáticas? ¿Cuál?

3. ¿Cómo escribirías en la tabla de arriba los números 780, 3/5 y 1,6?

4. ¿Qué números ves en esta tablilla?

11

Al iniciar la unidad

- Es interesante que las alumnas y los alumnos conozcan los distintos usos de los números fraccionarios y decimales en algunas de las antiguas civilizaciones y reflexionen sobre la fuerza que tiene la costumbre y la tradición para impedir o dificultar el progreso. Una muestra de ello es la utilización de números decimales, tan imprescindibles en la sociedad actual, y que no se popularizó hasta finales del siglo XVI.
- Se puede destacar la vigencia del sistema sexagesimal, heredado de la civilización babilónica de hace más de tres mil años, en la medida de ángulos y de tiempos.

Cuestiones para detectar ideas previas

- Con los ejercicios propuestos en la página 11, se pretende poco más que jugar con las fracciones tal como las usaban los egipcios, los babilonios o un matemático de la Edad Media, y comprobar la enorme dificultad que suponía entonces. Así se valorarán mejor nuestros actuales procedimientos para operar con las fracciones.

TIC

Se sugiere la siguiente actividad:

Pedir a los estudiantes que, individualmente, busquen algún detalle, dato, anécdota… que amplíe la información de la página sobre el desarrollo histórico de las fracciones. Después, poner en común, en gran grupo, lo encontrado, contrastando y completando la información recabada.

Emprendimiento

Se sugiere la siguiente actividad:

Los alumnos y las alumnas pueden buscar y ampliar información respecto al uso de las fracciones unitarias a lo largo de la historia y traducir fracciones ordinarias a unitarias, y viceversa.

Interdisciplinariedad

Se sugiere la siguiente actividad:

a) Escribe tres situaciones de la vida cotidiana en las que las fracciones resultan de utilidad.

b) Escribe tres situaciones o aspectos relacionados con otras materias que estudias, distintas a las matemáticas (geografía, historia, física…) en que se utilicen fracciones.

Soluciones de "Resuelve"

1 Respuesta abierta.

Por ejemplo:

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{28} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{84}$$

2 3,14159... Se trata del número π.

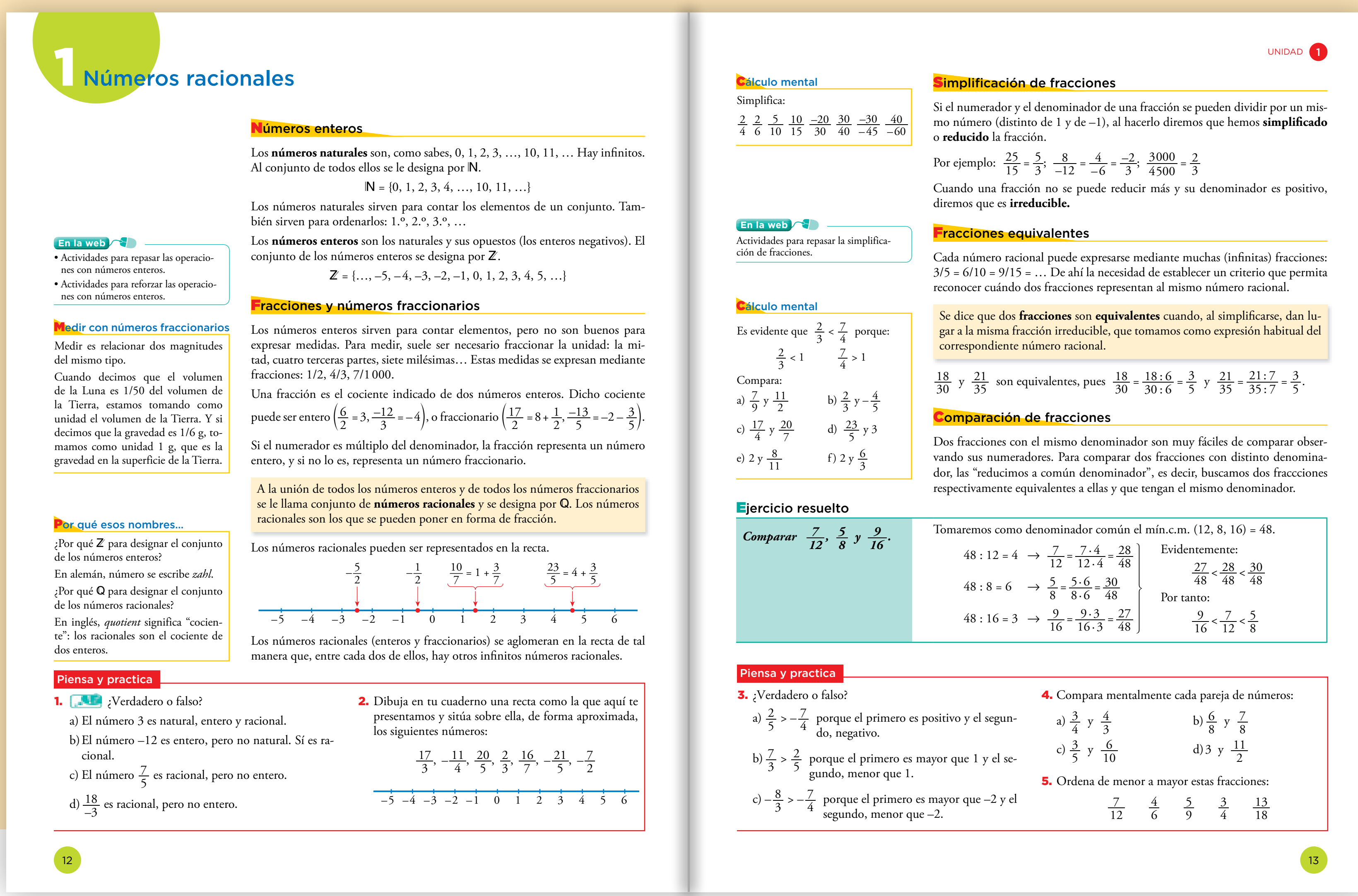
3

60^2	60	1	1/60	$1/60^2$
	< T T T			
			< < T T T T	
		T	< < T T T T T T	

4 1.ª fila: 4 395.

2.ª fila: 5,5.

3.ª fila: 1,005



1 Números racionales

Números enteros

Los **números naturales** son, como sabes, 0, 1, 2, 3, …, 10, 11, … Hay infinitos. Al conjunto de todos ellos se le designa por $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 10, 11, \dots\}$$

Los números naturales sirven para contar los elementos de un conjunto. También sirven para ordenarlos: 1.º, 2.º, 3.º, …

Los **números enteros** son los naturales y sus opuestos (los enteros negativos). El conjunto de los números enteros se designa por $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

En la web

- Actividades para repasar las operaciones con números enteros.
- Actividades para reforzar las operaciones con números enteros.

Fracciones y números fraccionarios

Los números enteros sirven para contar elementos, pero no son buenos para expresar medidas. Para medir, suele ser necesario fraccionar la unidad: la mitad, cuatro terceras partes, siete milésimas… Estas medidas se expresan mediante fracciones: 1/2, 4/3, 7/1 000.

Una fracción es el cociente indicado de dos números enteros. Dicho cociente puede ser entero $\left(\frac{6}{2} = 3, \frac{-12}{3} = -4\right)$, o fraccionario $\left(\frac{17}{2} = 8 + \frac{1}{2}, \frac{-13}{5} = -2 - \frac{3}{5}\right)$.

Si el numerador es múltiplo del denominador, la fracción representa un número entero, y si no lo es, representa un número fraccionario.

A la unión de todos los números enteros y de todos los números fraccionarios se le llama conjunto de **números racionales** y se designa por $\mathbb{Q}$. Los números racionales son los que se pueden poner en forma de fracción.

Medir con números fraccionarios

Medir es relacionar dos magnitudes del mismo tipo.

Cuando decimos que el volumen de la Luna es 1/50 del volumen de la Tierra, estamos tomando como unidad el volumen de la Tierra. Y si decimos que la gravedad es 1/6 g, tomamos como unidad 1 g, que es la gravedad en la superficie de la Tierra.

Por qué esos nombres…

¿Por qué $\mathbb{Z}$ para designar el conjunto de los números enteros?

En alemán, número se escribe *zahl.*

¿Por qué $\mathbb{Q}$ para designar el conjunto de los números racionales?

En inglés, *quotient* significa "cociente": los racionales son el cociente de dos enteros.

Los números racionales pueden ser representados en la recta.

$-\frac{5}{2}$ $-\frac{1}{2}$ $\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7}$ $\frac{23}{5} = 4 + \frac{3}{5}$

–5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5 6

Los números racionales (enteros y fraccionarios) se aglomeran en la recta de tal manera que, entre cada dos de ellos, hay otros infinitos números racionales.

Piensa y practica

1. ¿Verdadero o falso?

a) El número 3 es natural, entero y racional.

b) El número –12 es entero, pero no natural. Sí es racional.

c) El número $\frac{7}{5}$ es racional, pero no entero.

d) $\frac{18}{-3}$ es racional, pero no entero.

2. Dibuja en tu cuaderno una recta como la que aquí te presentamos y sitúa sobre ella, de forma aproximada, los siguientes números:

$$\frac{17}{3}, -\frac{11}{4}, \frac{20}{5}, \frac{2}{3}, \frac{16}{7}, -\frac{21}{5}, -\frac{7}{2}$$

–5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5 6

12

UNIDAD 1

Cálculo mental

Simplifica:

$$\frac{2}{4} \quad \frac{2}{6} \quad \frac{5}{10} \quad \frac{10}{15} \quad \frac{-20}{30} \quad \frac{30}{40} \quad \frac{-30}{-45} \quad \frac{40}{-60}$$

Simplificación de fracciones

Si el numerador y el denominador de una fracción se pueden dividir por un mismo número (distinto de 1 y de –1), al hacerlo diremos que hemos **simplificado** o **reducido** la fracción.

Por ejemplo: $\frac{25}{15} = \frac{5}{3}$; $\frac{8}{-12} = \frac{4}{-6} = \frac{-2}{3}$; $\frac{3000}{4500} = \frac{2}{3}$

Cuando una fracción no se puede reducir más y su denominador es positivo, diremos que es **irreducible.**

En la web

Actividades para repasar la simplificación de fracciones.

