3 Problemas aritméticos

Presentación de la unidad

- Al hacer mediciones, estimaciones o al resolver problemas de la vida cotidiana, casi nunca se obtiene un resultado exacto, por lo que utilizamos números aproximados, muchas veces sin pensar en ello. Por esta razón, comenzamos la unidad con las ideas básicas sobre aproximaciones, cifras significativas y errores cometidos. Se pretende que el alumnado sea consciente del error al dar el resultado aproximado de un problema cualquiera.
- En los conceptos de error absoluto y error relativo, prestaremos atención a cómo se controlan: con el orden de la última cifra significativa utilizada en el caso del error absoluto o con la cantidad de cifras significativas en el caso del error relativo.
- Los conceptos básicos relativos a la proporcionalidad y a los porcentajes son ya conocidos por el alumnado. En esta unidad, además de recordarlos, se pretende una profundización en todos ellos mediante su aplicación en situaciones y problemas contextualizados.
- Se estudian los métodos de reducción a la unidad y la regla de tres en problemas de proporcionalidad simple y nos detendremos en analizar varios problemas-modelo de proporcionalidad compuesta, priorizando la detección de los distintos tipos de proporcionalidad directa-inversa que aparecen en cada caso y mostrando los procedimientos de resolución para cada uno.
- En la unidad se presta especial atención a la resolución de ciertos problemas clásicos: repartos proporcionales, mezclas y móviles, y en especial, a los de porcentajes. La agilidad en su resolución debe ser consecuencia, más que de la memorización de los procedimientos asociados a su resolución, a la familiarización con ellos por su uso reiteradamente razonado.
- Los contenidos de la unidad tienen significado en multitud de situaciones de la vida cotidiana. El objetivo consiste en ofrecer modelos con recursos y procedimientos que puedan ser transferidos por los alumnos y las alumnas en la interpretación y resolución de dichas situaciones.

Conocimientos mínimos

Consideramos que, como mínimo, los estudiantes deben aprender lo siguiente:

- Aproximación de un número a un orden determinado. Redondeo. Cifras significativas.
- Resolución de problemas de proporcionalidad y de otros problemas clásicos.
- Cálculo con porcentajes: aumentos y disminuciones porcentuales. Índice de variación, para calcular las cantidades inicial y final.

Esquema de la unidad

PROBLEMAS ARITMÉTICOS

- APROXIMACIONES Y ERRORES
  - Cifras significativas
    - Control del error
      - ABSOLUTO
      - RELATIVO
- PROBLEMAS CLÁSICOS
  - REPARTOS PROPORCIONALES
  - MEZCLAS
  - PORCENTAJES
    - Aumento porcentual
    - Disminución porcentual
      - ÍNDICE DE VARIACIÓN
        - Encadenamiento de aumentos y disminuciones porcentuales
          - INTERÉS COMPUESTO
    - Cálculo de la cantidad inicial conociendo la variación porcentual y la cantidad final
  - MÓVILES
- PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD
  - SIMPLE
    - Directa
    - Inversa
  - COMPUESTA

Complementos importantes

- Errores:

  Error absoluto y error relativo.
- Relación de la cota del error cometido con las cifras significativas de la expresión aproximada.
- Encadenamiento de variaciones porcentuales.
- Interés compuesto.

Anticipación de tareas

- Recordar los conceptos de razón y proporción.
- Cálculo del término desconocido de una proporción.
- Identificación de situaciones de proporcionalidad directa.
- Identificación de situaciones de proporcionalidad inversa.
- Identificación de situaciones de no proporcionalidad.
- Repasar el concepto de porcentaje y sus aplicaciones: cálculo de la parte y del porcentaje que representa.

Adaptación curricular

En la parte de "Recursos fotocopiables" se ofrece una adaptación curricular de esta unidad 3 del libro del alumnado, para cuya elaboración se han tenido en cuenta los conocimientos mínimos que aquí se proponen.

La lectura inicial servirá para ejercitar la comprensión lectora y para mostrar los dos aspectos que justifican el estudio de las matemáticas: el práctico y el intelectual.

Los contenidos, si se adaptan a esos mínimos exigibles, o bien no han sufrido cambio alguno o bien se han modificado ligeramente para adecuarlos al posible nivel de los estudiantes a quienes va dirigido. Lo mismo cabe decir de los ejercicios prácticos que se proponen.

Si algún contenido supera los mínimos exigibles, o bien se ha suprimido o bien se ha adaptado para ajustarlo a los requisitos exigidos.

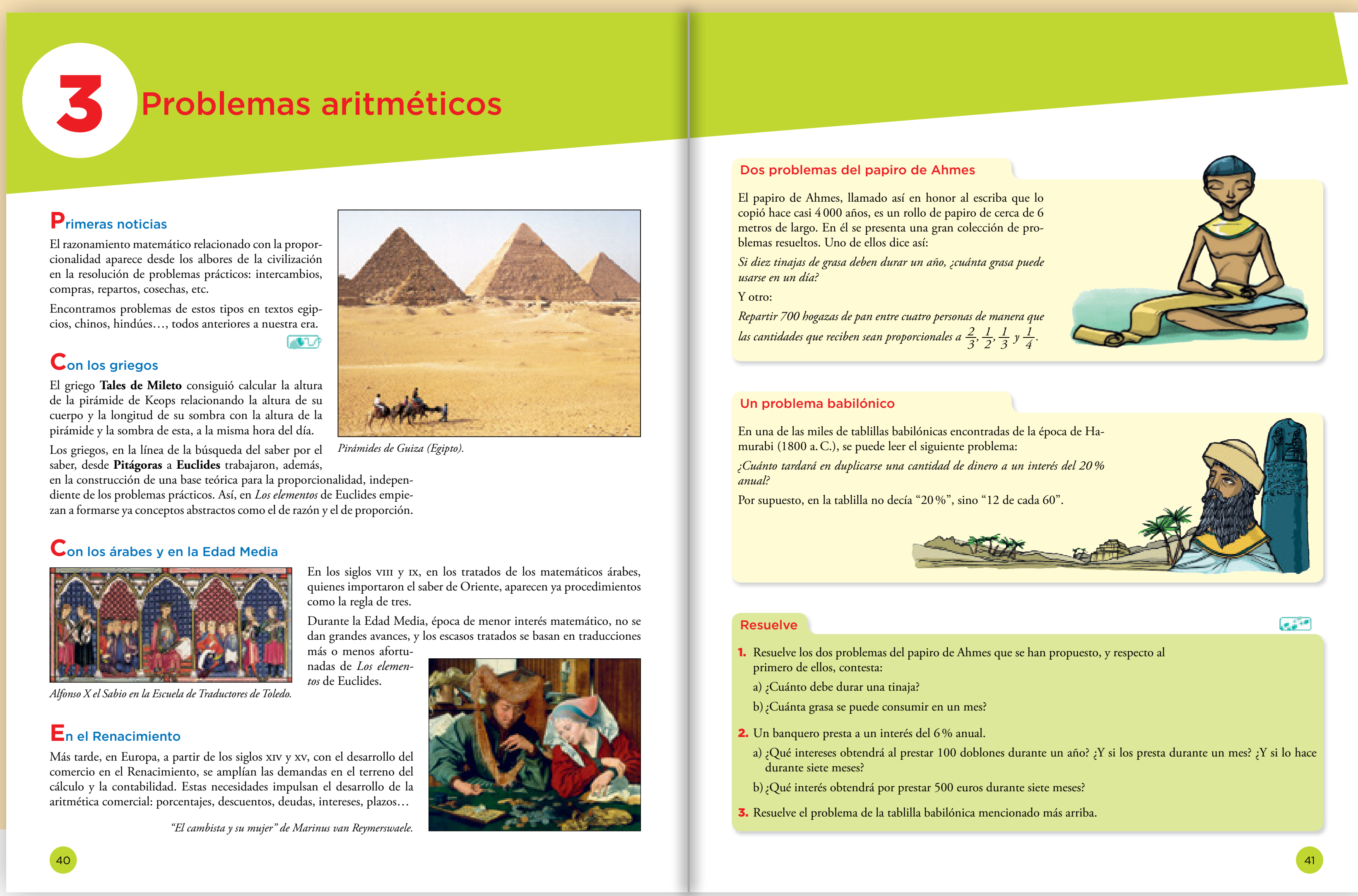
Finalmente, los ejercicios y problemas con los que finaliza la unidad se han reducido en cantidad y se han modificado o bajado de nivel hasta adaptarse a lo convenido. Lo mismo cabe decir de la autoevaluación.

En la siguiente tabla se recoge una relación de actividades para atender y trabajar el aprendizaje cooperativo, el pensamiento comprensivo, el pensamiento crítico, la interdisciplinariedad, las TIC, el emprendimiento y la resolución de problemas. Unas están propuestas en el libro del alumnado (L.A.), y aquí se hace referencia a ellas indicando la página y la actividad, y otras, como se indica, se sugieren en esta Propuesta Didáctica (P.D.).

Una selección de estas sugerencias están marcadas en el libro del alumnado con un icono; aquí se han marcado con (*).

APRENDIZAJE COOPERATIVO	PENSAMIENTO COMPRENSIVO	PENSAMIENTO CRÍTICO
Pág. 50. Piensa y practica (*)	Pág. 46. Problema resuelto (*)	Pág. 43. Piensa y practica (*)
Págs. 46 a 49. Actividad sugerida en esta P.D.	Págs. 48, 49, 52, 53. Problemas resueltos (*)	Pág. 58. Actividad 32 (*)
Págs. 51 a 54. Actividad sugerida en esta P.D. (*)	Pág. 55. Ejercicios y problemas resueltos (*)	Pág. 59. Actividad 53 (*)
Pág. 56. Actividad sugerida en esta P.D.	Pág. 57. Actividad 27 (*)	
	Pág. 58. Actividad 36 (*)	

INTERDISCIPLINARIEDAD	TIC	EMPRENDIMIENTO	RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Pág. 51. Actividad 4 (*)	Pág. 40. Actividad sugerida en esta P.D. (*)	Pág. 41. Resuelve (*)	Todos los problemas propuestos en el L.A. están encuadrados en este apartado. Aquí se señalan algunos que tienen especial interés.
Pág. 54. Piensa y practica (*)	Pág. 54. Problemas resueltos (*)	Pág. 53. Actividad 10 (*)	Págs. 46, 47, 48, 53, 54. Piensa y practica (*)
Pág. 57. Actividades 17, 21, 22, 23 (*)	Pág. 54. Actividad 2 (*)	Pág. 59. Actividad 61 (*)	Pág. 57. Actividades 18, 28 (*)
Pág. 58. Actividad 29 (*)		Pág. 60. Actividad "Reflexiona y saca conclusiones" (*)	Pág. 58. Actividades 30, 38, 41 (*)
			Pág. 59. Actividades 45, 48, 56 (*)
			Pág. 61. Entrénate resolviendo problemas (*)



3 Problemas aritméticos

Primeras noticias

El razonamiento matemático relacionado con la proporcionalidad aparece desde los albores de la civilización en la resolución de problemas prácticos: intercambios, compras, repartos, cosechas, etc.

Encontramos problemas de estos tipos en textos egipcios, chinos, hindúes…, todos anteriores a nuestra era.

Pirámides de Guiza (Egipto).

Con los griegos

El griego **Tales de Mileto** consiguió calcular la altura de la pirámide de Keops relacionando la altura de su cuerpo y la longitud de su sombra con la altura de la pirámide y la sombra de esta, a la misma hora del día.

Los griegos, en la línea de la búsqueda del saber por el saber, desde **Pitágoras** a **Euclides** trabajaron, además, en la construcción de una base teórica para la proporcionalidad, independiente de los problemas prácticos. Así, en *Los elementos* de Euclides empiezan a formarse ya conceptos abstractos como el de razón y el de proporción.

Con los árabes y en la Edad Media

Alfonso X el Sabio en la Escuela de Traductores de Toledo.

En los siglos VIII y IX, en los tratados de los matemáticos árabes, quienes importaron el saber de Oriente, aparecen ya procedimientos como la regla de tres.

Durante la Edad Media, época de menor interés matemático, no se dan grandes avances, y los escasos tratados se basan en traducciones más o menos afortunadas de *Los elementos* de Euclides.

En el Renacimiento

Más tarde, en Europa, a partir de los siglos XIV y XV, con el desarrollo del comercio en el Renacimiento, se amplían las demandas en el terreno del cálculo y la contabilidad. Estas necesidades impulsan el desarrollo de la aritmética comercial: porcentajes, descuentos, deudas, intereses, plazos…

"El cambista y su mujer" de Marinus van Reymerswaele.

40

Dos problemas del papiro de Ahmes

El papiro de Ahmes, llamado así en honor al escriba que lo copió hace casi 4 000 años, es un rollo de papiro de cerca de 6 metros de largo. En él se presenta una gran colección de problemas resueltos. Uno de ellos dice así:

Si diez tinajas de grasa deben durar un año, ¿cuánta grasa puede usarse en un día?

Y otro:

Repartir 700 hogazas de pan entre cuatro personas de manera que las cantidades que reciben sean proporcionales a $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ *y* $\frac{1}{4}$.

Un problema babilónico

En una de las miles de tablillas babilónicas encontradas de la época de Hamurabi (1800 a. C.), se puede leer el siguiente problema:

¿Cuánto tardará en duplicarse una cantidad de dinero a un interés del 20 % anual?

Por supuesto, en la tablilla no decía "20 %", sino "12 de cada 60".

Resuelve

1. Resuelve los dos problemas del papiro de Ahmes que se han propuesto, y respecto al primero de ellos, contesta:
   a) ¿Cuánto debe durar una tinaja?
   b) ¿Cuánta grasa se puede consumir en un mes?
2. Un banquero presta a un interés del 6 % anual.
   a) ¿Qué intereses obtendrá al prestar 100 doblones durante un año? ¿Y si los presta durante un mes? ¿Y si lo hace durante siete meses?
   b) ¿Qué interés obtendrá por prestar 500 euros durante siete meses?
3. Resuelve el problema de la tablilla babilónica mencionado más arriba.

41

Al iniciar la unidad

- Con esta lectura se pretende mostrar a los alumnos y a las alumnas la presencia de la proporcionalidad en situaciones de la vida cotidiana a lo largo de la historia de la humanidad. Son situaciones problemáticas ligadas al consumo, a la geometría y a situaciones financieras ligadas al desarrollo del comercio.
- La reflexión sobre la presencia de la proporcionalidad en la vida actual debe llevar a los estudiantes a valorar unas herramientas cuyo uso diario está fuera de toda duda. Y en especial al dominio del cálculo con porcentajes, que es imprescindible para movernos con soltura en la sociedad de consumo y que sientan las bases de la educación financiera: compras, préstamos, plazos, depósitos…

Cuestiones para detectar ideas previas

- Los ejercicios propuestos en la página 41 sirven como modelo de casos sencillos de proporcionalidad, de repartos proporcionales y de manejo de intereses bancarios. Serán un buen punto de partida para constatar qué es lo que los estudiantes ya tienen asimilado de cursos anteriores.

