2 Potencias y raíces

Presentación de la unidad

- En esta unidad se prosigue el repaso y la ampliación de las técnicas operatorias emprendidas en la unidad anterior.
- Las potencias de exponente positivo y sus propiedades ya son conocidas de cursos anteriores. Aquí se completan y amplían con las de exponente cero o negativo. Las aplicaciones de las propiedades de las potencias a la simplificación de expresiones es algo que suele presentar dificultades y que conviene tratar pausadamente para lograr su asimilación.
- El conocimiento y la interpretación de la lectura y la escritura de la notación científica, en documentos escritos y en la calculadora, abren posibilidades para el cálculo y para el manejo de información en el campo científico.
- Se define finalmente el concepto de raíz enésima de un número, asociado al de potencia enésima, y se aplica al cálculo de raíces exactas, en las que se obtiene un número racional, y de raíces no exactas que ya podemos identificar con números irracionales.
- No es objetivo de este curso hacer un estudio completo de los radicales. Por ese motivo solo se presentan algunas reglas sobre su manejo, con el fin de que el alumnado no cometa errores al encontrárselos.
- La peculiaridad de los números racionales (como fracciones y como decimales), así como la existencia de decimales no periódicos, los irracionales, completa el tratamiento teórico.

Conocimientos mínimos

Consideramos que, como mínimo, los estudiantes deben aprender lo siguiente:

- Cálculo de potencias de exponente entero.
- Utilización de las propiedades de las potencias para simplificar cálculos sencillos.
- Cálculo de raíces exactas aplicando la definición de raíz enésima. Justificación del número de raíces cuando el índice es par y cuando es impar.
- Interpretación y expresión de números en notación científica. Operaciones con números en notación científica utilizando la calculadora.

Esquema de la unidad

NÚMEROS RACIONALES

- POTENCIAS
  - El resultado de elevar un número racional a una POTENCIA de exponente entero, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$ es también un número racional.
  - PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO
    - $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
    - $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
    - $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
    - $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
    - $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
    - *a* y *b* son números racionales
    - *m* y *n* son números enteros
- RAÍCES
  - La raíz *n*-ésima de un número racional puede ser
    - EXACTA: El resultado es un número racional.
    - NO EXACTA: El resultado es un número irracional.
- NOTACIÓN CIENTÍFICA
  - se expresa mediante
    - a) Una parte entera con una única cifra distinta de cero.
    - b) Una parte decimal.
    - c) Y el factor 10^n (n, número entero).
  - Si n es positivo, el número es "grande".
  - Si n es negativo, el número es "pequeño".

Complementos importantes

- Operaciones con números en notación científica, con lápiz y papel.
- Conocimiento de algunas reglas básicas en el manejo de radicales.
- Resolución de problemas con datos expresados en notación científica.
- Reconocimiento de números racionales e irracionales.

Anticipación de tareas

- Revisión del conocimiento de las potencias de exponente natural.
- Revisión del conocimiento de las operaciones y propiedades de las potencias de exponente natural.
- Repaso de las operaciones con potencias de base 10. Cálculo mental. Comparación.
- Utilización de las teclas de potenciación en la calculadora.

Adaptación curricular

En la parte de "Recursos fotocopiables" se ofrece una adaptación curricular de esta unidad 2 del libro del alumnado, para cuya elaboración se han tenido en cuenta los conocimientos mínimos que aquí se proponen.

La lectura inicial servirá para ejercitar la comprensión lectora y para mostrar los dos aspectos que justifican el estudio de las matemáticas: el práctico y el intelectual.

Los contenidos, si se adaptan a esos mínimos exigibles, o bien no han sufrido cambio alguno o bien se han modificado ligeramente para adecuarlos al posible nivel de los estudiantes a quienes va dirigido. Lo mismo cabe decir de los ejercicios prácticos que se proponen.

Si algún contenido supera los mínimos exigibles, o bien se ha suprimido o bien se ha adaptado para ajustarlo a los requisitos exigidos.

Finalmente, los ejercicios y problemas con los que finaliza la unidad se han reducido en cantidad y se han modificado o bajado de nivel hasta adaptarse a lo convenido. Lo mismo cabe decir de la autoevaluación.

En la siguiente tabla se recoge una relación de actividades para atender y trabajar el aprendizaje cooperativo, el pensamiento comprensivo, el pensamiento crítico, la interdisciplinariedad, las TIC, el emprendimiento y la resolución de problemas. Unas están propuestas en el libro del alumnado (L.A.), y aquí se hace referencia a ellas indicando la página y la actividad, y otras, como se indica, se sugieren en esta Propuesta Didáctica (P.D.).

Una selección de estas sugerencias están marcadas en el libro del alumnado con un icono; aquí se han marcado con (*).

APRENDIZAJE COOPERATIVO	PENSAMIENTO COMPRENSIVO	PENSAMIENTO CRÍTICO
Pág. 28. Piensa y practica (*)	Pág. 28. Ejercicio resuelto (*)	Pág. 30. Actividad 1 (*)
Pág. 29. Piensa y practica (*)	Pág. 29. Ejercicios resueltos (*)	Pág. 32. Actividad 2 (*)
Pág. 36. Actividad sugerida en esta P.D. (*)	Pág. 32. Actividad 1 (*)	Pág. 37. Reflexiona sobre la teoría (*)
Pág. 37. Actividad sugerida en esta P.D. (*)	Pág. 33. Actividades 4 (*), 5 (*)	
	Pág. 34. Actividad 1 (*)	
	Pág. 35. Ejercicios y problemas resueltos (*)	
	Pág. 33. Actividades 8 (*), 9 (*)	

INTERDISCIPLINARIEDAD	TIC	EMPRENDIMIENTO	RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Pág. 30. Actividad sugerida en esta P.D.	Pág. 31. Ejercicio resuelto y actividad 3 (*)	Pág. 27. Actividad sugerida en esta P.D.	Todos los problemas propuestos en el L.A. están encuadrados en este apartado. Aquí se señalan algunos que tienen especial interés.
Pág. 36. Actividad 10	Pág. 36. Actividades 11 (*), 12 (*), 13 (*), 14 (*)	Pág. 27. Resuelve (*)	Pág. 37. Actividad 26
Pág. 37. Actividad 25		Pág. 38. Actividad "Conjetura y generaliza" (*)	Pág. 39. Entrénate resolviendo problemas (*)

2 Potencias y raíces

Números grandes en la India...

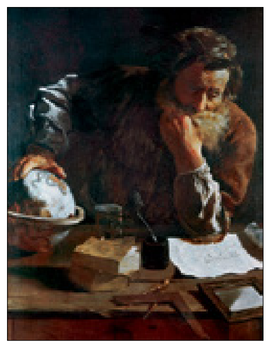
Los antiguos indios fueron muy aficionados a los números enormes. En su gran poema *Mahabharata* (siglo VI a. C., aproximadamente), se cuenta que Buda tuvo $6 \cdot 10^{11}$ hijos y se habla de $24 \cdot 10^{15}$ divinidades.

Una antigua leyenda popular india describe una batalla en la que intervinieron 10^{40} monos.

Templo Swayambhunath en el valle de Katmandú (Nepal).

... y en la antigua Grecia

Arquímedes, gran matemático, ingeniero e inventor griego (siglo III a.C.), con el fin de demostrar que el número de granos de arena "no era infinito", se propuso escribir un número mayor que el número de granos de arena que cabría en el universo. Y para ello escribió todo un libro, *El arenario*, en el que tuvo que inventar una nueva forma de escribir números extraordinariamente grandes.



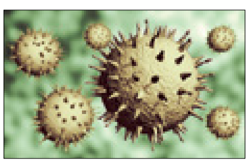
"Arquímedes pensativo", de Domenico Fetti.

Llega el S.N.D.

Nuestro sistema de numeración llegó a la civilización occidental por medio de los árabes (siglo IX), quienes, a su vez, lo aprendieron de los indios entre los siglos VII y VIII. Por eso, lo que hoy llamamos "numeración arábiga" debería llamarse "hindú" o "indo-arábiga".

El S.N.D. dio alas al desarrollo de las matemáticas, más allá de su aplicación en situaciones prácticas cotidianas.

La estructura del S.N.D., junto con las potencias, permite expresar con gran comodidad y sencillez números de cualquier tamaño, por grandes o pequeños que sean.



El virus de la gripe tiene un diámetro medio aproximado de 10^{-7} metros.

26

¿Qué es un *gúgol*?

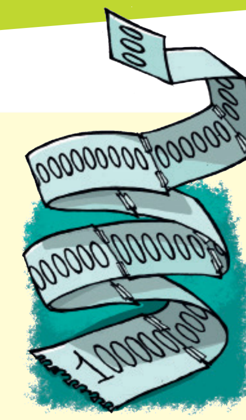
Supón que escribes un uno seguido de cien ceros:

$$\underbrace{10\,000\,000 \dots 000}_{100 \text{ ceros}}$$

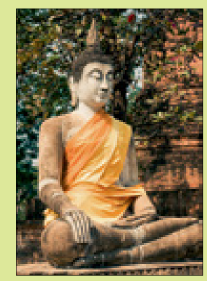
A ese número se le llama *gúgol*, que traducido al inglés se escribiría *googol*. ¿Te suena a algo conocido? Pues sí, parece que ese es el nombre que le quisieron poner sus creadores al famoso buscador informático, asociándolo a la idea de una enormidad en potencia y eficacia. Finalmente, por razones comerciales, le llamaron algo parecido: "Google".

Y si ese te parece grande, piensa ahora en un uno seguido de un gúgol de ceros. A ese número se le llama gúgolplex, o *googolplex*.

¿Te figuras la cantidad de papel que necesitarías para escribirlo con todas sus cifras? ¡¡Imposible!!



Resuelve



1. ¿Cabrían los hijos de Buda en la India? Teniendo en cuenta *Mahabharata* y que la superficie de la India es, aproximadamente, 3 millones de kilómetros cuadrados:
   a) ¿Cuántos metros cuadrados corresponderían a cada uno de los hijos de Buda?
   b) ¿Cuántas divinidades habría por metro cuadrado?
2. ¿Cuánto pueden ocupar 10^{40} monos? Vamos a suponer que un mono ocupa un volumen de unos 10 litros y que amontonamos 10^{40} monos, bien apretados, dentro de una esfera.
   ¿Cuál sería el radio de esa esfera?
   NOTA: la distancia de Urano al Sol es de unos 2 870 millones de kilómetros.
3. a) ¿Cuál o cuáles de estas potencias sirven para expresar un gúgol y cuál o cuáles para expresar un gúgolplex?