Fracciones equivalentes

Cada número racional puede expresarse mediante muchas (infinitas) fracciones: 3/5 = 6/10 = 9/15 = … De ahí la necesidad de establecer un criterio que permita reconocer cuándo dos fracciones representan al mismo número racional.

Se dice que dos **fracciones** son **equivalentes** cuando, al simplificarse, dan lugar a la misma fracción irreducible, que tomamos como expresión habitual del correspondiente número racional.

$\frac{18}{30}$ y $\frac{21}{35}$ son equivalentes, pues $\frac{18}{30} = \frac{18:6}{30:6} = \frac{3}{5}$ y $\frac{21}{35} = \frac{21:7}{35:7} = \frac{3}{5}$.

Cálculo mental

Es evidente que $\frac{2}{3} < \frac{7}{4}$ porque:

$\frac{2}{3} < 1 \qquad \frac{7}{4} > 1$

Compara:

a) $\frac{7}{9}$ y $\frac{11}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ y $-\frac{4}{5}$

c) $\frac{17}{4}$ y $\frac{20}{7}$ d) $\frac{23}{5}$ y 3

e) 2 y $\frac{8}{11}$ f) 2 y $\frac{6}{3}$

Comparación de fracciones

Dos fracciones con el mismo denominador son muy fáciles de comparar observando sus numeradores. Para comparar dos fracciones con distinto denominador, las "reducimos a común denominador", es decir, buscamos dos fraccciones respectivamente equivalentes a ellas y que tengan el mismo denominador.

Ejercicio resuelto

Comparar $\frac{7}{12}, \frac{5}{8}$ ***y*** $\frac{9}{16}$.

Tomaremos como denominador común el mín.c.m. (12, 8, 16) = 48.

$$\left.\begin{array}{l} 48 : 12 = 4 \to \frac{7}{12} = \frac{7\cdot 4}{12\cdot 4} = \frac{28}{48} \\ 48 : 8 = 6 \to \frac{5}{8} = \frac{5\cdot 6}{8\cdot 6} = \frac{30}{48} \\ 48 : 16 = 3 \to \frac{9}{16} = \frac{9\cdot 3}{16\cdot 3} = \frac{27}{48} \end{array}\right\}$$

Evidentemente:

$$\frac{27}{48} < \frac{28}{48} < \frac{30}{48}$$

Por tanto:

$$\frac{9}{16} < \frac{7}{12} < \frac{5}{8}$$

Piensa y practica

3. ¿Verdadero o falso?

a) $\frac{2}{5} > -\frac{7}{4}$ porque el primero es positivo y el segundo, negativo.

b) $\frac{7}{3} > \frac{2}{5}$ porque el primero es mayor que 1 y el segundo, menor que 1.

c) $-\frac{8}{3} > -\frac{7}{4}$ porque el primero es mayor que –2 y el segundo, menor que –2.

4. Compara mentalmente cada pareja de números:

a) $\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{3}$ b) $\frac{6}{8}$ y $\frac{7}{8}$

c) $\frac{3}{5}$ y $\frac{6}{10}$ d) 3 y $\frac{11}{2}$

5. Ordena de menor a mayor estas fracciones:

$$\frac{7}{12} \quad \frac{4}{6} \quad \frac{5}{9} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{13}{18}$$

13

Sugerencias

- Se comienza haciendo un breve repaso de los números naturales y enteros. Conviene recordar las sucesivas ampliaciones del campo numérico, su nomenclatura y la infinitud de estos conjuntos expresada por los puntos suspensivos y la representación en la recta numérica.
- Recordamos el concepto de fracción como cociente de dos números enteros, que puede ser entero o fraccionario, y su utilidad para expresar una medida cuando es necesario fraccionar la unidad.
- Las fracciones positivas y negativas y los números enteros expresados como fracción nos conducen al conjunto de los números racionales, $\mathbb{Q}$; con el que volvemos a retomar la ampliación del campo numérico.
- Es interesante que los alumnos y las alumnas vean la representación aproximada de números fraccionarios en la recta, y que reflexionen sobre la posibilidad de buscar nuevos números de este tipo entre dos cualesquiera por muy próximos que estén.
- En la comprobación de la equivalencia de fracciones, utilizaremos el procedimiento de convertirlas en irreducibles y comprobar la igualdad. De este modo se fomenta el hábito de dar siempre el resultado como fracción irreducible aunque no se haya pedido expresamente.
- Para la comparación de fracciones recurrimos a la reducción a común denominador, por lo necesario que es este método en numerosas aplicaciones.
- En todas estas cuestiones (equivalencia, simplificación, comparación) debe potenciarse el cálculo mental.

Refuerzo y Ampliación

Se recomiendan:

- Del cuaderno n.° 1 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:

  Refuerzo: Ejercicios 1 a 3 de la pág. 3. Ejercicios 1 a 7 de las páginas 6 y 7. Ejercicios 1 a 5 de la pág. 8.

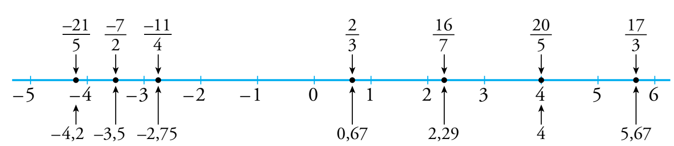
  Ampliación: Ejercicios 1 a 10 de las páginas 4 y 5.
- Del fotocopiable INCLUSIÓN Y ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD:

  Refuerzo: Ejercicio 1 de Practica, ficha A. Ejercicio 1 de Practica, ficha B.

Soluciones de "Piensa y practica"

1 a) V b) V c) V d) F

2



3 a) V b) V c) F

4 a) $\frac{3}{4} < \frac{4}{3}$ b) $\frac{6}{8} < \frac{7}{8}$ c) $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ d) $3 < \frac{11}{2}$

5 $\frac{5}{9} < \frac{7}{12} < \frac{4}{6} < \frac{13}{18} < \frac{3}{4}$

ANOTACIONES

2 Operaciones con fracciones

Cálculo mental

a) $\frac{2}{3}+\frac{5}{3}-\frac{4}{3}$ b) $1-\frac{2}{3}$

c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ d) $\frac{7}{5}-1$

e) $\frac{17}{5}-3$ f) $\frac{17}{3}-5$

En la web

- Actividades para repasar la suma y la resta de fracciones.
- Actividades para reforzar la suma y la resta de fracciones.

Cálculo mental

a) $3\cdot\frac{7}{9}$ b) $\frac{4}{5}\cdot\frac{15}{8}$

c) $\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{13}$ d) $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}$

Cálculo mental

a) $\frac{6}{5}:\frac{3}{5}$ b) $\frac{6}{5}:6$

c) $\frac{6}{5}:\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{3}:\frac{1}{6}$

Suma y resta de fracciones

Para **sumar (o restar) fracciones con el mismo denominador,** se suman (o se restan) sus numeradores y se mantiene el denominador.

Para **sumar (o restar) fracciones con distinto denominador,** se empieza por transformarlas en otras equivalentes con el mismo denominador.

Por ejemplo: $\frac{7}{10}-\frac{5}{12}+2=\frac{42}{60}-\frac{25}{60}+\frac{120}{60}=\frac{42-25+120}{60}=\frac{137}{60}$

Producto de fracciones

El **producto de dos fracciones** es otra fracción cuyo numerador es el producto de sus numeradores y cuyo denominador es el producto de sus denominadores:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Por ejemplo: $\frac{8}{3}\cdot\frac{7}{10}=\frac{8\cdot 7}{3\cdot 10}=\frac{56}{30}=\frac{28}{15}$

Cociente de fracciones

La **inversa de una fracción** $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$ porque $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{a\cdot b}{b\cdot a}=1$.

Por ejemplo, la inversa de $\frac{5}{7}$ es $\frac{7}{5}$, y la inversa de 3 es $\frac{1}{3}$. El 0 no tiene inversa.

El **cociente de dos fracciones** es el producto de la primera por la inversa de la segunda:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Por ejemplo: $\frac{9}{4}:\frac{5}{7}=\frac{9}{4}\cdot\frac{7}{5}=\frac{63}{20}$; $\frac{6}{11}:3=\frac{6}{11}\cdot\frac{1}{3}=\frac{6}{33}=\frac{2}{11}$

Piensa y practica

En la web Actividades para reforzar las operaciones combinadas con fracciones.

Efectúa las siguientes operaciones y simplifica los resultados:

1. a) $\frac{7}{9}+\frac{11}{12}$ b) $6-\frac{11}{4}$ c) $3\cdot\frac{4}{5}$

d) $6:\frac{4}{5}$ e) $\frac{4}{5}:6$ f) $\frac{4}{5}:\frac{1}{6}$

2. a) $\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{6}-\frac{7}{8}\right):\frac{25}{12}$ b) $\left(\frac{13}{15}-\frac{7}{25}\right)\cdot\left(\frac{9}{22}+\frac{-13}{33}\right)$

3. a) $\dfrac{\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{4}-1\right)}{\frac{3}{4}+1}$ b) $\dfrac{(-3)\cdot\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{3}\right)}{(-2)\cdot\left(\frac{4}{3}-\frac{6}{5}\right)}$

4. a) $\dfrac{3-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{15}\right)}{6+\frac{4}{25}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)}$ b) $\dfrac{\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{9}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\right)}{\left(\frac{7}{12}-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{4}{3}+1}$

14

UNIDAD 1

En la web

Actividades para repasar el concepto de fracción como operador.

Cálculo mental

Halla la parte del total que corresponde a cada fracción:

a) $\frac{1}{2}$ de 520 000 €.

b) $\frac{3}{5}$ de 1 000 000 de personas.

c) $\frac{7}{10}$ de 500 edificios.

Cálculo mental

Di en cada caso la cantidad total:

a) 350 es $\frac{1}{2}$ del total.

b) 400 es $\frac{2}{3}$ del total.

c) 350 es $\frac{7}{10}$ del total.

Cálculo mental

Di en cada caso qué fracción falta para completar la unidad:

a) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{?}{?}$ b) $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$ y $\frac{?}{?}$

c) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ y $\frac{?}{?}$ d) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ y $\frac{?}{?}$

La fracción como operador (fracción de una cantidad)

Para hallar los $\frac{3}{5}$ de una cantidad, por ejemplo de 1 200 €, se la divide por 5 (obteniéndose, así, una quinta parte) y el resultado se multiplica por 3. Es decir, se multiplica la cantidad por $\frac{3}{5}$ → $\frac{3}{5}\cdot 1\,200$ € = 720 €

Para hallar una fracción $\frac{a}{b}$ de una cantidad C, se multiplica $\frac{a}{b}\cdot C$.