TIC

Se sugiere la siguiente actividad:

Buscar información en Internet sobre los avances en el estudio de la proporcionalidad en la antigua China (Liu Hui).

Soluciones de "Resuelve"

1 Problema de las tinajas: En un día se puede usar 10/365 de tinaja.

a) 36,5 días. b) 10/12 de tinaja.

Problema de las hogazas: a la primera le tocan 266 hogazas y 2/3 de otra; a la segunda, 200 hogazas; a la tercera, 133 hogazas y 1/3 de otra; a la cuarta, 100 hogazas.

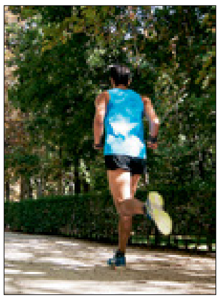
2 a) 6 doblones en un año. Medio doblón en un mes. 3,5 doblones en 7 meses.

b) 17,5 doblones.

3 Si los intereses no se suman al capital inicial, tardará 5 años. Si se suman, tardará 4 años.

ANOTACIONES

1 Aproximaciones y errores



Por qué se utilizan números aproximados

Usamos números aproximados con mucha más frecuencia de la que somos conscientes. Lo hacemos por uno de estos motivos:

— Desconocemos la cantidad exacta.

— Aunque conocemos la cantidad exacta, no consideramos necesario o conveniente darla con toda precisión.

Por ejemplo:

- ¿Qué distancia he recorrido hoy en mi entrenamiento? No conozco la cantidad exacta pero podría decir: "más de 12 km", o bien "entre 12 y 13 km", o bien "12 400 m". En este último caso, aunque no lo digamos, se entiende que pueden ser 100 m más o menos.
- Si alguien gana 30 458,24 € al año, probablemente cuando comente su sueldo dirá, simplemente, que es de 30 000 euros.

En la web
Ejemplos de aproximaciones de números decimales.

Cifras significativas

La altura a la que vuela un avión se puede expresar de diversas formas (nos fijamos en el número de cifras que usamos en cada caso):

9 km → solo una cifra

9,2 km → dos cifras

9 200 m → cuatro cifras (¿o, tal vez, solo dos?)

9 246 m → cuatro cifras

Está claro que cuantas más cifras se utilizan con más precisión se está dando la medida. Pero, a veces, no es conveniente dar demasiadas: ¿es razonable que la altura de un avión se dé afinando hasta los metros?

Fijémonos ahora en la medición 9 200 m. ¿Han querido ser exactos hasta los "metros" o solo hasta los "cientos de metros"? Muy probablemente sea esto último y, en este caso, los dos ceros finales no son *cifras significativas*.

Se llaman **cifras significativas** a aquellas con las que se expresa un número aproximado. Solo deben utilizarse aquellas cuya exactitud nos conste.

Los ceros del final de un número no son cifras significativas si solo se han utilizado para poder expresar la cantidad en la unidad deseada (9 200 m en lugar de 92 cientos de metros).

Número de cifras significativas

Las estimaciones que hacemos en la vida corriente, sin ánimo de que sean muy precisas, tienen una o, a lo sumo, dos cifras significativas:

"ESTAS CASAS CUESTAN CUATROCIENTOS VEINTE MIL EUROS"

Una cantidad dada con tres cifras afina mucho. Solo en la ciencia se necesitan precisiones de cuatro o más cifras.

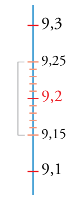
Si el número está dado en notación científica, las cifras significativas son las que aparecen en el número decimal que multiplica a la potencia de base 10. Por ejemplo, $3{,}4 \cdot 10^5$ y $3{,}40 \cdot 10^5$ no son el mismo número aproximado: en el primero (con dos cifras significativas) estamos diciendo que solo controlamos hasta el 4, mientras que en el segundo (con tres cifras significativas) aseguramos que la cifra posterior al 4 es un 0.

42

Control del error cometido

Es claro que cuando damos una medida aproximada estamos cometiendo un error, que consiste en la diferencia, en valor absoluto, entre el valor exacto (o real) y el valor aproximado. Se llama *error absoluto*.

Error absoluto = |Valor real – Valor aproximado|



En general, el error absoluto es desconocido (porque no conocemos el valor real), pero puede controlarse. Por ejemplo, al dar la altura del avión, 9,2 km, podemos saber que el error cometido es menor que 0,05 km = 50 m, ya que si se da 9,2 es porque está más cerca de esta medida que de 9,1 y que de 9,3.

No es lo mismo cometer un error de 50 m al medir la altura de un avión, que al medir la altura de un edificio o la altura de un satélite. Por eso se define el *error relativo* como el cociente entre el error absoluto y la medida exacta.

$$\textbf{Error relativo} = \frac{\text{Error absoluto}}{\text{Valor real}}$$

Al igual que el error absoluto, el error relativo también es, casi siempre, desconocido. Para controlarlo, habría que dar una cota del mismo. No obstante, en este curso no lo haremos, nos conformaremos con saber que *cuantas más cifras significativas se utilicen para dar la medida aproximada, menor es el error relativo cometido*.

Problemas resueltos

1. ***La altura de un edificio es de 92 m; la de un avión, 9,2 km, y la de un satélite artificial, 920 km. ¿Qué podemos decir del error absoluto y del error relativo de estas mediciones?***	El error absoluto tiene que ver con las cifras que no aparecen, es decir, las posteriores a la última cifra utilizada. Altura del edificio: 92 m — Error absoluto < 0,5 m Altura del avión 9,2 km — Error absoluto < 0,05 km = 50 m Altura del satélite: 920 km — Error absoluto < 5 km = 5 000 m Una cota del error absoluto es 5 unidades de la primera cifra no utilizada. El error relativo es el mismo en los tres casos, ya que en todos ellos se usan las mismas cifras significativas. (Hemos supuesto que, en el último caso, el 0 no es cifra significativa. Deberíamos haber dicho 92 decenas de kilómetros).
2. ***Comparar el error relativo cometido en estas mediciones:*** ***a) 87 m b) 5 km*** ***c) 453 km d) $4{,}53 \cdot 10^{11}$ km***	El mayor error relativo se da en la medición de 5 km, pues solo tiene una cifra significativa. El menor error relativo se da con la medición de 453 km, porque en ella se utilizan tres cifras significativas. El error relativo de la medición d) es el mismo que el de la c).

Piensa y practica

1. ¿Qué podemos decir del error absoluto y del error relativo de estas mediciones?

a) Volumen de una bañera, 326 litros.

b) Volumen de una piscina, 326 m³.

c) Volumen de un pantano, 326 hm³.

d) Volumen de un asteroide, $3{,}26 \cdot 10^6$ km³.

2. Compara el error relativo cometido al hacer las siguientes pesadas:

a) Una ballena, 37 toneladas.

b) Un pavo, 3 kg.

c) Don Anselmo, 87,3 kg.

d) La Tierra, $5{,}972 \cdot 10^{21}$ toneladas.

43

Sugerencias

- La aparición de números decimales, periódicos o no, en la resolución de un problema, nos obliga a elegir una aproximación para poder utilizarlos. Lo mismo ocurre cuando queremos dar una respuesta con números enteros de muchas cifras.

  Elegimos el redondeo como la mejor aproximación de un número hasta el orden decimal que queramos utilizar.

- Los ejemplos que se presentan en esta página, u otros de cualquier medio de comunicación (audiencia de un programa de radio, personas que asisten a una manifestación...) sirven para entender la idea de cifras significativas y la conveniencia de usar dos o tres como máximo.

- Debemos mostrar especial atención sobre los ceros finales en las cantidades aproximadas. En general, no son cifras significativas, porque no podemos asegurar su exactitud, y solo se utilizan para ubicar las cifras significativas y facilitar la expresión de un resultado.

- El hecho de trabajar con valores aproximados implica que necesariamente cometemos un error. Por ello, definimos los conceptos de error absoluto y de error relativo.

  En estos conceptos, más que aplicar las definiciones, prestaremos atención a cómo se controlan en la práctica estos errores, con el orden de la última cifra significativa utilizada en el caso del error absoluto, o con la cantidad de cifras significativas con que están dadas las medidas cuando se trate de comparar sus errores relativos.

- En los ejercicios resueltos y en las actividades se muestra el tipo de preguntas y respuestas que creemos adecuadas para este nivel:

  ¿Qué podemos decir del error absoluto y del error relativo de estas mediciones?

  O bien:

  Compara los errores relativos de estos resultados.

Refuerzo y Ampliación

- Refuerzo

  Empleando diversas técnicas de conteo, se han obtenido los siguientes datos:

  a) Visitantes anuales a un museo: 1 345 589 personas.

  b) Asistentes a una manifestación: 125 341 personas.

  c) Número de gotas de agua que hay en una piscina: 8 249 327 741 gotas.

  ¿Es razonable dar tantas cifras?

  ¿Cómo transmitirías tú cada una de estas afirmaciones?

- Ampliación

  Los tiempos de utilización de un aparcamiento en un centro comercial se cobran por cuarto de hora o fracción. Aproxima, de esta forma, los siguientes tiempos y di cuál es el error absoluto cometido en cada caso:

  a) 39 min b) 80 min c) 17 min

- Del fotocopiable INCLUSIÓN Y ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD:

  Refuerzo: Ejercicios 1 y 2 de Practica, ficha A. Ejercicio 1 de Practica, ficha B.

Soluciones de "Piensa y practica"

1 a) E. A. < 0,5 *l* b) E. A. < 500 *l*

c) E. A. < 500 000 000 *l* d) E. A. < $5 \cdot 10^{15}$ *l*

El error relativo coincide en los cuatro casos, pues las mediciones están dadas con el mismo número de cifras significativas.

2 El menor error relativo se da en el peso de la Tierra, porque se usan cuatro cifras significativas. Y el mayor, en el peso del pavo, porque solo se usa una.

2 La proporcionalidad en los problemas aritméticos

En la web
Razón de dos números.

En esta unidad vamos a resolver problemas con las herramientas de la aritmética. Una buena parte de los problemas que nos encontraremos relacionan magnitudes proporcionales. Vamos a empezar recordando las técnicas para resolver problemas de proporcionalidad simple y compuesta.

Proporcionalidad simple

Proporcionalidad directa

REGLA DE TRES

$$\left.\begin{array}{l}\square \longrightarrow \bigcirc \\ \blacksquare \longrightarrow x\end{array}\right\} \; x = \frac{\blacksquare \cdot \bigcirc}{\square}$$

Ejemplo 1

Para transportar 120 000 l de agua, se necesitan 8 camiones cisterna. ¿Cuántos camiones se necesitarán para transportar 315 000 l?

A más volumen de agua, más camiones. Es evidente que se trata de una *proporcionalidad directa*. Resolvemos el problema de dos formas:

- **Regla de tres**

$$\left.\begin{array}{l}120\,000\ l \rightarrow 8 \text{ camiones} \\ 315\,000\ l \rightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{315\,000 \cdot 8}{120\,000} = 21 \text{ camiones}$$

- **Reducción a la unidad**

120 000 : 8 = 15 000 *l* caben en cada camión.

315 000 : 15 000 = 21 camiones se necesitan.

Proporcionalidad inversa

REGLA DE TRES

$$\left.\begin{array}{l}\square \longrightarrow \bigcirc \\ \blacksquare \longrightarrow x\end{array}\right\} \; x = \frac{\square \cdot \bigcirc}{\blacksquare}$$

Ejemplo 2

Seis pintores tardan 8 días en pintar una casa. ¿Cuánto tardarían 4 pintores en realizar la misma tarea?

A menos pintores, más tiempo. Se trata de una *proporcionalidad inversa*.

- **Regla de tres**

$$\left.\begin{array}{l}6 \text{ pintores} \rightarrow 8 \text{ días} \\ 4 \text{ pintores} \rightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{6 \cdot 8}{4} = 12 \text{ días}$$

- **Reducción a la unidad**

¿Cuánto tarda 1 pintor? 6 · 8 = 48 días

¿Cuánto tardan 4 pintores? 48 : 4 = 12 días

En la web
- Concepto de proporcionalidad directa.
- Concepto de proporcionalidad inversa.

Problema resuelto

Hace 3 días y 13 horas un pantano solo estaba a un 34,5 % de su capacidad. Ahora alcanza el 41,2 %. De seguir a este ritmo de llenado, ¿cuándo alcanzará el 90 % de su capacidad?

Tiempo transcurrido: 3 días 13 horas = 85 horas

En ese tiempo se ha llenado: 41,2 % – 34,5 % = 6,7 %

Queremos que aumente: 90 % – 41,2 % = 48,8 %

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si en } 85 \text{ h se ha llenado el } 6{,}7\,\%, \\ \text{en } x \text{ h se llenará el } 48{,}8\,\%\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{85 \cdot 48{,}8}{6{,}7} = 619{,}10 \text{ h}$$

619,10 h = 25 días, 19 horas y 6 minutos

Solución: Alcanzará el 90 % de su capacidad dentro de unos 26 días.

En la web Resuelve problemas de proporcionalidad simple.

44

UNIDAD 3

Proporcionalidad compuesta

Recuerda
En los problemas de proporcionalidad compuesta intervienen, al menos, tres magnitudes. Cada dos de ellas son directa o inversamente proporcionales.

Ejemplo 3

Para calentar 100 gramos de aceite, desde la temperatura ambiente, 15 °C, hasta 70 °C, se han necesitado 2 585 calorías. ¿Cuántas calorías se necesitarán para calentar un litro de aceite (980 g) desde la temperatura ambiente hata 95 °C?

$$\left.\begin{array}{l}\text{A más cantidad de aceite, más calorías} \\ \text{A mayor salto térmico, más calorías}\end{array}\right\} \rightarrow \text{ambas son directas}$$

Ten en cuenta que desde 15 °C a 70 °C hay un salto térmico de 55 °C, y desde 15 °C hasta 95 °C, un salto de 80 °C.