   $10^{(10^{100})}$ $\quad$ 10^{100} $\quad$ $10^{(10^2)}$ $\quad$ $10^{(100^{10})}$

   b) ¿Qué es mayor, un gúgol de gúgoles o un gúgolplex?
   c) Suponiendo que en una hoja de papel caben, bien juntos, 3 000 caracteres, ¿serías capaz de idear una expresión que indique el número de hojas necesarias para escribir un gúgolplex con todas sus cifras?

27

Al iniciar la unidad

Con la lectura de estas páginas se pretende destacar las ideas siguientes:

- La presencia de números muy grandes en civilizaciones antiguas desde el siglo VI a. C. (India, Grecia...).
- La eficacia de la notación potencial para expresar ese tipo de números.
- La importancia de nuestro sistema de numeración decimal-posicional, heredado de los indios y que nos llega a través de los árabes.
- La figura de Arquímedes, el mayor matemático de la antigüedad y uno de los mejores de la historia.
- El significado, y la utilización en la actualidad, del nombre de algunos números muy grandes (*gúgol*, *gúgolplex*) de los que deriva el nombre de la empresa del motor de búsqueda más utilizado.

Cuestiones para detectar ideas previas

- En las actividades de apartado Resuelve, se pretende que los alumnos y las alumnas planteen y traten de resolver algunos problemas con números muy grandes. Las dificultades que encuentren en este momento serán un punto de partida para valorar el uso de la notación científica que estudiaremos en esta unidad.

Emprendimiento

Se sugiere la siguiente actividad:

Investiga: ¿Qué es un *gúgolplex*?

Soluciones de "Resuelve"

1 a) 5 m^2

b) Habría 8 000 divinidades por metro cuadrado.

2 2 870 millones de kilómetros, aproximadamente.

3 a) *Gúgol*: la segunda y la tercera. *Gúgolplex*: la primera.

b) Un gúgol de gúgoles.

c) $3{,}33 \cdot 10^{96}$ hojas, aproximadamente.

ANOTACIONES

1 Potenciación

En la web Actividades para repasar las operaciones con potencias de exponente natural.

Potencias de exponente positivo

Las potencias de exponente entero positivo (1, 2, 3, …) son fáciles de interpretar:

$$a^1 = a \qquad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

Por ejemplo: $8^1 = 8$, $(-6)^4 = (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6)$, $\left(\frac{2}{7}\right)^3 = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7}$

Propiedades

① $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ — Por ejemplo: $a^3 \cdot a^4 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a) = a^{3+4}$

② $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ — Por ejemplo: $(a \cdot b)^3 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = (a \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b) = a^3 \cdot b^3$

③ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ — Por ejemplo: $(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a^{2 \cdot 3}$

④ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ — Por ejemplo: $\frac{a^6}{a^4} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot a}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = \frac{a^{6-4}}{1} = a^{6-4}$

⑤ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ — Por ejemplo: $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \frac{a^3}{b^3}$

Ten en cuenta

La propiedad ④, de momento, solo sirve para $m > n$.

Ejercicio resuelto

Reducir a una sola potencia.

a) $5^2 \cdot 5^6 \cdot 5^3$ *b)* $(2^3)^4$ *c)* $\frac{5^8}{5^6}$ *d)* $\frac{14^5}{7^5}$ *e)* $2^7 \cdot 5^7$ *f)* $(7^4 \cdot 7^5) : (7 \cdot 7^3)^2$

a) $5^2 \cdot 5^6 \cdot 5^3 = 5^{2+6+3} = 5^{11}$ (Propiedad ①)

b) $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$ (Propiedad ③)

c) $\frac{5^8}{5^6} = 5^{8-6} = 5^2$ (Propiedad ④)

d) $\frac{14^5}{7^5} = \left(\frac{14}{7}\right)^5 = 2^5$ (Propiedad ⑤)

e) $2^7 \cdot 5^7 = (2 \cdot 5)^7 = 10^7$ (Propiedad ②)

f) $(7^4 \cdot 7^5) : (7 \cdot 7^3)^2 = 7^9 : (7^4)^2 = 7^9 : 7^8 = 7$ (Propiedades ①, ③ y ④)

Piensa y practica

1. Reduce a una sola potencia.

a) $4^3 \cdot 4^4 \cdot 4$ b) $(5^6)^3$ c) $\frac{7^6}{7^4}$ d) $\frac{15^3}{3^3}$ e) $2^{10} \cdot 5^{10}$ f) $\frac{12^5}{3^5 \cdot 4^5}$ g) $(a^6 \cdot a^3)^2 : (a^2 \cdot a^4)^3$ h) $(6^2)^3 \cdot 3^5 \cdot (2^7 : 2^2)$

2. Calcula utilizando propiedades de las potencias.

a) $2^3 \cdot 5^4$ b) $(6^5 : 2^4) : 3^5$ c) $\left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$ d) $2^8 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^4$ e) $\frac{20^6}{2^6}$ f) $\frac{20^6}{2^5}$ g) $(3^3)^2 : 3^5$ h) $(2^5)^3 \cdot [(5^3)^4 : 2^3]$

28

UNIDAD 2

Resumen

Definición

$a^0 = 1$, $a^1 = a$

Si $n > 1$, $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}$

$a^{-n} = 1/a^n$

Propiedades

Si $m, n \in \mathbb{Z}$, se cumple:

① $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

② $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

③ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

④ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

⑤ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Potencias de exponente cero o negativo

La propiedad ④ de la página anterior solo era válida para $m > n$. Veamos qué ocurriría si fuera $m = n$ o $m < n$:

$$\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0. \text{ Pero } \frac{a^3}{a^3} = 1. \text{ Por tanto, tendría que ser } a^0 = 1.$$

$$\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}. \text{ Pero } \frac{a^3}{a^5} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^2} \rightarrow a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

Estas igualdades nos sugieren la siguiente definición:

Si a es un número racional distinto de cero y n es entero:

$$a^0 = 1 \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Como consecuencia: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$

Las propiedades que teníamos para las potencias de exponente positivo también son válidas para las potencias de exponentes enteros cualesquiera.

Ejercicios resueltos

1. ***Expresar como potencia de base 10 este número:*** ***0,0000000000001***

$0{,}0000000000001 = \frac{1}{10\,000\,000\,000\,000} = \frac{1}{10^{13}} = 10^{-13}$

2. ***Simplificar.***

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{9}{5}\right)^{-3}$ *b)* $\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{-2}\right]^{-3}$ *c)* $\frac{2^{-6} \cdot 4^3 \cdot 3^4 \cdot 9^{-2}}{2^{-4} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 3^{-5}}$

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{9}{5}\right)^{-3} = \frac{3^4}{5^4} \cdot \frac{5^3}{9^3} = \frac{3^4 \cdot 5^3}{5^4 \cdot (3^2)^3} = \frac{3^4 \cdot 5^3}{5^4 \cdot 3^6} = \frac{1}{3^2 \cdot 5} = \frac{1}{45}$

b) Se puede resolver aplicando la propiedad ③:

$\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{-2}\right]^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^{(-2) \cdot (-3)} = \left(\frac{5}{2}\right)^6 = \frac{5^6}{2^6} = \frac{15\,625}{64}$

c) $\frac{2^{-6} \cdot 4^3 \cdot 3^4 \cdot 9^{-2}}{2^{-4} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 3^{-5}} = \frac{2^{-6} \cdot 2^6 \cdot 3^4 \cdot 3^{-4}}{2^{-4} \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 3^{-5}} = 2^{-6+6+4-3} \cdot 3^{4-4-2+5} = 2 \cdot 3^3 = 54$

Piensa y practica

En la web Actividades para repasar las operaciones con potencias de exponente entero.

3. Expresa como potencia de base 10 el resultado de la operación 0,00001 : 10 000 000.

4. Expresa como fracción simplificada.

a) $\frac{3^4}{3^5}$ b) 5^{-1} c) a^{-6} d) $x^{-1}y^{-2}$ e) $\frac{x^3y^4}{x^2y^6}$ f) $(3xy^2)^{-2}$ g) $5 \cdot 3^{-1} \cdot xy^{-2}$

5. Reduce a un único número racional.

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^2$ b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ c) $\left(\frac{-1}{5}\right)^{-2}$ d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$ e) $\left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}\right)^{-6}$ f) $\left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^6$ g) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$ h) $\left(\frac{17}{45}\right)^0$ i) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\right]^2$

En la web Actividades para reforzar las operaciones con potencias de exponente entero.

29

Sugerencias

- En los cursos anteriores, los alumnos y las alumnas han estudiado las potencias de exponente natural y sus propiedades. En este curso se pretende conseguir que comprendan y justifiquen dichas propiedades.
- Con este fin, por ejemplo, para calcular la potencia de un producto se aplica la definición de potencia, se utilizan las propiedades asociativa y conmutativa y, finalmente, se vuelve a aplicar la definición de potencia, llegando así a la expresión de la propiedad: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.
- Es conveniente que sean capaces de expresar las propiedades de las potencias utilizando la terminología propia: base, exponente, producto de potencias de la misma base, potencia de un producto…
- En el ejercicio resuelto de la página 28 se destacan las propiedades aplicadas en cada apartado. Es interesante que los alumnos y las alumnas hagan esto mismo al realizar las actividades propuestas.
- Las potencias de exponente cero o negativo son mucho menos intuitivas que las de exponente positivo y, por ello, requieren un tratamiento más detallado. El objetivo es que los alumnos y las alumnas lleguen a interpretar un número elevado a un exponente negativo como una forma de escribir el inverso de un número con exponente positivo.
- Conviene realizar abundantes operaciones con potencias de exponente positivo y negativo, prestando especial atención a las potencias de base 10 por su utilización en la notación científica.

Refuerzo y Ampliación

Se recomiendan:

- Del cuaderno n.º 1 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:

  Refuerzo: Ejercicios 1 a 8 de la pág. 16. Ejercicios 1 a 8 de la pág. 18.

  Ampliación: Ejercicios 9 a 18 de la pág. 17. Ejercicios 9 a 16 de la pág. 19.
- Del fotocopiable INCLUSIÓN Y ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD:

  Refuerzo: Ej. 1 de Practica, ficha A. Ej. 1 y 2 de Practica, ficha B.