Ejemplos

- *Un cartero ha de repartir los 3/28 del total de 4 004 cartas. ¿Cuántas cartas le corresponden?*

  $\frac{3}{28}\cdot 4\,004=3\cdot\frac{4\,004}{28}=3{,}143=429$ cartas le corresponden.

- *Berta es dueña de 7/20 de una empresa. Este año le han correspondido 37 800 € en el reparto de beneficios. ¿Cuál ha sido la ganancia total de la compañía?*

  Si por $\frac{7}{20}$ le corresponden 37 800 €, a $\frac{1}{20}$ le corresponden $\frac{37\,800}{7}=5\,400$ €.

  Por tanto, al total $\left(\frac{20}{20}\right)$ le corresponden $20\cdot 5\,400=108\,000$ €.

  A este resultado se podría haber llegado multiplicando la parte que le corresponde a Berta (37 800 €) por la inversa de su fracción de la empresa, $\frac{20}{7}$.

  $37\,800\cdot\frac{20}{7}=\frac{37\,800}{7}\cdot 20=5\,400\cdot 20=108\,000$ €

Las distintas partes (fracciones) de un todo suman 1.

Para hallar la parte $\frac{a}{b}$ de otra $\frac{c}{d}$ de una cantidad C, se multiplica $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot C$.

Ejemplo

De una herencia de 104 000 €, Alberto posee 3/8; Berta, 5/12, y Claudia, el resto. Claudia emplea 2/5 de su parte en pagar deudas. ¿Cuánto le queda?

$1-\frac{3}{8}-\frac{5}{12}=\frac{24-9-10}{24}=\frac{5}{24}$ es la fracción de Claudia.

Como gasta $\frac{2}{5}$ de lo que le toca, le quedan $\frac{3}{5}$ de su fracción:

$\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{24}\cdot 104\,000=\frac{1}{8}\cdot 104\,000=13\,000$ € le quedan.

Piensa y practica

5. Un ciclista ha recorrido los 5/9 de la etapa de hoy, de 216 km. ¿Cuántos kilómetros lleva recorridos?

6. He sacado del banco 3 900 €, que son los 3/11 de mis ahorros. ¿A cuánto ascienden mis ahorros?

7. De una balsa con 5 250 litros de agua, corresponden 4/15 a Braulio; 2/5, a Enrique, y el resto, a Ruperto. Ruperto dedica 3/10 de su parte a regar tomates, y el resto, a los frutales. ¿Cuánta agua dedica Ruperto a los frutales?

15

Sugerencias

- Con frecuencia, los estudiantes llegan a este curso sin un dominio adecuado de las operaciones con fracciones, en especial si estas son complejas y hay que aplicar la prioridad de las operaciones y el uso del paréntesis.
- En el caso de la suma y de la resta, insistiremos en el uso del mínimo común denominador.
- Para el producto y el cociente, proponemos que se indiquen las multiplicaciones que hay que efectuar en el numerador y en el denominador, y que se intente simplificar los factores comunes antes de hacer el producto.
- El cálculo de la parte que corresponde a una fracción, dividiendo la cantidad total entre el denominador y multiplicando por el numerador, se complementa con el problema inverso (calcular la cantidad total cuando se conoce la parte que corresponde a una fracción) y con el concepto de fracción de otra fracción como el producto de ambas actuando sobre la cantidad total.
- Estos conceptos, junto con la idea fundamental de que la suma de las partes es igual a 1, permitirán resolver al alumnado ejercicios de diferente grado de dificultad.

Refuerzo y Ampliación

Se recomiendan:

- Del cuaderno n.º 1 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:

  Refuerzo: Ejercicios 1 a 5 de la pág. 9. Ejercicios 1 a 5 de la pág. 12.

  Ampliación: Ejercicios 6 a 11 de las páginas 9 y 10. Ejercicios 6 a 10 de la página 13.

- Del fotocopiable INCLUSIÓN Y ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD:

  Refuerzo: Ejercicios 2, 4 y 5 de Practica, ficha A.

  Ampliación: Ejercicios 6, 7 y 8 de Practica, ficha A. Ejercicio 4 de Practica, ficha B.

Aprendizaje cooperativo

Para estas páginas, y para todas aquellas destinadas a reforzar la destreza operativa, se sugiere la siguiente metodología:

- El alumnado se distribuye en pequeños grupos (dos o tres por grupo).
- Resuelven una serie de expresiones individualmente y, después, contrastan las soluciones y los procesos.
- Si hay discrepancias, deben descubrir los errores. Si no saben resolver las dudas o no se ponen de acuerdo, actuará el docente.

Soluciones de “Piensa y practica”

1 a) 61/36 b) 13/4

c) 12/5 d) 15/2

e) 2/15 f) 24/5

2 a) 1/2

b) 2/225

3 a) 3/7

b) 3

4 a) 865/1 788

b) –1/72

5 Lleva recorridos 120 km.

6 Mis ahorros ascienden a 14 300 euros.

7 Ruperto dedica 1 225 litros a los frutales.

3 Números decimales

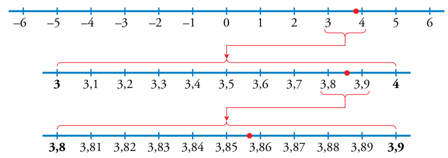
Recuerda

En las calculadoras, en vez de la coma decimal, se pone un punto.

1 427,54 → 1427.54

Los números decimales sirven, entre otras cosas, para designar medidas, pues con ellos se puede expresar cualquier valor intermedio entre dos números enteros.

Los números decimales se representan sobre la recta numérica, de tal modo que con ellos podemos aproximarnos mucho (tanto como queramos) a cualquiera de sus puntos:



Siguiendo este proceso, el punto rojo puede designarse mediante un número decimal con tanta aproximación como queramos (3,857…).

Recuerda

Si en una **calculadora de pantalla descriptiva,** al efectuar una operación con decimales obtienes la solución de forma fraccionaria, puedes pasarlo a decimal dando a la tecla S⇔D.

> La expresión decimal de los números permite valorarlos, compararlos y operar con ellos de forma muy cómoda y eficaz.

Tipos de números decimales

Veamos las distintas clases de números decimales que existen:

- **Decimal exacto** es el que tiene un número limitado de cifras decimales.

  Por ejemplo: 5,4; 0,97; 8; –0,0725

- **Decimal periódico** es el que tiene infinitas cifras decimales que se repiten periódicamente.

  $7{,}81818181\ldots = 7{,}\widehat{81}$

  PERIODO

  $0{,}735735735\ldots = 0{,}\widehat{735}$

  Estos se llaman **periódicos puros,** porque en ellos el periodo empieza inmediatamente después de la coma.

  $18{,}352222\ldots = 18{,}35\widehat{2}$

  $0{,}0454545\ldots = 0{,}0\widehat{45}$

  Son **periódicos mixtos,** porque antes del periodo tienen otras cifras decimales.

- **Decimales no exactos ni periódicos.** Son números decimales que tienen infinitas cifras que no se repiten periódicamente.

  Por ejemplo: $\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$

  $\pi = 3{,}14159265\ldots$

Recuerda

En un número, el grupo de cifras decimales que se repite una y otra vez se llama **periodo.** Se indica poniendo un arco sobre las cifras correspondientes:

$7{,}\widehat{81}$ $\quad 18{,}35\widehat{2}$

Piensa y practica

1. Indica qué tipo de número decimal es cada uno de los siguientes:

$3{,}52$ $\quad 2{,}\widehat{8}$ $\quad 1{,}\widehat{54}$ $\quad \sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots$

$2{,}7$ $\quad 3{,}5222\ldots$ $\quad \pi - 2 = 1{,}1415926\ldots$

2. Ordena de menor a mayor estos números:

$2{,}\widehat{5}$ $\quad 2{,}5$ $\quad 2{,}3\widehat{5}$ $\quad 2{,}505005\ldots$

3. Escribe tres números comprendidos entre 2,5 y $2{,}\widehat{5}$.

16

UNIDAD 1

Paso de fracción a decimal

Para obtener la expresión decimal de una fracción, se efectúa la división del numerador entre el denominador. El cociente puede ser:

- **Un número entero,** cuando el numerador es múltiplo del denominador.

  Por ejemplo: $\frac{72}{9} = 8$; $\frac{-240}{15} = -16$

- **Un decimal exacto,** si el denominador de la fraccción simplificada solo tiene los factores primos 2 y 5 (o alguno de ellos).

  Por ejemplo: $\frac{3}{8} = 0{,}375$; $\frac{123}{40} = 3{,}075$; $\frac{42}{25} = 1{,}68$

  Observa por qué esto es así:

  $$\frac{123}{40} = \frac{123}{2^3 \cdot 5} = \frac{123 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{123 \cdot 25}{10^3} = \frac{3075}{1000} = 3{,}075$$

  Si solo están los factores 2 y 5, siempre podremos completar una potencia de base 10 en el denominador.

- **Un decimal periódico,** si el denominador de la fracción simplificada tiene algún factor primo distinto de 2 y 5.

  Por ejemplo: $\frac{11}{3} = 3{,}\widehat{6}$; $\frac{86}{11} = 7{,}\widehat{81}$; $\frac{87}{66} = \frac{29}{22} = 1{,}3\widehat{18}$

  ¿Por qué si el cociente no es exacto, entonces, con seguridad, es periódico? Razonemos sobre un ejemplo, 3 : 7, cuya división tienes en el margen. Puesto que al dividir por 7 el resto solo puede ser 1, 2, 3, 4, 5 o 6, en algún momento tendrá que repetirse, y a partir de ahí, se repetirá toda la secuencia.

Ejemplo

```
3,0       |7
 20        0,428571
  60
   40
    50
     10
      3 ← A partir de aquí se
          repiten los cocien-
          tes y los restos.
```

se repite

Recuerda

Números racionales son los que se pueden poner en forma de fracción.

> Toda **fracción irreducible** da lugar a un número decimal:
>
> - **Decimal exacto,** si el denominador solo tiene los factores 2 y 5.
> - **Decimal periódico,** si el denominador tiene factores distintos a 2 y 5.
>
> Por tanto, unos y otros son **números racionales.** Sin embargo, los decimales con infinitas cifras no periódicas no son racionales.