ACEITE (g)	SALTO TÉRMICO (°C)	CALOR SUMINISTRADO (cal)
100	55	2 585
1	55	$\frac{2585}{100} = 25{,}85$
1	1	$\frac{25{,}85}{55} = 0{,}47$
980	80	$0{,}47 \cdot 980 \cdot 80 = 36\,848$

REDUCCIÓN A LA UNIDAD: ¿Cuántas calorías se necesitan para que 1 g de aceite se caliente 1 °C?

Ten en cuenta
Por ser la proporcionalidad directa, al dividir por 100 la 1.ª variable hemos de dividir por 100 la 3.ª, y al dividir por 55 la 2.ª hemos de dividir por 55 la 3.ª.

Ejemplo 4

Se han necesitado 2 585 calorías para calentar 100 g de aceite desde 15 °C hasta 70 °C. ¿Cuál será la temperatura final de un litro de aceite (980 g) que está a 15 °C, si se le suministran 39 151 calorías?

A más calorías, más sube la temperatura → directa

A más aceite, menos sube la temperatura → inversa

PROPORCIONALIDAD DIRECTA

PROP. INVERSA

CALOR (cal)	CANTIDAD ACEITE (g)	SALTO TÉRMICO (°C)
2 585	100	55
1	100	$\frac{55}{2585}$
1	1	$\frac{55 \cdot 100}{2585}$
39 151	980	$\frac{55 \cdot 100 \cdot 39151}{2585 \cdot 980} = 85$

REDUCCIÓN A LA UNIDAD: ¿Qué subida de temperatura provoca 1 caloría sobre 1 g de aceite?

Ten en cuenta
Por ser la cantidad de aceite inversamente proporcional al *salto térmico*, al dividir por 100 la 2.ª variable debemos multiplicar por 100 la 3.ª.

Se produce una subida de 85 °C. La temperatura final será 15 + 85 = 100 °C.

Para resolver problemas de proporcionalidad compuesta:
- Identifica las magnitudes que intervienen.
- Ordénalas, con sus datos, colocando en último lugar la que lleva la incógnita.
- Identifica el tipo de proporcionalidad, directa o inversa, que liga a cada magnitud con la de la incógnita.
- Reduce a la unidad: ¿qué cantidad de la magnitud desconocida corresponde a una unidad de las magnitudes asociadas?

45

Sugerencias

- En esta unidad vamos a resolver un buen número de problemas que relacionan magnitudes proporcionales. Por tanto, conviene comprobar que los alumnos y las alumnas tienen claro el concepto de proporción estudiado en cursos anteriores, recordar la relación entre los términos de dos fracciones equivalentes y el procedimiento para obtener un término desconocido en una proporción.
- Empezaremos recordando las técnicas para la resolución de problemas de proporcionalidad simple, directa e inversa. Los ejemplos resueltos en la página 44 sirven como modelo para mostrar los dos métodos habituales: la regla de tres y la reducción a la unidad.
- Debemos pedir a los estudiantes, antes de resolver el problema, que justifiquen brevemente el tipo de proporcionalidad, directa o inversa, que se da entre las magnitudes que intervienen.
- Conviene también justificar la regla práctica que se utiliza habitualmente, escribiendo los datos como una proporción y despejando el término desconocido que puede estar en cualquier lugar de la proporción:

$$\left.\begin{array}{l}a \rightarrow b \\ c \rightarrow x\end{array}\right\} \frac{a}{c} = \frac{b}{x} \rightarrow x = \frac{b \cdot c}{a}, \text{ en la regla de tres directa, y}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{x}{b} \rightarrow x = \frac{a \cdot b}{c}, \text{ en la regla de tres inversa}$$

- El método de reducción a la unidad es muy intuitivo y fácil de justificar: conociendo un par de valores, se calcula el valor asociado a la unidad en el contexto del problema, y a partir de ese resultado es muy sencillo obtener el resultado pedido.
- Los problemas de proporcionalidad compuesta tienen mayor dificultad y, por ello, es necesario seguir un procedimiento ordenado y sistemático como el que proponemos en los ejemplos resueltos y que al final de la página 45 se exponen de forma general. La clave de la resolución está en reducir sucesivamente a la unidad, verbalizando cada uno de los pasos dados, y rehacer el camino desde los valores asociados a la unidad, hasta el valor de la incógnita.
- En los apartados "Ten en cuenta" de los márgenes se justifican los procedimientos propios de la proporcionalidad directa o inversa en los pasos intermedios de los problemas de proporcionalidad compuesta.

Refuerzo y Ampliación

Se recomiendan:

- Del cuaderno n.° 1 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:

  Refuerzo: Ejercicios 1 a 5 de la pág. 25. Ejercicios 6 a 10 de la pág. 26.

  Ampliación: Ejercicios 11 a 18 de las páginas 26 y 27.

- Del fotocopiable INCLUSIÓN Y ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD:

  Refuerzo: Ejercicios 5 y 6 de Aplica, ficha A.

  Ampliación: Ejercicios 5 y 6 de Aplica, ficha B.

ANOTACIONES

Planteamiento

Colocamos los datos en un cuadro situando la magnitud que lleva la incógnita en último lugar.

Identificamos si entre ella y cada una de las demás la proporcionalidad es directa o inversa.

Problema resuelto

Un solador embaldosa 260 m² de suelo en 5 días trabajando 8 horas diarias. Se compromete a embaldosar un suelo de 500 m² en 7 días. ¿Cuántas horas diarias tiene que trabajar?

PROPORCIONALIDAD DIRECTA

PROP. INVERSA

SUPERFICIE (m^2)	NÚMERO DE DÍAS	NÚMERO DE HORAS DIARIAS
260	5	8
1	5	$\frac{8}{260} = \frac{2}{65}$
1	1	$5 \cdot \frac{2}{65} = \frac{2}{13}$
500	7	$\frac{2}{13} \cdot \frac{500}{7} = 10{,}99 \approx 11$

Es decir, habrá de trabajar 11 horas diarias para cumplir su compromiso.

OTRA FORMA DE VERLO

El proceso anterior resulta muy sistemático y, por tanto, fácil de seguir. El modo de resolución siguiente es, posiblemente, más natural, más razonado.

¿Qué superficie embaldosa en 1 día de 8 horas? $260 : 5 = 52$ m²

¿Qué superficie embaldosa en 1 hora? $52 : 8 = 6{,}5$ m²

Por tanto, para embaldosar 500 m² necesita $500 : 6{,}5 = 76{,}923$ h.

¿Cuántas horas tiene que trabajar en cada uno de los 7 días?

$$76{,}923 : 7 = 10{,}989 \approx 11 \text{ horas diarias}$$

Cota del error cometido

La solución 11 h diarias es aproximada. El error cometido,

$$11 - 10{,}989\ldots < 0{,}011$$

es menor que 11 milésimas de hora.

$$\frac{11}{1000} \cdot 1 \text{ h} = \frac{11}{1000} \cdot 3600 \text{ s} = 39{,}6 \text{ s}$$

Por tanto, la solución es 11 horas diarias con un error menor que 40 s.

Piensa y practica

1. Un barreño de 150 litros se llena con un grifo que mana 5 litros por minuto. ¿Qué caudal de agua se necesita para llenar una balsa de 2400 litros en el mismo tiempo?
2. En una granja, 16 conejos consumen 100 kg de alfalfa en 12 días. ¿Cuántos días pueden comer 6 conejos con 100 kg de alfalfa?
3. Si 15 *l* de agua se convierten en 16 *l* de hielo, ¿qué volumen ocuparán, al congelarse, 2 m³ de agua?
4. Un grifo que mana 5 litros por minuto llena un cierto barreño en 30 minutos. ¿Qué caudal debe tener otro grifo que lo llene en 40 minutos?
5. Para calentar una pieza de hierro de 1 240 g de 10 °C a 150 °C se han necesitado 18 228 cal. ¿Cuántas calorías se necesitarán para subir una pieza de hierro de 3 480 g de 0 °C a 210 °C?
6. Para calentar una pieza de hierro de 1 240 g de 10 °C a 150 °C se han necesitado 18 228 cal. ¿A qué temperatura se pondrá una pieza de hierro de 5 kg que está a 20 °C, si se le suministran 20 000 cal?
7. En los trabajos de una autopista, 20 camiones trabajando 8 horas diarias logran llevar del tajo a la escombrera 4 dam³ de tierra cada día. ¿Cuánta tierra moverán en un día 12 camiones trabajando en turnos de 10 horas diarias?
8. Para que un gramo de agua suba un grado, se necesita una caloría. ¿Cuánto calor es necesario para subir a punto de ebullición un litro de agua que sale del grifo a 12 °C?
9. Una piara de 23 cerdos se come, en 50 días, 2 990 kg de pienso. ¿Cuántos días duran 6 240 kg de pienso a 75 cerdos?

En la web Resuelve problemas de proporcionalidad compuesta.

46

Sugerencias

- El problema resuelto de esta página sirve como modelo para mostrar dos métodos de resolución de los problemas de proporcionalidad compuesta: la regla de tres compuesta y la reducción a la unidad.
  - En el primer caso, seguimos los pasos que vimos en las páginas anteriores: ordenamos los datos colocando en último lugar la magnitud en la que está la incógnita y después identificamos el tipo de proporcionalidad que hay entre cada dos magnitudes.
  - En el método de reducción a la unidad, son clave las preguntas intermedias y los pasos dados para obtener sucesivamente el valor asociado a la unidad.
- En este y en el problema resuelto de la página 44 aparecen resultados aproximados.

  Es muy conveniente pedir a los alumnos y a las alumnas que acoten el error y lo expresen en la unidad adecuada al contexto del problema, como se hace en este caso.

Refuerzo y Ampliación

- Refuerzo

  a) Se necesitan 30 obreros durante 5 días para pavimentar 2 km de un camino. ¿Cuántos obreros serán necesarios para pavimentar 5 km en 10 días?

  b) Tres personas pagan 1 350 € por 10 noches de estancia en un hotel. ¿Cuánto tendrán que pagar 10 personas por alojarse en ese mismo hotel durante 15 días?

- Ampliación

  a) Una instalación de 8 focos funcionando 12 horas diarias durante 10 días consume 1,2 kWh. ¿Cuánto consumirán 16 focos funcionando 9 horas durante 14 días?

  b) Cuatro obreros, trabajando 9 horas diarias, han necesitado 12 días para levantar un muro. ¿Cuántas horas diarias tendrían que trabajar 6 obreros para construir ese muro en 8 días?

Soluciones de "Piensa y practica"

1 Se necesita un caudal de 80 litros por minuto.

2 Pueden comer 32 días.

3 Ocuparán 2,13 m³.

4 Debe tener un caudal de 3,75 litros por minuto.

5 Se necesitarán 76 734 calorías.

6 Se pondrá a 38,1 °C.

7 Moverán 3 dam³ de tierra.

8 Se necesitan 88 000 calorías.

9 Duran 32 días.

ANOTACIONES

3 Problemas clásicos

Problemas de repartos proporcionales

En los repartos proporcionales, las distintas fracciones en que se parte el total deben sumar 1.

Problemas resueltos

1. ***Tres grifos aportan 2 l/s, 5 l/s y 7 l/s, respectivamente. Se abren los tres simultáneamente para llenar una balsa de 17 080 l. Cuando la balsa está llena, ¿qué volumen de agua habrá manado de cada grifo?***

   2 + 5 + 7 = 14 *l*/s aportan los tres grifos a la vez.

   El primero de ellos ha contribuido con $\frac{2}{14}$ del total; el segundo, con $\frac{5}{14}$ del total, y el tercero, con $\frac{7}{14}$ del total.

   Por tanto, el volumen que ha manado de cada grifo será:

   $$\text{Primero} \rightarrow \frac{2}{14} \cdot 17\,080 = 2\,440\ l$$

   $$\text{Segundo} \rightarrow \frac{5}{14} \cdot 17\,080 = 6\,100\ l$$

   $$\text{Tercero} \rightarrow \frac{7}{14} \cdot 17\,080 = 8\,540\ l$$

2. ***Dos socios poseen el 27,82 % y el 39,91 % de una compañía, y el 3.º, el resto. Se han obtenido unos beneficios de 327 842 €. ¿Cuánto le corresponde al 3.er socio? (Dar la solución aproximando hasta los cientos de euros).***

   El tercer socio es propietario del 100 % – (27,82 % + 39,91 %) = 32,27 %.

   Por tanto, le corresponden:

   32,27 % de 327 842 € = 105 794,61 ≈ 105 800 €

   Aproximando hasta los cientos de euros, podemos asegurar que el error cometido es inferior a 50 €.

Piensa y practica

1. Tres socios pusieron 2, 3 y 6 millones de euros, respectivamente, para crear una empresa.

   Si las ganancias del primer año ascienden a 75 900 €, ¿cuánto corresponderá a cada uno?

2. ¿Cómo se podrían repartir 2 310 € entre tres hermanos de forma que al mayor le corresponda la mitad que al menor, y a este, el triple que al mediano?

3. Tres personas poseían 1/3, 2/9 y 1/6, respectivamente, de una urbanización, junto con un cuarto socio que se retira llevándose su parte. ¿Qué parte de lo que queda corresponde a cada uno?

4. Una balsa de 12 150 *l* se llena con tres grifos cuyos caudales son 14,6 *l*/s; 8,9 *l*/s y 4,2 *l*/s. ¿Cuánto ha aportado cada uno al total de la balsa? Da la solución aproximando hasta las decenas de litro.

Sugerencias

- En este epígrafe presentamos los procedimientos que facilitan la resolución de ciertos problemas aritméticos que se presentan con mucha frecuencia en la realidad: repartos, mezclas y movimientos.

  En cada apartado se han seleccionado varios problemas tipo que reflejan situaciones similares entre sí y que nos sirven para mostrar los procesos que seguiremos para resolverlos.

- En el caso de los repartos proporcionales, es fundamental tener en cuenta que las fracciones en que se reparte el total deben sumar 1 y el cálculo del valor por unidad para después repartir en proporción a la parte de cada uno.

  Actuaremos de modo similar si las partes vienen dadas en porcentaje, sin más que tener en cuenta que su suma debe ser igual a 100.

- Una vez aprendido este proceso, podemos transferirlo a casos donde las partes o el total a repartir vienen dadas en forma de fracción.

Refuerzo y Ampliación

- Refuerzo

  a) Repartir 3 510 € en partes proporcionales a 3, 5 y 7.

  b) Tres socios pusieron, para crear una empresa, 6 000 €, 8 000 € y 10 000 €, respectivamente. Dos años después, la empresa obtiene 45 000 € de beneficios.

     ¿Qué cantidad de las ganancias corresponde a cada uno?