Aprendizaje cooperativo

Para estas páginas se sugiere la siguiente metodología:

- El alumnado se distribuye en pequeños grupos (dos, tres por grupo).
- Resuelven una serie de expresiones individualmente y, después, contrastan las soluciones y los procesos.
- Si hay discrepancias, deben descubrir los errores. Si no saben resolver las dudas o no se ponen de acuerdo, actuará el docente.

Emprendimiento

Se sugiere esta actividad:

"Investiga: ¿Qué le tiene que ocurrir a una potencia de base 3 para que pueda expresarse como una potencia de base 9?"

Soluciones de "Piensa y practica"

1 a) 4^8 b) 5^{18} c) 7^2 d) 5^3 e) 10^{10} f) 1 g) 1 h) 6^{11}

2 a) 5 000 b) 2 c) 1/27 d) 10 000 e) 1 000 000 f) 2 000 000 g) 3 h) 1 000 000 000 000

3 10^{-12}

4 a) 1/3 b) 1/5 c) $1/a^6$ d) $1/xy^2$ e) x/y^2 f) $1/9x^2y^4$ g) $5x/3y^2$

5 a) 1/25 b) 25 c) 25 d) 16/9 e) 1 000 000 f) 1/1 000 000 g) 32/243 h) 1 i) 729

2 Notación científica

En la web

Recuerda las propiedades de las potencias de base 10.

Cálculo mental

I. Opera y expresa el resultado como potencia de base 10:

a) $1\,000 \cdot 100\,000$

b) $1\,000 \cdot 0{,}01$

c) $1\,000 : 0{,}01$

d) $1\,000 : 0{,}000001$

e) $1\,000 \cdot 0{,}000001$

f) $0{,}0001 \cdot 0{,}01$

g) $0{,}0001 : 0{,}01$

II. Di el valor de n para que se verifique cada igualdad:

a) $374{,}2 \cdot 10^5 = 3{,}742 \cdot 10^n$

b) $374{,}2 \cdot 10^{-7} = 3{,}742 \cdot 10^n$

c) $0{,}031 \cdot 10^5 = 3{,}1 \cdot 10^n$

d) $0{,}031 \cdot 10^{-7} = 3{,}1 \cdot 10^n$

Los números siguientes están puestos en notación científica:

$$3{,}56 \cdot 10^{13} = \underbrace{35\,600\,000\,000\,000}_{13 \text{ cifras}}$$

$$9{,}207 \cdot 10^{-16} = 0{,}\underbrace{0000000000000009}_{16 \text{ cifras}}207$$

La notación científica tiene la siguiente ventaja sobre la usual: las cifras se nos dan contadas, con lo que el orden de magnitud del número es evidente. Esta notación es útil, sobre todo, para expresar números muy grandes o muy pequeños.

Un número puesto en notación científica consta de:

- Una parte entera formada por una sola cifra que no es el cero (la de las unidades).
- El resto de las cifras significativas, si las hay, puestas como parte decimal.
- Una potencia de base 10 que da el orden de magnitud del número.

$$N = \underset{\text{PARTE ENTERA (SOLO UNA CIFRA)}}{a}\,,\,\underbrace{b\,c\,d\,\ldots}_{\text{PARTE DECIMAL}} \cdot \underbrace{10^n}_{\text{POTENCIA ENTERA DE BASE 10}}$$

Si n es positivo, el número N es "grande".

Y si n es negativo, entonces N es "pequeño".

Operaciones con números en notación científica

Para operar con números dados en notación científica se procede de forma natural, teniendo en cuenta que cada número está formado por dos factores: la expresión decimal y la potencia de base 10.

El producto y el cociente son inmediatos, mientras que la suma y la resta exigen preparar los sumandos de modo que tengan todos la misma potencia de base 10 y, así, poder sacar factor común.

En la web

- Practica con potencias de base 10.
- Practica la escritura en notación científica.
- Practica la suma con números en notación científica.

Ejercicio resuelto

a) $(4{,}73 \cdot 10^7) \cdot (7{,}5 \cdot 10^5) = (4{,}73 \cdot 7{,}5) \cdot 10^{7+5} = 35{,}475 \cdot 10^{12} = 3{,}5475 \cdot 10^{13}$

b) $\dfrac{4{,}73 \cdot 10^7}{7{,}5 \cdot 10^{-5}} = (4{,}73 : 7{,}5) \cdot 10^{7-(-5)} = 0{,}631 \cdot 10^{12} = 6{,}31 \cdot 10^{11}$

c) $4{,}73 \cdot 10^7 - 7{,}5 \cdot 10^6 = 47{,}3 \cdot 10^6 - 7{,}5 \cdot 10^6 = (47{,}3 - 7{,}5) \cdot 10^6 = 39{,}8 \cdot 10^6 = 3{,}98 \cdot 10^7$

Observación

En los tres apartados del ejercicio resuelto hemos tenido que "arreglar" la solución final para que adopte la notación científica: solo una cifra en la parte entera.

Piensa y practica

1. ¿Verdadero o falso?

a) $5{,}83 \cdot 10^{-5} < 2{,}01 \cdot 10^4$

b) $58{,}35 \cdot 10^4 > 3{,}5 \cdot 10^6$

c) $6{,}2 \cdot 10^{-3} < 5{,}8 \cdot 10^{-4}$

d) $(3{,}1 \cdot 10^5) \cdot (3{,}3 \cdot 10^{-5}) < 10$

2. Calcula.

a) $(3{,}25 \cdot 10^7) \cdot (9{,}35 \cdot 10^{-15})$

b) $(5{,}73 \cdot 10^4) + (-3{,}2 \cdot 10^5)$

c) $(4{,}8 \cdot 10^{12}) : (2{,}5 \cdot 10^3)$

d) $(1{,}17 \cdot 10^8) - (3{,}24 \cdot 10^{-6})$

PREFIJOS PARA ÓRDENES DE UNIDADES	
tera	10^{12}
giga	10^9
mega	10^6
kilo	10^3
hecto	10^2
deca	10
deci	10^{-1}
centi	10^{-2}
mili	10^{-3}
micro	10^{-6}
nano	10^{-9}

Calculadora para la notación científica

Cualquiera de los modelos de calculadora puede ser programado para que trabaje solo en notación científica (modo SCI). Es preferible que no uses ese modo, sino el normal (**NORM**). Averigua cómo se programa en tu calculadora. Puedes hallarlo, según los modelos, pulsando reiteradamente la tecla [MODE], o bien mediante **SHIFT SETUP.** Si se te pregunta **1~2?**, responde **2.** De este modo solo recurrirá a la notación científica cuando el número de cifras decimales utilizado sea muy grande.

Las teclas para poner el exponente en una notación científica son, dependiendo del modelo de calculadora, [EXP] o [×10ˣ].

- **Interpretación**

Cuando la calculadora obtiene un resultado con más cifras de las que caben en su pantalla, recurre a la notación científica. Por ejemplo:

123 000 000 [×] 45 000 [=] {5.535 ×10¹²}

0,000123 [÷] 50 000 [=] {2.46 ×10⁻⁰⁹}

- **Escritura**

Para poner $5{,}74 \cdot 10^9$, hacemos: 5,74 [EXP] 9 [o bien 5,74 [×10ˣ] 9]

Para poner $2{,}95 \cdot 10^{-13}$, hacemos: 2,95 [EXP] 13 [+/–] [o bien 2,95 [×10ˣ] [(–)] 13]

- **Operaciones**

Las operaciones se encadenan como si fueran números cualesquiera. La propia calculadora, al presionar la tecla [=], da el resultado en forma científica.

Ejercicio resuelto

a) $(3{,}214 \cdot 10^{-5}) \cdot (7{,}2 \cdot 10^{15})$

b) $\dfrac{3{,}214 \cdot 10^{-5}}{7{,}2 \cdot 10^{15}}$

c) $3{,}2 \cdot 10^8 + 7{,}3 \cdot 10^{-14} - 4{,}552 \cdot 10^8$

a) $(3{,}214 \cdot 10^{-5}) \cdot (7{,}2 \cdot 10^{15}) = (3{,}214 \cdot 7{,}2) \cdot 10^{-5+15} = 23{,}14 \cdot 10^{10} = 2{,}314 \cdot 10^{11}$

Con calculadora: 3,214 [EXP] 5 [+/–] [×] 7,2 [EXP] 15 [=] {2.31408 ×10¹¹}

b) $\dfrac{3{,}214 \cdot 10^{-5}}{7{,}2 \cdot 10^{15}} = \dfrac{3{,}214}{7{,}2} \cdot 10^{-5-15} = 0{,}446 \cdot 10^{-20} = 4{,}46 \cdot 10^{-21}$

Con calculadora: 3,214 [EXP] 5 [+/–] [÷] 7,2 [EXP] 15 [=] {4.4638889 ×10⁻²¹}

c) 3,2 [EXP] 8 + 7,3 [EXP] 14 [+/–] [–] 4,552 [EXP] 8 [=] {–1.352 ×10⁸}

Si los números que queremos sumar son muy diferentes en orden de magnitud, el resultado que muestra la calculadora es de orden igual al mayor de ellos.

Por ejemplo: 7,32 [EXP] 4 [+] 5,35 [EXP] 17 [=] {5.35 ×10¹⁷}

Piensa y practica

3. Resuelve con la calculadora la actividad 2 de la página anterior.

Sugerencias

- Los ejemplos del comienzo de la página pretenden que los alumnos y las alumnas vean la conveniencia de expresar esos números de forma más sencilla, de modo que a simple vista se aprecie si el número es muy grande o muy pequeño, y se puedan comparar los órdenes de magnitud.
- El objetivo fundamental será la interpretación y la expresión de números escritos en notación científica, tanto en papel como en la calculadora. El profesor o la profesora pueden proponer actividades en las que se observe la aplicación de este concepto en contextos reales. Algunos ejemplos pueden ser: dar la distancia de cada planeta al Sol, en millones de kilómetros, para que los estudiantes las expresen en kilómetros en notación científica. O el tamaño en milímetros de alguna célula, para expresarla en centímetros usando notación científica.
- En las operaciones haremos notar que un número escrito en notación científica consta de dos factores, un número entero o decimal y una potencia de base 10. El producto y el cociente son, por tanto, una multiplicación o división de decimales y otra de potencias de base 10. Más dificultades tienen la adicción y la sustracción, en las que hay que preparar los términos, expresándolos con la misma potencia de base 10, para poder efectuar la suma o la resta. Es evidente que esto tiene un interés esencialmente teórico, ya que la calculadora opera directamente con números en notación científica, pero nos parece muy conveniente que el alumnado conozca y comprenda lo que le pide a la calculadora.
- Una vez que los alumnos y las alumnas saben identificar y expresar un número cualquiera en notación científica, deben aprender a trabajar con ellos en la calculadora. Es fundamental que reconozcan la expresión que da la calculadora de los números escritos de esta forma y sepan cuáles son las teclas que permiten expresar así los números muy grandes y muy pequeños.
- En alguna ocasión, es conveniente pedir a los estudiantes que, además de realizar las operaciones, describan la secuencia de teclas que han utilizado para ello. Esto les hará conocer mejor la calculadora y permitirá al profesor o profesora ayudarles a corregir errores.
- Es interesante reflexionar sobre lo que ocurre cuando sumamos números de orden de magnitud muy diferentes y preguntarnos por qué el resultado coincide con uno de los sumandos. Por ejemplo:

$$3 \cdot 10^{18} + 5 \cdot 10^3 = 3 \cdot 10^{18} \text{ o bien } 3 \cdot 10^{18} - 5 \cdot 10^3 = 3 \cdot 10^{18}$$

Refuerzo y Ampliación

Se recomiendan:

- Del cuaderno n.º 1 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:

  Refuerzo: Ejercicios 1 a 4 de la pág. 20.