Piensa y practica

4. ¿Verdadero o falso?

a) $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0{,}\widehat{3}$

$\frac{3}{3} = 3 \cdot 0{,}333\ldots = 0{,}999\ldots = 0{,}\widehat{9}$

Como $\frac{3}{3} = 1$, resulta que $0{,}\widehat{9} = 1$.

b) $5{,}\widehat{4} = 5{,}\widehat{44}$

c) $3{,}\widehat{72} = 3{,}7272727\ldots = 3{,}7\widehat{27}$

d) $0{,}\widehat{3} + 0{,}\widehat{6} = 1$

5. Sin efectuar la división, y atendiendo solo al denominador de la fracción simplificada, di si las siguientes fracciones darán lugar a decimales exactos o decimales periódicos:

a) $\frac{44}{150}$ $\quad$ b) $\frac{42}{150}$ $\quad$ c) $\frac{101}{1024}$ $\quad$ d) $\frac{1001}{500}$

6. Calcula en tu cuaderno:

a) $7{,}\widehat{45} - 3{,}4\widehat{54}$

b) $6 - 3{,}\widehat{9}$

c) $3{,}\widehat{5} + 2{,}\widehat{3} + 1{,}\widehat{1}$

17

Sugerencias

- Comenzamos recordando la representación gráfica de los números decimales en la recta numérica y cómo podemos aproximarnos a un punto tanto como queramos mediante un número decimal. Lo hacemos tomando intervalos cada vez más pequeños que, ampliados y divididos en diez partes iguales, determinan una nueva cifra decimal.
- También se recuerdan los distintos tipos de decimales y la notación que se emplea para designarlos.
- En el paso de fracción a decimal encontramos en la calculadora un potente instrumento de investigación. Las teclas de división, el factor constante en la división, y la de conversión de fracciones en decimales, permiten a los estudiantes observar con facilidad la regularidad de algunos casos. En todos ellos debemos tener en cuenta cómo redondea la calculadora para evitar confusiones sobre el periodo.

  Algunos ejemplos pueden ser los siguientes.

  – Pedir que dividan entre 3 los diez primeros números naturales, para que lleguen a saber cuál es el periodo de cualquier fracción del tipo *a*/3, teniendo en cuenta la relación de *a* con los múltiplos de 3.

  – Obtener el cociente de 1/9 y, a partir de ahí, escribir la expresión decimal de *a*/9 cualquiera que sea *a*.

  Trabajando de modo análogo, los estudiantes deben llegar a la conclusión de cuáles son las fracciones que dan lugar a decimales exactos o periódicos, y que cualquiera de ellos es un número racional.
- Las actividades del final de cada página son una muy buena ayuda para fijar los conceptos y los procedimientos estudiados.

Refuerzo y Ampliación

- Del cuaderno n.° 1 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:

  Refuerzo: Ejercicios 1, 2 y 3 de la pág. 14.

  Ampliación: Investigar los posibles periodos que se obtienen al dividir entre 6. Generalizar para *a*/6 cualquiera que sea *a*.

Soluciones de “Piensa y practica”

1

3,52	Decimal exacto.
$2{,}\widehat{8}$	Decimal periódico puro.
$1{,}\widehat{54}$	Decimal periódico puro.
$\sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots$	Decimal no exacto ni periódico.
2,7	Decimal exacto.
3,5222…	Decimal periódico mixto.
$\pi - 2 = 1{,}1415926\ldots$	Decimal no exacto ni periódico.

2 $2{,}3\widehat{5} < 2{,}5 < 2{,}505005\ldots < 2{,}\widehat{5}$

3 Respuesta abierta.

4 a) V $\quad$ b) V $\quad$ c) V $\quad$ d) V

5 a) Periódico. $\quad$ b) Exacto. $\quad$ c) Exacto. $\quad$ d) Exacto.

6 a) 4 $\quad$ b) 2 $\quad$ c) 7

ANOTACIONES

4 Paso de decimal a fracción

Acabamos de ver que si se efectúa la división del numerador entre el denominador de una fracción, el resultado es un número decimal exacto o periódico (puro o mixto). Ahora nos planteamos el problema inverso: ¿cuál es la fracción que corresponde a un número decimal?

De decimal exacto a fracción

Expresar en forma de fracción un número decimal exacto es muy fácil, pues el denominador es una potencia de base 10.

Por ejemplo: $2{,}5 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$; $3{,}41 = \frac{341}{100}$; $0{,}004 = \frac{4}{1000} = \frac{1}{250}$

De decimal periódico puro a fracción

Observa

Al multiplicar N por 10, se obtiene otro número con la misma parte decimal.

Veamos con dos ejemplos el proceso que conviene seguir.

- **Periodo de una sola cifra:** $N = 5{,}\widehat{4} = 5{,}4444\ldots$

$$\left.\begin{array}{r} 10N = 54{,}444\ldots \\ N = 5{,}444\ldots \end{array}\right\} \text{Al restar, desaparece la parte decimal:}$$

$$10N - N = 54 - 5 \rightarrow 9N = 49 \rightarrow N = \frac{49}{9}$$

Comprobación: $49 \div 9 =$ 5.444444444

Observa

Al multiplicar N por 1 000, se obtiene otro número con la misma parte decimal.

- **Periodo con varias cifras:** $N = 6{,}\widehat{207} = 6{,}207207207\ldots$

$$\left.\begin{array}{r} 1000N = 6\,207{,}207207\ldots \\ N = 6{,}207207\ldots \end{array}\right\} \text{Al restar, desaparece la parte decimal:}$$

$$1\,000N - N = 6\,207 - 6 \rightarrow 999N = 6\,201 \rightarrow N = \frac{6\,201}{999}$$

Comprobación: $6\,201 \div 999 =$ 6.207207207

En la web

Ayuda al razonamiento: paso de decimal periódico puro a fracción.

Para escribir un número **periódico puro,** N, **en forma de fracción:**
- Multiplicamos N por una potencia de base 10 para hallar otro número con la misma parte decimal.
- Al restar ambos números, obtenemos un número entero.
- Despejando N, llegamos a la fracción buscada.

Piensa y practica

1. Expresa en forma de fracción:

a) 6,2 b) 0,63 c) 1,0004
d) $3{,}\widehat{5}$ e) $0{,}\widehat{1}$ f) $2{,}\widehat{7}$
g) $0{,}\widehat{23}$ h) $41{,}\widehat{041}$ i) $40{,}\widehat{028}$
j) $5{,}\widehat{9}$ k) $7{,}\widehat{009}$ l) $0{,}\widehat{99}$

2. Observamos que $0{,}\widehat{208} + 0{,}\widehat{791} = 0{,}\widehat{999} = 1$.
Compruébalo expresando en forma de fracción cada sumando y efectuando la suma de fracciones.

3. Realiza los apartados b) y c) de la actividad 6 de la página anterior pasando, previamente, los decimales a fracciones y operando con ellas.

18

UNIDAD 1

De decimal periódico mixto a fracción

- Pongamos en forma de fracción $N = 2{,}5\widehat{63}$:

$N =$	2,5636363…	Multiplicamos por 10 para obtener un decimal periódico puro.
$10N =$	25,636363…	Ahora, multiplicamos por 100 para obtener otro con la misma parte decimal.
$1\,000N =$	2 563,636363…	Al restar este al anterior, desaparece la parte decimal. Es decir, se obtiene un número entero.

$$1\,000N - 10N = 2\,563 - 25 \rightarrow 990N = 2\,538 \rightarrow N = \frac{2\,538}{990}$$

Comprobación: $2\,538 \div 990 =$ 2.563636363

- Otro ejemplo: $N = 0{,}07\widehat{324} = 0{,}07324324324\ldots$

$100N =$	7,324324…	Se obtiene un periódico puro.
$100\,000N =$	7 324,324324…	Otro, con la misma parte decimal.

$$100\,000N - 100N = 7\,324 - 7 \rightarrow 99\,900N = 7\,317 \rightarrow N = \frac{7\,317}{99\,900}$$

Comprobación: $7\,317 \div 99\,900 =$ 0.073243243

En la web

Ayuda al razonamiento: paso de decimal periódico mixto a fracción.

En la web

Ejemplos de cómo expresar números decimales en forma de fracción.

Para escribir un número **periódico mixto,** N, **en forma de fracción:**
- Multiplicamos N dos veces por potencias de base 10 para conseguir dos decimales periódicos puros con el mismo periodo.
- Al restarlos, se obtiene un número entero.
- Despejando N, se obtiene la fracción buscada.

Decimales no periódicos

Los números decimales con infinitas cifras no periódicas no se pueden poner en forma de fracción. Por tanto, no son racionales. Por ejemplo:

- 0,121221222122221… Aunque hay regularidad, no hay periodicidad.
- $\pi = 3{,}141592653589\ldots$
- $\sqrt{2} = 1{,}414213562373\ldots$

Las sucesivas cifras decimales de π no siguen ninguna regularidad. Lo mismo le ocurre a $\sqrt{2}$ y a las demás raíces no exactas.