- Ampliación

  a) Repartir 3 000 € en partes proporcionales a 1/3, 1/4 y 2/3.

  b) Repartir 72 000 € entre los tres propietarios de un negocio, sabiendo que el primero puso el triple que el segundo, y este, el doble que el tercero.

Aprendizaje cooperativo

Si el profesor o la profesora lo considera oportuno, las tandas de problemas pueden realizarse por parejas, o en pequeño grupo, estimulando el aprendizaje entre iguales. Los alumnos y las alumnas resolverán individualmente y contrastarán sus soluciones con los compañeros y las compañeras, discutiendo las diferencias, detectando errores y llegando a acuerdos. Todo ello bajo la supervisión del docente.

Soluciones de “Piensa y practica”

1. Les corresponderán, respectivamente, 13 800 €, 20 700 € y 41 400 €.
2. Al hermano mayor le corresponderían 630 €; al mediano, 420 €, y al pequeño, 1 260 €.
3. Al que poseía 1/3, le corresponden 6/13 de lo que queda. Al que poseía 2/9, le corresponden 4/3 de lo que queda. Al que poseía 1/6, le corresponden 3/13 de lo que queda.
4. El primer grifo ha aportado 6 400 litros; el segundo, 3 900 litros, y el tercero, 1 840 litros.

ANOTACIONES

Problemas de mezclas

En problemas de mezclas, el promedio deseado se obtiene repartiendo la suma de las cantidades parciales, aportadas por los componentes, entre el peso total de la mezcla (suma de los pesos parciales).

Problemas resueltos

1. ***Se muelen conjuntamente 50 kg de café de 8,80 €/kg y 30 kg de otro café de inferior calidad, de 6,40 €/kg. ¿A cómo resulta el kilo de la mezcla obtenida?***

Para resolverlo, situamos los datos en una tabla:

	CANTIDAD	PRECIO	COSTE
CAFÉ SUPERIOR	50 kg	8,80 €/kg	50 · 8,80 = 440 €
CAFÉ INFERIOR	30 kg	6,40 €/kg	30 · 6,40 = 192 €
MEZCLA	80 kg		632 €

$$\text{Precio de la mezcla} = \frac{\text{Coste total}}{\text{Peso total}} = \frac{632\ €}{80\ \text{kg}} = 7{,}90\ €/\text{kg}$$

2. ***Un orfebre mezcla tres lingotes de distinta pureza: uno de 37,84 kg con un 68,3 % de plata; otro de 7,35 kg y 82,15 % de plata, y un tercero de 16,89 kg de plata pura. Hallar el porcentaje de plata en la aleación, redondeando a las unidades.***

Ley

La ley de una aleación es el cociente entre el peso del metal precioso y el peso total de la aleación.

	PESO TOTAL	LEY	PESO DE PLATA
1.er LINGOTE	37,84	0,683	37,84 · 0,683 = 25,84
2.° LINGOTE	7,35	0,8215	7,35 · 0,8215 = 6,04
3.er LINGOTE	16,89	1	16,89
TOTAL	62,08		48,77

$$\text{Aleación final} \rightarrow \text{Ley} = \frac{48{,}77}{62{,}08} = 0{,}7856$$

Se han obtenido 62 kg de aleación con un 79 % de plata.

Piensa y practica

5. Si mezclamos 12 kg de café de 12,40 €/kg con 8 kg de café de 7,40 €/kg, ¿cuál será el precio de la mezcla?

6. Si mezclamos un lingote de 3 500 g con un 80 % de oro con otro lingote de 1 500 g con un 95 % de oro, ¿qué proporción de oro habrá en el lingote resultante? ¿Y si añadimos 2 kg de oro puro?

7. Un litro de agua pesa 999,2 g, y un litro de alcohol, 794,7 g. ¿Cuál es el peso de un litro de la disolución obtenida al mezclar 3 *l* de agua con 7 *l* de alcohol?

8. Un joyero quiere fundir un lingote de 2 kg de oro de ley 0,85 con otro lingote de 1,5 kg de oro cuya ley es 0,9. ¿Cuál es la ley del lingote resultante?

48

UNIDAD 3

Problemas de movimientos

Dos objetos que se acercan moviéndose en la misma dirección pueden marchar en sentidos opuestos (van a *encontrarse*) o en el mismo sentido (el más rápido, si sale después, *alcanzará* al más lento).

- En los problemas de **encuentros,** tendremos en cuenta que los móviles se aproximan a una velocidad relativa igual a la **suma** de sus velocidades absolutas.
- En los problemas de **alcances,** tendremos en cuenta que los móviles se aproximan a una velocidad relativa igual a la **diferencia** de sus velocidades absolutas.

Problemas resueltos

1. ***Un ciclista profesional, entrenándose, avanza por una carretera a una velocidad de 38 km/h. Más adelante, a 22 km, un cicloturista avanza en el mismo sentido a 14 km/h. ¿Cuánto tarda el ciclista profesional en alcanzar al cicloturista?***

Se aproximan a una velocidad de 38 – 14 = 24 km/h.

Calculamos el tiempo hasta el encuentro sabiendo que les separan 22 km:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{22}{24} = \frac{11}{12} \text{ de hora} = 55 \text{ min}$$

2. ***La Vía Láctea se dirige hacia Andrómeda a una velocidad de 112,2 km/s. La galaxia Andrómeda se dirige hacia la Vía Láctea a una velocidad de 75,4 km/s. Se encuentran a una distancia de 2,5 millones de años luz. Si mantuvieran sus velocidades, ¿cuánto tardarían en colisionar?***

Velocidad de acercamiento: $v = 112{,}2 + 75{,}4 = 187{,}6$ km/s

Distancia que separa a las dos galaxias:

$$d = 2{,}5 \cdot 10^6 \text{ años luz} =$$

$$= 2{,}5 \cdot 10^6 \cdot (\underbrace{60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365{,}25}_{\text{segundos en 1 año}} \cdot \underbrace{300\,000}_{\text{km recorre la luz en 1 s}}) \text{ km} = 2{,}36682 \cdot 10^{19} \text{ km}$$

Tiempo que tardaría en colisionar:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{2{,}36682 \cdot 10^{19}}{187{,}6} = 1{,}26163 \cdot 10^{17} \text{ segundos} =$$

$$= \frac{1{,}26163 \cdot 10^{17}}{60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365{,}25} \text{ años} = 3{,}9979 \cdot 10^9 \text{ años} \approx 4 \cdot 10^9 \text{ años}$$

La colisión se produciría dentro de 4 000 millones de años.

Piensa y practica

9. Un coche va a 120 km/h y un camión a 90 km/h.

a) Si el coche sigue al camión a 75 km de distancia, ¿cuánto tardará en alcanzarlo?

b) Si están a 504 km y se dirigen el uno hacia el otro, ¿cuánto tardarán en cruzarse?

10. La capacidad de un pantano es 981,1 hm³. Actualmente se encuentra al 43 % del total, y está recibiendo una aportación de 45 m³/s mientras que se desembalsan 3 200 *l*/s. De mantenerse este ritmo, ¿cuánto tiempo tardará en llenarse hasta un 95 % de su capacidad?

49

Sugerencias

- En los problemas de mezclas es muy importante organizar bien la información. Recurrimos para ello a tablas de doble entrada en las que aparezcan los precios, las cantidades y los costes de los componentes y de la mezcla obtenida. De esta forma tendremos claro cuáles son los datos que nos proporciona el enunciado y qué es lo que queremos saber.

  La idea clave del procedimiento para resolver estos problemas es que *el precio de la mezcla se obtiene al dividir el coste total, como suma de los costes de los componentes, entre el peso total de la mezcla.*

- Este mismo procedimiento emplearemos para resolver problemas de aleaciones en los que tenemos que calcular la ley de una aleación (cociente del peso del metal precioso entre el peso total de la aleación).

- En los problemas de móviles, es fundamental recordar la relación $e = v \cdot t$, y tener presente la proporcionalidad directa que existe entre el espacio y el tiempo (con velocidad constante) y la proporcionalidad inversa entre la velocidad y el tiempo (para un espacio dado).

- Los problemas planteados responden a los modelos más habituales:

  – Problemas de encuentro, cuando dos móviles van en la misma dirección y sentido contrario, acercándose entre sí. En este caso, la idea clave para su resolución es tener en cuenta que se aproximan a una velocidad relativa que es la suma de sus velocidades absolutas.

  – Problemas de alcance, cuando dos móviles van en la misma dirección y sentido. En este caso, la idea clave es que se aproximan a una velocidad relativa que es la diferencia de sus velocidades absolutas.

Refuerzo y Ampliación

- Refuerzo

  a) Si mezclamos 20 kg de harina de 3 €/kg con 40 kg de otra de 1,8 €/kg, ¿cuál será el precio de la mezcla?

  b) Un coche sale de A con una velocidad de 90 km/h. Dos horas más tarde, sale de la misma ciudad otro coche haciendo el mismo camino, con una velocidad de 120 km/h. Calcula el tiempo que tarda en alcanzar al primero y la distancia que recorren hasta ese momento.

- Ampliación

  a) Mezclamos 16 kg de café de 7,5 €/kg con 24 kg de otro de calidad superior. Si el precio de la mezcla es 9 €/kg, ¿cuál es el precio del café más caro?

  b) La distancia entre dos ciudades es 70 km. Un ciclista sale de A a 13 km/h. A la misma hora, otro ciclista sale de B a 12 km/h. Calcula el tiempo que tardan en cruzarse y qué distancia han recorrido.

- Del fotocopiable INCLUSIÓN Y ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD:

  Refuerzo: Ejercicio 7 de Aplica, ficha A.

  Ampliación: Ejercicio 7 de Aplica, ficha B.

Aprendizaje cooperativo

Las tandas de problemas pueden realizarse por parejas, o en pequeño grupo. Resolverán individualmente y contrastarán sus soluciones con los compañeros y compañeras, discutiendo las diferencias, detectando errores y llegando a acuerdos.

Soluciones de "Piensa y practica"

5 La mezcla sale a 10,40 €/kg.

6 En el primer caso, un 84,5 % de oro. En el segundo, un 88,93 %.

7 Un litro de la disolución pesará 856,05 kg.

8 Ley del lingote resultante ≈ 0,87

9 a) 2,5 horas. b) 2,4 horas = 2 h 24 min

10 Tardará 141,26 días; es decir, 141 días, 6 horas y 30 minutos.

4 Cálculos con porcentajes

Cálculo mental

Expresa en forma decimal los siguientes porcentajes:

a) 10 % b) 7 %
c) 1 % d) 160 %
e) 127 % f) 5 %

Cálculo de un tanto por ciento de una cantidad

El 16 % de 5 000 es $\frac{16}{100} \cdot 5\,000 = 0{,}16 \cdot 5\,000 = 800$.

El tanto por ciento (16 %) lo hemos puesto en forma decimal (0,16).

Para hallar un tanto por ciento de una cantidad, se expresa el tanto por ciento de forma decimal y se multiplica por él.

Cálculo mental

¿Qué tanto por ciento representa cada cantidad respecto a su total?

a) 15 respecto a 30.
b) 5 respecto a 20.
c) 2 respecto a 10.
d) 30 respecto a 3 000.
e) 3 respecto a 4.

Obtención del tanto por ciento correspondiente a una proporción

En una población de 5 000 personas, 800 han leído El Quijote. ¿Qué porcentaje del total representan?

Hemos de calcular cuántas, de cada 100 personas, han leído *El Quijote*:

$\frac{800}{5\,000} \cdot 100 = 16$. Han leído *El Quijote* el 16 % del total.

Para hallar qué tanto por ciento representa una cantidad, a, respecto a un total, C, se efectúa $\frac{a}{C} \cdot 100$.

Problemas resueltos

1. ***Calcular el 35 % de 3 780 € y el 160 % de 36 200 personas.***
   - 35% ~ 0,35 (35 centésimas)

     Por tanto, 35% de 3 780 € es $3\,780 \cdot 0{,}35 = 1\,323$ €.
   - 160 % ~ 1,60 (160 centésimas)

     Por tanto, 160 % de 36 200 personas es $36\,200 \cdot 1{,}60 = 57\,920$ personas.

2. ***¿Qué tanto por ciento representa 3 634 m^2 respecto a 15 800 m^2?***

   $\frac{3\,634}{15\,800} \cdot 100 = 23$. Por tanto, 3 634 m^2 son el 23 % de 15 800 m^2.

En la web Acividades para reforzar el cálculo de porcentajes resolviendo problemas.

Piensa y practica

1. Calcula.
   a) El 24 % de 300. b) El 112 % de 560.
   c) El 3 % de 83 200. d) El 30 % de 83 200.
   e) El 230 % de 5 200. f) El 300 % de 40.

2. Calcula el tanto por ciento que representa.
   a) 45 respecto a 225. b) 6 160 respecto a 56 000.
   c) 4 230 respecto a 9 000. d) 1 922 respecto a 1 240.
   e) 6 000 respecto a 4 000. f) 975 respecto a 32 500.

50

UNIDAD 3

Cálculo de aumentos porcentuales

Un reloj de 50 € aumenta su precio un 16 %. ¿Cuánto vale ahora?

Con lo que sabemos hasta este momento, podríamos resolverlo así:

Aumento: $50 \cdot 0{,}16 = 8$ €

Precio final: $50 + 8 = 58$ €

Pero observemos que si sube un 16 %, el precio actual es el 116 % del anterior. Por eso, para obtenerlo, se puede multiplicar directamente 50 por 1,16:

$50 \cdot 1{,}16 = 58$ €

1,16 es 1 + 0,16 (la cantidad más 16 centésimas)

AUMENTO DE UN 16 %

$\underbrace{1}_{\text{LA CANTIDAD, 1}},\underbrace{16}_{\text{MÁS 16 CENTÉSIMAS}}$

El número por el que hay que multiplicar la cantidad inicial para obtener la cantidad final se llama **índice de variación.**

En **aumentos porcentuales,** el índice de variación es 1 más el aumento porcentual expresado en forma decimal.

Para **calcular el valor final,** halla el índice de variación y multiplícalo por la cantidad inicial:

VALOR FINAL = VALOR INICIAL · ÍNDICE DE VARIACIÓN

Cálculo mental

¿Qué índice de variación corresponde a estos aumentos porcentuales?

a) 25 % b) 5 % c) 40 %
d) 80 % e) 110 % f) 200 %

Cálculo de disminuciones porcentuales

Una nevera valía 620 €. Se rebaja un 40 %. ¿Cuánto vale ahora?

Si quitamos un 40 % al precio inicial, queda el 60 %. Su precio final es:

$620 \cdot 0{,}60 = 372$ €

0,60 es la unidad menos 40 centésimas: $1 - 0{,}40 = 0{,}60$

En una **disminución porcentual,** el índice de variación es 1 menos la disminución porcentual puesta en forma decimal.