  Ampliación: Ejercicios 1 y 2 de las pág. 21.

- Del fotocopiable INCLUSIÓN Y ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD:

  Refuerzo: Ejercicio 3 de Practica, ficha A.

  Ampliación: Ejercicios 1 a 4 de Aplica, ficha A. Ejercicios 1 a 3 de Aplica, ficha B.

Interdisciplinariedad

Se sugiere la siguiente actividad:

Escribe cuatro situaciones pertenecientes a ciencias distintas a las matemáticas en las que se utilice la notación científica (dos para números muy grandes y otras dos para números muy pequeños).

Soluciones de "Piensa y practica"

1 a) V b) F c) F d) F

2 a) $3{,}03875 \cdot 10^{-7}$ b) $-2{,}627 \cdot 10^5$

c) $1{,}92 \cdot 10^9$ d) $1{,}17 \cdot 10^8$

3 Ver ejercicio anterior.

3 Raíces y radicales

Dos raíces cuadradas

Observa:

$3^2 = 9,\ (-3)^2 = 9$

Por tanto, 9 tiene dos raíces cuadradas: 3 y –3.

Pero, ¡atención!, cuando ponemos $\sqrt{9}$ nos estamos refiriendo a la raíz positiva, es decir, $\sqrt{9} = 3$.

Análogamente, 16 tiene dos raíces cuartas: 2 y –2.

Pero $\sqrt[4]{16} = 2$.

- **Raíces cuadradas.** Como sabes, $\sqrt{81} = 9$ porque $9^2 = 81$.
- **Raíces cúbicas.** $\sqrt[3]{125} = 5$ porque $5^3 = 125$.
- **Otras raíces.** De forma análoga se interpretan las raíces de *índice* superior a 3:

Puesto que $2^5 = 32$, será $\sqrt[5]{32} = 2$.

$\sqrt[4]{10\,000} = 10$ porque $10^4 = 10\,000$.

En general, si $a = b^n$ entonces $\sqrt[n]{a} = b$.

En la expresión $\sqrt[n]{a}$, n es el **índice** y a el **radicando.**

Si $\sqrt[n]{a}$ es un número racional (entero o fraccionario), entonces se dice que la raíz es **exacta.**

Ejercicio resuelto

Calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt{\frac{49}{16}}$

b) $\sqrt{4\,356}$

c) $\sqrt[3]{\frac{1\,000}{64}}$

d) $\sqrt[5]{\frac{1}{243}}$

e) $\sqrt[3]{2{,}16 \cdot 10^{14}}$

f) $\sqrt{5{,}76 \cdot 10^{-8}}$

a) $\left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{7^2}{4^2} = \frac{49}{16}$. Por tanto, $\sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{7}{4}$.

b) Puesto que se nos pide hallar $\sqrt{4\,356}$, comprobemos si 4 356 es un cuadrado perfecto.

Para ello, lo descomponemos en factores primos: $4\,356 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11^2$.

Es decir, $4\,356 = (2 \cdot 3 \cdot 11)^2 = 66^2$. Por tanto, $\sqrt{4\,356} = 66$.

c) $1\,000 = 10^3$, $64 = 4^3$. Por tanto, $\sqrt[3]{\frac{1000}{64}} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$.

d) $243 = 3^5$. Por tanto, $\sqrt[5]{\frac{1}{243}} = \frac{1}{3}$.

e) $2{,}16 \cdot 10^{14} = 216 \cdot 10^{12} = 6^3 \cdot (10^4)^3 = (6 \cdot 10^4)^3$.

Por tanto, $\sqrt[3]{2{,}16 \cdot 10^{14}} = 6 \cdot 10^4$.

f) $5{,}76 \cdot 10^{-8} = 576 \cdot 10^{-10} = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 10^{-10} = (2^3 \cdot 3 \cdot 10^{-5})^2$.

Por tanto, $\sqrt{5{,}76 \cdot 10^{-8}} = 2^3 \cdot 3 \cdot 10^{-5} = 24 \cdot 10^{-5} = 2{,}4 \cdot 10^{-4}$.

Piensa y practica

En la web Actividades para reforzar el cálculo de raíces exactas.

1. Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt[6]{64}$ b) $\sqrt[3]{216}$

c) $\sqrt{14\,400}$ d) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$

e) $\sqrt[3]{\frac{64}{216}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{3\,375}{1000}}$

g) $\sqrt[3]{1{,}728 \cdot 10^{21}}$ h) $\sqrt{2{,}025 \cdot 10^{-11}}$

2. ¿Verdadero o falso?

a) Como $(-5)^2 = 25$, entonces $\sqrt{25} = -5$.

b) –5 es una raíz cuadrada de 25.

c) 81 tiene dos raíces cuadradas: 3 y –3.

d) 27 tiene dos raíces cúbicas: 3 y –3.

e) 7 tiene dos raíces cuartas: $\sqrt[4]{7}$ y $-\sqrt[4]{7}$.

f) $\sqrt{-4} = -2$ y $\sqrt{4} = 2$.

Radicales

En la expresión $\sqrt{12}$ no hay forma de suprimir la raíz si no es calculando su valor decimal aproximado. La única forma de expresarla de forma exacta es dejarla como está; es decir, con la raíz.

Las expresiones en las que aparecen raíces indicadas se llaman **radicales.**

Manejar con corrección y agilidad los radicales requiere un buen aprendizaje y un largo entrenamiento. Este curso vamos a aprender algunas de las reglas más sencillas, así como una serie de cautelas para evitar *lo que no se puede hacer*.

Algunas reglas para el manejo de radicales

- **Producto de radicales del mismo índice**

El producto de dos radicales con el mismo índice se puede poner bajo un único radical. Por ejemplo:

$\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3 \cdot 2} = \sqrt{6}$ $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{15} = \sqrt[3]{5 \cdot 15} = \sqrt[3]{75}$

Cálculo mental

Simplifica:

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$ b) $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{10}$

- **Extracción de factores fuera de una raíz**

Si el radicando descompuesto en factores tiene potencias de exponente igual o mayor que el índice de la raíz, algunos de ellos pueden salir fuera de la raíz.

Por ejemplo:

$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ $\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^4} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3}$

Cálculo mental

Descompón y extrae fuera del radical:

a) $\sqrt{50}$ b) $\sqrt[3]{24}$ c) $\sqrt[3]{2\,000}$

- **Potencia de un radical**

La potencia de un radical se puede simplificar si el exponente de la potencia es múltiplo del índice de la raíz. Por ejemplo:

$\left(\sqrt{2^3}\right)^4 = (2^3)^2 = 2^6$ $\left(\sqrt[4]{10}\right)^8 = 10^2$

Cálculo mental

Calcula el valor de estas potencias:

a) $\left(\sqrt{3}\right)^6$ b) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^6$ c) $\left(\sqrt[4]{5}\right)^{12}$

- **Suma y resta de radicales**

Dos radicales distintos no pueden sumarse si no es obteniendo sus expresiones decimales aproximadas. Solo pueden sumarse radicales idénticos. Por ejemplo:

$\left.\begin{array}{l}\sqrt{3}+\sqrt{2}\\ \sqrt{7}-\sqrt[3]{7}\end{array}\right\}$ Solo pueden realizarse de forma aproximada, o bien hay que dejarlas indicadas.

Sí pueden simplificarse las expresiones siguientes:

$7\sqrt{5} + 11\sqrt{5} - \sqrt{5} = 17\sqrt{5}$ $2\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{3} = 6\sqrt[3]{3}$

Cálculo mental

Simplifica:

a) $4\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - \sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{4} - 5\sqrt[3]{4} + 7\sqrt[3]{4}$

Piensa y practica

3. Simplifica las expresiones que puedas:

a) $8\sqrt{5} - 6\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{5} + 4\sqrt{5}$ c) $\sqrt[3]{25} - \sqrt{8}$

d) $\sqrt{5} - \sqrt[3]{5}$ e) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{7}$ f) $\sqrt{6} \cdot \sqrt[3]{7}$

g) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ h) $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{49}$ i) $\sqrt[3]{5} - \sqrt[6]{5}$

j) $\left(\sqrt{5}\right)^{10}$ k) $\left(\sqrt{6}\right)^7$ l) $\left(\sqrt[5]{7}\right)^{10}$

4. Extrae fuera del radical cuando sea posible.

a) $\sqrt{3^2 \cdot 5^4}$ b) $\sqrt[3]{2^5 \cdot 3^2}$ c) $\sqrt[4]{5^5}$

d) $\sqrt{180}$ e) $\sqrt{720}$ f) $\sqrt[3]{375}$

5. Opera y simplifica lo máximo posible:

a) $\sqrt{15} \cdot \sqrt{20}$ b) $\sqrt[5]{6} \cdot \sqrt[5]{16}$ c) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{54} \cdot \left(\sqrt[6]{3}\right)^{12}$

Sugerencias

- En cursos anteriores, los alumnos y las alumnas han estudiado las raíces cuadradas y cúbicas y su relación con las potencias. También, cuáles son los números que llamamos cuadrados perfectos y que los números negativos no tienen raíz cuadrada. Antes de generalizar la definición de raíz para cualquier índice, conviene repasar estos conceptos.
- Planteamos aquí el concepto de raíz enésima, asociada a la potencia enésima, que aplicaremos en los casos en los que el radicando se puede expresar como una potencia cuyo exponente es múltiplo del índice de la raíz (raíces exactas).