Piensa y practica

4. Completa el proceso para expresar como fracción el número dado en cada caso:

$$\text{a) } 6{,}21\widehat{7}\begin{cases} N = 6{,}21777\ldots \\ 100N = 621{,}77777\ldots \\ 1000N = 6\,217{,}7777\ldots \end{cases}$$

$$\text{b) } 0{,}031\widehat{62}\begin{cases} N = 0{,}0316262\ldots \\ 1000N = 31{,}626262\ldots \\ 100\,000N = 3162{,}626262\ldots \end{cases}$$

5. Expresa como fracción los decimales siguientes:
a) $6{,}2\widehat{5}$ b) $0{,}00\widehat{1}$ c) $5{,}0\widehat{18}$

6. ¿Cuáles de los siguientes números son racionales? Ponlos en forma de fracción:
a) 3,51 b) 5,202002000… c) $5{,}\widehat{03}$
d) 0,3212121… e) $\pi = 3{,}141592\ldots$ f) $7{,}\widehat{4331}$

7. Comprueba, obteniendo las fracciones correspondientes, que $5{,}\widehat{48} = 5{,}\widehat{484}$.

19

Sugerencias

- Los estudiantes saben ya que los números racionales son los que se pueden poner en forma de fracción y que estas dan lugar a un número entero o a un decimal exacto o periódico. En estas páginas abordamos el problema inverso, buscar la fracción que corresponde a un número decimal exacto o periódico.
- En el caso de los decimales exactos, tendremos que buscar una fracción equivalente cuyo denominador sea una potencia de base 10 y simplificar. El proceso es muy sencillo. No ocurre lo mismo en el caso de los decimales periódicos y, por ello, está expuesto con indicaciones suficientes para que se comprenda. Si se aplican en un buen número de casos, el procedimiento llega a automatizarse pero sin que se convierta en una receta misteriosa.
- Pueden ser de ayuda algunas actividades previas al estudio del procedimiento estándar. Como por ejemplo:
  - Dividir por 9 los dígitos del 1 al 9 y observar el periodo. De esta forma se ve que:
  $$0{,}\widehat{8} = \frac{8}{9} \text{ y, por tanto, } 5{,}\widehat{8} = 5 + \frac{8}{9} = \frac{53}{9}$$
  - Dividir por 99 los números del 10 al 100 y observar el periodo de dos cifras para llegar a la conclusión de que:
  $$5{,}\widehat{17} = 5 + 0{,}\widehat{17} = 5 + \frac{17}{99} = \frac{512}{99}$$
  - Para los decimales periódicos mixtos podemos utilizar una técnica similar:
  $$2{,}1\widehat{37} = \frac{21{,}\widehat{37}}{10} \rightarrow 21{,}\widehat{37} = 21 + \frac{37}{99} = \frac{2\,116}{99}$$
  $$2{,}1\widehat{37} = \frac{2\,116/99}{10} = \frac{2\,116}{990}$$
- Conviene insistir en que todo este proceso solo es aplicable en el caso de los decimales finitos o periódicos, y recordar que los decimales con infinitas cifras no periódicas no se pueden poner en forma de fracción.

Refuerzo y Ampliación

Se recomiendan:

- Del cuaderno n.° 1 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:
  Refuerzo: Ejercicios 4 a 8 de la páginas 14 y 15.
- Del fotocopiable INCLUSIÓN Y ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD:
  Refuerzo: Ejercicio 3 de Practica, ficha A.
  Ampliación: Ejercicios 2 y 3 de Practica, ficha B.

Soluciones de "Piensa y practica"

1 a) 31/5 b) 63/100 c) 10 004/10 000 d) 32/9
e) 1/9 f) 25/9 g) 23/99 h) 41 000/999
i) 39 988/999 j) 54/9 k) 7 002/999 l) 99/99 = 1

2 $\frac{208}{999} + \frac{791}{999} = \frac{999}{999} = 1$

3 b) 2 c) 7

4 a) 5 526/900 = 1 399/225 b) 3 131/99 000

5 a) 563/90 b) 1/900 c) 4 968/990 = 276/55

6 a) 351/100 b) No es racional. c) 498/99 = 166/33
d) 318/990 = 53/165 e) No es racional. f) 74 257/9 990

7
$$\left.\begin{array}{l} 5{,}\widehat{48} \rightarrow 100N - N = 543 \rightarrow N = \dfrac{543}{99} \\ 5{,}4\widehat{84} \rightarrow 1000M - 10M = 5\,430 \rightarrow M = \dfrac{5\,430}{990} = \dfrac{543}{99} \end{array}\right\} 5{,}\widehat{48} = 5{,}\widehat{484}$$

Ejercicios y problemas resueltos

1. Operaciones con fracciones

Calcular y simplificar. $\dfrac{\frac{3}{2}-4\left(2-\frac{5}{3}\right)}{\left(\frac{1}{2}-2\right)\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{7}{2}\right)}$	Efectuamos las operaciones paso a paso teniendo en cuenta los paréntesis y la prioridad de las operaciones. En cada paso, simplificamos los resultados parciales. $\dfrac{\frac{3}{2}-4\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{4}{3}+\frac{7}{6}}=\dfrac{\frac{3}{2}-\frac{4}{3}}{-2+\frac{7}{6}}=\dfrac{\frac{1}{6}}{-\frac{5}{6}}=-\dfrac{1}{5}$

2. Decimales periódicos

Comprobar que los números $4,12\widehat{9}$ y $4,13$ se expresan mediante la misma fracción. **Hazlo tú.** ¿Con qué decimales exactos podemos identificar los números $5,\widehat{9}$; $8,3\widehat{9}$ y $0,00\widehat{9}$?	Expresamos $4,12\widehat{9}$ en forma de fracción: $N=4,12\widehat{9}\rightarrow\begin{cases}1000N=4129,999\ldots\\ 100N=412,999\ldots\end{cases}$ Restamos miembro a miembro: $1\,000N-100N=4\,129,999\ldots-412,999\ldots\rightarrow 900N=4\,129-412=3\,717$ Despejamos $N\rightarrow N=\dfrac{3\,717}{900}=\dfrac{413}{100}=4,13$

3. Reparto con fracciones

Tres amigas ganan un premio que reparten de la siguiente forma: a María le corresponden los 2/5 del total; a Mónica, los 2/3 de lo que recibió María, y a Paula, el resto. Cada una dona la sexta parte a una asociación. Si Mónica obtuvo 36 € después de donar su parte, ¿qué fracción del total recibió cada una? ¿Qué cantidad corresponde a cada una?	La parte del premio que le corresponde a María es 2/5. A Mónica le corresponde $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$, y a Paula, el resto, que es: $1-\left(\frac{2}{5}+\frac{4}{15}\right)=\frac{1}{3}$ Después de donar 1/6, cada una recibirá los 5/6 de lo que le corresponde. Si Mónica recibe 36 €, que es $\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{15}=\frac{20}{90}=\frac{2}{9}$ del total, el premio a repartir es: $36\cdot\frac{9}{2}=162$ € La fracción que recibe María es $\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{3}$ del total; la de Mónica, $\frac{2}{9}$; y la de Paula, $\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{18}$. La cantidad que entregarán a María es $162\cdot\frac{1}{3}=54$ €; la que recibirá Mónica es 36 €, y la que corresponde a Paula es $162\cdot\frac{5}{18}=45$ €.

4. Grifos y fracciones

Un grifo A llena un depósito de agua en 2 horas, y otro grifo B, en 3 horas. El depósito tiene un desagüe que lo vacía en 6 horas estando los grifos cerrados. Si abrimos los dos grifos y el desagüe, ¿cuánto tiempo tardará el depósito en llenarse?	Si el grifo A llena el depósito en 2 h, en una hora llena 1/2 del mismo. El grifo B, en una hora, llena 1/3 del depósito. El desagüe vacía en una hora 1/6 del depósito. Si abrimos los tres a la vez, en 1 h llenan: 1/2 + 1/3 – 1/6 = 2/3 del depósito Por tanto, el tiempo que tardan es: $1:\frac{2}{3}=\frac{3}{2}$ h = 1,5 h = 1 h 30 min.

20

Ejercicios y problemas

Practica

Fracciones y decimales

1. Simplifica las fracciones siguientes:

$\frac{24}{60}\quad\frac{114}{72}\quad\frac{51}{68}\quad\frac{26}{39}\quad\frac{125}{50}\quad\frac{225}{400}$

2. Agrupa las fracciones que sean equivalentes.

$\frac{21}{49}\quad\frac{24}{36}\quad\frac{4}{5}\quad\frac{14}{21}\quad\frac{10}{15}\quad\frac{15}{35}\quad\frac{3}{7}$

3. En cada apartado, reduce a común denominador y ordena de menor a mayor:

a) $\frac{5}{6}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{8}{15}$

b) $-\frac{1}{2}, -\frac{5}{8}, -\frac{7}{12}, -\frac{3}{4}$

c) $\frac{11}{24}, -\frac{7}{4}, \frac{3}{8}, -\frac{1}{6}, \frac{5}{12}, -\frac{5}{3}$

4. Expresa como suma de un número entero y una fracción, igual que se hace en el ejemplo:

- $\frac{8}{3}=\frac{6+2}{3}=\frac{6}{3}+\frac{2}{3}=2+\frac{2}{3}$

a) $\frac{8}{5}$ b) $\frac{15}{8}$ c) $\frac{16}{7}$ d) $-\frac{3}{2}$ e) $-\frac{7}{3}$

5. Expresa como número decimal las siguientes fracciones:

$\frac{9}{25}\quad\frac{13}{9}\quad\frac{23}{6}\quad\frac{17}{200}\quad\frac{5}{7}\quad\frac{233}{990}\quad\frac{13}{22}$

6. Determina, sin realizar la división, cuáles son decimales exactos y cuáles decimales periódicos.

$\frac{3}{2}\quad\frac{4}{5}\quad\frac{13}{9}\quad\frac{7\cdot 11}{3\cdot 5^2}\quad\frac{19}{2^2\cdot 5}\quad\frac{3\cdot 7^2\cdot 23}{5\cdot 7}$

7. Clasifica los siguientes números racionales en decimales exactos o periódicos (intenta dar la respuesta antes de efectuar la división):

$\frac{4}{3}\quad\frac{2}{5}\quad\frac{1}{50}\quad\frac{13}{11}\quad\frac{17}{60}\quad\frac{81}{250}$

8. Escribe tres números que estén comprendidos entre cada par de decimales:

a) 1,6 y 1,8 b) 0,98 y 1 c) 0,28 y 0,29
d) 0,345 y 0,346 e) $2,\widehat{3}$ y 2,4 f) –4,5 y –4,4

9. Ordena de menor a mayor en cada apartado:

a) 3,56; $3,5\widehat{6}$; $3,\widehat{5}$; $3,\widehat{56}$

b) –1,32; $-1,3\widehat{2}$; $-1,\widehat{32}$; $-1,\widehat{3}$

10. Expresa en forma de fracción.

a) 3,7 b) 0,002 c) –1,03
d) $2,\widehat{5}$ e) $0,\widehat{21}$ f) $14,\widehat{3}$

11. Expresa como fracción.

a) $0,3\widehat{2}$ b) $1,0\widehat{3}$ c) $0,0\widehat{12}$
d) $-3,\widehat{15}$ e) $5,34\widehat{5}$ f) $9,0\widehat{9}$

Operaciones con fracciones

12. Calcula y simplifica mentalmente las expresiones siguientes:

a) $2+\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}$
d) $2\cdot\frac{5}{4}$ e) $\frac{2}{3}:2$ f) $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}$
g) $\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4}$ h) $\frac{12}{7}:3$ i) $\frac{7}{3}\cdot 21$

13. Calcula mentalmente:

a) $\frac{2}{3}$ de 60 b) $\frac{3}{4}$ de 100 c) $\frac{3}{500}$ de 500

d) La mitad de $\frac{2}{3}$.

e) La tercera parte de $\frac{12}{7}$.

f) La mitad de la quinta parte de –6.