Para **calcular el valor final,** halla el índice de variación y multiplícalo por la cantidad inicial:

VALOR FINAL = VALOR INICIAL · ÍNDICE DE VARIACIÓN

Cálculo mental

¿Qué índice de variación corresponde a estas disminuciones porcentuales?

a) 25 % b) 5 % c) 40 %
d) 15 % e) 88 % f) 1 %

Problema resuelto

El agua recogida en un pantano, 690 hm^3, ha disminuido un 23 %. ¿Cuánta agua hay ahora?

$1 - 0{,}23 = 0{,}77 \rightarrow 690 \cdot 0{,}77 = 531{,}3$

Ahora hay 531,3 hm^3 de agua en el pantano.

Piensa y practica

3. Unas acciones que valían a principios de año 13,70 € han subido un 35 %. ¿Cuánto valen ahora?

4. En una comunidad autónoma había 69 580 parados. Han disminuido un 15 %. ¿Cuántos hay ahora?

En la web Actividades para reforzar el cálculo de aumentos y disminuciones porcentuales.

51

Sugerencias

- De cursos anteriores, los alumnos y las alumnas conocen y utilizan las distintas formas de expresar los porcentajes. Conviene recordar, en estos primeros pasos, la importancia que tiene el total de referencia respecto del cual se da el porcentaje.
- En este curso se hace hincapié en la forma decimal de los porcentajes porque es el procedimiento más rápido de obtener el tanto por ciento de una cantidad. Los estudiantes deberán llegar a identificar que 9/50 = 0,18 nos indica que 9 es el 18 % de 50.
- En las actividades 1 y 2 se proponen ejemplos de distinta dificultad para habituarse a la identificación de un porcentaje con un número decimal.
- El concepto de índice de variación para calcular aumentos o disminuciones porcentuales tiene una enorme importancia, no solo por su eficacia para calcular la cantidad final conocida la inicial y el aumento o disminución porcentual, sino también por las aplicaciones posteriores: cálculo de la cantidad inicial conocida la final y el aumento o disminución porcentual, y el encadenamiento de aumentos o disminuciones porcentuales.
- La idea de índice de variación no es sencilla para el alumnado y requiere una exposición y justificación intensiva y pausada para que lleguen a comprenderla bien antes de aplicarla de forma inmediata o automática.

Refuerzo y Ampliación

Se recomiendan:

- Del cuaderno n.º 1 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:

  Refuerzo: Ejercicios 1 a 5 de la pág. 28. Ejercicios 13 y 14 de la pág. 30.

  Ampliación: Ejercicios 6 a 10 de las páginas 28 y 29.
- Del fotocopiable INCLUSIÓN Y ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD:

  Refuerzo: Ejercicios 3 y 4 de Practica, ficha A. Ejercicios 2, 3 y 4 de Practica, ficha B.

Aprendizaje cooperativo

Si el profesor o la profesora lo considera oportuno, las tandas de problemas pueden realizarse por parejas, o en pequeño grupo, estimulando el aprendizaje entre iguales. Los alumnos y las alumnas resolverán individualmente y contrastarán sus soluciones con los compañeros y las compañeras, discutiendo las diferencias, detectando errores y llegando a acuerdos. Todo ello bajo la supervisión del docente.

Soluciones de “Piensa y practica”

1 a) 72 b) 627,2 c) 2 496
d) 24 960 e) 11 960 f) 120

2 a) 20 % b) 11 % c) 47 %
d) 155 % e) 150 % f) 3 %

3 Ahora valen 18,50 €.

4 Ahora hay 59 143 parados.

ANOTACIONES

Cálculo de la cantidad inicial conociendo la variación porcentual y la cantidad final

Tras aumentar su precio un 35 %, un ordenador cuesta 783 €. ¿Cuánto valía antes de la subida?

Observa el esquema siguiente:

$$\boxed{\text{PRECIO INICIAL}} \underset{:\,1{,}35}{\overset{\cdot\,1{,}35}{\rightleftarrows}} \boxed{\text{PRECIO FINAL}}$$

PRECIO INICIAL · 1,35 = PRECIO FINAL

$\boxed{\text{PRECIO INICIAL = PRECIO FINAL : 1,35}}$

Precio inicial del ordenador = 783 : 1,35 = 580 €

Si conocemos la cantidad final que resulta después de haber aplicado una variación porcentual, la cantidad inicial se obtiene dividiendo la cantidad final por el índice de variación.

CANTIDAD INICIAL = CANTIDAD FINAL : ÍNDICE DE VARIACIÓN

Cálculo mental

Di la cantidad inicial si sabemos que:

a) Aumenta 50 %. C. final = 1 500.
b) Aumenta 50 %. C. final = 3 000.
c) Aumenta 25 %. C. final = 125.
d) Aumenta 25 %. C. final = 250.
e) Disminuye 50 %. C. final = 400.
f) Disminuye 40 %. C. final = 600.

Problemas resueltos

1. ***El precio de un televisor fue de 566,40 €. ¿Cuál era su precio antes de cargarle un 18 % de impuestos?***

El índice de variación es 1 + 0,18 = 1,18.

Por tanto, el precio del televisor antes de cargarle los impuestos era:

566,40 : 1,18 = 480 €

2. ***En unos grandes almacenes, todos los artículos han bajado un 35 %. Hemos comprado un cuadro por 195 €, una bicicleta por 78 € y un libro por 14,30 €. ¿Cuánto valía cada cosa antes de las rebajas?***

En los tres casos, el índice de variación es 1 – 0,35 = 0,65.

Por tanto, los precios de los artículos antes de las rebajas eran:

Cuadro → 195 : 0,65 = 300 €
Bicicleta → 78 : 0,65 = 120 €
Libro → 14,30 : 0,65 = 22 €

Piensa y practica

5. El precio de una batidora, después de cargarle un 18 % de impuestos, es de 70,80 €. ¿Cuál es su precio antes de cargarle esos impuestos?

6. Al estirar una goma elástica, su longitud aumenta un 30 % y, en esa posición, mide 104 cm. ¿Cuánto mide sin estirar?

7. En unas rebajas en las que se hace el 30 % de descuento, Roberto ha comprado una cámara fotográfica por 50,40 €. ¿Cuál era su precio inicial?

8. Un cartero ha repartido el 36 % de las cartas que tenía. Aún le quedan 1 184. ¿Cuántas tenía antes de empezar el reparto?

Encadenamiento de variaciones porcentuales

Una cantidad aumenta un 25 % y, después, el resultado aumenta un 33 %. ¿Cuál ha sido el porcentaje de aumento total?

$$C \xrightarrow{+25\,\%} C \cdot 1{,}25 \xrightarrow{+33\,\%} (C \cdot 1{,}25) \cdot 1{,}33 = C(1{,}25 \cdot 1{,}33) = C \cdot 1{,}6625$$

66,25 %

El índice de variación total es 1,6625, lo que corresponde a un aumento porcentual del 66,25 %.

Para encadenar aumentos y disminuciones porcentuales, se multiplican los índices de variación de los sucesivos pasos.

Problemas resueltos

1. ***Unas acciones que valían 1000 € suben el 60 %. Después, vuelven a subir el 25 %. ¿Cuál es el porcentaje total de subida?***

1.ª SUBIDA: $1\,000 € \xrightarrow{+60\,\%} 1\,000 \cdot 1{,}60 = 1\,600 €$

2.ª SUBIDA: $1\,600 € \xrightarrow{+25\,\%} 1\,600 \cdot 1{,}25 = 2\,000 €$

SUBIDA TOTAL: $1\,000 € \longrightarrow 2\,000 €$

Evidentemente, la subida total es del 100 %. ¿Cómo se obtiene directamente? Veámoslo: 1,60 · 1,25 = 2. Es decir, la cantidad inicial, 1, más 100 centésimas. Subida del 100 %.

2. ***Una guitarra de 800 € sube el 50 %. Después, baja el 50 %. ¿Queda el precio como estaba?***

SUBIDA: $800 € \xrightarrow{+50\,\%} 800 \cdot 1{,}50 = 1\,200 €$ [1,50 = 1 + 0,50]

BAJADA: $1200 € \xrightarrow{-50\,\%} 1\,200 \cdot 0{,}50 = 600 €$ [0,50 = 1 – 0,50]

El precio no queda como estaba. En total, baja 200 €.

ÍNDICE DE VARIACIÓN TOTAL = ÍNDICE 1.ª VARIACIÓN · ÍNDICE 2.ª VARIACIÓN

1,50 · 0,50 = 0,75 = 1 – 0,25. Corresponde a una bajada del 25 %.

3. ***El precio de una lavadora de 520 € sube un 10 %; después, sube otro 25 % y, finalmente, baja un 30 %.***

a) ¿Cuál es su precio final?

b) ¿Cuál es el índice de variación total? ¿A qué porcentaje de aumento o de disminución corresponde?

a) $520 \xrightarrow{+10\,\%} 520 \cdot 1{,}10 = 572 \xrightarrow{+25\,\%} 572 \cdot 1{,}25 = 715 \xrightarrow{-30\,\%} 715 \cdot 0{,}70 = 500{,}50$

El precio final es 520 · 1,10 · 1,25 · 0,70 = 500,50 €.

b) El índice de variación total es 1,10 · 1,25 · 0,70 = 0,9625.

Como 0,9625 es menor que 1, ha habido una disminución. ¿De cuánto?

$1 - 0{,}9625 = 0{,}0375 = \frac{3{,}75}{100}$. Ha bajado un 3,75 %.

Piensa y practica

9. Un comerciante aumenta el precio de sus productos un 30 % y, después, pretendiendo dejarlos al precio inicial, los rebaja un 30 %.

a) Un ordenador que inicialmente costaba 1 000 €, ¿cuánto costará en cada paso del proceso?

b) ¿Cuál es la variación porcentual que sufren los artículos respecto al precio inicial?

10. Un capital de 42 000 € se deposita en un banco al 5 % anual. ¿En cuánto se habrá convertido en un año? ¿Y en dos? ¿Y en tres años?

Sugerencias

- La utilidad y eficacia del índice de variación se comprende mejor en los problemas que se plantean en estas dos páginas: el cálculo de la cantidad inicial, que se resuelve con una sencilla división, y el encadenamiento de variaciones porcentuales, asociado a la multiplicación por los sucesivos índices de variación.
- La gran variedad de problemas que estos conceptos nos permiten resolver, dada la presencia permanente de los porcentajes en la sociedad y en los medios de comunicación, y la reflexión sobre los errores que se cometen en la vida cotidiana con los encadenamientos porcentuales (suma o resta de porcentajes cuando se aplican varios de ellos a una misma cantidad; aumento y descuento de un mismo porcentaje tratando de llegar a la misma cantidad inicial…) hacen del aprendizaje de estos conceptos y procedimientos uno de los objetivos más importantes y necesarios que se deben lograr en este curso. Así, los estudiantes podrán manejarse con soltura en las situaciones comerciales y de pagos de nóminas y deudas que se les plantearán en su vida adulta.

Refuerzo y Ampliación

Se recomiendan:

- Del cuaderno n.º 1 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:

  Refuerzo: Ejercicios 15 y 16 de la pág. 30. Ejercicios 21 y 22 de la pág. 31.

- Ampliación

  a) El precio de un cuadro subió un 180 %. Si se vendió por 763 €, ¿cuánto costaba antes de la subida?

  b) El número de alumnos y alumnas de una escuela universitaria disminuyó este curso un 0,8 %. Si este curso se han matriculado 1 488 estudiantes, ¿cuántos lo hicieron el año anterior?

  c) Si el precio de una parcela subió un 120 % y pagamos por ella 3 356 €, ¿cuánto costaba antes de la subida?

  d) El número de habitantes de una ciudad ha descendido un 0,9 % en el último año. Si la población actual es de 250 000 personas, ¿cuál era el número de habitantes el año pasado?

  e) En los siguientes casos, se da un aumento y una disminución porcentual que se aplican sucesivamente a una cantidad. Halla el índice de variación final y di qué variación porcentual representa:

  I. Aumento: 24 %. Disminución: 10 %.
  II. Aumento: 62 %. Disminución: 50 %.
  III. Aumento: 120 %. Disminución: 20 %.
  IV. Aumento: 65 %. Disminución: 40 %..

Aprendizaje cooperativo

Si el profesor o la profesora lo considera oportuno, las tandas de problemas pueden realizarse por parejas, o en pequeño grupo, estimulando el aprendizaje entre iguales. Los alumnos y las alumnas resolverán individualmente y contrastarán sus soluciones con los compañeros y las compañeras, discutiendo las diferencias, detectando errores y llegando a acuerdos. Todo ello bajo la supervisión del docente.

Soluciones de “Piensa y practica”

5 Su precio original era 60 €.

6 La goma sin estirar mide 80 cm.

7 Su precio era 72 €.

8 Tenía 1 850 cartas.

9 a) Tras la subida, 1 300 €. Tras la bajada, 910 €.

b) Bajan un 9 %.

10 En 1 año: 44 100 €. En 2 años: 46 305 €. En 3 años: 48 620,25 €.

5 Interés compuesto

Si depositamos una cierta cantidad C de dinero en una cuenta de ahorro de una entidad bancaria, esta nos paga intereses. Si el tipo de interés pactado es, por ejemplo, un 6 % anual, al cumplirse un año del depósito, el banco nos da el capital C y unos intereses de $C \cdot 0{,}06$. Es decir, nos devuelve $C \cdot 1{,}06$.

$$C \xrightarrow{\text{1 AÑO AL 6 \%}} C \cdot 1{,}06$$

Si en vez de llevarnos el dinero lo dejamos todo un año más, crece nuevamente un 6 %. Es decir, se vuelve a multiplicar por 1,06:

$$C \xrightarrow{\text{2 AÑOS AL 6 \%}} (C \cdot 1{,}06) \cdot 1{,}06 = C \cdot 1{,}06^2$$

Así sucesivamente, si lo dejamos sin tocar durante n años, entonces:

$$C \xrightarrow{n \text{ AÑOS AL 6 \%}} C \cdot 1{,}06^n$$

El capital final C_F al cabo de n años de depositar un capital C al r % anual es:

$$C_F = C \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

Nomenclatura

Si el banco paga los intereses cada mes, se dice que el **periodo de capitalización** es **mensual.**

Si el banco estuviera dispuesto a pagar los intereses al cabo de cada mes, el tanto por ciento mensual sería la doceava parte del anual $(n/12)$. En el ejemplo anterior, el porcentaje de aumento mensual sería del $6/12 = 0{,}5$ %. Por tanto, al cabo de k meses se transformaría así:

$$C \xrightarrow{k \text{ MESES AL 0,5 \%}} C \cdot 1{,}005^k$$

Problemas resueltos

1. ***Un banco paga el 4,8 % anual por depósitos a plazo fijo. Depositamos 160 000 €. ¿Cuánto dinero podremos retirar al cabo de 4 años?***	Cada año, el capital aumenta un 4,8 %; es decir, se multiplica por 1,048. Al cabo de 4 años se habrá multiplicado por $1{,}048^4$. Por tanto, el capital final que podremos retirar es: $C_F = 160\,000 \cdot 1{,}048^4 = 193\,003{,}47$ €
2. ***¿En cuánto se transforman 160 000 € depositados 4 años al 4,8 % anual, si el periodo de capitalización es mensual?***	Un 4,8 % anual significa un $4{,}8/12 = 0{,}4$ % mensual. En 4 años hay $4 \cdot 12 = 48$ meses. Por tanto: $C_F = 160\,000 \cdot 1{,}004^{48} = 193\,793{,}05$ € Si comparamos este resultado con el del ejercicio anterior, vemos que los periodos de capitalización mensuales son, para el inversor, más ventajosos que los anuales.