  La forma de averiguar si una raíz es exacta será descomponer el radicando en factores primos y ver si sus exponentes son múltiplos del índice de la raíz.
- Es importante destacar la existencia de dos raíces cuando el índice es par y el radicando positivo, y en su justificación, insistiendo en que la notación $\sqrt{4}$ se refiere solo a la raíz cuadrada positiva de 4. Si queremos expresar la negativa debemos poner $-\sqrt{4}$.
- Después de aplicar la definición de raíz enésima en los casos en que se obtiene un número racional (raíces exactas) tratamos a continuación otras raíces, aquellas cuya única forma de expresarlas de forma exacta es dejarlas como están, con la raíz correspondiente. Llegamos así a la definición de radical.
- No es objetivo de este curso hacer un estudio completo de los radicales. Solo se pretende dar algunas reglas sencillas sobre su manejo para que los estudiantes no cometan errores al encontrárselos y puedan simplificar algunas expresiones en las que aparecen.
- El producto de radicales solo lo aplicamos cuando los radicales tienen el mismo índice, y con esto y la potencia de un radical podemos extraer factores del radicando y comprobar si dos radicales son iguales para poder sumarlos.

Refuerzo y Ampliación

Se recomiendan:

- Del cuaderno n.º 1 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:

  Refuerzo: Ejercicio 1 de la pág. 20. Ejercicio 2 de la pág. 21.

  Ampliación: Ejercicios 1 a 6 de las páginas 23 y 24.
- Del fotocopiable INCLUSIÓN Y ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD:

  Refuerzo: Ejercicio 2 de Practica, ficha A. Ejercicio 4 de Practica, ficha B.

  Ampliación: Ejercicio 5 de Aplica, ficha B.

Soluciones de "Piensa y practica"

1 a) 2 b) 6 c) 120 d) 1/2

e) 2/3 f) 3/2 g) $1{,}2 \cdot 10^7$ h) $4{,}5 \cdot 10^{-6}$

2 a) F b) V c) F

d) F e) V f) F

3 a) Queda igual. b) $7\sqrt{5}$ c) Queda igual.

d) Queda igual. e) $\sqrt{42}$ f) Queda igual.

g) 4 h) 7 i) Queda igual.

j) 5^5 k) $6^3\sqrt{6}$ l) 7^2

4 a) $3 \cdot 5^2$ b) $2\sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2}$ c) $5\sqrt[4]{5}$

d) $6\sqrt{5}$ e) $12\sqrt{5}$ f) $5\sqrt[3]{3}$

5 a) $10\sqrt{3}$ b) $2\sqrt[5]{3}$ c) $3^3\sqrt[3]{2 \cdot 3^2}$

4 Números racionales e irracionales

Números racionales

Recordemos lo visto en apartados anteriores:

Los **números racionales** son los que se pueden poner en forma de fracción. Es decir, los que se pueden obtener como *cociente de dos números enteros.*

Además de los propios números enteros, son racionales aquellos cuya *expresión decimal es exacta o periódica.*

El conjunto de todos los números racionales se designa $\mathbb{Q}$.

$$\text{RACIONALES } \mathbb{Q} \begin{cases} \text{ENTEROS } \mathbb{Z} \begin{cases} \text{NATURALES, } \mathbb{N} \to 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \\ \text{NATURALES NEGATIVOS} \to -1, -2, -3, -4, -5, \dots \end{cases} \\ \text{FRACCIONARIOS} \begin{cases} \text{DECIMALES EXACTOS} \to 0{,}84; 17{,}23; \dots \\ \text{DECIMALES PERIÓDICOS} \to 2{,}\widehat{3}; 0{,}0\widehat{84}; \dots \end{cases} \end{cases}$$

Números irracionales

Los números no racionales se llaman **irracionales.**

Son números irracionales aquellos cuya expresión decimal no es exacta ni periódica. Entre ellos están:

— Todas las raíces no exactas. Por ejemplo:

$\sqrt{2} = 1{,}41421256\dots$ $\quad$ $\sqrt[3]{4} = 1{,}58740105\dots$

— El número $\pi = 3{,}14159265\dots$

Hay otros infinitos números irracionales.

En la web

- Representación de números irracionales.
- Clasifica números.
- Empareja expresiones con el mismo valor.

Ejercicio resuelto

Situar cada uno de los siguientes números en los casilleros correspondientes. Cada uno puede estar en más de un casillero:

$$24;\ 0{,}71;\ 0{,}7\widehat{1};\ -5;\ \frac{3}{5};\ \sqrt{7};\ -\sqrt{9};\ \frac{28}{7};\ \pi - 1$$

NATURALES, $\mathbb{N}$	24; 28/7 = 4
ENTEROS, $\mathbb{Z}$	24; –5; $-\sqrt{9}$ = –3; 28/7 = 4
FRACCIONARIOS	0,71; $0{,}7\widehat{1}$; 3/5
RACIONALES, $\mathbb{Q}$	24; 0,71; $0{,}7\widehat{1}$; –5; 3/5; $-\sqrt{9}$ = –3; 28/7 = 4
IRRACIONALES	$\sqrt{7}$; $\pi - 1$

Piensa y practica

1. Sitúa cada uno de los siguientes números en los casilleros correspondientes. Ten en cuenta que cada número puede estar en más de un casillero. (Hazlo en tu cuaderno).

$$107;\ 3{,}95;\ 3{,}\widehat{95};\ -7;\ \sqrt{20};\ \frac{36}{9};\ \sqrt{\frac{4}{9}};\ -\sqrt{36};\ \frac{7}{3};\ \pi - 3$$

NATURALES, $\mathbb{N}$	
ENTEROS, $\mathbb{Z}$	
FRACCIONARIOS	
RACIONALES, $\mathbb{Q}$	
IRRACIONALES	

34

Ejercicios y problemas resueltos

UNIDAD 2

1. Potencias

Aplicar las propiedades de las potencias para simplificar.

a) $\left(\frac{1}{3} - 1\right)^{-1} + 3^{-2}\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

b) $\dfrac{50^2 \cdot 54^{-2} \cdot 3}{60^3 \cdot 48^{-3}}$

Hazlo tú. Simplifica:

$$\frac{2^7 \cdot 6^5 \cdot 3^4}{18^4 \cdot 12^3}$$

a) $\left(\frac{-2}{3}\right)^{-1} + \left(3 \cdot \frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{-3}{2} + 2^{-2} = \frac{-3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{-5}{4}$

b) Descomponemos en factores el numerador y el denominador:

$$\frac{(2 \cdot 5^2)^2 \cdot (2 \cdot 3^3)^{-2} \cdot 3}{(2^2 \cdot 3 \cdot 5)^3 \cdot (2^4 \cdot 3)^{-3}} \overset{(1)}{=} \frac{(2^2 \cdot 5^4) \cdot (2^{-2} \cdot 3^{-6}) \cdot 3}{(2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3) \cdot (2^{-12} \cdot 3^{-3})} \overset{(2)}{=} \frac{2^0 \cdot 5^4 \cdot 3^{-5}}{2^{-6} \cdot 5^3 \cdot 3^0} =$$

$$= 2^6 \cdot 5 \cdot 3^{-5} = \frac{2^6 \cdot 5}{3^5} = \frac{320}{243}$$

Aplicamos las propiedades siguientes:

(1) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ $\quad (a^n)^p = a^{np}$ $\quad$ (2) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $\quad a^n : a^m = a^{n-m}$

2. Notación científica

Calcular el valor de n en cada caso:

a) $0{,}007 \cdot 10^{-8} = 7 \cdot 10^n$

b) $20 \cdot 10^{-4} + 15 \cdot 10^{-3} = 1{,}7 \cdot 10^n$

c) $(0{,}36 \cdot 10^{-6}) \cdot (0{,}2 \cdot 10^5) : (3\,000)^2 = 8 \cdot 10^n$

a) Multiplicamos y dividimos por 10^3: $7 \cdot 10^{-11} \to n = -11$

b) Dividimos y multiplicamos el primer sumando por 10:

$$2 \cdot 10^{-3} + 15 \cdot 10^{-3} = 17 \cdot 10^{-3} = 1{,}7 \cdot 10^{-2} \to n = -2$$

c) Expresamos cada término en notación científica:

$$(3{,}6 \cdot 10^{-7}) \cdot (2 \cdot 10^4) : (9 \cdot 10^6) = (3{,}6 \cdot 2 : 9) \cdot 10^{-7+4-6} =$$
$$= 0{,}8 \cdot 10^{-9} = 8 \cdot 10^{-10} \to n = -10$$

Hazlo tú. Calcula y da el resultado en notación científica.

$$(54 \cdot 10^4 : 0{,}6 \cdot 10^3) + 3{,}2 \cdot 10^4$$

3. Problema con notación científica

Una nave espacial sale de la Tierra hacia un planeta situado a 10^6 km. Después de recorrer 1/4 de su trayecto, pierde el contacto por radio y lo recupera cuando está a 10^5 km de su destino. ¿Cuántos kilómetros recorrió sin radio?

Antes de perder el contacto por radio, ha recorrido:

$$\frac{1}{4}10^6 = 0{,}25 \cdot 10^6 = 2{,}5 \cdot 10^5 \text{ km}$$

Cuando lo recupera, le faltan 10^5 km para llegar al final. Por tanto, ya lleva:

$$10^6 - 10^5 = 10 \cdot 10^5 - 10^5 = (10-1)10^5 = 9 \cdot 10^5 \text{ km}$$

Si a esta cantidad le restamos lo que recorrió antes de perder el contacto, tendremos la distancia pedida:

$9 \cdot 10^5 - 2{,}5 \cdot 10^5 = 6{,}5 \cdot 10^5$ km son los que recorrió sin radio

Hazlo tú. Si pierde el contacto después de recorrer la mitad de su trayecto, y lo recupera a 10^4 km del planeta, ¿cuántos kilómetros recorrió sin radio?