14. Calcula mentalmente el número que se pide en cada caso:

a) Los dos tercios de un número valen 22. ¿Cuál es el número?

b) Los cinco cuartos de un número valen 35. ¿Cuál es el número?

c) Los siete décimos de una cantidad son 210. ¿Cuál es esa cantidad?

15. Reduce a una fracción.

a) $\dfrac{3+\frac{1}{2}}{7-\frac{3}{2}}$ b) $\dfrac{\frac{1}{4}-\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}-\frac{7}{12}}$ c) $\dfrac{\frac{7}{8}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{1}{5}-\frac{1}{2}}$

21

Sugerencias

- En la página de "Ejercicios y problemas resueltos" se muestran estrategias, sugerencias, pistas y formas de pensar que les serán útiles a los alumnos y a las alumnas para enfrentarse a la resolución de las actividades que se les proponen a continuación o en las páginas finales de la unidad.
- Su fin último es que los estudiantes sean capaces de reproducir procedimientos similares cada vez que se encuentren ante una situación problemática.

Soluciones de "Hazlo tú"

2 Los podemos identificar con 6; 8,4 y 0,01, respectivamente.

Soluciones de "Ejercicios y problemas"

1 $\frac{24}{60}=\frac{2}{5}$; $\frac{114}{72}=\frac{19}{12}$; $\frac{51}{68}=\frac{3}{4}$; $\frac{26}{39}=\frac{2}{3}$; $\frac{125}{50}=\frac{5}{2}$; $\frac{225}{400}=\frac{9}{16}$

2 $\frac{21}{49}=\frac{15}{35}=\frac{3}{7}$ $\quad\frac{24}{36}=\frac{14}{21}=\frac{10}{15}$ $\quad\frac{4}{5}$

3 a) $\frac{25}{30}, \frac{18}{30}, \frac{20}{30}, \frac{21}{30}, \frac{16}{30}\rightarrow\frac{8}{15}<\frac{3}{5}<\frac{2}{3}<\frac{7}{10}<\frac{5}{6}$

b) $-\frac{12}{24}, -\frac{15}{24}, -\frac{14}{24}, -\frac{18}{24}\rightarrow -\frac{3}{4}<-\frac{5}{8}<-\frac{7}{12}<-\frac{1}{2}$

c) $\frac{11}{24}, \frac{-42}{24}, \frac{9}{24}, \frac{-4}{24}, \frac{10}{24}, \frac{-40}{24}\rightarrow -\frac{7}{4}<-\frac{5}{3}<-\frac{1}{6}<\frac{3}{8}<\frac{5}{12}<\frac{11}{24}$

4 a) $1+\frac{3}{5}$ b) $1+\frac{7}{8}$ c) $2+\frac{2}{7}$ d) $-1-\frac{1}{2}$ e) $-2-\frac{1}{3}$

5 $\frac{9}{25}=0,36$; $\frac{13}{9}=1,\widehat{4}$; $\frac{23}{6}=3,8\widehat{3}$; $\frac{17}{200}=0,085$

$\frac{5}{7}=0,\widehat{714285}$; $\frac{233}{990}=0,2\widehat{35}$; $\frac{13}{22}=0,5\widehat{90}$

6 Decimales exactos $\rightarrow\frac{3}{2}, \frac{4}{5}, \frac{19}{2^2\cdot 5}, \frac{3\cdot 7^2\cdot 23}{5\cdot 7}$

Decimales periódicos $\rightarrow\frac{13}{9}, \frac{7\cdot 11}{3\cdot 5^2}$

7 Decimales exactos $\rightarrow\frac{2}{5}, \frac{1}{50}, \frac{81}{250}$

Decimales periódicos $\rightarrow\frac{4}{3}, \frac{13}{11}, \frac{17}{60}$

8 Respuesta abierta.

9 a) $3,\widehat{5}<3,56<3,\widehat{56}<3,5\widehat{6}$ b) $-1,\widehat{3}<-1,\widehat{32}<-1,3\widehat{2}<-1,32$

10 a) $\frac{37}{10}$ b) $\frac{2}{1000}=\frac{1}{500}$ c) $-\frac{103}{100}$

d) $\frac{23}{9}$ e) $\frac{21}{99}=\frac{7}{33}$ f) $\frac{129}{9}=\frac{43}{3}$

11 a) $\frac{29}{90}$ b) $\frac{93}{90}=\frac{31}{30}$ c) $\frac{12}{990}=\frac{2}{165}$

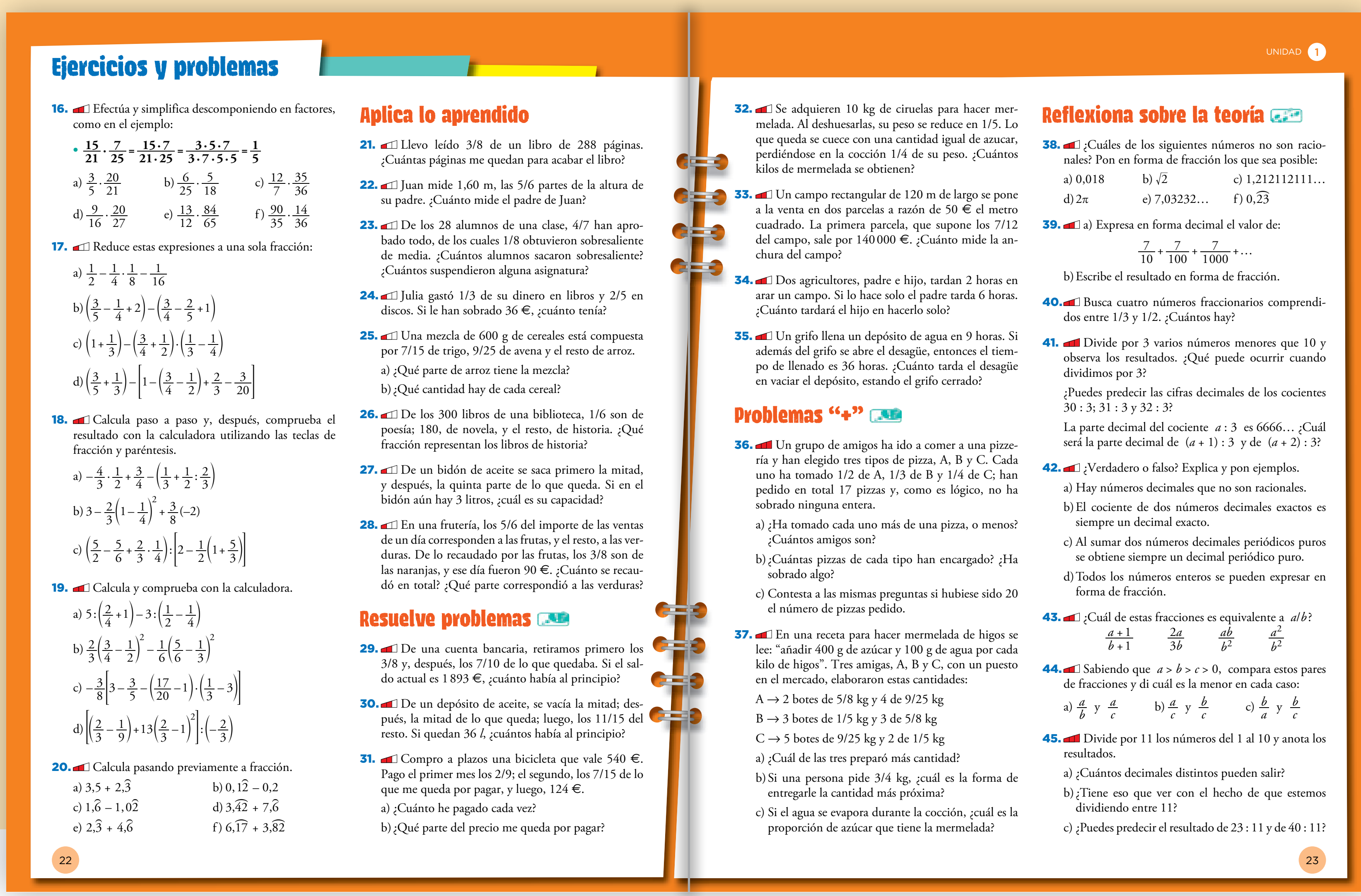
d) $\frac{312}{99}=\frac{104}{33}$ e) $\frac{4\,811}{900}$ f) $\frac{819}{90}$

12 a) 7/3 b) 3/4 c) 3/10 d) 5/2 e) 1/3
f) 1/5 g) 3/2 h) 4/7 i) 49

13 a) 40 b) 75 c) 3 d) 1/3 e) 4/7 f) –3/5

14 a) 33 b) 28 c) 300

15 a) 7/11 b) –5/3 c) –7/4



Ejercicios y problemas

16. Efectúa y simplifica descomponiendo en factores, como en el ejemplo:

- $\dfrac{15}{21}\cdot\dfrac{7}{25}=\dfrac{15\cdot 7}{21\cdot 25}=\dfrac{3\cdot 5\cdot 7}{3\cdot 7\cdot 5\cdot 5}=\dfrac{1}{5}$

a) $\frac{3}{5}\cdot\frac{20}{21}$ b) $\frac{6}{25}\cdot\frac{5}{18}$ c) $\frac{12}{7}\cdot\frac{35}{36}$

d) $\frac{9}{16}\cdot\frac{20}{27}$ e) $\frac{13}{12}\cdot\frac{84}{65}$ f) $\frac{90}{35}\cdot\frac{14}{36}$

17. Reduce estas expresiones a una sola fracción:

a) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{16}$

b) $\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{4}+2\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{5}+1\right)$

c) $\left(1+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$

d) $\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\right)-\left[1-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}-\frac{3}{20}\right]$

18. Calcula paso a paso y, después, comprueba el resultado con la calculadora utilizando las teclas de fracción y paréntesis.

a) $-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}:\frac{2}{3}\right)$

b) $3-\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{8}(-2)$

c) $\left(\frac{5}{2}-\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\right):\left[2-\frac{1}{2}\left(1+\frac{5}{3}\right)\right]$

19. Calcula y comprueba con la calculadora.

a) $5:\left(\frac{2}{4}+1\right)-3:\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$

b) $\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}\right)^2$

c) $-\frac{3}{8}\left[3-\frac{3}{5}-\left(\frac{17}{20}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-3\right)\right]$

d) $\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\right)+13\left(\frac{2}{3}-1\right)^2\right]:\left(-\frac{2}{3}\right)$

20. Calcula pasando previamente a fracción.

a) $3,5+2,\widehat{3}$ b) $0,1\widehat{2}-0,2$

c) $1,\widehat{6}-1,0\widehat{2}$ d) $3,\widehat{42}+7,\widehat{6}$

e) $2,\widehat{3}+4,\widehat{6}$ f) $6,\widehat{17}+3,\widehat{82}$

Aplica lo aprendido

21. Llevo leído 3/8 de un libro de 288 páginas. ¿Cuántas páginas me quedan para acabar el libro?

22. Juan mide 1,60 m, las 5/6 partes de la altura de su padre. ¿Cuánto mide el padre de Juan?

23. De los 28 alumnos de una clase, 4/7 han aprobado todo, de los cuales 1/8 obtuvieron sobresaliente de media. ¿Cuántos alumnos sacaron sobresaliente? ¿Cuántos suspendieron alguna asignatura?