Piensa y practica

En la web: Problemas para reforzar el cálculo de interés compuesto.

1. ¿En cuánto se transforma un capital de 20 000 € colocado al 3,6 % anual durante 5 años?

2. ¿En cuánto se transforman 20 000 € colocados 5 años al 3,6 % anual, con pago de intereses mensual?

54

Ejercicios y problemas resueltos

UNIDAD 3

1. Control del error cometido

Una ballena pesa entre 75 t y 85 t. Decimos que pesa 80 t. Otra ballena, pesada con más precisión, está entre 76,5 t y 77,5 t. Decimos que pesa 77 t. a) ¿Qué sabemos del error absoluto cometido en cada caso? b) ¿Cuál de las dos medidas tiene menor error relativo?	a) El error absoluto depende de las cifras que no aparecen. 1.ª ballena: 80 t, y sabemos que $75 < 80 < 85 \rightarrow$ Error absoluto < 5 t. 2.ª ballena: 77 t, y sabemos que $76{,}5 < 77 < 77{,}5 \rightarrow$ Error absoluto < 0,5 t. b) Aunque en ambos casos hemos dado la medida con dos cifras, el menor error relativo se da en el segundo caso, porque sabemos que la pesada se hizo con más precisión empleando tres cifras significativas. **Hazlo tú.** Nos dicen que una estantería mide 342 cm y que dos localidades distan 37 km. ¿Qué podemos decir del error cometido en cada medida?

2. Variaciones porcentuales

El precio de un teléfono ha subido un 20 % y después ha bajado un 25 %. Si pagué por él 135 €, ¿cuál será su precio inicial?	Índice de variación del aumento: 1,2 (1 + 0,20) Índice de variación del descuento: 0,75 (1 – 0,25) Índice de variación total: $1{,}2 \cdot 0{,}75 = 0{,}9$ Por tanto, el precio inicial del teléfono era $135 : 0{,}9 = 150$ €.

3. Notación científica y proporcionalidad

Consulto en Internet un reloj que mide, segundo a segundo, la población mundial y observo que en el último cuarto de hora ha aumentado en 876 personas. Si se mantiene ese ritmo de crecimiento, ¿cuándo llegaremos a los ocho mil millones? (Población actual ~ $7{,}2 \cdot 10^9$ personas).	En primer lugar, tenemos que ver cuánto debe aumentar la población: 8 mil millones $= 8 \cdot 10^9 \rightarrow 8 \cdot 10^9 - 7{,}2 \cdot 10^9 = 0{,}8 \cdot 10^9 = 8 \cdot 10^8$ Si en 15 minutos aumenta 876 personas, para aumentar $8 \cdot 10^8$ se necesitan $\frac{8 \cdot 10^8 \cdot 15}{876} = 13\,698\,630{,}14$ min $= 1{,}4 \cdot 10^7$ min. En años: $\frac{13\,698\,630{,}14}{60 \cdot 24 \cdot 365{,}25} = 26{,}05$ Llegaremos a ocho mil millones en poco más de 26 años. **Hazlo tú.** El diámetro de un virus es $5 \cdot 10^{-4}$ mm. ¿Cuántos virus son necesarios para rodear la Tierra? (Radio medio de la Tierra: 6 370 km).

4. Proporcionalidad inversa-inversa

Dos palas excavadoras, trabajando 10 horas diarias, hacen un desmonte en 9 días. ¿Cuánto tardarían en hacer ese trabajo tres palas trabajando 12 horas cada día? **Hazlo tú.** Cinco obreros, trabajando 6 horas diarias, levantan un muro en 12 días. ¿Cuántos obreros se necesitan para levantar ese muro en 9 días, trabajando en jornadas de 10 horas?	A más palas, menos días; A más horas/día, menos días. PALAS —P. INVERSA→ DÍAS; HORAS/DÍA —P. INVERSA→ DÍAS. • Resolución por reducción a la unidad: — 2 palas, trabajando 10 horas cada día, tardan 9 días. — 1 pala, trabajando 1 hora cada día, tardaría $9 \cdot 2 \cdot 10 = 180$ días. — 3 palas, trabajando 12 horas cada día, tardarán $\frac{180}{3 \cdot 12} = 5$ días. • Resolución por regla de tres compuesta: $\left.\begin{matrix} 2 \text{ palas} \rightarrow 10 \text{ horas/día} \rightarrow 9 \text{ días} \\ 3 \text{ palas} \rightarrow 12 \text{ horas/día} \rightarrow x \end{matrix}\right\} \frac{3 \cdot 12}{2 \cdot 10} = \frac{9}{x} \rightarrow x = \frac{9 \cdot 2 \cdot 10}{3 \cdot 12} = 5$ días

55

Sugerencias

- En la página 54 hacemos una breve exposición de una de las aplicaciones más interesantes del uso de los encadenamientos porcentuales, el interés compuesto. Estos casos, por ser siempre iguales los aumentos porcentuales, nos llevan a expresiones con potencias que en cursos próximos nos servirán para acercarnos a la función exponencial o a la aritmética mercantil.
- En el segundo ejercicio resuelto de la página 54 nos dan la tasa de interés anual y se dice que el periodo de capitalización es mensual. Esto nos obliga a calcular cuál es el aumento que se produce cada mes sobre la cantidad inicial (tasa de interés mensual) y a decidir el exponente de la potencia correspondiente.
- En la página de "Ejercicios y problemas resueltos" se muestran estrategias, sugerencias, pistas y formas de pensar que serán útiles a los alumnos y a las alumnas para enfrentarse a la resolución de las actividades que se les proponen a continuación o en las páginas finales de la unidad.

  Su fin último es que los estudiantes sean capaces de reproducir procedimientos similares cada vez que se encuentren ante una situación problemática.

Refuerzo y ampliación

Se recomiendan:

- Del cuaderno n.º 1 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:

  Refuerzo: Ejercicio 17 de la pág. 30.

  Ampliación: Ejercicios 18 y 19 de la pág. 31.
- Del fotocopiable INCLUSIÓN Y ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD:

  Ampliación: Ejercicio 8 de Aplica, ficha A. Ejercicio 8 de Aplica, ficha B.

- Refuerzo

  Calcula en cuánto se transforma un capital de 10 000 € depositado en un banco, en cada una de las condiciones siguientes:

  a) 3 años al 4 % de interés anual.

  b) 2 años al 5 % de interés anual.

  c) 18 meses al 4,8 % anual con pago de intereses mensual.

  d) 4 años al 3 % anual con pago de intereses mensual.
- Ampliación

  a) ¿En cuánto se transforma un capital de 28 000 € colocado al 3,6 % de interés anual durante un año y tres meses?

  b) Colocamos 50 000 € al 0,36 % mensual durante un año y medio. ¿En cuánto se transformará?

Soluciones de "Piensa y practica"

1 Se transforma en 23 868,70 €.

2 Se transforma en 23 937,90 €.

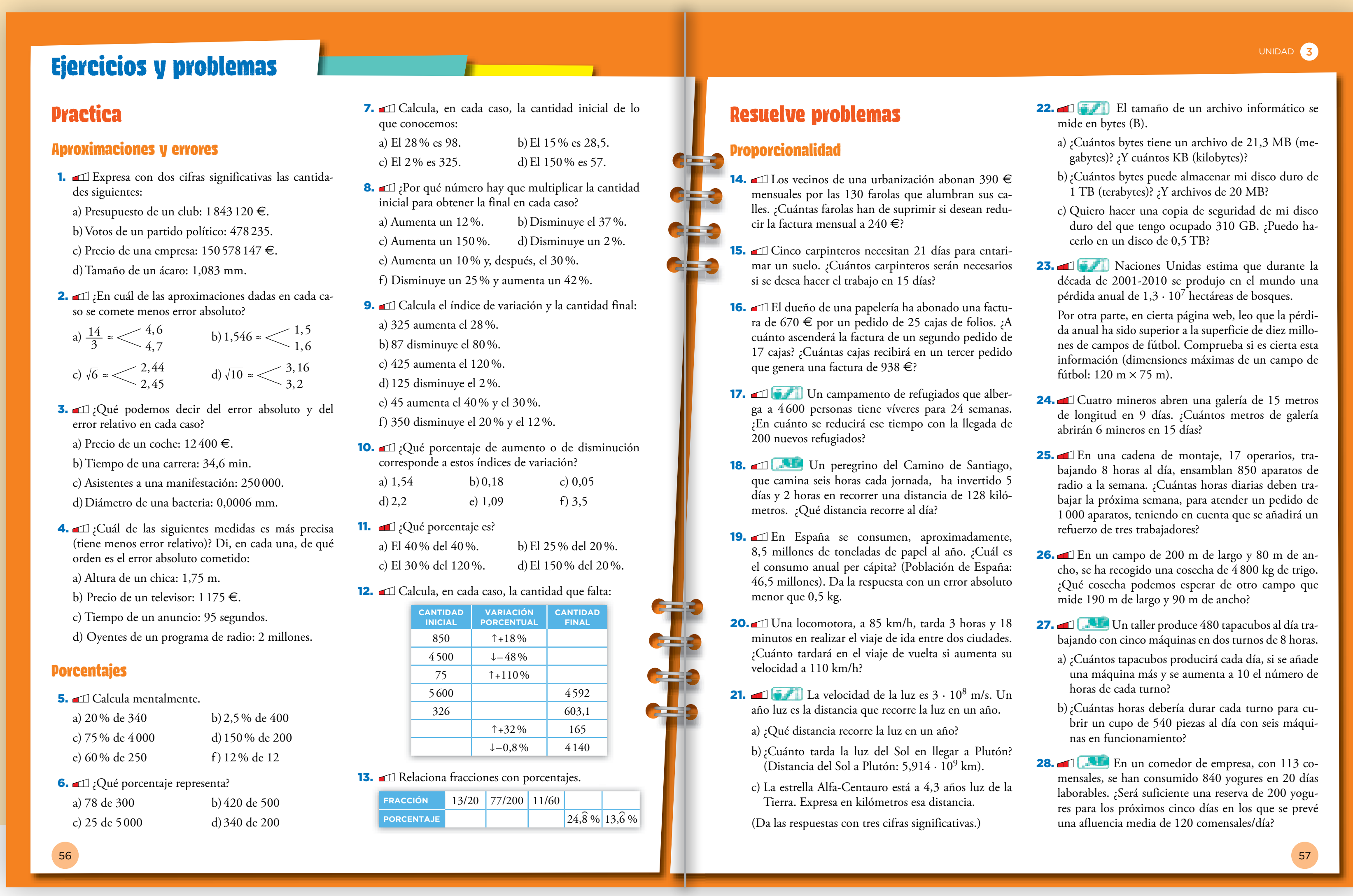
Soluciones de "Hazlo tú"

1 Estantería: E. A. < 5 mm. Distancia entre dos localidades: E. A. < 5 hm.

El menor error relativo se da en el primer caso, pues la medida está dada con tres cifras significativas, mientras que en el segundo caso se da con solo dos cifras significativas.

3 Son necesarios $1{,}274 \cdot 10^{13}$ virus.

4 Se necesitan 4 obreros.



UNIDAD 3

Ejercicios y problemas

Practica

Aproximaciones y errores

1. Expresa con dos cifras significativas las cantidades siguientes:

a) Presupuesto de un club: 1 843 120 €.

b) Votos de un partido político: 478 235.

c) Precio de una empresa: 150 578 147 €.

d) Tamaño de un ácaro: 1,083 mm.

2. ¿En cuál de las aproximaciones dadas en cada caso se comete menos error absoluto?

a) $\frac{14}{3} \approx$ 4,6 / 4,7 b) $1{,}546 \approx$ 1,5 / 1,6

c) $\sqrt{6} \approx$ 2,44 / 2,45 d) $\sqrt{10} \approx$ 3,16 / 3,2

3. ¿Qué podemos decir del error absoluto y del error relativo en cada caso?

a) Precio de un coche: 12 400 €.

b) Tiempo de una carrera: 34,6 min.

c) Asistentes a una manifestación: 250 000.

d) Diámetro de una bacteria: 0,0006 mm.

4. ¿Cuál de las siguientes medidas es más precisa (tiene menos error relativo)? Di, en cada una, de qué orden es el error absoluto cometido:

a) Altura de un chica: 1,75 m.

b) Precio de un televisor: 1 175 €.

c) Tiempo de un anuncio: 95 segundos.

d) Oyentes de un programa de radio: 2 millones.

Porcentajes

5. Calcula mentalmente.

a) 20 % de 340 b) 2,5 % de 400

c) 75 % de 4 000 d) 150 % de 200

e) 60 % de 250 f) 12 % de 12

6. ¿Qué porcentaje representa?

a) 78 de 300 b) 420 de 500

c) 25 de 5 000 d) 340 de 200

7. Calcula, en cada caso, la cantidad inicial de lo que conocemos:

a) El 28 % es 98. b) El 15 % es 28,5.

c) El 2 % es 325. d) El 150 % es 57.

8. ¿Por qué número hay que multiplicar la cantidad inicial para obtener la final en cada caso?

a) Aumenta un 12 %. b) Disminuye el 37 %.

c) Aumenta un 150 %. d) Disminuye un 2 %.

e) Aumenta un 10 % y, después, el 30 %.

f) Disminuye un 25 % y aumenta un 42 %.