4. Radicales

Simplificar estas expresiónes:

a) $\sqrt{175a} \cdot \sqrt{112a}$

b) $\left(\sqrt[3]{4}\right)^6$

Hazlo tú. Simplifica:

a) $\sqrt{8} \cdot 3\sqrt{2}$ $\qquad$ b) $\sqrt[5]{224}$

a) Extraemos factores fuera de los radicales:

$$\sqrt{175a} = \sqrt{5^2 \cdot 7a} = 5\sqrt{7a}$$
$$\sqrt{112a} = \sqrt{2^4 \cdot 7a} = 4\sqrt{7a}$$

Multiplicamos: $5\sqrt{7a} \cdot 4\sqrt{7a} = 20\sqrt{7^2 \cdot a^2} = 20 \cdot 7 \cdot a = 140a$

b) $\sqrt[3]{4^6} = \sqrt[3]{2^{12}} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

35

Sugerencias

- En la unidad anterior estudiamos que los números enteros y los decimales exactos o periódicos pueden expresarse en forma de fracción. Es ahora el momento, después de estudiar nuevas formas de expresar números, cuando debe quedar muy claro el concepto de número racional, como aquel que puede ponerse como cociente de dos enteros.
- Con el cálculo de raíces no exactas, nos encontramos con números de infinitas cifras decimales que no se repiten periódicamente. Son los números irracionales, aquellos que no se pueden expresar como fracción.
- Debe prestarse de nuevo atención a las sucesivas ampliaciones del campo numérico y a las relaciones de inclusión entre los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$. Los esquemas y diagramas son la herramienta más eficaz para presentar estas cuestiones.
- Las actividades deben centrarse en la clasificación de números, de forma que los alumnos y las alumnas asimilen que un mismo número puede ser a la vez natural, entero y racional, y que un número irracional no puede ser ni natural, ni entero, ni racional.
- En la página de "Ejercicios y problemas resueltos" se muestran estrategias, sugerencias, pistas y formas de pensar que les serán útiles para enfrentarse a la resolución de las actividades que se les proponen a continuación o en las páginas finales de la unidad. Su fin último es que sean capaces de reproducir procedimientos similares cada vez que se encuentren ante una situación problemática.

ANOTACIONES

Soluciones de "Piensa y practica"

1

NATURALES, $\mathbb{N}$	107; 36/9 = 4
ENTEROS, $\mathbb{Z}$	107; –7; 36/9 = 4; $-\sqrt{36}$ = –6
FRACCIONARIOS	3,95; $3{,}\widehat{95}$; $\sqrt{4/9}$ = 2/3; 7/3
RACIONALES, $\mathbb{Q}$	107; 3,95, $3{,}\widehat{95}$; –7; 36/9 = 4; $\sqrt{4/9}$ = 2/3; $-\sqrt{36}$ = –6; 7/3
IRRACIONALES	$\sqrt{20}$; $\pi - 3$

Soluciones de "Hazlo tú"

1 $\dfrac{2^2}{3^2} = \dfrac{4}{9}$

2 $3{,}29 \cdot 10^4$

3 Recorrió sin radio $4{,}9 \cdot 10^5$ km.

4 a) 12 $\qquad$ b) $2\sqrt[5]{7}$

ANOTACIONES

Ejercicios y problemas

Practica

Potencias

1. Calcula las potencias siguientes:

a) $(-3)^3$ b) $(-2)^4$ c) $(-2)^{-3}$
d) -3^2 e) -4^{-1} f) $(-1)^{-2}$
g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ h) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$ i) $\left(\frac{4}{3}\right)^{0}$

2. Expresa como una potencia de base 2 o 3.

a) 64 b) 243 c) $\frac{1}{32}$ d) $\frac{1}{3}$
e) $-\frac{1}{27}$ f) $\frac{3^4}{3^{-3}}$ g) $\frac{2^{-5}}{2^3}$ h) $\left(\frac{2^{-3}}{2^{-2}}\right)^{-1}$

3. Calcula.

a) $\left(\frac{3}{2}-1\right)^{-3}:\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ b) $\left(2+\frac{1}{3}\right)^{-2}\cdot 3^{-2}$

4. Expresa como potencia única.

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}:\left(\frac{3}{4}\right)^{2}$ b) $\frac{2^5\cdot 2^{-7}}{2^{-4}}$
c) $\left[\left(\frac{1}{2}+1\right)^{-1}\right]^3$ d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3}:\left(\frac{1}{4}\right)^{2}$
e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\cdot\left(\frac{-3}{2}\right)^{4}$ f) $\frac{3^{-1}}{5\cdot 15^2}$

5. Simplifica.

a) $\frac{2^3\cdot(-3)^2\cdot 4^2}{6^3\cdot 9^2}$ b) $\frac{2^{-4}\cdot 4^2\cdot 3\cdot 9^{-1}}{2^{-5}\cdot 8\cdot 3^2}$
c) $\frac{4ab}{9}:\frac{b^2}{3a}$ d) $(6a)^{-1}:(3a^{-2})^{-2}$
e) $(a^{-1}b^2)^2\cdot(ab^{-2})^{-1}$ f) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}(a^{-1})^{-2}$

Notación científica

6. Escribe estos números con todas sus cifras:

a) $4\cdot 10^7$ b) $5\cdot 10^{-4}$ c) $9{,}73\cdot 10^8$
d) $8{,}5\cdot 10^{-6}$ e) $3{,}8\cdot 10^{10}$ f) $1{,}5\cdot 10^{-5}$

7. Escribe estos números en notación científica:

a) 13 800 000 b) 0,000005 c) 4 800 000 000
d) 0,0000173 e) 50 030 000 f) 0,002007

8. Di el valor de n en cada caso:

a) $3\,570\,000 = 3{,}57\cdot 10^n$
b) $0{,}000083 = 8{,}3\cdot 10^n$
c) $157{,}4\cdot 10^3 = 1{,}574\cdot 10^n$
d) $93{,}8\cdot 10^{-5} = 9{,}38\cdot 10^n$

9. Completa estas igualdades:

a) $836\cdot 10^3 = 8{,}36\cdot 10^{\cdots}$
b) $0{,}012\cdot 10^4 = \ldots\cdot 10^2$
c) $\ldots\cdot 10^{-3} = 0{,}0834\cdot 10^3$
d) $73{,}3\cdot 10^2 = \ldots\cdot 10^{-1}$

10. Expresa en notación científica.

a) Distancia Tierra-Sol: 150 000 000 km
b) Peso de un grano de arroz: 0,000027 kg
c) Diámetro de cierto virus: 0,00000008 m
d) Emisión de CO_2 en un año: 54 900 000 000 kg

11. Calcula y comprueba con la calculadora.

a) $(2\cdot 10^5)\cdot(3\cdot 10^{12})$ b) $(1{,}5\cdot 10^{-7})\cdot(2\cdot 10^{-5})$
c) $(3{,}4\cdot 10^{-8})\cdot(2\cdot 10^{17})$ d) $(8\cdot 10^{12}):(2\cdot 10^{17})$
e) $(9\cdot 10^{-7}):(3\cdot 10^{7})$ f) $(4{,}4\cdot 10^{8}):(2\cdot 10^{-5})$

12. Calcula, expresa el resultado en notación científica y comprueba con la calculadora.

a) $(2{,}5\cdot 10^7)\cdot(8\cdot 10^3)$ b) $(5\cdot 10^{-3}):(8\cdot 10^5)$
c) $(7{,}4\cdot 10^{13})\cdot(5\cdot 10^{-6})$ d) $(1{,}2\cdot 10^{11}):(2\cdot 10^{-3})$

13. Expresa en notación científica y calcula:

a) $\frac{0{,}00054\cdot 12\,000\,000}{250\,000\cdot 0{,}00002}$ b) $\frac{1\,320\,000\cdot 25\,000}{0{,}000002\cdot 0{,}0011}$
c) $\frac{0{,}000015\cdot 0{,}000004}{1\,250\,000\cdot 600\,000}$ d) $(0{,}0008)^2\cdot(30\,000)^2$

14. Efectúa y comprueba con la calculadora.

a) $3{,}6\cdot 10^{12}-4\cdot 10^{11}$ b) $5\cdot 10^{9}+8{,}1\cdot 10^{10}$
c) $8\cdot 10^{-8}-5\cdot 10^{-9}$ d) $5{,}32\cdot 10^{-4}+8\cdot 10^{-6}$

15. Efectúa y escribe el resultado con todas las cifras.

a) $5{,}3\cdot 10^{11}-1{,}2\cdot 10^{12}+7{,}2\cdot 10^{10}$
b) $4{,}2\cdot 10^{-6}-8{,}2\cdot 10^{-7}+1{,}8\cdot 10^{-5}$
c) $(2{,}25\cdot 10^{22})\cdot(4\cdot 10^{-15}):(3\cdot 10^{-3})$
d) $(1{,}4\cdot 10^{-7})^2:(5\cdot 10^{-5})$

En la web
- Practica operaciones con potencias sencillas.
- Practica operaciones con potencias más complicadas.

36

Aprendizaje cooperativo

Para estas páginas, y para todas aquellas destinadas a reforzar la destreza operativa, se sugiere la siguiente metodología:

- El alumnado se distribuye en pequeños grupos (dos, tres por grupo).
- Resuelven una serie de expresiones individualmente y, después, contrastan las soluciones y los procesos.
- Si hay discrepancias, deben descubrir los errores. Si no saben resolver las dudas o no se ponen de acuerdo, actuará el docente.