24. Julia gastó 1/3 de su dinero en libros y 2/5 en discos. Si le han sobrado 36 €, ¿cuánto tenía?

25. Una mezcla de 600 g de cereales está compuesta por 7/15 de trigo, 9/25 de avena y el resto de arroz.

a) ¿Qué parte de arroz tiene la mezcla?

b) ¿Qué cantidad hay de cada cereal?

26. De los 300 libros de una biblioteca, 1/6 son de poesía; 180, de novela, y el resto, de historia. ¿Qué fracción representan los libros de historia?

27. De un bidón de aceite se saca primero la mitad, y después, la quinta parte de lo que queda. Si en el bidón aún hay 3 litros, ¿cuál es su capacidad?

28. En una frutería, los 5/6 del importe de las ventas de un día corresponden a las frutas, y el resto, a las verduras. De lo recaudado por las frutas, los 3/8 son de las naranjas, y ese día fueron 90 €. ¿Cuánto se recaudó en total? ¿Qué parte correspondió a las verduras?

Resuelve problemas

29. De una cuenta bancaria, retiramos primero los 3/8 y, después, los 7/10 de lo que quedaba. Si el saldo actual es 1 893 €, ¿cuánto había al principio?

30. De un depósito de aceite, se vacía la mitad; después, la mitad de lo que queda; luego, los 11/15 del resto. Si quedan 36 *l*, ¿cuántos había al principio?

31. Compro a plazos una bicicleta que vale 540 €. Pago el primer mes los 2/9; el segundo, los 7/15 de lo que me queda por pagar, y luego, 124 €.

a) ¿Cuánto he pagado cada vez?

b) ¿Qué parte del precio me queda por pagar?

32. Se adquieren 10 kg de ciruelas para hacer mermelada. Al deshuesarlas, su peso se reduce en 1/5. Lo que queda se cuece con una cantidad igual de azucar, perdiéndose en la cocción 1/4 de su peso. ¿Cuántos kilos de mermelada se obtienen?

33. Un campo rectangular de 120 m de largo se pone a la venta en dos parcelas a razón de 50 € el metro cuadrado. La primera parcela, que supone los 7/12 del campo, sale por 140 000 €. ¿Cuánto mide la anchura del campo?

34. Dos agricultores, padre e hijo, tardan 2 horas en arar un campo. Si lo hace solo el padre tarda 6 horas. ¿Cuánto tardará el hijo en hacerlo solo?

35. Un grifo llena un depósito de agua en 9 horas. Si además del grifo se abre el desagüe, entonces el tiempo de llenado es 36 horas. ¿Cuánto tarda el desagüe en vaciar el depósito, estando el grifo cerrado?

Problemas "+"

36. Un grupo de amigos ha ido a comer a una pizzería y han elegido tres tipos de pizza, A, B y C. Cada uno ha tomado 1/2 de A, 1/3 de B y 1/4 de C; han pedido en total 17 pizzas y, como es lógico, no ha sobrado ninguna entera.

a) ¿Ha tomado cada uno más de una pizza, o menos? ¿Cuántos amigos son?

b) ¿Cuántas pizzas de cada tipo han encargado? ¿Ha sobrado algo?

c) Contesta a las mismas preguntas si hubiese sido 20 el número de pizzas pedido.

37. En una receta para hacer mermelada de higos se lee: "añadir 400 g de azúcar y 100 g de agua por cada kilo de higos". Tres amigas, A, B y C, con un puesto en el mercado, elaboraron estas cantidades:

A → 2 botes de 5/8 kg y 4 de 9/25 kg

B → 3 botes de 1/5 kg y 3 de 5/8 kg

C → 5 botes de 9/25 kg y 2 de 1/5 kg

a) ¿Cuál de las tres preparó más cantidad?

b) Si una persona pide 3/4 kg, ¿cuál es la forma de entregarle la cantidad más próxima?

c) Si el agua se evapora durante la cocción, ¿cuál es la proporción de azúcar que tiene la mermelada?

Reflexiona sobre la teoría

38. ¿Cuáles de los siguientes números no son racionales? Pon en forma de fracción los que sea posible:

a) 0,018   b) $\sqrt{2}$ c) 1,212112111…

d) 2π e) 7,03232…   f) $0,\widehat{23}$

39. a) Expresa en forma decimal el valor de:

$$\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\dots$$

b) Escribe el resultado en forma de fracción.

40. Busca cuatro números fraccionarios comprendidos entre 1/3 y 1/2. ¿Cuántos hay?

41. Divide por 3 varios números menores que 10 y observa los resultados. ¿Qué puede ocurrir cuando dividimos por 3?

¿Puedes predecir las cifras decimales de los cocientes 30 : 3; 31 : 3 y 32 : 3?

La parte decimal del cociente $a:3$ es 6666… ¿Cuál será la parte decimal de $(a+1):3$ y de $(a+2):3$?

42. ¿Verdadero o falso? Explica y pon ejemplos.

a) Hay números decimales que no son racionales.

b) El cociente de dos números decimales exactos es siempre un decimal exacto.

c) Al sumar dos números decimales periódicos puros se obtiene siempre un decimal periódico puro.

d) Todos los números enteros se pueden expresar en forma de fracción.

43. ¿Cuál de estas fracciones es equivalente a a/b?

$\frac{a+1}{b+1}$ $\frac{2a}{3b}$ $\frac{ab}{b^2}$ $\frac{a^2}{b^2}$

44. Sabiendo que $a>b>c>0$, compara estos pares de fracciones y di cuál es la menor en cada caso:

a) $\frac{a}{b}$ y $\frac{a}{c}$ b) $\frac{a}{c}$ y $\frac{b}{c}$ c) $\frac{b}{a}$ y $\frac{b}{c}$

45. Divide por 11 los números del 1 al 10 y anota los resultados.

a) ¿Cuántos decimales distintos pueden salir?

b) ¿Tiene eso que ver con el hecho de que estemos dividiendo entre 11?

c) ¿Puedes predecir el resultado de 23 : 11 y de 40 : 11?

Soluciones de "Ejercicios y problemas"

16 a) 4/7 b) 1/15 c) 5/3 d) 5/12 e) 7/5 f) 1

17 a) 13/32 b) 1 c) 59/48 d) –1/3

18 a) –1 b) 15/8 c) 11/4

19 a) –26/3 b) 0 c) –3/4 d) –3

20 a) 35/6 b) –13/165 c) 29/45 d) 122/11 e) 7 f) 10

21 Me quedan 180 páginas para terminar el libro.

22 El padre de Juan mide 1,92 m.

23 Sobresaliente, 2 alumnos. Suspendieron alguna asignatura, 12.

24 Tenía 135 euros.

25 a) 13/75 b) 280 g de trigo, 216 g de avena y 104 g de arroz.

26 7/30 son libros de historia.

27 La capacidad del bidón es 7,5 litros.

28 Se recaudaron 48 euros en verduras y 288 euros en total.

29 Al principio había 10 096 euros.

30 Al principio había 540 litros.

31 a) 120 €, 196 € y 124 €. b) 5/27 del precio.

32 Se obtienen 12 kg de mermelada.

33 El terreno tiene una anchura de 400 m.

34 El hijo tardará 3 horas.

35 Tarda 12 horas.

36 a) 13/12 de *pizza*, más de una *pizza*. Son 15 amigos.

b) 8 de A, 5 de B y 4 de C. Ha sobrado 1/2 de A y 1/4 de C.

c) Cada uno ha tomado 13/12 de *pizza*, más de una. Son 18 amigos. Han encargado 9 de A, 6 de B y 5 de C. Ha sobrado 1/2 de C.

37 a) La amiga A. b) Dos botes de 1/5 y uno de 9/25. c) 2/7 → 28,6 %

38 a) 18/1 000 b) No es racional. c) No es racional.

d) No es racional. e) 6 962/990 f) 23/99

39 a) $0,777\ldots = 0,\widehat{7}$ b) 7/9

40 Respuesta abierta. Hay infinitos.

41 Cuando dividimos entre 3 podemos obtener un número exacto o un decimal periódico puro de periodo 3 o de periodo 6.

30 : 3 → No tiene cifras decimales.

31 : 3 → Periódico puro de periodo 3.

32 : 3 → Periódico puro de periodo 6.

$(a+1):3$ → No tiene parte decimal.

$(a+2):3$ → Periódico puro de periodo 3.