9. Calcula el índice de variación y la cantidad final:

a) 325 aumenta el 28 %.

b) 87 disminuye el 80 %.

c) 425 aumenta el 120 %.

d) 125 disminuye el 2 %.

e) 45 aumenta el 40 % y el 30 %.

f) 350 disminuye el 20 % y el 12 %.

10. ¿Qué porcentaje de aumento o de disminución corresponde a estos índices de variación?

a) 1,54 b) 0,18 c) 0,05

d) 2,2 e) 1,09 f) 3,5

11. ¿Qué porcentaje es?

a) El 40 % del 40 %. b) El 25 % del 20 %.

c) El 30 % del 120 %. d) El 150 % del 20 %.

12. Calcula, en cada caso, la cantidad que falta:

CANTIDAD INICIAL	VARIACIÓN PORCENTUAL	CANTIDAD FINAL
850	↑+18 %	
4 500	↓–48 %	
75	↑+110 %	
5 600		4 592
326		603,1
	↑+32 %	165
	↓–0,8 %	4 140

13. Relaciona fracciones con porcentajes.

FRACCIÓN	13/20	77/200	11/60		
PORCENTAJE				$24,\widehat{8}$ %	$13,\widehat{6}$ %

56

Resuelve problemas

Proporcionalidad

14. Los vecinos de una urbanización abonan 390 € mensuales por las 130 farolas que alumbran sus calles. ¿Cuántas farolas han de suprimir si desean reducir la factura mensual a 240 €?

15. Cinco carpinteros necesitan 21 días para entarimar un suelo. ¿Cuántos carpinteros serán necesarios si se desea hacer el trabajo en 15 días?

16. El dueño de una papelería ha abonado una factura de 670 € por un pedido de 25 cajas de folios. ¿A cuánto ascenderá la factura de un segundo pedido de 17 cajas? ¿Cuántas cajas recibirá en un tercer pedido que genera una factura de 938 €?

17. Un campamento de refugiados que alberga a 4 600 personas tiene víveres para 24 semanas. ¿En cuánto se reducirá ese tiempo con la llegada de 200 nuevos refugiados?

18. Un peregrino del Camino de Santiago, que camina seis horas cada jornada, ha invertido 5 días y 2 horas en recorrer una distancia de 128 kilómetros. ¿Qué distancia recorre al día?

19. En España se consumen, aproximadamente, 8,5 millones de toneladas de papel al año. ¿Cuál es el consumo anual per cápita? (Población de España: 46,5 millones). Da la respuesta con un error absoluto menor que 0,5 kg.

20. Una locomotora, a 85 km/h, tarda 3 horas y 18 minutos en realizar el viaje de ida entre dos ciudades. ¿Cuánto tardará en el viaje de vuelta si aumenta su velocidad a 110 km/h?

21. La velocidad de la luz es $3 \cdot 10^8$ m/s. Un año luz es la distancia que recorre la luz en un año.

a) ¿Qué distancia recorre la luz en un año?

b) ¿Cuánto tarda la luz del Sol en llegar a Plutón? (Distancia del Sol a Plutón: $5{,}914 \cdot 10^9$ km).

c) La estrella Alfa-Centauro está a 4,3 años luz de la Tierra. Expresa en kilómetros esa distancia.

(Da las respuestas con tres cifras significativas.)

22. El tamaño de un archivo informático se mide en bytes (B).

a) ¿Cuántos bytes tiene un archivo de 21,3 MB (megabytes)? ¿Y cuántos KB (kilobytes)?

b) ¿Cuántos bytes puede almacenar mi disco duro de 1 TB (terabytes)? ¿Y archivos de 20 MB?

c) Quiero hacer una copia de seguridad de mi disco duro del que tengo ocupado 310 GB. ¿Puedo hacerlo en un disco de 0,5 TB?

23. Naciones Unidas estima que durante la década de 2001-2010 se produjo en el mundo una pérdida anual de $1{,}3 \cdot 10^7$ hectáreas de bosques.

Por otra parte, en cierta página web, leo que la pérdida anual ha sido superior a la superficie de diez millones de campos de fútbol. Comprueba si es cierta esta información (dimensiones máximas de un campo de fútbol: 120 m × 75 m).

24. Cuatro mineros abren una galería de 15 metros de longitud en 9 días. ¿Cuántos metros de galería abrirán 6 mineros en 15 días?

25. En una cadena de montaje, 17 operarios, trabajando 8 horas al día, ensamblan 850 aparatos de radio a la semana. ¿Cuántas horas diarias deben trabajar la próxima semana, para atender un pedido de 1 000 aparatos, teniendo en cuenta que se añadirá un refuerzo de tres trabajadores?

26. En un campo de 200 m de largo y 80 m de ancho, se ha recogido una cosecha de 4 800 kg de trigo. ¿Qué cosecha podemos esperar de otro campo que mide 190 m de largo y 90 m de ancho?

27. Un taller produce 480 tapacubos al día trabajando con cinco máquinas en dos turnos de 8 horas.

a) ¿Cuántos tapacubos producirá cada día, si se añade una máquina más y se aumenta a 10 el número de horas de cada turno?

b) ¿Cuántas horas debería durar cada turno para cubrir un cupo de 540 piezas al día con seis máquinas en funcionamiento?

28. En un comedor de empresa, con 113 comensales, se han consumido 840 yogures en 20 días laborables. ¿Será suficiente una reserva de 200 yogures para los próximos cinco días en los que se prevé una afluencia media de 120 comensales/día?

57

Soluciones de “Ejercicios y problemas”

1 a) 1,8 millones de euros b) 480 000 votos

c) 150 000 000 € d) 1,1 mm

2 a) Con 4,7. b) Con 1,5. c) Con 2,45. d) Con 3,16.

3 a) E. A. < 50 €. E. R. < 0,004

b) E. A. < 0,05 min. E. R. < 0,001

c) E. A. < 5 000 personas. E. R. < 0,02

d) E. A. < 0,00005 mm. E. R. < 0,08

4 a) E. A. < 0,005 m b) E. A. < 0,5 € c) E. A. < 0,5 s d) E. A. < 500 000

Es más precisa la medida b).

5 a) 68 b) 10 c) 3 000 d) 300 e) 150 f) 1,44

6 a) 26 % b) 84 % c) 0,5 % d) 170 %

7 a) 350 b) 190 c) 16 250 d) 38

8 a) 1,12 b) 0,63 c) 2,5 d) 0,98 e) 1,43 f) 1,065

9 a) $I_V = 1{,}28$; $C_F = 416$ b) $I_V = 0{,}2$; $C_F = 17{,}4$

c) $I_V = 12{,}2$; $C_F = 935$ d) $I_V = 0{,}98$; $C_F = 122{,}5$

e) $I_V = 1{,}82$; $C_F = 81{,}9$ f) $I_V = 0{,}704$; $C_F = 246{,}4$

10 a) +54 % b) –82 % c) –95 % d) +120 % e) +9 % f) +250 %

11 a) 16 % b) 5 % c) 36 % d) 30 %

12

C. FINAL	V. PORCENTUAL	C.FINAL
1 003	–18 %	125
2 340	+85 %	4 173,39
157,5		

13

FRACCIÓN	13/20	77/200	11/60	56/225	41/300
PORCENTAJE	65 %	38,5 %	$18,\widehat{3}$ %	$24,\widehat{8}$ %	$13,\widehat{6}$ %

14 Han de suprimir 50 farolas.

15 Serán necesarios 7 carpinteros.

16 La factura por 17 cajas ascenderá a 455,60 €. Por 938 € recibirá 35 cajas.

17 Se reducirá en 1 semana.

18 Recorre 24 km al día.

19 El consumo anual *per cápita* es 183 kg.

20 Tardará 2 horas y 33 minutos.

21 a) $9{,}47 \cdot 10^{15}$ m b) 5,48 h c) $4{,}07 \cdot 10^{13}$ km

22 a) 21,3 MB = $21{,}3 \cdot 10^6$ B = $21{,}3 \cdot 10^3$ KB

b) 1 TB = 10^{12} B. En 1 TB se pueden almacenar $5 \cdot 10^4$ archivos de 20 MB.

c) Sí.

23 La información es cierta.

24 Abrirán 37,5 m de galería.

25 Trabajarán 8 horas al día.

26 Podemos esperar una cosecha de 5 130 kg.

27 a) Producirá 720 tapacubos.

b) Cada turno debería durar 7,5 horas.

28 No serán suficientes, faltarán unos 23 yogures.

UNIDAD 3

Ejercicios y problemas

29. La combustión de un litro de gasolina produce 2370 g de CO_2. El consumo medio de un coche es de 6 litros por cada 100 km. En España hay aproximadamente 480 coches por cada 1 000 habitantes, que hacen una media de 15 000 km al año.

a) Calcula la cantidad de CO_2 que emite un coche por kilómetro recorrido.

b) ¿Cuántas toneladas de CO_2 se emiten en España en un año? (Población de España: 46,5 millones).

c) Cierta organización ecologista propone una batería de medidas para reducir las emisiones a 120 g/km. ¿Cuántas toneladas de CO_2 se dejarían de emitir en España si fuera efectiva esa propuesta?

Problemas clásicos

30. Tres socios han obtenido en su negocio un beneficio de 12 900 €.

¿Qué parte corresponde a cada uno si el primero aportó inicialmente 18 000 €; el segundo, 15 000 €, y el tercero, 10 000 €?

31. Dos repartidores de pizzas cobran 340 € por un trabajo realizado conjuntamente. Si el primero trabajó tres jornadas y media y el segundo cinco jornadas, ¿cuánto cobrará cada uno?

32. Se han abonado 15 000 € por la limpieza de un bosque realizada por dos cuadrillas de trabajadores. La primera cuadrilla está formada por 12 operarios y ha trabajado durante 8 días. La segunda cuadrilla tiene 15 personas y ha trabajado 10 días. ¿Cuánto corresponde a cada brigada? ¿Y a cada trabajador? (Da la solución aproximando a las unidades y di de qué orden es el error absoluto cometido).

33. Tres hermanos se reparten una herencia de 2 820 € de forma que por cada cinco euros que reciba el mayor, el mediano recibirá cuatro, y el pequeño, tres. ¿Qué cantidad se lleva cada uno?

34. Se han vertido 3 litros de agua, a 20 °C, en una olla que contenía 5 litros de agua a 60 °C. ¿A qué temperatura está ahora el agua de la olla? ¿Cuál sería la temperatura si añadimos además 2 litros a 50 °C?

35. Añadimos 0,5 *l* de alcohol de 50° a 0,75 *l* de alcohol de 80°. ¿Qué concentración tendrá la mezcla?

36. En una bodega se mezclan 7 *hl* de vino de alta calidad que cuesta a 450 € el hectólitro, con 11 *hl* de vino de calidad inferior a 280 €/*hl*. ¿A cómo sale el litro del vino resultante? (Aproxima hasta las décimas y di el orden del error cometido).

37. Se ha fundido un lingote de oro de 3 kg y 80 % de pureza, junto con otro lingote de 1 kg y 64 % de pureza. ¿Cuál es la pureza del lingote resultante?

38. Dos ciudades, A y B, distan 350 km. De A sale hacia B un coche a 110 km/h. Simultáneamente sale de B hacia A un camión a 90 km/h. Calcula el tiempo que tardarán en encontrarse y la distancia que recorre cada uno.

39. Un autobús sale de A a 105 km/h. Media hora después sale de B un coche a 120 km/h. La distancia entre A y B es de 300 km. Calcula la distancia que recorre cada uno hasta que se cruzan.

40. Un camión sale de cierta población a una velocidad de 90 km/h. Cinco minutos más tarde sale en su persecución una moto a 120 km/h. ¿Cuánto tiempo tarda la moto en alcanzar al camión?

41. Hemos mezclado 30 kg de café de 9 €/kg con 50 kg de otro café de calidad inferior. La mezcla resultante se vende a 7,50 €/kg. ¿Cuál es el precio por kilogramo del café de calidad inferior?

Porcentajes

42. Un comerciante del mercadillo abre su puesto, por la mañana, con 350 pares de calcetines y 240 pañuelos. Al cerrar, al mediodía, le quedan 210 pares de calcetines y 174 pañuelos. ¿Qué tanto por ciento ha vendido de cada mercancía?

43. La masa de un átomo de carbono es el 5 % de la de un átomo de uranio. Si la masa atómica del uranio es $4 \cdot 10^{-25}$ g, ¿cuál es la del carbono?

58

44. La información nutricional de una marca de leche dice que en un litro hay 160 mg de calcio, que es el 20 % de la cantidad diaria recomendada. Calcula la cantidad diaria de calcio que debe tomar una persona.

45. El 67 % del aceite que vende un supermercado es de oliva; el 21 %, de girasol, y el resto, de soja. Si se han vendido 132 litros de soja, ¿qué cantidad se ha vendido de las otras dos clases?

46. El litro de gasolina ha subido un 2,5 % al inicio del periodo estival, llegando a 1,56 € el litro. ¿Cuál era el precio de la gasolina antes de la subida?

47. Una empresa facturó el año pasado 2,8 millones de euros, y este año, 3,5 millones. ¿En qué tanto por ciento ha aumentado la facturación?

48. Un edificio, presupuestado inicialmente en un millón y medio de euros, costó finalmente dos millones cien mil euros. ¿En qué tanto por ciento el coste real superó al presupuestado?

49. Pagué 187,20 € por un billete de avión de 240 €. ¿Qué porcentaje de descuento me hicieron?

50. El kilo de tomates subió un 20 % y después bajó un 25 %. Si costaba 1,80 €, ¿cuál es el precio actual?

51. Un pantano tiene a finales de agosto un 20 % menos de agua que en julio. Y a finales de julio, un 15 % menos que en junio. ¿Qué tanto por ciento ha descendido en los dos meses?

52. El número de espectadores de un concurso de televisión que comenzó en octubre aumentó un 23 % en noviembre y disminuyó un 18 % en diciembre. Si al terminar diciembre tuvo 2 202 000 espectadores, ¿cuántos tenía en el mes de octubre?

53. Si un comerciante aumenta el precio de sus productos un 25 % y, después, los rebaja un 25 %, ¿cuál ha sido la variación porcentual que experimentan los artículos respecto del precio inicial? ¿Y si hiciera lo mismo aplicando el 50 %?

54. Los ingresos mensuales de un negocio han aumentado un 20 % y un 30 % en los dos meses anteriores. En el mes actual han disminuido un 25 % y han sido 13 850 €. ¿Cuál ha sido la variación porcentual? Calcula los ingresos del negocio hace tres meses.

55. Para que el área de un triángulo fuera 100 m^2, su altura actual tendría que disminuir un 18 %. Si la base mide 16,8 m, ¿cuánto mide la altura?