Soluciones de "Ejercicios y problemas"

1 a) –27 b) 16 c) –1/8
d) –9 e) –1/4 f) 1
g) 8 h) 4 i) 1

2 a) 2^6 b) 3^5 c) 2^{-5} d) 3^{-1}
e) -3^{-3} f) 3^7 g) 2^{-8} h) 2

3 a) 2 b) 1/49

4 a) $(4/3)^5$ b) 2^2 c) $(2/3)^3$
d) 2 e) $(3/2)^2$ f) $(1/15)^3$

5 a) $\frac{2^4}{3^5}$ b) $\frac{2^2}{3^3}$ c) $\frac{4a^2}{3b}$
d) $\frac{3}{2a^5}$ e) $\frac{b^6}{a^3}$ f) $\frac{b^3}{a}$

6 a) 40 000 000 b) 0,0005
c) 973 000 000 d) 0,0000085
e) 38 000 000 000 f) 0,000015

7 a) $1{,}38\cdot 10^7$ b) $5\cdot 10^{-6}$ c) $4{,}8\cdot 10^9$
d) $1{,}73\cdot 10^{-5}$ e) $5{,}003\cdot 10^7$ f) $2{,}007\cdot 10^{-3}$

8 a) 6 b) –5 c) 5 d) –4

9 a) 5 b) 1,2 c) 83 400 d) 73 300

10 a) $1{,}5\cdot 10^8$ km b) $2{,}7\cdot 10^{-5}$ kg
c) $8\cdot 10^{-8}$ m d) $5{,}49\cdot 10^{10}$ kg

11 a) $6\cdot 10^{17}$ b) $3\cdot 10^{-12}$ c) $6{,}8\cdot 10^9$
d) $4\cdot 10^{-5}$ e) $3\cdot 10^{-14}$ f) $2{,}2\cdot 10^{13}$

12 a) $2\cdot 10^{11}$ b) $6{,}25\cdot 10^{-9}$
c) $3{,}7\cdot 10^8$ d) $6\cdot 10^{13}$

13 a) $1{,}296\cdot 10^3$ b) $1{,}5\cdot 10^{19}$
c) $8\cdot 10^{-23}$ d) $5{,}76\cdot 10^2$

14 a) $3{,}2\cdot 10^{12}$ b) $8{,}6\cdot 10^{10}$
c) $7{,}5\cdot 10^{-8}$ d) $5{,}4\cdot 10^{-4}$

15 a) 598 000 000 000 b) 0,00002138
c) 30 000 000 000 d) 0,000000000392

ANOTACIONES

Raíces y radicales

16. Halla, cuando sea posible, las raíces siguientes:

a) $\sqrt[4]{16}$ b) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ d) $\sqrt[5]{-1}$

e) $\sqrt[3]{216}$ f) $\sqrt[7]{-128}$ g) $\sqrt[5]{-243}$ h) $\sqrt[6]{4\,096}$

i) $\sqrt[6]{64}$ j) $\sqrt[3]{-8}$ k) $\sqrt[4]{625}$

l) $\sqrt{-8}$ m) $\sqrt[4]{625/16}$ n) $\sqrt[5]{-1}$

17. Saca del radical los factores que sea posible.

a) $\sqrt{2^2 \cdot 5^3}$ b) $\sqrt[3]{2^6 \cdot 7^3}$ c) $\sqrt[4]{2^2 \cdot 3^6}$

d) $\sqrt[3]{27 \cdot a \cdot b^3}$ e) $\sqrt[4]{16a^5 \cdot b}$ f) $\sqrt[5]{32 \cdot a^2 \cdot b^{10}}$

18. Extrae de cada radical los factores que sea posible:

a) $\sqrt[4]{32}$ b) $\sqrt[3]{81}$ c) $\sqrt[3]{200}$

d) $\sqrt{50}$ e) $\sqrt[4]{144}$ f) $\sqrt[3]{250}$

g) $\sqrt[5]{64}$ h) $\sqrt[3]{243}$ i) $\sqrt{4a^3}$

19. Simplifica si es posible.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{16}$ c) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{5}$

d) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt{2}$ e) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}$ f) $\sqrt{10} \cdot \sqrt[3]{6}$

20. Simplifica.

a) $\left(\sqrt[4]{2}\right)^4$ b) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^6$ c) $\left(\sqrt[6]{2^2}\right)^3$

d) $\sqrt[3]{10}\,\sqrt[3]{1000}$ e) $\sqrt[5]{2}\,\sqrt[5]{16}$ f) $\sqrt[3]{9}\,\sqrt[3]{81}$

21. Simplifica las expresiones que puedas, y en las restantes, indica por qué no se pueden simplificar.

a) $7\sqrt{2} - 4\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ c) $4\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$

d) $\sqrt{6} - 3\sqrt{2}$ e) $2\sqrt{5} - \frac{1}{3}\sqrt{5}$ f) $\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

22. Efectúa.

a) $\sqrt{50} + \sqrt{72} - 10\sqrt{2}$ b) $\sqrt{80} - \sqrt{45} - \sqrt{20}$

c) $-\sqrt{48} + 3\sqrt{75} - \sqrt{108}$ d) $\sqrt{175} + \sqrt{28} - 5\sqrt{63}$

Aplica lo aprendido

23. Completa en notación científica.

a) 27 km^2 = … cm^2 b) 50 cm^3 = … m^3

c) 0,8 ha = … km^2 d) 1 200 l = … mm^3

e) 180 µ = … dm (1 µ = 10^{-6} m) f) 0,075 Å = … µ (1Å = 10^{-10} m)

24. Observa las masas de estos planetas:

Tierra: $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg Marte: $6{,}42 \cdot 10^{23}$ kg

Júpiter: $1{,}90 \cdot 10^{27}$ kg

a) ¿Cuántos kilos pesa más la Tierra que Marte?

b) ¿Cuántas veces pesa más Júpiter que Marte?

25. La galaxia M87, que está a 50 millones de años-luz de la Tierra, tiene un agujero negro cuyo diámetro es 60 años-luz y cuya masa es dos mil millones de veces la masa del Sol.

a) Calcula la masa del agujero negro en kilogramos. (La masa del Sol es, aproximadamente, $2 \cdot 10^{30}$ kg).

b) Expresa en kilómetros la distancia de esa galaxia a la Tierra y el diámetro del agujero negro.

Reflexiona sobre la teoría

26. ¿Verdadero o falso? Justifica y pon ejemplos.

a) La potencia de un número negativo puede ser igual a 1.

b) Si $x < 0$, entonces $-x^3 > 0$.

c) $-x^2$ es siempre un número positivo.

d) El cubo de un número negativo es siempre menor que dicho número.

27. Si $a^2 = b^2$, ¿qué podemos afirmar de a y b?

28. Ordena los números n, n^2, $\sqrt{n}$ y $1/n$ en los siguientes casos: a) Si $n > 1$. b) Si $0 < n < 1$.

29. Indica cuáles de las siguientes raíces son racionales y cuáles irracionales:

a) $\sqrt{64}$ b) $\sqrt[3]{64}$ c) $\sqrt[5]{64}$

d) $\sqrt{100}$ e) $\sqrt[3]{100}$ f) $\sqrt{1/4}$

30. Justifica cuál debe ser el valor de a, en cada caso, para que se verifique la igualdad:

a) $a^3 = 2^6$ b) $a^{-1} = 2$ c) $\sqrt{a} = \frac{4}{5}$

d) $\sqrt[4]{a} = 1$ e) $a^{-2} = \frac{1}{4}$ f) $a^{-5} = -1$

31. ¿Por qué no se puede hallar la raíz de índice par de un número negativo?

Calcula, cuando sea posible, estas raíces:

a) $\sqrt[3]{-27}$ b) $-\sqrt{64}$ c) $\sqrt[4]{-16}$ d) $\sqrt[5]{-1}$

37

Soluciones de “Ejercicios y problemas”

16 a) 2 b) 4/5 c) 1/2

d) –1 e) 6 f) –2

g) –3 h) 4 i) 2

j) –2 k) 5 l) No existe.

m) 5/2 n) –1

17 a) $2 \cdot 5 \cdot \sqrt{5}$ b) $2^2 \cdot 7$ c) $3\sqrt[4]{2^2 \cdot 3^2}$

d) $3b\sqrt[3]{a}$ e) $2a\sqrt[4]{a \cdot b}$ f) $2b^2\sqrt[5]{a^2}$

18 a) $2\sqrt[4]{2}$ b) $3\sqrt[3]{3}$ c) $2\sqrt[3]{5^2}$

d) $5\sqrt{2}$ e) $2\sqrt[4]{3^2}$ f) $5\sqrt[3]{2}$

g) $2\sqrt[5]{2}$ h) $3\sqrt[3]{3^2}$ i) $2a\sqrt{a}$

19 a) $\sqrt{16} = 4$ b) $\sqrt{80}$

c) $\sqrt[3]{20}$ d) No es posible.

e) $\sqrt[4]{81} = 3$ f) No es posible.

20 a) 2 b) 2^2 c) 2

d) 10 e) 2 f) 9

21 a) $3\sqrt{2}$ b) No se puede.

c) $-\sqrt{3}$ d) No se puede.

e) $\frac{5}{3}\sqrt{5}$ f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

22 a) $\sqrt{2}$ b) $-\sqrt{5}$ c) $5\sqrt{3}$ d) $-8\sqrt{7}$

23 a) $2{,}7 \cdot 10^{11}$ b) $5 \cdot 10^{-5}$ c) $8 \cdot 10^{-3}$

d) $1{,}2 \cdot 10^{9}$ e) $1{,}8 \cdot 10^{-3}$ f) $7{,}5 \cdot 10^{-6}$

24 a) $5{,}338 \cdot 10^{24}$ kg

b) Aproximadamente, 3 000 veces más.

25 a) $4 \cdot 10^{39}$ kg

b) Distancia de M87 a la Tierra: $4{,}73 \cdot 10^{20}$ km. Diámetro del agujero negro: $5{,}676 \cdot 10^{14}$.