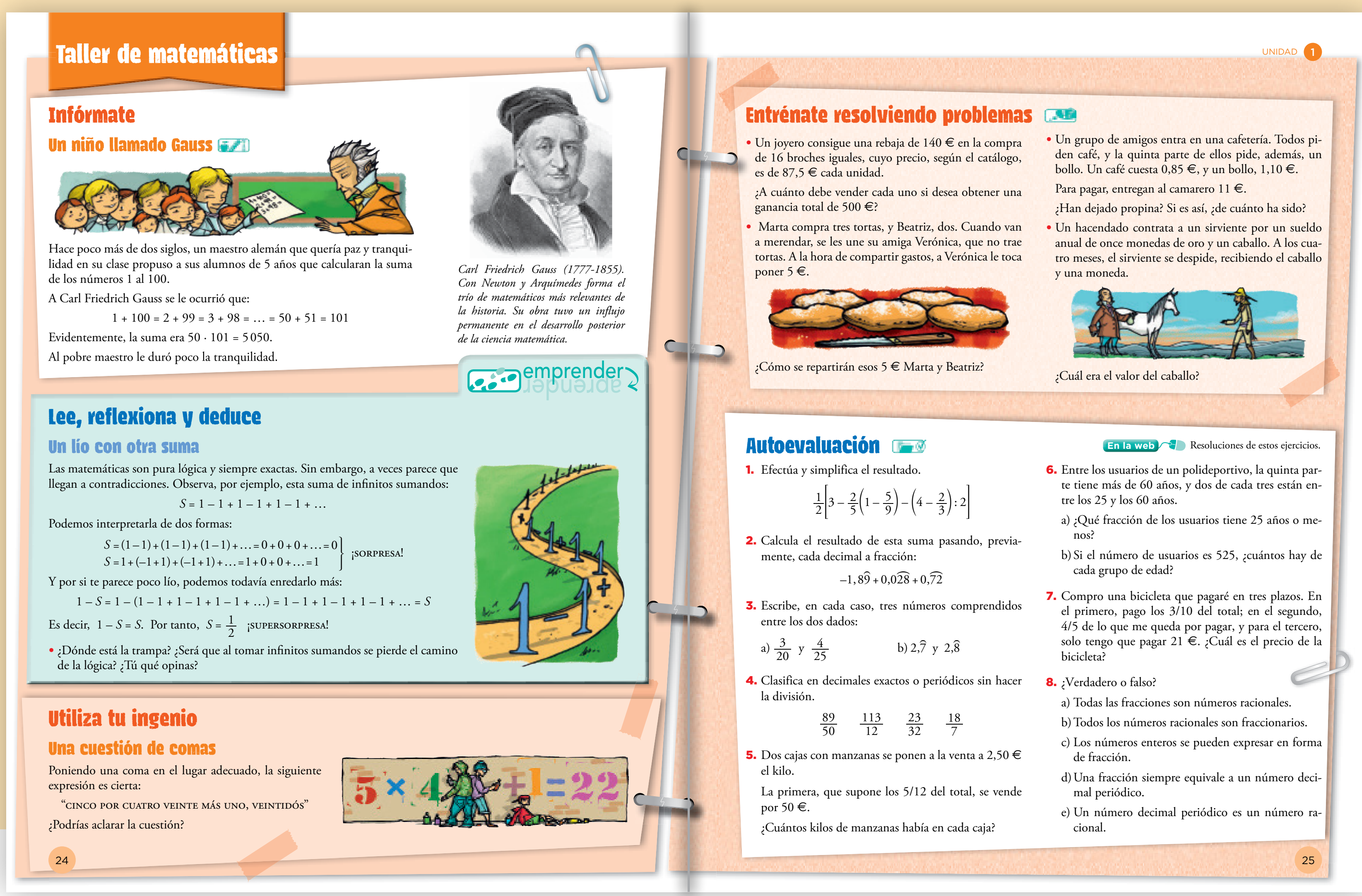
42 a) V b) F c) V d) V

43 $\dfrac{ab}{b^2}$ y $\dfrac{a^2}{b^2}$ son equivalentes a $\dfrac{a}{b}$.

44 a) $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a}{c}$ b) $\dfrac{b}{c}<\dfrac{a}{c}$ c) $\dfrac{b}{a}<\dfrac{b}{c}$

45 a) Se obtienen 10 decimales distintos.

b) Sí. c) $\dfrac{23}{11}=2,\widehat{09}$; $\dfrac{40}{11}=3,\widehat{63}$



Taller de matemáticas

Infórmate

Un niño llamado Gauss

Hace poco más de dos siglos, un maestro alemán que quería paz y tranquilidad en su clase propuso a sus alumnos de 5 años que calcularan la suma de los números 1 al 100.

A Carl Friedrich Gauss se le ocurrió que:

$$1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \dots = 50 + 51 = 101$$

Evidentemente, la suma era $50 \cdot 101 = 5\,050$.

Al pobre maestro le duró poco la tranquilidad.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Con Newton y Arquímedes forma el trío de matemáticos más relevantes de la historia. Su obra tuvo un influjo permanente en el desarrollo posterior de la ciencia matemática.

emprender aprender

Lee, reflexiona y deduce

Un lío con otra suma

Las matemáticas son pura lógica y siempre exactas. Sin embargo, a veces parece que llegan a contradicciones. Observa, por ejemplo, esta suma de infinitos sumandos:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Podemos interpretarla de dos formas:

$$\left.\begin{array}{l} S = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots = 0+0+0+\dots = 0 \\ S = 1+(-1+1)+(-1+1)+\dots = 1+0+0+\dots = 1 \end{array}\right\} \text{ ¡SORPRESA!}$$

Y por si te parece poco lío, podemos todavía enredarlo más:

$$1 - S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = S$$

Es decir, $1 - S = S$. Por tanto, $S = \frac{1}{2}$ ¡SUPERSORPRESA!

- ¿Dónde está la trampa? ¿Será que al tomar infinitos sumandos se pierde el camino de la lógica? ¿Tú qué opinas?

Utiliza tu ingenio

Una cuestión de comas

Poniendo una coma en el lugar adecuado, la siguiente expresión es cierta:

"CINCO POR CUATRO VEINTE MÁS UNO, VEINTIDÓS"

¿Podrías aclarar la cuestión?

5 × 4 + 1 = 22

24

UNIDAD 1

Entrénate resolviendo problemas

- Un joyero consigue una rebaja de 140 € en la compra de 16 broches iguales, cuyo precio, según el catálogo, es de 87,5 € cada unidad.

  ¿A cuánto debe vender cada uno si desea obtener una ganancia total de 500 €?
- Marta compra tres tortas, y Beatriz, dos. Cuando van a merendar, se les une su amiga Verónica, que no trae tortas. A la hora de compartir gastos, a Verónica le toca poner 5 €.

  ¿Cómo se repartirán esos 5 € Marta y Beatriz?
- Un grupo de amigos entra en una cafetería. Todos piden café, y la quinta parte de ellos pide, además, un bollo. Un café cuesta 0,85 €, y un bollo, 1,10 €.

  Para pagar, entregan al camarero 11 €.

  ¿Han dejado propina? Si es así, ¿de cuánto ha sido?
- Un hacendado contrata a un sirviente por un sueldo anual de once monedas de oro y un caballo. A los cuatro meses, el sirviente se despide, recibiendo el caballo y una moneda.

  ¿Cuál era el valor del caballo?

Autoevaluación

En la web Resoluciones de estos ejercicios.

1. Efectúa y simplifica el resultado.

$$\frac{1}{2}\left[3 - \frac{2}{5}\left(1 - \frac{5}{9}\right) - \left(4 - \frac{2}{3}\right) : 2\right]$$

2. Calcula el resultado de esta suma pasando, previamente, cada decimal a fracción:

$$-1{,}8\widehat{9} + 0{,}0\widehat{28} + 0{,}\widehat{72}$$

3. Escribe, en cada caso, tres números comprendidos entre los dos dados:

a) $\frac{3}{20}$ y $\frac{4}{25}$ b) $2{,}\widehat{7}$ y $2{,}\widehat{8}$

4. Clasifica en decimales exactos o periódicos sin hacer la división.

$$\frac{89}{50} \quad \frac{113}{12} \quad \frac{23}{32} \quad \frac{18}{7}$$

5. Dos cajas con manzanas se ponen a la venta a 2,50 € el kilo.

La primera, que supone los 5/12 del total, se vende por 50 €.

¿Cuántos kilos de manzanas había en cada caja?

6. Entre los usuarios de un polideportivo, la quinta parte tiene más de 60 años, y dos de cada tres están entre los 25 y los 60 años.

a) ¿Qué fracción de los usuarios tiene 25 años o menos?

b) Si el número de usuarios es 525, ¿cuántos hay de cada grupo de edad?

7. Compro una bicicleta que pagaré en tres plazos. En el primero, pago los 3/10 del total; en el segundo, 4/5 de lo que me queda por pagar, y para el tercero, solo tengo que pagar 21 €. ¿Cuál es el precio de la bicicleta?

8. ¿Verdadero o falso?

a) Todas las fracciones son números racionales.

b) Todos los números racionales son fraccionarios.

c) Los números enteros se pueden expresar en forma de fracción.

d) Una fracción siempre equivale a un número decimal periódico.

e) Un número decimal periódico es un número racional.

25

Infórmate

Un niño llamado Gauss

- La famosa anécdota de la suma de Gauss es un buen aliciente para que los estudiantes busquen información sobre uno de los matemáticos más importante de todos los tiempos.
- Hay más de 100 versiones sobre este hecho publicadas en biografías, libros de texto y enciclopedias, y aunque la forma de narrarla no es idéntica, todas tiene un mismo origen: una biografía de Gauss, publicada un año después de su muerte por W. Sartorius, profesor de la universidad de Götingen, en la que nuestro matemático desarrolló su actividad académica.

Lee, reflexiona y deduce

Un lío con otra suma

- El desafío lógico que plantea la suma de infinitos sumandos $S = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$, que suele llamarse serie de Grandi, se manifiesta al comprobar que las manipulaciones que realizamos con ella no nos dicen cuál es su suma. Llegamos a dos conclusiones contradictorias sin más que cambiar la colocación de los paréntesis. Esto es consecuencia de que en las series infinitas puede ocurrir cualquier cosa.
- Si el docente lo considera adecuado, puede proponer a los estudiantes el cálculo de las sumas parciales (la suma de los dos primeros términos, la suma de los tres primeros, y así sucesivamente) para que observen si esas sumas parciales tienden hacia un número fijo, que sería la suma de la serie. En caso contario la serie no tiene suma.

Utiliza tu ingenio

Una cuestión de comas

Soluciones

- 5 × 4,20 + 1 = 22

Entrénate resolviendo problemas

Soluciones

- Debe vender cada broche a 110 €.
- 4 € para Marta y 1 € para Beatriz.
- Han dejado una propina de 30 céntimos.
- El valor del caballo era de 4 monedas.

Soluciones de la autoevaluación

1. 26/45
2. $-1{,}1\widehat{4}$
3. Respuesta abierta.
4. Exactos: 89/50 y 23/32. Periódicos: 113/12 y 18/7.
5. En la primera caja había 20 kg, y en la segunda, 28 kg.
6. a) 2/15

   b) Más de 60 años: 105. Entre 25 y 60 años: 350. Menos de 25 años: 70.
7. La bicicleta costaba 150 euros.
8. a) V b) F c) V d) F e) V

ANOTACIONES