56. Miguel quiere aplicar un herbicida a su finca. Sabe que debe añadir agua al producto, de forma que tenga una concentración del 5 % como mínimo para que sea eficaz. Mezcla 1/2 litro de herbicida con 5 litros de agua y comienza a aplicarlo.

Cuando ha gastado 3 litros de la mezcla, se da cuenta de que no va a tener bastante para toda la finca y le añade 2 litros de agua. ¿Tendrá la concentración adecuada en todo momento?

Interés compuesto

57. ¿En cuánto se convertirá un capital de 5 000 € colocado al 4,2 % anual durante tres años?

58. ¿En cuánto se transformará un capital de 28 500 € colocado al 0,4 % mensual durante 15 meses?

59. ¿En cuánto se convertirá un capital de 80 000 €, colocado al 3,6 % anual, durante dos años y medio con periodo de capitalización mensual?

60. Calcula en cuánto se transformarán 60 000 € colocados a interés compuesto en los siguientes casos si el periodo de capitalización es mensual:

a) Al 3 % anual durante 2 años.

b) Al 5,4 % anual durante 9 meses.

c) Al 0,36 % mensual durante un año y medio.

d) Al 4,8 % anual durante 18 meses.

61. Se depositan en un banco 28 000 € al 6 % anual y el banco nos descuenta un 20 % de los beneficios como retención fiscal.

a) ¿Cuál será el porcentaje neto de rendimiento de ese capital?

b) Si los intereses se acumulan trimestralmente al capital, ¿cuál será el beneficio al cabo de 2 años?

59

Soluciones de "Ejercicios y problemas"

29 a) 142,2 g b) 47 608 560 toneladas
c) 7 432 560 toneladas

30 Les corresponden 5 400 €, 4 500 € y 3 000 €, respectivamente.

31 Al primero, 140 €, y al segundo, 200 €.

32 A la primera brigada le corresponden 6 667 €, y a la segunda, 8 333 €.

Cada trabajador de la 1.ª brigada recibe 556 €, y cada trabajador de la 2.ª, 556 €.

En todos los casos el error absoluto cometido es menor que 50 céntimos.

33 El mayor se lleva 1 175 €; el mediano, 940 €, y el pequeño, 705 €.

34 Los 8 litros de la primera mezcla estarán a 45 °C. Si añadimos 2 litros a 50 °C, la nueva mezcla estará a 46 °C.

35 La mezcla tendrá 68°.

36 El vino sale a 3,46 euros el litro (con un error menor que 0,005 €).

37 El lingote tiene una pureza del 76 %.

38 Tardan en encontrarse 1 h 45 min. El coche recorre 192,5 km, y el camión, 157,5 km.

39 El autobús recorre 168 km, y el coche 132 km.

40 La moto tarda 15 minutos en alcanzar al camión.

41 El precio es de 6,60 €/kg.

42 Ha vendido el 40 % de los calcetines y el 27,5 % de los pañuelos.

43 Masa de un átomo de carbono: $2 \cdot 10^{-26}$ g

44 Una persona debe tomar 800 mg diarios.

45 De aceite de oliva se han vendido 737 litros, y de aceite de girasol, 231 litros.

46 Antes de la subida, el litro de gasolina costaba 1,52 €.

47 Ha aumentado un 25 %.

48 Lo superó en un 40 %.

49 Me hicieron un descuento del 22 %.

50 Ahora cuesta 1,62 €.

51 Ha descendido un 32 %.

52 Tenía 2 183 224 espectadores en octubre.

53 • Disminución del 6,25 %. • Disminución del 25 %.

54 Supone un aumento del 17 %. Ingresos de hace tres meses: 11 837,60 €.

55 La altura mide 14,52 m.

56 Sí, empieza al 9 % y termina al 5 %.

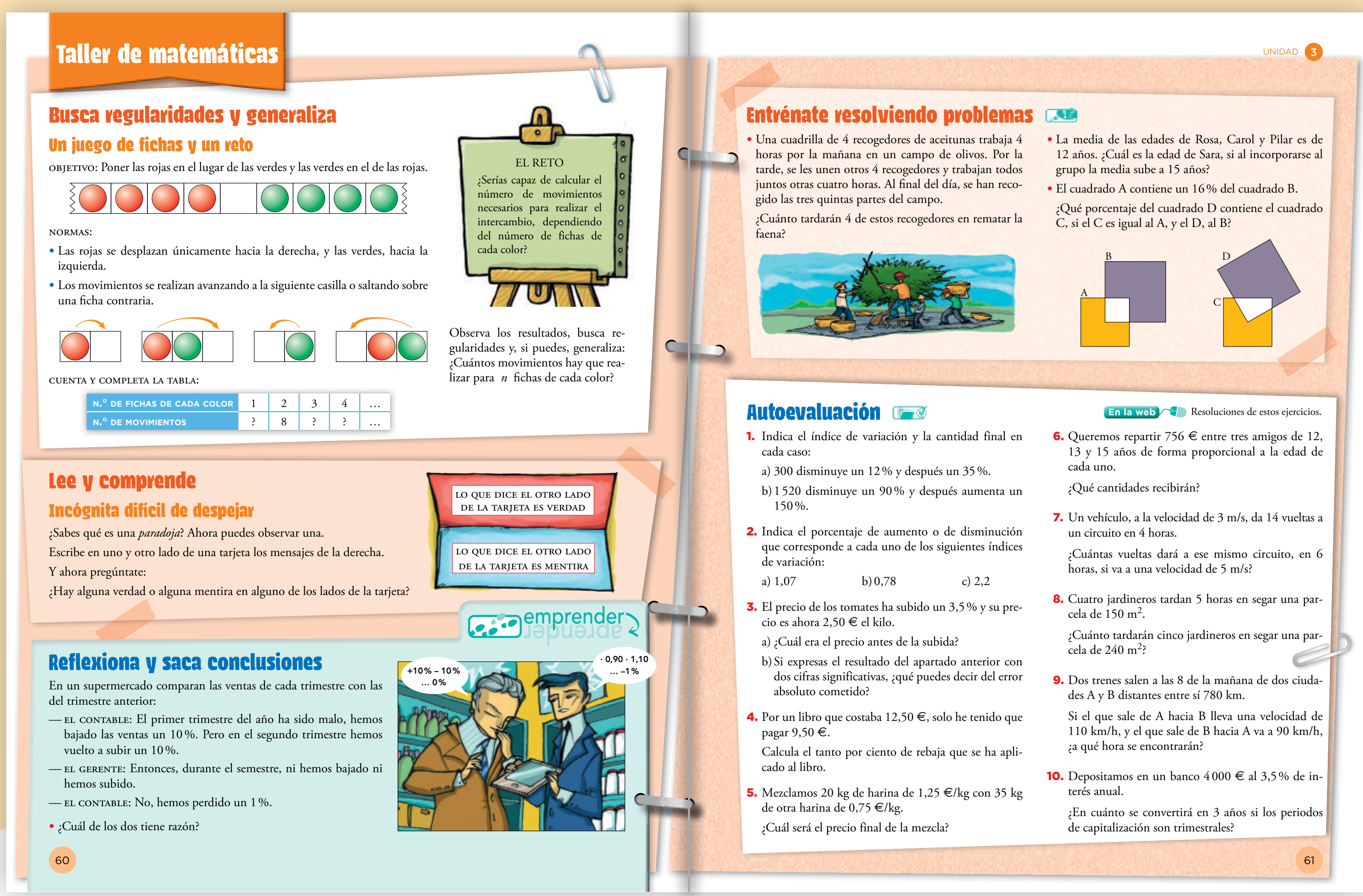
57 Se convertirá en 5 656, 83 €.

58 Se transformará en 30 258,72 €.

59 Se convertirá en 87 522,15 €.

60 a) 63 705,42 € b) 62 474,20 €
c) 64 009,29 € d) 64 470,06 €

61 a) 4,8 % b) 2 803,60 €



Taller de matemáticas

Busca regularidades y generaliza

Un juego de fichas y un reto

OBJETIVO: Poner las rojas en el lugar de las verdes y las verdes en el de las rojas.

NORMAS:

- Las rojas se desplazan únicamente hacia la derecha, y las verdes, hacia la izquierda.
- Los movimientos se realizan avanzando a la siguiente casilla o saltando sobre una ficha contraria.

CUENTA Y COMPLETA LA TABLA:

N.° DE FICHAS DE CADA COLOR	1	2	3	4	…
N.° DE MOVIMIENTOS	?	8	?	?	…

EL RETO

¿Serías capaz de calcular el número de movimientos necesarios para realizar el intercambio, dependiendo del número de fichas de cada color?

Observa los resultados, busca regularidades y, si puedes, generaliza: ¿Cuántos movimientos hay que realizar para n fichas de cada color?

Lee y comprende

Incógnita difícil de despejar

¿Sabes qué es una *paradoja*? Ahora puedes observar una.

Escribe en uno y otro lado de una tarjeta los mensajes de la derecha.

Y ahora pregúntate:

¿Hay alguna verdad o alguna mentira en alguno de los lados de la tarjeta?

LO QUE DICE EL OTRO LADO DE LA TARJETA ES VERDAD

LO QUE DICE EL OTRO LADO DE LA TARJETA ES MENTIRA

emprender aprender

Reflexiona y saca conclusiones

En un supermercado comparan las ventas de cada trimestre con las del trimestre anterior:

— EL CONTABLE: El primer trimestre del año ha sido malo, hemos bajado las ventas un 10 %. Pero en el segundo trimestre hemos vuelto a subir un 10 %.

— EL GERENTE: Entonces, durante el semestre, ni hemos bajado ni hemos subido.

— EL CONTABLE: No, hemos perdido un 1 %.

- ¿Cuál de los dos tiene razón?

60

UNIDAD 3

Entrénate resolviendo problemas

- Una cuadrilla de 4 recogedores de aceitunas trabaja 4 horas por la mañana en un campo de olivos. Por la tarde, se les unen otros 4 recogedores y trabajan todos juntos otras cuatro horas. Al final del día, se han recogido las tres quintas partes del campo.

  ¿Cuánto tardarán 4 de estos recogedores en rematar la faena?
- La media de las edades de Rosa, Carol y Pilar es de 12 años. ¿Cuál es la edad de Sara, si al incorporarse al grupo la media sube a 15 años?
- El cuadrado A contiene un 16 % del cuadrado B.

  ¿Qué porcentaje del cuadrado D contiene el cuadrado C, si el C es igual al A, y el D, al B?

Autoevaluación

En la web Resoluciones de estos ejercicios.

1. Indica el índice de variación y la cantidad final en cada caso:

   a) 300 disminuye un 12 % y después un 35 %.

   b) 1 520 disminuye un 90 % y después aumenta un 150 %.
2. Indica el porcentaje de aumento o de disminución que corresponde a cada uno de los siguientes índices de variación:

   a) 1,07 b) 0,78 c) 2,2
3. El precio de los tomates ha subido un 3,5 % y su precio es ahora 2,50 € el kilo.

   a) ¿Cuál era el precio antes de la subida?

   b) Si expresas el resultado del apartado anterior con dos cifras significativas, ¿qué puedes decir del error absoluto cometido?
4. Por un libro que costaba 12,50 €, solo he tenido que pagar 9,50 €.

   Calcula el tanto por ciento de rebaja que se ha aplicado al libro.
5. Mezclamos 20 kg de harina de 1,25 €/kg con 35 kg de otra harina de 0,75 €/kg.

   ¿Cuál será el precio final de la mezcla?
6. Queremos repartir 756 € entre tres amigos de 12, 13 y 15 años de forma proporcional a la edad de cada uno.

   ¿Qué cantidades recibirán?
7. Un vehículo, a la velocidad de 3 m/s, da 14 vueltas a un circuito en 4 horas.

   ¿Cuántas vueltas dará a ese mismo circuito, en 6 horas, si va a una velocidad de 5 m/s?
8. Cuatro jardineros tardan 5 horas en segar una parcela de 150 m^2.

   ¿Cuánto tardarán cinco jardineros en segar una parcela de 240 m^2?
9. Dos trenes salen a las 8 de la mañana de dos ciudades A y B distantes entre sí 780 km.

   Si el que sale de A hacia B lleva una velocidad de 110 km/h, y el que sale de B hacia A va a 90 km/h, ¿a qué hora se encontrarán?
10. Depositamos en un banco 4 000 € al 3,5 % de interés anual.

    ¿En cuánto se convertirá en 3 años si los periodos de capitalización son trimestrales?

61

Busca regularidades y generaliza

Un juego de fichas y un reto

- En los problemas de búsqueda de regularidades, los estudiantes deben comenzar resolviendo casos sencillos de los que recogerán la información en una tabla. Mediante ensayo-error, relacionarán el número de movimientos con el número de fichas hasta llegar a una expresión verbal o algebraica que generalice el resultado.

Soluciones

N.° DE FICHAS DE CADA COLOR	1	2	3	4	…	n
N.° DE MOVIMIENTOS	3	8	15	24	…	$n \cdot (n + 2)$

Lee y comprende

Incógnita difícil de despejar

- En el juego de las tarjetas, los alumnos y las alumnas podrán comprender qué es una paradoja y que su objetivo es causar asombro e invitar a la reflexión. Se puede plantear el juego comenzando por una cara u otra de la tarjeta para concluir que no hay solución.

Reflexiona y saca conclusiones

- El encadenamiento de subidas y bajadas porcentuales es una fuente frecuente de errores. Por ello, se deberá insistir al alumnado en que es fundamental fijarse bien en cuál es, en cada caso, la cantidad de referencia sobre la que se toma el porcentaje.

Soluciones

- Tiene razón el contable.

Entrénate resolviendo problemas

Soluciones

- Tardarán 8 horas.
- Sara tiene 24 años.
- El cuadrado C contiene el 16 % del cuadrado D.

Soluciones de la autoevaluación

1 a) $I_V = 0{,}572$; $C_F = 171{,}6$

b) $I_V = 0{,}25$; $C_F = 380$

2 a) Aumento del 7 %.

b) Disminución del 22 %.

c) Aumento del 120 %.

3 a) 2,42 €

b) Es menor que 5 céntimos.

4 Se le ha aplicado un 24 % de rebaja.

5 La mezcla sale a 0,93 €/kg.

6 Reciben 226,80 €, 245,70 € y 283,50 €, respectivamente.

7 Dará 35 vueltas.

8 Tardarán 6,4 h; es decir, 6 h 24 min.

9 Se encontrarán a las 11:54.

10 Se convertirá en 5451,59 €.