26 a) V b) V c) F d) F

27 $a = b$ o $a = -b$

28 a) $1/n < \sqrt{n} < n < n^2$ b) $n^2 < n < \sqrt{n} < 1/n$

29 Racionales: a), b), d), f). Irracionales: c), e).

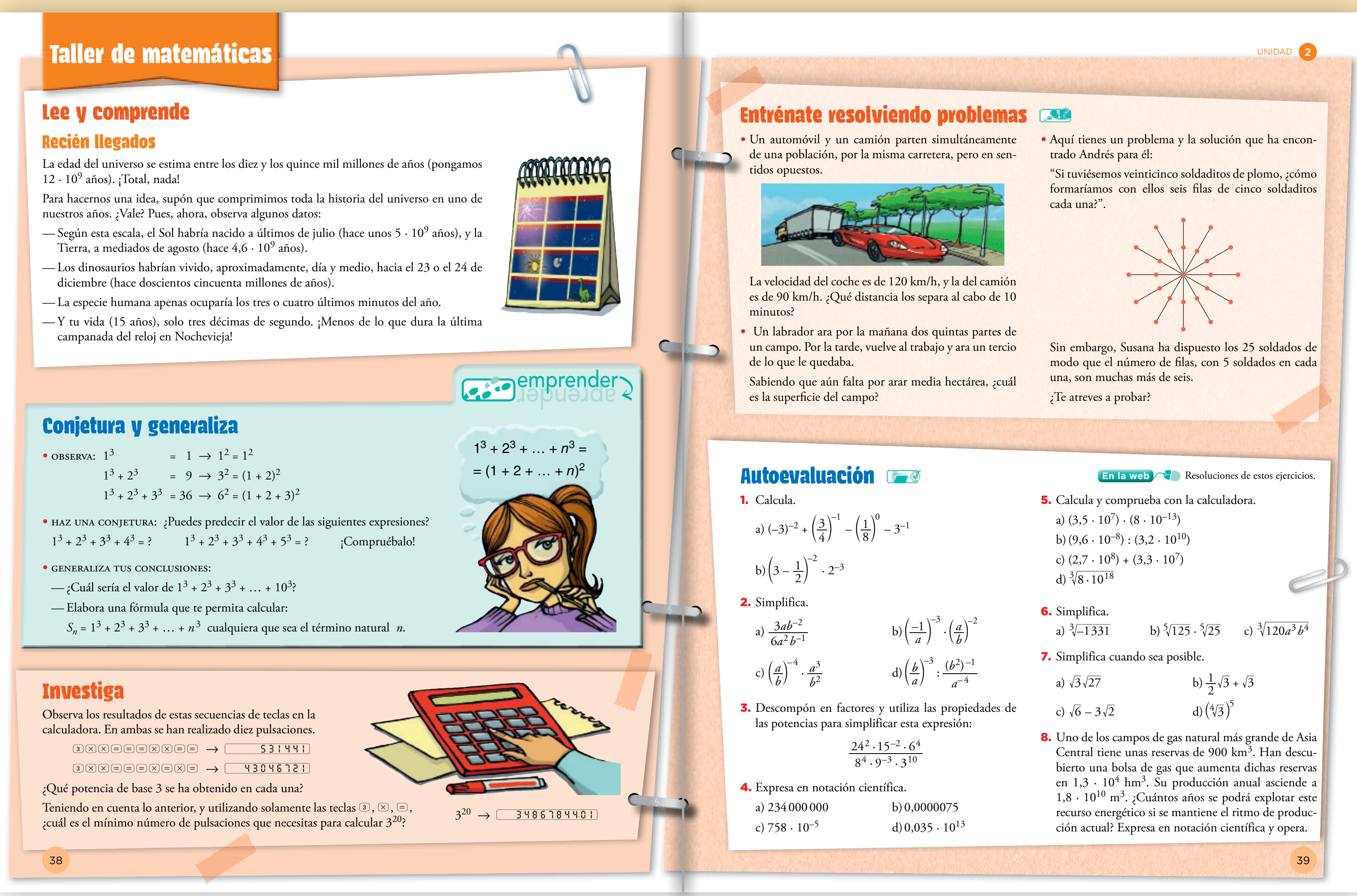
30 a) 4 b) 1/2 c) 16/25

d) 1 e) 2 f) –1

31 Porque al elevar un número a una potencia par se obtiene un número positivo.

a) –3 b) –8 c) No existe. d) –1

ANOTACIONES



Taller de matemáticas

Lee y comprende

Recién llegados

La edad del universo se estima entre los diez y los quince mil millones de años (pongamos $12 \cdot 10^9$ años). ¡Total, nada!

Para hacernos una idea, supón que comprimimos toda la historia del universo en uno de nuestros años. ¿Vale? Pues, ahora, observa algunos datos:

— Según esta escala, el Sol habría nacido a últimos de julio (hace unos $5 \cdot 10^9$ años), y la Tierra, a mediados de agosto (hace $4{,}6 \cdot 10^9$ años).

— Los dinosaurios habrían vivido, aproximadamente, día y medio, hacia el 23 o el 24 de diciembre (hace doscientos cincuenta millones de años).

— La especie humana apenas ocuparía los tres o cuatro últimos minutos del año.

— Y tu vida (15 años), solo tres décimas de segundo. ¡Menos de lo que dura la última campanada del reloj en Nochevieja!

emprender aprender

Conjetura y generaliza

- OBSERVA: $1^3 = 1 \to 1^2 = 1^2$
  $1^3 + 2^3 = 9 \to 3^2 = (1 + 2)^2$
  $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 \to 6^2 = (1 + 2 + 3)^2$
- HAZ UNA CONJETURA: ¿Puedes predecir el valor de las siguientes expresiones?
  $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = ?$ $\quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = ?$ ¡Compruébalo!
- GENERALIZA TUS CONCLUSIONES:
  — ¿Cuál sería el valor de $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 10^3$?
  — Elabora una fórmula que te permita calcular:
  $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ cualquiera que sea el término natural n.

Investiga

Observa los resultados de estas secuencias de teclas en la calculadora. En ambas se han realizado diez pulsaciones.

3 × × = = = × × = = → 531441

3 × × = = = × = × = → 43046721

¿Qué potencia de base 3 se ha obtenido en cada una?

Teniendo en cuenta lo anterior, y utilizando solamente las teclas 3, ×, =, ¿cuál es el mínimo número de pulsaciones que necesitas para calcular 3^{20}?

$3^{20} \to 3486784401$

38

UNIDAD 2

Entrénate resolviendo problemas

- Un automóvil y un camión parten simultáneamente de una población, por la misma carretera, pero en sentidos opuestos.

  La velocidad del coche es de 120 km/h, y la del camión es de 90 km/h. ¿Qué distancia los separa al cabo de 10 minutos?

- Un labrador ara por la mañana dos quintas partes de un campo. Por la tarde, vuelve al trabajo y ara un tercio de lo que le quedaba.

  Sabiendo que aún falta por arar media hectárea, ¿cuál es la superficie del campo?

- Aquí tienes un problema y la solución que ha encontrado Andrés para él:

  "Si tuviésemos veinticinco soldaditos de plomo, ¿cómo formaríamos con ellos seis filas de cinco soldaditos cada una?".

  Sin embargo, Susana ha dispuesto los 25 soldados de modo que el número de filas, con 5 soldados en cada una, son muchas más de seis.

  ¿Te atreves a probar?

Autoevaluación

En la web Resoluciones de estos ejercicios.

1. Calcula.

a) $(-3)^{-2} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{8}\right)^{0} - 3^{-1}$

b) $\left(3 - \frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot 2^{-3}$

2. Simplifica.

a) $\frac{3ab^{-2}}{6a^2b^{-1}}$ $\quad$ b) $\left(\frac{-1}{a}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-2}$

c) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-4} \cdot \frac{a^3}{b^2}$ $\quad$ d) $\left(\frac{b}{a}\right)^{-3} : \frac{(b^2)^{-1}}{a^{-4}}$

3. Descompón en factores y utiliza las propiedades de las potencias para simplificar esta expresión:

$$\frac{24^2 \cdot 15^{-2} \cdot 6^4}{8^4 \cdot 9^{-3} \cdot 3^{10}}$$

4. Expresa en notación científica.

a) 234 000 000 $\quad$ b) 0,0000075

c) $758 \cdot 10^{-5}$ $\quad$ d) $0{,}035 \cdot 10^{13}$

5. Calcula y comprueba con la calculadora.

a) $(3{,}5 \cdot 10^7) \cdot (8 \cdot 10^{-13})$

b) $(9{,}6 \cdot 10^{-8}) : (3{,}2 \cdot 10^{10})$

c) $(2{,}7 \cdot 10^8) + (3{,}3 \cdot 10^7)$

d) $\sqrt[3]{8 \cdot 10^{18}}$

6. Simplifica.

a) $\sqrt[3]{-1331}$ $\quad$ b) $\sqrt[5]{125} \cdot \sqrt[5]{25}$ $\quad$ c) $\sqrt[3]{120a^3b^4}$

7. Simplifica cuando sea posible.

a) $\sqrt{3}\sqrt{27}$ $\quad$ b) $\frac{1}{2}\sqrt{3} + \sqrt{3}$

c) $\sqrt{6} - 3\sqrt{2}$ $\quad$ d) $\left(\sqrt[4]{3}\right)^5$

8. Uno de los campos de gas natural más grande de Asia Central tiene unas reservas de 900 km³. Han descubierto una bolsa de gas que aumenta dichas reservas en $1{,}3 \cdot 10^4$ hm³. Su producción anual asciende a $1{,}8 \cdot 10^{10}$ m³. ¿Cuántos años se podrá explotar este recurso energético si se mantiene el ritmo de producción actual? Expresa en notación científica y opera.

39

Lee y comprende

Recién llegados

- La actividad, además de ofrecer una perspectiva de las edades del universo, del Sol, de la Tierra y de la especie humana, comparándolas y mostrando la brevedad de nuestra presencia en el planeta, muestra un ejemplo de la utilidad de la notación científica para expresar números grandes.

Conjetura y generaliza

- Observar, analizar, conjeturar, validar conjeturas y generalizar son tareas imprescindibles en los procesos de investigación. Y, por tanto, son hábitos que ha de adquirir el estudiante en el ámbito de aprender a aprender.

Soluciones

- $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1 + 2 + 3 + 4)^2 = 10^2 = 100$
  $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2 = 15^2 = 225$
- $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 10^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + 10)^2 = 55^2 = 3025$
  $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$

Investiga

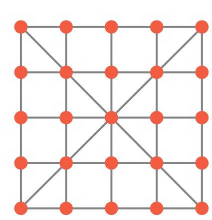
- Con esta actividad, los estudiantes profundizarán en las propiedades de las potencias y mejorarán en el uso de la calculadora.
- En una primera fase, nos aseguraremos de que se comprende la lógica de los resultados obtenidos.

Soluciones

- 3^{12} y 3^{16}
- Se puede calcular con 11 pulsaciones.

Entrénate resolviendo problemas

Soluciones

- Después de 10 minutos, están separados 35 kilómetros.
- El campo tiene una superficie de 125 áreas.
- 

Soluciones de la autoevaluación

1 a) 1/9 $\quad$ b) 1/50

2 a) $\frac{1}{2ab}$ $\quad$ b) $-ab^2$ $\quad$ c) $\frac{b^2}{a}$ $\quad$ d) $\frac{1}{ab}$

3 $\frac{1}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{1}{100}$

4 a) $2{,}34 \cdot 10^8$ $\quad$ b) $7{,}5 \cdot 10^{-6}$
c) $7{,}58 \cdot 10^{-3}$ $\quad$ d) $3{,}5 \cdot 10^{11}$

5 a) $2{,}8 \cdot 10^{-5}$ $\quad$ b) $3 \cdot 10^{-18}$
c) $3{,}03 \cdot 10^8$ $\quad$ d) $2 \cdot 10^6$

6 a) –11 $\quad$ b) 5 $\quad$ c) $2ab\sqrt{15b}$

7 a) 9 $\quad$ b) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$
c) No se puede simplificar. $\quad$ d) $3\sqrt[4]{3}$

8 Se podrá explotar durante 50,72 años.